ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ОЛИЙ ТАЪЛИМ ТИЗИМИ ПЕДАГОГ ВА РАҲБАР КАДРЛАРИНИ ҚАЙТА ТАЙЁРЛАШ ВА УЛАРНИНГ МАЛАКАСИНИ ОШИРИШНИ ТАШКИЛ ЭТИШ БОШ ИЛМИЙ-МЕТОДИК МАРКАЗИ

ТОШКЕНТ АРХИТЕКТУРА ҚУРИЛИШ ИНСТИТУТИ ҲУЗУРИДАГИ ПЕДАГОГ КАДРЛАРНИ ҚАЙТА ТАЙЁРЛАШ ВА УЛАРНИНГ МАЛАКАСИНИ ОШИРИШ ТАРМОҚ МАРКАЗИ

“ТАСДИҚЛАЙМАН”

Тармоқ маркази директори
____________Д.Х.Мирбабаева

“_____”______________ 2015 йил

“ГЕОДЕЗИК ЎЛЧАШЛАРНИ МАТЕМАТИК ҚАЙТА ИШЛАШ”

МОДУЛИ БЎЙИЧА

ЎҚУВ–УСЛУБИЙ МАЖМУА

Тузувчи: **доц.Жўраев Д.О.**

ТОШКЕНТ-2015

Мундарижа:

ИШЧИ ДАСТУР

Кириш

Замонавий жамият ўзининг тез ва чуқур ўзгарувчан тавсифига эга бўлиб, бундай ўзгаришлар жамоатчилик тузилмалари, жумладан, мустақил давлатлар, шахс ва жамият ўртасидаги муносабатлар, демографик сиёсат, урбанизация жараёнларида кўзга яққол ташланмоқда. Таълим ҳам глобал умумҳамжамият тузилмасининг алоҳида таркибий қисми сифатида жамиятда бўлаётган барча ўзгаришларни ҳисобга олиши, ана шу асосда ўз тузилиши ва фаолият мазмунини ўзгартириши зарур. Бугунги кунда таълимнинг жамият ривожланиш суръатларидан ортда қолаётганлиги, таълим жараёнида қўлланилаётган технологияларнинг замонавий талабларга тўлиқ жавоб бермаслиги ҳақидаги масала дунё ҳамжамияти томонидан тез-тез эътироф этилмоқда. Чунки таълим ҳам ижтимоийлаштириш вазифасини бажарувчи сифатида жамиятдаги ўзгаришлар ортидан бориши ҳамда унинг ривожланишига ўз таъсирини ўтказиши керак. Бироқ жамият ривожланиши ва таълим тизими ўртасидаги муносабат мураккаб кўринишга эга бўлиб, юқори даражадаги жўшқинлик билан фарқланади. Таълим барча фаол ва суст ўзгаришлар таъсирини қабул қилавермайди, жамиятда бўлаётган воқеаларга эса ўз таъсирини ўтказади. Ана шу нуқтаи назардан таълимдаги ўзгаришлар фақатгина натижа сифатида эмас, балки жамиятнинг келгусидаги ўзига хос ривожланиш шартидир.

Маълумки, фан ва техника жадал суръатлар билан ривожланаётган бугунги кунда кўплаб илмий билимлар, тушунча ва тасаввурлар ҳажми кескин ортиб бормоқда. Бу, бир томондан, фан-техниканинг янги соҳа ва бўлимларининг тараққий этиши туфайли унинг дифференциаллашувини таъминлаётган бўлса, иккинчи томондан, фанлар орасида интеграция жараёнини вужудга келтирмоқда.

Маълумки, бугун барча давлатлар таълимга имкон қадар кўп янгилик киритишга интилмоқда. Бугунги янгиликлар уларга уюшган, режали, оммавий ёндашувни талаб этади. Янгиликлар келажак учун узоқ муддатли инвестициялардир. Новаторликка қизиқиш уйғотиш, янгилик яратишга интилувчан шахсни тарбиялаш учун таълимнинг ўзи янгиликларга бой бўлиши, унда ижодкорлик руҳи ва муҳити ҳукм суриши лозим. Ана шундай долзарбликдан келиб чиққан ҳолда, бугунги кунда педагогиканинг мустақил соҳаси – инновацион педагогика жадаллик билан ривожланиб бормоқда.

Инновацион таълимнинг асосий мақсади таълим олувчиларда келажакккa масъулият ҳиссини ва ўз-ўзига ишончни шакллантиришдир. Ж.Боткин бошчилигидаги олимлар гуруҳи “Рим клуби” маърузасида инновацион таълимни анъанавий, яъни “норматив” таълимга муқобил сифатида билимларни эгаллашни асосий тури сифатида тавсифлади. Нормативли таълим “такрорланувчи вазиятларда фаолият хулқ-атвор қоидаларини ўзлаштиришга йўналтирилган” бўлса, инновацион таълим янги вазиятларда биргаликда ҳаракатланиш қобилиятини ривожлантиришни кўзда тутади.

Модулнинг мақсади ва вазифалари

“Геодезик ўлчашларни математик қайта ишлаш” модулининг мақсади: педагог кадрларни қайта тайёрлаш ва малака ошириш курс тингловчиларини геодезик ўлчаш натижаларини математик қайта ишлаш ҳақидаги билимларини такомиллаштириш, геодезик тўрларни тенглаштиришда замонавий математик алгоритмларни қўлланилиши, ер усти ва спутник навигацион ўлчашларни биргаликда қайта ҳисоблаш усуллари бўйича мутахассислик профилига мос билим, кўникма ва малакани шакллантиришдир.

“Геодезик ўлчашларни математик қайта ишлаш” модулининг вазифалари:

- хатоликларнинг келиб чиқиши ва тақсимланиш қонуниятларини ўрганади;
- ўлчаш натижалари хатосининг йўл қўйиш чекидан ошган ва ошмаганлигини аниқлаш;
- кўп марта ўлчаш натижаларидан аниқланаётган ўлчамнинг ҳақиқий қийматини топиш;
- ўлчаш натижаларининг кутиладиган ва олинган аниқлик баҳосини ҳисоблаш;
- ўлчашларни математик қайта ишлаш натижасида аниқланаётган қийматнинг ҳақиқий миқдор аниқлигини тавсифлаш;

Модул бўйича тингловчиларнинг билими, кўникмаси, малакаси ва компетенцияларига қўйиладиган талаблар

“Геодезик ўлчашларни математик қайта ишлаш” курсини ўзлаштириш жараёнида амалга ошириладиган масалалар доирасида**:**

Тингловчи:

–эҳтимоллар назариясининг асосий тушунчалари ва таърифи;

–эҳтимолликнинг нормал тақсимот қонуни;

–тасодифий, узлуксиз ва дескрет миқдорлар;

–геодезик ўлчашлар, ўлчаш хатоликлари ва классификацияси;

–математик статистиканинг асосий тушунчалари ***ҳақида билимга эга бўлиши керак;***

Тингловчи:

–тенг аниқликдаги ва тенг аниқликка эга бўлмаган ўлчашларни математик қайта ишлашни;

–бир нечта ўлчаш миқдорларини биргаликда тенглаштириш масаласининг моҳиятини;

–нормал тақсимот қонунига бўйсунадиган тасодифий миқдорларнинг хоссаларини;

–геодезик ўлчашларни параметрик ва коррелат усулида тенглаштиришни **кўникмаларини эгаллаши;**

Тингловчи:

–эҳтимоллар назариясининг асосий тушунчалари ва таърифи;

–эҳтимолликнинг нормал тақсимот қонуни;

–тасодифий, узлуксиз ва дескрет миқдорлар;

–геодезик ўлчашлар, ўлчаш хатоликлари ва классификацияси;

–математик статистиканинг асосий тушунчалари **малакаларини эгаллаши;**

Тингловчи:

–тенг аниқликдаги ва тенг аниқликка эга бўлмаган ўлчашларни математик қайта ишлашни;

–бир нечта ўлчаш миқдорларини биргаликда тенглаштириш масаласининг моҳиятини;

–нормал тақсимот қонунига бўйсунадиган тасодифий миқдорларнинг хоссаларини;

–геодезик ўлчашларни параметрик ва коррелат усулида тенглаштириш **компетенцияларни эгаллаши лозим.**

Модулни ташкил этиш ва ўтказиш бўйича тавсиялар

“Геодезик ўлчашларни математик қайта ишлаш” модулини ўқитиш жараёнида қуйидаги инновацион таълим шакллари ва ахборот-коммуникация технологиялари қўлланилиши назарда тутилган:

- замонавий ахборот технологиялари ёрдамида интерфаол маърузаларни ташкил этиш;

виртуал амалий машғулотлар жараёнида кейс, лойиҳа ва ассисмент технологияларини қўллаш назарда тутилади.

Модулнинг ўқув режадаги бошқа модуллар билан боғлиқлиги ва узвийлиги

Модул мазмуни ўқув режадаги “Замонавий геодезик асбоблар”, “Геодезик ишлаб чиқаришда компьютер графикаси” ўқув модуллари билан ўзаро боғлиқ ҳамда услубий жиҳатдан узвийдир.

Модулнинг олий таълимдаги ўрни

Модулни ўзлаштириш орқали тингловчилар геодезик ўлчаш натижаларни замонавий компьютер орқали математик қайта ишлаш усулларини самарали қўлланилиши кўникмаларига эга бўладилар.

Модул бўйича соатлар тақсимоти:

№	Модул мавзулари	Тингловчининг ўқув юкламаси, соат					
		Ҳаммаси	Аудитория ўқув юкламаси				Мустақил таълим
			жами	жумладан			
				Назарий	Амалий машғулот	Кўчма машғулот	
1.	Ўлчаш хатолиги. Гаусс нормал тарқалиш қонуни	2	2	2			
2.	Ўлчаш аниқларини характеристикаси (критерияси)	4	2		2		2
3.	Яхлитлаш хатолиги. Яхлитлашнинг ўрта квадратик хатолиги	2	2		2		
4.	Бирлик вазнинг хатолиги. Вазн ва вазнинг ўрта квадратик хатоси.	2	2		2		
5.	Параметрик тенглаштириш усули. Параметрик усули билан тенглаштиришнинг аниқлигини баҳолаш	4	4	2	2		
6.	Коррелат тенглаштириш усули	4	4	2	2		
7.	Гаусс алгоритми. Нормаль тенгламаларни ечишни текшириш	2	2	2			
8.	Яқинлаштириш усули билан тенглаштириш	2	2		2		
9.	Тенгламаларни ечишнинг гуруҳлаб ечиш усули	2	2		2		
10.	Тенглаштиришни матрица назариясидан фойдаланиб ечиш	4	4	2	2		
	Жами:	**28**	**26**	**10**	**16**		**2**

НАЗАРИЙ МАШҒУЛОТЛАР МАЗМУНИ

Ўлчаш хатолиги. Гаусс нормал тарқалиш қонуни.

Ўлчашлар хатоликлари. Ўлчашлар классификацияси. Ўлчашларнинг ҳақиқий хатолиги. Ўлчашлар хатоликларининг келиб чиқиши. Ўлчашлар хатоликларининг тақсимланиши ва унинг параметрлари (математик кутиш ва стандарт). Гausснинг тақсимланиш қонуни. Нормаллаштирилган хатоликларни тақсимлаш. Ўлчашлар хатоликлари классификацияси. Ўлчашлар тасодифий хатоликлари ҳоссалари.

Параметрик тенглаштириш усули. Параметрик усули билан тенглаштиришнинг аниқлигини баҳолаш

Тенглаштиришнинг параметрик усули. Параметрларни танлаш. Боғлиқлик тенгламалари. Хатоликлар тенгламаси (тузатмаларга нисбатан тенгламалар боғлиқлигининг чизиқли кўриниши). Ўлчамликни(размерность) танлаш. Нормал тенгламаларни қисқартирилган кўриниши. Номаълумларга нормал тузатмалар тенгламалари. Масала ечишнинг параметрик усул билан тенглаштириш умумий тартиби

Коррелат тенглаштириш усули

Тенглаштиришнинг коррелат усули. Шартли тенгламалар. Тузатмалар шартли тенгламалари. Лагранж функцияси. Тузатмаларнинг коррелат тенгламалари. Ўлчамликни(размерность) танлаш. Коррелат нормал тенгламалари. Тенглаштиришнинг коррелат усули билан масалани ечишнинг умумий тартиби.

Гаусс алгоритми. Нормаль тенгламаларни ечишни текшириш

Гаусс алгоритми. Гаусс алгоритмининг моҳияти ва унинг афзаллиги. Алгоритмни баён қилиш. Тенгламаларнинг эквивалент системаси. Системанинг аниқловчи(определители). Нормал тенгламалар системасининг шартланганлиги(обусловленность). Коэффициентлар жадвалида номаълумларнинг қулай жойлашиши. Параметрик ва коррелат тенлаштириш усулида нормал тенгламаларни ечиш схемаси. Нормал тенгламаларни ечишни текшириш. Колькуляторда ечиш схемаси. Персональ компьтерда нормал тенгламаларни ечиш системаси. Ҳисоблаш аниқлиги. Тенглаштиришни матрица назариясидан фойдаланиб ечиш.

АМАЛИЙ МАШҒУЛОТЛАР МАЗМУНИ

Ўлчаш аниқларини характеристикаси (критерияси)

Ўлчашлар аниқлиги характеристикалари(критериялари). Ўрта квадратик хатолик. Хатоликнинг ўрта арифметик қиймати. Ўртача хатолик ва хатоликлар тақсимланишининг стандарти билан боғлиқлиги. Ўрта квадратик хатоликнинг ва хатоликлар тақсимланишининг стандартини ҳисоблаш аниқлиги. Эҳтимолий ва ўртача хатолик. Аниқлик характеристикасининг ишончли оралиқлари. Хатоликлар қаторини тадқиқ қилиш

Яхлитлаш хатолиги. Яхлитлашнинг ўрта квадратик хатолиги

Яхлитлаш хатолиги. Яхлитлаш хатолигининг ҳоссалари. Яхлитлаш хатолигини тақсимлаш. Чекли яхлитлаш хатолиги. Яхлитлашнинг ўрта квадратик хатолиги.

Бирлик вазнинг хатолиги. Вазн ва вазнинг ўрта квадратик хатоси

Вазн бирлигидаги хатолик. Вазн ва ўртача вазннинг ўрта квадратик хатоси. Вазн системасини танлаш ва амалиётнинг ҳар хир жараёнида вазн бирлиги хатолигини ҳисоблаш. Вазн бирлиги хатолигини ҳисоблаш аниқлиги. Тенг аниқликка эга бўлмаган ўлчашларни саралаш(отбраковка). Тенг аниқликка эга бўлмаган битта миқдорни математик қайта ишлаш тартиби.

Параметрик тенглаштириш усули. Параметрик усули билан тенглаштиришнинг аниқлигини баҳолаш

Тенглаштиришнинг параметрик усули. Параметрларни танлаш. Боғлиқлик тенгламалари. Хатоликлар тенгламаси (тузатмаларга нисбатан тенгламалар боғлиқлигининг чизиқли кўриниши). Ўлчамликни(размерность) танлаш. Нормал тенгламаларни қисқартирилган кўриниши. Номаълумларга нормал тузатмалар тенгламалари. Масала ечишнинг параметрик усул билан тенглаштириш умумий тартиби

Коррелат тенглаштириш усули

Тенглаштиришнинг коррелат усули. Шартли тенгламалар. Тузатмалар шартли тенгламалари. Лагранж функцияси. Тузатмаларнинг коррелат тенгламалари. Ўлчамликни(размерность) танлаш. Коррелат нормал тенгламалари. Тенглаштиришнинг коррелат усули билан масалани ечишнинг умумий тартиби.

Яқинлаштириш усули билан тенглаштириш

Яқинлаштириш усули билан тенгламаларни ечиш. Алгоритмни баён қилиш. Яқинлаштириш усули билан теглаштиришда номаълумларнинг қулай жойлашиши. Яқиинлаштириш усулида натижаларнинг бир хиллик шарти. Ҳисоблаш схемаси. Ҳисоблаш аниқлиги. Яқинлаштириш усулининг қулайлиги ва камчилиги.

Тенгламаларни ечишнинг гуруҳлаб ечиш усули

Шартли тенгламаларни ечишнинг гуруҳли усуллари. Гаусснинг икки гуруҳли ечиш усули ва унинг кўпсонли гуруҳларга умумлашиши. Крьюгернинг икки гуруҳли ечиш усули ва бир нечта гуруҳга умумлашиши. Крьюгер усулидаги аниқликни баҳолаш.

МУСТАҚИЛ ТАЪЛИМ МАВЗУЛАРИ

Эҳтимолликнинг нормаль тарқалиш қонуни. Тасофидий қийматлар Нормаль тарқалиш қонунига бўйсинувчи тасодифий қийматларнинг хоссалари Математик статистиканинг асосий тушунчаси. Саралаш усули Ўлчаш хатолиги. Гаусс нормал тарқалиш қонуни Ўлчаш аниқликларини характеристикаси (критерияси) Гаусс алгоритми.

Адабиётлар: Голубев В.В. Теория математической обработки геодезических измерений. Книга 1 Основы теории ошибок. М., МИИГАиК 2005, 70 с. Маркузе Ю.И. Теория математической обработки геодезических измерений. Книга 2: Основы метода наименьших квадратов и уравнительных вычислений . М., МИИГАиК 2005, 288 с.

