



**FARG'ONA DAVLAT UNIVERSITETI  
HUZURIDAGI PEDAGOG KADRLARNI  
QAYTA TAYYORLASH VA ULARNING  
MALAKASINI OSHIRISH MINTAQAVIY  
MARKAZI**



**TABIY JARAYONLARNI  
MATEMATIK MODELLASHTIRISH**



**O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI  
OLIIY TA‘LIM, FAN VA INNOVATSIYALAR VAZIRLIGI**

**OLIIY TA‘LIM TIZIMI KADRLARINI QAYTA TAYYORLASH VA  
MALAKASINI OSHIRISH INSTITUTI**

**FARG‘ONA DAVLAT UNIVERSITETI HUZURIDAGI PEDAGOG  
KADRLARNI QAYTA TAYYORLASH VA ULARNING MALAKASINI  
OSHIRISH MINTAQAVIY MARKAZI**

**TABIIY JARAYONLARNI MATEMATIK  
MODELLASHTIRISH  
MODULIDAN  
O‘QUV- USLUBIY MAJMUA**

Modulning ishchi dasturi Oliy ta'lim, fan va innovatsiyalar vazirligining 2024-yil 27 dekabrda 485-sonli buyrug'i bilan tasdiqlangan oliy ta'lim muassasalari rahbar kadrlarini qayta tayyorlash va malaka oshirish yo'nalishlari o'quv reja va dasturlariga muvofiq ishlab chiqilgan.

**Tuzuvchi:** Karimov K. - “Matematik analiz va differensial tenglamalar” kafedrası dosenti, fizika-matematika fanlari doktori

**Taqrizchi:** Yusupova A. – “Matematika” kafedrası professori, fizika-matematika fanlari nomzodi

*FarDU Ilmiy Kengashining qarori bilan tasdiqqa tavsiya qilingan  
(2025 yil 27 dekabrda 5- sonli bayonnoma).*

**M U N D A R I J A**

|             |                                                                                |            |
|-------------|--------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>I.</b>   | <b>KIRISH.....</b>                                                             | <b>4</b>   |
| <b>II.</b>  | <b>ISHCHI DASTUR.....</b>                                                      | <b>7</b>   |
| <b>III.</b> | <b>NAZARIY MASHG‘ULOTLAR MATERIALLARI.....</b>                                 | <b>13</b>  |
| <b>IV.</b>  | <b>AMALIY MASHG‘ULOTLAR MATERIALLARI.....</b>                                  | <b>73</b>  |
| <b>V.</b>   | <b>MODULNI O‘QITISHDA FOYDALANILADIGAN<br/>INTERFAOL TA’LIM METODLARI.....</b> | <b>91</b>  |
| <b>VI.</b>  | <b>GLOSSARIY .....</b>                                                         | <b>101</b> |
| <b>VII.</b> | <b>ADABIYOTLAR RO‘YXATI .....</b>                                              | <b>106</b> |

## KIRISH

Dunyo paydo bo'libdiki, inson o'zining yashashi uchun qulay turmush tarzini yaratib, yaxshi yashashga harakat qilgan. Shuningdek, tabiat tomonidan sodir bo'ladigan har xil jarayonlarni sabablarini o'rganib, ular oqibatida sodir bo'ladigan turli salbiy ta'sirlarni oldini olishga va ularga moslashishga intilib kelgan.

Insoniyat sivilizatsiyasining dastlabki bosqichlaridayoq tevarak atrofdagi sodir bo'ladigan jarayonlarni kuzatishda nisbatan murakkabroq bo'lgan real ob'ektlarni unga nisbatan soddaroq bo'lgan boshqa ob'ektlar bilan almashtirish yoki akslantirish orqali o'rganishdan boshlagan. Ibtidoiy jamoa davrida g'orlarning devorlarida, qoya toshlarda turli xil hayvonlarni suratlarini chizilganligi, shuningdek, ovchi o'zi tutgan har bir ovini ma'lum bir belgi yoki tosh orqali qabiladoshlariga ma'lum qilganligi tarixdan ma'lum. Ushbu misollardan ko'rinib turibdiki, biror predmet yoki ob'jektning boshqa bir real yoki mavhum predmet yoki ob'jektga akslantirish orqali o'rganishning qulayliklari insonlarga azaldan ma'lum bo'lgan.

Insoniyat sivilizatsiyasining keyingi bosqichlarida turmush tarzining rivojlanishi, insonlar o'rtasidagi muoamala darajasining kengayishi jamiyat uchun umumiy bo'lgan urf-odatlarini, qonun qoidalarni shakllanishiga olib keldi. Bu kabi qonun qoidalarni turli xil belgi yoki tasvirlar orqali matnlarda bayon qilinishi qadimgi Misr yozuvini paydo bo'lishida katta turtki bo'ldi va jamiyat fikrining asbstraktlanish jarayonini rivojlanishiga katta sabab bo'ldi.

Keyinchalik insonlar o'rtasida oldi-sotdi va tovar ayirboshlash amallarining paydo bo'lishi sanoq sistemasining, shuningdek, natural sonlarni paydo bo'lishiga va ular ustida turli arifmetik amallarni bajarishga sabab bo'ldi. Bu esa jamiyat fikrining asbstraktlanish jarayonini yana bir yuqori pog'onaga ko'tarilganligini va jamiyatni keyingi rivojlanishlariga katta poydevor yaratilganligini anglatardi.

Demak, jamiyat fikrining asbstraktlanish jarayoni bosqichma-bosqich yoki pog'onama-pog'ona sodir bo'lib, sivilizatsiyaning avvalgi bosqichlaridagi asbstraktlanish jarayoni sivilizatsiyaning keyingi rivojlanishlariga katta zamin

yaratgan. Shuningdek, asbstraktlanish jarayoni real ob'yektni unga nisbatan qulayroq bo'lgan boshqa real (toshlar) yoki mavhum ob'yektlar (yozuv, rasm, chizma, belgi va h.k.) bilan akslantirish yoki almashtirish orqali real ob'yektni ifodalashdir.

Asbstraktlanish jarayoni yozuv, rasm, chizma, belgi, nuqta, qo'shish, ayirish kabi abstrakt tushunchalarning ham paydo bo'lishiga sabab bo'ldi. Bu tushunchalar insonlar o'rtasidagi muomala darajasini yanada o'sishiga, atrof muhitda sodir bo'layotgan voqealarni anglashga, tushunishga katta xizmat qilgan va xizmat qilib kelmoqda.

Sivilizatsiyaning so'ngi bosqichlarida asbstraktlanish jarayonining keskin rivojlanishi fanlar shohi bo'lmish matematika fanining paydo bo'lishi va uning shakllanishiga olib keldi. Bu fan abstrakt tushunchalar orqali atrof muhitda va tabiatda sodir bo'layotgan voqealarni o'rganish quroli sifatida katta ahamiyatga ega.

Ma'lumki, inson tabiatda sodir bo'ladigan hodisa va jarayonlarni sodir bo'lish sabablarini, qonun-qoidalarini bilsa, bu hodisa va jarayonlarning salbiy oqibatlaridan o'z vaqtida himoyalana oladi. Bu esa insonni umrini, yashash vaqtini uzaytirish imkonini yaratadi. Shu sababli inson paydo bo'lgan dastlabki vaqtlardan hozirgacha atrof muhitni va unda sodir bo'ladigan hodisa (jarayon) larni o'rganib kelmoqda. Atrof muhit esa doim o'zgarib turadi. O'zgarish sabablari esa turlichadir.

Bizni qurshab turgan olamda sodir bo'ladigan o'zgarishlarni asosan 3 turga ajratish mumkin:

1) abiotik o'zgarishlar (tabiiy o'zgarishlar – zilzilalar, vulqonlar otilishi, suv toshqinlari va shu kabilar);

2) biotik o'zgarishlar (populyatsiyalar biomassasining yoki sonining o'zgarishi, populyatsiyalarning qirilib ketishi);

3) antropogen o'zgarishlar (inson faoliyati natijasida atrof muhitda sodir bo'ladigan o'zgarishlar).

Hozirgi kunda atrof-muhitda sodir bo'ladigan o'zgarishlarni, jarayonlarni o'rganishda matematik modellashtirish fani keng qo'llanilmoqda. Matematik modellashtirish metodologiyasining mohiyati o'rganilayotgan real ob'yektni uning «abstrakt shakli», ya'ni keyinchalik kompyuterda realizatsiya qilishda foydalaniladigan matematik modeli bilan almashtirishdan iborat.

Matematik modellashtirish fanining elementlari fizika va matematika fanlari paydo bo'lgan davrlardanoq qo'llanilib kelinmoqda. Ammo, uning yuksalish davri XX asrning 50-chi yillari va undan keyingi yillarga to'g'ri keladi. Bu holatni quyidagi sabablar – EHMLarni paydo bo'lishi, AQSh va sobiq SSSR davlatlarining yer yuzida o'z siyosiy va iqtisodiy hukmronliklarini ta'minlash maqsadida yadro qurolini yaratishlari hamda koinotni insoniyat tomonidan keng o'rganilishi kabilar bilan izohlash mumkin.

# **ISHCHI DASTUR**



## KIRISH

O'quv-uslubiy majmua 2024-yil 27-dekabrda 485-sonli buyrug'i bilan tasdiqlangan "Matematika va amaliy matematika" yo'nalishi bo'yicha oily ta'lim muassasalari pedagog kadrlarini qayta tayyorlash va malakasini oshirish kursining o'quv dasturi asosida ishlab chiqilgan.

Dastur doirasida berilayotgan mavzular oily ta'lim tizimi pedagog kadrlarini qayta tayyorlash va malakasini oshirish mazmuni, sifati va ularning tayyorgarligiga qo'yiladigan malaka talablari va o'quv rejasi asosida shakllantirilgan bo'lib, matematika fani o'qituvchilarini zamonaviy ta'lim va innovatsiya texnologiyalari, ilg'or xorijiy tajribalardan foydalanish, axborot-kommunikatsiya texnologiyalarini o'quv jarayoniga keng tatbiq etish darajasini oshirish hisobiga ularning kasb mahorati va o'quv-uslubiy faoliyatini sifatli tashkil etish kompetensiyalarini muntazam yuksaltirishni nazarda tutadi.

### **Kursning maqsadi va vazifalari.**

Oily ta'lim muassasalari pedagog kadrlarini qayta tayyorlash va ularning malakasini oshirish kursining **maqsadi** pedagog kadrlarning innovatsion yondashuvlar asosida o'quv-tarbiyaviy jarayonlarni yuksak ilmiy-metodik darajada loyihalashtirish, sohadagi ilg'or tajribalar, zamonaviy bilim va malakalarni o'zlashtirish va amaliyotga joriy etishlari uchun zarur bo'ladigan kasbiy bilim, ko'nikma va malakalarini takomillashtirish, shuningdek ularning ijodiy faolligini rivojlantirishdan iborat.

Kursning **vazifalariga** quyidagilar kiradi:

- tinglovchilarga jamiyatda amalga oshirilayotgan ijtimoiy-iqtisodiy islohotlar va ta'lim-tarbiya jarayonlarini tashkil etishning huquqiy-me'yoriy asoslarini muntazam o'rganish;
- matematika fanini o'qitishda ilg'or ta'lim-tarbiya texnologiyalari va xorijiy tajribalarni o'rganish;
- matematika o'qituvchilarini texnik va kreativ fikrlash, intellektual qobiliyatlarini rivojlantirish;
- o'quv jarayonini fan va ishlab chiqarish bilan samarali integratsiyasini ta'minlashga qaratilgan faoliyatni tashkil etish;
- malaka talablariga mos holda matematika o'qituvchilarining fanga doir kasbiy bilim, ko'nikma, malaka va kompetensiyalarini innovatsion yondashuvlar asosida uzluksiz yangilab borish va rivojlantirish.

**Kurs yakunida tinglovchilarning bilim, ko'nikma va malakalari va kompetensiyalariga qo'yiladigan talablar:**

Qayta tayyorlash va malaka oshirish kursining o'quv modullari bo'yicha tinglovchilar quyidagi yangi bilim, ko'nikma, malaka hamda kompetensiyalarga ega bo'lishlari talab etiladi:

- matematik modelni qurish va ularni tadqiq qilish uslublarini;
- matematik model tushunchasini;
- chiziqli algebra tushunchalari, ta'riflar va ularning tatbiqlarini;
- matematik modellarga qo'yiladigan asosiy talablarini;
- matematik modellarni qurish metodlarini;
- chiziqli almashtirishlar va chiziqli formalarni;
- vektor vazolar, chiziqli bog'liqlilik va chiziqli erklilik, bazis va o'lcham, qism fazo tushunchalarini;
- Maltus va Fyurxst-Perl modellarini;
- vektor fazodagi chiziqli almashtirishlar, chiziqli almashtirishning matritsasi, chizqli almashtirishning yadrosi va obrazini;
- chiziqli dasturlash masalalari va Demografik modellarni;
- «Yirtqich-o'lja» sistemasining o'zaro munosabat modelini;
- teskari matritsa va ularni topishning Gaus-Jordan usullarini **bilishi** kerak.

### **Tinglovchi:**

- talabalarning o'quv auditoriyadagi faoliyatini baholash;
- talabalarning kurs ishi, bitiruv malakaviy ishi, o'quv-malakaviy amaliyot (mehnat faoliyati)ini nazorat qilish;
- baholashning miqdor va sifat tahlilini amalga oshirish;
- chiziqli algebra va uning elementlariga doir masalalarni yechish;
- jarayonlarni modellashtirishda tabiatning saqlanish qonunlaridan va boshqa usullardan foydalanish;
- matematik modellarning nazariy va amaliy tadqiqoti, ularning adekvatligini baholash;
- matematik model va uning real ob'ekti orasidagi muvofiqlilikni izohlash;
- vektor fazodagi chiziqli almashtirishlar, chiziqli almashtirishning matritsasi, chizqli almashtirishning yadrosi va obrazidan foydalanish;
- matritsalar nazariyasini o'zlashtirish, matritsalarining paydo bo'lish tarixini tahlil etish;
- chiziqli tenglamalar sistemasi va ularni yechish usullaridan foydalanish;
- matritsalar va ular ustida amallar bajarish **ko'nikmalariga** ega bo'lishi lozim.

## TABIIY JARAYONLARNI MATEMATIK MODELASHTIRISH

| №            | Modul mavzulari                                                                       | Hammasi  | Jami o'quv yuklamasi |
|--------------|---------------------------------------------------------------------------------------|----------|----------------------|
| 1            | Matematik model tushunchasi. Matematik modellarning nazariy va amaliy tadqiqoti.      | 2        | 2                    |
| 2            | Jarayonlarni modelashtirishda tabiat qonunlaridan foydalanish. Differensial modellar. | 2        | 4                    |
| 3            | Chiziqli dasturlash masalalari.                                                       | 2        | 2                    |
| 4            | Graflar va tarmoqlar.                                                                 | 2        | 2                    |
| <b>Jami:</b> |                                                                                       | <b>8</b> | <b>10</b>            |

### NAZARIY MASHG'ULOTLAR MAZMUNI

#### 1-mavzu: Matematik model tushunchasi. Matematik modellarning nazariy va amaliy tadqiqoti. (2 soat ma'ruza)

Jamiyat fikrining abstraktlanish jarayoni. Model va modelashtirish tushunchalari. Bilish jarayonida va insonning amaliy faoliyatida modelashtirishning roli. Matematik model tushunchasi. Matematik modelga misollar. Matematik modelni ifodalash shakllari. Matematik modellarga qo'yiladigan asosiy talablar. Matematik modellarni qurish metodlari. Matematik model va uning real ob'ekti orasidagi muvofiqlilik. Matematik modellarning nazariy va amaliy tadqiqoti, ularning adekvatligi.

#### 2-mavzu: Jarayonlarni modelashtirishda tabiat qonunlaridan foydalanish. Differensial modellar. (2 soat ma'ruza)

Jarayonlarni modelashtirishda tabiatning saqlanish qonunlaridan va boshqa usullardan foydalanish. Differensial modellar. Energiyaning saqlanish qonuni. Massa (materiya)ning saqlanish qonuni. Impulsning saqlanish qonuni. Matematik modelashtirishda variatsion prinsipdan foydalanish. Ierarxiya prinsipidai foydalanib, matematik modellar qurish.

### **3-mavzu: Chiziqli dasturlash masalalari. (2 soat ma'ruza )**

Chiziqli dasturlash masalalari va Demografik modellar. Chiziqli dasturlashning umumiy masalasi. Transport masalasi. Jamiyat rivojlanishining demografik modeli. Maltus va Fyurxst-Perl modellari. Populyatsiya chiziqsiz modelinint uch turdagi rejimi.

### **4-mavzu: Raqobatning ayrim modellari. Biologik modellar. (2 soat ma'ruza)**

Raqobatning ayrim modellari. Biologik modellar. «Yirtqich-o'lja» sistemasining o'zaro munosabat modeli. O'zaro ta'sirlashuvchi populyatsiyalar sonini modellashtirish. Modda va energiya muvozanatining modeli. Epidemiya modeli.

## **AMALIY MASHG'ULOTLAR MAZMUNI**

### **1-mavzu: Matematik model tushunchasi. Matematik modellarning nazariy va amaliy tadqiqoti. (2 soat ma'ruza)**

Matematik modelni qurish va ularni tadqiq qilish uslublari. Model va modellashtirish tushunchalari. Bilish jarayonida va insoniing amaliy faoliyatida modellashtirishning roli. Matematik model tushunchasi. Matematik modelga misollar. Matematik modelni ifodalash shakllari. Matematik modellarga qo'yiladigan asosiy talablar. Matematik modellarni qurish metodlari. Matematik model va uning real ob'ekti orasidagi muvofiqlilik. Matematik modellarning nazariy va amaliy tadqiqoti, ulariing adekvatligi.

### **2-mavzu: Jarayonlarni modellashtirishda tabiat qonunlaridan foydalanish. Differensial modellar. (4 soat ma'ruza)**

Energiyaning saqlanish qonuni. Massa (materiya)ning saqlanish qonuni. Impulsning saqlanish qonuni. Matematik modellashtirishda variatsion prinsipdan foydalanish. Ierarxiya prinsipidai foydalanib, matematik modellar qurish.

### **3-mavzu: Chiziqli dasturlash masalalari. (2 soat ma'ruza )**

Chiziqli dasturlash masalalari va Demografik modellar. Chiziqli dasturlashning umumiy masalasi. Transport masalasi. Jamiyat rivojlanishining demografik modeli. Maltus va Fyurxst-Perl modellari. Populyatsiya chiziqsiz modelinint uch turdagi rejimi.

### **4-mavzu: Raqobatning ayrim modellari. Biologik modellar. (2 soat ma'ruza)**

Raqobatning ayrim modellari. Biologik modellar. «Yirtqich-o'lja» sistemasining o'zaro munosabat modeli. O'zaro ta'sirlashuvchi populyatsiyalar sonini modellashtirish. Modda va energiya muvozanatining modeli. Epidemiya

modeli.

## **AMALIY MASHG'ULOTLARNI TASHKIL ETISH MAZMUNI**

Amaliy mashg'ulotlarda tinglovchilar o'quv modullari doirasidagi ijodiy topshiriqlar, keyslar, o'quv loyihalari, texnologik jarayonlar bilan bog'liq vaziyatli masalalar asosida amaliy ishlarni bajaradilar.

Amaliy mashg'ulotlar zamonaviy ta'lim uslublari va innovatsion texnologiyalarga asoslangan holda o'tkaziladi. Bundan tashqari mustaqil holda o'quv va ilmiy adabiyotlardan, elektron resurslardan, tarqatma materiallardan foydalanish tavsiya etiladi.

## NAZARIY MASHG'ULOT MATERIALLARI

### 1-mavzu: Matematik model tushunchasi. Matematik modellarning nazariy va amaliy tadqiqoti.

#### Reja

1. Sistema.
2. Model.
3. Matematik model.
4. Hisoblash eksperimenti.

**1. Sistema.** Ilmiy va amaliy tadqiqotlarda real mavjud sistemalarni modellashtirish katta rol o'ynaydi. Modellashtirish mohiyati shundan iboratki, har biri real mavjud yoki abstrakt bo'lgan ikki sistemalar orasida o'xshashlik munosabati o'rnatiladi. Agar bu sistemalardan birinchisi tadqiq qilish uchun ikkinchisiga nisbatan soddaroq bo'lsa, ikkinchi sistemaning xossalari haqida birinchi sistema xulqini kuzatib hukm chiqarish mumkin. Bu holda tadqiqot uchun foydalanilgan sistemani model deyiladi.

Modellashtirish masalalarining qo'yilishi san'atini egallashga yordam beradigan sistemaviy tushunchalarga, jumladan, «sistema» so'ziga diqqatni qarataylik. «Sistema» so'zi yunonchadan tarjimada birikma degan ma'noni beradi. «Sistema» so'zi va unga bog'lik bo'lgan «katta sistemalar», «murakkab sistemalar», «dinamik sistemalar», «statik sistemalar», «determinirlangan sistema», «ehtimoliy sistema», «ochik sistema», «yopik sistema», «sistemaviy tahlil», «sistemalar nazariyasi», «sistemaviy yondashish» tushunchalari keng tarqalgan.

«Cistema» tushunchasini aniq ta'riflash qiyin. Bu tushuncha kibernetikaning asosiy tushunchasidir.

Adabiyotda sistema tushunchasining ma'no bo'yicha o'zaro yaqin bo'lgan bir qancha ta'riflari keltirilgan. Masalan, sistema umumiy funksiya bilan bog'langan elementlar to'plamidir yoki sistema o'zaro aloqadagi elementlar to'plamidir yoki oralarida u yoki bu aloqalar mavjud bo'lgan elementlar to'plamini sistema deyiladi.

Bunda elementlar to'plamining o'zi sistemani tashkil qilmaydi. Sistemaning elementlari unday yoki bunday bog'lanishda bo'lishi kerak.

Bizning maqsadlarimiz uchun sistema tushunchasini sezgiga asoslangan ma'noda tushunishimiz etarli. Buni misollar orqali amalga oshirishga harakat qilamiz.

1. Oila — sistema.
2. Poezd kupesida gazeta o'qiyotgan uchta odam guruhi sistema emas.
3. Suhbatga kirishgan o'sha uchala odamlar guruhini sistema sifatida qarash mumkin.

4. Temir yo‘l — sistema.

5. Xalq xo‘jaligi — sistema.

6. Kristallning atom panjarasi sistema emas. Chunki u atomlar to‘plamini tashkil qilsa ham biror vazifani bajarishga mo‘ljallanmagan.

7. Tirik xujayra — sistema, chunki u o‘sadi, oziklanadi, hayotiy jarayonni davom ettirishdan iborat bo‘lgan o‘z vazifasiga bo‘ysunadi.

8. Tenglamalar sistemasi.

9. Odamning nerv sistemasi.

10. Harbiy ishlarda mudofaa sistemasi.

11. Avtomatlashtirilgan boshqaruv sistemasi.

Sistema qismsistemalarga ajralishi mumkin. Masalan, stanok uni boshqaruvchi usta bilan ikki o‘zaro ta’sirdagi va o‘zaro bog‘liq qismli odam-mashina sistemasini tashkil qiladi. Ishchi, o‘z navbatida, muskul, nerv, qon aylanishi va boshqa sistemalardan tashkil topgan sistemani hosil qiladi.

Sistema tushunchasiga aloqada bo‘lgan ba’zi tushunchalarni keltiramiz:

Element – murakkab ob’ektlar, hodisalar, jarayonlarning (berilgan sistemada, berilgan qarash va tahlil usulida) qismlarga ajralmaydigan tashkil etuvchisi (komponenti).

Sistemalar dinamik va statik, ochiq va yopiq sistemalarga ajraladi. Dinamik sistemalar, o‘z navbatida, determinirlangan va ehtimoliy sistemalarga ajraladi. Vaqtga qarab o‘zgaradigan sistema dinamik sistemadir. Dinamik sistemada vaqtning bir qancha davrlari qaraladi. Masalan, iqtisod dinamik sistema bo‘ladi.

Statik sistemada vaqtning fakat bitta joriy davri qaraladi. Masalan, ishlab chiqarish va boshqa iqtisodiy ob’ektlarning joylashuvi statik sistema bo‘ladi.

Tashqi muhitdan ajralgan sistema yopiq sistemadir. Masalan, import; eksport hisobga olinmaydigan sodda holdagi iqtisod yopiq sistema bo‘ladi.

Tashqi muhit bilan o‘zaro ta’siri hisobga olinadigan sistema ochiq sistemadir.

Masalan, tirik mavjudotlar, eksport, importni xarakterlovchi ko‘rsatkichlar kiritilgan mamlakat iqtisodi ochiq sistema bo‘ladi.

Vaqtning har bir momentida sistema haqida absolyut aniq ma’lumotlar olinsa, bu sistema determinirlangan sistemadir. Determinirlangan deganda biz u yoki bu amalning natijasini avvaldan to‘la aytib berishni tushunamiz. Masalan, sozlangan soat mexanizmi determinirlangan sistema bo‘ladi.

Kelajakdagi xulqini avvaldan aniq aytib bo‘lmaydigan sistema ehtimoliy sistemadir. Sistemadagi jarayonlarning tasodifiy xarakteri hisobga olinsa, bunday sistema ehtimoliy sistemadir. Masalan, mahsulotni statistik nazorat qilish sistemasi, dengiz portlariga kemalarning etib kelishi sistemasi, katta sondagi ishlab chiqaruvchilar va extiyojga ega bo‘lganlarga bog‘liq bo‘lgan ombordagi tovar zaxirasi ehtimoliy sistemalar bo‘ladi. To‘la ma’nodagi iqtisod ehtimoliy sistema bo‘ladi. Iqtisodning ehtimoliy xarakterini keltirib chiqaruvchi ko‘plab sabablar mavjud. Bular, masalan, ilmiy-texnik progressning o‘sib boruvchi roli,

tovarlarga ehtiyojning, mehnatkashlar farovonligining o'sishi natijasida xizmatning o'zgaruvchanligi, ob-havo «injiqliklari» va boshqalardan iborat bo'lishi mumkin.

Ko'p sondagi elementlardan tashkil topgan sistemani «katta sistema» deyiladi. Katta sistemalar har joyda tabiatda, texnikada, jamiyatda mavjud. Katta sistemani qisimsistemalari bo'yicha tadqiq qilinadi. Katta sistemalarning umumiy qonuniyatlarini, xossalari va tuzilishini o'rganish bilan bilimning yangi sohalaridan biri katta sistemalar nazariyasi shug'ullanadi.

Elementlari va ular orasidagi aloqalari turli-tuman, bir jinsli bo'lmagan sistemani murakkab sistema deyiladi. Masalan, odam, odamning nerv sistemasi murakkab sistema bo'ladi, iqtisodiy sistema murakkab, ehtimoliy, dinamik sistema bo'ladi. Oxirgi o'n yilliklarda «sistemaviy yondashish», «sistemaviy tahlil», «sistemalar nazariyasi» tushunchalari paydo bo'ldi.

Sistemaviy yondashish — asosi ob'ektlarni sistema sifatida qarashdan iborat bo'lgan ilmiy bilish va sotsial amaliyot usulining yo'nalishi.

Sistemaviy yondashish prinsiplari (asosiy qonun qoidalari) kibernetikada, texnikada, boshqaruvda, iqtisodiyotda va boshqalarda qo'llaniladi.

Jarayonlarni matematik modellashirishda sistemaviy yondashishdan deyarli hamma fanlar (geografiya, politologiya, psixologiya, sotsiologiya va boshkalar) vakillari tomonidan foydalaniladi. Bunda modellashirilayotgan ob'ekt sistema sifatida qaraladi.

Sistemaviy yondashish tushunchalarining aniq amaliy muammolarning tahliliga qo'llash sistemaviy tahlil (yoki sistemalar tahlili) nomini oldi. Sistemaviy tahlilning har qanday usuli u yoki bu omillar, hodisalar, jarayonlarning matematik bayoniga tayanadi. Sistemaviy tahlilning asosi matematik modellarni tuzishdan iborat. Tahlilning taqdiri modelning sifatiga bog'liq. Fan bora-bora alohida faktlarni o'rganishdan modellarning murakkab sistemalarini o'rganishga o'tishni tayyorladi. Sistemaviy tahlilning yaxshi maktabi bo'lib fizika hisoblanadi. Fizikada o'zaro bog'langan modellar sistemasi barpo qilingan. Hozirgi kunda matematika boshqa fanlarga qo'llanayotgan vaqtda fizikaning qimmatli tajribasining roli ko'rinib qolmoqda. XX asr boshidan boshlab matematika biologik tadqiqotlarda keng qo'llanilmoqda. Statistika modellaridan keng foydalanilmoqda. Kibernetika, informatsiyalar nazariyasi, o'yinlar nazariyasi va boshqalar sistemaviy tahlilning tarkibiy qismlaridir.

Sistemalar nazariyasi esa fanlar metodologiyasiga mansub. Bunda biologik va ijtimoiy tabiatli ixtiyoriy etarli murakkab materiya (modda) tashkillanishlariga oid umumiylik o'rganiladi. Materiya doim u yoki bu tashkillanishga ega. Tabiatda mavjud bo'lgan moddalarning ajoyib turli tumanligiga qaramay ularning tashkiliy shakllari nisbatan ko'p emas.

Sistemalar nazariyasi falsafaning bilish nazariyasi va boshqa bo'limlari bilan hamda matematik mantiq bilan bevosita bog'langan. Ba'zi olimlar fikriga ko'ra sistemalarning umumiy nazariyasi har qanday turdagi sistemalar haqidagi umumiy



fan bo'lishi kerak. Xozirgi kunda to'plamlar nazariyasi, algebra apparatlaridan foydalanuvchi bir qancha sistemalarning matematik nazariyalari qurilgan.

**2. Model.** Endi biz model, modellashtirish tushunchalari va ularga bog'liq bo'lgan asosiy tushunchalar ustida batafsilroq to'xtalamiz. «Model» so'zi lotincha modulus so'zidan olingan bo'lib, o'lchov, me'yor, obraz, namuna, analog, o'rinbosar degan ma'nolarni bildiradi. Model tushunchasini ta'riflash juda qiyin. Bir manbada uning 31 ta ta'rifi sanab o'tilgan. SHunday bo'lsa-da, bu tushuncha har birimizga tanish: o'yinchoq samolyot — samolyotning modeli, globus — Erning modeli, planetariy ekrani — osmon va undagn yulduzlar modeli,  $S = vt$  formula — jism harakati modeli. Bu bayon qilingan predmetlar, grafik tasvirlar, formulalar bir «model» so'zi bilan birlashdilar. Model ta'riflaridan birini yuqorida bayon qilgan edik. YAna turli shaklda berilgan ta'riflardan ba'zilarini keltiramiz. Keng ma'noda model biror ob'ekt yoki ob'ektlar sistemasining obrazi yoki namunasidir. N.N.Moiseev ta'rifi bo'yicha «Model deganda biz predmet (hodisa) haqida uning u yoki bu ayrim xossalarini aks ettiruvchi ma'lum bir chegaralangan ma'lumotni beruvchi soddalashtirilgan bilimni tushunamiz.» Modelni ma'lumotni kodlashning maxsus shakli sifatida qarash mumkin. Oddiy kodlashda bizga barcha dastlabki ma'lumotlar ma'lum bo'ladi va ularni biz fakat boshqa tilga o'tkazamiz, model esa, qaysi tildan foydalansa ham, kishilar ilgari bilmagan ma'lumotni ham kodlaydi.

Endi modellashtirish tushunchasi haqida gapiramiz. Modellashtirishning ham turli shakllardagi bayonini keltiramiz. Modellarni yasash kishilar faoliyatida juda katta ahamiyatga ega. Modelni qurish jarayonini modellashtirish deyiladi. Modellashtirish deganda ob'ekt (sistema)ning modeli yordamida shu ob'ektning xossalariii tadqiq qilish jarayonini xam tushuniladi. Modellashtirish bilish ob'ektlarini ularning modellari yordamida tadqiq etish, kuzatilayotgan predmet va hodisalarning modellarini yasash va o'rganishdir. Ob'ektni uning modeli yordamida bilish modellashtirishdir. Har qanday bilish modellashtirishdan iborat, chunki bunda tegishli ob'ekt bosh miyada nerv xujayralari majmui yordamida ideal ko'rinishda aks etadi, ya'ni biz ob'ektning modeli bilan ish ko'ramiz. Modellashtirish — turli jarayon va hodisalarni o'rganishning eng keng tarqalgan usullaridan biri.

Model tushunchasi biologiya, meditsina, kimyo, fizika, iqtisodiyot, sotsiologiya, demografiya va boshqa fanlarda ham qo'llaniladi. Modellarning matematik model, fizik model, biologik model, iqtisodiy model va boshqa turlari mavjud.

**3. Matematik model.** Matematik model tushunchasiga ham turli ta'riflar berilgan. Ulardan ba'zilarini keltiramiz. Jarayonning matematik tavsifini, ya'ni jarayonni matematik tilda bayonlashni matematik model deb yuritamiz. Matematik model' olamning ma'lum hodisalari sinfining matematik belgilar bilan ifodalangan taqribiy ifodasidir. O'rganilayotgan jarayon yo hodisani ifodalovchi matematik munosabatlar sistemasini matematik model' deyiladi. Ob'ektning

xarakteristikalarini bayon qiluvchi matematik ifodalarni matematik model' deyiladi. Formulalar ko'rinishida yozilgan faqat miqdoriy xarakteristikalarni o'z ichiga olgan modellarni matematik model deyiladi. Hodisalar sinfining soddalashtirilgan matematik belgilar bilan ifodalangan bayonini matematik model' deyiladi. Tashqi dunyoning biror hodisalari sinfining matematik belgilar yordamida taqribiy bayoni matematik model deyiladi.

Misollar. Eng qadimgi matematik modellardan biri Evklid geometriyasidir. Bu bizni qurshab olgan fazo va undagi predmetlar matematik modelidir. Hammaga ma'lum matematik modellar: butun sonlar sistemasi, haqiqiy sonlar sistemasi. Hozirgi zamon algebrasida gruppalar, halqalar, maydonlar, vektor fazolar, chiziqli algebralari, Bul algebralari kabi matematik modellar bilan ish ko'riladi.

Konkret sonli xarakteristikalariga ega bo'lgan modelni sonli model', mantiqiy ifodalar yordamida yozilgan modelni mantiqiy model (masalan, algoritm blok-sxemasi), grafik usuldagi modelni grafik model (masalan, grafiklar, diagrammalar, rasmlar). EHM yordamida ruyobga chiqarilgan modelni mashina (elektron) modeli deyiladi.

Matematik modellashtirishning maqsadlari sifatida quyidagilarni keltirish mumkin:

1. Ob'ekt (jarayon)ning tarkibi, tuzilishi, asosiy xossalari, rivojlanishi qonunlari va tashqi dunyo bilan o'zaro ta'sirini tushunish.
2. Ob'ekt (jarayon)ni boshqarishni o'rganish va berilgan maqsad va kriteriyalarda boshqarishning eng yaxshi usullarini aniqlash.
3. Ob'ektga ta'sir qilishning berilgan usullarini va formalarini ishga solishning to'g'ri va bilvosita oqibatlarini bashorat qilish.

Matematik model olamni bilish, boshqarish va bashoratlashning kuchli usulidir. Har qanday matematik model uch yo'l bilan paydo bo'lishi mumkin:

1) hodisani to'g'ridan-to'g'ri kuzatish natijasida, uni to'g'ridan-to'g'ri o'rganish va tushunish natijasida, bunday usul bilan olingan modelni fenomenologik model' deyiladi;

2) biror deduksiya jarayoni natijasida, bunda yangi model biror umumiyroq modeldan xususiy hol sifatida olinadi, bunday modellarni asimptotik modellar deyiladi;

3) biror induksiya jarayoni natijasida, bunda yangi model «elementar» modellarning tabiiy umumlashmasidan iborat bo'ladi. Bunday modellarni ansambl' modellar deyiladi.

Nyuton mexanikasining hamma modellari fenomenologik modellardir.

Matematiklar va fiziklarning birgalikdagi harakatlari tufayli fizika modellarining xozirgi zamon sistemasi barpo etildi. Bu erda qizig'i va muhimi shuki, modellarning to'plamigina emas, balki sistemasi yaratildi. Xozirgi zamon fizikasi — bu matematik modellarning mantiqan bog'langan sistemasidir. Bu jarayonda asimptotik tahlil g'oyalarining rivoji katta rol o'ynaydi. Yangi modellar eskilarini inkor qilmadi, balki ularni ba'zi xususiy xol sifatida kiritdilar. Masalan, Nav'e-Stoks

modellari o'z ichiga xususiy hol sifatida Eyler modelini kiritdilar. Agar Nave-Stoks modelida qovushqoqlikni nolga teng desak, Eyler modeliga kelamiz.

Biror tabiat hodisasi, protsessini matematik o'rganish uchun, uni avvalo soddalashtiriladi, ya'ni hodisaga xos xossalarning xilma-xilligidan bir qismini tekshirish uchun kiritadilar, hamda hodisa xarakteristikalarini va tashqi muhit orasidagi aloqa (bog'lanish)lar haqida ba'zi mulohazalar qilinadi. Bir qancha hodisalar modellari bir xil bo'lishi mumkin. Matematik modellar odatda universallik xossasiga ega, ya'ni turli real hodisalar bitta matematik model' bilan tavsiflanishi mumkin. Bitta matematik modelni o'rganishda bir vaqtda bu model' bilan tavsiflanuvchi hodisalarning bir butun sinfini o'rganamiz. Masalan, bakteriyalarning ko'payishi jarayoni, radioaktiv parchalanish jarayoni, ishlab chiqarishning tabiiy o'sishi jarayoni

$$x'(t) = kx(t)$$

ko'rinishdagi tenglama bilan tavsiflanadi, bu erda qattiq model' holida  $k$ -doimiy son. Aksincha bir hodisa uchun bir necha turli modellar qurish mumkin. Model hodisa bilan aynan bir emas, u hodisa strukturasi haqida biror taqribiy tasavvur beradi xolos.

Model sistemani etarli to'g'ri akslantirishi va foydalanish uchun qulay bo'lishi kerak. Modelning modellashtirilgan ob'ektga mosligini modelning adekvatligi deyiladi. «Adekvatlik» so'zi lotinchadan tarjimada teng, tenglashtirilgan degan ma'noni bildiradi. Bu shartli tushuncha, chunki model real ob'ektga to'la mos bo'lolmaydi, aks holda bu model emas, ob'ektning o'zi bo'lardi. Odatda model qancha adekvatroq bo'lsa, u shuncha murakkab bo'ladi. SHuning uchun modelning soddaligi va adekvatligi talablari qandaydir ma'noda qarama-qarshidir. Modellashtirishda adekvatlik umuman emas, balki tadqiqot uchun muhim hisoblangan xossalari bo'yicha nazarda tutiladi.

Masalan, agar bizni iqtisodiyotda xom ashyoning miqdoriy xarakteristikalarini (og'irligi) qiziqтира (masalan, bir tonna qandaydir yarim fabrikat olish uchun qancha xom ashyo kerakligini aniqlaydigan bo'lsak), u holda bizni o'sha jarayonni narx xarakteristikalarini qiziktirmasligi mumkin; agar aksincha bizni narx xarakteristikalarini qiziktirsa, u holda biz modelga miqdoriy xarakteristikalarini kiritmasligimiz mumkin. Bizni qiziqtirgan xarakteristika bo'yicha modelning jarayonga adekvatligi tekshirilaveradi.

Matematik modelni qurish 4 bosqichda amalga oshiriladi.

1. Sistemaning xulqi xaqidagi model yordamida javobi izlanayotgan asosiy masalalar tuziladi.

2. Sistemaning xulqini boshkaradigan qonunlar to'plamidan muhimlari hisobga olinadi.

3. Bu qonunlarga qo'shimcha holda, zarurat bo'lsa, sistema va uning sistema ostilari ishlashi haqida gipotezalar bayon qilinadi.

4. Qonunlar va gipotezalar matematik munosabatlar shaklida ifodalanadi va bu matematik munosabatlar birlashtiriladi. SHu bilan matematik model quriladi. Bundan keyin qabul qilingan modelning amaliyot mezonlarini qanoatlantirishi aniqlanadi,

ya'ni kuzatishlar natijasi modelning nazariy natijalari bilan kuzatish aniqligi chegarasida mos kelishi masalasi aniqlanadi. Zarur bo'lsa, model takomillashtiriladi.

Hozirgi vaqtda matematik modellarni sinflarga ajratishga turli yondashishlar mavjud. Biz yuqorida sistemalarning turli nomlarini keltirib o'tdik. Model yordamida o'rganilayotgan sistemaning nomiga monand dinamik, statik, determinirlangan, stoxastik, ochik, yopik modellar haqida gapirish mumkin. SHu munosabat bilan modellarni dinamik va statik modellarga, determinirlangan va stoxastik modellarga, ochik va yopik modellarga ajratish mumkin.

Turli vaziyatlarni etarli darajada yaxshi tavsiflovchi ko'p sondagi matematik modellar mavjud. Ulardan determinirlangan, stoxastik va o'yinli modellarni ajratib olamiz. Determinirlangan modellar yordamida determinirlangan sistemalar o'rganiladi. Umuman, tasodifiylik elementlari ishtirok etmagan tenglamalar bilan tavsiflanuvchi modelni determinirlangan model deb ataladi, jumladan, differensial tenglamalar bilan tavsiflanuvchi modelni differensial model deb aytiladi. Determinirlangan modellarni deskriptiv (tavsiflovchi) va optimallashtirish modellariga ajratish mumkin.

Stoxastik modellar ba'zi omillar noaniqlik, tasodifiylik xarakteriga ega bo'lgan holatlarda qo'llaniladi. Stoxastik modellar orasidan ommaviy xizmat ko'rsatish nazariyasi, ishonchlilik nazariyasi, Markov jarayonlari, zaxiralarni boshqarishning stoxastik modellarini, stoxastik programmalash modellarini ajratish mumkin.

Aksariyat matematik modellar kompyuterda hisoblash ishlarini bajarishni yoki kompyuter sinovlarini o'tkazishni talab qiladi. Ikkinchi tomondan esa har qanday hisoblash ishlari faqat biror matematik model asosida olib borilishi mumkin. SHu sababli hozirgi kunda matematik modellashtirish va kompyuterli modellashtirish terminlari deyarli sinonimlar bo'lib qoldi. Kompyuterli modellashtirish biror sabablarga ko'ra natural (asliga qarab) sinovning iloji bo'lmagan hollarda tengi yo'qdir.

Matematik modellar tuzishda qo'yilgan masala va tuzilayotgan matematik model sinfiga qarab usul tanlanadi. Bunda masalaga muvofiq qonunlardan yoki mulohazalardan, masalan, miqdorlarning proporsionalligi va boshqa xossalardan, farazlardan foydalanib model tuziladi, masalan, masalada ishtirok etayotgan miqdorlarning diskret yoki uzluksizligiga, masala sinfiga qarab matematik apparat tanlanadi, jumladan, qo'yilgan masala ayirmali yoki differensial tenglama tuzishga olib kelishi mumkin.

Biror real hodisa yoki jarayonni o'rganish natijasida olingan differensial tenglamani bu hodisa yoki jarayonning differensial modeli deyiladi. Differensial modelni tuzish jarayonida o'rganilayotgan masala tabiatiga mos bo'lgan fan sohasining qonunlarini bilish muhim ahamiyatga ega. Masalan, hosilaning geometrik, fizik va boshqa ma'nolari, shuningdek, tabiiy va ijtimoiy fanlarning ma'lum qonunlaridan, jumladan, mexanikada bu Nyuton qonunlari, kimyoviy reaksiyalar nazariyasida — massalar ta'siri qonuni va boshqalar keng tatbiq

etiladi. Amaliyotda differensial tenglama tuzishga olib keladigan qonunlar noma'lum bo'lsa u holda o'zgaruvchilarning kichik o'zgarishlarida jarayonning borishiga oid turli farazlar (gipotezalar) dan foydalaniladi.

Modellar tuzishning keng tarqalgan usuli muayyan holatga tabiatning asosiy qonunlarini tatbiq qilishdan iborat. Bular energiya saqlanishi, materiya saqlanishi, impuls saqlanishi qonunlaridir. Modellar tuzishda keng tarqalgan usullardan yana variatsion prinsip, o'xshashlik, zanjir (ierarxiya) prinsipidan foydalaniladi. Eslatib o'tilgan usullarni tatbiq qilish maqsadida tabiiy va ijtimoiy fanlarga doir masalalarni echish uchun ba'zi sodda matematik modellarni tuzishga keyingi mavzularda misollar keltiramiz.

**4. Hisoblash eksperimenti.** Matematik bayonlash mumkin bo'lgan murakkab jarayonlarni nazariy tadqiqot qilish usulini hisoblash eksperimenti deb yuritiladi. Hisoblash eksperimentida quyidagi bir qancha asosiy bosqichlarni ajratish mumkin:

1. Matematik modelni tanlash.
2. Masala echimining taqribiy sonli usulini tuzish, ya'ni hisoblash algoritmini ishlab chiqish.
3. Hisoblash algoritmini EHM uchun dasturlash.
4. EHM da hisoblashlarni bajarish.
5. Olingan sonli natijalarni tahlil qilish va matematik modelni navbatdagi aniqlashtirish.

## **2-mavzu: Jarayonlarni modellashtirishda tabiat qonunlaridan foydalanish. Differensial modellar.**

### **Reja**

- 1. Populyasiya soni dinamikasi.**
- 2. Reklama samaradorligi.**
- 3. Fan rivojlanishi.**
- 4. SHakar inverciyasi.**
- 5. Issiqlik tarqalishi.**
- 6. Vertikal tashlangan jismning harakati.**
- 7. Biosintez modeli.**

Hozirgi zamon fani va texnikasida ko'pincha vaqt mobaynida o'tayotgan jarayonlarni tadqiqot qilishga to'g'ri keladi. Bu jarayonlar turli xarakterga ega bo'lishi mumkin: fizik (jism, suyuqlik, gaz xarakati, temperatura, bosim o'zgarishi va boshqalar), kimyoviy (reaksiya vaqtida biror modda miqdorining o'zgarishi), biologik (raqobatdagi

populyasiyalar sonining o'zgarishi va boshqalar kabi). Bunday jarayonlarni o'rganishda u yoki bu evolyusion jarayonni tavsiflovchi miqdorlar orasidagi bog'lanishni bevosita o'rnatish har vaqt ham mumkin bo'lavermaydi. Lekin ko'p hollarda miqdorlar (funksiyalar) va ularning boshqa (erkli) o'zgaruvchi miqdorlarga nisbatan o'zgarishi tezliklari orasidagi bog'lanishni o'rnatish, ya'ni noma'lum funksiyalar hosila belgisi ostida qatnashuvchi tenglamalarni topish mumkin bo'ladi. Bunday tenglamalarni differensial tenglamalar deyiladi. Bunday jarayonlarni tadqiqot qilishning birinchi bosqichi ko'pincha jarayonni tavsiflovchi differensial tenglamani tuzishdan iborat, ikkinchi bosqichi esa bu tenglamaning echimini izlashdan iborat.

Differensial tenglamalarni tuzish uchun to'la-to'kis qoidalar yo'k. Ko'p hollarda oddiy differensial tenglamalar nazariyasini ko'llab masalalarni echish usuli quyidagi amallarni bajarishga keltiriladi:

1. Masala shartlarini batafsil tahlil qilish va uning mohiyatini izohlovchi chizmani tuzish.
2. Tekshirilayotgan jarayonning differensial tenglamasini tuzish.
3. Tuzilgan differensial tenglamani integrallash va bu tenglamaning umumiy echimini aniqlash.
4. Berilgan boshlang'ich shartlar asosida masalaning xususiy echimini aniqlash.
5. Zarurat bo'lishiga qarab, masalaning qo'shimcha shartlaridan foydalanib, yordamchi parametrlarni (masalan: proporsionallik koeffitsienti va boshqalarni) aniqlash.
6. Qaralayotgan jarayonning umumiy qonunini keltirib chiqarish va izlanayotgan miqdorlarni sonli aniqlash.
7. Javobni tahlil qilish va masalaning dastlabki holatini tekshirish.

Masala xarakteriga bog'liq holda bu tavsiyalardan ba'zilar qatnashmasligi ham mumkin.

Quyida biz oddiy differensial tenglamalarga keltiriladigan masalalardan ba'zilarini ko'rib chiqamiz.

**1. Populyasiya soni dinamikasi.** Biologiyada (populyasiyalar ekologiyasida) agar populyasiya ajratilgan, ozuqa resurslari chegaralanmagan, ko'payish tezligi balog'atdagi jonzodlar miqdoriga proporsional deb hisoblansa, u holda populyasiya soni dinamikasi

$$\frac{dx}{dt} = kx \quad (1)$$

differensial tenglama bilan tavsiflanadi, bu erda  $x=x(t)$  vaqtning  $t$  momentidagi populyasiya soni,  $k$  – doimiy son. (1) tenglamaning echimi  $x(t) = x(t_0)e^{k(t-t_0)}$  bo'ladi.

(1) tenglamani 1802-yil Maltus birinchi bo'lib oldi. Bunda Maltusning adashishi shundan iboratki, bu tenglama populyasiyalarning juda tor sinfi uchun o'rinli bo'ladi. Maltus esa uni butun tabiat uchun universal: hatto odamlar jamiyati uchun ham universal qonun deb hisobladi. (1) tenglama qattiq modelga misol bo'ladi.

Ekologiya tirik organizmlarning tashqi muhit bilan o'zaro munosabatini o'rganadi. Ko'payish yoki turli sabablarga ko'ra nobud bo'lish bilan bog'lik bo'lgan populyasiyalarning ba'zi differensial modellarini keltiramiz.

$x(t)$  vaqtning  $t$  momentidagi populyasiya soni bo'lsin, u holda agar vaqtning bir birligida populyasiyada tug'iladigan jonzodlar sonini  $A$ , nobud bo'ladiganlarining sonini  $V$  desak, etarli asos bilan  $x$  ning vaqtga bog'liq o'zgarish tezligini

$$\frac{dx}{dt} = A - B \quad (2)$$

formula bilan berish mumkin. Endi masala  $A$  va  $V$  ning  $x$  ga bog'liqligini tavsiflashdan iborat.

a) eng sodda hol  $A=ax$ ,  $V=bx$  (3) dan iborat, bu erda  $a$  va  $b$  - vaqtning bir birligida tug'ilish va nobud bo'lish koeffitsientlari. (3) ni hisobga olinsa, (2) ni

$$\frac{dx}{dt} = (a - b)x \quad (4)$$

ko'rinishda yozish mumkin.  $x(t_0)=x_0$  bo'lsa, echim

$$x(t) = x_0 e^{(a-b)(t-t_0)}$$

dan iborat bo'ladi;

b)  $A=ax$ ,  $B=bx^2$  hol ham uchraydi. Bunda

$$\frac{dx}{dt} = ax - bx^2 \quad (5)$$

tenglama hosil bo'lib, agar  $x(t_0)=x_0$  bo'lsa, echim

$$x(t) = \frac{x_0 \frac{a}{b}}{x_0 + \left( \frac{a}{b} - x_0 \right) e^{-a(t-t_0)}}$$

dan iborat bo'ladi. (5) tenglama 1845-yilda olingan Ferxylst-Perl tenglamasidan iborat bo'lib, unda populyasiyadagi ichki kurash hisobga olinadi. Bu Maltusning (1) tenglamasiga nisbatan populyasiyaning rivojlanishini aniqroq tavsiflaydi. (5) model', odatda, logistik model, uning echimini logistik egri chiziq tenglamasi deb yuritiladi.

Logistik model' boshqa jarayonlarni ham yaxshi tavsiflaydi.

**2. Reklama samaradorligi.** Reklama samaradorligini o'rganish masalasida vaqtning  $t$  momentidagi sotilayotgan mahsulot haqida xabardor bo'lgan potensial xaridorlar soni  $x(t)$  uchun

$$\frac{dx}{dt} = kx(N - x)$$

differensial tenglama hosil bo'ladi, bu erda  $N$  - barcha potensial xaridorlar,  $x$  - xabardorlar soni,  $N-x$  - bexabarlar soni.

$\frac{dx}{dt}$  xabardorlar soni o'zgarishi tezligi, bu  $x$  ga va  $N-x$  ga katta ishonch bilan proporsional deb hisoblanadi,  $k>0$  proporsionallik koeffitsienti.

**3. Fan rivojlanishi.** Fan rivojlanishining ikki modelini keltiraylik.

a) eng soddada modelda chop etilish sonining o'sishi tezligi chop etilganlar soniga proporsional deb faraz qilamiz:

$$\frac{dy}{dt} = ky, \quad y = y(t),$$

bu erda  $y - t$  momentdagi chop etilgan asarlar soni. Umumiy echimi

$y = Ce^{kt}$  dan iborat.

Boshlang'ich momentdagi chop etilishi sonini  $y(t_0)$  desak, echim  $y(t) = y(t_0)e^{k(t-t_0)}$  bo'ladi.  $k > 0$  da  $t \rightarrow \infty$  da  $y \rightarrow \infty$  bo'ladi.

Bu qattiq model, masalan, 1700-1950-yillardagi fan rivojlanishiga (ilmiy maqolalar soni bilan o'lchanganda) qo'llanilishi mumkin. Fanning bunday eksponensial o'sishining navbatdagi asrdagi davomi olimlar sonining dunyo aholisining yarmigacha etib qolishiga tez olib kelar edi [2];

b) har qanday ilmiy yo'nalish uchun to'yinish (mazmunga boylik, tormozlanish) bosqichi keladi. Bu holda

$$\frac{dy}{dt} = ky(b - y)$$

tenglamani olish mumkin, bu erda  $k, b$  o'zgarmaslar.  $y \rightarrow b$  bo'lsa,  $b - y \rightarrow 0$

bo'ladi va demak,  $\frac{dy}{dt} \rightarrow 0$ , ya'ni  $u$  ning o'sishi to'xtaydi.

**4. SHakar inverciyasi.** Eritmadagi shakarning dastlabki miqdori  $a$ ,  $t$  vaqt ichida inversiyalangan (almashilgan) shakar miqdori  $x$ , ya'ni vaqtning  $t$  momentida eritmada  $a-x$  miqdorda shakar qolgan bo'lsin.  $x$  ning  $t$  ga funksional bog'lanishini topish talab qilingan bo'lsin. Bu jarayonga kimyoviy reaksiyalar nazariyasining asosiy qonunlaridan biri bo'lgan massalar ta'siri qonunini tatbiq qilamiz. Bu qonunga muvofiq doimiy temperaturada vaqtning bir birligida inversiyalangan shakar miqdori (shakar inversiyasi tezligi) eritmada shakar miqdoriga to'g'ri

proporsional bo'ladi, ya'ni  $\frac{dx}{dt}$  tezlik  $a-x$  miqdorga to'g'ri proporsional bo'ladi.

Bundan

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x) \quad (1)$$

tenglama hosil bo'ladi. Kimyoviy qonun matematik model ko'rinishini oldi. (1) ni echib,  $x = a - ce^{-kt}$  umumiy echimni topamiz. Bundagi  $c$  ni  $x(0)=0$  ko'rinishidagi shartdan topamiz. Demak,  $t=0$  da  $x=0$  ekanidan  $c=a$  kelib chiqadi. Natijada  $x = a - ae^{-kt}$  izlangan funksional bog'lanishni olamiz. SHakar inversiyasi tezligi



$$v = \frac{dx}{dt} a k e^{-kt} \quad (2)$$

ko‘rinishida topamiz. Reaksiya tezligi  $v$  uchun (1) dan  $v = k(a - x)$  (3) ifodani olamiz. Reaksiya tezligi  $v$  (2) da jarayon davom etishi vaqti  $t$  orqali, (3) da esa inversiyalangan modda miqdori  $x$  orqali ifodalanmoqda.

**5. Issiqlik tarqalishi.** Dastlabki momentdagi temperaturasi  $x(0) = x_0$  bo‘lgan jism temperaturasi davomiy  $a$  ga teng muhitga joylandi.

Jismning vaqtning  $t$  momentdagi temperaturasi  $x(t)$  uchun ifoda topish talab qilinadi. Masalani echish uchun issiqlik tarqalishi qonunini tatbiq etamiz. Bu qonunga binoan jism temperaturasi o‘zgarishi tezligi jism temperaturasi va muhit temperaturasi orasidagi ayirmaga proporsional bo‘ladi, ya’ni

$$\frac{dx}{dt} = -k(x - a)$$

bu erda  $x = x(t)$ ,  $k$  – musbat proporsionallik koeffitsienti. Bu o‘zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamani integrallab,

$$x = a - ce^{-kt}$$

topiladi.  $x(0) = x_0$  shartdan  $x_0 = a - c$  yoki  $c = a - x_0$  va

$$x = a - (a - x_0)e^{-kt}$$

kelib chiqadi. Agar  $x_0 < a$  bo‘lsa, u holda  $x(t)$  o‘sadi, jism isiydi. Agar  $x_0 > a$  bo‘lsa,  $x(t)$  kamayadi, jism soviydi. Ikkala holda ham  $t$  o‘sishi bilan  $x(t)$  miqdor  $a$  ga intiladi.

**6. Vertikal tashlangan jismning harakati.**  $m$  massaga ega bo‘lgan jism biror balandlikdan pastga vertikal holda tashdanadi. Jismga og‘irlik kuchi va tezlikka proporsional bo‘lgan havo qarshiligining tormozlovchi kuchi ta’sir qiladi. Tezlikning  $t$  vaqtga bog‘liq holda o‘zgarish qonunini aniqlash talab qilinadi.

Jismning  $t$  momentdagi tezligini  $v(t)$ , og‘irlik kuchini  $F_1$ , havo qarshiligi kuchini  $F_2$ , jismga harakat yo‘nalishida ta’sir qiluvchi kuchni  $F$  bilan belgilaymiz. U holda  $F = F_1 + F_2$  bo‘ladi. Ma’lumki,  $F_1 = mg$ , shartga ko‘ra  $F_2 = -kv$  ( $k$  – proporsionallik koeffitsienti), Nyutonning 2-qonunidan

$$F = m \frac{dv}{dt}.$$

Bu erda  $\frac{dv}{dt}$  – harakatdagi jismning tezlanishi. Demak

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv$$

differensial tenglamaga ega bo‘lamiz. Oxirgi tenglamani

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m}v + g$$

ko‘rinishda yozib, uning

$$v = \frac{mg}{k} + ce^{-\frac{k}{m}t}$$

echimini topish mumkin.

Agar jism harakatni nolga teng tezlik bilan boshlasa, ya'ni  $v(0) = 0$  bo'lsa, u

$$\text{holda } c = \frac{mg}{k} \text{ va } v = \frac{mg}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$$

izlangan qonun kelib chiqadi.

**7. Biosintez modeli.** Biosintez tirik organizmlarda yoki ulardan tashqarida biokatalizatorlar – fermentlar ta'siri bilan birmuncha oddiy birikmalardan organik moddalar hosil bo'lishi; o'simliklar, hayvonlar va mikroorganizmlarda tinmay bo'lib turadigan moddalar almashinuvi protsessining bir qismi. Bir hujayrali organizm ham, ko'p hujayrali organizmlarning har bir hujayrasi ham o'ziga kerakli moddalarni sintez qiladi. Biologik nuqtai nazardan muhim moddalarni – vitaminlar, ba'zi gormonlar, antibiotiklar, aminokislotalarni, shuningdek oqsillar va boshqa birikmalarni sanoat yo'li bilan tayyorlashda organizmlardan tashqaridagi biosintez keng qo'llaniladi.

1-misol. I.A.Poletaev quyidagi farazlarga (gipotezalarga) asoslangan holda taklif etgan modelni keltiramiz.

1. Etilgan o'simlik o'sishi jarayonida geometrik o'xshashlikni saqlaydi. Bu etilgan o'simlikda o'sish bilan geometrik o'lchovlari nisbatlari (masalan, balandligining diametriga nisbati) o'zgarmasligini bildiradi.

2. Erkin energiyani (yoki faol moddani) o'simlik faqat fotosintez yo'li bilan oladi.

3. Erkin energiya fotosintezga, tirik to'qimani qurishga (o'sishga), tuproqdan ozuqa eritmasini olishga sarflanadi.

4. O'rta xisobda vaqtning katta oraliqlarida o'simlik sirt birligiga o'zgarmas miqdorda yorug'lik oladi va chegaralanmagan zaxiradagi zarur moddalarni yutishi mumkin.

Energiya muvozanati tenglamasini tuzamiz. O'simlik chiziqli o'lchovini (masalan bo'yini)  $x$  miqdor bilan ifodalaymiz. Barglari sirti yuzasini  $x^2$  miqdor bilan ifodalaymiz. O'simlik hajmini  $x^3$  miqdor bilan ifodalaymiz. Ravshanki,  $x=x(t)$ , bu erda  $t$  – vaqt. Muvozanat tenglamasiga kiradigan hamma miqdorlarni  $x$  orqali ifodalashga harakat qilamiz. Avvalo kelib tushadigan erkin energiya  $E$  ni  $x^2$  ga proporsional deyish mumkin:  $E = \alpha x^2$ , bu erda  $\alpha$  - proporsionallik koeffitsienti.

Endi sarflanadigan energiya uchun ifoda tuzamiz.

1<sup>0</sup>. Fotosintezning o'ziga sarf bo'ladigan energiya  $x^2$  ga proporsional bo'ladi, bu sarfni  $\beta x^2$  ko'rinishda yozish mumkin, bu erda  $\beta$  - proporsionallik koeffitsienti ( $\beta < \alpha$ ).

2<sup>0</sup>. Ozuqani ko'tarishga sarf hajm  $x^3$  ga va balandlik  $x$  ga proporsional bo'ladi. Demak,  $x^3 \cdot x$  ga ko'paytmaga ham proporsional deb hisoblashimiz mumkin, ya'ni uni  $\gamma x^4$  ga teng deyishimiz mumkin, bu erda  $\gamma$  - proporsionallik koeffitsienti.

3<sup>0</sup>. O'sishga (massasining ortishiga) sarf o'sish tezligiga proporsional bo'ladi, o'sish tezligi  $m$  massadan  $t$  vaqt bo'yicha olingan hosilaga teng:  $\frac{dm}{dt}$ , massa esa  $m = \rho x^3$ , demak, o'sishga sarfni  $\delta \frac{d}{dt}(\rho x^3)$  ga teng deyish mumkin, bu erda  $\rho$  - o'simlikning o'rtacha zichligi.

Energiyaning saqlanish qonuniga (va bizning farazlarimizga) binoan sarflangan energiya to'plangan energiyaga teng bo'lishi kerak. Bundan

$$\alpha x^2 = \beta x^2 + 3\rho\delta x^2 \frac{dx}{dt} + \gamma x^4.$$

tenglamani olamiz.

Bu tenglama izlangan muvozanat tenglamasidan iborat. Bundan

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\alpha - \beta}{3\rho\delta} - \frac{\gamma}{3\rho\delta} x^2,$$

kelib chiqadi. Bu erda

$$a = \frac{\alpha - \beta}{3\rho\delta}, b = \frac{\gamma}{3\rho\delta}$$

belgilash kiritsak, u holda

$$\frac{dx}{dt} = a - bx^2, \quad a > 0, \quad b > 0 \quad (1)$$

tenglama hosil bo'ladi. O'simlik o'sganligidan  $\frac{dx}{dt} > 0$ , bundan esa  $x^2 < \frac{a}{b}$ .