ФОЙДАЛАНИЛГАН АДАБИЁТЛАР РЎЙХАТИ

1. Jo’rayev D.O. Geodezik o’lchashlarni matematik ishlash nazariyasi. Darslik. 1-qism. O’lchashlar xatoliklari nazariyasi. Toshkent, 2014. 148 b.

2. Jo’rayev D.O. Geodezik o’lchashlarni matematik ishlash nazariyasi. Darslik. 2-qism. Eng kichik kvadratlar usuli. Toshkent, 2014. 160 b.

3. Голубев В.В. Теория математической обработки геодезических измерений. Книга 1 Основы теории ошибок. М., МИИГАиК 2005, 70 с.

4. Маркузе Ю.И. Теория математической обработки геодезических измерений. Книга 2: Основы метода наименьших квадратов и уравнительных вычислений . М., МИИГАиК 2005, 288 с.

5. Большаков В.Д., Гайдаев П.А. Теория математической обработки геодезических измерений. М., 1977.

6. Большаков В.Д. Теория ошибок наблюдений с основами теории вероятностей. М., 1965.

7. Большаков В.Д. Теория ошибок наблюдений. М., 1983.

8. Большаков В.Д., Маркузе Ю.И. Практикум по ТМОГИ. М..1984

Интернет маълумотлари

1. www.miigaik.ru.
2. www.trimble.com.
3. www.global.topcon.com.
4. www.geo@navgeocom.ru
5. www.ziyonet.uz.

МАЪРУЗАЛАР МАТНИ

1 МАЪРУЗА ЎЛЧАШЛАР ХАТОЛИГИ. УЛАРНИНГ ХОССАЛАРИ

Режа:

1. Хатоликлар назарияси вазифаси.
2. Ўлчашлар хатоликлари классификацияси.
3. Тасодифий хатоликлар.

Таянч иборалар: Қўпол, систематик ва тасодифий хатоликлар. Ҳақиқий хатоликлар. Тақсимланиш. Зичлик. Гаусс эгрилиги.

1. ХАТОЛИКЛАР НАЗАРИЯСИ ВАЗИФАСИ

Эҳтимоллар назарияси асосидаги хатоликлар назарияси математик статистика усулларидан фойдаланган ҳолда қуйидаги вазифаларни ечади:

1.Хатоликларнинг келиб чикиши ва тақсимланиш қонуниятларини урганади.

2.Ўлчаш натижалари хатосининг йўл қуйиш чекидан ошган ва ошмаганлигини аниқлаш

3.Кўп марта ўлчаш натижаларидан аниқланаётган ўлчамнинг ҳақиқий қийматини топиш

4.Ўлчаш натижаларининг кутиладиган ва олинган аниқлик баҳосини ҳисоблаш

5.Ўлчашларни математик қайта ишлаш натижасида аниқланаётган қийматнинг ҳақиқий миқдор аниқлигини тавсифлаш.

ЎЛЧАШЛАР ХАТОЛИКЛАРИ КЛАССИФИКАЦИЯСИ

Ўлчашлар хатолиги қўпол, систематик ва тасодифий хатоликларга бўлинади. Ўлчаш жараёнида кузатувчининг ишда паришонхотирлиги ва совукконлиги, асбобнинг носозлиги, ташки мухитнинг тез ёмонлашиши (қаттиқ шамол, хароратнинг ўзгариши) туфайли келиб чиқадиган хатоликлар қўпол хатоликлардир. қўпол хатоликларни ўлчаш натижасидан топиб уни йукотиш керак.

Систематик хатоликлар ўлчашларда хатоликларни туғдирадиган баъзи функционал манбаидан (теодолит штрихи белгилаш, синус қонуниятиниг даврий ўзгариши) келиб чиқадиган хатоликдир. Систематик хатоликлар ишораси ва миқдори бўйича доимий ва бир томонлама таъсир қилиши мумкин.

Геодезик ўлчашлар амалиётида систематик хатоларни камайтиришнинг қуйидаги усуллари қўлланади:

1. Систематик хатоларнинг пайдо бўлиш қонуниятлари аниқланади, ундан кейин хатолик ўлчанган миқдорларга тузатма киритиш орқали камайтирилади (узунликни ўлчаш асбобларини этолонлаштириш орқали унинг узунлигига

тузатма киритиш).

2. Систематик хатоларнининг бир томонлама таъсир қилмаслиги учун махсус ўлчаш усуллари қўлланилади (масалан, ёнтомонлама рефракцияни камайтириш учун юқори аниқликдаги горизонтал йўналишни ўлчаш дастурини эрталаб ва кечкурунги вактларга тенг тақсимлаш).

3. Ўлчашларни математик қайта ишлашнинг аниқ усулидан фойдаланиш (масалан, тўғри теодолит йўли бурчаги ва координати алохида тенглаштириш ҳисоби тартиби, томон ва бурчак ўлчащдаги систематик хатоликнинг таъсирини камайтиради)

ТАСОДИФИЙ ХАТОЛИКЛАР. УЛАРНИНГ ЭҲТИМОЛИЙ ТАҚСИМЛАНИШ ҚОНУНИЯТИ

Тасодифий хатоликлар тасодифий миқдорларнинг энг очиқ мисоли бўлади. Унинг қонунияти фақат кўп тажриба орқали сезилади. Ўлчаш мобойнида систематик хатоликдан ҳолис бўлиш мумкин эмас, унинг таъсирини ўлчаш сифатини ошириш ёки ўлчаш натижаларини изчил математик қайта ишлаш туфайли камайтириш мумкин.

Тасодифий хатоликларнинг пайдо булиш сабалари кўп: ташқи муҳитнинг таъсири, асбобларнинг нотўғри тайёрланиши ва созланиши, кузатиш жараёнини ноаниқ бажарилиши ва ҳ. к.

Барча сабабларнинг умумий таъсиридан кўра хар-бир сабаб ўлчаш натижасига оз миқдорда таъсир қилади. Шунинг учун Ляпуновнинг марказий назариясига асосан тасодифий хатоликлар $\Delta_i = x_i - X$ (x_i – ўлчаш натижаси, X – ўлчанаётган миқдорнинг аниқ қиймати) нормал тақсимланиш қонуниятига бўйсинади.

Агар хатоликлар қатори мумкин бўлган хилма-хил шароитда олинган бўлса, унда $\mu(\Delta)=0$ деб ҳисоблаш мумкин. Бу систематик хатоликларнинг йўқлигини билдиради. Бунда M(x) ҳақиқий қиймат X билан тўғри келади. Энди ҳар қандай ўлчамлар кўпол хатоликлардан ҳоли деб қабул қиламиз систематик хатоликлар ўлчаш натижасидан олиб ташланган, яъни фақат тасодифий хатоликларни кўриб чиқамиз.

Унда тасодифий хатоликларнинг тақсимланиш зичлиги тенгламаси бундай кўринишда булади:

$$\boldsymbol{\varphi(\Delta) =} \frac{1}{m\sqrt{2\pi}} \mathbf{e}^{-\ -\frac{\Delta^2}{2m^2}} \qquad (1.1)$$

Агар нормаллашган хатоликка ўтадиган бўлсак $\mathbf{t =} \frac{\Delta}{m}$,

m –ўлчашлар натижасининг ўрта квадратик хатоси

(1.1) ифода қуйидаги кўринишга келади

$$\varphi(\Delta) = \frac{1}{m\sqrt{2}}.\mathbf{y} \qquad (1.2)$$

$$\text{бу ерда } y = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

функция аргументи $t = \frac{\Delta}{m}$ учун жадвал тузилган (1-илова)

ГАУСС ЭГРИЛИГИ ВА УНИНГ ХОССАЛАРИ

Аниқлик учун h –ни $\frac{1}{m\sqrt{2}} = h$ (1.3) деб белгилаймиз.

Унда (1.1) тенглама:

$$\varphi(\Delta) = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\, \mathbf{e}^{-h^2\Delta^2} \qquad (1.4)$$

кўринишни олади.

Бу ифода Гаусс эгрилиги ёки хатоликлар эгрилиги дейилади. Гаусс эгрилиги қуйидаги хоссаларга эга:

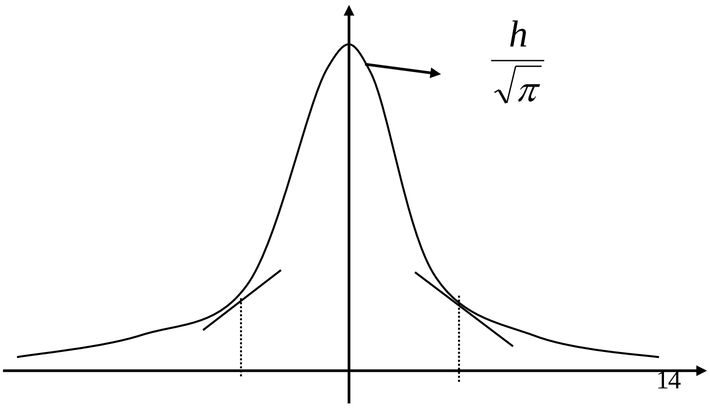
1. Функция $\varphi(\Delta)$ жуфт, яни $\varphi(\Delta) = \varphi(-\Delta)$ эгриликлари ордината ўқига нисбатан симметрикдир.

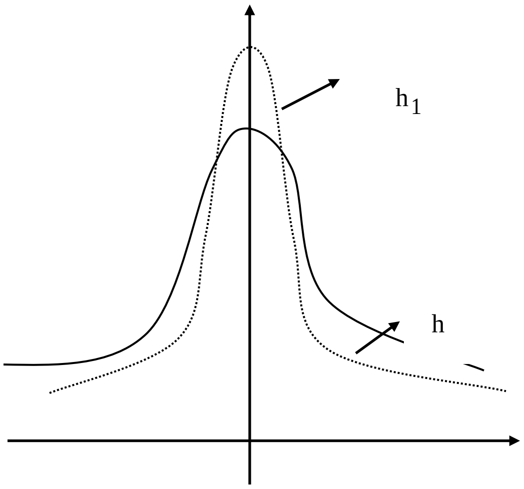
2. Гаусс эгрилиги абсцисса ўқи устида жойлашади.

3. Гаусс эгрилиги $\Delta = 0$ нуқтада юқорига (максимум) эга бўлади. Шу билан бирга эгрилик ординатаси $y_0 = \frac{h}{\sqrt{\pi}}$, яъни эгриликнинг чуққиси вазияти h – билан аниқланади. Агар $h_2 < h_1$, бўлса бунда h_1 - эгрилик чуққиси жуда юқори вазиятда, ордината ўқи бўйлаб жуда сиқилган бўлади (2-чизма), яъни хатоликнинг кам сочилганлиги, ўлчашнинг юқори аниқлиги. Шунинг учун h – аниқлик ўлчами дейилади.

4. Хатоликлар эгрилигиниг иккита букилганлик нуқтаси бўлади, биттаси ординатадан ўнг томонда ва бошқаси чап томонда. Шунда букилган нуқтанинг абсциссаси ± m бўлади.

5. Букилган нуқтадаги эгриликка урилма абсцисса ўқини ± 2m га тенг бўлган булакда кесади. (1-чизма)





-3m -2m -m 0 m 2m 3m

1-чизма 2- чизма

Назорат саволлари:

1.Хатоликларнинг турини айтиб беринг?

2. Қўпал хатоликлар нима ва у қандай йўқ қилинади?

3. Систематик хатоликлар нима ва у қандай йўқ қилинади?

4. Тасодифий хатоликлар нима ва у қандай йўқ қилинади?

Адабиётлар рўйҳати:

1. Jo’rayev D.O. Geodezik o’lchashlarni matematik ishlash nazariyasi. Darslik. 1-qism. O’lchashlar xatoliklari nazariyasi. Toshkent, 2014. 148 b.

2. Голубев В.В. Теория математической обработки геодезических измерений. Книга 1 Основы теории ошибок. М., МИИГАиК 2005, 70 с.

2 МАЪРУЗА ТЕНГЛАШТИРИШНИНГ ПАРАМЕТРИК УСУЛИ

Режа:

1. Параметрик тенгламалар боғлиқлиги.
2. Параметрик нормал тенгламаларни тузиш.
3. Параметрик усулда тенглаштиришнинг кетма-кетлиги.

Таянч иборалар:Параметрик тенгламалар. Керакли номаълумлар, ортиқча миқдорлар. Нормал тенгламалар. Тузатмалар тенгламаси.

1. Параметрик тенгламалар боғлиқлиги.

Керакли номаълумлар $T_1, \ . \ . \ ., \ \ T_k$ танланиб, ўлчанган миқдорлар $X_1, \ . \ . \ ., X_n$ орқали функция кўринишида ифодаланади

$$X_i = f_i(T_1, . \ . \ .,T_k) \qquad (i = 1,2, . \ . \ .,n). \qquad (2.14)$$

Бу кўринишдаги тенглама **параметрик тенгламалар** боғлиқлиги дейилади. Керакли номаълумларни танлаш – тенглаштириш усулида энг муҳим ўрин тутади. Чунки ечиладиган тенгламанинг мураккаблиги ва ҳисоблаш ҳажми унга боғлиқ. Ўлчанган миқдорлар тенлаштирилган қийматини $x'_i = x_i + \upsilon_i$ билан белгилаймиз. Бунда υ_i – ўлчанган x_i қийматларга тузатма. Керакли номаълумларнинг тенглаштирилган қийматини t билан белгилаймиз ва ёзамиз

$$x_i + 2_i = f_i(t_i, . \ . \ .,t_k) \qquad (2.15)$$

ёки

$$2_i = f_i(t_i, . \ . \ .,t_k) – x_i \qquad (i = 1,2, . \ . \ .,n) \qquad (2.16)$$

Энди шарт

$$[pv^2] = min$$

Қуйидаги кўринишга келтириш мумкин

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \, \{f_i(t_1, . \ . \ .,t_k) – x_i\}^2 = min. \qquad (2.17)$$

Ифоданинг (2.17) чап томонида фақат t номаълум. Шунинг учун уни қандайдир функция $F(t_i, . \ . \ .,t_k)$ кўринишида ёзиш мумкин. Яъни

$$F(t_i, . \ . \ .,t_k) = min. \qquad (2.18)$$

Шундай қилиб, шартли эктремум усулида тенглаштириш масаласини ечиш керакли Т номаълумларни абсолют экстремум масаласига киритиш йўли билан бажарилади. Бунинг учун $t_1, . . .,t_k$ номаълумлар олиниши керак бўлган аниқ тенгламалар системасини тузиш керак

$$\frac{\partial F}{\partial t_v} = 0 \qquad (\upsilon = 1, . . .,k), \qquad (2.19)$$

Лекин, агар (2.19) тенглама чизиқсиз кўринишда бўлса, унда унинг ечими амалиётда ечиб бўлмайдиган масаладир. Шунинг учун масала қуйидагича ечилади.

t_υ параметр учун у ёки бу йўл билан, берилган аниқликда $f_i(t_i, . . .,t_k) = x_i + v_i$ t_v^0 функцияни тўғри чизиқли кўринишга Тейлор қаторига ёйиш йўли билан тахминий қиймат топилади.

Бунда ёйишнинг иккинчи ва юқори даражали эътиборга олинмайди. Бу тенглаштириш масалани ечиладиган қилади. Бундан ташқари ечиш алгоритмига келтиради, яъни бир хил даражали хисоблашга келтиради.

Номаълумлар $t_i, . . .,t_k$ ни кўринишга келтирамиз

$$t_v = t_v^0 + \tau_v \quad \left(v = 1,\ldots,k\right) \qquad (2.20)$$

Бу ерда t_υ^0 тахминий қиймат, τ_υ — унга тузатмалар. Бу қийматларни t_υ га қўйиб, (2.16) тенгламани оламиз:

$$v_i = f_i(t_1^0 + \tau_1,\ldots,t_k^0 + \tau_k) - x_i \quad (i = 1,\ldots,n) \qquad (2.21)$$

Функция f_i ни Тейлор қаторига ёйиб топамиз,

$$v_i = f_i(t_1^0,\ldots,t_k^0) + \left(\frac{\partial x_i'}{\partial t_1}\right)_0 \tau_1 + \ldots + \left(\frac{\partial x_i'}{\partial t_k}\right)_0 \tau_k + R - x_i \qquad (2.22)$$

Бу ерда R — ҳамма ёйилган ҳадлар йиғиндиси. Тахминий қийматлар $t_1^0,\ldots,t_k^0$ шундай аниқликда топилиши керакки, R қийматни ҳисобга олмаса ҳам бўлсин.

Эслатамиз, t_v^0 нинг жуда аниқ қийматини топиш жуда мураккаб бўлади, масалан жуда катта триангуляция тўрини тенглаштиришда. (2.22) тенгламадаги R қийматни ҳисобга олмай ёзамиз,

$$v_i = \left(\frac{\partial x_i'}{\partial t_1}\right)_0 \tau_1 + \ldots + \left(\frac{\partial x_i'}{\partial t_k}\right)_0 \tau_k + \left\{f_i\left(t_1^0,\ldots,t_k^0\right) - x_i\right\} \qquad (2.23)$$

Белгилаймиз

$$\left.\begin{array}{c}\left(\dfrac{\partial x_i'}{\partial t_1}\right)_0 = a_{i1},\ \left(\dfrac{\partial x_i'}{\partial t_2}\right)_0 = a_{i2},...,\left(\dfrac{\partial x_i'}{\partial t_k}\right)_0 = a_{ik} \\ f_i\left(t_1^0,...,t_k^0\right) - x_i = x_i^0 - x_i = l_i\end{array}\right\} \qquad (2.24)$$

Энди тенгликлар системасини ёзиш мумкин

$$v_i = a_{i1}\tau_1 + a_{i2}\tau_2 + ... + a_{ik}\tau_k + l_i \quad (i = 1,...,n) \qquad (2.25)$$

Чизиқли (2.25) тенглама **параметрик тенгламалар тузатмаси**. Уни қисқача қилиб **тузатмалар тенгламаси** деб атайдилар.