(1) tenglamani echamiz,

$$\frac{dx}{a - bx^2} = dt.$$

Bu tenglamaning umumiy echimi

$$x(t) = \sqrt{\frac{a}{b}} \cdot \frac{1 - e^{-2\sqrt{ab}(t-c)}}{1 + e^{-2\sqrt{ab}(t-c)}}$$

ni topib,  $x(t_0)=0$  boshlang'ich shartdan  $c = t_0$  va

$$x(t) = \sqrt{\frac{a}{b}} \cdot \frac{1 - e^{-2\sqrt{ab}(t-t_0)}}{1 + e^{-2\sqrt{ab}(t-t_0)}} \quad (2)$$

xususiyl echimni topamiz. (2) o'simlik o'sish chizig'ini beradi. Buni tahlil qilsak, quyidagi xulosalarni olamiz:

$$1) t \rightarrow \infty \text{ da } x(t) \rightarrow \sqrt{\frac{a}{b}};$$

$$2) \frac{dx}{dt} > 0 \text{ endi, } \frac{d^2x}{dt^2} = -2bx < 0. \text{ Demak, chiziq o'suvchi, qavariq bo'ladi;}$$

$$3) x(t) \equiv \sqrt{\frac{a}{b}} \text{ da } \frac{dx}{dt} \equiv 0 \text{ bo'ladi. Bu esa keladigan barcha energiya}$$

fotosintez va ozuqani ko'tarishga (tashishga) sarflanish holiga mos keladi. Bunda o'simlikning o'sishi chegaralanib barqarorlashadi, o'smaydi.

**8. Radioaktiv modda parchalanishi.** Biror materialning qalin qatlami bilan o'ralgan ma'lum bir miqdordagi radioaktiv moddaga ega bo'laylik. Parchalanishning barcha mahsuli moddaning atomlari bilan to'qnashuvlarga uchramasdan I sohani bemalol tark etadi; II sohaga o'tadi, ikki qism moddalar massalari yig'indisi vaqt o'tishi bilan o'zgarmaydi va soha biri ikkinchisining qismi bo'lgan ikki sohaga ajratilgan (I soha II sohaning qismi) deb faraz qilamiz. Bu fakt qo'yilgan vaziyatga tatbiq qilinayotgan modda massasining saqlanish qonunidan iborat. I va II sohalaridagi parchalanish mahsulining bosgan yo'llari  $\lambda_1$  va  $\lambda_2$ , sohalaridagi materiallarning xarakterli o'lchovlarini  $L_1$  va  $L_2$  desak, ular uchun

$$\lambda_1 \ll L_1 \text{ va } \lambda_2 \ll L_2 \quad (1)$$

shartlar qo'yiladi.

Agar vaqtning boshlang'ich momenti  $t=0$  da moddalar massalari  $M_1(0)$  va  $M_2(0)$  bo'lsa, u holda vaqtning ixtiyoriy  $t$  momentida

$$M_1(0) + M_2(0) = M_1(t) + M_2(t) \quad (2)$$

bo'ladi.

$M_1(t)$  va  $M_2(t)$  massalarni aniqlash uchun (2) tenglama etarli emas. Parchalanish tezligi radioaktiv modda atomlari umumiy soniga proporsionalligidan foydalanamiz:

$$\frac{dN_1(t)}{dt} = -\lambda N_1(t)$$

bu erda  $\alpha > 0$  proporsionallik koeffitsienti (modda kamayuvchi).

$M_1(t) = \mu_1 N_1(t)$  tenglamani hisobga olamiz, bu erda  $\mu_1$  — I moddaning atom og'irligi. Natijada,

$$\frac{dM_1(t)}{dt} = -\alpha M_1(t), \quad (3)$$

ga ega bo'lamiz.

(2), (3) tenglamalar (1) shartlar va  $\alpha$ ,  $M_1(0)$ ,  $M_2(0)$  miqdorlar bilan birga qaralayotgan ob'ektning matematik modelini tashkil qiladi.

(3) tenglamani integrallab,

$$M_1(t) = M_1(0)e^{-\alpha t}, \quad (4)$$

echimni topamiz.  $t \rightarrow \infty$  da I-sohada modda batamom yo'qoladi. (2) dan foydalanib, (4) ni hisobga olsak,

$$M_2(t) = M_1(0) + M_2(0) - M_1(0)e^{-\alpha t} = M_2(0) - M_1(0)(1 - e^{-\alpha t})$$

hosil bo'ladi.  $t \rightarrow \infty$  da parchalanish mahsuli I sohadan II sohaga to'liq o'tadi.

**9. Reaktiv harakat.** Havo qarshiligi, gravitatsiya va boshqa tashqi kuchlar e'tiborga olinmaganda raketa harakatining eng sodda matematik modeli impulsning saqlanish qonunidan kelib chiqadi.

Raketa yoqilg'isining yonish mahsuloti (zarralar) raketa quyrug'idagi chiqaradigan konus naycha (soplo) dan  $u$  ga teng tezlik bilan chiqib ketadigan va vaqtning  $t$  va  $t + dt$  momentlari orasidagi kichik vaqt oraligida yoqilg'ining bir qismi yonib bo'lib, raketa massasi  $dm$  miqdorga o'zgargan bo'lsin. Bunda raketa impulsi ham o'zgaradi, lekin sistema (raketa hamda yonish mahsuloti)ning jamlangan impulsi o'zgarmaydi, ya'ni  $t$  momentdagiday qoladi:

$$m(t)v(t) = m(t + \Delta t)v(t + \Delta t) - dm[v(t + \xi dt) - u],$$

bu erda  $v(t)$  — raketa tezligi,  $v(t + \xi dt) - u$  ( $0 < \xi < 1$ ) — soplodan chiqqan gazlarning  $dt$  oraliqdagi o'rtacha tezligi. Bu tenglik o'ng tomonidagi birinchi had raketaning  $t + \Delta t$  momentidagi impulsdan, ikkinchi had esa chiqarilgan gaz  $dt$  vaqt davomida bergan impulsdan iborat.

$$m(t + \Delta t) - m(t) + \frac{dm}{dt} dt + O(dt^2)$$

ni hisobga olib, impulsning saqlanish qonunini

$$m \frac{dv}{dt} = - \frac{dm}{dt} u$$

differensial tenglama ko'rinishida yozish mumkin, bu tenglamani

$$\frac{dv}{dt} = -u \frac{d(\ln m)}{dt}$$

ko'rinishga keltirishimiz mumkin. Uni integrallab,

$$v(t) = v_0 + u \ln\left(\frac{m_0}{m(t)}\right)$$

echimni topish mumkin, bu erda  $v_0 = v(0)$ ,  $m_0 = m(0)$ .

Agar  $v_0 = 0$  bo'lsa,  $u$  holda raketaning yoqilg'i to'la yonib bo'lganda erishiladigan maksimal tezligi

$$v = u \ln\left(\frac{m_0}{m_p + m_s}\right) \quad (1)$$

ga teng bo'ladi, bu erda  $m_p$  - foydali massa (yo'ldosh massasi),  $m_s$  - strukturali massa (raketa tuzilishiga oid massa – yoqilg'i baklari, dvigatellari, boshqarish sistemalari va boshqalar)

Siolkovskiyning sodda formulasi (1) kosmik uchishlar uchun raketa tuzilishi haqida asosiy xulosa chiqarishga olib keladi.

$$\lambda = \frac{m_s}{m_0 + m_p}$$

miqdorni kiritamiz, bu  $m_p = 0$  da  $\frac{m_s}{m_0}$  ni xarakterlaydi, u holda  $\lambda=0,1$  va  $u=3 \text{ km/s}$

uchun  $m_p = 0$  da

$$v = u \ln\left(\frac{1}{\lambda}\right) = 7 \text{ km/s} / \tilde{n}$$

ni beradi.

Bu erdan eng ideal vaziyatda – foydali massa 0 ga teng, gravitatsiya va havo qarshiligi hisobga olinmaganda qaralayotgan raketa birinchi kosmik tezlikka etishga qodir emasligi kelib chiqadi. SHuning uchun ko'p bosqichli raketalardan foydalanish zarur degan xulosaga kelinadi.

**10. Modellar tuzishda o'xshashliklar.** Avval o'rganilgan hodisalarga o'xshashliklardan foydalanib matematik model tuzish usuli samarali yo'llardan biri bo'lib hisoblanadi. YUqorida o'rganilgan 1-masalada keltirilgan modellarga e'tibor bersak, umumiy ko'rinishdagi

$$\frac{dx}{dt} = (\alpha - \beta)x \quad (1)$$

tenglamani yozishimiz mumkin, bu erda

$$x = x(t), \quad \alpha = \alpha(t) \geq 0, \quad \beta = \beta(t) \geq 0.$$

1-masalada  $a \geq 0$  va  $b \geq 0$  doimiy sonlar edi. (1) da  $\alpha = a$ ,  $\beta = b$  olsak, (1) dan 1-masaladagi (4) tenglama, agar  $\alpha = a$ ,  $\beta = bx$  olsak, (1) dan 1-masaladagi (5) tenglama hosil bo'ladi. (1) tenglama 8-masaladagi (3) tenglamaga juda o'xshash bo'lib, (1) tenglama  $\alpha$  va  $\beta$  doimiy sonlar bo'lib,  $\alpha < \beta$  bo'lganda 8-masaladagi (3) tenglama bilan bir xil bo'ladi. Bu tabiiy hol, chunki ularni keltirib chiqarishda bir xil mulohazalardan foydalanilgan. (1) ni integrallasak,

$$x(t) = x(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^t [\alpha(t) - \beta(t)] dt\right)$$

kelib chiqadi.

**11. Modellar tuzishda zanjir prinsipi.** Matematik model tuzishda uncha murakkab bo'lmagan modelni batafsil o'rganib bo'lingach navbatdagi qadamga o'tishda «soddadan murakkabga» prinsipini amalga oshiruvchi yo'l tabiiy bo'lib hisoblanadi. Bunda har bir model avvalgilarini xususiy hol sifatida o'z ichiga olib, umumlashtiruvchi yanada to'la modellarning zanjiri (ierarxiya) hosil bo'ladi.

Ko'p bosqichli raketa modeli misolida ierarxiya zanjirini tuzamiz. 9-masalada bir bosqichli raketa birinchi kosmik tezlikka etishga qodir emasligi, shuning uchun ko'p bosqichli raketalaridan foydalanish zarurligi ko'rsatilgan edi. Ko'p bosqichli raketa bir qancha bosqichlardan tuzilgan bo'lishi va ular foydalanilgan sari chiqarib tashlanishi kerak.  $m_i$  –  $i$ -bosqichning umumiy massasi,  $\lambda m_i$  – mos strukturali massa (bunda yoqilg'isi massasi  $(1 - \lambda)m_i$  miqdorga teng),  $m_p$  – foydali yuklamaning massasi,  $\lambda$  miqdor va gazlarning chiqarilish tezligi  $u$  barcha bosqichlar uchun bir xil. Uch bosqichli raketani o'rganaylik. Bunday raketaning boshlang'ich massasi

$$m_0 = m_p + m_1 + m_2 + m_3$$

ga teng, 1-bosqichning hamma yoqilg'isi sarflab bo'lingan vaqtni olamiz va raketa massasi

$$m_p + \lambda m_1 + m_2 + m_3$$

ga teng. U holda 9-masaladagi dastlabki modelning (1) formulasi bo'yicha raketa tezligi

$$v_1 = u \ln\left(\frac{m_0}{m_p + \lambda m_1 + m_2 + m_3}\right)$$

ga teng.  $v_1$  tezlikka erishgandan keyin strukturali massa  $\lambda m_1$  tashlab yuboriladi va ikkinchi bosqich ulanadi. Bu paytda raketa massasi

$$m_p + m_2 + m_3$$

ga teng bo'ladi. Bu paytdan boshlab to ikkinchi bosqich yoqilg'isi to'la yonib bo'ladigan momentgacha to'plangan impulsning saqlanish qonunidan foydalanib tuzilgan modeldan foydalanish mumkin, barcha mulohazalar o'z kuchida qoladi, boshlang'ich tezlik esa  $v_1$  ga teng bo'lib qolgan. U holda yana 9-masaladagi (1) formula bo'yicha ikkinchi bosqich yoqilg'isi to'la yonib bo'lgach raketa tezligi

$$v_2 = v_1 + u \ln\left(\frac{m_p + m_2 + m_3}{m_p + \lambda m_2 + m_3}\right)$$

ga etadi. Xuddi shunday muhokamalar raketaning uchinchi bosqichiga ham qo'llaniladi. Uning dvigatellari o'chirilgach raketa tezligi

$$v_3 = v_2 + u \ln\left(\frac{m_p + m_3}{m_p + \lambda m_3}\right)$$

ga teng bo'ladi. Yakuniy tezlik

$$v_3 = u \ln \left\{ \left( \frac{m_0}{m_p + \lambda m_1 + m_2 + m_3} \right) \left( \frac{m_p + m_2 + m_3}{m_p + \lambda m_2 + m_3} \right) \left( \frac{m_p + m_3}{m_p + \lambda m_3} \right) \right\}$$

hosil bo'ladi.

**12. Ishlab chiqarishning tabiiy o'sishi.** Biror mahsulot tayin narx  $c$  bo'yicha sotiladigan bo'lsin. Vaqtning  $t$  momentiga sotilgan mahsulot miqdorini  $x(t)$  bilan belgilaylik. U holda vaqtning shu momentida  $cx(t)$  ga teng kirim hosil bo'ladi. Bu kirimning bir qismi investitsiyaga sarflanadigan bo'lsin:

$$I = \alpha cx(t),$$

bu erda  $\alpha$  - investitsiya normasi (doimiy son),  $0 < \alpha < 1$ ,  $I = I(t)$ .

Agar bozorda ishlab chiqarilgan mahsulot to'la sotilib bo'ladigan shartda (bozorning to'yinmaganligi shartida) ishlab chiqarishni kengaytirish natijasida kirimning orta borishi kuzatiladi. Bu ortishning bir qismidan yana mahsulot ishlab chiqarishni kengaytirish uchun foydalaniladi. Bu ishlab chiqarish tezligining o'sishiga (akseleratsiyaga) olib keladi, shu bilan birga ishlab chiqarish tezligi investitsiyaning ko'payishiga proporsional bo'ladi:

$$x'(t) = \beta I$$

bu erda  $\frac{1}{\beta}$  akseleratsiya normasi. Oxirgi ikki formuladan

$$x'(t) = \beta \alpha cx(t)$$

yoki

$$x' = kx$$

birinchi tartibli o'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglama hosil bo'ladi, bu erda  $k = \beta \alpha c$ . Bu tenglamaning umumiy echimi

$$x = Ce^{kt}$$

ko'rinishida bo'ladi, bu erda  $S$  — ixtiyoriy doimiy son.  $x_0 = x(t_0)$  boshlang'ich shart berilgan bo'lsa, u holda

$$C = x_0 e^{-kt_0}$$

kelib chiqadi. Bundan

$$x = x_0 e^{k(t-t_0)}$$

xususiy echimni olamiz. Bu ishlab chiqarishning tabiiy o'sishi modeli deb aytiladi.

Bu model matematik modellarning universallik xossasini eslatadi. YUqorida ko'rib o'tilgan populyasiya ko'payishi jarayonining eng sodda holi, fan rivojlanishi jarayonining sodda holi, radiaktiv parchalanish jarayoni ham oxirgi formula bilan berilgan qonuniyatga bo'ysunadi.

**13. Ishlab chiqarishning raqobat shartlarida o'sishi.** Bu masala bozorning to'yinganlik shartida ko'riladi. Bozorda mahsulot hajmi  $x$  o'sishi bilan uning narxi  $c$  tushadigan bo'lsin, ya'ni  $c=c(x)$  bo'lib, bu funksiya kamayuvchi



funksiya:  $\frac{dc}{dx} < 0$  bo'lsin deb faraz qilamiz. Endi avvalgi bandeda olingan  $x' = kx$  qattiq model o'rniga xuddi o'sha yo'l bilan

$$x' = \gamma c(x)x$$

yumshoq modelga ega bo'lamiz, bu erda  $\gamma = \beta\alpha$ .

Soddalik uchun  $c(x)$  funksiyani  $c(x) = a - bx$  ko'rinishida olamiz, bu erda  $a > 0, b > 0$  doimiy sonlar. U holda

$$x' = \gamma(a - bx)x$$

yoki

$$x' = Ax - Bx^2$$

logistik modelga ega bo'lamiz, bu erda  $A = \gamma a, B = \gamma b$ .

Bu model ham yuqorida keltirilgan Ferxyul'st-Perl, reklama samaradorligi, fan rivojlanishining ikkinchi modeli, Beylining soddada epidemiya modelidagi jarayonlar bo'ysunadigan qonuniyatni ifodalab, matematik modellarning universalligini ko'rsatadi.

**14. Bashoratlanadigan narxlarga bog'liq bozor modeli.** Biror etarlicha uzoq vaqt davomida bozorda savdogar ma'lum bir mahsulotni sotadigan bo'lsin. Bunda, mahsulot haftalik tanaffuslar bilan sotiladigan bo'lsin. U holda mahsulotning mavjud qo'rida haftalik taklif kelgusi haftadagi kutilayotgan narxga va keyingi haftalarda narxning mo'ljallanayotgan o'zgarishiga bog'liq bo'ladi.

Agar kelayotgan haftada narxning pasayishi va keyingi haftalarda esa narxning ortishi nazarda nazarda tutilsa, u holda mahsulotni saqlashga ketadigan sarfdan narxning kutilayotgan ortishining oshib ketishi shartida taklif to'xtatib turiladi. Bunda kelayotgan haftaga taklif, kelajakdagi narxning ortishi mo'ljali qancha katta bo'lsa, shuncha kichik bo'ladi va aksincha, agar kelayotgan haftada narx yuqori bo'lib, keyingi haftalarda narxning tushib ketishi kutilayotgan bo'lsa, u holda kelayotgan haftaga taklif, keyingi haftalardagi mo'ljallanayotgan narxning tushishi qancha katta bo'lsa, shuncha katta bo'ladi.

Navbatdagi haftadagi mahsulotning narxini  $p$  bilan belgilaylik, bunda  $p$  vaqt  $t$  ning uzluksiz va differetsiallanuvchi funksiyasi bo'lsin.  $p'$  narxning shakllanishi tendensiyasi (narxning vaqt bo'yicha hosilasi) dan iborat. U holda talab ham, taklif ham  $p$  va  $p'$  miqdorlarning funksiyalari bo'ladi. Bunda amaliyot shuni ko'rsatadiki, turli omillarga bog'liq holda talab va taklif  $p$  va  $p'$  larning turlicha funksiyalari bo'ladi.

Xususan, bunday funksiyalardan biri chiziqli bog'lanish bilan beriladi:

$$y = ap' + bp + c,$$

bu erda  $a, b, c$  – biror haqiqiy o'zgarimaslar. Masalan, ko'rilyotgan masalada mahsulot narxi avval bir birligiga 1 so'm  $t$  – haftadan keyin esa u bir birligiga

$p(t)$  – so‘m, talab  $q$  va taklif  $s$  mos ravishda  $q = 4p' - 2p + 39$ ,  $s = 44p' + 2p - 1$  munosabatlar bilan aniqlanadigan bo‘lsa, u holda taklifning talabga mos kelishi uchun  $4p' - 2p + 39 = 44p' + 2p - 1$  tenglikning bajarilishi zarurdir.

Bu erdan  $\frac{dp}{p-10} = -0,1dt$  differensial tenglamaga kelamiz, buni integrallab,  $p = c \cdot e^{-0,1t} + 10$  ni topamiz.

Agar  $p(0) = 1$  boshlang‘ich shartni hisobga olsak,  $p = -9e^{-0,1t} + 10$  xususiy echimni topamiz.

SHunday qilib, talab va taklif orasida har vaqt muvozanat saqlanishini talab qilinsa, u holda narx oxirgi formula bo‘yicha o‘zgarishi zarur bo‘ladi.

**15. Iqtisodiyot o‘sishi makromodeli.** Milliy daromadni (ishlab chiqarish hajmini)  $Y$ , kapitalni (ishlab chiqarish mablag‘lari hajmini)  $K$ , mehnatni (mehnat sarflari hajmini)  $L$  bilan belgilaylik. Ishlab chiqarish funksiyasi  $Y = F(K, L)$

$F(K, L) = LF\left(\frac{K}{L}, 1\right)$  shartni qanoatlantiradigan ( $F(K, L)$  funksiya birinchi tartibli

birjinsli) bo‘lsin.  $x = \frac{K}{L}$  (1) miqdorni (mablag‘ bilan ta‘minlanganlik miqdorini)

kiritamiz. U holda mehnat unumdorligi

$$f(x) = \frac{1}{L} F(K, L) = F(x, 1) \quad (2)$$

formula bilan ifodalanadi.

$x$  miqdorning  $t$  vaqtga bog‘lanishi ifodasini topish talab qilinadi. Quyidagi shartlarni kiritamiz:

1.  $\frac{Y-c}{Y} = s = \text{const.}$
2.  $K' = Y - c.$
3.  $\frac{L'}{L} = n = \text{const.}$

Bu erda  $c$  – iste‘mol miqdori.

(1) dan  $\ln x = \ln K - \ln L$  tenglikni olamiz. Buni  $t$  bo‘yicha differensiallasak,

$$\frac{x'}{x} = \frac{K'}{K} - \frac{L'}{L}$$

yoki

$$x' = \frac{K'}{K} x - \frac{L'}{L} x \quad (3)$$

hosil bo‘ladi. Bunda

$$\frac{K'}{K} x = sf(x)$$

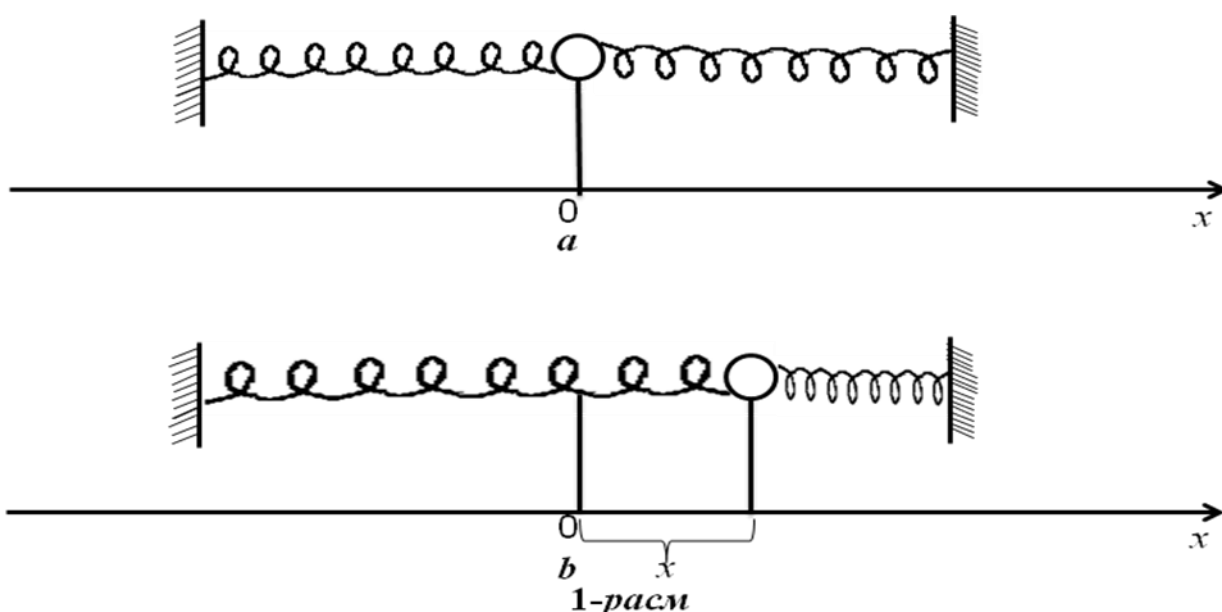
bo‘ladi, chunki 2-shart, (1) va (2) dan

$$x \frac{K'}{K} = x \frac{Y-c}{K} = \frac{K}{L} \cdot \frac{Y-c}{K} = \frac{Y-c}{L} = \frac{Y-c}{Y} \cdot \frac{Y}{L} = sf(x).$$

(3) dagi  $\frac{L'}{L}x$  esa 3-shartga ko‘ra  $nx$  ni beradi. Demak, (3) dan  $x' = sf(x) - nx$  (4) kelib chiqadi. (4) ni o‘shining makromodeli deyiladi.

**16. Tebranma harakatlar.** Fizikaviy va biologik sistemalarni o‘rganishda tebranma harakatlar masalalarini echishda chiziqli differensial tenglamalar kuchli vosita bo‘lib hisoblanadi.

**A.**  $t$  massaga ega bo‘lgan moddiy nuqta (sharcha) ikkita prujina bilan 1,a-rasmdagidek joylashtirilgan bo‘lsin.



Muvozanat vaziyatida moddiy nuqta (sharchaning markazi) koordinatasi nolga teng, Nuqtani  $Ox$  o‘qi yo‘nalishida siljitamiz (1,b-rasm). U holda Guk qonuniga muvofiq, nuqtaga  $x$  siljishga proporsional kuch ta’sir qiladi:

$$F = -kx. \quad (1)$$

Bu erda  $k > 0$ , minus belgi kuchning yo‘nalishi prujina siqilishi yo‘nalishiga qarama-qarshiligini bildiradi.

Nyutonning 2-qonuni bo‘yicha

$$F = ma \quad (2)$$

ni olamiz. (1) va (2) tengliklardan

$$ma = -kx \quad (3)$$

kelib chiqadi. To‘g‘ri chiziqli harakatda tezlik koordinata  $x$  ning  $t$  vaqt bo‘yicha birinchi tartibli hosilasi

$$v = \frac{dx}{dt}$$

dan, tezlanish

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

dan iborat. Bundan (3) ni

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

yoki

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \quad (4)$$

ko'rinishda yozish mumkin, bu erda  $\omega = \frac{k}{m}$ .

Agar fizik kattalik vaqtga bog'liq (4) tenglamaga mos holda o'zgarsa, u holda  $u$  garmonik tebranishga harakat qilmoqda deyiladi. (4) tenglamani garmonik tebranishlar yoki nuqtaning erkin tebranma harakati differensial tenglamasi deyiladi. (4) ni echamiz. Buning uchun

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0$$

xarakteristik tenglama tuzib, uning  $\lambda_1 = \omega i$  va  $\lambda_2 = -\omega i$  ildizlarini topamiz. (4) ning umumiy echimi

$$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t \quad (5)$$

funksiyadan iborat bo'ladi, bu erda  $C_1$  va  $C_2$  ixtiyoriy o'zgarmaslar. (5) dan  $t$  vaqt bo'yicha hosila olib, nuqtaning tezligini ifodalovchi

$$x' = -C_1 \omega \sin \omega t + C_2 \omega \cos \omega t \quad (6)$$

munosabatni topamiz.

$C_1$  va  $C_2$  lar, masalan,  $t=0$  da  $x(0)=x_0$  va  $x'(0)=v_0$  boshlang'ich shartlardan topiladi. Boshlang'ich shartlarni (6) ga qo'ysak,

$$C_1 = x_0, \quad C_2 = \frac{v_0}{\omega}$$

lar kelib chiqadi.

$C_1$  va  $C_2$  lar bilan

$$C_1 = A \sin \varphi, \quad C_2 = A \cos \varphi \quad (7)$$

munosabatlar orqali bog'langan yangi ixtiyoriy  $A$  va  $\varphi$  o'zgarmaslarni kiritamiz. U holda (5)

$$x = A \sin(\omega t + \varphi) \quad (8)$$

ko'rinishga keladi. (8) tenglama nuqtaning garmonik tabranma harakatini ifodalaydi. SHunday qilib, nuqtaning chiziqli qaytaruvchi kuch ta'siridagi erkin tebranma harakati garmonik tebranma harakatdan iborat bo'ladi.  $A$  miqdor nuqtaning muvozanat vaziyatidan eng katta og'ishini ifodalaydi va tebranish amplitudasi deyiladi.

(7) dan

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$$

kelib chiqadi.  $\sin u$  funksiyaning eng kichik davri  $2\pi$  ekanligidan garmonik tebranishning eng kichik davri  $T$  ni (8) ga qarab

$$\omega(t + T) + \varphi = \omega t + \varphi + 2\pi$$

tenglikdan topamiz:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

$\omega = \frac{2\pi}{T}$  miqdorni tebranish chastotasi, (7) dan topiladigan  $\omega t + \varphi$  miqdorni tebranish fazasi,  $t = 0$  paytdagi faza  $\varphi$  ni tebranishlarning boshlang'ich fazasi deyiladi.

Boshlang'ich moment  $t = 0$  da  $x = A \sin \varphi$ . Agar boshlang'ich momentda nuqta koordinatalar boshida bo'lsa, u holda  $\varphi = 0$ . Bu holda (8) tenglama

$$x = A \sin \frac{2\pi t}{T}$$

ko'rinishni oladi.

**B.** Endi yuqorida qo'yilgan masala shartlarida harakat qilayotgan nuqtaga muhitning harakat tezligiga proporsional bo'lgan qarshilik kuchi ta'sir qiladigan va shu bilan birga muhit qarshilik kuchi tortish kuchiga nisbatan kam bo'lgan holni o'rganaylik. Bu holda nuqta harakati tenglamasi

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - l \frac{dx}{dt}$$

ko'rinishda bo'ladi.  $\frac{l}{2m} = \beta > 0$  va  $\frac{k}{m} = \alpha^2$  belgilashlar kiritdik, tenglama

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \alpha^2 x = 0$$

ko'rinishga keladi.

Muhit qarshiligi kam bo'lganligi uchun  $\beta^2 < \alpha^2$  bo'ladi, shuning uchun xarakteristik tenglamaning ildizlari mavhum bo'ladi.  $\alpha^2 - \beta^2 = \gamma^2$  belgilash kiritib,

$$x = e^{-\beta t} (C_1 \cos \gamma t + C_2 \sin \gamma t)$$

umumiy echimga ega bo'lamiz.  $C_1 = A \sin \varphi$  va  $C_2 = A \cos \varphi$  deb olib,

$$x = A e^{-\beta t} \sin(\gamma t + \varphi)$$

tenglamani olamiz. Bunda harakat so'nuvchi tebranma bo'ladi, amplituda  $A e^{-\beta t}$  vaqt o'tishi bilan kamayuvchi bo'ladi.

S. A banddagi masala shartlari qatoriga muhit qarshiligi sharti kiritilmay, balki davriy to'ldiriluvchi

$$F(t) = B \sin \omega t$$

kuch kiritilgan holda nuqtaning tebranma harakati differensial tenglamasi

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = B \sin \omega t \quad (9)$$

ko'rinishda bo'ladi, bu erda  $B$  — to'ldiriluvchi kuchning amplitudasi,  $\omega$  — uning chastotasi.

Mos bir jinsli tenglamaning umumiy echimi A band (8) formuladan

$$Z = A \sin(\omega t + \varphi)$$

funksiya  $A$  amplitudaga va  $\omega$  chastotaga ega bo'lgan erkin garmonik tebranishni ifodalaydi. Bu tebranish nuqtaning xos tebranishidir.

1. Agar  $\omega \neq \omega$  bo'lsa, u holda (1) ning xususiy echimini

$$y = c \cos \omega t + d \sin \omega t$$

ko'rinishda izlaymiz. Natijada

$$y = \frac{B}{\omega^2 - \omega^2} \sin \omega t$$

ga ega bo'lamiz. Bu chastotasi to'ldiruvchi kuchning chastotasiga teng va amplitudasi kuchning amplitudasiga proporsional bo'lgan majburiy tebranishdan iborat.

Nuqtaning harakati tenglamasi

$$x = A \sin(\omega t + \varphi) + \frac{B}{\omega^2 - \omega^2} \sin \omega t$$

ko'rinishda bo'ladi.

2. Agar  $\omega = \omega$  bo'lsa, ya'ni to'ldiruvchi kuch chastotasi xos tebranish chastotasiga teng bo'lsa, u holda bunday hodisa rezonans deb ataladi. Bu holda xususiy echimni

$$y = t(c \cos \omega t + d \sin \omega t)$$

ko'rinishda izlaymiz.

$$y = -\frac{B}{2\omega} t \cos \omega t$$

echimni olamiz. Nuqta harakati tenglamasi

$$x = A \sin(\omega t + \varphi) - \frac{B}{2\omega} t \cos \omega t$$

ko'rinishda bo'ladi. Ikkinchi qo'shiluvchidan ko'rinadiki, tebranish amplitudasi vaqtning o'tishi bilan cheksiz o'sib boradi.

**17. Mavsumiy o'sish modeli.** Birinchi tartibli oddiy

$$\frac{dx}{dt} = r x \cos t$$

ko‘rishdagi differensial tenglamani mavsumiy o‘shishning oddiy modeli sifatida qarash mumkin, bu erda  $r$  musbat doimiy son.  $x(t)$  populyasiya o‘shishining tezligi  $\frac{dx}{dt}$  navbat bilan goh musbat, goh manfiy bo‘ladi va populyasiya ham navbat bilan goh o‘sadi, goh kamayadi. Bunga mavsumiy, masalan, ozuqaning etarliligi kabi omillar sabab bo‘lishi mumkin. Tenglamani echamiz, uni

$$\frac{dx}{x} = r \cos t dt$$

ko‘rinishda yozib, integrallaymiz.

$$\int \frac{dx}{x} = r \int \cos t dt.$$

Bundan  $\ln x = r \sin t + \ln c$ ,  $\ln \frac{x}{c} = r \sin t$ ,  $x = ce^{r \sin t}$  umumiy echimni olamiz.

$t=0$  olib,  $c = x(0)$  ni topamiz. Demak vaqtning  $t$  momentidagi populyasiya miqdori

$$x(t) = x(0)e^{r \sin t}$$

ga teng bo‘ladi. Populyasiya maksimal miqdori  $e^r x(0)$  ga teng bo‘lib, unga  $\sin t = 1$  bo‘lganda, ya’ni  $t$  ning  $\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, \dots$  ga teng qiymatlarida, minimal miqdori  $e^{-r} x(0)$  ga teng bo‘lib, unga  $\sin t = -1$  bo‘lganda ya’ni  $t$  ning  $\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \frac{11\pi}{2}, \dots$  ga teng qiymatlarida erishadi.

Bu modelda populyasiya miqdori  $e^r x(0)$  dan  $e^{-r} x(0)$  gacha  $2\pi$  ga teng davr bilan tebranadi. Vaqtning  $t=0, 2\pi, 4\pi, \dots$  momentlarini ozuqani topish imkoniyati eng katta bo‘lgan mavsumlar (yoz mavsumlari) ning o‘rtalari, vaqtning  $t=\pi, 3\pi, 5\pi, \dots$  momentlarini ozuqani topish imkoniyati eng kichik bo‘lgan mavsumlar (qish mavsumlari)ning o‘rtalariga mos keladi deyish mumkin.

**18. Avtomodellik.** Argumentlari  $x$  va vaqt  $t$  dan iborat  $u(x, t)$  funksiya

$$u(x, t) = t^\alpha h(t^\beta x) \quad (1)$$

ko‘rinishga ega bo‘lsa, uni avtomodel’ deyiladi, bu erda  $\alpha, \beta$  – biror o‘zgarmas sonlar,  $h$  – bir argumentli funksiya. Argumentlaridan biri vaqtdan iborat bo‘lgan ixtiyoriy sondagi argumentlarning funksiyasining avtomodellikligi ta’rifi ham shunga o‘xshash beriladi.

Misol sifatida

$$u(x, t) = cx - dt^2 x^5 \quad (2)$$

funksiyaning avtomodellikligini tekshiramiz, bu erda  $c$  va  $d$  o'zgaras sonlar. (2) ni

$$u(x, t) = t^\alpha (ct^{-\alpha}x - dt^{-\alpha+2}x^5)$$

ko'rinishda ifodalaymiz, bu erda  $\alpha$  ni

$$t^{-\alpha+2}x^5 = (t^{-\alpha}x)^5$$

shart bajariladigan qilib tanlaymiz. Bundan  $\alpha = -\frac{1}{2}$ , ya'ni

$$u(x, t) = t^{-\frac{1}{2}} \left( ct^{\frac{1}{2}}x + dt^{\frac{5}{2}}x^5 \right) = t^{-\frac{1}{2}} h \left( t^{\frac{1}{2}}x \right),$$

bu erda

$$h(z) = cz + dz^5.$$

Demak, avtomodellik sharti (1)  $\alpha = -\frac{1}{2}$  va  $\beta = \frac{1}{2}$  da bajarilmoqda. Funksiyaning avtomodellik xossasining o'rnatilishi hisoblashlarni soddalashtirishga olib keladi.

Differensial tenglamada echimning avtomodelligi haqidagi faraz differensial tenglamada erkli o'zgaruvchilar sonini bittaga kamaytirishga, bu bilan esa ba'zan murakkab chiziqsiz masalalar holida echimni qurishga imkoniyat tug'diradi. Xususiyl hosilali differensial tenglamaga (1) ni qo'yib, oddiy differensial tenglamani olamiz. Buni integrallash boshlang'ich-chegaraviy masalaning echimini topishga nisbatan ancha sodda bo'ladi.

### 19. Cheksiz tor tebranishi tenglamasini Dalamber usuli bilan echish.

$$u_{tt}'' - a^2 u_{xx}'' = 0 \quad (1)$$

tenglamani

$$u(x, 0) = f(x), u_t'(x, 0) = F(x) \quad (2)$$

boshlang'ich shartlarda Dalamber usuli bilan yozamiz, bu erda  $f(x)$  va  $F(x)$  funksiyalar butun sonlar o'qida berilgan.

Agar  $\varphi(p)$  va  $\psi(q)$  har qanday ikki marta differensiallanuvchi funksiyalar bo'lsa, u holda

$$u(x, t) = \varphi(x - at) + \psi(x + at) \quad (3)$$

funksiya (1) tenglamaning echimi bo'ladi, bu erda  $p$  va  $q$  ixtiyoriy erkli o'zgaruvchilar.

Haqiqatan ham,



$$\begin{aligned}
u_x' &= \varphi'(x-at) + \psi'(x+at), \\
u_{xx}'' &= \varphi''(x-at) + \psi''(x+at), \\
u_t' &= -a\varphi'(x-at) + a\psi'(x+at), \\
u_{tt}'' &= a^2\varphi''(x-at) + a^2\psi''(x+at)
\end{aligned} \tag{4}$$

larni topsak, (1) kelib chiqadi. (3) funksiya (1) tenglamaning umumiy echimi bo'ladi. (3) boshlang'ich shartlardan foydalanib  $\varphi$  va  $\psi$  funksiyalarni aniqlaymiz. (3) va (4) lardan  $t = 0$  da

$$\varphi(x) + \psi(x) = f(x), \quad -a\varphi'(x) + a\psi'(x) = F(x) \tag{5}$$

hosil bo'ladi. (5) dagi ikkinchi tenglikni  $[0; x]$  kesmada integrallab,

$$-a(\varphi(x) - \varphi(0)) + a(\psi(x) - \psi(0)) = \int_0^x F(z) dz$$

yoki

$$-\varphi(x) + \psi(x) = \frac{1}{a} \int_0^x F(z) dz + c \tag{6}$$

tenglikka ega bo'lamiz, bu erda  $c = \psi(0) - \varphi(0)$ . (5) dagi birinchi tenglik va (6) tenglikdan izlangan

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \frac{1}{2} f(x) - \frac{1}{2a} \int_0^x F(z) dz - \frac{c}{2}, \\
\psi(x) &= \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2a} \int_0^x F(z) dz + \frac{c}{2}
\end{aligned}$$

funksiyalarni topamiz. Oxirgi formulalarda  $x$  ni mos ravishda  $x-at$  va  $x+at$  ga almashtirib, olingan ifodalarni (3) ga qo'yib,

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left( f(x-at) + f(x+at) + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} F(z) dz \right)$$

echimni topamiz.

Topilgan  $u(x, t)$  echim avtomodel echimlar sinfiga tegishli.

## 20. Diffuziya tenglamasini Fure usuli bilan echish.

$$u_t' - a^2 u_{xx}'' = 0 \quad (0 < x < l) \tag{1}$$

diffuziya tenglamasini

$$u(x, 0) = f(x) \quad (0 \leq x \leq l) \tag{2}$$

boshlang'ich shart va ixtiyoriy  $t \geq 0$  da

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0 \tag{3}$$

chegaraviy shartlarda Fure – o‘zgaruvchilarni ajratish usuli bilan echamiz.

(1) tenglama uchun avval aynan nolga teng bo‘lmagan echimni

$$u = X(x)T(t) \quad (4)$$

ko‘rinishda izlaymiz.

$$u_t' = XT', \quad u_{xx}'' = X''T$$

larni (1) ga qo‘yib,

$$XT' = a^2 X''T$$

yoki

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{a^2 T} \quad (5)$$

ga ega bo‘lamiz. Bu tenglik chap va o‘ng tomonlari o‘zgarmas songa teng bo‘lgandagina o‘rinli bo‘ladi. O‘sha sonni  $-\lambda^2$  bilan belgilab,

$$\frac{X''}{X} = -\lambda^2, \quad \frac{T'}{a^2 T} = -\lambda^2 \quad (6)$$

ni olamiz. Bu erdan

$$X'' + \lambda^2 X = 0, \quad T' + a^2 \lambda^2 T = 0 \quad (7)$$

tenglamalar hosil bo‘ladi. Bulardan birinchining xarakteristik tenglamasi  $k^2 + \lambda^2 = 0$  ning ildizlari  $k_{1,2} = \pm \lambda i$  bo‘ladi. Bu erdan

$$X(x) = A \sin \lambda x + B \cos \lambda x \quad (8)$$

umumiy echimni topamiz, bu erda  $A$  va  $B$  har qanday o‘zgarmas sonlar. (7) dagi ikkinchi tenglama o‘zgaruvchilarni ajratib echilganda

$$T(t) = C e^{-a^2 \lambda^2 t} \quad (9)$$

echim kelib chiqadi, bu erda  $C$  – har qanday o‘zgarmas son. (4),(8),(9) dan

$$u = e^{-a^2 \lambda^2 t} (A \sin \lambda x + B \cos \lambda x) \quad (10)$$

ni olamiz, bu erda  $AC$  ni  $A$  ga va  $BC$  ni  $B$  ga almashtirib  $C=1$  olindi. (10) echimning (3) shartlarni qanoatlantirishini talab qilamiz.  $x=0$  desak,

$$B e^{-a^2 \lambda^2 t} = 0$$

dan  $B=0$  va demak

$$u = A e^{-a^2 \lambda^2 t} \sin \lambda x \quad (10')$$

hosil bo‘ladi.

$x=l$  da (3) ga ko‘ra

$$0 = A e^{-a^2 \lambda^2 t} \sin \lambda l \quad (11)$$

bo‘ladi. Bunda  $A \neq 0$ , chunki aks holda  $u \equiv 0$  echim olgan bo‘lar edik. SHuning uchun

$$\sin \lambda l = 0 \quad (12)$$

va

$$\lambda l = n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (13)$$

bo‘ladi.

Bu erdan

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{l} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (14)$$

har bir  $\lambda_n$  ga

$$u_n = A_n e^{-b^2 n^2 t} \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (15)$$

hususiy echim mos keladi, bu erda  $b = \frac{a\pi}{l}$ .

$n$  ning faqat butun musbat qiymatlarini olish kifoya, chunki  $n = 0$  da  $u \equiv 0$  bo'ladi, bu esa shartimizga muvofiq emas.  $n < 0$  da esa  $n' = -n > 0$  ga mos o'sha tabiatdagi echimlarni olamiz.

SHunday qilib, (15) formula (1) tenglamaning (3) chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi (4) ko'rinishidagi chiziqli erkli hususiy echimlarining to'la to'plamini beradi.

Endi (2) boshlang'ich shartning qanoatlantirilishini ta'minlaymiz. (1) tenglama chiziqli va bir jinsli bo'lganligi uchun uning ixtiyoriy sondagi echimlarining yig'indisi ham yana o'zining echimi bo'lishligidan

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-b^2 n^2 t} \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (16)$$

ga ega bo'lamiz. Agar (16) qator yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda ma'lum shartlarda (16) funksiya (1) tenglamaning echimi bo'ladi. (16) formulada  $t = 0$  deb (2) boshlang'ich shartga ko'ra

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (17)$$

ni hosil qilamiz. YOyilmaning koeffitsientlari uchun

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (18)$$

formulalar o'rinli.

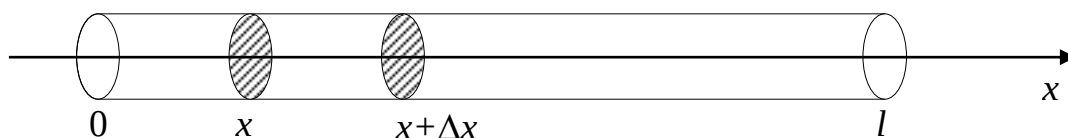
SHunday qilib, masalaning echimi (16) qator bilan beriladi, uning koeffitsientlari (18) formula bilan aniqlanadi. Amaliyotda bu qatorning bir qancha hadlarini olish etarli.

**21. Mikroorganizmlarning diffuziyasi modeli.** Avvalgi mavzularda populyasiya sonining yashash joyining o'zida o'zgarishi bilan qiziqdik. Biz populyasiyaning fazoda ko'chishi bilan, joyning turli qismlarida zichligining o'zgarishi bilan qiziqmadik. Bunday qarash joy kichik bo'lsa, yoki joy fizik xususiyatlari bo'yicha bir jinsli bo'lsa, o'rinli bo'ladi.

Aks holda vaqtga bog'liq o'zgarishlarnigina emas balki fazoviy o'zgarishlarni ham o'rganish zaruriyati paydo bo'ladi, chunki bir jinsli bo'lmagan fazoning turli sohalarida populyasiya har xil rivojlanishi mumkin.

Bu mavzuda biz shunga o'xshash masalalarning ba'zilarining qo'yilishi bilan tanishamiz. G'ovakli modda bilan to'ldirilgan va yon sirlari bo'yicha ajratilgan (izolyasiyalangan) naycha (trubka) ni olaylik. Agar naychada biror gaz bo'lib, uning konsentratsiyasi ba'zi bir joylarida boshqa joylaridagiga nisbatan ortiq bo'lsa, u holda fizikadan ma'lumki vaqt o'tishi bilan gaz konsentratsiyasi ko'p bo'lgan joylardan konsentratsiyasi oz bo'lgan joylarga oqib o'tadi. Bu hodisani diffuziya deyiladi. Diffuziyani suyuq muhitda ham kuzatish mumkin. Mikroorganizmlar ham, agar ularning harakatiga ta'sir qiluvchi omillar (ozuqa, zaharli modda, pasaygan yoki ko'tarilgan harorat va b.) yo'q bo'lsa, o'zlarini shu tarzda tutadilar.

Ichida gaz bo'lgan naycha haqidagi masalada vaqtning  $t$  momentida qiymatlari gazning berilgan nuqtadagi konsentratsiyasiga teng bo'lgan funktsiyani topishga yordam beruvchi matematik modelni keltiramiz. Naychani  $Ox$  o'qi bo'ylab shunday joylashtiraylikki, uning chap cheti koordinatalar o'qi boshi bilan, o'ng cheti esa  $l$  nuqta bilan ustma-ust tushadigan bo'lsin, bu erda  $l$  naycha uzunligi.



Vaqtning tayin momentida  $x \in [0, l]$  nuqtadan o'tuvchi kesimning barcha nuqtalarida konsentratsiyalar teng deb faraz qilamiz. Bu faraz, masalan, diametri etarlicha kichik bo'lgan naychalar uchun o'rinli bo'ladi.

Vaqtning  $t$  momentida  $x \in [0, l]$  nuqtadan o'tuvchi kesimda gazning konsentratsiyasini  $u(t, x)$  bilan belgilasak, u funktsiya  $0 < t < T$ ,  $0 < x < l$  to'g'ri to'rtburchakda barcha  $t$  va  $x$  uchun

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1)$$

tenglamani qanoatlantiradi, ya'ni (1) tenglamaning echimi bo'ladi. Bu erda  $a^2 = \frac{D}{c} > 0$ ,  $D$ -diffuziya koeffitsienti, u qiymati diffuziyalanayotgan modda (bu holda gaz) va muhit xossalari bilan aniqlanadi,  $c$ -g'ovaklilik koeffitsienti; u kovakchalar hajmining naychanning qaralayotgan qismining umumiy hajmiga nisbatiga teng. (1) tenglamani diffuziya tenglamasi deyiladi.

Agar diffuziyani naychada emas, balki etarlicha yupqa plastinkada o'rganilsa, u holda  $u(t, x, y)$  konsentratsiya

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (2)$$

tenglamani qanoatlantiradi. Uch o'lchovli fazoda diffuziya

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (3)$$

tenglama bilan ifodalanadi.

SHunday qilib naychada diffuziyalanayotgan moddaning konsentratsiyasi xususiy hosilali ikkinchi tartibli (1) differensial tenglamaning echimlarining biridan iborat. Bunday echimlar cheksiz ko'p. Haqiqatan ham, masalan,  $t$  bo'yicha doimiy va  $x$  bo'yicha chiziqli bo'lgan har qanday funksiya, ya'ni  $u(t, x) = Ax + B$  (1) ning echimi bo'ladi, yana

$$u(t, x) = e^{-a^2 t} (A \cos x + B \sin x)$$

funksiya ham echim bo'ladi, bu erda  $A$  va  $B$  – ixtiyoriy o'zgarmaslar. Konsentratsiya sifatida qaysi echimni olish kerak degan savolga javob berish uchun, odatda tajribadan izlanayotgan konsentratsiya haqida ba'zi ma'lumotlar ma'lum bo'lishini hisobga olamiz. Masalan  $t=0$  da  $u(0, x)$  konsentratsiya ma'lum bo'lishi mumkin. Undan tashqari vaqtning hamma momentlari uchun naycha uchlaridagi konsentratsiya ma'lum bo'lishi mumkin. SHunday qilib, (1) tenglamaning mumkin bo'lgan barcha echimlaridan bizni  $0 \leq t \leq T$ ,  $0 \leq x \leq l$  to'g'ri to'rtburchakda uzluksiz va qo'shimcha

$$u(0, x) = \varphi(x) \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} u(t, 0) &= \varphi_1(t) \\ u(t, l) &= \varphi_2(t) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

shartlarga buysunadigan echimlar qanoatlantiradi, bu erda  $\varphi$ ,  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  – berilgan funksiyalar. (4) tenglikni boshlang'ich shart, (5) tengliklar chegaraviy shartlar deyiladi.

Misol sifatida quyidagi hodisani ko'rib chiqamiz. Faraz qilaylik, idishda bir jinsli suyuq muhitda qandaydir mikroorganizmlar muallaq suzib yurishgan bo'lsin. Muhit bir jinsli bo'lganligi uchun mikroorganizmlar kotsentratsiyasi vaqt bo'yicha ham, koordinatalar bo'yicha ham doimiy. Vaqtning biror momentida suyuqlik sirtiga (sirt bo'yicha tekis) yoqimli ozuqa joylashtiriladi. U holda vaqt o'tishi bilan (etarlicha tez) sirtga yaqin konsentratsiya o'sadi va tubga yaqin esa nolgacha kamayadi. Bu hodisani quyidagicha tushuntirish mumkin.

Ozuqani faqat ozuqaga yaqin bo'lgan eng yuqori qatlamdagi mikroorganizmlar sezadilar va ozuqaga intiladilar. Qolganlari erkin diffuziyalanadilar. Ammo eng yuqori qatlam ozuqaga intilib ketganlar hisobiga bo'shab qoladi, bu joyga diffuziya qonunlari bo'yicha pastroqdagi qo'shni qatlamdagi mikroorganizmlar itarilib o'tadilar. Bularning konsentratsiya kamayib qolgan o'rnilariga o'z navbatida yanada pastroq qatlamdagi mikroorganizmlar o'tadilar va hokazo idish tubigacha bu jarayon davom etadi.

Agar idish ichida mikroorganizmlar harakati faqat diffuziya qonuniga bo'ysunsa, u holda konsentratsiya diffuziya tenglamasini qanoatlantirishi kerak. Ox o'qini yuqoriga yo'naltirib, biz (1) tenglamadan foydalanishimiz mumkin.

Endi biz boshlang'ich va chegaraviy shartlarni o'rnatishimiz kerak. Idish balandligi  $l$  bo'lsin,  $[0, l]$  oraliqni ikkita  $[0, l_1]$  va  $[l_1, l]$  oraliqlarga bo'lamiz. Eng yuqori qatlamga mos keluvchi  $[l_1, l]$  oraliq etarlicha kichik bo'lib, unda diffuziya qonuni amal qilmaydi. Mikroorganizmlar bu qatlamda sirtidagi ozuqani sezib unga intiladilar. SHuning uchun ularning konsentratsiyasi  $l_1$  sathda (ozuqa haqida hozircha bilmaydiganlar sohasi bo'lmish)  $[0, l_1]$  qatlamdagiga nisbatan har vaqt kam bo'ladi ( $l_1$  sathdan organizmlar sirtga ketadilar,  $l_1$  da konsentratsiya o'cmaydi, balki kamayadi,  $[0, l_1]$  qatlamdagi organizmlar ozuqa haqida bilmaydilar). Bu esa  $x=l_1$  da  $u'_x = (t, l_1)$  hosila ixtiyoriy  $t$  da manfiyligini bildiradi.  $u'_x = (t, l_1)$  hosila  $l_1$  sathdan vaqtning bir birligida organizmlarning kamayish miqdorini xarakterlaydi. Bu miqdor  $l_1$  sathda konsentratsiya qancha katta bo'lsa, shuncha katta bo'ladi, chunki shuncha katta sondagi organizmlar ozuqa xaqida biladi va ozuqaga intiladi, ya'ni  $l_1$  dan kamayish shuncha katta bo'ladi. SHunday qilib biz

$$u'_x(t, l_1) = -ku(t, l_1) \quad (5')$$

deb hisoblashimiz mumkin. Bu erda  $k > 0$  proporsionallik koeffitsienti.

Bu tenglik chegaraviy shartlardan biri bo'ladi. Boshqa shart juda sodda: tubda, ya'ni  $x=0$  da mikroorganizmlar ularga uzoq bo'lgan sirtidagi ozuqani sezmaydi, undan ta'sirlanmaydi va idish ichiga intilmaydi. Ular idishdan tub orqali chiqib ham keta olmaydi. Bu esa

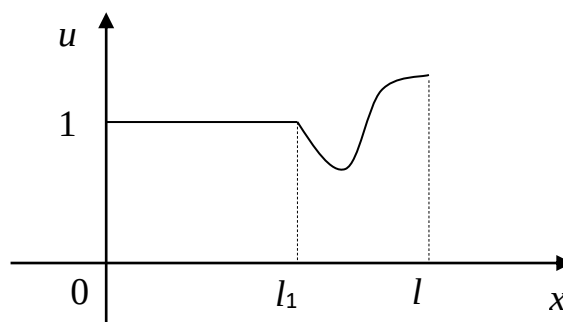
$$u'_x(t, 0) = 0 \quad (5'')$$

ekanligini bildiradi.

Bu chegaraviy shartlarga boshlang'ich shartni, ya'ni vaqtning boshlang'ich momenti  $t=0$  dagi konsentratsiya qiymatini qo'shimcha qilamiz. Ozuqa paydo bo'lgunga qadar konsentratsiya hamma erda doimiy, masalan 1 ga teng. Ozuqa paydo bo'lishi bilan (bu boshlang'ich momentning o'zginasi) sirtning o'zida konsentratsiya ko'payadi,  $l_1$  nuqtadan yuqoriroqda kamayadi, sirtidan uzoq bo'lgan nuqtalarda esa o'zgarmaydi. SHunday qilib, boshlang'ich momentda konsentratsiya qiymati

$$u(0, x) = \varphi(x) \quad (6)$$

olinadi, bu erda  $\varphi(x)$  berilgan funksiya, uning taxminiy grafigi shaklda ko'rsatilgan



Masala (1) tenglamaning  $0 < t < T$ ,  $0 < x < l_1$  to'g'ri to'rtburchakda aniqlangan (5'), (5'') va (6) shartlarni qanoatlantiradigan  $u(t, x)$  echimini topishdan iborat.

**22. Birinchi tartibli differensial tenglamalar sistemalariga keltiriladigan eng sodda masalalar.** Ba'zi jarayonlarni o'rganish masalasi differensial tenglamalar sistemasiga keltiriladi. Bir qancha turdagi populyasiyalarning o'zaro ta'sirini ifodalash masalalarini ham o'rganish mumkin.

Faraz qilaylik, bir muhitda ikki turdagi populyasiya mavjud bo'lib, ular umumiy resurslar uchun raqobatda bo'lsin. U holda populyasiyaning o'sishini ifodalashda raqib turning ishtiroki ta'sirini hisobga olish zarur.

Populyasiyaning o'sish tezligi shu populyasiyaning o'zining sonigagina bog'liq bo'lmaydi, balki boshqa tur soniga ham bog'liq deb aytish mumkin. O'zaro ta'sirning bunday turini ifodalash uchun bitta differensial tenglama etarli bo'lmaydi.

Berilgan muhitda ishtirok etuvchi ikki turning  $t$  momentdagi miqdorlari mos holda  $x(t)$ ,  $y(t)$  bo'lsin.

Bir turning o'sishiga shu turning va boshqa turning ishtiroki ta'siri har xil bo'lishi mumkin.

1. 1-turning o'sishiga 2-turning o'sishi salbiy, 1-turning o'sishi ijobiy, 2-turning o'sishiga 1-turning o'sishi salbiy, 2-turning o'sishi ijobiy ta'sir qilishi mumkin. Buni turlararo raqobat modeli deyiladi.

2. 1-turning o'sishiga 2-turning o'sishi ijobiy, 1-turning o'sishi ijobiy, 2-turning o'sishiga 1-turning o'sishi salbiy, 2-turning o'sishi ijobiy ta'sir qilishi mumkin. Buni yirtqich-o'lja modeli deyiladi.

3. 1-turning o'sishiga 2-turning o'sishi ijobiy, 1-turning o'sishi salbiy, 2-turning o'sishiga 1-turning o'sishi ijobiy, 2-turning o'sishi salbiy ta'sir qilishi mumkin. Buni turlar birgaligi modeli deyiladi.

Turlarning o'zaro ta'sirining ba'zi sodda modellarini keltiramiz.

$$\begin{cases} x' = ax + by, \\ y' = cx + dy \end{cases} \quad (1)$$

ko'rinishdagi ikkita birinchi tartibli chiziqli oddiy differensial tenglamalar sistemasini o'rganamiz, bu erda  $a, b, c, d$  – doimiy sonlar.

(1) sistemani turlarning o'zaro ta'sirining sodda modeli sifatida qarash mumkin. (1) sistema  $x(t)$  va  $y(t)$  uzluksiz, differensiallanuvchi hol uchun ham turli ma'nodagi modellarni beradi.

1.  $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$  holda turlararo raqobat modelini beradi.
2.  $a > 0, b > 0, c < 0, d > 0$  holda yirtqich-o'lja modelini beradi.
3.  $a < 0, b > 0, c > 0, d < 0$  holda turlar birgaligi modelini beradi.

(1) sistemani echish uchun birinchi tenglamani differensiallab,

$$x'' = ax' + by'$$

ni olamiz. Bunga ikkinchi tenglamadan  $y'$  uchun ifodani olib kelib qo'yamiz. Natijada

$$x'' = ax' + b(cx + dy) = ax' + bcx + bdy$$

hosil bo'ladi. Bunga birinchi tenglamadan  $by$  uchun ifodani olib kelib qo'yamiz,

$$x'' = ax' + bcx + d(x' - ax)$$

yoki

$$x'' - (a - d)x' + (ad - bc)x = 0$$

o'zgarmas koeffitsientli ikkinchi tartibli birjinsli oddiy differensial tenglamaga ega bo'lamiz. Buni echib  $x(t)$  uchun echimni olamiz, keyin (1) sistemadan  $y(t)$  ni topish mumkin.

Misol. Yirtqich-o'lja modeli. Faraz qilaylik,  $t$  momentdagi yirtqich turining soni  $x(t)$ , o'lja turining soni  $y(t)$ , ular populyasiyalarining o'sish tezliklari bir jinsli chiziqli sistema

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + y(t), \\ y'(t) = -x(t) + y(t) \end{cases}$$

bilan ifodalangan bo'lsin.  $t=0$  da  $x(0)=y(0)=1000$  bo'lganda  $x(t)$ ,  $y(t)$  topilsin.

Echish. YUqoridagi tavsiya bilan  $x'' - 2x' + 2x = 0$  ni olamiz  $k^2 - 2k + 2 = 0$  dan  $k_{1,2} = 1 \pm i$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1$  bo'ladi. Umumiy echim  $x(t) = e^t (c_1 \cos t + c_2 \sin t)$  kelib chiqadi. Sistema 1-tenglamasidan  $y = x' - x = e^t (c_2 \cos t - c_1 \sin t)$ ,  $x(0)=y(0)=1000$  dan  $c_1 = c_2 = 1000$  hosil bo'ladi. SHuning uchun izlangan echim



$$x(t) = 1000e^t (\cos t + \sin t),$$

$$y(t) = 1000e^t (\cos t - \sin t)$$

ni olamiz. O'lja turi qirilib ketishi uchun  $\cos t - \sin t = 0$  bo'lishi kerak, bundan  $t = \frac{\pi}{4}$  vaqt birligi kelib chiqadi.

Yirtqichlar populyasiyasining muhitning boshqa resurslari hisobiga o'sishi davom etadi va  $x'(t) = x(t)$  tenglama bilan ifodalanadi.

Buni echsak,  $\frac{dx}{dt} = x$ ,  $\frac{dx}{x} = dt$ ,  $\ln x = t + \ln c$ ,  $x = ce^t$  hosil bo'ladi.

**23. Volterra modeli.** Bu erda biz yirtqich-o'lja modelining boshqa bir ko'rinishini keltiramiz.

Vaqtning  $t$  momentidagi o'lja populyasiyasi sonini  $x$  bilan, yirtqich populyasiyasi sonini esa  $y$  bilan belgilaylik.

Yirtqich mavjud bo'lmaganda o'lja

$$x' = \alpha x, \alpha > 0$$

tenglama bo'yicha ko'payadi, o'lja bo'lmaganda yirtqich

$$y' = -\beta y, \beta > 0$$

tenglama bo'yicha kamayadi.

Yirtqich o'ljani o'lja qancha ko'p bo'lsa va yirtqichning o'zi ham qancha ko'p bo'lsa, shuncha ko'p eydi. SHuning uchun yirtqich mavjud bo'lganda o'lja soni

$$x' = \alpha x - \gamma xy, \gamma > 0$$

qonun bo'yicha o'zgaradi.

O'ljaning eyilgan soni yirtqichning ko'payishiga sabab bo'ladi, buni

$$y' = -\beta y + \delta xy, \delta > 0$$

ko'rinishida yozish mumkin.

SHunday qilib, biz

$$\begin{cases} x' = \alpha x - \gamma xy, \\ y' = -\beta y + \delta xy \end{cases} \quad (1)$$

tenglamalar sistemasini olamiz,

$$x \geq 0, y \geq 0.$$

(1) ni yirtqich-o'lja modeli deyiladi.