Агар функция $f_i(t_i, . . .,t_k)$ чизиқли кўринишда бўлса, унда тахминий қиймат t_v^0 ни ҳисобламаса ҳам бўлади.

Тенглама (2.9) кўринишда бўлсин

$$x_i + v_i = f_i\,(\,t_1,...,\,t_k) = a_{i1}t_1 + a_{i2}t_2 + . . . + a_{ik}t_k + L_i$$

Унда:

$$l_i = L_i - x_i,$$

ва тузатмалар тенгламаси қуйидаги кўринишни олади

$$v_i = a_{i1}t_i + a_{i2}t_2 + . . . + a_{ik}t_k + l_i$$

$$(i = 1, . . ., n) \qquad (V.26)$$

Лекин ҳисоблаш амалиётида тахминий қиймат t_v^0 доимо ҳисобланади, бунда параметрик тенглама чизиқли кўринишда бўлади.

Унда:

$$l_i = a_{i_1}t_1^0 + a_{i_2}t_2^0 + ... + a_{i_k}t_k^0 + L_i - x_i$$

ва тузатмалар тенгламаси (V.25) кўринишга келади. Бу кейинги тенглаштириш ҳисобларини енгиллаштиради. Чунки t қийматнинг ўрнига τ кичик тузатмани ҳисоблаш осонроқ.

(V.25) тенгламадаги $[pv_2]$ = min шартни ҳисобга олиб ёзамиз:

$$[pv^2] = \sum_{i=1}^{n} p_i\,(a_{i1}\tau_1 + a_{i2}\tau_2 + ... + a_{ik}\tau_k + l_i)^2 = F(\tau_1,...,\tau_k) = \min \qquad (V.27)$$

Масала аниқ тенгламалар системаси билан ечилади

$$\frac{\partial F}{\partial \tau_v} = 0 \qquad (v = 1,...,k) \qquad (V.28)$$

Ҳосила оламиз ва уларни нулга тенглаймиз

$$\frac{\partial F}{\partial \tau_1} = 2p_1 v_1 \frac{\partial v_1}{\partial \tau_1} + ... + 2p_n v_n \frac{\partial v_n}{\partial \tau_1} = 0 \qquad (V.29)$$

(V.25) ифодани ҳисобга олиб ёзамиз

$$\frac{\partial v_i}{\partial \tau_1} = a_{i_1}$$

Энди, (V.29) ифодани 2 га қисқартириб ёзамиз

$$\frac{\partial F}{2\partial \tau_1} = \sum_{i=1}^{n} p_i v_i a_{i1} = [pa_1 v] = 0 \quad (V.30)$$

Ўша (V.25) тенгсизликка асосан топамиз

$$\frac{\partial v_i}{\partial \tau_2} = a_{i_2}, \quad \frac{\partial v_i}{\partial \tau_3} = a_{i_3}, ..., \quad \frac{\partial v_i}{\partial \tau_k} = a_{i_k},$$

ва худди шу асосда (V.30) ифода топилган эди

$$[pa_2v] = 0, \quad [pa_3v] = 0, . . ., [pa_kv] = 0.$$

Демак, тенгламаларни топдик

$$\left.\begin{aligned} &[pa_1 v] = 0 \\ &[pa_2 v] = 0 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ &[pa_k \mathrm{v}] = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (V.31)$$

(V.31) тенгликдаги v_i ўрнига (V.25) тузатмалар тенгламасининг ўнг томонини қўйиб, τ_1, . . .,τ_k номаълумли k чизиқли тенглама оламиз.

Тузатмалар параметрик тенгламалар системасини (V.25) яна бир марта ёзамиз

$$v_i = a_{i1}\tau_1 + a_{i2}\tau_2 + a_{i3}\tau_3 + ... + a_{ik}\tau_k + l_i \quad (i = 1,...,n)$$

Бу тенгламаларнинг ҳар бирининг икки томонини мос равишда $p_i a_{i1}$ га кўпайтириб ва йиғиштириш натижасида топамиз

$$p_1 a_{11} v_1 + p_2 a_{21} v_2 + p_3 a_{31} v_3 + \cdots + p_n a_{n1} v_n = [pa_1 v] = [pa_1 a_1]\tau_1 +$$
$$+[pa_1 a_2]\tau_2 + [pa_1 a_3]\tau_3 + \cdots + [pa_1 a_k]\tau_k + [pa_1 l].$$

(5.25) тенгликнинг $p_i a_{i2}$, га кўпайтириб топамиз

$$[pa_2 v] = [pa_1 a_2]\tau_1 + [pa_2 a_2]\tau_2 + [pa_2 a_3]\tau_3 + \cdots + [pa_2 a_k]\tau_k + [pa_2 l].$$

Худи шундай топамиз

$$[pa_3v]=[pa_1a_3]\tau_1+\cdots+[pa_3a_3]\tau_3+\cdots+[pa_3a_k]\tau_k+[pa_3l]$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$[pa_kv]=[pa_1a_k]\tau_1+\cdots+[pa_ka_k]\tau_k+[pa_kl]$$

Энди тенглама (V.31) кўринишга келади

$$\left.\begin{array}{l}
[pa_1a_1]\tau_1+[pa_1a_2]\tau_2+\cdots+[pa_1a_k]\tau_k+[pa_1l]=0\\
[pa_1a_2]\tau_1+[pa_2a_2]\tau_2+\cdots+[pa_2a_k]\tau_k+[pa_2l]=0\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
[pa_1a_k]\tau_1+[pa_2a_k]\tau_2+\cdots+[pa_ka_k]\tau_k+[pa_kl]=0
\end{array}\right\} \qquad (V.32)$$

Тенглама (V.32) **нормал тенгламалар дейилади.** Улар *k* номаълумли *k* чизиқли тенгламалар системасини ташкил қилади. Бу системани ечишдан керакли номаълумлар тахминий қийматига тузатма τ_υ ҳисобланади.

Чизиқли нормал тенгламалар системаси қуйидаги хусусиятлар билан фарқ қилади:

1. Диагонал бўйича жойлашган чапдан пастга ўнгга йўналган коэффициентлар ҳаммаси мусбат сонлардир, уларни **квадратли диагонал** деб аталади.

2. Қолганлари, квадратик диагоналдан ташқари коэффициентлари квадратик диагоналга нисбатан симметрик жойлашади.

Нормал тенгламалар системасининг икки хоссаси тенгламалар ечимини осонлаштиради.

Номаълумлар $\tau_1, . . .,\tau_k,$ ни топиб, кейинчалик (V.25) тузатмалар тенгламаси ёрдамида v_i тузатмалар, ўлчанган миқдорларнинг тенглаштирилган $x_i' = x_i + v_i$ қийматлари ва $t_v = t_v^0 + \tau_v$ номаълумлар топилади.

Тенглаштириш ҳисобларини текшириш учун (V.15) тенглик хизмат қилади ва қуйидагича бўлади

$$x_i + v_i = f_i(t_i, . . .,t_k)$$

$$(i = 1, . . .,k)$$

(V.31) тенгламадан фойдаланиб, мустақил кўпмарта ўлчанган алоҳида миқдорни X_i тенглаштириш иккита босқичда бажарилиши керак: бошланишида кўп марта ўлчанган ҳар бир миқдор учун ўрта вазнни олиш, кейинчалик ушбу қийматларнинг вазни ва математик алоқаларини ҳисобга олиб, биринчи босқичда олинган қийматларни тенглаштириш.

Дейлик, $v_i = v_i' + v_i''$ бунда v_i' - тенглаштиришнинг биринчи босқичидан кейин олинган ўлчанган натижаларга тузатма, v_i'' ҳамма ўлчанган миқдорларни биргаликда тенглаштиришдан олинган иккинчи тузатма. v_i'' тузатма ҳамма ўлчанган натижаларга бир хил миқдорда тақсимланади.

Ҳамма ўлчанган натижаларни биргаликда тенглаштириш (V.31) тенгламага олиб келади ва қуйидаги кўринишда келтириш мумкин

$$0 = [pa_v v] = [pa_v v'] + [pa_v v''] \quad (v = 1, \ldots, k)$$

Лекин

$$[pa_v v'] = a_{1v}[pv']_1 + \cdots + a_{nv}[pv']_n$$

бунда йиғинди $[pv']_i$ – кўп ўлчанган алоҳида X_i қиймат учун. Бу ўлчашлар учун ҳар бир X_i миқдор ва a_{i_v} коэффициент бир хил бўлади.

Хатоликлар назариясидан маълумки (IV.52 формалага қаранг), $[pv']_i = 0$ (i= 1, . . .,n) шунинг учун $[pa_\upsilon v'] = 0$ ва қуйидагича:

$$[pa_v v] = [pa_v v''] \qquad \text{(V.33)}$$

Йиғинди $[pa_\upsilon v'']$ кўриб чиқамиз.

Тузатмалар тенгламасида бир хил кўп ўлчанган миқдорлар учун $a_{i\upsilon}$ коэффициентлар ва v_i'' тузатмалар доимий бўлади ва қуйидагича ёзамиз

$$[pa_v v''] = a_{1v} v_1''[p]_1 + \cdots + a_{nv} v_n''[p]_n$$

Лекин $[p]_i$ — ўртача вазн вазни, яъни ўлчанган миқдорлар биринчи босқич тенглаштирилган қийматининг вазни. Шунинг учун, $[p]_i = P_i$ белгилаб, (V.33) формулани эътиборга олиб, ёзамиз

$$\sum_{j=1}^{N} p_j a_{jv} v_j = \sum_{i=1}^{n} P_i a_{iv} v_i'' \quad (v = 1, \ldots, k).$$

бунда N — ҳамма ўлчашлар сони, n — ўлчанган миқдорлар сони (албатта, N > n).

Шундай қилиб, $[pv^2]$ — min шартни сақлаган тенглама, $[Pv^2]$ = min ўлчанган миқдорлар қийматининг хатоликлар назарияси қоидаси бўйича олдиндан тўғриланган $[Pv^2]$ = min шартни сақлаган тенглама билан бир хилдир. Яъни $v = v' + v''$ тузатма $[pv^2]$ = min шартдан келиб чиқадиган (V.31) тенгламани қаноатлантиради.

Параметрик усулда тенглаштириш масаласи қуйидаги кетма-кетликда ечилади:

1. Ўлчанган x_1, x_2, . . ., x_n қийматлар (унга ҳисобланадиган v_i тузатмалар) шундай ўлчамда ҳисобланадики, x_i миқдорнинг m_i ўрта квадратик хатолик имкони борича бирга яқин бўлсин. Чизиқли миқдорлар дециметр ёки сантиметрда, бурчаклар секундда, кичик аниқликдаги бурчаклар минутда ифодалансин

Вазн ҳисоблаш учун коэффициент k формула бўйича

$$p_i = \frac{k}{m_i^2}$$

шундай танланадики, вазн имкони борича бирга яқин сон бўлсин. Булар ҳисоблашни енгиллаштиради.

2. Керакли t_1, . . ., t_k номаълумлар шундай танланадики, тузатмаларнинг параметрик (V.25) тенгламаси энг оддий кўринишда бўлсин. Номаълумлари бир-бири билан математик боғлиқликда бўлмаслиги керак, ҳамма ўлчанган миқдорлар танланган номаълумлар орқали ифодаланган бўлиши керак. Номаълум сифатида ўлчанган ва ўлчанмаган қийматлар олинган бўлсин.

3. Ҳамма ўлчанган миқдорлар қуйидаги функция кўринишида ифодаланади:

$$x_i' = f_i(t_1,\ldots,t_k) \quad (i = 1,\ldots,n),$$

бунда $x_t' = x_i + v_i$

4. Номаълумларнинг тахминий $t_1^0,\ldots,t_k^0$ қиймати топилади ва улар тенглаштирилган қийматлар қандай ўнли сонлар билан ифодаланган бўлса шундай сонлар билан ифодаланади. (V.24) формула бўйича коэфицентлари ва тузатмалар (V.25) тенгламасининг озод ҳади топилади. Номаълум t учун шундай ўлчам қўйиладики, бунда тузатмалар тенгламаси коэффициентлари миқдори даражаси имкони борича бирга яқин бўлсин.

5. Нормаль (V.32) тенгламаси тузилади ва ечилади. Натижада τ_1, . . .,τ_k. тузатма олинади.

6. Тенглама (V.25) ёрдамида тузатмалар v_i (i = 1, . . .,n) қиймати ҳисобланади.

7. $x'_t = x_i + v_i$ тенгламадан ўлчанган миқдорлар тенглаштирилган қиймати топилади ва $t_v = t_v^0 + \tau_v$ (υ = 1, …, k) тенгламадан номаълум тенглаштирилган қиймати t ҳисобланади.

8. Ҳамма ҳисоблашлар қуйидаги тенглик билан текширилади:

$$x'_i = f_i(t_1,\ldots,t_k) \quad (i = 1,\ldots,n),$$

Шуни назарда тутиш кераккки, бу тенгликларни текширишда хатолик ҳисоблаш хатолигидан келиб чиқмайди. Балки номаълумларнинг $t_1^0,\ldots,t_k^0$ тахминий қийматининг ноаниқлиги ва тузатмалар $\tau_1,\ldots,\tau_k$ абсолют қийматининг чексиз катта бўлиши. Чизиқсиз функция $f_i(t_1^0+\tau_1,\ldots,t_k^0+\tau_k)$ ҳадларни ёйишда эътиборга олишга тўғри келади.

Бундай ҳолда тенглаштиришдан кейин олинган $t_1,\ldots,t_k$ миқдорлар аниқланган тахминий қийматлар деб қараш керак ва тенглаштиришни улар билан қайта бажариш керак.

Кўпинча керакли аниқ $t_1^0,\ldots,t_k^0$ қийматини олиш имконияти йўқлиги тенглаштиришнинг бошида кўринади. Унда $t_1^0,\ldots,t_k^0$ қийматни аниқлаш бўлиб хизмат қилган биринчи тенглаштиришда ҳисоблашларни оддийлаштиришга йўл қўйиш керак: ҳисоблашларни охирги тенглаштириш ҳисобларига нисбатан кам ўнли сонлар билан ишлаш.

Назорат саволлари:

1. Параметрик тенгламалар боғлиқлиги қандай ифодаланади?
2. Параметрик нормал тенгламаларни тузишилишини кўрсатинг?
3. Параметрик усулда тенглаштиришнинг кетма-кетлиги айтиб беринг?

Адабиётлар рўйҳати:

1. Jo'rayev D.O. Geodezik o'lchashlarni matematik ishlash nazariyasi. Darslik. 2-qism. Eng kichik kvadratlar usuli. Toshkent, 2014. 160 b.

2. Маркузе Ю.И. Теория математической обработки геодезических измерений. Книга 2: Основы метода наименьших квадратов и уравнительных вычислений . М., МИИГАиК 2005, 288 с.

3 МАЪРУЗА ТЕНГЛАШТИРИШНИНГ КОРРЕЛАТА УСУЛИ

Режа:

1. Тузатмалар шартли тенгламалари боғлиқлиги.
2. Коррелат нормал тенгламаларни тузиш.
3. Коррелат усулда тенглаштиришнинг кетма-кетлиги.

Таянч иборалар:Коррелата тенгламалар. Керакли номаълумлар, ортиқча миқдорлар. Нормал тенгламалар. Тузатмалар тенгламаси

1. Тузатмалар шартли тенгламалари боғлиқлиги.

Коррелат усули билан тенгламаларни ечишнинг мохияти қуйидагича: боғланган ўзгарувчи функциянинг $[pv^2]$ минимумини топиш масаласи мустақил шартли тенгламаларнинг ёрдамчи кўпайтмаларини киритиш йўли орқали Лагранж усули билан ечилади.

Бир бири билан боғланган мустақил шартли тенгламалар ҳосил қилган $X_1,\ldots,$ X_n, қийматлар n марта ўлчанган.

$$\left.\begin{array}{l}\varphi_1(X_1,\ldots,X_n)=0\\ \varphi_2(X_1,\ldots,X_n)=0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \varphi_r(X_1,\ldots,X_n)=0\end{array}\right\}. \qquad (V.38)$$

Тенглама (5.38) ни шундай кўринишга келтириш керакки, унинг ўнг томони нулга тенг бўлсин.

Қийматлар X_1 учун $x_1,\ldots, x_n$ натижалар мос вазнлар $p_1,\ldots, p_n$ билан олинган бўлсин.

Чунончи x_i қийматлар ўлчаш хатоликларидан иборат. Уларни шартли тенгламанинг чап томонига жойлаширганимизда тенгламанинг ўнг томонида нулдан фарқли ҳақиқий хатоликлар функцияси φ_1, $\varphi_2,\ldots$, φ_r ни ташкил қилган W боғланмаслик хатоси ҳосил бўлади.