Bizni

$$\begin{cases} x' = 0 \\ y' = 0 \end{cases}$$

sistemaning echimidan iborat  $M(x^*, y^*)$  muvozanat nuqtasi qiziqtiradi, bunda  $x^*, y^*$  kordinatalarni

$$\begin{cases} \alpha - \gamma y = 0, \\ -\beta + \delta x = 0 \end{cases}$$

sistemadan aniqlaymiz:

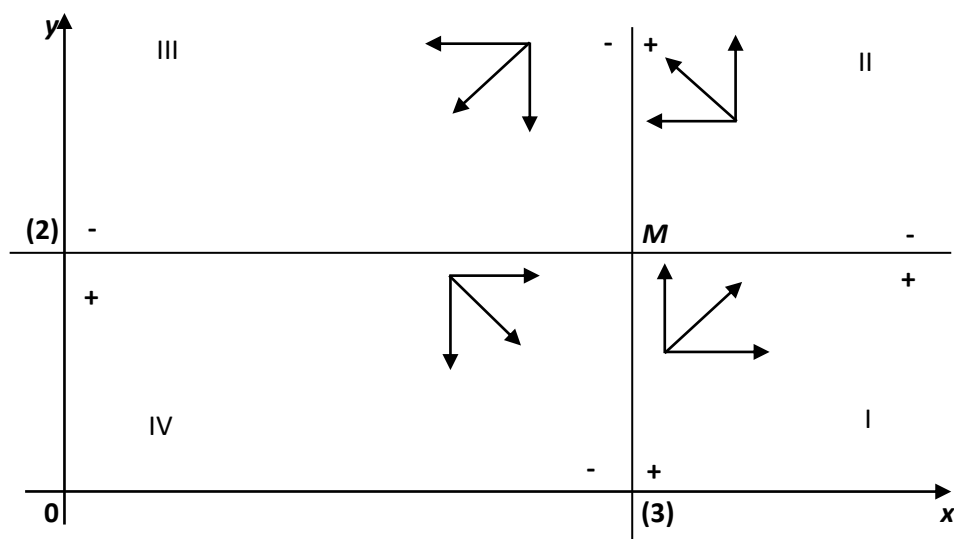
$$x^* = \frac{\beta}{\delta}, \quad y^* = \frac{\alpha}{\gamma}$$

Bizni  $x > 0, y > 0$  hol qiziqtirganligidan va  $M$  nuqta

$$\alpha - \gamma y = 0, \quad (2)$$

$$-\beta + \delta x = 0 \quad (3)$$

to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasidan iborat ekanligidan koordinatalar tekisligida birinchi chorak to'rt sohaga ajraladi. Bu sohalarni I-(+,+), II-(-,+), III-(-,-), IV-(+,-) ko'rinishda belgilash qulay.



Faraz qilaylik boshlang'ich holat  $Q(x_0, y_0)$  IV sohada bo'lsin. U holda

$$\alpha - \gamma y > 0,$$

$$-\beta + \delta x < 0$$

tengsizliklar bajariladi. Bundan  $Q$  nuqtada  $x'$  va  $y'$  tezliklar turli ishorali bo'lganligi kelib chiqadi:

$$x' > 0, \quad y' < 0$$

Demak  $x$  miqdor o'sadi,  $y$  miqdor esa kamayadi.

SHunga o'xshash  $x$  va  $y$  larning o'zgarishlarini II, III va IV sohalarda tahlil qilamiz. SHaklda tasvirlangan ko'rinishni olamiz.

Bu bilan boshlang'ich holat  $Q$  o'lja va yirtqich sonining davriy tebranishiga olib keladi, shuning uchun biror vaqt o'tgandan keyin sistema yana  $Q$  holatga qaytadi.

**24. Ikki davlat orasida munosabat. Mojaro modeli.** Ikki qo'shni davlatlarni  $X$  va  $Y$  bilan belgilaylik. Ular mojaroli vaziyatga uchrab qolgan holatni ko'rib chiqaylik.

$X$  va  $Y$  davlatlarning  $t(t \geq 0)$  momentdagi qurollanishga xarajatlarini mos holda  $x=x(t)$  va  $y=y(t)$  bilan belgilaylik. Bular differensiallanuvchi funksiyalar deb qaraladi.

1-faraz.  $X$  davlat unga  $Y$  davlat tomonidan qilinadigan potensial urush xavfidan xavfsirab qurollanadi, o'z navbatida  $Y$  davlat ham,  $X$  davlatning qurollanishga harajatlarning o'sishini bilib, o'zining qurollanishga xarajatlarini ko'paytiradi. Har bir davlat qurollanishning o'sishi (yoki kamayishi) tezligini boshqasining xarajatiga proporsional holda o'zgartiradi. Eng sodda holda buni

$$\begin{cases} x' = \alpha y, \\ y' = \beta x \end{cases} \quad (1)$$

ko'rinishda ifodalash mumkin, bu erda  $\alpha$  va  $\beta$  – musbat doimiy sonlar.

Ammo yozilgan tenglamalar qurollanish darajasi hech bir narsa bilan limitlanmayotganligi (cheklanmayotganligi) dan iborat kamchilikka ega. SHuning uchun bu tenglamalarning o'ng tomonlari tabiiy tuzatilishga muhtoj.

2-faraz. Davlatning mudofaaga harajatlari oqim darajasi qancha katta bo'lsa, uning o'sishi tezligi shuncha kichik bo'ladi. Bu (1) sistemaga quyidagi o'zgartishlarni kiritishga imkon beradi:

$$\begin{cases} x' = \alpha y - \gamma x, \\ y' = \beta x - \delta y \end{cases} \quad (2)$$

bu erda  $\gamma, \delta$  – musbat doimiy sonlar.

3-faraz. Har bir davlat o'zini qudratli deb davo qilishi va qo'shni davlatga, hatto u buning mavjudligiga xavf tug'dirmasa ham, dushmanligiga tayanib, qurollanishni kuchaytiradi. Mos da'volarni  $a$  va  $b$  bilan belgilaylik.

Bu erda  $a$  va  $b$  musbat doimiy sonlar.  $a$  va  $b$  manfiy sonlar bo'lgan holda ularni yaxshi niyat koeffitsientlari deb atash mumkin.

Uchala farazlarga asoslanib, natijada

$$\begin{cases} x' = \alpha y - \gamma x + a, \\ y' = \beta x - \delta y + b \end{cases} \quad (3)$$

sistemani olamiz.

(3) ni qurollanish poygasi modeli deyiladi. Olingan sistemaning echimi boshlang'ich shartlar  $x_0 \geq 0$  va  $y_0 \geq 0$  (qurollanish poygasining boshlang'ich holati) uchun aniqlanadigan  $x(t)$  va  $y(t)$  funksiyalar bo'ladi.

$\alpha, \beta, \gamma, \delta, a, b$  sonlar vaqtga bog'liq bo'lmagan (doimiy bo'lgan) farazda olingan (3) sistemani tahlil qilamiz.

(3) sistema

$$x' = 0$$

$$y' = 0$$

muvozanat holatiga ega va muvozanatdagi  $x^0, u^0$  qiymatlar

$$\begin{cases} \alpha y - \gamma x + a = 0, \\ \beta x - \delta y + b = 0 \end{cases}$$

sistemadan topiladi va ular

$$x^0 = \frac{\delta a + \alpha b}{\gamma \delta - \alpha \beta}, \quad y^0 = \frac{\gamma b + \beta a}{\gamma \delta - \alpha \beta}$$

ga teng.

Bu erdan  $x^0 > 0, y^0 > 0$  da muvozanat mavjud bo'lishi uchun

$$\gamma \delta > \alpha \beta \quad (4)$$

shart bajarilishi kerak.

Agar  $\alpha, \gamma, \delta$  o'zgarmasdan  $\beta$  ortsa, bu  $x$  davlatning qurollanish sohasida o'z strategiyasini o'zgartmasligini,  $u$  davlat esa qurolning eskirish (sur'ati) o'zgarmas bo'lganda qurollanishni kuchaytirishini bildiradi.

U holda  $\beta$  ning etarlicha katta qiymatida muvozanat albatta mumkin bo'lmay qoladi, (4) tengsizlik esa albatta buziladi.

Agar  $a$  va  $b$  nolga teng bo'lsa, muvozanat holatga ikkala davlatda qurollanishning yo'qligi javob beradi.  $t$  o'sganda (4) shart bajarilganda  $x$  va  $u$  funksiyalar mos holda muvozanatdagi  $x^0, u^0$  qiymatlarga intiladi.

**25. Beylining epidemiya modeli. Immunitetli epidemiya modeli.** O'rganilayotgan kasallik uzoqqa cho'ziladigan xarakterga ega deb faraz qilamiz, shuning uchun infeksiyaning berilish jarayoni kasallikning o'zining borishiga nisbatan ancha tez boradi. SHu bilan birga kasallik yuqqan bemor (jonivor) to'dadan chetlashmaydi va kasallik yuqmagan jonzodlarga uchrashuvlar (muloqotlar)da infeksiya yuqtiradi deb faraz qilamiz.

Faraz qilaylik,  $\alpha$  va  $n$  mos holda boshlang'ich momentdagi kasallik yuqqan va yuqmaganlar soni,  $x(t)$  vaqtning  $t$  momentidagi kasallik yuqmaganlar soni,  $y(t)$  esa  $t$  momentdagi kasallik yuqqanlar soni bo'lsin.

Uncha katta bo'lmagan  $[0; T]$  oraliqqa tegishli  $t$  larning barchasi uchun

$$x + y = n + \alpha \quad (1)$$

tenglik o'rinli ( $T$  bitta avlod umri uzunligidan kichik bo'lishi kerak, shunda biz tenglamalarimizda jonzodlarning tabiiy o'limini hisobga olmasligimiz mumkin bo'ladi).

Infeksiya kasallik yuqqanlar bilan yuqmaganlar uchrashuvlarida o'tadi. SHuning uchun kasallik yuqmaganlar soni vaqt o'tishi bilan ular va boshqalar orasida uchrashuvlar soniga proporsional kamayadi, ya'ni kasallik yuqmaganlar sonining kamayishi tezligi  $xy$  ga proporsional bo'ladi. Bundan

$$\frac{dx}{dt} = -\beta xy \quad (2)$$

tenglama hosil bo'ladi, bu erda  $\beta > 0$  infeksiya berilishi koeffitsienti.

(1) dan  $y = n + \alpha - x$ . Buni (2) ga qo'yib,  $x$  ga nisbatan

$$\frac{dx}{dt} = -\beta x(n + \alpha - x)$$

tenglamani olamiz. Bu tenglama oson integrallanadi. Haqiqatan ham

$$\frac{dx}{x(n + \alpha - x)} = -\beta dt$$

yoki

$$\frac{1}{n + \alpha} \left( \frac{dx}{x} + \frac{dx}{n - x + \alpha} \right) = -\beta dt.$$

Bu erdan integrallab,

$$\frac{1}{n + \alpha} (\ln x - \ln(n - x + \alpha)) = -\beta t + C_1,$$

yoki

$$\ln \frac{x}{n - x + \alpha} = -\beta(n + \alpha)t + \ln c$$

ni hosil qilamiz. Potensirlab

$$\frac{x}{n - x + \alpha} = ce^{-\beta(n + \alpha)t}$$

ni olamiz.  $x(0) = n$  dan foydalansak,  $c = \frac{n}{\alpha}$  ni aniqlaymiz.

SHunday qilib

$$\frac{x}{n - x + \alpha} = \frac{n}{\alpha} e^{-\beta(n + \alpha)t},$$

bundan

$$x = \frac{n(n + \alpha)}{n + \alpha e^{+\beta(n + \alpha)t}}$$

kelib chiqadi.  $u$  (1) dan topiladi.

Endi kasallik unchalik uzoqqa cho'zilmaydigan va davolanganlar immunitet oladigan bo'lsin deb faraz qilamiz. Bu holda  $n, \alpha, x(t), y(t)$  larni yuqoridagidek deb qaraymiz.  $z(t)$  – vaqtning  $t$  momentidagi sog'ayganlar soni deylik. U holda  $[0, T]$  oraliqdagi barcha  $t$  lar uchun

$$x + y + z = n + \alpha \quad (3)$$

o'rinli. SHu bilan birga  $x(t), y(t)$ , va  $z(t)$  funksiyalar uchun

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\beta xy, \\ \frac{dy}{dt} = \beta xy - \gamma y, \\ \frac{dz}{dt} = \gamma y \end{cases} \quad (4)$$

sistemani yozishimiz mumkin, bu erda  $\gamma$ -davo topish koeffitsienti.

(4) sistemada 1-tenglamani (2) dan farqi yo‘q, 2-tenglama  $y(t)$  ning o‘zgarishini xarakterlaydi. Bu o‘zgarish tezligi  $\beta xy$  ortish va  $-\gamma y$  kamayishdan tuziladi.  $-\gamma y$  miqdor kasallarning bir qismi sog‘ayib, immunitet olishlaridan hosil bo‘ladi, 3-tenglama sog‘ayganlar sonining o‘sishi tezligini ifodalaydi.

Bizning farazlarimizdan  $x(0)=n$ ,  $y(0)=\alpha$ ,  $z(0)=0$  (5) boshlang‘ich shartlar kelib chiqadi. (4) sistema (5) shartlar bilan  $[0, T]$  da aniqlangan yagona echimga ega bo‘ladi. Bu echimni qo‘yidagi yo‘l bilan topish mumkin.

2-tenglamani 1-tenglamaga bo‘lib yuborib,

$$\frac{dy}{dx} = -1 + \frac{\gamma}{\beta x}$$

ni olamiz. Bu erdan integrallab va boshlang‘ich berilganlardan foydalanib, sistemaning birinchi integralini olamiz:

$$y + x - \frac{\gamma}{\beta} \ln x = \alpha + n - \frac{\gamma}{\beta} \ln n \quad (6)$$

(3) dan  $y + x - n = \alpha - z$ , buni (6) ga qo‘yamiz:

$$\alpha - z - \frac{\gamma}{\beta} \ln x = \alpha - \frac{\gamma}{\beta} \ln n, \quad -z = \frac{\gamma}{\beta} \ln \frac{x}{n}, \quad \ln \frac{x}{n} = -\frac{\beta}{\gamma} z, \quad \frac{x}{n} = e^{-\frac{\beta}{\gamma} z},$$

$$x = ne^{-\frac{\beta}{\gamma} z} \quad (7)$$

(3) dan  $y = n + \alpha - x - z$ . Bunga (7) ni qo‘ysak

$$y = n + \alpha - z - ne^{-\frac{\beta}{\gamma} z}$$

Buni (4) dagi uchinchi tenglamaga qo‘yamiz, natijada

$$\frac{dz}{dt} = \gamma \left[ n + \alpha - z - ne^{-\frac{\beta}{\gamma} z} \right].$$

(4) sistemani birinchi tartibli bitta tenglamaga keltirgan bo‘lamiz. Bu erdan (aqalli taqribiy bo‘lsa ham) noma‘lum funksiya  $z(t)$  ni topib, keyin (3) va (6) dan (4) sistema echimining qolgan ikkita tashkil etuvchilari  $x(t)$ ,  $u(t)$  larni topamiz.

### 3-mavzu. Chiziqli dasturlash masalalari.

#### Reja

1. Matematik dasturlash haqida tushuncha
2. Chiziqli dasturlash masalalari va ularning geometrik talqini
3. Sog'liqni saqlashda kasallikni davolash uslubini tanlash modeli
4. Simpleks usul algoritmi

**1. Matematik dasturlash haqida tushuncha.** Umumiy holda matematik dasturlash masalasining matematik modeli quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_i \quad (i = 1, 2, 3, \dots, m)$$

shartlarni qanoatlantiruvchi  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  funksiya ekstremumi topilsin, bu erda  $f, g_i$  – berilgan funksiyalar,  $b_i$  – berilgan doimiy sonlar.

Agar  $f$  va  $g_i$  funksiyalarning hammasi chiziqli funksiyalardan iborat bo'lsa, berilgan masala chiziqli dasturlash masalasi bo'ladi.

Agar  $f$  va  $g_i$  funksiyalardan birortasi chiziqli bo'lmagan funksiya bo'lsa, u holda berilgan masala chiziqsiz dasturlash masalasi bo'ladi.

Agar  $f$  yoki  $g_i$  funksiyalar tasodifiy miqdorlarni o'z ichiga olsalar, u holda masala stoxastik dasturlash masalasi bo'ladi.

Agar  $f$  va  $g_i$  funksiyalar vaqtga bog'liq bo'lib, masalani echish ko'p bosqichli jarayon sifatida qaralsa, u holda masala dinamik dasturlash masalasi bo'ladi.

Matematik dasturlashning optimallik mezoni – qabul qilinadigan qarorlarni qiyosiy baholashda qo'llaniladigan belgi. SHu belgiga asoslanib qarorlardan eng yaxshisi tanlanadi. Optimallik mezonining mohiyati ko'p faktorlarga: ijtimoiy tuzum xarakteriga, iqtisodiy qonunlarga, belgilangan maqsadlarga, qabul qilinadigan qarorning ko'lamiga (xalq xo'jaligi, ishlab chiqarish tarmog'i yoki ayrim korxona miqyosida bo'lishi)ga va h.k. larga bog'liq. Optimallik mezoni qarorni asoslashga yordam berishi kerak.

Echilayotgan ekstremal masalalar matematik dasturlashning qaysi sohalarida ko'rilyotgan bo'lmasin, unda maqsad funksiyasi yoki optimallik mezonining qay tartibda qo'yilishi muhim ahamiyatga ega. Agar ko'rilyotgan masala xalq xo'jaligining tarmoq yoki korxonalariga nisbatan echilsa, masalaning optimallik mezonini tuzish yana ham ahamiyatlidir.

Oltimallik mezoni – masala echimining maqsadiga olib keluvchi ko'rsatkich bo'lib, har xil ko'rinishlarda bo'lishi mumkin. Optimallik mezoni butun xalq xo'jaligiga nisbatan qo'yilsa, u moddiy va ma'naviy farovonlik darajasini ifodalaydi. Bu mezon global mezon deyiladi, xalq xo'jaligining tarmoq va

korxonalariga nisbatan qo‘yiladigan optimallik mezoni esa lokal mezon deyiladi va u global mezonni amalga oshirish uchun xizmat qiladi.

## 2. CHiziqli dasturlash masalalari va ularning geometrik talqini

$n$  o'zgaruvchili  $m$  ta chiziqli tenglamalar va tengsizliklar sistemasi

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2, \\ ..... \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n \leq b_k, \\ a_{k+1,1}x_1 + a_{k+1,2}x_2 + \dots + a_{k+1,n}x_n = b_{k+1}, \\ a_{k+2,1}x_1 + a_{k+2,2}x_2 + \dots + a_{k+2,n}x_n = b_{k+2}, \\ ..... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right. \quad (1)$$

va chiziqli funksiya

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \quad (2)$$

berilgan bo'lsin.

Sistemaning shunday  $X = (x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n)$  echimi topilsinki, unda  $F$  chiziqli funksiya optimal (ya'ni maksimal yoki minimal) qiymatlarni qabul qilsin, bu erda

$$x_j \geq 0 \quad (j=1,2,\dots,l; l \leq n). \quad (3)$$

Masalada  $a_{ij}, b_i, c_j$  – berilgan doimiy sonlar.

(1) sistema cheklanishlar sistemasi, (2) funksiya esa chiziqli funksiya, chiziqli forma yoki maqsad funksiya deyiladi.

CHiziqli dasturlashning umumiy masalasini qisqacha quyidagi ko‘rinishda yozish mumkin:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &\leq b_i, \quad (i=1, 2, \dots, k), \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &= b_i, \quad (i=k+1, k+2, \dots, m), \\ x_j &\geq 0 \quad (j=1, 2, \dots, l; l \leq n), \\ F = \sum_{j=1}^n c_j x_j &\rightarrow \max(, \hat{e} \hat{e} \rightarrow \min) . \end{aligned}$$



(1) sistemaning (2) chiziqli funksiyani optimal (maksimal yoki minimal) qiymatga erishtiradigan (3) shartni qanoatlantiradigan  $X(x_1, x_2, \dots, x_n)$  echimini chiziqli dasturlash masalasining optimal echimi (yoki optimal rejasi) deyiladi.

Hamma o'zgaruvchilar manfiy emas  $x_j \geq 0, j = \overline{1, n}$  va (1) sistema faqat tengsizliklardan tuzilgan bo'lsa, bunday masala standart (yoki simmetrik) deyiladi; agar  $x_j \geq 0, j = \overline{1, n}$  va (1) sistema faqat tenglamalardan tuzilgan bo'lsa, masala kanonik (yoki asosiy) deyiladi.

Chiziqli dasturlashning ixtiyoriy masalasini kanonik, standart yoki umumiy masalaga keltirish mumkin.

Masalan,

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, i = \overline{1, m}, \quad (4)$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1, n}, \quad (5)$$

$$F = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max \quad (6)$$

standart masalani kanonik ko'rinishga keltiraylik. SHu maqsadda qo'shimcha (balans) manfiy bo'lmagan  $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}$  o'zgaruvchilarni (4) sistemaning har bir tengsizligiga kiritamiz va (4) cheklanishlar sistemasi

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i, i = \overline{1, m} \quad (7)$$

ko'rinishni oladi. Maqsad funksiyasiga qo'shimcha o'zgaruvchilar kiritilmaydi.

SHunday qilib, (4)-(6) standart masala kanonik shaklda quyidagidan iborat bo'ladi:

(7) sistemaning (6) funksiyani maksimal qiymatiga erishtiradigan, (5) shartni qanoatlantiradigan  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m})$  echimi topilsin.

**Eslatma.** Ko'rilgan masalada (4) dagi hamma tengsizliklar " $\leq$ " ko'rinishda bo'lganligi uchun qo'shimcha o'zgaruvchilar "+" ishorasi bilan kiritildi. Tengsizliklar " $\geq$ " ko'rinishida bo'lgan holda mos qo'shimcha o'zgaruvchilar "-" ishorasi bilan kiritiladi.

Chiziqli dasturlash masalalarini echishning grafik usuli ikki o'zgaruvchili standart shakldagi chiziqli dasturlash masalalarini va ko'p o'zgaruvchili kanonik shakldagi ozod o'zgaruvchilari ikkitadan ortiq bo'lmagan chiziqli dasturlash masalalarini echish uchun qo'llaniladi.

CHiziqli dasturlash masalalarini grafik usulda echishda maqsad funksiyasi  $F = F(x)$  ning ekstremal qiymatini (yoki qiymatlarini) topish uchun  $X_1OX_2$  tekislikda  $grad F(x)$  gradientdan foydalaniladi, uni  $\vec{c}$  bilan belgilaylik.

$$grad F(x) = \vec{c} = \frac{\partial F}{\partial x_1} i + \frac{\partial F}{\partial x_2} j,$$

bu erda  $i$  va  $j$  lar  $OX_1$  va  $OX_2$  o'qlar bo'yicha mos ravishda birlik vektorlar.

SHunday qilib,  $\vec{c} = \left( \frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2} \right) = (c_1, c_2).$

$\vec{c}$  vektor maqsad funksiyasining eng tez o'zgarishi yo'nalishini ko'rsatadi.

Masalani grafik usulda echishning algoritmini quyidagicha yozish mumkin:

1. Masala cheklanishlar sistemasining o'rinli echimlari sohasini topamiz.
2.  $\vec{c}$  vektorni quramiz.
3.  $\vec{c}$  ga perpendikulyar bo'lgan  $L_0$  saviya chizig'ini o'tkazamiz.

4.  $L_0$  saviya chizig'ini maksimumga oid masalalar uchun  $\vec{c}$  vektor yo'nalishi bo'yicha, minimumga oid masalalar uchun  $\vec{c}$  vektorga qarama-qarshi yo'nalish bo'yicha ko'chiramiz.

Saviya chizig'ini ko'chirishni uning o'rinli echimlar sohasi bilan faqat bitta umumiy nuqtasi qolguncha davom ettiramiz. CHiziqli dasturlash masalasining yagona echimini aniqlovchi bu nuqta izlanayotgan ekstremum nuqta bo'ladi.

Agar saviya chizig'i o'rinli echimlar sohasining tomonlaridan biriga parallel bo'lsa, u holda bu tomonning hamma nuqtalarida ekstremumga erishiladi, chiziqli dasturlash masalasi cheksiz ko'p echimlar to'plamiga ega bo'ladi. Masala echimi

$$\bar{x}_{t \in \Delta} = (1-t)\bar{x}_1 + t\bar{x}_2$$

formula bo'yicha topiladi, bu erda  $0 \leq t \leq 1$ ,  $\bar{x}_1$  va  $\bar{x}_2$  o'rinli echimlar sohasining saviya chizig'iga parallel bo'lgan tomoni uchlaridan iborat optimal echimlar.

### 3. Sog'liqni saqlashda kasallikni davolash uslubini tanlash modeli

Nur terapiyasi va ximioterapiya usullari bilan rak davolanadi. Bu usullarning samaralari biror umumiy birliklarda ifodalanadi. Masalan, dorivor preparat (modda)ning bir grammi 1000 birlik samaraga ega, nurlanishning bir minuti 1000 birlik samaraga ega. Faraz qilaylik, kasalning davo topishi uchun 3000 birlikdan kam bo'lmagan samara talab qilinadigan bo'lsin. Ammo ikkala usul ham zaharli. SHuning uchun ularni chegarasiz qo'llab bo'lmaydi. Faraz qilaylik, usullarning zaharliligi ham umumiy birliklarda ifodalanadigan bo'lsin. Masalan, dorining zaharliligi grammiga 400 birlikka teng, nurlanish zaharliligi esa minutiga 1000 birlikka teng bo'lsin. Faraz qilaylik kasalning bunday birliklardan 2000 dan ortiq

olmasligi talab qilingan bo'lsin. SHu bilan birga dorining bir grammining kasalga berilishi nurning bir minut davomida berilishiga nisbatan kasalga uch marta ortiq noqulaylik tug'diradigan bo'lsin va demak bunda agar doridan  $x_1$  birlik kiritilsa va nurni  $x_2$  minut davomida berilsa, u holda kasalga etkazilgan umumiy noqulaylik

$$Z = 3x_1 + x_2 \quad (1)$$

ga teng bo'ladi. Masala ikkala usulning shunday birikmasi (kombinatsiyasi)ni tanlashga keltiriladiki, u yuqorida ifodalangan cheklanishlarni qanoatlantiradigan va kasalga iloji boricha kam noqulaylik etkazadigan bo'lsin. Bunday birikmani optimal deb ataymiz. Qo'yilgan masalani matematik tilga o'tib quyidagicha ifodalashimiz mumkin.  $X_1OX_2$  tekislikda shunday  $(x_1, x_2)$  nuqtani topish kerakki, bunda  $Z = 3x_1 + x_2$  miqdor eng kichik qiymatga erishsin, shu bilan birga (samaradorlikka qo'yilgan cheklanish)

$$1000x_1 + 1000x_2 \geq 3000 \quad (2)$$

va (zaharlilikka qo'yilgan cheklanish)

$$400x_1 + 1000x_2 \leq 2000 \quad (3)$$

shartlar bajarilsin. Bu cheklanishlarga yana ikkita

$$x_1 \geq 0 \text{ va } x_2 \geq 0 \quad (4)$$

cheklanishlarni qo'shamiz. Bular  $x_1$  va  $x_2$  miqdorlarning masala mohiyatiga ko'ra manfiy qiymatlarni ololmasliklaridan kelib chiqadi. (2)-(4) shartlar  $X_1OX_2$  tekislikda izlanayotgan nuqta yotadigan qandaydir sohani ajratadi. Bu sohaning (chegara bilan birga) barcha  $(x_1, x_2)$  nuqtalaridan shundayini topish kerakki, unda (1) miqdor eng kichik qiymatga ega bo'lsin. (1) tenglama fazoda tekislikning tenglamasidir. SHuning uchun  $(x_1, x_2)$  nuqta ajratilgan sohadagi mumkin bo'lgan barcha o'rinlarni egallaganda  $Z$  applikata eng kichik qiymatga sohaning chegarasida, aniqrog'i bu echim ko'pburchagining uchlaridan birida erishadi. (2)-(4) tengsizliklar  $X_1OX_2$  tekislikda uchlari  $A(3;0)$ ,  $B(\frac{5}{3};\frac{4}{3})$ ,  $C(5;0)$  nuqtalardan iborat bo'lgan uchburchakni ajratishiga osonlik bilan ishonch hosil qilish mumkin.

$A$ ,  $V$ ,  $S$  nuqtalarda (1) miqdorning qiymatlarini hisoblab topamiz va keyin bu qiymatlardan eng kichigini tanlaymiz

$$Z_a = 3 \cdot 3 + 0 = 9, Z_b = 3 \cdot \frac{5}{3} + \frac{4}{3} = \frac{19}{3}, Z_c = 3 \cdot 5 + 0 = 15,$$

$$\min(9, \frac{19}{3}, 15) = \frac{19}{3} = Z_b.$$

$Z$  eng kichik qiymatga  $V$  nuqtada erishadi. Demak,  $V$  nuqtaning koordinatalari izlangan echim bo'ladi. Agar dorivor moddadan  $\frac{5}{3}$  birlik kiritilsa va  $\frac{4}{3}$  minut nurlantirilsa, u holda davolash optimal bo'ladi degan xulosa chiqariladi.

SHubhasizki, keltirilgan misolda atayin soddalashgan holat qaralgan. Real holatda dorivor moddalar bitta emas, bir qancha bo'lishi mumkin. Bunga mos ravishda cheklanishlar soni ham o'sishi mumkin. Bunday hollarda cheklanishlar va  $Z$  funksiya chiziqli bo'lganda chiziqli programmalash masalasini echish usullaridan foydalanib, qo'yilgan masalani hal qilish mumkin.

## 4. Simpleks usul algoritmi

Bizga

$$f = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (1)$$

fungsiyanning cheklanish tenglamalari sistemasi

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b'_i, \quad x_j \geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n} \quad (2)$$

ni qanoatlantiradigan minimumini topish talab qilingan bo'lsin.  $n > 2$  bo'lganda qo'yilgan masalani echishning umumiy usuli simpleks usulidir. Simpleks usulning mohiyati bilan tanishamiz.

Faraz qilaylik, (2) sistema shunday almashtirilganki, undagi qaysidir  $r$  ta noma'lumlari qolgan noma'lumlar orqali

[illegible]

kabi ifodalangan bo‘lib,  $b_k \geq 0$ ,  $k = \overline{1, r}$  bo‘lsin. CHiziqli  $f$  funksiya (1) esa (3) dan foydalanilgan holda

$$f = c_0 - (c_{r+1} x_{r+1} + \dots + c_n x_n)$$

ko‘rinishga keltirilgan bo‘lsin. Bu erda  $x_1, x_2, \dots, x_r$  noma‘lumlarini bazis noma‘lumlar, boshqalarini esa ozod noma‘lumlar deyiladi. (3) ning  $x_j \geq 0, j = \overline{1, n}$  shartni qanoatlantiruvchi har qanday echimini o‘rinli echim deyiladi. (3) ning  $\bar{A} = (b_1, b_2, \dots, b_r, 0, 0, \dots, 0)$  echimini bazis echim deyiladi.  $f$  funksiyani minimum qiymatga erishtiradigan echimni optimal echim deyiladi. (3) sistemaning manfiymas echimlari orasidan funksiyani minimallashtiradiganini (optimal echimni) topish talab qilinadi. Bu masalani simpleks usul yordamida echish qoidasini ko‘rib chiqamiz.

Avvalo boshlang'ich simpleks jadval tuziladi:

| Bazis noma'lumlar | Ozod hadlar | $x_1 \dots x_i \dots x_r, x_{r+1} \dots x_j \dots x_n$   |
|-------------------|-------------|----------------------------------------------------------|
| $x_1$             | $b_1$       | $1 \dots 0 \dots 0, a_{1,r+1} \dots a_{1j} \dots a_{1n}$ |
| $\dots$           | $\dots$     | $\dots \dots \dots$                                      |
| $x_i$             | $b_i$       | $0 \dots 1 \dots 0, a_{i,r+1} \dots a_{ij} \dots a_{in}$ |
| $\dots$           | $\dots$     | $\dots \dots \dots$                                      |
| $x_r$             | $b_r$       | $0 \dots 0 \dots 1, a_{r,r+1} \dots a_{rj} \dots a_{rn}$ |
| $f$               | $c_0$       | $0 \dots 0 \dots 0, c_{r+1} \dots c_j \dots c_n$         |

Simpleks usul algoritmini quyidagicha yozish mumkin:

1. Agar hamma  $c_j \leq 0, j = r+1, n$  bo'lsa, jarayon to'xtatiladi, bazis echimni optimal echim sifatida olinadi. Aks holda 2-bandga o'tiladi.