Демак тенглама қуйидаги кўринишда бўлади

$$\varphi_j\,(x_1,\ldots, x_n) = W_j \quad (j = 1,2,\ldots, r). \; (V.39)$$

Тенглаштиришда ҳамма боғланмаслик хатоликларини йўқотиш талаб қилинади. Шунинг учун ўлчашларнинг тўғриланган натижалари қуйидаги тенгламани қаноатлантириши керак:

$$\varphi_j\,(x_1 + v_1,\ldots, x_n + v_n) = 0 \qquad (j = 1,2,\ldots, r). \qquad (V.40)$$

Маълумки, ноаниқ (V.40) системани ечишнинг кўп имконли ечимидан шудай танланадики $[pv^2]$ энг кичик қийматни қабул қилсин.

Ечилаётган масалани математик ифодада қуйидагича ҳал қилинади:

$$[pv^2] = \min,$$

топиш.

Агар ўзгаручи $v_1,\ldots, v_n$ тенглама (V.40) билан ўзора боғлиқ бўлса. Маълум бу масала шартли тенгламаларнинг номаълум кўпайтмалари ёрдамида Лагранж қоидаси бўйича коррелат усулида ечилади.

Таъкидлаймизки, параметрик усулда бу масала, экстремум шартида ечилади шартли экстемумдан абсолютига ўтиш мумкин бўлган, қўшимча мустақил номаълумлар ёрдамида ечилади.

Лагранж функцияси қуйидаги кўринишда

$$\Phi\,(v_1,\ldots,v_n) = [pv^2] + \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 +\cdots+ \lambda_r\varphi_r$$

Бу ерда

$$\varphi_j = \varphi_j\,(x_1 + v_1+,\ldots,+\, x_n + v_n) \qquad (j = 1,2,\,.\,.\,.,\, r).$$

ва

$$\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 +\cdots+ \lambda_r\varphi_r = 0.$$

Киритилган r ноаниқ кўпайтмалар $\lambda_1, \lambda_2,\ldots, \lambda_r$ Лагранж функциясини мустақил ўзгарувчи сифатида қарашга имкон беради. Унда топиладиган тузатма қиймати ушбу тенгламани қаноатлантириши керак:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial v_i} = 0 \qquad (V.41)$$

(V.41) тенгликни (V.40) тенгликка боғлаб, $n + r$ номаълумли $n + r$ тенглама оламиз ($v_1,\ldots, v_n$ тузатмали ва $\lambda_1,\ldots,\lambda_r$ ноаниқ кўпайтмали).

Масалани ечишнинг схемаси шунақа.

Лекин, агар шартли тенгламалар чизиқсиз кўринишда бўлса, унда масалани умуман ечиб бўлмайди.

Тенглаштириш масаласини ҳал қилиш ва ечиш алгоритмини топиш учун

(V.40) тенгламани чизиқли кўринишга келтирамиз. Бу ерда v тузатма етарли даражада кичик сон.

Чизиқсиз ҳадларни этиборга олмай φ_i функцияни Тейлор қаторига ёйиб топамиз

$$\varphi_j(x_1+v_1,\dots,x_n+v_n)=\varphi_j(x_1,\dots,x_n)+\left(\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_1}\right)_0 v_1+\cdots+\left(\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_n}\right)_0 v_n.$$

Белгилаймиз

$$\left(\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\right)_0=a_{ij} \qquad (V.42)$$

ва тенглама (V.39) ҳисобга олиб ёзамиз

$$a_{1j}v_1+\cdots+a_{nj}v_n+W_1=0 \qquad (j=1,2,\dots,r),$$

яъни

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}v_1+\cdots+a_{n1}v_n+W_1=0 \\ a_{12}v_1+\cdots+a_{n2}v_n+W_2=0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1r}v_1+\cdots+a_{nr}v_n+W_r=0 \end{array}\right\}. \qquad (V.43)$$

Ёки қисқартилган кўринишда

$$\left.\begin{array}{l} [a_1v]+W_1=0 \\ [a_2v]+W_2=0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ [a_rv]+W_r=0 \end{array}\right\}. \qquad (V.44)$$

Тенгсизликлар (V.43) ва (V.44) **тузатмалар шартли тенгламалари** дейилади. Боғланмаслик W_i бу тенгламаларнинг **озод ҳади** дейилади.

Агар шартли тенгламалар бошланишидан чизиқли кўринишда берилганда эди, (V.42) формула керак эмас эди. Чунки a_{i1}, a_{i2},…, a_{ir} коэффициентлар маълум бўларди.

Энди ечиладиган масалани қуйидагича фикрлаш мумкин. Минимум функцияни $[pv^2]$ топиш талаб қилинади, агар v ўзгарувчи (V.43).тенглама билан боғлиқ бўлса.

Лагранж кўпайтувчисини ҳисоблашни осонлаштириш учун $\lambda_1=-2k_1$, $\lambda_2=-2k_2$,…, $\lambda_r=-2k_r$ деб белгилаймиз. Кўпайтувчилар k_1, k_2,…, k_r **коррелатлар** дейилади.

Лагранж функцияси қуйидаги кўринишда бўлади

$$\Phi\,(v_1,\ldots,v_n) = [pv^2] - 2k_1([a_1v]+ W_1) -\cdots- 2k_r([a_rv]+ W_r).$$

Кейинчалик ёзамиз

$$\frac{\partial \Phi}{\partial v_i} = 2p_i v_i - 2k_1 a_{i1} - 2k_2 a_{i2} - \cdots - 2k_r a_{ir} = 0,$$

Бунда

$$v_i = q_i a_{i1} k_1 + q_i a_{i2} k_2 + \ldots + q_i a_{ir} k_r \qquad (i = 1, \ldots, n), \qquad \text{(V.45)}$$

бу ерда

$$q_i = \frac{1}{p_i}$$

ёки

$$v_i = \frac{a_{i1}k_1 + a_{i2}k_2 + \cdots + a_{ir}k_r}{p_i} \qquad (i = 1,\ldots,n). \qquad \text{(V.46)}$$

Тенглик (V.45) ва (V.46) **тузатмалар коррелат тенгламаси** дейилади. Бу тенгликлаларда k_j коррелатлар маълум бўлса v_i, тузатмаларни топиш мумкин.

Коррелатларни топамиз.

Тенгламалар системаси (V.45) ёзамиз.

$$v_i = q_i a_{i1} k_1 + q_i a_{i2} k_2 + \ldots + q_i a_{ir} k_r \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Ҳамма тенгламаларни навбатма-навбат $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{ir}$ $(i = 1, \ldots, n)$ га кўпайтириб ва ҳар бирининг йиғиндисини оламиз

$$\begin{aligned}
[a_1v] &= [qa_1a_1]k_1 + [qa_1a_2]k_2 + \cdots + [qa_1a_r]k_r;\\
[a_2v] &= [qa_1a_2]k_1 + [qa_2a_2]k_2 + \cdots + [qa_2a_r]k_r;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
[a_rv] &= [qa_1a_r]k_1 + [qa_1a_r]k_2 + \cdots + [qa_ra_r]k_r;
\end{aligned}$$

Тенглик (V.44) ни ҳисобга олиб, топамиз

$$\left.\begin{aligned}
&[qa_1a_1]k_1 + [qa_1a_2]k_2 + \cdots + [qa_1a_r]k_r + W_1 = 0\\
&[qa_1a_2]k_1 + [qa_2a_2]k_2 + \cdots + [qa_2a_r]k_r + W_2 = 0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&[qa_1a_r]k_1 + [qa_2a_r]k_2 + \cdots + [qa_ra_r]k_r + W_r = 0
\end{aligned}\right\}. \qquad \text{(V.47)}$$

Кўриниб турибдики, тенглик (V.47) тенгламалар сони (r) номаълумлар сонига тенг бўлган **коррелат нормал тенгламалар системасини** ташкил қилди.

(V.47) тенгламанинг ечимидан коррелат топилади, (V.40) тенгламага қайтиб, у ёрдамида ўлчаш натижаларига қидирилаётган тузатма v_i топилади.

Демак, коррелат усули билан масалани тенглаштириш қуйидаги тартибда ечилади.

1. Ўлчанган натижалар $x_1, . . ., x_n$ ва уларнинг вазни $p_1, . . ., p_n$ параметрик усулдаги каби аниқланади (§ 56 га қаранг).

2. Шартли тенглама танланади ва тузилади (V.38). Шартли тенгламалар қуйидаги талабларга жавоб бериши керак:

А) тенгламалар бир бирига боғлиқ бўлиши керак эмас, яни бири иккинчисининг хосиласи бўлиши керак эмас;

Б) шартли тенгламалар r сони $n — k$ га тенг бўлиши керак, бунда n — ҳамма ўлчашлар сони, k – керакли миқдорлар сони, тенгламанинг энг содда кўринишини танлаш керак;

Биринчи талабни бажармаслик масаланинг ноаниқлигига олиб келади, $r < n — k$ бўлганда қандайдир тенгламалар ҳисобга олинмай қолади, натижада тенглаштиришдан кейин қандайдир боғланмаслик хатолиги қолади.

3. (V.39) ва (V.42) формулалар бўйича озод ҳад ва тузатмалар шартли тенгласининг коэфициентлари ҳисобланади. Бунда параметрик тузатмалар тенгламасини тузиш каби шартли тенгламадаги тузатма ва коэфициентларни φ фукция учун мос ўлчамни(размерность) кириш орқали, бир хил даражали миқдорга келтириш керак;

4. Коррелат нормал тенглама коэффицентларини коэффицентлар жадвали ёрдамида ҳисоблаш керак(27 жадв пастга).

Коррелат ва параметрик усулдаги коэффицентлар жадвалининг фарқи қуйидагича: биринчидан, биринчи усулдаги тузатмалар шартли тенгламалар коэффицентлари графада пастдан юқорига жойлашади, тузатманинг параметрик тенгламаси коэффицентлари горизонтал қатор бўйича жойлашади. Бундан ташқари, 27 жадвалда «l» графа йўқ. Чунки коррелат нормал тенгламасининг озод ҳадлари шартли тенгламанинг озод ҳадларидир.

Боғланмаслик хатоликлари W_1, W_2,…, W_r қийматлари мос шартли тенгламалар графасдаги коэффициентлар тагидаги қаторга ёзилади.

Коррелат нормал тенгламаларида вазн p, эмас, тескари вазн q ишлатилади.

5. Нормал тенламалар ечилади ва натижада коррелат k ҳисобланади.

6. Коэффициентлар жадвалининг мос графасига коррелат қийматларини кўчириб ёзилади ва (V.46) формула бўйича v тузатма ҳисобланади.

7. Ўлчанган миқдорларнинг тенглаштирилган қиймати $x_i' = x_i + v_i$, ҳисобланади. Кейинчалик охирги текшириш ҳисоблари бажарилади. (V.40) шартли тенгламадаги x_i' тенглаштирилган қийматларни қўйганда ҳисоблашда хатоликнинг йўқлиги тенглаштиришнинг қаноатлантирилганлигини кўрсатади.

Коэффициентлар жадвалини тўлдиришда яна қуйидаги тартибни сақлаш керак. Бу жадвал графасининг чапдан биринчи энг оддий тенгламаларнинг коэффициентларини ±1 коэффициентлари билан кўчириб ёзиш керак. Ўнг графаларга эса мураккаброқ тенгламалар коэффициентларини кўчириб ёзиш керак. Бу нормал тенгламани ечишни осонлаштиради.

§ 57 берилган, келтириб чиқарилган формулаларни мисоллар билан кўрсатамиз (коррелат усули билан ечиб бўлмайдиган, 5 мисолдан ташқари).

ТЕНГЛАШТИРИШ МАТЕРИАЛЛАРИ БЎЙИЧА АНИҚЛИКНИ БАҲОЛАШ ТЎҒРИСИДА

Аниқликни баҳолаш деганда ўлчашларнинг ва ўлчаш миқдорлари функциясининг тенглаштиришдан кейин ўрта квадратик хатолигини топишга айтилади.

Умумий ҳолатда ҳар қандай миқдорнинг ўрта квадратик хатолиги қуйидаги формула билан аниқланади

$$M_i = \mu\sqrt{\frac{1}{P_i}}, \qquad \text{(V.49)}$$

бунда μ — вазн бирлигидаги хатолик;

P_i—ундаги баҳоланадиган миқдор.

Шундай қилиб, аниқликни баҳолаш иккита алоҳида масалага бўлинади: вазн бирлигидаги хатоликни топиш ва баҳоланадиган миқдорнинг вазнини топиш.

Чунки μ миқдор тенглаштириш натижаси бўйича, ўлчаш натижалари вазнини танлаш системаси учун тенглаштиришгача қабул қилинган қийматдан фарқ қилиши мумкин. Қуйидаги формула бўйича

$$p_i = \frac{\mu^2}{m_i^2}, \qquad \text{(V.50)}$$

тенглаштиришдан кейин (V.49) формула бўйича ҳисобланадиган M_i миқдор тенглаштиришгача олдиндан ҳисоблангандан фарқ қилиши мумкин.

Савол туғилади, иккита миқдордан қайси бири афзалроқ: тенглаштиришгача қабул қилинган (V.50) формула учун ёки пастда келтириб, чиқариладиган тенглаштиришдан кейин, формула бўйича? Бу савол ҳар бир алоҳида ҳолатда аниқ ечилиши керак: ишончли оралиқ миқдорига боғлиқ ҳолда вазн бирлигидаги ҳақиқий хатолик қиймати учун. Шубҳасиз, энг тор ишончли интервал қийматига афзаллик имконини бериш керак.

Демак, аниқликни баҳолаш масаласини ечиш учун, биринчидан, вазн бирлигидаги хатоликни аниқлаш ва иккинчидан, аниқланадиган миқдор вазнини аниқлаш усулини топиш зарур.

Иккинчи масала қуйидагича ечилади: аниқланадиган миқдор y ўлчаш натижалари функцияси кўринишида берилади

$$y = f(x_1, \ldots, x_n) \quad \text{(V.51)}$$

кейинчалик ўлчаш хатоликлари назариясининг маълум формуласи қўлланилади

$$\frac{1}{P_y} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \frac{1}{p_i}, \quad \text{(V.52)}$$

бунда p_i — ўлчаш вазни.

Бир нечта миқдорларни биргаликда тенглаштиришда аниқликни баҳолашнинг катта қийинчилиги (V.51) формулани топиш, яъни аниқланаётганн миқдорни ўлчаш натижалари орқали келтиришдир. Тенглаштиришнинг ҳамма усулларида бу масала нормал тенглама коэффициентлари тескари матрицасини бевосита шу тенгламаларни ечиш алгоритми билан биргаликда ечилади. Бу масалаларнинг тўлиқ ифода этиш ва мос ҳисоблаш усулларини келтириш кейинги бобларда келтирилган.

Бу ерда фақат вазн бирлигидаги хатоликларни ҳисоблаш усулларини келтирамиз.

1. Вазн бирлигида хатоликни топиш

Вазн бирлигида хатоликни топиш учун, биринчидан, хатоликлар назарияси формуласидан фойдаланиш мумкин

$$\mu = \sqrt{\frac{[p\theta^2]}{n}}.$$

Ҳақиқий хатолик θ сифатида боғланмаслик хатолиги W олиш мумкин. Боғланмаслик хатолиги вазни қуйидаги формула орқали ҳисоблаш мумкин:

$$\frac{1}{P} = \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)^2 \frac{1}{p_i}\right],$$

бунда φ — ўлчанган миқдорлар орасидаги боғлиқликни ифодаловчи, шартли тенгламанинг чап томони.

Энди вазн бирлигидаги хатоликни ҳисоблаш учун формулани топамиз

$$\mu = \sqrt{\frac{[PW^2]}{N}}, \quad (V.53)$$

бунда N — ҳосил бўладиган боғланмаслик хатоликлари сони

(V.53) формулада ҳамма ҳосил бўладиган шартли тенгламалар боғланмаслик хатолиги фойдаланилади, шунинг учун $N > r$. Лекин ишончли чегарани қўйиш учун “кўрсаткич даражаси”(«степеней свободы») ортиқча ўлчанган миқдорлар сонига тенг сонни қабул қилиши керак $r = n —k$;.

Вазн бирлигидаги хатолик ўлчаш натижасидаги v тузатма ёрдамида ҳам аниқланиши мумкин. Бу тузатма ўлчаш аниқлигига боғлиқ. Мос формулани топамиз.

Чунки тенглаштириш шартни сақлаган ҳолда бажарилади

$$[pv^2] = \min,$$

биз тенгликни ёзишга ҳақлимиз

$$[p\Delta^2] > [pv^2],$$

бунда Δ — ўлчашларнинг ҳақиқий хатоликлари.

Бу тенгликнинг икки томонини ўлчашлар сонига бўлиб, топамиз

$$\frac{[p\Delta^2]}{n} = \mu^2 > \frac{[pv^2]}{n},$$

Бунда μ — эмпирик қиймати (μ^2 = — M ($p\Delta^2$) аниқ қиймати).

Охирги тенгсизликни тенгликка келтириш учун, ўнг қисми махражини ҳозирча мусбат номаълум x миқдорга камайтириш керак. Тенгликни кейинчалик ёзиш мумкин

$$\mu^2 = \frac{[pv^2]}{n - x} \qquad (V.54)$$

Масала x қийматни топишга олиб келади. Бунда қуйидагича фикр юритиш керак. Биринчидан, ўлчанган миқдорлар n сони керакли миқдорлар сонидан кам бўлмаслиги керак, яъни $n \geq k$.

Бундан кўриниб турибдики

$$x \leq k \qquad (V.55)$$

Ҳақиқатдан, $x > k$ бўлганда (V.54) тенгликнинг махражи манфий, бу бўлиши мумкин эмас. Чунки μ^2 ва $[pv^2]$ — қийматлар албатта мусбат. Бу (V.55) тенгликнинг ҳақли эканлигини исботлайди.

x ҳам k дан кичик бўлмаслиги керак. Қуйидаги фикр тескарисини исботлайди.

Дейликки, $x < k$ бўлсин. Унда $n = k$ бўлганда (V.54) тенгликнинг махражи мусбат сон бўлади. Лекин, агар $n = k$, яъни фақат керакли миқдорлар ўлчанганда ўлчаш натижасида боғланмаслик хатолиги пайдо бўлмасди. Бинобарин натижаларга тузатма ҳам бўлмасди. Лекин бунда $[pv^2] = 0$ ва (V.54) тенглик қаноатлантирмайди, чунки $\mu^2 \neq 0$. Шунинг учун x ҳеч қачон k дан кичик бўлиши керак эмас.

Шунинг учун, (V.54) формула умумийлик талабига $x = k$ бўлгандагина жавоб беради

Айтилганларни ҳисобга олиб, вазн бирлигидаги хатолик формуласини ёзамиз

$$\mu = \sqrt{\frac{[pv^2]}{n - k}}, \qquad (V.56)$$

Бунда $n - k = r$ – ортиқча ўлчанган миқдорлар сони;

v – тенглаштирищдан олинган тузатма;

p – тенглаштиришгача қабул қилинган ўлчаш миқдорлари вазни.

(V.56) формуладан айрим бир ҳол каби битта миқдорни кўп марта ўлчаганда вазн бирлигидаги хатолик учун формула келиб чиқади, яъни ўлчаш хатоликлари назарияси формуласи

$$\mu = \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-1}}.$$

Кўриниб турибдики бу ҳолда керакли миқдорлар сони $k = 1$ га тенг.

Фақат керакли миқдорлар ўлчанган ҳолатни кўриб ўтамиз. Яъни сони k га тенг ёки $n = k$. Бу ҳолда ўлчаш натижаларига тузатма киритилмайди. Биз $v_i = 0$ ва $[pv^2] = 0$ қабул қилишга мажбурмиз. Лекин $\mu^2 \neq 0$, бу ҳолатда ($n = k$ бўлганда) μ миқдори тўғрисида фикрни айтиш қийин, μ миқдор ноаниқ. Демак (V.54) $n - x = 0$ бўлиши керак, яъни $x = k$ ва биз $\frac{0}{0}$ кўринишда ноаниқликка эга бўламиз.

Шундай қилиб, (V.54) формула (V.56) кўринишдаги ифодани олади.

Яна қуйидаги ҳолатни эътиборга олиш керак.

(V.53) ва (V.56) формулалар ўлчаш аниқлигини тўғри баҳолашга шундай ҳолатларда бериладики, бунда боғланмаслик хатолиги бош берилган хатолик боғлиқ бўлмасин. Мисол, нивелир йўлидаги бошланғич репер баландлиги ёки бу хатоликларнинг эътиборсизлиги. Берилган бош хатоликларда эътиборли хатоликларнинг борлигида ўлчаш аниқлигини (V.53) формула билан энг тўғри баҳоланади. Агар бунда фақат бош берилганларга боғлиқ бўлмаган боғланмаслик хатолиги фойдаланилган бўлса. Масалан учбурчаклар боғланмаслик хатолиги. Агар (V.56) формула бўйича ҳисобланган қиймат μ (V.53) формула бўйича ҳисобланган қийматдан, бош берилганларсиз, сезиларли катта бўлса, бош берилганлар аниқлигинининг ноаниқликини ўлчаш аниқликка нисбатан билдиради. Бундай ҳулосани μ нинг иккала қиймати керакли ишонч билан олинган бўлса.

(V.56) формула бўйича тенглаштиришдан кейин олинган вазн бирлигидаги хатоликлар миқдорига ишонч даражаси саволига қайтамиз. Бунда фойдаланилган мустақил боғланмаслик хатоликлари сонини ҳисобга олиш керак, яъни $r = n - k$. Чунки боғланмаслик хатолиги функцияларнинг ҳақиқий хатолигидир. Шунинг учун ишончли чегарани қўйишда r (число «степеней свободы») сонини эътиборга олиш керак.

$r \geq 19$ да қиймат ҳисобланади χ^2 (§ 21 қаранг).

$$m_{\mu}=\frac{0,75\mu}{\sqrt{r}}$$

ва нормал тақсимланиш қонуни қўлланилади.

2. Параметрик усулда тенглаштиришда (pv^2) ни ҳисоблаш усуллари

1. Коэффициентлар жадвали ёрдамида. Коэффициентлар жадвалида (V.25) тузатмалар тенгламасидан фойдаланиб v_i тузатма ҳисобланади. Шундай усулда 26 жадвалда бу тузатмалар ҳисобланган.

Ҳамма тузатмаларни олгандан кейин $[pv^2]$ ҳисоблаш қийин эмас.

2. $[pv^2]=[pvl]$ формула бўйича. Бу формула деярли қўлланилмайди, лекин катта назарий қийматга эга.

Тузатмалар тенгламасини ёзамиз

$$v_i=a_{i1}\tau_1+a_{i2}\tau_2+\cdots+a_{ik}\tau_k+l_i \quad (i=1,\dots\dots,n).$$

Бу тенгламани $p_i v_i$ га кўпайтирамиз ва уларни йиғамиз. Унда

$$[pv^2]=[pa_1v]\,\tau_1+\cdots+[pa_kv]\,\tau_k+[plv]. \qquad \text{(V.57)}$$

лекин, (V.31) тенгликка асосан,

$$[pa_1v]=[pa_2v]=\cdots=[pa_kv]=0,$$

Шунинг учун (V.57) тенгликдан топамиз

$$[pv^2]=[plv]. \qquad \text{(V.58)}$$

3. Формула бўйича

$$[pv^2]=[pa_1v]\,\tau_1+\cdots+[pa_kl]\,\tau_k+[pll].$$

Ҳамма тузатмалар тенгламасини

$$v_i=a_{i1}\tau_1+a_{ik}\tau_k+l_i \quad (i=1,\dots\dots,n).$$

$p_i l_i$ га кўпайтириб ва натижани йиғиб, топамиз

$$[plv]=[pa_1l]\,\tau_1+\cdots+[pa_kl]\,\tau_k+[pll].$$

(V.58) тенгликни эътиборга олиб, ёзишимиз мумкин

$$[pv^2]=[pa_1l]\,\tau_1+\dots\dots+[pa_kl]\,\tau_k+[pll]. \qquad \text{(V.59)}$$

4. Нормал тенгламаларни ечиш схемасида.

(V.59) тенгсизликни нормал тенгламалар системасига қўшамиз ва қуйидагича топамиз

$$\begin{aligned}&[pa_1a_1]\tau_1+\cdots+[pa_1a_k]\tau_k+[pa_1l]=0,\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&[pa_1a_k]\tau_1+\cdots+[pa_ka_k]\tau_k+[pa_kl]=0,\\&[pa_1l]\tau_1+\cdots+[pa_kl]\tau_k+[pll]=[pv^2].\end{aligned}$$

Янги олинган тенгламалар системаси нормал тенгламаларнинг ҳамма хоссаларини сақлайди. Шунинг учун бу тенгламани ечиш қийинчилик туғдирмайди.

Ҳамма номаълумлар τ йўқотгандан кейин $[pv^2]$ қийматини топамиз(бу ечимнинг батафсиллиги VI бобга қаранг).

3. Коррелат усулида тенглаштиришда (pv^2) ни ҳисоблаш усули

1. Коэффициентлар жадвали ёрдамида. Тузатма v_i коэффициентлар жадвалида (27-жадвалга қаранг) формула (У.46). бўйича ҳисобланади. Тузатмаларни топгандан кейин $[pv^2]$ ҳисобланади

2. Қуйидаги формула бўйича

$$-[pv^2]=W_1k_1+W_2k_2+\ldots..+W_rk_r.$$

Тузатмалар коррелат тенгламасини ёзамиз

$$v_i=\frac{a_{i1}k_1+a_{i2}k_2+\cdots+a_{ir}k_r}{p_i}\quad(i=1,\ldots,n).$$

Бу тенгламаларни p_iv_i га кўпайтириб ва уларнинг йиғиндисини оламиз. Бунда топамиз

$$[pv^2]=[a_1v]k_1+[a_2v]k_2+\cdots+[a_rv]k_r.\qquad(V.60)$$

Тузатмалар шартли тенгламаларни эътиборга олиб, яъни (V.44) тенгликни

$$\begin{aligned}&[a_1v]=-W_1,\\&[a_2v]=-W_2,\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\\&[a_rv]=-W_r,\end{aligned}$$

Натижада (V.60) тенглама қуйидаги кўринишга келади

$$-[pv^2]=W_1k_1+W_2k_2+\ldots+W_rk_r.\qquad(V.61)$$

3. Коррелат нормал тенгламаларини ечиш схемаси бўйича.

(V.61) тенгликни коррелат нормал тенгламалари системасига қўшиб, топамиз

$$[qa_1a_1]k_1+\cdots+[qa_1a_r]k_r+W_1=0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$[qa_1a_r]k_r+\cdots+[qa_ra_r]k_r+W_r=0,$$

$$W_1k_1+\cdots+W_rk_r=-[pv^2].$$

Охирги тенгламалар системаси нормал тенгламалар системасининг ҳамма хоссаларини сақлайди. Шунинг учун уни ечиш қийинчилик келтирмайди. Бу системадан ҳамма коррелатларни чиқариб ташлаб $[pv^2]$ қийматини оламиз (ечимни VI бобга қаранг).

4. Энг кичик квадратлар принципини алгебраик асослаш

Олинган (V.58) формула энг кичик квадратлар принципига яна битта асос беришга имкон беради. Бу формула ёрдамида энг кичик квадратлар усули билан тенглаштирищдан кейин ўлчанган миқдорлар аниқлиги янада ошганлигини кўрсатиш мумкин.

Қуйидаги тенгликни ёзамиз

$$\left.\begin{aligned}\theta_i&=x_i'-X_i\\ v_i&=x_i'-x_i\end{aligned}\right\}, \qquad \text{(V.62)}$$

Бунда θ_i, — ўлчашларнинг ҳақиқий хатолиги;

x_i' — энг кичик квадратлар усули бўйича ўлчанган миқдорларнинг тенглаштирилган қиймати

(V.62) тенгликни оламиз

$$\theta_i+v_i=x_i'-X_i.$$

Чунки X_i ўлчанган миқдорнинг ҳақиқий қиймати, фарқ x_i' — X_i,— тенглаштирилган қийматнинг хақиқий хатоси. Бу хатоликларни δ_i орқали белгилаймиз. Энди ёзишимиз мумкин.

$$\delta_i=\theta_i+v_i \quad (i=1,\ldots,n).$$

Кейинчалик ёзамиз

$$[p\delta^2]=[p\theta^2]+[pv^2]+2[p\theta v] \qquad \text{(V.63)}$$

Миқдор $[p\theta^2]$ ўлчаш аниқлигини таърифлайди. Шунинг учун $[p\delta^2]$ миқдор ўлчанган миқдорлар тенглаштирилган қиймати аниқлигини ифодалашини мантиқан тўғри. Миқдор $[p\delta^2]$ ни олиш учун миқдор $[p\theta v]$ ни топиш кераклиги тенгсизлик (V.63) дан кўриниб турибди. Бунинг учун параметрик тенглаштириш усули формулаларидан фойдаланамиз.

Номаълумларнинг t тахминий қиймати сифатида уларнинг T ҳақиқий қиймати олинган, яъни $t_i^0 = T_i$ $(i = 1,\ldots, k)$. Унда тузатмалар параметрик тенгламалари озод ҳадларини (V.24) формулага асосан қуйидаги формула бўйича ҳисоблаш мумкин.

$$l_i = f_i\,(T_1, \ldots, T_k) - x_i.$$

Лекин, шубҳасиз,

$$f_i\,(T_1, \ldots, T_k) = X_i,$$

шунинг учун

$$l_i = X_i - x_i = -\,\theta_i.$$

Энди (V.58) формула қуйидаги кўринишни олади

$$[pv^2] = -\,[p\theta v]. \qquad \text{(V.64)}$$

Чунки тенглаштириш натижалари номаълумларнинг тахминий қийматини қабул қилиш системасига боғлиқ эмас. Шунинг учун (V.64) формула универсал қийматга эга.

Формула (V.63)га муражаат қилиб ва (V.64) ифодани ҳисобга олиб топамиз,

$$[p\delta^2] = [p\theta^2] - [pv^2]. \qquad \text{(V.65)}$$

Формула (V.65) энг кичик кватратлар усули билан тенглаштирилгандан кейин ўлчанган миқдорлар аниқлиги доимо ошишини тасдиқлашга имконият беради ва бу аниқликнинг ошиши даражасини таҳлил қилишга имкон беради. Бунинг (V.65) тенгликнинг икки қисмини n га бўламиз

$$\frac{[p\delta^2]}{n} = \frac{[p\theta^2]}{n} - \frac{[pv^2]}{n}.$$

Лекин $\frac{[p\theta^2]}{n} \approx \mu^2$. Шунинг учун қуйидагича ёзамиз

$$\frac{[p\delta^2]}{n} \approx \mu^2 - \frac{n-k}{n}\cdot\frac{[pv^2]}{n-k} \approx \mu^2 - \frac{n-k}{n}\mu^2 = \frac{k}{n}\mu^2,$$

ёки

$$\frac{[p\delta^2]}{n} \approx \frac{k}{n}\mu^2. \qquad \text{(V.66)}$$

$\frac{[p\delta^2]}{n} = M^2$ — тенглаштирилган қийматлар аниқлигини таърифловчи вазн бирлигидаги хатолик, μ^2 — ўлчаш аниқлигини таърифлайдиган миқдор деб, топамиз: $M^2 \approx \frac{k}{n}\mu^2$

ёки

$$\frac{\mu^2}{M^2} \approx \frac{n}{k}.$$

Чунки ўрта квадратик хатонинг квадрати вазнга тескари пропорционал бўлганлигидан ёзишимиз мумкин

$$\left(\frac{P}{p}\right)_{\text{ср}} \approx \frac{n}{k}, \qquad (V.67)$$

яъни ўлчанган миқдорлар тенглаштирилган қиймати вазнларининг ўлчанган миқдорлар вазнларига нисбати ўртача $\frac{n}{k}$ га тенг. Ифода (V.67) “вазнларнинг ўртача нисбати” формуласи дейилади. У тенглаштирилган миқдорларни аниқлигини баҳолашда жуда катта роль ўйнайди.

Юқорида келтирилган энг кичик квадратлар усулини асослаш ўлчаш натижалари учун мажбурий нормал тақсимланишни талаб қилмаганлигини эслатиб ўтамиз. Формулалар (V. 65) ва (V.67) ҳамма тақсимланишда тўғри бўлади. Шунинг учун энг кичик квадратлар усулининг кўпгина афзалигига унинг тўлиқ универсаллиги ҳам қўшиш мумкин.

Назорат саволлари:

1. Коррелат тенгламалар боғлиқлиги қандай ифодаланади?
2. Коррелат нормал тенгламаларни тузишилишини кўрсатинг?
3. Коррелат усулда тенглаштиришнинг кетма-кетлиги айтиб беринг?

Адабиётлар рўйҳати:

1. Jo’rayev D.O. Geodezik o’lchashlarni matematik ishlash nazariyasi. Darslik. 2-qism. Eng kichik kvadratlar usuli. Toshkent, 2014. 160 b.

2. Маркузе Ю.И. Теория математической обработки геодезических измерений. Книга 2: Основы метода наименьших квадратов и уравнительных вычислений . М., МИИГАиК 2005, 288 с.

4 МАЪРУЗА ГАУСС АЛГОРИТМИ. НОРМАЛ ТЕНГЛАМАЛАРНИ ЕЧИШ

Режа:

1. Гаусс алгоритми.
2. Нормал тенгламала системасининг шартланганлиги.
3. Коррелат усулда тенглаштиришнинг кетма-кетлиги.

Таянч иборалар:Гаусс алгоритми. Кетма кет йўқотиш. Тенгламалар системаси. Шартланганлик.

1. Гаусс алгоритми

Нормал тенгламаларни ечиш - тенглаштириш ҳисобларининг энг қийин бўлаги ҳисобланади. Шунинг учун унга катта эътибор бериш керак. Буни хилма хил усул билан ечиш мумкин.

К. Гаусс номаълумларни кетма-кет йўқотиш усулига асосланган, жуда яхши белгилаш системасини киритиш орқали масалани осонлаштирадиган усулни батафсил ишлаб чиқди. **Гаусс алгоритми** деб аталадиган бу усулни батафсил кўриб ўтамиз. Нормал тенгламаларнинг катта системасини ечишнинг энг осон усули Гаусс алгоритмидан у ёки бу даражада фойдаланишини эслатиб ўтамиз.

Амалиёт шуни кўрсатадики, определитель усули иккита тенгламани ечишда жуда қўл келади. Катта системаларни ечишда определитель усули Гаусс алгоритми билан беллаша олмайди. Буни нормал тенгламалар системасини ечиш учун чизиқли алгебранинг бошқа усуллари ҳақида ҳам айтиш мумкин.