2. Agar oxirgi satrdagi ixtiyoriy musbat  $c_j (r+1 \leq j \leq n)$  ga mos ustunda  $c_j$  ning o'zidan boshqa musbat son bo'lmasa, u holda optimal echim mavjud emas deb, jarayon to'xtatiladi. Bunda  $\min f = -\infty$  bo'ladi, ya'ni optimal echim mavjud bo'lmaydi. Bu hol qachonki musbat  $c_j$  larga mos ustunlarning hammasida shu  $c_j$  dan boshqa musbat son topilmasa ro'y beradi. Aks holda 3-bandga o'tiladi.

3.  $c_{r+1}, \dots, c_n$  lar orasida musbat sonlar bir qancha bo'lsa, odatda ulardan eng kichigi olinadi. Musbat  $c_j (r+1 \leq j \leq n)$  ga mos ustundagi  $a_{kj}$  sonlar orasida aqalli biri musbat bo'lganligi uchun musbat  $a_{kj}$  lar bo'yicha  $\min_k \frac{b_k}{a_{kj}} = \frac{b_i}{a_{ij}}$  topiladi, natijada  $a_{ij}$  hal qiluvchi element ajratiladi.

4.  $a_{ij}$  ning satri elementlarini  $a_{ij}$  ga bo'lish natijasida hosil bo'lgan satr yangi jadvalda  $a_{ij}$  satriga mos satr sifatida olinadi. Bu satrni ( $a_{ij}$ ) simvol bilan belgilasak, unda  $a_{ij}$  o'rnida 1 soni hosil bo'ladi. Yangi jadvalning boshqa elementlari (ozod hadlar ham nazarda tutiladi) quyidagi qoida bo'yicha hosil qilinadi (bunda a) qoidani to'g'ri to'rtburchaklar qoidasi deyiladi).

a)  $j$ -ustundan boshqa ustundagi elementlarni olish uchun fikran dastlabki jadvalda  $a_{ij}$  ga mos satr o'rniga ( $a_{ij}$ ) satr olinadi va unda shunday to'g'ri to'rtburchak tuziladiki, dastlabki jadvalda o'zgartirilayotgan element bilan hal qiluvchi element  $a_{ij}$  o'rnidagi 1 soni diagonallardan birini hosil qiladilar, bu elementlar ko'paytmasidan ikkinchi diagonalni hosil qiladigan elementlar

b)  $a_{ij}$  ustuniga mos ustundagi elementlar nolga teng deb olinadi; bazis noma'lumlardan  $x_i$  o'rniga  $x_j$  olinadi, ya'ni yangi jadvalda bazis noma'lumlardan  $x_i$  o'rniga  $x_j$  yoziladi. 1-satrdagi  $x_1, \dots, x_n$  lar o'zgarishsiz yoziladi. 1-bandga o'tiladi.

[illegible]
$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \quad (2)$$

Sistemaning shunday  $X = (x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n)$  echimi topilsinki, unda  $F$  chiziqli funksiya optimal (ya'ni maksimal yoki minimal) qiymatlarni qabul qilsin, bu erda

$$x_j \geq 0 \quad (j=1,2,\dots,l; l \leq n). \quad (3)$$

Masalada  $a_{ij}, b_i, c_j$  – berilgan doimiy sonlar.

(1) sistema cheklanishlar sistemasi, (2) funksiya esa chiziqli funksiya, chiziqli forma yoki maqsad funksiya deyiladi.

CHiziqli dasturlashning umumiy masalasini qisqacha quyidagi ko‘rinishda yozish mumkin:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad (i=1,2,\dots,k),$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, \quad (i = k+1, k+2, \dots, m),$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, l; l \leq n),$$

$$F = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max, \quad \hat{e} \rightarrow \min.$$

(1) sistemaning (2) chiziqli funksiyani optimal (maksimal yoki minimal) qiymatga erishtiradigan (3) shartni qanoatlantiradigan  $X(x_1, x_2, \dots, x_n)$  echimini chiziqli dasturlash masalasining optimal echimi (yoki optimal rejasi) deyiladi.

Hamma o'zgaruvchilar manfiy emas  $x_j \geq 0, j = \overline{1, n}$  va (1) sistema faqat tengsizliklardan tuzilgan bo'lsa, bunday masala standart (yoki simmetrik) deyiladi; agar  $x_j \geq 0, j = \overline{1, n}$  va (1) sistema faqat tenglamalardan tuzilgan bo'lsa, masala kanonik (yoki asosiy) deyiladi.

CHiziqli dasturlashning ixtiyoriy masalasini kanonik, standart yoki umumiy masalaga keltirish mumkin.

Masalan,

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \leq b_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad (4)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad (5)$$

$$F = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max \quad (6)$$

standart masalani kanonik ko'rinishga keltiraylik. SHu maqsadda qo'shimcha (balans) manfiy bo'lmagan  $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}$  o'zgaruvchilarni (4) sistemaning har bir tengsizligiga kiritamiz va (4) cheklanishlar sistemasi

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i, \quad i = \overline{1, m} \quad (7)$$

ko'rinishni oladi. Maqsad funksiyasiga qo'shimcha o'zgaruvchilar kiritilmaydi.

SHunday qilib, (4)-(6) standart masala kanonik shaklda quyidagidan iborat bo'ladi:

(7) sistemaning (6) funksiyani maksimal qiymatiga erishtiradigan, (5) shartni qanoatlantiradigan  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m})$  echimi topilsin.

**Eslatma.** Ko'rilgan masalada (4) dagi hamma tengsizliklar " $\leq$ " ko'rinishda bo'lganligi uchun qo'shimcha o'zgaruvchilar "+" ishorasi bilan

kiritildi. Tengsizliklar “ $\geq$ ” ko‘rinishida bo‘lgan holda mos qo‘shimcha o‘zgaruvchilar “-” ishorasi bilan kiritiladi.

CHiziqli dasturlash masalalarini echishning grafik usuli ikki o‘zgaruvchili standart shakldagi chiziqli dasturlash masalalarini va ko‘p o‘zgaruvchili kanonik shakldagi ozod o‘zgaruvchilari ikkitadan ortiq bo‘lmagan chiziqli dasturlash masalalarini echish uchun qo‘llaniladi.

CHiziqli dasturlash masalalarini grafik usulda echishda maqsad funksiyasi  $F = F(x)$  ning ekstremal qiymatini (yoki qiymatlarini) topish uchun  $X_1OX_2$  tekislikda  $\text{grad}F(x)$  gradientdan foydalaniladi, uni  $\vec{c}$  bilan belgilaylik.

$$\text{grad} F(x) = \vec{c} = \frac{\partial F}{\partial x_1} i + \frac{\partial F}{\partial x_2} j,$$

bu erda  $i$  va  $j$  lar  $OX_1$  va  $OX_2$  o‘qlar bo‘yicha mos ravishda birlik vektorlar.

SHunday qilib,  $\vec{c} = \left( \frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2} \right) = (c_1, c_2)$ .

$\vec{c}$  vektor maqsad funksiyasining eng tez o‘zgarishi yo‘nalishini ko‘rsatadi.

Masalani grafik usulda echishning algoritmini quyidagicha yozish mumkin:

1. Masala cheklanishlar sistemasining o‘rinli echimlari sohasini topamiz.

2.  $\vec{c}$  vektorni quramiz.

3.  $\vec{c}$  ga perpendikulyar bo‘lgan  $L_0$  saviya chizig‘ini o‘tkazamiz.

4.  $L_0$  saviya chizig‘ini maksimumga oid masalalar uchun  $\vec{c}$  vektor yo‘nalishi bo‘yicha, minimumga oid masalalar uchun  $\vec{c}$  vektorga qarama-qarshi yo‘nalish bo‘yicha ko‘chiramiz.

Saviya chizig‘ini ko‘chirishni uning o‘rinli echimlar sohasi bilan faqat bitta umumiy nuqtasi qolguncha davom ettiramiz. CHiziqli dasturlash masalasining yagona echimini aniqlovchi bu nuqta izlanayotgan ekstremum nuqta bo‘ladi.

Agar saviya chizig‘i o‘rinli echimlar sohasining tomonlaridan biriga parallel bo‘lsa, u holda bu tomonning hamma nuqtalarida ekstremumga erishiladi, chiziqli dasturlash masalasi cheksiz ko‘p echimlar to‘plamiga ega bo‘ladi. Masala echimi

$$\bar{x}_{opt} = (1-t)\bar{x}_1 + t\bar{x}_2$$

formula bo‘yicha topiladi, bu erda  $0 \leq t \leq 1$ ,  $\bar{x}_1$  va  $\bar{x}_2$  o‘rinli echimlar sohasining saviya chizig‘iga parallel bo‘lgan tomoni uchlaridan iborat optimal echimlar.



#### 4-mavzu: Graflar va Tarmoqlar.

##### Reja

##### 1. Graflar

##### 2. Tarmoqlar

**1. Graflar.** Nuqtalardan (uchlardan) va ularni bog'lovchi chiziqlardan (qirralardan) tashkil topgan figura graf deb ataladi. Birinchi qirra  $A$  nuqtadan chiquvchi oxirigisi  $B$  nuqtaga boruvchi har ikki qirra umumiy oxirgi nuqtalarga ega bo'lgan qirralar ketma-ketligi grafning  $A$  va  $B$  uchlarini bog'lovchi marshrut yoki yo'l deyiladi. Bu holda  $A$  va  $B$  uchlar bog'langan deyiladi yoki grafning uchlaridan ikkitasi qirralarning biror ketma-ketligi orqali tutashtirilgan bo'lsa, ular bog'langan uchlar deyiladi.

Uchlarining ixtiyoriy jufti bog'langan bo'lsa grafni bog'langan deyiladi. Grafning ikkita uchi bir necha qirralar bilan tutashtirilgan bo'lsa u holda graf karrali qirraga ega deyiladi. Bunda qirralar soni qirraning karraligi deyiladi.

Grafning har bir qirrasi bir martadan ortiq holda uchramaydigan marshrut zanjir deyiladi. Zanjirda uchlar bir necha marta takrorlanishi ham mumkin.

Boshlang'ich va oxirgi uchlar ustma-ust tushuvchi zanjirssikl deyiladi.

Grafning uchidan chiquvchi qirralar sonini bu uchning darajasi (tartibi) deyiladi.  $A$  uchning darajasini  $\rho(A)$  kabi belgilaylik. Juft (toq) sonidagi qirralar chiquvchi uch juft (toq) deyiladi.

Qirralari to'plami chekli (cheksiz) bo'lgan graf chekli (cheksiz) deb ataladi.

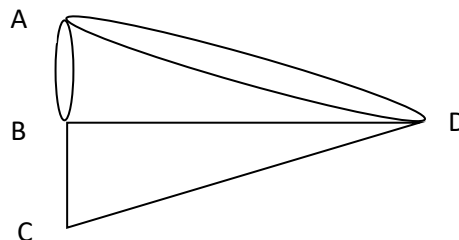
L.Eyler quyidagi muhim teoremani isbotlagan:

Hamma uchlar juft bo'lgan ixtiyoriy chekli bog'langan grafda har bir qirrasi aniq bir marta uchraydigan sikl mavjud bo'ladi.

Bunday sikl Eyler sikli deyiladi, hamma uchlar juft bo'lgan graf Eyler grafi deyiladi.

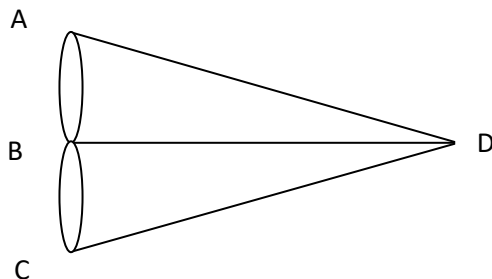
Eyler teoremasining tatbiqiga misollar keltiraylik.

1-misol



ko'rinishdagi graf berilgan bo'lsin. Grafning ixtiyoriy uchidan chiqib, har bir qirra bo'yicha faqat bir martadan o'tib, yana dastlabki uchga qaytib kelish mumkinmi degan savol qo'yiladi. Bu savolga javob topish uchun Eyler teoremasidan foydalanamiz. Graf uchlarining darajalari  $\rho(A)=2$ ,  $\rho(B)=2$ ,  $\rho(C)=2$ ,  $\rho(D)=4$  ya'ni barchasi juft son. Demak savolga ijobiy ya'ni «mumkin» degan javob kelib chiqadi.

## 2-misol. Graf



ko‘rinishda berilgan bo‘lsin. Bu grafga nisbatan ham 1-misol shartidagi savolni qo‘yamiz. Savolga javob berish uchun avval quyidagi usuldan foydalansak ham bo‘ladi. YAni qalamning uchini grafning ixtiyoriy uchiga qo‘yib, undan boshlab qirralar bo‘yicha qalamni ko‘tarmasdan harakatlanib, har bir qirradan faqat bir martadan o‘tib, mumkin bo‘lgan barcha variantlarni birma-bir ko‘rib chiqib, ifodalangan figurani aylantirib chiqishning iloji yo‘qligiga ishonch hosil qilish mumkin. Demak qo‘yilgan savolga salbiy javob hosil bo‘ladi. Endi Eyler teoremasidan foydalansak ham shunday salbiy javob topiladi. Haqiqatan ham, bu grafda

$$\rho(A)=3, \rho(B)=5, \rho(C)=3, \rho(D)=3,$$

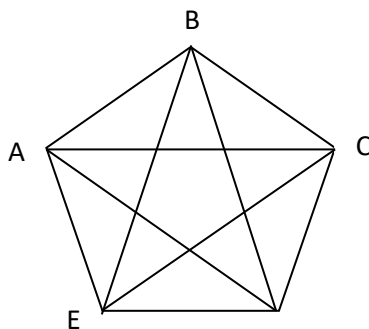
ya’ni barchalari toq son bo‘lganligi uchun qo‘yilgan savolga salbiy javob beramiz. Bu javobni dastlabki  $\rho(A)=3$  ning o‘zigagina qarab berish mumkin edi.

Eylerssikllariga xos xossa grafning har bir qirrasidan aniq bir martadan o‘tishdan iborat.

SHunga o‘xshab, chekli bog‘langan grafning xar uchidan aniq bir martadan o‘tish xossasiga ega bo‘lganssikllarni ham ta’riflash mumkin.

Agarssikl grafning har bir uchidan faqat bir martadan o‘tsa, u holda uni U.R.Gamiltonssikli deb ataladi.

Gamiltonssiklini qurish bilan bog‘liq bo‘lgan amaliy masalalardan biri kommivoyajyor haqidagi masaladir. Bunda kommivoyajyorning oralaridagi barcha masofalar ma’lum bo‘lgan berilgan joylardan faqat bir martadan o‘tib, dastlabki joyga qaytib keladigan eng qisqa yo‘lni topish talab qilinadi. Misol sifatida masalaga muvofiq quyidagi grafni keltiraylik.



Bunda  $AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, \overset{D}{\text{---}}, DE$  masofalar berilganda A joydan chiquvchi yuqordagi shartlarda berilgani kabi eng qisqassiklik marshrutni ko‘rsatish talab qilinadi. Masalani oddiy saralash usuli bilan echish mumkin. A, B,

$C, D, E$  joylardan va mos yo‘l zvenolardan tashkil topgan.  $ABCDEA, ABCEDA, ABECD, ABEDCA, ABDCEA, ABDECA, \dots$  ko‘rinishidagissiklik marshrutlar 24 ta bo‘ladi.

Haqiqatan ham, masalan, birinchi oltitalikdagi  $ABCDEA$  marshrutdan keyingi navbatdagi beshta marshrut  $B$  dan boshlanuvchi  $B, C, D, E$  lardan hosil bo‘ladigan qolgan beshta o‘rin almashtirishlar orqali tashkil topadi. Keyingi oltitaliklar ham shu kabi  $ACBDEA, ADBCEA, AEBCDA$  marshrutlardan tashkil topadi. Demak, barcha marshrutlar soni to‘rtta elementdan tuzilgan o‘rin almashtirishlar soni  $P_4 = 4!$  ga teng. Masalani echish uchun bu o‘rin almashtirishlar yarmining uzunliklarini taqqoslash kifoya, chunki yo‘nalishlari qarama-qarshi bo‘lgan 6 ta mos juftliklardagi marshrutlar uzunliklari, masalan,  $ABCDEA$  va  $AEDCBA$  marshrutlar uzunliklari teng. SHunday qilib, mos 12 ta marshrutlar uzunliklaridan engi kichigi masalaning izlangan javobi bo‘ladi.

## 2. Tarmoqlar

Amaliyotda graf odatda tarmoq sifatida talqin qilinadi, uning uchlarini tugunlar deb ataladi. Graflarning muhim sinfini daraxtlar deb ataluvchi graflar tashkil qiladi.

Sikllarga ega bo‘lmagan bog‘langan graf daraxt deb ataladi. Daraxtning uchlari soni bilan qirralari soni ayirmasi birga teng. Minimal bog‘lanish muammolaridan biri daraxtlar bilan bog‘langan.

SHaharlarning bog‘lanishi haqidagi masala. Yo‘llar tarmog‘i bilan o‘zaro bog‘lash kerak bo‘lgan  $n$  ta  $A_1, A_2, \dots, A_n$  shaharlar berilgan bo‘lsin.  $A_i$  va  $A_k$  shaharlarni bog‘lovchi yo‘l qurilishining bahosi ma’lum va  $c(A_i, A_k) = c_{ij}$  ga teng bo‘lsin. Hamma shaharlarni bog‘lovchi bahosi minimal bo‘ladigan yo‘llar tarmog‘ini aniqlash talab qilinadi.

Eng arzon bog‘lovchi graf daraxt bo‘lishi kerak, yani bu grafssikllarga ega bo‘lmasligi kerak. Aks holda grafda aqalli bittassikl mavjud bo‘lib, bussiklning zvenalaridan ixtiyoriy birini olib tashlanganda tarmoqning bahosi kamayadi, shaharlar esa bog‘langanligicha qoladi. Demak izlanayotgan yo‘l daraxt bo‘ladi va uning qirralari soni  $n-1$  ga teng bo‘lishi kerak.

Masalani echish algoritmini quyidagicha yozish mumkin.

1-qadamda eng arzon bog‘lovchi zveno  $e_1$  ni beruvchi ikki shaharni bog‘laymiz.

Navbatdagi har bir qadamda  $e_i$  zvenolardan eng arzonini qo‘shib boramiz. Agar bir xil bahoga ega bo‘lgan bir qancha zvenolar bo‘lsa, ulardan ixtiyoriysini olamiz. Qurilgan zvenolarga yangi zvenolar qo‘shilishi natijasida hosil bo‘lgan tarmoq yana bitta zvenoga uzayadi va hech qandayssikl hosil bo‘lmaydi. Qo‘shilayotgan zvenoni izlashda allaqachon qurilgan tarmoq bilan umumiy uchga ega bo‘lgan qirralarning hammasini bir-bir saralash kerak.

Algoritmning  $(n-1)$ -qadami oxirgi qadam bo'ladi.

Olingan tarmoqning bahosi minimal va  $\sum_{i=1}^{n-1} c(e_i)$  ga teng bo'ladi.

Misol.  $n=4$  uchun  $c_{ij}$  lar

$$c = (c_{ij}) = \begin{pmatrix} - & 11 & 13 & 10 \\ 11 & - & 6 & 9 \\ 13 & 6 & - & 10 \\ 10 & 9 & 10 & - \end{pmatrix}$$

jadval bilan berilgan bo'lsin, bu erda  $i = \overline{1,4}$  uchun  $c_{ii}$  ishtirok etmaydi.

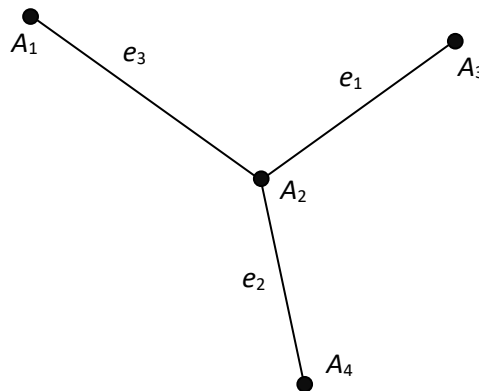
Minimal bahoga ega bo'lgan tarmoq 3 zvenodan tuziladi.

1. Avval yo'lning eng arzon zvenosi  $e_1 = A_2A_3$  olinadi, uning bahosi shartli birliklarda  $c(e_1) = c_{23} = 6$  ga teng.

2. Keyin bu zveno qolgan zvenolardan eng arzon  $e_2 = A_2A_4$  zveno bilan uzaytiriladi, buning bahosi  $c(e_2) = c_{24} = 9$  bo'ladi.

3. Sikl hosil bo'lmaydigan holda yana eng arzon zveno  $e_3 = A_1A_2$  olinadi, buning bahosi  $c(e_3) = c_{12} = 11$  bo'ladi.

SHunday qilib, qurilishnig bahosi  $6+9+11=26$  ga tengligi kelib chiqadi. Natijani quyidagi



daraxt ko'rinishida ko'rsatish mumkin.

Eng qisqa yo'lni topishga oid transport masalasi.  $A$  boshlang'ich va  $B$  oxirgi punktlarni tutashtiruvchi transport tarmog'ida bu ikki punktdan tashqari mos yo'llar bilan o'zaro  $A$  hamda  $B$  punktlar bilan tutashtirilgan bir qancha oradagi punktlar mavjud bo'lsin. Tutashtirilgan xar ikki punktlar oralaridagi masofalar ma'lum bo'lganda  $A$  dan  $B$  ga olib boruvchi eng qisqa yo'lni topish talab qilinadi. Quyidagi belgilashlarni kiritaylik:

$d_{ij}$  -tarmoqdagi ikki qo'shni  $i$  va  $j$  punktlar orasidagi masofa;

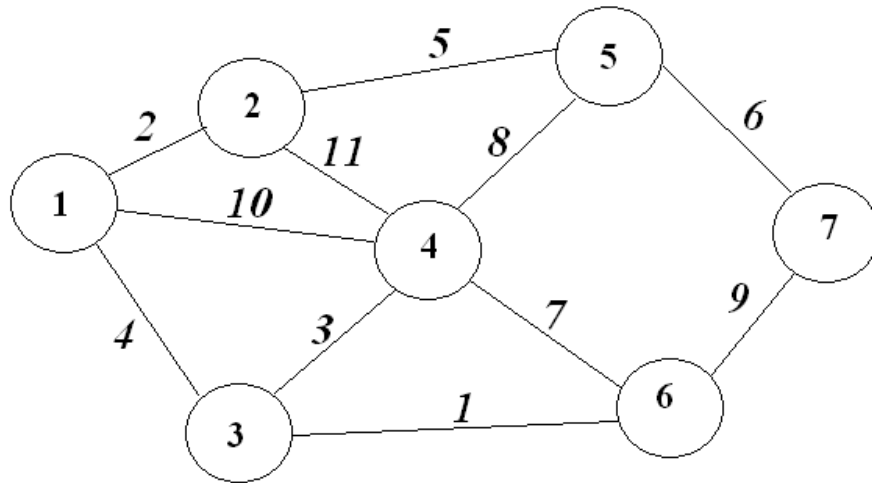
$U_j$  —  $j$  punktgacha eng qisqa masofa,  $U_1 = 0$ .

$U_j$  ni hisoblash uchun formula:

$$U_j = \min \{U_i + d_{ij}\}.$$

Formuladan ko‘rinadiki  $j$  punktgacha bo‘lgan eng qisqa masofa  $U_j$ ,  $j$  bilan tutashtirilgan barcha oldingi  $i$ -punktlargacha bo‘lgan eng qisqa masofalar aniqlangach, hisoblab topilishi mumkin. Oxirgi zvenoga mos  $U_j$  olingach tadbir yakunlanadi.

Quyidagi tarmoqli grafikda tasvirlangan tarmoqli masalada 1 va 7 punktlar orasidagi eng qisqa masofa aniqlansin.



**Echish:** Minimal masofalarni topamiz:

$$U_1 = 0,$$

$$U_2 = U_1 + d_{12} = 0 + 2 = 2,$$

$$U_3 = U_1 + d_{13} = 0 + 4 = 4,$$

$$U_4 = \min \{U_1 + d_{14}; U_2 + d_{24}; U_3 + d_{34}\} = \min \{0 + 10; 2 + 11; 4 + 3\} = 7,$$

$$U_5 = \min \{U_2 + d_{25}; U_4 + d_{45}\} = \min \{2 + 5; 7 + 8\} = 7,$$

$$U_6 = \min \{U_3 + d_{36}; U_4 + d_{46}\} = \min \{4 + 1; 7 + 7\} = 5,$$

$$U_7 = \min \{U_5 + d_{57}; U_6 + d_{67}\} = \min \{7 + 6; 5 + 9\} = 13.$$

1 va 7 - punktlar orasidagi minimal masofa 13, mos marshrut: 1-2-5-7.



## **AMALIY MASHG'ULOTLAR MATERIALLARI**

### **O'quv moduli bo'yicha bo'yicha savolnomalar**

#### **Bilet №1**

1. Model va modellashtirish tushunchalari.
2. Modellashtirishning iyerarxiya printsipi.

#### **Bilet №2**

1. Matematik modellashtirishning variatsion printsipi.
2. Matematik modellashtirishda analogiya usuli.

#### **Bilet №3**

1. Matematik model tushunchasi. Matematik modelga misollar. Matematik modelni ifodalash shakllari.
2. Yirtqich-o'lja modeli. Volterra modeli.

#### **Bilet №4**

1. Xisoblash eksperimenti va uning bosqichlari.
2. Yer shari aholisining o'sishi planetamizdagi erkaklar va ayollar sonlarining ko'paytmasiga proportsional deb hisoblab, yer shari aholisi o'sishining matematik modelini quring.

#### **Bilet №5**

1. Energiyaning saqlanish qonunidan foydalanib, MM qurish.
2. Matematik modellarga qo'yiladigan asosiy talablar.

#### **Bilet №6**

1. Massa (materiya)ning saqlanish qonuni foydalanib, MM qurish.
2. Maltus va Fyurxst-Perl modellari.

#### **Bilet №7**

1. Impulsning saqlanish qonunidan foydalanib, MM qurish.
2. Ikki davlat o'rtasidagi qurollanish poygasi modeli.

#### **Bilet №8**

1. Matematik modellarning universialligi, matematik modellashtirishning umumiy qonunlari va usullarini konkret misollarda kuzatish.
2. Matematik modellarga qo'yiladigan asosiy talablar.

#### Bilet №9

1. Yemiriluvchi moddaning yemirilish tezligi uning miqdoriga proporsional deb hisoblab, moddaning yemirilish jarayonining matematik modelini quring.
2. Murakkab jarayonlarni matematik modellashtirish.

#### Bilet №10

1. Modellashtirish va modellarning turlari.
2. Iqtisodiyot o'zlashining makromodeli.

#### Bilet №11

1. Model va modellashtirish tushunchalari.
2. Modellashtirishning iyerarxiya printsipi.

#### Bilet №12

1. Matematik modellashtirishning variatsion printsipi.
2. Matematik modellashtirishda analogiya usuli.

#### Bilet №13

1. Matematik model tushunchasi. Matematik modelga misollar. Matematik modelni ifodalash shakllari.
2. Yirtqich-o'lja modeli. Volterra modeli.

#### Bilet №14

1. Xisoblash eksperimenti va uning bosqichlari.
2. Ikki armiya jangovar xarakati modeli.

#### Bilet №15

1. Energiyaning saqlanish qonunidan foydalanib, MM qurish.
2. Matematik modellarga qo'yiladigan asosiy talablar.

#### Bilet №16



1. Massa (materiya)ning saqlanish qonuni foydalanib, MM qurish.
2. Maltus va Fyurxst-Perl modellari.

Bilet №17

1. Impulsning saqlanish qonunidan foydalanib, MM qurish.
2. Ikki davlat o`rtasidagi qurollanish poygasi modeli.

Bilet №18

1. Korxonalar o`zaro qarzlarini bartaraf etishi.
2. Matematik modellarga qo`yiladigan asosiy talablar.

Bilet №19

1. Murakkab jarayonlarni matematik modellashtirish.
2. Reklama kompaniyasini tashkillashtirish.

Bilet №20

1. Modellashtirish va modellarning turlari.
2. Modda va energiya muvozanatining modeli.

Bilet №21

1. Epidemiya modeli.
2. Yemiriluvchi moddaning yemirilish tezligi uning miqdoriga proportsional deb hisoblab, moddaning yemirilish jarayonining matematik modelini quring.

Bilet №22

1. Matematik modellarning universialligi, matematik modellash-tirishning umumiy qonunlari va usullarini konkret misollarda kuzatish.
2. Bozor iqtisodiyoti muvozanatining makromodeli.

Bilet №23

1. Iyerarxiya printsipidan foydalanib, matematik modellar qurish.
2. Populyatsiya chiziqsiz modelining uch turdagi rejimi.

Bilet №24

1. Analogiya usulidan foydalanib, matematik modellar qurish.
2. Matematik modellashtirishda variatsion printsiptan foydalanish.

#### Bilet №25

1. Jamiyat rivojlanishining demografik modellari.
2. Biologik modellarga doir misollar.

#### Test savollari

1. Model lotincha “modulus” soʻzidan olinganligi maʼlum, u qanday maʼnoni anglatadi?

- a) barcha javoblar toʻgʻri;
- b) oʻlchov;
- v) namuna.

2. Modelni taʼrifini koʻrsating.

- a) barcha javoblar toʻgʻri;
- b) model – bu real obʼyektning almashtirishi mumkin boʻlgan, tadqiqot va tajriba oʻtkazish uchun qulay va arzon boʻlgan boshqa bir real yoki abstrakt obʼyektdir;
- v) model real obʼyektning soddalashtirilgan koʻrinishi boʻlib, uning hamma xossalari emas, balki asosiy xossalari oʻzida mujassam etgan boshqa bir real yoki abstrakt obʼyektdir.

3. Hozirgi kunda fan olamida maʼlum boʻlgan maʼlumotlarni koʻrinishi va maʼnosiga qarab qanday turlarga boʻlish mumkin?

- a) fizik, grafikli, matematik;
- b) grafikli, matematik;
- v) matematik, fizik.
- g) fizik, grafikli.

4. Tajriba oʻtkazishga moʻljallangan tajriba uchastkalari, laboratoriya mashgʻulotlarini oʻtkazishga moʻljallangan asbob uskunalar qanday modellarga misol boʻladi?

- a) fizik;
- b) matematik;

v) grafikli.

5. Sxemalar, chizmalar, rasmlar, ilmiy va tarixiy asarlar qanday modellarga misol bo`la oladi?

a) grafikli;

b) matematik;

v) fizik.

6. Nyuton qonunlari, saqlanish qonunlari qanday modellarga misol bo`la oladi?

a) matematik;

b) fizik;

v) grafikli.

7. ... model real ob'yektni tasavurimizdagi abstrakt ko'rinishi bo`lib, u matematik belgilar va ba'zi bir qonun-qoidalar bilan ifodalangan bo`ladi.

a) matematik;

b) fizik;

v) grafikli.

8. Masalaning yechilishi hususiyatlariga qarab matematik modellar qanday turlarga bo`linishi mumkin?

a) funktsional modellar, strukturali modellar;

b) strukturali modellar;

v) funktsional modellar.

9. Funktsional modellarni mohiyati nimada?

a) barcha javoblar to`g`ri;

b) funktsional modellarda hodisa yoki obektni harakterlovchi barcha kattaliklar miqdoriy ifodalaniladi;

v) funktsional modellarda kattaliklarning ayrimlari erkli o`zgaruvchilar sifatida, boshqalari esa shu miqdorlarning funktsiyalari sifatida qaraladi.

10. Matematik modellar quyida keltirilganlarning qaysi biri bilan ifodalanishi mumkin?

- a) differentsial, algebraik tenglamalar yoki tengsizliklar sistemasi ko`rinishida;
- b) differentsial tenglamalar yoki tenglamalar sistemasi ko`rinishida;
- v) algebraik tenglamalar yoki tenglamalar sistemasi ko`rinishida;
- g) algebraik tengsizliklar yoki tengsizliklar sistemasi ko`rinishida.