Калькулятор типидаги ҳисоблаш машиналарининг борлиги нормал тенгламалар системасини ечишда Гаусс алгоритми билан ҳисоблашлар ёзуви сонини бир мунча қисқартириш мумкин.

Электрон ҳисоблаш машиналарнинг имкониятларидан фойдаланишнинг энг қулай усули краковянов усулидир.

Жуда катта системаларни, ўнлаб тенгламадан иборат ҳоттаки юздан иборат тенгламаларни ечишда яқинлаштириш усули қўлланилади. Алоҳида бўлакларга бўлинадиган мустақил системадан иборат катта сонли тенгламаларни ечишда Пранис-Праневич усули қўлланиши мумкин. Нормал тенгламаларнинг катта системасини ечиш масаласи X-бобда кўрилади.

Гаусс алгоритмини кўриб чиқамиз.

Олдин айтганимиздек, Гаусс алгоритмининг асосига номаълумларни кетма-кет йўқотиш усули ётади. Гаусс белгилашнинг қулай усулини киритиш, масалани назарий қарашни осонлаштириш, ҳисоблаш тартибини эслаб қолиш, кетма-кетликнинг бир хилллиги, оралиқ ҳисоблаш натижаларининг тўғри ишончли текширилиши бу усулнинг катта ютуғи эканлиги билдиради.

Тўртта нормал тенгламаларни ечиш мисолида Гаусс алгоритмини кўриб ўтамиз.

$$\left.\begin{aligned} N_{11}z_1 + N_{12}z_2 + N_{13}z_3 + N_{14}z_4 + L_1 = 0 \\ N_{21}z_1 + N_{22}z_2 + N_{23}z_3 + N_{24}z_4 + L_2 = 0 \\ N_{31}z_1 + N_{32}z_2 + N_{33}z_3 + N_{34}z_4 + L_3 = 0 \quad . \end{aligned}\right\} \qquad (VI.7)$$

$$N_{41}z_1 + N_{42}z_2 + N_{43}z_3 + N_{44}z_4 + L_4 = 0$$

Нормал тенгламалар ситемаси квадратсиз коэффициентларнинг бош коэффициентларга нисбатан симметрик хусусияти эга, яъни квадратли диагонали $N_{ij} = N_{ji}$.

Биринчи тенгламадан биринчи номаълумни бошқалари орқали ифодалаймиз:

$$z_1 = -\frac{N_{12}}{N_{11}}z_2 - \frac{N_{13}}{N_{11}}z_3 - \frac{N_{14}}{N_{11}}z_4 - \frac{L_1}{N_{11}} \quad (VI.8)$$

(VI.8) тенглама **элиминацион тенглама** дейилади (элиминацион сўзи лотин elimino сўзидан «ташқарига чиқариш» ёки йўқотиш маъносини билдиради).

(VI.8) дан z_1 иккинчи, учинчи ва тўртинчи қўйиб, коэффициентларнинг симметриклигини ҳисобга олиб, топамиз:

$$\left(N_{22} - \frac{N_{12}N_{12}}{N_{11}}\right)z_2 + \left(N_{23} - \frac{N_{12}N_{13}}{N_{11}}\right)z_3 + \left(N_{24} - \frac{N_{12}N_{14}}{N_{11}}\right)z_4 + \left(L_2 - \frac{N_{12}L_1}{N_{11}}\right) = 0$$

$$\left(N_{23} - \frac{N_{12}N_{13}}{N_{11}}\right)z_2 + \left(N_{33} - \frac{N_{13}N_{13}}{N_{11}}\right)z_3 + \left(N_{34} - \frac{N_{13}N_{14}}{N_{11}}\right)z_4 + \left(L_3 - \frac{N_{13}L_1}{N_{11}}\right) = 0$$

$$\left(N_{24} - \frac{N_{12}N_{14}}{N_{11}}\right)z_2 + \left(N_{33} - \frac{N_{13}N_{14}}{N_{11}}\right)z_3 + \left(N_{44} - \frac{N_{14}N_{14}}{N_{11}}\right)z_4 + \left(L_4 - \frac{N_{14}L_1}{N_{11}}\right) = 0$$

Тенгламалар системасининг биринчи номаълумини йўқотгандан кейин ўзгартирилган квадратсиз коэффициентлар симметриклик хоссасини сақлайди (системанинг биринчи бошланғич коэффициентлари симметриклиги хосиласидир)

Белгилаш киритамиз

$$\left.\begin{array}{ll} N_{22}-\dfrac{N_{12}N_{12}}{N_{11}}=N_{22}^{(1)}, & N_{33}-\dfrac{N_{13}N_{13}}{N_{11}}=N_{33}^{(1)} \\ N_{23}-\dfrac{N_{12}N_{13}}{N_{11}}=N_{23}^{(1)} & N_{34}-\dfrac{N_{13}N_{14}}{N_{11}}=N_{34}^{(1)} \\ N_{24}-\dfrac{N_{12}N_{14}}{N_{11}}=N_{24}^{(1)} & L_{3}-\dfrac{N_{13}L_{1}}{N_{11}}=L_{3}^{(1)} \\ L_{2}-\dfrac{N_{12}L_{1}}{N_{11}}=L_{2}^{(1)} & N_{44}-\dfrac{N_{14}N_{14}}{N_{11}}=N_{44}^{(1)} \end{array}\right\} \qquad (V1.9)$$

$$L_{4}-\frac{N_{14}L_{1}}{N_{11}}=L_{4}^{(1)}$$

Белги $^{(1)}$ биринчи номаълум йўқотилганлигини билдиради. Энди ўзгартирилган система қуйидаги кўринишда бўлади

$$\left.\begin{array}{l} N_{22}^{(1)}z_2+N_{23}^{(1)}z_3+N_{24}^{(1)}z_4+L_2^{(1)}=0 \\ N_{23}^{(1)}z_2+N_{33}^{(1)}z_3+N_{34}^{(1)}z_4+L_3^{(1)}=0 \end{array}\right\} \qquad (VI.10)$$

$$N_{24}^{(1)}z_2+N_{34}^{(1)}z_3+N_{44}^{(1)}z_4+L_4^{(1)}=0$$

Тенгламалар ситемасидан иккинчи номаълумни йўқотиб, иккинчи элиминацион тенгламани оламиз:

$$z_2=-\frac{N_{23}^{(1)}}{N_{22}^{(1)}}z_3-\frac{N_{24}^{(1)}}{N_{22}^{(1)}}z_4-\frac{L_2^{(1)}}{N_{22}^{(1)}} \qquad (VI.11)$$

ва иккинчи ўзгартирилган тенгламалар системани оламиз

$$\left(N_{33}^{(1)}-\frac{N_{33}^{(1)}N_{23}^{(1)}}{N_{22}^{(1)}}\right)z_3+\left(N_{34}^{(1)}-\frac{N_{23}^{(1)}N_{24}^{(1)}}{N_{22}^{(1)}}\right)z_4+\left(L_3^{(1)}-\frac{N_{23}^{(1)}L_2^{(1)}}{N_{22}^{(1)}}\right)=0$$

$$\left(N_{34}^{(1)}-\frac{N_{23}^{(1)}N_{24}^{(1)}}{N_{22}^{(1)}}\right)z_3+\left(N_{44}^{(1)}-\frac{N_{24}^{(1)}N_{24}^{(1)}}{N_{22}^{(1)}}\right)z_3+\left(L_4^{(1)}-\frac{N_{24}^{(1)}L_2^{(1)}}{N_{22}^{(1)}}\right)=0$$

Охирги тенгламалар системаси ҳам коэффициентларнинг симметриклигини сақлайди.

Кейинчалик белгилашни киритамиз

$$N_{33}^{(1)} - \frac{N_{23}^{(1)} N_{23}^{(1)}}{N_{22}^{(1)}} = N_{33}^{(2)}, \qquad N_{44}^{(1)} - \frac{N_{24}^{(1)} N_{24}^{(1)}}{N_{22}^{(1)}} = N_{44}^{(2)},$$

$$N_{34}^{(1)} - \frac{N_{23}^{(1)} N_{24}^{(1)}}{N_{22}^{(1)}} = N_{34}^{(2)}, \qquad L_{3}^{(1)} - \frac{N_{23}^{(1)} L_{2}^{(1)}}{N_{22}^{(1)}} = L_{3}^{(2)},$$

$$L_{4}^{(1)} - \frac{N_{24}^{(1)} L_{2}^{(1)}}{N_{22}^{(1)}} = L_{4}^{(2)}$$

ундан кейин иккинчи ўзгартирилган тенгламалар системаси қуйидаги кўринишда бўлади

$$N_{33}^{(2)} z_3 + N_{34}^{(2)} z_4 + L_3^{(2)} = 0$$

$$N_{34}^{(2)} z_3 + N_{44}^{(2)} z_4 + L_4^{(2)} = 0. \qquad \text{(VI.12)}$$

Энди учинчи элиминацион тенгламани оламиз

$$z_3 = -\frac{N_{34}^{(2)}}{N_{33}^{(2)}} z_4 - \frac{L_3^{(2)}}{N_{33}^{(2)}} \qquad \text{(VI.13)}$$

ва учинчи ўзгартирилган системани оламиз

$$\left(N_{44}^{(2)} - \frac{N_{34}^{(2)} N_{34}^{(2)}}{N_{22}^{(1)}} \right) z_4 + \left(L_4^{(2)} - \frac{N_{34}^{(2)} L_3^{(2)}}{N_{33}^{(2)}} \right) = 0$$

ёки Гаусс белгилашларини қўллаганда

$$N_{44}^{(3)} z_4 + L_4^{(3)} = 0 \qquad \text{(VI.14)}$$

бундан

$$z_4 = -\frac{L_4^{(2)}}{N_{44}^{(2)}}$$

z_4 ҳисоблаб, (VI .13) элиминацион тенгламаларга қараймиз, ундан z_3 ни топамиз. Кейинчалик z_3 ва z_4 (VI.11) тенгламага қўйиб, z_2 ни топамиз ва охирида (VI.8) тенглама ёрдамида z_1 ни топамиз.

Номаълумларни топиш учун (VI.7), (VI.10), (VI.12) ва (VI.14) биринчи тенгламалар системасидан олинадиган, фақат элиминацион тенгламалар (VI.8), (VI. 11), (VI. 13) ва (VI 15), кераклиги кўриниб турибди,

Кўрилаётган усулда нормал тенгламаларни ечиш биринчи ўзгартирилган тенгламалар ситемасини топиш ва ундан элиминацион тенгламаларни топишни ўз ичига олади.

*Биз Гаусс киритган белгилашнинг ташқи кўринишини ўзгартирдик. Гауссда:

$N_{22}^{(1)}$ = [pbb 1] ёки $N_{22}^{(1)}$ = [qbb 1]; $L_{2}^{(1)}$ = [pbl 1] ёки [W_b 1]; $N_{33}^{(2)}$ = [pcc 2]

ёки $N_{33}^{(2)}$ = [qcc 2]; $L_{3}^{(2)}$ = [pcl 2] ёки $L_{3}^{(2)}$ = [W_c 2] ва ҳ.к.

Бошқа ўзгартирилган тенгламалар системаси керак бўлмай қоларкан. Бунга ишонч ҳосил қилиш учун нормал тенгламалар бошланғич системасининг коэффицент ва озод ҳадларини 31-жадвалнинг пастги қисмига биринчи бошланғич биринчи тенгламаларнинг ва ўзгартирилган системанинг ва элиминацион тенгламаларнинг коэффициентлари ва озод ҳадларини кўчириб ёзамиз. Бунда охирги белгилаш учун $E_{j(j+1)}$, $E_{j(j+2)}$, $E_{j(j+3)}$ ва ҳ.к.ни қўллаймиз(j-гача тенглама учун).

31-жадвалнинг пастки қисми ҳар қандай элементини, (VI.8), (VI.11), (VI. 13) ва (VI.15) тенгликлар структурасини ҳисобга олган ҳолда, 31-жадвалнинг юқори қисмида берилганлардан фойдаланиб топиш мумкинлиги кўриш қийин эмас.

Таблица 31

N_{11}	N_{12}	N_{13}	N_{14}	L_1
	N_{22}	N_{23}	N_{24}	L_2
		N_{33}	N_{34}	L_3
			N_{44}	L_4
N_{11}	N_{12}	N_{13}	N_{14}	L_1
	E_{12}	E_{13}	E_{14}	E_{1L}
	$N_{22}^{(1)}$	$N_{23}^{(1)}$	$N_{24}^{(1)}$	$L_{2}^{(1)}$
		E_{23}	E_{24}	E_{2L}
		$N_{33}^{(2)}$	$N_{34}^{(2)}$	$L_{3}^{(2)}$
			E_{34}	E_{3L}
			$N_{44}^{(3)}$	$L_{4}^{(3)}$
				$E_{4L} = Z_4$

31-жадвал нормал тенгламалар системасини Гаусс алгоритми билан ҳисоблаш схемасига асосланганлиги ётганлиги кўриниб турганлиги такидлаймиз.

Ҳамма системаларнинг биринчи тенгламаси умулашган ҳолда қуйидаги кўринишдаги эквивалент системани ҳосил қилади:

$$\left.\begin{array}{r} N_{11}z_1 + N_{12}z_2 + N_{13}z_3 + N_{14}z_4 + L_1 = 0 \\ N_{22}^{(1)}z_2 + N_{23}^{(1)}z_3 + N_{24}^{(1)}z_4 + L_2^1 = 0 \\ N_{33}^{(2)}z_3 + N_{34}^{(2)}z_4 + L_3^2 = 0 \end{array}\right\} \qquad (VI.16)$$

$$N_{44}^{(3)}z_4 + L^3 = 0$$

Энди қабул қилинган белгилаш системаси тушунарли бўлмоқда. Биринчи тенгламанинг биринчи ноъмаълумидаги ҳар бир ўзгартирилган системадаги шундай пастки индексга эга бўладики, худди биринчи бошланғич система номаъумларидаги квадратик коэффициентлари каби. Бошқа коэффициентларнинг пастки индекслари, худди шундай биринчи бошланғич системанинг тенгламалардаги мос номаълумларники каби. Юқори индекслар, берилган системани олгунга қадар юқотилган номаълумлар сонини кўрсатади.

Ҳар қандай ўзгартирилган тенгламалар системасини осон ёзиш мумкин. Энди, мисол, саккиз тенгламалар системасидан бешта номаълумни чиқаргандан кейин қуйидаги олинади:

$$N_{66}^{(5)}z_6 + N_{67}^{(5)}z_7 + N_{68}^{(5)}z_8 + \mathrm{L}_6^5 = 0$$

$$N_{67}^{(5)}z_6 + N_{77}^{(5)}z_7 + N_{78}^{(5)}z_8 + L_7^{(5)} = 0$$

$$N_{68}^{(5)}z_6 + N_{78}^{(5)}z_7 + N_{88}^{(5)}z_8 + L_8^{(5)} = 0$$

Охирги номаълум учун қийинчиликсиз қуйидаги ифодани ёзиш мумкин

$$z_8 = -\frac{L_8^{(7)}}{N_{88}^{(7)}}$$

Умумий ҳолда

$$z_m = -\frac{L_m^{(m-1)}}{N_{mm}^{(m-1)}}$$

бунда m — номаълумлар сони.

Бошқа элиминацион тенгламаларни ёзиш ҳам қийин эмас, масалан,

$$z_4 = -\frac{N_{45}^{(3)}}{N_{44}^{(3)}}z_5 - \frac{N_{46}^{(3)}}{N_{44}^{(3)}}z_6 - \frac{N_{47}^{(3)}}{N_{44}^{(3)}}z_7 - \frac{N_{48}^{(3)}}{N_{44}^{(3)}}z_8 - \frac{L_4^{(3)}}{N_{44}^{(3)}}$$

Умумий ҳолда

$$z_i = -\frac{N^{(i-1)}_{i(i+1)}}{N^{(i-1)}_{ii}} z_{i+1} - \frac{N^{(i-1)}_{i(i+2)}}{N^{(i-1)}_{ii}} z_{i+1} - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots - \frac{N^{(i-1)}_{im}}{N^{(i-1)}_{ii}} z_m - \frac{L^{(i-1)}_{i}}{N^{(i-1)}_{ii}}$$

ёки

$$z_i = E_{i(i+1)} z_{i+1} + E_{i(i+2)} z_{i+2} + \ldots + E_{im} z_m + E_{iL}. \qquad (VI.17)$$

Ўзгартирилган тенгламалар коэффициентларни белгилаш ва озод ҳадларни қуйидаги қоида бўйича очилади.

Ўзгартирилган системанинг коэффициенти (озод ҳади), худди шундай минус касрли пастки индексли олдинги ўзгартилган система коэффициентига тенг. Махражида олдинги системанинг биринчи квадрат коэффициентлари, суръатда икки коэффициентларининг кўпайтмаси. Биринчи индекси махражидагидек, иккинчиси камайишига қайтариладиган индекс. Озод ҳадни белгилашнинг бир нечта хусусиятини мисолда кўрсатамиз.

$$N^{(5)}_{78} = N^{(4)}_{78} - \frac{N^{(4)}_{57} N^{(4)}_{58}}{N^{(4)}_{55}} \qquad N^{(3)}_{48} = N^{(3)}_{48} - \frac{N^{(2)}_{34} N^{(2)}_{38}}{N^{(4)}_{55}}$$

$$N^{(4)}_{78} = N^{(3)}_{78} - \frac{N^{(3)}_{47} N^{(3)}_{48}}{N^{(3)}_{44}} \qquad N^{(3)}_{44} = N^{(2)}_{44} - \frac{N^{(2)}_{34} N^{(2)}_{34}}{N^{(2)}_{33}}$$

ва ҳ.к.