11. Strukturali modellarning mohiyati nimadan iborat?

- a) keltirilganlarning barchasi to`g`ri;
- b) strukturali modellarda matematik model murakkab obektning strukturasini ifodalaydi;
- v) strukturali modellarda murakkab ob'yekt odatda turli qismlardan tuzilgan bo`lib, bu qismlar orasidagi bog`lanishlarni odatda miqdoriy ifodalab bo`lmaydi;

12. Matematik modeldagi berilganlar va bashoratlash natijalarining xarakteriga ko`ra modellar qanday turlarga ajratilishi mumkin?

- a) deterministik, ehtimolli-statistik modellar;
- b) ehtimolli-statistik, algebraik modellar;
- v) deterministik modellar;
- g) differentsial modellar.

13. Deterministik modellar nima bilan xarakterlanadi?

- a) deterministik modellarda aniq, bir qiymatli bashorat qilinadi;
- b) deterministik modellar statistik ma'lumotlarga asoslangan bo`lib, ular yordamidagi bashoratlar ehtimolli harakterda bo`ladi;
- v) keltirilganlarning barchasi to`g`ri.

14. Ehtimolli-statistik modellar nima bilan xarakterlanadi?

- a) ehtimolli-statistik modellar statistik ma'lumotlarga asoslangan bo`lib, ular yordamidagi bashoratlar ehtimolli harakterda bo`ladi;
- b) ehtimolli-statistik modellarda aniq, bir qiymatli bashorat qilinadi;
- v) keltirilganlarning barchasi to`g`ri.

15. Matematik modelga qo'yiladigan asosiy talablarni ko'rsating.
- a) universallik, kompaktlik, soddalik, past sezgirlik darajasiga ega bo'lishi, moslashish darajasi yuqori bo'lishi;
  - b) universallik, past sezgirlik darajasiga ega bo'lishi, moslashish darajasi yuqori bo'lishi;
  - v) kompaktlik, soddalik, past sezgirlik darajasiga ega bo'lishi, moslashish darajasi yuqori bo'lishi;
  - g) universallik, kompaktlik, soddalik, moslashish darajasi yuqori bo'lishi.

16. Matematik modelni qurishning asosiy bosqichlarini ko'rsating.
- a) ob'yektni o'rganish, yig'ilgan ma'lumotlarni sistemalashtirish, yig'ilgan ma'lumotlar asosida ob'yekt bo'ysunadigan qonun yoki qonuniyatlar tanlash; ob'yektni taklif etilayotgan matematik modelini "jihozlash", matematik model asosida diskret model qurish va diskret model asosida dastur tuzib, kompyuterda qo'yilgan matematik masalani yechish;
  - b) ob'yektni o'rganish, yig'ilgan ma'lumotlar asosida ob'yekt bo'ysunadigan qonun yoki qonuniyatlar tanlash; ob'yektni taklif etilayotgan matematik modelini "jihozlash", matematik model asosida diskret model qurish va diskret model asosida dastur tuzib, kompyuterda qo'yilgan matematik masalani yechish;
  - v) ob'yektni o'rganish, yig'ilgan ma'lumotlar asosida ob'yekt bo'ysunadigan qonun yoki qonuniyatlar tanlash; ob'yektni taklif etilayotgan matematik modelini "jihozlash", dastur tuzib, kompyuterda qo'yilgan matematik masalani yechish.

17. Matematik model va uning real ob'yekti orasidagi muvofiqlik deyilganda nima tushuniladi?
- a) matematik model va uning real ob'yekti orasidagi muvofiqlik deyilganda ob'yekt va uning matematik modeli dinamikalarining sifat va miqdor jihatdan o'xshashligi va yaqinligi tushuniladi;
  - b) matematik model va uning real ob'yekti orasidagi muvofiqlik deyilganda ob'yekt va uning matematik modeli dinamikalarining sifat jihatdan o'xshashligi va yaqinligi tushuniladi;
  - v) matematik model va uning real ob'yekti orasidagi muvofiqlik deyilganda ob'yekt va uning matematik modeli dinamikalarining miqdor jihatdan o'xshashligi va yaqinligi tushuniladi.

18. Ob'yekt va uning matematik modeli dinamikalari orasida muvofiqlikni o'rnatishning usullarini ko'rsating.
- a) keltirilganlarning barchasi to'g'ri

b) matematik modelda ishtirok etayotgan o'zgarmas kattaliklarni qaytadan baholash;

v) matematik modelni yozishda qabul qilingan ishchi gipotezalarni qaytadan ko'rib chiqish;

g) real ob'yekt haqida qo'shimcha ma'lumotlar yig'ish va yangi yig'ilgan ma'lumotlar asosida modelni qaytadan ko'rib chiqish.

19. Agar  $M_I(0)$  va  $M_{II}(0)$  moddalarning boshlang'ich,  $M_I(t)$  va  $M_{II}(t)$  joriy massalari bo'lsa,  $M_I(0) + M_{II}(0) = M_I(t) + M_{II}(t)$  formula nimani ifodalaydi?

a) moddalar massasining saqlanish qonunini;

b) energiyani saqlanish qonuni;

v) impulsni saqlanish qonuni.

20. Radiativ yemiriluvchi modda massasining vaqt bo'yicha o'zgarish qonunini ko'rsating.

a)  $M_I(t) = M_I(0)e^{-\alpha t}$ ;

b)  $M_I(t) = M_I(0)e^{\alpha t}$ ;

v)  $M_I(t) = M_I(0)(e^{-\alpha t} + e^{\alpha t})$ .

21. Radiativ moddaning yemirilish tezligi qanday formula bilan ifodalanadi?

a)  $\frac{dM_I(t)}{dt} = -\alpha M_I(t)$ ;

b)  $\frac{dM_I(t)}{dt} = \alpha M_I(t)$ ;

v)  $\frac{dM_I(t)}{dt} = -\alpha M_I(0)$ .

22. Raketa harakati uchun impulsning saqlanish qonuni qanday ifodalanadi?

a)  $m(t)v(t) = m(t + \Delta t)v(t + \Delta t) + [m(t) - m(t + \Delta t)][v(t + \Delta t) - u]$ ;

b)  $m(t)v(t) = m(t + \Delta t)v(t + \Delta t)$ ;

v)  $m(t)v(t) = [m(t) - m(t + \Delta t)][v(t + \Delta t) - u]$ .

23. Raketa harakati uchun impulsning saqlanish qonuni qanday ifodalanadi?

a)  $m \frac{dv}{dt} = -\frac{dm}{dt} u;$

b)  $\frac{dv}{dt} = -\frac{dm}{dt} u;$

v)  $m \frac{dv}{dt} = -u .$

24. Bir pogʻonali raketaning tezligi qanday qonun asosida oʻzgaradi?

a)  $v(t) = v_0 + u \ln \left( \frac{m_0}{m(t)} \right);$

b)  $v(t) = v_0 + u \ln(m(t));$

v)  $v(t) = v_0 + \ln \left( \frac{m_0}{m(t)} \right).$

25. Bir pogʻonali raketalaridan nega foydalanilmaydi?

a) raketalarining tezligi kichik boʻlganligi sababli, yaʼni bu raketalar hattoki birinchi kosmik tezlikka ham erisha olmasligi sababli;

b) bunday raketalarining massalari nisbatan kichik boʻlganligi sababli;

v) raketalarining konstruktsiyasi sodda boʻlganligi sababli.

26. Iyerarxiya printsiptidan foydalanib, matematik modellar qurilganda hosil boʻlgan modellar qanday xususiyatlarga ega boʻladi?

a) keltirilganlarning barchasi toʻgʻri;

b) har biri oldingi modellarni umumlashtiruvchi va ularni oʻzining xususiy holi sifatida oʻziga biriktirib oluvchi nisbatan toʻla modellar zanjiri (iyerarxiyasi) hosil boʻladi;

v) keyingilari oldingilarini oʻz ichiga olgan, yaʼni oldingi modellar keyingi modellarning xususiy holi boʻlgan nisbatan toʻliq boʻlgan modellar zanjiri hosil boʻladi.

27.  $m_0 = m_p + m_1 + m_2 + m_3$  ifoda nimani anglatadi?

a) uch pogʻonali raketaning boshlangʻich massasini;

b) murakkab konstruktsiyali raketaning boshlangʻich massasini;

v) raketaning struktura massasini.

28. Ko'p pog'onali raketalarda  $\lambda m_i$  –  $i$ -chi pog'onaga mos keluvchi struktura massasi bo'lsa,  $(1 - \lambda)m_i$  ifoda nimani anglatadi?

a)  $i$ -chi pog'onaga mos keluvchi yoqilg'i massasi;

b)  $i$ -chi pog'onaga mos keluvchi foydali yuk massasi;

29. Uch pog'onali raketalar uchun  $m_p + \lambda m_1 + m_2 + m_3$  ifoda nimani anglatadi?

a) raketa birinchi pog'onasining yoqilg'isi sarf bo'lgan, raketaning tezligi

$v_1 = u \ln \left( \frac{m_0}{m_p + \lambda m_1 + m_2 + m_3} \right)$  ga teng bo'lgandagi massasi;

b) ikkinchi pog'onaning boshlang'ich massasi.

30. Uch pog'onali raketalar uchun  $v_2 = v_1 + u \ln \left( \frac{m_p + m_2 + m_3}{m_p + \lambda m_2 + m_3} \right)$  ifoda

nimani anglatadi?

a) barcha javoblar to'g'ri;

b) ikkinchi pog'onadagi yoqilg'i yonib tugagandan keyingi raketaning tezligini;

v) raketaning uchinchi pog'onasi ishga tushgandagi boshlang'ich tezligini.

31. Uch pog'onali raketalar uchun boshlang'ich massani foydali yuk massasiga nisbati nimaga teng?

a)  $\frac{m_0}{m_p} = \frac{(1 - \lambda)^3}{(P - \lambda)^3};$

b)  $\frac{m_0}{m_p} = \frac{(1 - \lambda)}{(P - \lambda)};$

v)  $\frac{m_0}{m_p} = \frac{(1 - \lambda)^2}{(P - \lambda)^2}.$

32. Nega kosmanavtikada ikki va to'rt pog'onali raketalardan foydalanilmasdan uch pog'onali raketadan foydalaniladi?

a) keltirilganlarning barchasi to'g'ri;

b) ikki pog'onali raketa foydali massani orbitaga chiqarishga layoqatlidir, ammo bir tonnalik foydali yuk uchun raketa massasi 149 tonna bo'lishi talab etiladi;

v) uch pog'onadan foydalanish raketa massasini deyarli ikki martaga kamaytiradi, ammo uning strukturasini ikki pog'onali raketaga nisbatan murakablashtiradi;



g) to'rt pog'onali raketa esa uch pog'onaliga nisbatan sezilarli yutuqni bermasa-da, raketaning strukturasi uch pog'onali raketaga nisbatan ancha murakablashtiradi.

33. Iyerarxiya printsiptan foydalanib matematik modellar qurish qanday tamoyillarga asoslanadi?

- a) keltirilganlarning barchasi to'g'ri;
- b) «soddadan-murakkablikka qarab» tamoyiliga;
- v) «murakkablikdan soddalikka qarab» tamoyiliga.

34. Maltus modeli quyidagilardan qaysi biri bilan ifodalanadi?

- a)  $\frac{dN}{dt} = (\alpha - \beta)N$ ;
- b)  $\frac{dN}{dt} = (\alpha - \beta N)N$ ;
- v)  $\frac{dN}{dt} = (\alpha - \beta)N^2$ .

35. Quyidagi ifodalardan qaysi biri Maltus modelining yechimini ifodalaydi?

- a)  $N = N_0 e^{(\alpha - \beta)t}$ ;
- b)  $N = N_0 e^{(\alpha + \beta)t}$
- v)  $N = N_0 \sqrt{e^{(\alpha - \beta)t}}$ .

36. Maltus modeli asosida populyatsiya sonining vaqt bo'yicha o'zgarishi qanday bo'ladi?

- a) keltirilganlarning barchasi to'g'ri;
- b) agar o'limlar soni tug'ilishlarga qaraganda ko'proq bo'lsa, u holda Maltus modeli populyatsiya sonining eksponentsial ravishda kamayishiga ishora qiladi;
- v) tug'ilishlar va o'limlar soni o'zaro teng bo'lsa, Maltus modelining ko'rsatishicha, populyatsiya soni butun vaqt oralig'ida o'zgarmasdan qoladi;
- g) agar tug'ilishlar soni o'limlar soniga nisbatan ko'p bo'lsa, u holda Maltus modeli populyatsiya sonining eksponentsial ravishda o'sishiga ishora qiladi.

37. Maltus modelini qaysi hollarda qo'llash mumkin?

- a) hayotni ta'minlovchi resurslarga cheklanishlar bo'lmagan hollarda;
- b) populyatsiya soni muhit sig'imiga yaqinlashganda;

v) populyatsiya soni muhit sig`imiga yaqinlashmaganda.

38. Ferxyulst-Perl modeli quyidagilardan qaysi biri bilan ifodalanadi?

a)  $\frac{dN}{dt} = (\alpha - \beta N)N$  ;

b)  $\frac{dN}{dt} = (\alpha - \beta)N$  ;

v)  $\frac{dN}{dt} = (\alpha - \beta)N^2$  .

39. Quyidagi ifodalardan qaysi biri Ferxyulst-Perl tenglamasining yechimini ifodalaydi?

a)  $N = \frac{\alpha N_0 e^{\alpha t}}{\alpha - \beta N_0 (e^{\alpha t} - 1)}$  ;

b)  $N = N_0 e^{(\alpha - \beta)t}$  ;

v)  $N = N_0 e^{(\alpha + \beta)t}$  .

40. Ferxyulst-Perl modeli asosida populyatsiya sonining vaqt bo'yicha o'zgarishi qanday bo'ladi?

a) keltirilganlarning barchasi to'g'ri;

b) populyatsiya sonining cheksiz o'sishiga yo'l qo'ymaydi. O'sish  $\square/\square$  kattalik bilan chegaralangan bo'ladi;

v) agar o'limlar soni tug'ilishlarga qaraganda ko'proq bo'lsa, u holda Maltus modeli populyatsiya sonining eksponentsial ravishda kamayishiga ishora qiladi;

g) tug'ilishlar va o'limlar soni o'zaro teng bo'lsa, Maltus modelining ko'rsatishicha, populyatsiya soni butun vaqt oralig'ida o'zgarmasdan qoladi.

41. Ferxyulst-Perl modelini qaysi hollarda qo'llash mumkin?

a) keltirilganlarning barchasi to'g'ri;

b) populyatsiya soni muhit sig`imiga yaqinlashganda;

v) hayotni ta'minlovchi resurslar cheklangan holda.

42. Populyatsiyaning chiziqsiz modeli  $\frac{dN}{dt} = \alpha \cdot \left(1 - \frac{N}{N_p}\right) \cdot N, \alpha > 0$

qanday farazlarga asoslangan?

- a) atrof muhit tomonidan ta'minlanadigan «muvozanatli» populyatsiya soni  $N_p$  mavjud va populyatsiya sonining o'zgarish tezligi muvozanat qiymatidan og'ish miqdoriga ko'paytirilgan populyatsiya soniga proportsional;
- b) populyatsiya sonining o'zgarish tezligi muvozanat qiymatidan og'ish miqdoriga ko'paytirilgan populyatsiya soniga proportsional;
- v) populyatsiya sonining o'zgarish tezligi muvozanat qiymatidan og'ish miqdoriga ko'paytirilgan populyatsiya soniga proportsional.

43. Populyatsiyaning chiziqsiz modeli  $\frac{dN}{dt} = \alpha \cdot \left(1 - \frac{N}{N_p}\right) \cdot N, \alpha > 0$

ning yechimi qanday tenglik bilan ifodalanadi?

a)  $N(t) = \frac{N_p N(0) \cdot e^{\alpha t}}{N_p - N(0)(1 - e^{\alpha t})};$

b)  $N(t) = \frac{N(0) \cdot e^{\alpha t}}{1 - N(0)(1 - e^{\alpha t})};$

v)  $N(t) = \frac{N_p N(0)}{N_p - N(0)(1 - e^{\alpha t})}.$

44. Populyatsiyaning chiziqsiz modeli  $\frac{dN}{dt} = \alpha \cdot \left(1 - \frac{N}{N_p}\right) \cdot N, \alpha > 0$  ga

asosan populyatsiya soni vaqt o'tishi bilan qanday o'zgaradi?

- a) keltirilganlarning barchasi to'g'ri;
- b) boshlang'ich populyatsiya soni  $N(0)$  ning ixtiyoriy qiymatida populyatsiya soni muvozanat qiymati  $N_p$  ga intiladi;
- v) Maltus modelidan farqli o'laroq ushbu holda muvozanat turg'un bo'ladi; g) Maltus modeliga nisbatan ushbu model populyatsiya dinamikasini realroq ifodalaydi.

45. 
$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = (\alpha - cM) \cdot N \\ \frac{dM}{dt} = (-\beta + dN) \cdot M \end{cases}$$
 differentsial tenglamalar sistemasi qanday

jarayonni ifodalaydi?

- a) yirtqich-o`lja sistemasining o`zaro munosabati modelini;
- b) ikki davlat o`rtasidagi qurollanish poygasi modelini;
- v) ikki armiya o`rtasidagi jangovar harakat modelini.

46. Lotka-Volter tenglamalar sistemasining yechimi asosida qanday xulosaga kelish mumkin?

- a) keltirilganlarning barchasi to`g`ri;
- b) agar  $N(0) = N_0$ ,  $M(0) = M_0$  ( $N_0$ ,  $M_0$  - populyatsiyaning muvozanatini ta'minlovchi qiymatlar) bo`lsa, hamma vaqt mobaynida populyatsiyalar soni o`zgarmasdan qoladi;
- v) yirtqich va xuddi shuningdek, o`ljaning populyatsiya sonlari muvozanat holatidan ozgina o`zgarishi, bu populyatsiya sonlarining vaqt o`tishi bilan muvozanat holatiga qaytmasligiga olib keladi;
- g) agar boshlang`ich muvozanat holatidan og`ish katta bo`lsa, sistema vaqt o`tishi bilan muvozanat holatiga qaytmaydi.

47. Yirtqich-o`lja sistemasining o`zaro munosabati modeli asosida qanday xulosaga kelish mumkin?

- a) keltirilganlarning barchasi to`g`ri;
- b) yirtqich va o`ljalar populyatsiya sonlari muvozanat holati atrofida davriy tebranib turadi;
- v) tebranish amplitudasi va uning davri populyatsiyalarning boshlang`ich sonlari  $N(0)$ ,  $M(0)$  orqali aniqlanib,  $N(t)$  ning maksimal qiymatiga  $M(t)$  ning minimal qiymati mos keladi va aksincha.

48. Ikki davlat o`rtasidagi qurollanish poygasi modeli quyidagi farazlarning qaysi biriga asoslangan?

- a) har bir davlatdagi qurollar miqdorining o`sishi va kamayishi raqib davlatdagi qurollar miqdoriga, o`zidagi mavjud qurollarning eskirishi darajasiga va raqiblar o`rtasidagi o`zaro ishonchsizlik darajasiga proporsional bo`ladi deb faraz qilinadi;

b) har bir davlatdagi qurollar miqdorining oʻsishi va kamayishi raqib davlatdagi qurollar miqdoriga va raqiblar oʻrtasidagi oʻzaro ishonchsizlik darajasiga proportsional boʻladi deb faraz qilinadi;

v) har bir davlatdagi qurollar miqdorining oʻsishi va kamayishi raqib davlatdagi qurollar miqdoriga, oʻzidagi mavjud qurollarning eskirishi darajasiga proportsional boʻladi deb faraz qilinadi.

$$49. \quad \begin{cases} \frac{dM_1}{dt} = \alpha_1(t)M_2 - \beta_1(t)M_1 + \gamma_1(t) \\ \frac{dM_2}{dt} = \alpha_2(t)M_1 - \beta_2(t)M_2 + \gamma_2(t) \end{cases} \quad \text{differentsial tenglamalar sistemasi}$$

qanday jarayonni ifodalaydi?

a) ikki davlat oʻrtasidagi qurollanish poygasi modelini;

b) yirtqich-oʻlja sistemasining oʻzaro munosabati modelini;

v) ikki armiya oʻrtasidagi jangovar harakat modelini.

50. Ikki armiya oʻrtasidagi jangovar harakat modeli quyidagi farazlarning qaysi biriga asoslangan?

a) har bir armiyadagi qoʻshinlar sonining kamayish tezligi bevosita jangovar harakatlarga bogʻliq boʻlmagan sabablar bilan, raqib armiyaning jangovar harakati va yordamchi kuchlarning qoʻshilish tezligi bilan bogʻliq;

b) har bir armiyadagi qoʻshinlar sonining kamayish tezligi raqib armiyaning jangovar harakati va yordamchi kuchlarning qoʻshilish tezligi bilan bogʻliq;

v) har bir armiyadagi qoʻshinlar sonining kamayish tezligi bevosita jangovar harakatlarga bogʻliq boʻlmagan sabablar bilan, raqib armiyaning jangovar harakati bilan bogʻliq.

$$51. \quad \begin{cases} \frac{dM_1}{dt} = -\alpha_1(t)M_1 - \beta_2(t)M_2 + \gamma_1(t) \\ \frac{dM_2}{dt} = -\alpha_2(t)M_2 - \beta_1(t)M_1 + \gamma_2(t) \end{cases} \quad \text{differentsial tenglamalar}$$

sistemasi qanday jarayonni ifodalaydi?

a) ikki armiya oʻrtasidagi jangovar harakat modelini;

b) ikki davlat oʻrtasidagi qurollanish poygasi modelini;

v) yirtqich-oʻlja sistemasining oʻzaro munosabati modelini.

$$52. \quad \begin{cases} \frac{dM_1}{dt} = -\alpha_1(t)M_1 - \beta_2(t)M_2 + \gamma_1(t) \\ \frac{dM_2}{dt} = -\alpha_2(t)M_2 - \beta_1(t)M_1M_2 + \gamma_2(t) \end{cases} \quad \text{differentsial tenglamalar}$$

sistemi qanday jarayonni ifodalaydi?

- a) muntazam armiya va partizan qismlari o'rtasidagi jangovar harakat modelini;
- b) ikki davlat o'rtasidagi qurollanish poygasi modelini;
- v) yirtqich-o'lja sistemasining o'zaro munosabati modelini.

$$53. \quad \alpha x^2 = \beta x^2 + \gamma x^4 + \delta \frac{d}{dt}(\rho x^3) \text{ ifoda qanday jarayonni ifodalaydi?}$$

- a) modda va energiya muvozanatini;
- b) massani saqlanish qonunini;
- v) populyatsiyalarning o'zgarish qonunini.

$$54. \quad x(t) = \sqrt{\frac{a}{b}} \frac{1 - e^{-2\sqrt{ab}(t-t_0)}}{1 + e^{-2\sqrt{ab}(t-t_0)}} \text{ ifoda qanday jarayonni ifodalaydi?}$$

- a) daraxt balandligini vaqt o'tishi bilan o'zgarishini (o'sishini);
- b) daraxt erkin energiyasini;
- v) ozuqaviy eritmani daraxtning barcha qismlariga yetkazib berish uchun sarf bo'ladigan energiyani.

55. Modda va energiya muvozanatini ifodalaydigan matematik modelni hosil qilishda quyida keltirilgan qaysi farazlardan foydalaniladi?

- a) yetuklik yoshidagi daraxt o'sish jarayonida geometrik o'xshashlikni saqlab qoladi; daraxt erkin energiyani (daraxt uchun zarur bo'lgan moddani) faqatgina fotosintez jarayoni sababli oladi va bu energiya fotosintezga, tirik tanani shakllantirish (o'sish) va eritmani tuproqdan ko'tarish uchun sarf bo'ladi;
- b) daraxt erkin energiyani (daraxt uchun zarur bo'lgan moddani) faqatgina fotosintez jarayoni sababli oladi va bu energiya fotosintezga, tirik tanani shakllantirish (o'sish) va eritmani tuproqdan ko'tarish uchun sarf bo'ladi;
- v) daraxt erkin energiyani (daraxt uchun zarur bo'lgan moddani) faqatgina fotosintez jarayoni sababli oladi va bu energiya tirik tanani shakllantirish (o'sish) va eritmani tuproqdan ko'tarish uchun sarf bo'ladi.

56. Modda va energiya muvozanatini ifodalaydigan matematik modeldan qanday xulosalar olish mumkin?

a) avval daraxt vaqt o'tishi davomida to'xtovsiz o'sib, ma'lum bir vaqtdan keyin daraxtning o'sishi sekinlashadi va nihoyat umuman o'sishdan to'xtab qoladi;

b) daraxt vaqt o'tishi davomida to'xtovsiz o'sib boradi;

v) daraxt vaqt o'tishi davomida to'xtovsiz o'sib boradi, ma'lum bir vaqtdan keyin daraxtning o'sishi sekinlashadi va daraxt yana o'sishda davom etadi.

57.  $x(t) + y(t) = N + 1$  ifoda qanday jarayonni ifodalaydi?

a) aholisi soni  $N$  ga teng bo'lgan hududda epidemiyaga chalingan 1 ta kasal kelib qo'shilishi natijasida hududda epidemiya tarqalishi jarayonini ifodalaydi;

b) daraxt balandligini vaqt o'tishi bilan o'zgarishini (o'sishini);

v) daraxt erkin energiyasini.

58.  $\frac{dx}{dt} = \alpha x(N + 1 - x)$  ifoda qanday jarayonni ifodalaydi?

a) aholisi soni  $N$  ga teng bo'lgan hududda epidemiyaga chalingan 1 ta kasal kelib qo'shilishi natijasida hududda kasallar sonining vaqt bo'yicha o'zgarishini ifodalayli;

b) daraxt balandligini vaqt o'tishi bilan o'zgarishini (o'sishini);

v) daraxt erkin energiyasini.

59. Aholisi soni  $N$  ga teng bo'lgan hududda epidemiyaga chalingan 1 ta kasal kelib qo'shilishi natijasida hududda kasallar sonining vaqt bo'yicha o'zgarishini qanday munosabat bilan aniqlanadi?

a)  $x(t) = \frac{N + 1}{Ne^{-\alpha(N+1)t} + 1}$  ;

b)  $x(t) = \frac{N + 1}{Ne^{\alpha(N+1)t} + 1}$

v)  $x(t) = \frac{1}{Ne^{\alpha(N+1)t} + 1}$  .

60.  $\frac{dN}{dt} = [\alpha_1(t) + \alpha_2(t)N(t)](N_0 - N)$  ifoda qanday jarayonni ifodalaydi?

a) reklama kompaniyasini tashkillashtirish modelini;

b) chiziqsiz populyatsiya modelini;

v) Ferxyulst-Perl modelini.

61. Bitta tovardan tushadigan foyda  $p$ , xaridorlar soni  $N$  va  $\alpha_1(t)$  reklama uchun vaqt birligi ichida qilinadigan harakatlar soni bo'lsa, u holda tovarni sotishdan tushadigan foyda nimaga teng?

a)  $P = pN(t) = pN_0 \int_0^t \alpha_1(t) dt;$

b)  $P = p/N(t) = p / N_0 \int_0^t \alpha_1(t) dt;$

v)  $P = p/N(t) = N_0 \int_0^t \alpha_1(t) dt / p .$

62. Xaridorlar soni  $N$ ,  $\alpha_1(t)$  reklama uchun vaqt birligi ichida qilinadigan harakatlar soni, elementar reklama harakatining narxi  $s$  bo'lsa, u holda sarf qilingan xarajatlar nimaga teng?

a)  $S = s \int_0^t \alpha_1(t) dt;$

b)  $S = \int_0^t \alpha_1(t) dt / s ;$

v)  $S = s / \int_0^t \alpha_1(t) dt .$



## **MODULNI O‘QITISHDA FOYDALANILADIGAN INTERFAOL TA’LIM METODLARI**

**BINAR MA’RUZA.** “Binar”s o‘zi lotinchadan olingan bo‘lib, “qo‘sh”, “ikki” degan ma’noda qo‘llaniladi. Bunday mashg‘ulotning olib borilishi ikki vakil: o‘qituvchi va metodist; o‘qituvchi vao‘quvchi; taklif etilgan mutaxassis vao‘qituvchi; o‘qituvchi va tyutor (maslahatchi) o‘rtasidagi interfaol suhbat, bahs-munozara va axborotlar almashinuvini namoyon qiladi. Jarayonni bunday tashkillashtirishdan ko‘zlangan asosiy maqsad yangi o‘quv ma’lumotlari va axborotlarini ikki mutaxassis yoki ishtirokchi nuqtayi nazarlarini taqqoslash orqali yoritib berishdan iborat.

**TRENING.** Trening zamonaviy ta’lim shakllaridan biri hisoblanib, u interfaol mashg‘ulotlarni amalga oshirishning o‘ziga xos ko‘rinishidir. Treninglar o‘rganilishi lozim bo‘lgan nazariy g‘oya va fikrlarni amaliy ish hamda mashqlar davomida o‘zlashtirish imkoniyatini beradi va ta’lim oluvchilarda shaxslararo o‘zaro hamkorlikning samarali ko‘nikmasini shakllantirishga, shuningdek, mutaxassis kasbiy kompetentligining umumiy darajasini oshirishga yo‘naltiriladi.

Har qanday pedagogik treningni tashkil etish quyidagi bosqichlardan tashkil topadi:

1. Tashkiliy bosqich: guruhni yig‘ish yoki shakllantirish.
2. Boshlang‘ich bosqich: guruh me‘yorlarini ishlab chiqish, tanishuv va mashg‘ulotdan kutuvlarni aniqlash.
3. Faoliyatli bosqich: trening turi vao‘tkazish metodikasini belgilash.
4. Yakuniy bosqich (refleksiya).

Trening mobaynida talabalar nazariy ma’lumotlarni o‘zlashtirish bilan birga, ularda bilish, emotsional va xulq-atvor ko‘nikmalari ham rivojlanib boradi.

**“SWOT-TAHLIL” METODI.** Metodning maqsadi: mavjud nazariy bilimlar va amaliy tajribalarni tahlil qilish, taqqoslash orqali muammoni hal etish yo‘llarni topishga, bilimlarni mustahkamlash, takrorlash, baholashga, mustaqil, tanqidiy fikrlashni, nostandart tafakkurni shakllantirishga xizmat qiladi.

S – (strength) kuchli tomonlari

W – (weakness) zaif, kuchsiz tomonlari

O – (opportunity) imkoniyatlari

T – (threat) to'siqlar

**“KEYS-STADI” METODI.** «Keys-stadi» - inglizcha soʻz boʻlib, («case» – aniq vaziyat, hodisa, «study» – oʻrganmoq, tahlil qilmoq) aniq vaziyatlarni oʻrganish, tahlil qilish asosida oʻqitishni amalga oshirishga qaratilgan metod hisoblanadi. Keysda ochiq axborotlardan yoki aniq voqyea-hodisadan vaziyat sifatida tahlil uchun foydalanish mumkin.

Mazkur metod muammoli taʼlim metodidan farqli ravishda real vaziyatlarni oʻrganish asosida aniq qarorlar qabul qilishga asoslanadi. Agar u oʻquv jarayonida maʼlum bir maqsadga erishish yoʻli sifatida qoʻllanilsa, metod xarakteriga ega boʻladi, biror bir jarayonni tadqiq etishda bosqichma-bosqich, maʼlum bir algoritm asosida amalga oshirilsa, texnologik jihatni oʻzida aks ettiradi

“Keys metodi” ni amalga oshirish bosqichlari Ish bosqichlari Faoliyat shakli va mazmuni

1-bosqich: Keys va uning axborot taʼminoti bilan tanishtirish

- yakka tartibdagi audio-vizual ish;
- keys bilan tanishish (matnli, audio yoki media shaklda);
- axborotni umumlashtirish;
- axborot tahlili;
- muammolarni aniqlash

2-bosqich: Keysni aniqlashtirish va oʻquv topshirigʻni belgilash

- individual va guruhda ishlash;
- muammolarni dolzarblik iyerarxiasini aniqlash;
- asosiy muammoli vaziyatni belgilash

3-bosqich: Keysdagi asosiy muammoni tahlil etish orqali oʻquv topshirigʻining yechimini izlash, hal etish yoʻllarini ishlab chiqish

- individual va guruhda ishlash;
- muqobil yechim yoʻllarini ishlab chiqish;
- har bir yechimning imkoniyatlari va toʻsiqlarni tahlil qilish;
- muqobil yechimlarni tanlash

4-bosqich: Keys yechimini shakllantirish va asoslash, taqdimot.