Озод ҳадлар қуйидагича очилади:

$$L^{(3)}_{7} = L^{(2)}_{7} - \frac{N^{(2)}_{37} L^{(2)}_{3}}{N^{(2)}_{33}}$$

$$L^{(2)}_{3} = L^{(1)}_{3} - \frac{N_{23} L^{(1)}_{2}}{N^{(1)}_{22}}$$

Умумий ҳолда

$$\left.\begin{aligned} N^{(p)}_{ij} &= N^{(p-1)}_{ij} - \frac{N^{(p-1)}_{pi} N^{(p-1)}_{pj}}{N^{(p-1)}_{pp}} \\ L^{(p)}_{i} &= L^{(p-1)}_{i} - \frac{N^{(p-1)}_{pi} L^{(2p-1)}_{pj}}{N^{(p-1)}_{pp}} \end{aligned}\right\} \qquad (VI.18)$$

доимо $j \geq i > p$ бўлади.

Эквивалент системанинг ҳар қандай тенгламаси коэффициентлари ва озод ҳадларини берилган қоида бўйича очиш, эквивалент ситеманинг олдинги тенгламаларининг фақат биринчи бошланғич тенгламалари керак эканлиги талаб қилинишига ишонч ҳосил қиламиз. Яъни, ўзгартириладига система учун фақат биринчи тенгламалар керак. Гаусс алгоритми шунга асосланган.

Ҳар қандай ўзгартирилган системанинг бош диагоналида жойлашган коэффициентларнинг ҳаммаси мусбат эканлигини кўрсатамиз. Чунки квадратлар йиғиндисидир.

Бошланғич тенгламалар системасини кўриб ўтамиз:

$$a_{i1}z_1 + a_{i2}z_2 + \ldots + a_{im}z_m + w_i = v_i' \qquad (i = 1, \ldots, n). \qquad \text{(VI.19)}$$

“Бошланғич” система деганда, тузатмалар параметрик тенгламаларнинг ёки тузатмалар коррелат тенгламаларининг тенг аниқликка келтирилган кўриниши тушунилади. Иккинчи ҳолатда $w_i = 0$.

(VI. 19) тенгламадан биринчи элиминацион тенглама ёрдамида номаълум z_1 ни чиқарамиз. Унда топамиз

$$a_{i2}^{(1)}z_2 + a_{im}^{(1)}z_m + w_i^{(1)} = v_i' \qquad \text{(VI.20)}$$

(VI.20) тенгламанинг ўнг томони ўзгаришсиз қолади, $[pv^2] = min$ шартидан нормал тенгламалар ситемасини олиш мумкин.

$$[a_2^{(1)}a_2^{(1)}]z_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + [a_2^{(1)}a_m^{(1)}]z_m + [a_2^{(1)}w^{(1)}]z_2 = 0$$

ва ҳ. к.

Йиғиндини очамиз $[a_2^{(1)}a_2^{(1)}]$

Чунки

$$a_{i2}^{(1)} = a_{i2} - \frac{N_{12}}{N_{11}}a_{i1}$$

бунда

$$a_{i2}^{(1)}a_{i2}^{(1)} = \left(a_{i2} - \frac{N_{12}}{N_{11}}a_{i1}\right)^2 = a_{i2}a_{i2} - 2a_{i2}a_{i2}\frac{N_{12}}{N_{11}} + a_{i1}a_{i1}\frac{N_{12}N_{12}}{N_{11}N_{11}}$$

Кейинчалик бўлади

$$a_2^{(1)}a_2^{(1)} = a_{i2}a_{i2} - 2a_{i2}a_{i2}\frac{N_{12}}{N_{11}} + a_{i1}a_{i1}\frac{N_{12}N_{12}}{N_{11}N_{11}}$$

Нормал тенгламалар коэффициентларини белгилашни ҳисобга олиб, охирги тенгликни қуйидагича ёзамиз:

$$a_2^{(1)}a_2^{(1)} = N_{22} - 2\frac{N_{12}N_{12}}{N_{11}} + N_{11}\frac{N_{12}N_{12}}{N_{11}N_{11}} = N_{22} - \frac{N_{12}N_{12}}{N_{11}}$$

ёки

$$a_2^{(1)}a_2^{(1)} = N_{22} - \frac{N_{12}N_{12}}{N_{11}}$$

(VI.18) формулага асосан

$$a_2^{(1)}a_2^{(1)} = \mathrm{N}_{22}^{(1)}$$

Яъни, коэффициент $N_{22}^{(1)}$— квадратлар йиғиндиси. Шуни исботлаш талаб қилинган эди.

Ишониш қийин эмас ва

$$a_2^{(1)}a_3^{(1)} = \mathrm{N}_{23}^{(1)}$$

$$a_2^{(1)}w^{(1)} = \mathrm{L}_2^{(1)}$$

ва ҳ. к.

(VI. 20) системадан иккинчи элиминацион тенглама ёрдамида z_2 номаълумни чиқариб, топамиз

$$N_{33}^{(2)} = a_2^{(1)}a_3^{(1)}$$

ва ҳ. к .

Шундай қилиб нормал тенгламаларнинг ўзгартирилган системаси биринчи бошланғич системанинг ҳамма хоссаларини сақлаганлигини кўрсатдик. Бош диагонал бўйича квадрат коэффициентлари жойлашади, қолган коэффициентлар диагоналдаги квадратик коэффициентларга нисбатан симметрик жойлашади. Бу ҳолат – нормал тенгламалар системасини ечиш учун номаълумларни кетма - кет йўқотиш усулининг катта ютуғидир.

2. Нормал тенгламала системасининг шартланганлиги (обусловленность)

Нормал тенгламалар системасининг шартланганлигининг(обусловленность) энг муҳим кўрсаткичи – *D* системанинг кўрсаткичи(определитель).

Нормал тенгламалар системасининг кўрсаткичини эквивалент тенгламалар системасидан осон олиш мумкин. Бу системанинг коэффициентлар матрицаси учбурчакдир. Учбурчакли матрицанинг кўрсаткичи диагонал элементларининг кўпайтмасига тенглиги матрицалар назариясидан маълум. Шунинг учун,

$$D = N_{11}\ N_{22}^{(1)}\ N_{33}^{(2)} \ldots\ldots\ldots N_{mm}^{(m-1)} \qquad \text{(VI.21)}$$

Бунда D қиймати ҳар доим мусбат эканлиги кўриниб турибди.

Бир хил тип система, бир хил тартибдаги ва бир хил ўлчамли бош тенгламалар коэффициенти учун D қанчалик катта бўлса, шартланганлик шунчалик яхши бўлади.

Система шартланганлигининг тўлиқ характеристикаси учун коэффициентлар матирицасининг “шахсий сони” жуда мураккаб ҳисоблаш ишларини бажаришга тўғри келади. Амалиётда бажариши қийин.

Нормал тенглама системасининг яхши шартланганлик белгиларини келтириб ўтамиз:

1. Квадратик коэффициентлари квадратиксиз коэффицентларини абсолют қиймати бўйича сезиларли каттадир. Ҳамма квадратсиз коэффициентлар нулга тенг бўлса ёки коэффицентлар матрицаси диагональ бўлса энг яхши ҳолат ҳисобланади.

2. Квадратсиз коэффициентлар бош диагонол атрофида гуруҳлашади ва матрицанинг бошқа элементлари нулга тенг бўлади. Бундай матрица диагонал яқини матрицаси дейилади.

3. Озод ҳадлари унчалик катта эмас.

Берилган белгилар ойдин, исботлашга ўрин йўқ. Ҳар қандай тенг шароитда системанинг катталаши шартланганликни ёмонлаштиради.

3. Нормал тенгламаларни ечилишини текшириш усуллари

1. Ёрдамчи номаълумлар бўйича текшириш. Номаълумларни киритамиз

$$u_i = z_i - 1 \ \ (i = 1, \ldots, m). \qquad \text{(VI.22)}$$

Бунда $z_i = u_i + 1\ (i = 1, \ldots, m)$ ва ёзиш мумкин

$N_{j1}(u_1 + 1) + N_{j2}(u_2 + 1) + \ldots + N_{jm}(u_m + 1) + L_j =$

$= N_{j1}u_1 + N_{j2}u_2 + \ldots + N_{jm}u_m + (N_{j1} + N_{j2} + \ldots + N_{jm} + L_j) = 0.$

Лекин

$N_{j1} + N_{j2} + \ldots + N_{jm} + L_j = \sum_j,$

Шартланганлик тенгламалар системасининг ечиш аниқлигини кўрсатади. Ёмон шартланганликда, ҳисоблаш жараёнида яхлитлаш хатолиги боғлиқ бўлган, номаълумлар катта хатолик билан ҳосил бўлади.

Шунинг учун тенгламалар системасини ёзиш мумкин

$$\left.\begin{array}{l} N_{11}u_1 + \ldots + N_{1m}u_m + \sum_1 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad . \\ N_{1m}u_1 + \ldots + N_{mm}u_m + \sum_m = 0 \end{array}\right\} \qquad \text{(VI.23)}$$

Қуйидаги натижа олинди: агар тенгламаларни $\sum_\text{i}$ $(i = 1, \ldots, m)$ га тенг, озод ҳад билан қайта ечсак, (VI.22) тенгликка мувофиқ, асосийдан бирга фарқ қилган текшириш номаълумларини оламиз..

Бу текшириш учун фақат битта графага ёзиладиган, тенгламанинг янги номаълумларини ҳисоблаш, коэффициентлари ва озод ҳадлари йиғиндисининг ёзиш керак бўладиган, ўзгартиришларнини қайтаришга тўғри келади.

2. Оралиқ текширишлар. Тенгламалар системасини ечишнинг қийинлиги ва фақат катта ҳажмдаги ҳисоблашларда, кейинги ҳисоблаш ишлари натижалари олдинги ҳисоблаш ишлари натижасининг нечоғлик хатосиз бажарилишига боғлиқ. Агар олдинги ҳисоблаш ишларида қўйилган хатолик кейинги ҳисоблаш ишларнинг нотўғри бажарилганлигига олиб келади. Шунинг учун нормал тенгламаларни ечишда ҳисоблаш натижаларини оралиқ текшириш жуда муҳим рол ўйнайди.

Навбатдаги ўзгартиришнинг бошида биринчи текшириш – қуйидаги тенглама ёрдамида эллимацион тенгламани текшириш

$$-1- \frac{N_{i(i+1)}^{(i-1)}}{N_{ii}} - \frac{N_{i(i+2)}^{(i-1)}}{N_{ii}} - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots - \frac{N_{im}^{(i-1)}}{N_{ii}} - \frac{L_i^{(i-1)}}{N_{ii}} \approx - \frac{L_i^{(i-1)}}{N_{ii}} \qquad \text{(VI.24)}$$

бунда $\sum_i$ — i-чи эквивалент системанинг коэффициенти ва озод ҳадининг йиғиндиси.

Ечиш схемасининг $\sum$ графасига (VI. 24) тенгликнинг чап қисмининг аниқ қийматини кўчириб ёзиш керак. Ўнгдагиси текшириш учун, қиймати ҳеч жойда ёзилмайди.

Ҳар бир кейинги эквивалент тенгламанинг (“қаторлар йиғиндиси бўйича” текшириш) коэффициентлари ва озод ҳадларини тўғрилигини текшириш учун асосий оралиқ текшириш қуйидаги формула билан бажарилади

$$N_{ii}^{(i-1)} + N_{i(i+1)}^{(i-1)} + \ldots\ldots\ldots\ldots + N_{im}^{(i-1)} + L_i^{(i-1)} \approx L_i^{(i-1)} \qquad \text{(VI.25)}$$

бунда $\sum_i$ — $\sum$ қийматни ўзгартириш натижаси.

Миқдор $\sum$ билан бу текширишни амалга ошириш учун бошқа графаларда қандай ўзгартириш бажарилган бўлса шундай ўзгартириш бажарилади. $\sum$ графага (VI. 25) тенгликнинг чап қисмидаги аниқ қийматлар кўчирилади.

(VI. 25) тенгликнинг тўғрилигини исботлаймиз.

(VI. 23) ни эътиборга олиб, иккита тенгликни қуйидагича ёзиш мумкин.

$$N_{ii}^{(i-1)} z_i + N_{i(i+1)}^{(i-1)} z_{i+1} + \ldots\ldots\ldots\ldots N_{im}^{(i-1)} z_m + L_i^{(i-1)} = 0$$

$$N_{ii}^{(i-1)} u_i + N_{i(i+1)}^{(i-1)} u_{i+1} + \ldots\ldots\ldots\ldots N_{im}^{(i-1)} u_m = -\Sigma_i^{(i-1)}$$

Юқори тенгликдан пастки тенгликни айириб ва (VI. 22) тенгликни эътиборга олиб топамиз

$$N_{ii}^{(i-1)} z_i + N_{i(i+1)}^{(i-1)} z_{i+1} + \ldots\ldots\ldots\ldots N_{im}^{(i-1)} z_m + L_i^{(i-1)} = -\Sigma_i^{(i-1)}$$

Ва шуни исботлаш талаб қилинган эди.

Параметрик тенглаштириш усули нормал тенгламаларини ечишда яна *[pll]* ва *[psl]* қийматлар схемага кўчирилиб ёзилади. Уларни белгилаймиз:

$$\left.\begin{aligned} [pll] &= N_{(k+1)(k+1)} \\ [psl] &= \textstyle\sum_{k+1} \end{aligned}\right\} \quad \text{VI.26)}$$

Бунда нормал тенгламаларни ечишнинг **охирги текшириш тенгламаси**ни оламиз

$$N_{(k+1)(k+1)}^{(k)} = \Sigma_{k+1}^{(k)}$$

Ёки бундай

$$N_{(k+1)(k+1)}^{(k)} = [pv^2].$$

3. $[pv^2]$ бўйича текшириш.

Нормал тенгламалар системасига, параметрик усулда тенглаштиришда ҳосил бўладиган, нормал тенгламаларнинг коэффициентлари ва озод ҳадлари учун биз томонидан қабул қилинган белгилашларни ҳисобга олиб тенглик (V.59) ни қўшамиз.

$$N_{11}\tau_1 + \ldots + N_{1k}\tau_k + L_1 = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$N_{1k}\tau_1 + \ldots + N_{kk}\tau_k + L_k = 0,$$

$$L_1\tau_1 + \ldots + L_k\tau_k + N_{(k+1)(k+1)} = [pv^2],$$

бунда

$$N_{(k+1)(k+1)} = [pll].$$

Янги k+1 тенглама k+1 номаълум билан олинган система нормал тенгламаларнинг ҳамма хоссаларини сақлайди. Шунинг учун бу системадан ҳамма номаълумларни тенгламадан τ йўқотиб топамиз

$$N^{(k)}_{(k+1)(k+1)} = [pv^2] \qquad \text{(VI.27)}$$

Шундай қилиб $N^{(k)}_{(k+1)(k+1)} = [pll]$ миқдор бош диагоналда турганлиги учун квадрат коэффициентининг ўзгарувчанлик ролини ўйнайди. Бунда $N^{(k)}_{(k+1)(k+1)} =$ $[pv^2]$ қиймат қуйидагича очилади:

$$N^{(k)}_{(k+1)(k+1)} = N_{(k+1)(k+1)} + E_{1L}L_1 + E_{2L}L^{(1)}_2 + E_{3L}L^{(2)}_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + E_{kL}L^{(k-1)}_k$$

ёки

$$[pv^2] = [pll] + \sum_{i=1}^{k} E_{iL}L^{(i-1)}_i \qquad \text{(VI.28)}$$

(VI.28) кўринишдаги ифода қоидасини қуйидаги таърифлаш мумкин: **$[pv^2]$ миқдори =*[pll]* плюс ечиш схемасининг юқорида жойлашган сонлар *L* элиминацион графаси кесишган қатордаги сонлар кўпайтмасининг йиғиндиси тенг.**

Агар *L* графа ўрнига N_{ii} графа фойдаланган бўлса, эквивлент тенгламанинг ҳамма квадратик коэффициентлари $N^{(i-1)}_{ii}$ ушбу қоида бўйича ҳисобланади.

(VI.28) формула бўйича ҳисобланган $[pv^2]$ қиймати, коэффициентлар жадвалида олинган миқдор қийматига, ҳисоблаш аниқлиги чекида бўлиши керак.

Коррелат усулида тенглаштиришда ҳам худди шундай текшириш амалга оширилади.

Коррелат тенглаштириш усулида ҳосил буладиган (V.61) тенгликни нормал тенгламалар системасига улаймиз

$$N_{11}k_1 + \ldots + N_{1r}k_r + W_1 = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$N_{1r}k_1 + \ldots + N_{rr}k_r + W_r = 0,$$

$$W_1k_1 + \ldots + W_rk_r + N_{(r+1)(r+1)} = -\ [pv^2],$$

бунда

$$N_{(r+1)(r+1)} = 0.$$

Қайта олинган система нормал тенгламалар хоссаларини сақлайди. Шунинг учун ҳамма ундан номаълумлар *k* чиқариб ташлаб, топамиз

$$-\ [pv^2] = N^{(r)}{}_{(r+1)(r+1)} = N_{(r+1)(r+1)} + E_{1w}{*}\ W_1 + E_{2w} * W_2{}^{(1)} + \ldots,$$

ёки

$$-\ [pv^2] = \sum_{i=1}^{k} E_{iW} W_i^{(i-1)} \qquad \text{(VI.29)}$$

Яъни, қиймат *[pv²]*, ечиш схемасида турувчи эллимацион қатор ва *W* графа кесишган сон билан юқорида жойлашган сонлар кўпайтмасининг йиғиндисига тенг. Ушбу қоида бўйича олинган [*pv²*] қиймат коэффициентлар жадвалининг «*v*» графасида кейинчалик ҳисобланган ва (V.61) формула билан ҳисобланган иккита қиймат билан таққосланади.

4. Номаълумларни текшириш. Ҳамма номаълумларни топгандан кейин тенгламалар йиғиндиси бўйича қуйидаги текшириш бажарилади:

$$(\textstyle\sum_1 - L_1) * z_1 + (\sum_2 - L_2) * z_2 + \ldots + (\sum_m - L_m) * z_m + [L] = 0. \qquad \text{(VI.30)}$$

Аммо, катта тенгламалар системасини ечишда мос элиминацион тенгламалардан ҳар бир навбатдаги номаълумларни топгандан кейин эквивалент тенгламаларга номаълумларни қўйиб текшириб чиқиш керак. Ёки коэффициентлар йиғиндисидан ва *L* дан фойдаланиб, текшириш номаълумларини *u* =z — 1 ҳисоблаш керак.

Тенглаштириш ҳисоблари натижасини охирги текшириш учун, ўлчанган миқдорлар орасидаги математик муносабатларда боғланмаслик хатолиги йўқотилдими текширилади. Агар тенглаштириш параметрик усулда бажарилган бўлса, ундан ташқари тенглаштиришда ўлчанган миқдорларни тангланган кераклинома номаълумлар орқали ифодаланган тенгликнинг тўғрилиги текширилади.

Тенгламаларни ечишнинг тўғрилигини бундан ташқари текшириш, тенглаштириш натижаси ўлчаш сифати ва бошланғич берилганлар асосида таҳлил қилинади. Тузатмаларнинг миқдори бўйича ва уларнинг геодезик тўрга тақсимланишига қараб фикр юритилади. Нормал *v* тузатма абсолют қиймати бўйича белгиланган ўлчаш хатолиги чекидан ошмаслиги керак. Уларнинг тақсимланиши абсолют қиймат бўйича озми кўпми бир текис бўлиши керак. Йўл қўйилмаган *v* катта тузатмалар бош берилганлар ёки ўлчашнинг систематик хатоликлари сезиларли таъсири эканлигини билдиради. Бошланғич берилганлар атрофида катта хатоликларнинг тақсимланиши бошланғич берилганлар хатолигининг анчагина таъсири борлигидан гувоҳлик беради.

Назорат саволлари:

1. Гаусс алгоритминг моҳияти?
2. Нормал тенгламала системасининг шартланганлиги нима?
3. Коррелат усулда тенглаштиришнинг кетма-кетлигини айтиб беринг?

Адабиётлар рўйҳати:

1. Jo’rayev D.O. Geodezik o’lchashlarni matematik ishlash nazariyasi. Darslik. 2-qism. Eng kichik kvadratlar usuli. Toshkent, 2014. 160 b.

2. Маркузе Ю.И. Теория математической обработки геодезических измерений. Книга 2: Основы метода наименьших квадратов и уравнительных вычислений . М., МИИГАиК 2005, 288 с.

5 МАЪРУЗА ТЕНГЛАШТИРИШНИ МАТРИЦА НАЗАРИЯСИДАН ФОЙДАЛАНИБ ЕЧИШ

РЕЖА:

1. Параметрик тенглаштириш назариясининг матрица кўринишидаги мазмуни**.**
2. Коррелат тенглаштириш назариясининг матрицада ифодаланиши

Таянч иборалар: Матрица. Симметрик матрица. Диагонал матрица. Тескари матрица.

1. Параметрик тенглаштириш назариясининг матрица кўринишидаги мазмуни

Параметрик тенгламалар системаси вазнлар P матрицаси билан матрица кўринишда қуйидагича бўлади:

$$\mathrm{V} = \mathrm{AT} + L \qquad (2.11)$$

Бу матрицага кирувчи ифодалар очилганда қуйидагича бўлади:

$$V = \begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ v_n \end{vmatrix}; \qquad A = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \dots & t_1 \\ a_2 & b_2 & \dots & t_2 \\ .. & \dots & \dots & \dots \\ a_n & b_n & \dots & t_n \end{vmatrix}; \qquad T = \begin{vmatrix} \delta T_1 \\ \delta T_2 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \delta T_t \end{vmatrix};$$

$$L = \begin{vmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ l_n \end{vmatrix}; \qquad P = \begin{vmatrix} p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & p_n \end{vmatrix}.$$

Матрицалар ўзгартиришлари ёрдамида тузатмалар параметрик тенгламасини топамиз (2.6).

Энг кичик квадратлар шарти (2.1) матрица ёзувида қуйидаги кўринишда бўлади:

$$V^T P V = \min.$$

Буҳолатда (2.12) га асосан матрицалар кўпайтиришни бажарсак, шартнинг одатдаги кўринишини оламиз $[pvv]=min$.

Матрица (2.11) ифодасидан транспонирован виктор куринишини осон оламиз.

$$V^T = T^T A^T + L^T.$$

(2.11) ва (2.13) ифодаларни (2.12) шартга қўйиб, топамиз

$$V^T PV =(T^T A^T + L^T)P(AT+L) =(T^T A^T + L^T P)(AT+L) =$$

$$=T^T A^T PAT+L^T PAT + T^T A^T PL+L^T PL = \min.$$

Бу ифоданинг ҳар бир қўшилувчиси — сон, яъни 1×1 размерли матрица эканлигини кўрсатамиз. Умуман олганда, T^T матрицаси размер 1 х t размерга эга, A^T матрицаси эса $t \times$ n — размерга эга. Бундан $T^T A^T$ кўпайтмаси 1 х n размерга эга. Бу кўпайтмани $n \times n$ размерли P матрицага кўпайтирищдан кейин, 1 х n размерли $T^T A^T P$ матрица оламиз. $T^T A^T PA$ кўпайтманинг размери 1 х t га тенг бўлган, биринчи қўшилувчининг размери эса 1×1 тенглигини, шунга ухшаш топамиз. Бошқача айтганда, бу қўшилувчини ҳисоблаш натижасида сон олинади. Шунга ухшаш қолган қўшилувчилар ҳам — сон. Сон —**симметрик матрица**нинг, $C = C^т$ тенглик тўғрилиги учун, ҳусусий ҳолати. Шунинг учун, $P = P^T$ тенгламадан келиб чиққан ҳолда.

$$L^T PAT = T^T A^T PL .$$

Энди энг кичик квадратлар шарти (2.12) кўринишни олади

$$V^T PV = T^T (A^T PA)T + 2(L^T PA)T+L^T PL = \min.$$

Агар вектор бўйича ҳусусий ҳосила нулга тенг бўлса бу шарт қаноатлантирилган бўлади, яъни

$$\frac{\partial(V^T PV)}{\partial T} = 2T^T (A^T PA) + 2(L^T PA) = 0.$$

Қисқартириш ва ўрин алмаштириш натижасида

$$(A^T PA)^T T +A^T PL=0.$$

$A^T PA$ матрица симметриклигига осон ишонамиз. Умуман олганда $(A^T PA)^T = A^T PA$. Уни $N= A^T PA$ орқали белгилаб, охирида ёзамиз.

$$NT +A^T PL=0. \qquad (2.14)$$

Шундай қилиб, нормал тенгламалар системасининг (2.9) матрица кўринишини олдик. Бунда N — коэффициентларнинг матрицаси, A^TPL – озод ҳадлар вектори.

Матрица N қуйидагига тенглигига ишонч ҳосил қиламиз:

$$N = A^TPA= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & ... & a_n \\ b_1 & b_2 & ... & b_n \\ ... & ... & ... & ... \\ t_1 & t_2 & ... & t_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & p_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & p_n \end{vmatrix} \mathrm{X} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & ... & t_1 \\ a_2 & b_2 & ... & t_2 \\ ... & ... & ... & ... \\ a_n & b_n & ... & t_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} [paa] & [pab] & ... & [pat] \\ [pab] & [pbb] & ... & [pbt] \\ ... & ... & ... & ... \\ [pal] & pbt & ... & [ptt] \end{vmatrix},$$

Озод ҳадлар вектори эса:

$$A^TPL= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & ... & a_n \\ b_1 & b_2 & ... & b_n \\ ... & ... & ... & ... \\ t_1 & t_2 & ... & t_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & p_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & p_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} l_1 \\ l_2 \\ ... \\ l_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} [pal] \\ [pbl] \\ ... \\ [ptl] \end{vmatrix}.$$

Бу натижаларни формулага (2.14) қўйиб, матрицаларни кўпайтиргандан кейин нормал тенгламалар систтемасининг одатдаги кўринишини (2.9) топамиз

Номаълумлар T векторини топиш учун матрица тенгламасини чапдан **тескари матрицага N^{-1}** кўпайтириш кифоя. N^{-1} $N =$ E эканлигини эътиборга олиб, изланаётган векторни топамиз:

$$T = -N^{-1} A^TPL=BL \qquad (2.15)$$

Бундан кўринадики, ўлчаш натижаларига (2.5) боғлиқ бўлган L векторни билиб, тенглаштириладиган параметрларнинг тахминий қийматига T тузатма векторини ҳисоблаш мумкин бўлган, **чизиқли ўзгартирилган матрицани** $B=-N^{-1}A^TP=-(A^TPA)^{-1}A^TP$ олдик. Шундай қилиб, ўзгартирилган матрицани B топиш учун, ўлчаш вазнлари матрицаси P ва (2.6) тузатмалар параметрик тенгламаси коэффициентлар матрицаси A кифоя. Виктор T (2.15) ни (2.11) тенгламага қўямиз. Натижада ўлчанган миқдорларга тузатмалар V векторни топамиз:

$$V = - AN^{-1} A^TPL+DL \qquad (2.16)$$

Бу ҳолда чизиқли ўзгартирилган матрица тенг:

$$D = E - AN^{-1}A^TP = E - A(A^TPA)^{-1} A^TP = E+AB,$$

Бунда E — бирланган матрица, B — чизиқли ўзгартирилган матрица (2.15). Кўриниб турибдики, ўлчанган миқдорларга ўзгарувчи L векторнинг V тузатма векторга ўзгарадиган D матрицани топиш учун A ва P матрицани билиш кифоя.

Маркшейдерлик геодезик тўрларни қайта ишлашда қўлланиладиган матрица N^{-1} **вазн кэффициентлари матрицаси** дейилади ва Q ҳарфи билан белгиланади. Унинг ёрдамида на фақат изланадиган тузатмалар вектори *Т* топилади. Унинг ёрдамида тенглаштирилган параметрларнинг аниқлиги баҳоланади ва уларнинг функциясининг аниқлиги ҳам.

Тенглаштириш ҳисобларининг назариясини матрицада кўрсатиш одатдаги алгебра усулларидаан фойдаланишдан осонроқ, яққол ва осон ўзгартиришлар билан анча осонроқ. Бундан ташқари матрица алгебрасидан фойдаланиш янги тушунчаларни олишга имкон беради. Қандайдир боғланган миқдорларнинг мажмуаси умумлаштирилган дисперсиясини жамлайдиган, **корреланион матрица**, тушунчани алоҳида ажратиш керак. Боғлиқ бўлмаган миқдорларнинг ҳусусий ҳолида корреляцион матрица диагоналли. Мисол, юқоридаги фойдаланилган *P* матрица боғланмаган ўлчашларни тафсифлайди.

2 КОРРЕЛАТ ТЕНГЛАШТИРИШ НАЗАРИЯСИНИНГ МАТРИЦАДА ИФОДАЛАНИШИ

Юқорида айтилганидек, тузатмалар шартли тенгламалар системаси матрица кўринишида қуйидаги кўринишда бўлади

$$BV + W = 0, \qquad (3.15)$$

бунда *B* — тузатмалар шартли тенгламалар коэффициентлари матрицаси; *V* — изланаётган тузатмалар вектор; *W* — боғланмаслик хатоликлари вектори ω_j.

(3.15) системани ечамиз. Бунинг учун энг кичик квадратлар шартидан фойдаланамиз. Унинг матрица ёзуви кўриниши қуйидагича:

$$[pvv] = V^T PV = \min, \qquad (3.16)$$

бунда *P* — ўлчанган миқдорлар вазнининг диагонал матрицаси:

$$P = \begin{vmatrix} p_1 & & & 0 \\ & p_2 & & \\ & & \dots & \\ 0 & & & p_n \end{vmatrix}$$

(3.15) системани ечиш учун Лагранжа функциясини тузамиз:

$$\Phi = V^T PV - 2K^T (BV + W) = \min,$$

бунда *K* — номаълумлар коррелати K_j вектори. Бу функциянинг минималлик шартини сақлаш учун ундан V вектор бўйича ҳусусий ҳосила оламиз ва нулга тенглаштирамиз. Натижада оламиз:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial V} = 2V^T P - 2K^T B = 0.$$

Бундан эга бўламиз:

$$V^T P = K^T B \qquad \text{ёки} \qquad PV = B^T K.$$

Қидирилаётган векторни топамиз, чапдан иккинчи тенгликни P^{-1} тескари матрицага кўпайтириб:

$$V = P^{-1} B^T K. \qquad (3.17)$$

Бу ифодание (3.15) формулага қўйгандан кейин қуйидаги тенгламани оламиз:

$$BP^{-1} B^T K + W = 0. \qquad (3.18)$$

Матрица B ни (3.9) тенгликдан олиб $N = BP^{-1}B^T$ матрицалар кўпайтмасини очамиз. Бунда P^{-1} матрица қуйидагига тенглигини эътиборга оламиз:

$$P^{-1} = \begin{vmatrix} p_1^{-1} & & & 0 \\ & p_2^{-1} & & \\ & & \dots & \\ 0 & & & p_n^{-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} q_1 & & & 0 \\ & q_2 & & \\ & & \dots & \\ 0 & & & q_n \end{vmatrix}$$

Ундан:

$$N = BP^{-1}B^T = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_1 & h_2 & \dots & h_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} q_1 & & & 0 \\ & q_2 & & \\ & & \dots & \\ 0 & & & q_n \end{vmatrix} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_1 & h_2 & \dots & h_n \end{vmatrix}$$

Матрицалар кўпайтиришларидан кейин топамиз

$$N = BP^{-1}B^T = \begin{vmatrix} [qaa] & [qab] & \dots & [qah] \\ [qab] & [qbb] & \dots & [qbh] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ [qah] & [qbh] & \dots & [qhh] \end{vmatrix} \qquad (3.19)$$

Олинган натижадан кўриниб турибди, (3.18) формула нормал тенгламалар системасининг матрица ёзуви кўринишида эканлиги. Коррелат вектори K таркибига кирувчини ҳисоблаш учун чапдан (3.18) ифодани тескари матрицага N^-

$^1 = (BP^{-1}B^T)^{-1}$ кўпайтириш керак. Натижада топамиз:

$$K = -N^{-1}W. \qquad (3.20)$$

Агар бу қийматни (3.17) формулага қўйсак қидирилаётган тузатма векторини топамиз.

$$V = -P^{-1}B^T N^{-1}W = DW. \quad (3.21)$$

Кўриниб турибдики, боғланмаслик хатолиги W вектори қиймати бўйича тузатма V векторини ҳисоблайдиган **чизиқли ўзгартиришлар матрицасини** топдик.

$$D = -P^{-1}B^T N^{-1} = -P^{-1}B^T (BP^{-1}B^T)^{-1}, \qquad (3.22)$$

Бунда D матрицани аниқлаш учун иккита матрица B ва P га эга бўлиш кифоя.

Назорат саволлари:

1. Параметрик тенглаштириш назариясининг матрица кўринишидаги мазмуни**.**
2. Коррелат тенглаштириш назариясининг матрицада ифодаланиши

Адабиётлар рўйҳати:

1. Jo’rayev D.O. Geodezik o’lchashlarni matematik ishlash nazariyasi. Darslik. 2-qism. Eng kichik kvadratlar usuli. Toshkent, 2014. 160 b.

2. Маркузе Ю.И. Теория математической обработки геодезических измерений. Книга 2: Основы метода наименьших квадратов и уравнительных вычислений . М., МИИГАиК 2005, 288 с.

ГЛОССАРИЙ

Абрис	Коллимацион хато
Алидада	Карта
Асбоб горизонти	Кўриш трубаси
Азимут - ҳақиқий - магнит	Марка
Базис	Масштаб - кўндаланг - чизиқли - сонли
Бурчак - горизонтал - параллактик - қиялик - трасса бурилиши	Мензула
Буссоль	Мензулавий съёмка
Верньер	Меридиан - географик - магнитный - ўқ
Вертикал бурчак	Микроскоп шкалали - штрихли
Визир ўқи	Нивелирлаш геометрик - юза - техник
Географик координата	Номенклатура
Геометрик тўр	Нўль ўрни
Горизонталь	Объектив
Горизонтал айлана	Окуляр
Дальномер	Ориентирлаш
Дирекцион бурчак	Пикет
Домер	План
Ер эгрилиги	Тахеометр
Калька баландлиги	Теодолит
	Транспортер