- yakka va guruhda ishlash;
- muqobil variantlarni amalda qo'llash imkoniyatlarini asoslash;
- ijodiy-loyiha taqdimotini tayyorlash;
- yakuniy xulosa va vaziyat yechimining amaliy aspektlarini yoritish

“Keys-stadi” metodining o'ziga xos xususiyatlari:

- izlanishga doir faoliyatning mavjud bo'lishi.
- jamoaviy va guruhlarda o'qitish.
- individlul, guruhli va jamoaviy ish shakllari integrasiyasi.
- xilma-xil o'quv loyihalarini ishlab chiqish.
- muvaffaqiyatga erishish uchun ta'lim oluvchilarning o'quv-bilish faoliyatini rag'batlantirish

Keys harakatlari o'z ichiga quyidagilar savollar bo'yicha faoliyatni qamrab oladi:

- Kim? (Who?)
- Qachon? (When?)
- Qayerda? (Where?)
- Nima uchun? (Why?)
- Qanday?/ Qanaqa? (How?)
- Nima? (natija) (What?).

**Keys.** darslikning sizga taqdim etilgan bitta mavzusi materiallari bo'yicha keys topshirig'ini tuzing, bu keys asosida o'tiladigan darsni loyihalashtiring, u bo'yicha taqdimot tayyorlang va uni namoyish eting.

**«FSMU» METODI.** Metodning maqsadi: Mazkur metod ishtirokchilardagi umumiy fikrlardan xususiy xulosalar chiqarish, taqqoslash, qiyoslash orqali axborotni o'zlashtirish, xulosalash, shuningdek, mustaqil ijodiy fikrlash ko'nikmalarini shakllantirishga xizmat qiladi. Mazkur metoddan ma'ruza mashg'ulotlarida, mustahkamlashda, o'tilgan mavzuni so'rashda, uyga vazifa berishda hamda amaliy mashg'ulot natijalarini tahlil etishda foydalanish tavsiya etiladi.

Metodni amalga oshirish tartibi:

- qatnashchilarga mavzuga oid bo'lgan yakuniy xulosa yoki g'oya taklif etiladi;

- har bir ishtirokchiga FSMU metodining bosqichlari yozilgan qog'ozlarni tarqatiladi;

- ishtirokchilarning munosabatlari individual yoki guruhliy tartibda taqdimot qilinadi.

FSMU tahlili qatnashchilarda kasbiy-nazariy bilimlarni amaliy mashqlar va mavjud tajribalar asosida tezroq va muvaffaqiyatli o'zlashtirilishiga asos bo'ladi.

*Namuna.*

Fikr: PISA va TIMSS qiyosiy xalqaro tadqiqotlar natijalari mamlakatimizda matematika fanini o'qitish tizimini tahlil qilish va takomillashtirishni taqozo etadi.

Topshiriq: Mazkur fikrga nisbatan munosabatingizni FSMU orqali tahlil qiling.

**“TUSHUNCHALAR TAHLILI” METODI.** Metodning maqsadi: mazkur metod o'quvchilar yoki qatnashchilarni mavzu buyicha tayanch tushunchalarni o'zlashtirish darajasini aniqlash, o'z bilimlarini mustaqil ravishda tekshirish, baholash, shuningdek, yangi mavzu buyicha dastlabki bilimlar darajasini tashxis qilish maqsadida qo'llaniladi. Metodni amalga oshirish tartibi:

- ishtirokchilar mashg'ulot qoidalari bilan tanishtiriladi;
- o'quvchilarga mavzuga yoki bobga tegishli bo'lgan so'zlar, tushunchalar nomi tushirilgan tarqatmalar beriladi ( individual yoki guruhli tartibda);
- o'quvchilar mazkur tushunchalar qanday ma'no anglatishini, qachon, qanday xolatlarda qo'llanilishi haqida yozma ma'lumotlar beradilar ;
- Belgilangan vaqt yakuniga yetgacho'qituvchi berilgan tushunchalarning to'g'ri va to'liq izohinio'qib eshittiradi yoki slayd orqali namoyish etadi;
- Har bir ishtirokchi berilgan to'g'ri javoblar bilano'zining ishini taqqoslaydi, farqlarini aniqlaydi va o'z bilim darajasini tekshirib, baholaydi.

**VENN DIAGRAMMASI METODI.** Venn diagrammasi - grafik ko'rinishda bo'lib, olingan natijalarni umumlashtirib, ulardan bir butun xulosa chiqarishga, ikki va undan ortiq predmetlarni (ko'rinish, fakt, tushuncha) taqqoslash, tahlil qilish va o'rganishda qo'llaniladi. Diagramma ikki va undan ortiq aylanani kesishmasidan hosil bo'ladi.

Metodning maqsadi: Bu metod grafik tasvir orqali o'qitishni tashkil etish shakli bo'lib, u ikkita o'zaro kesishgan aylana tasviri orqali ifodalanadi. Mazkur metod turli tushunchalar, asoslar, tasavurlarning analiz va sintezini ikki aspekt orqali ko'rib chiqish, ularning umumiy va farqlovchi jihatlarini aniqlash, taqqoslash imkonini beradi.

Metodni amalga oshirish tartibi:

- ishtirokchilar ikki kishidan iborat juftliklarga birlashtiriladilar va ularga ko‘rib chiqilayotgan tushuncha yoki asosning o‘ziga xos, farqli jihatlarini (yoki aksi) doiralar ichiga yozib chiqish taklif etiladi;

- navbatdagi bosqichda ishtirokchilar to‘rt kishidan iborat kichik guruhlariga birlashtiriladi va har bir juftlik o‘z tahlili bilan guruh a‘zolarini tanishtiradilar;

- juftliklarning tahlili eshitilgach, ular birgalashib, ko‘rib chiqilayotgan muammo yohud tushunchalarning umumiy jihatlarini (yoki farqini) izlab topadilar, umumlashtiradilar va doirachalarning kesishgan qismiga yozadilar.

*Namuna:* PISA va TIMSS xalqaro tadqiqotlar natijalarini qiyosiy tahlil qiling.

**KICHIK GURUHLARDA ISHLASH METODI.** Kichik guruhlarda ishlash orqali o‘rganish - ma‘lum muammoning yechimini topishga va o‘quvchilar faolligini oshirishga qaratilgan darsdagi ijodiy hamkorlikdagi ish. Bosqichlari: guruhlariga bo‘lish, muammoni guruhlarda muxokama qilish, muammoning yechimlari taqdimoti, xulosalash.

#### *Kichik guruhlarda hamkorlikda o‘qitish*

Bu yondashuvda kichik guruhlar 4 ta o‘quvchidan tashkil topadi. O‘qituvchi avval mavzuni tushuntiradi, so‘ngra o‘quvchilarning mustaqil ishlari tashkil etiladi. O‘quvchilarga berilgan o‘quv topshiriqlari 4 qismga ajratilib, har bir o‘quvchi topshiriqning ma‘lum qismini bajaradi. Topshiriq yakunida har bir o‘quvchi o‘zi bajargan qism yuzasidan fikr yuritib, o‘rtoqlarini o‘qitadi, so‘ngra guruh a‘zolari tomonidan topshiriq yuzasidan umumiy xulosa chiqariladi. O‘qituvchi har bir kichik guruh axborotini tinglaydi va test savollari yordamida bilimlarni nazorat qilib baholaydi.

O‘quvchilarning kichik guruhlardagi o‘quv faoliyati o‘yin (turnir, musobaqa) shaklida, individual tarzda ham tashkil etilishi mumkin

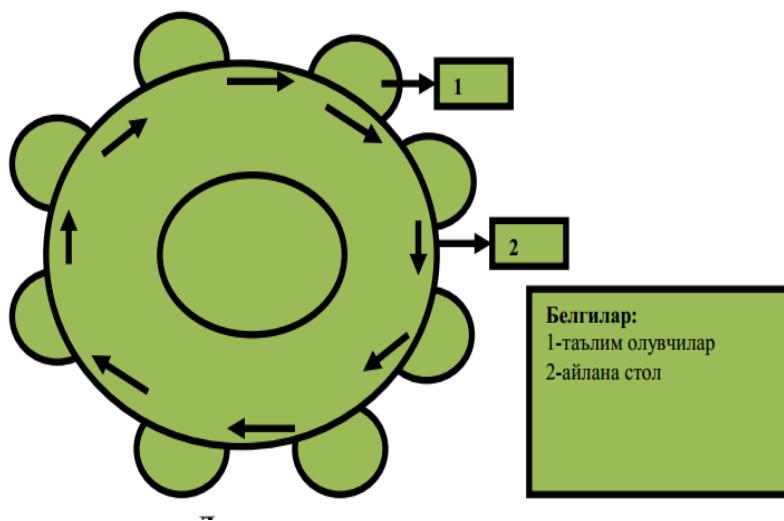
#### *Kichik guruhlarda ijodiy izlanishni tashkil etish*

Kichik guruhlarda ijodiy izlanishni tashkil etish metodi 1976 yili Tel-Aviv universiteti professori Sh.Sharan tomonidan ishlab chiqilgan. Bu metodda ko‘proq o‘quvchilarning mustaqil va ijodiy ishiga e‘tibor qaratiladi.

O‘quvchilar alohida-alohida yoki 6 kishilik kichik guruhlarda ijodiy izlanish olib boradilar. Ijodiy izlanish kichik guruhlarda tashkil etilganda darsda o‘rganish lozim bo‘lgan o‘quv materialini kichik qismlarga ajratiladi. Keyin bu qismlar yuzasidan topshiriqlar har bir o‘quvchiga taqsimlanadi. Shunday qilib, har bir o‘quvchi umumiy topshiriqning bajarilishiga o‘z hissasini qo‘shadi. Kichik guruhlarda topshiriq yuzasidan munozara o‘tkaziladi. Guruh a‘zolari birgalikda ma‘ruza tayyorlaydi va sinf o‘quvchilari o‘rtasida o‘z ijodiy izlanishlari natijasini

e’lon qiladi. Kichik guruhlar o’rtasida o’tkazilgan o’quv bahsi, munozara o’quvchilar jamoasining hamkorlikda bajargan mustaqil faoliyatining natijasi, yakuni sanaladi. Hamkorlikda ishlash natijasida qo’lga kiritilgan muvaffaqiyatlar sinf jamoasining har bir o’quvchining muntazam va faol aqliy mehnat qilishiga, kichik guruhlarini, umuman sinf jamoasini jipslashtirishga, avval o’zlashtirilgan bilim, ko’nikma va malakalarni yangi kutilmagan vaziyatlarda qo’llanib, yangi bilimlarning o’zlashtirishiga bog’liq bo’ladi.

**“DAVRA SUHBATI” METODI** – aylana stol atrofida berilgan muammo yoki savollar yuzasidan ta’lim oluvchilar tomonidan o’z fikr-mulohazalarini bildirish orqali olib boriladigan o’qitish metodidir. “Davra suhbat” metodi qo’llanilganda stol-stullarni doira shaklida joylashtirish kerak. Bu har bir ta’lim oluvchining bir-biri bilan “ko’z aloqasi”ni o’rnatib turishiga yordam beradi. Davra suhbatining og’zaki va yozma shakllari mavjuddir. Og’zaki davra suhbatida ta’lim beruvchi mavzuni boshlab beradi va ta’lim oluvchilardan ushbu savol bo’yicha o’z fikr-mulohazalarini bildirishlarini so’raydi va aylana bo’ylab har bir ta’lim oluvchi o’z fikr-mulohazalarini og’zaki bayon etadilar. So’zlayotgan ta’lim oluvchini barcha diqqat bilan tinglaydi, agar muhokama qilish lozim bo’lsa, barcha fikr-mulohazalar tinglanib bo’lingandan so’ng muhokama qilinadi. Bu esa ta’lim oluvchilarning mustaqil fikrlashiga va nutq madaniyatining rivojlanishiga yordam beradi. Quyida “Davra suhbat” metodining tuzilmasi keltirilgan.



**Rasm. Davrastolining tuzilmasi**

Yozma davra suhbatida ham stol-stullar aylana shaklida joylashtirilib, har birta’lim oluvchi konvert qog’oziga beriladi.

Har birta’lim oluvchi konvert ustiga ma’lum birmavzu bo’yicha o’z savolini beradi va “Javob varaqasi”ning biriga o’z javobini yozib, konvert ichiga solib qo’yadi. Shundan so’ng konvertni soat yo’nalishi bo’yicha yonidagi ta’lim oluvchiga uzatadi. Konvertni olgan ta’lim oluvchi o’z javobini “Javoblar varaqasi”ning biriga yozib,

konvert ichiga solib qo'yadi va yonidagi ta'lim oluvchiga uzatadi. Barcha konvertlar aylana bo'ylab harakatlanadi. Yakuniy qismda barcha konvertlar yig'ib olinib, tahlil qilinadi.

**“Davra suhbat” metodining bosqichlari quyidagilardan iborat:**

1. Mashg'ulot mavzusi e'lon qilinadi.
2. Ta'lim beruvchi ta'lim oluvchilarni mashg'ulotni o'tkazish tartibi bilan tanishtiradi.
3. Har bir ta'lim oluvchiga bittadan konvert va javoblar yozish uchun guruhda necha ta'lim oluvchi bo'lsa, shunchadan “Javoblar varaqalari”ni tarqatilib, har bir javobni yozish uchun ajratilgan vaqt belgilab qo'yiladi. Ta'lim oluvchi konvertga va “Javoblar varaqalari”gao'z ismi-sharifini yozadi.
4. Ta'lim oluvchi konvert ustiga mavzu bo'yichao'z savolini yozadi va “Javoblar varaqasi”gao'z javobini yozib, konvert ichiga solib qo'yadi.
5. Konvertga savol yozgan ta'lim oluvchi konvertni soat yo'nalishi bo'yicha yonidagi ta'lim oluvchiga uzatadi.
6. Konvertni olgan ta'lim oluvchi konvert ustidagi savolga “Javoblar varaqalari”dan biriga javob yozadi va konvert ichiga solib qo'yadi hamda yonidagi ta'lim oluvchiga uzatadi.
7. Konvert davra stoli bo'ylab aylanib, yana savol yozgan ta'lim oluvchiningo'ziga qaytib keladi. Savol yozgan ta'lim oluvchi konvertdagi “Javoblar varaqalari”ni baholaydi.
8. Barcha konvertlar yig'ib olinadi va tahlil qilinadi.

Ushbu metod orqali ta'lim oluvchilar berilgan mavzu bo'yichao'zlarining bilimlarini qisqa va aniq ifoda eta oladilar. Bundan tashqari ushbu metod orqali ta'lim oluvchilarni muayyan mavzu bo'yicha baholash imkoniyati yaratiladi. Bunda ta'lim oluvchilaro'zlari bergan savollariga guruhdagi boshqa ta'lim oluvchilar bergan javoblarini baholashlari va ta'lim beruvchi ham ta'lim oluvchilarni obyektiv baholashi mumkin.

**MUAMMOLI TA'LIM METODI.** Ta'lim jarayonida o'quvchilarning bilish faoliyatini faollashtirish hamda ularning intellektual imkoniyatlaridan yuqori darajada foydalanish quyidagi umumiy omillarga bog'liq bo'ladi:

-o'rganilayotgan mavzu yuzasidan muammoli savollar tizimi tuzish;

-qo'yilgan muammoli savollar tizimi asosida suhbat metodi orqali tushuntiriladigan mavzu materiallarini o'rgatish va uning tub mohiyatini ochib berish;

-muammoli savol asosida izlanish xarakteridagi o'quv vazifalarini qo'yish.

Yuqoridagi bosqichlar asosida o'quv materiali tushuntiriladiganda o'quvchilar o'zlari darrov tushunib yetmaydigan fakt va tushunchalarga duch keladilar. Natijada o'rganilayotgan mavzu materiali bilan o'quvchilar orasida muammoli vaziyat hosil bo'ladi.

Muammoli vaziyatning roli va ahamiyatini aniqlash o'quvchilarning aktiv fikrlash faoliyatini psixologik, pedagogik qonuniyatlarini hisobga olish asosida o'quv jarayonini qayta qurish muammoli ta'limning asosiy g'oyasini belgilab beradi. Muammoli vaziyatlarni hal qilish asosida hosil qilingan dars jarayoni muammoli ta'lim deyiladi.

Muammoli ta'limda o'qituvchi faoliyati shundan iboratki, u zarur hollarda eng murakkab tushunchalar mazmunni tushuntira borib o'rganilayotgan mavzu materiali bilan o'quvchilar orasidagi muntazam ravishda muammoli vaziyatlar vujudga keltiriladi, o'quvchilarni faktlardan xabardor qiladi, natijada o'quvchilar bu faktlarni analiz qilish asosida mustaqil ravishda xulosa chiqaradilar va umumlashtiradilar.

**EVRISTIK TA'LIM METODI.** Evristika degan so'zning ma'nosi savol javobga asosan "topaman" demakdir. Evristik metod bilan o'qitish maktablarda asosan XIX asr boshlaridan boshlab qo'llanila boshladi.

Mashg'ulotlar qiziqarli bo'lishi uchun, bu mashg'ulotlardagi har bir masala yoki topshiriq so'zma-so'z quruq yodlash uchun emas, balki ularning oliy faoliyatlarini ishga soladigan xakteri bo'lishi kerak. Amerikalik olim D. Poya evristik ta'lim metodi to'g'risida shunday degan edi. Evristikani maqsadi yangiliklarga olib boruvchi metod va qoidalarni izlash demakdir. U evristik metod mohiyatini quyidagidek izchillikda tuzilgan reja orqali amalga oshirishni tavsiya qiladi:

-masalaning quyilishini tushunish;

-masalaning yechish rejaini tuzish;

-tuzilgan rejani amalga oshirish;

-orqaga nazar tashlash (hosil qilingan yechimni tekshirish).

Bu rejani amalga oshirish jarayonida o'qituvchilar quyidagi savollarga javob topadilar:

-Masalada nima noma'lum?



-Masalada nimalar ma'lum?

-Masalaning sharti nimalardan iborat?

-Ilgari shunga o'xshagan masalalar yechilganmi?

-Agar shunga o'xshagan masalalar yechilgan bo'lsa, undan foydalanib qo'yilayotgan masalani yecha oladimi?

Albatta yuqoridagi reja-sxema o'quvchilarning ijodiy fikrlash faoliyatlarini shakllantiradi, ammo bu reja-sxema o'quvchilarning ijodiy qobiliyatlarini shakllantiruvchi birdan bir yo'l bo'la olmaydi.

**AQLIY HUJUM METODI.** Umumiy muammo bo'yicha o'quvchilarni ijodiy ishga, o'zaro muloqotga chorlash. Bosqichlari: muammoli vaziyatni keltirib chiqarish; uning yechimini topish uchun o'quvchilarni jalb qilish; turli yechimlar taqdimotini eshitish; yechimlarni solishtirish va tanlash; xulosalash.

**MUSTAQIL ISHLASH METODI.** Vaqti-vaqti bilan o'tkazib turiladigan, o'quvchilarning mustaqil o'rganish, darslik bilan ishlash va mustaqil amaliy faoliyat bilan shug'ullanish ko'nikmalarini shakllantiradigan, har bir o'quvchiga alohida yoki umumiy tarzda tashkil qilinadigan topshiriqni bajartirish; o'quvchilarning amaliy faoliyatiga aralashmay, tashqaridan teskari aloqa- muloqot yordamida yo'naltirib boshqarish va nazorat qilish.

**JUFTLIKDA ISHLASH METODI.** Biror mavzu bo'yicha yonma-yon o'tirgan o'quvchilarni o'zaro muloqotga chorlash; o'zaro fikr almashish va ularni ba'zilarini tinglash.

**“BAHS-MUNOZARA” METODI.** Metod quyidagi bosqichlarda amalga oshiriladi: o'qituvchi munozara mavzusini tanlaydi va o'quvchilarni munozaraga taklif etadi; o'qituvchi o'quvchilarga muammo bo'yicha «aqliy hujum» o'tkazishga chorlaydi va uni o'tkazish tartibini belgilaydi; o'qituvchi «Aqliy hujum» vaqtida bildirilgan turli g'oya va fikrlarni yozib boradi yoki bu ishni bajarish uchun o'quvchilardan birini kotib etib tayinlaydi hamda bu bosqichda o'qituvchi o'quvchilarga o'z fikrlarini bildirishlariga sharoit yaratib beradi; o'qituvchi o'quvchilar bilan birgalikda, ikkinchi bosqichda «aqliy hujum» davomida bildirilgan fikr va g'oyalarni guruhlariga ajratadi, umumlashtiradi va ularni tahlil qiladi. Tahlil natijasida qo'yilgan muammoning eng maqbul yechimi tanlanadi.

**TADQIQOT METODI.** Tadqiqot usuli o'zlashtirish darajasining eng yuqori cho'qisi hisoblanadi. Bu usul bilan dars o'tilganda o'quvchilar olgan bilimlari asosida hali o'rganilmagan kichik bir masala ustida yakka yoki birgalashib izlanish olib borishadi, masala yechimiga doir keltirilgan taxminni izlab topilgan dalillar asosida to'g'ri yoki noto'g'riligini tekshirishadi va

isbotlashadi. Bosqichlari: -darsda hammaga qiziqish uyg'otadigan biror obyektning xossasini aniqlash yoki u haqidagi masalani qo'yish; -uni o'rganish, tadqiq qilish uchun ma'lumotlar to'plash; -muammo yoki masalaning yechishga oid taxminlar, bashoratlar qilish; -har bir bashoratning qanchalik to'g'riligini to'plangan ma'lumotlar asosida tahlil qilish va isbotlash; -xulosa chiqarish; -sinf oldida taqdimot qilish.

**KLASTER METODI.** Klaster metodi pedagogik, didaktik strategiyaning muayyan shakli bo'lib, u ta'lim oluvchilarga ixtiyoriy muammo (mavzu) lar xususida erkin, ochiqo'ylash va fikrlarni bemalol bayon etish uchun sharoit yaratishga yordam beradi. Mazkur metod turli xil g'oyalar o'rtasidagi aloqalar fikrlash imkoniyatini beruvchi tuzilmani aniqlashni talab etadi. Ushbu metod muayyan mavzuning ta'lim oluvchilar tomonidan chuqur hamda puxta o'zlashtirilguniga qadar fikrlash faoliyatining bir maromda bo'lishini ta'minlashga xizmat qiladi.

«Klaster» metodidan foydalanish tavsifi:

1-bosqich. Nimaniki o'ylagan bo'lsangiz, shuni qog'ozga yozing. Fikringizni sifati to'g'risida o'ylabo'tirmay, ularni shunchaki yozib boring.

2-bosqich. Yozuvingizning orfografiyasi yoki boshqa jihatlariga e'tibor bermang.

3-bosqich. Belgilangan vaqt nihoyasiga yetmaguncha, yozishdan to'xtamang. Agar ma'lum muddat biror-bir g'oyani o'ylay olmasangiz, u holda qog'ozga biror narsaning rasmini chiza boshlang. Bu harakatni yangi g'oya tug'ilgunga qadar davom ettiring.

4-bosqich. Muayyan tushuncha doirasida imkon qadar ko'proq yangi g'oyalarni ilgari surish hamda mazkur g'oyalar o'rtasidagi o'zaro aloqadorlik va bog'liqlikni ko'rsatishga harakat qiling. G'oyalar yig'indisining sifati va ular o'rtasidagi aloqalarni ko'rsatishni cheklamang.

## **GLOSSARIY**

**Model** - lotincha *modulus* soʻzidan olingan boʻlib, oʻlchov, namuna maʼnolarini anglatadi.

**Model** – bu real obʼyektни almashtirishi mumkin boʻlgan, tadqiqot va tajriba oʻtkazish uchun qulay va arzon boʻlgan boshqa bir real yoki abstrakt obʼyektdir. Model real obʼyektning soddalashtirilgan koʻrinishi boʻlib, uning hamma xossalarini emas, balki asosiy xossalarinigina oʻzida mujassam etadi.

**Matematik model** – real obʼyektни tasavurimizdagi abstrakt koʻrinishi boʻlib, u matematik belgilar va baʼzi bir qonun–qoidalar bilan ifodalangan boʻladi. Masalan, Nyuton qonunlari, massaning saqlanish qonuni.

**Matematik model** - oʻrganilayotgan jarayonlarni algebraik, differentsial yoki integral tenglamalar koʻrinishidagi taqribiy ifodasi;

**Faktorlar** - modellashtirishda tashqi muhitning tekshirilayotgan obʼyekt parametrlariga taʼsir qiluvchi koʻrsatkichlari.

**Matematik modellashtirish** - real obʼyekt yoki jarayonlarni matematik usullar vositasida nazariy tadqiq qilish usuli.

**Modellashtirishning mohiyati** - obʼyektни boshqa soddaroq obʼyekt (model) bilan almashtirib, modelni xususiyatini tadqiq qilish orqali original obʼyektни oʻrganishdan iborat.

**Real obʼyekt va uning matematik modelining muvofiqligi** - obʼyekt va uning matematik modeli dinamikalarining sifat va miqdor jihatdan oʻxshashligi.

**Avj oluvchi rejimlar** - vaqtning chekli qiymatida qandaydir miqdor cheksizlikka aylanuvchi jarayonlar.

**“Matematika” atamasi** - grekcha “bilish, fan” soʻzidan olingan

**Matematika fani** - moddiy borliqning fazoviy va miqdoriy munosabatlarini aks ettiruvchi qonunlarni oʻrganadi

**Maʼruza usuli**- bunda oʻqituvchi materialni oʻzi bayon etadi.

**Metod** taʼlim jarayonida taqdim etilgan amaliy va nazariy bilimlarni egallash, oʻzlashtirish, oʻrgatish, oʻrganish, bilish uchun xizmat qiladigan yoʻl- yoʻriqlar, usullar majmui

**Modul** oʻquv axborotining mantiqiy boʻlakka boʻlingan qismi, ushbu qism mantiqan yaxlit va tugallangan boʻlib, uning oʻzlashtirilishini nazorat qilish mumkin boʻladi

**Modulli oʻqitish** - oʻqitishning istiqbolli tizimlaridan biri hisoblanadi, chunki u taʼlim oluvchilarning bilim imkoniyatlarini va ijodiy qobiliyatlarini rivojlantirish tizimiga eng yaxshi moslashgandir.

**Muammo** oʻquv jarayonida hal qilinishi

**Muammoli vaziyat** - Mazkur holda vaziyat subyektining hozirgi vaqtda yoki kelgusidagi maqsadlarga erishishiga xavf soladigan vaziyat tushuniladi.

**Multimediya vositalar.** Bularga turli tipdagi axborotlarni va jarayonlarni matn, rasm, sxema, jadval, diagramma va virtual muxitlarni yaratish, saklash, ishlov berish, rakamlashtirilgan va jarayonli kurinishda amalga oshirishning kompyuterli vositalari kiradi.

**Mediatriassi-** bu kesmaga perpendikulyar bo'lib, uning o'rtasidan chiquvchi to'g'richiziq.

**Metrika-** Biror geometrik sistemada ikki nuqta orasidagi masofaning yoki burchak o'lchovining aniqlanish( ifodalanish )usuli.

**Teorema** - grekcha “teorema” so'zidan olingan bo'lib, mulohaza yuritilgan, degan ma'noni anglatadi.

**Trapetsiya** – (yunon. Trapezion- “stolcha”, ruscha “tpaneza”- “tamaddi”) Geometrik figuralardan biri

**Tenglama** – tenglamani yechishda noma'lumni harflar bilan belgilash III asrda yashagan grek olimi Diofant asarlarida uchraydi.

**“Formula”** atamasi lotincha “formula” so'zidan kelib chiqqan bo'lib, o'zbektilida ma'lum qonun, degan ma'noni anglatadi.

**Idempotentlik qonuni-** binar amalini qanoatlantiradigan qonun. Agar binary amalini ko'paytma deb tasavvur qilinsa, g xolda  $I.Q \ a a = a$  ko'rinishda bo'ladi.

**Izoklin-** shunday chiziqki, uning xar bir nuqtasida differentsal tenglamaning o'ng qismi o'zgaras bo'ladi.

**Izomeriya** 1. I.- bir sirtning ( umuman riman fazosi) ikkinchi sirtga ( rimanning boshqa fazosiga) shunday akslantirishdirki, unda barcha egri chiziqlarning uzunliklari o'zgarmaydi. Masalan silindirning tekislikka egilishi.

**Rivojlantiruvchi ta'lim** - o'qituvchining asosiy vazifasi bilish mustaqilligi va qobiliyatlarini rivojlantirishga yo'naltirilgan, talabalarni o'quv faoliyatini tashkillashtirish hisoblanadi.

**Tabaqalashtirish** -o'qitishda o'quvchilarni o'z bilim saviyasi va qobiliyatlariga ko'ra guruhlariga ajratgan holda, tabaqalarga bo'lgan holda o'qitishni nazarda tutadi.

Tajriba - obyektlar va hodisalarni o'rganishning shunday usuliga aytiladiki, bunda biz ularning tabiiy holatiga va rivojiga aralashamiz, ular uchun sun'iy sharoitlar yaratamiz, qismlarga ajratib boshqa obyektlar va hodislar bilan bog'lanishlar hosil qilib tadqiq etamiz.

Taqqoslash – o'rganilayotgan obyektlarning o'xshashlik va farqlarini fikran ajratishdan iborat.

**Tafakkur** - inson ongida ask etgan obyektlar tomonlar va xossalarini ajratish va ularni yangi bilim olish uchun boshqa obyektlar bilan tegishli munosabatlarda qo'yish jarayoniga aytiladi. Umuman olganda, tafakkur obyektiv borliqning inson ongida faol aks ettirish jarayonidir.

**Tafakkurning shakllari** - tushuncha, hukm va tasdiqlar.

**Tahlil** muayyan obyekt, voqea-hodisani har tomonlama tahlil qilish, chuqur tekshirish, o'rganish

**Ta'lim vositasi** muayyan o'qitish metodi yoki usullaridan muvaffaqiyatli foydalanish uchun zarur bo'lgan yordamchi o'quv materiallari

**Ta'lim tizimi** turli daraja va yo'nalishdagi o'zaro aloqador uzluksiz ta'lim dasturlari va davlat ta'lim standartlari, tashkiliy huquqiy turlaridan qat'iy nazar ta'lim muassasalarining barcha tarmoqlari, ta'limni boshqaruv organlari va ular qoshidagi muassasa hamda tashkilotlarni qamrab oluvchi tizim.

**Teoremlar** matematik xukmlarning eng ko'p ishlatiladigan turi bo'lib, u aksiomalar yordamida o'rnatilayotgan nazariy natijalarni ifoda etib, isbotlanishi talab etiladi.

**Texnologiya** grek tilidan (techne) tarjima kilganda san'at, maxorat, bilish ma'nolarini anglatadi, bular esa o'z navbatida jarayonlardir. Jarayonlar - bu qo'yilgan maqsadga erishish uchun ma'lum xarakterliklar majmuasidir.

**Tizimli yondashuv** tadqiqotchining pedagogik obyekt yaxlitligini ochib ko'rsatishga yo'naltiruvchi, uning ichki aloqa va munosabatlarini belgilovchi jarayon

**Tushunchalar** - obyektlarning turli xil sifatleri, belgilari va xususiyatlarini aks ettiradi,

**Uzluksiz ta'lim** o'zaro mantiqiy izchillik asosida bog'langan hamda soddadan murakkabga qarab rivojlanib boruvchi va bir-birini taqozo etuvchi bosqichlardan iborat yaxlit ta'lim tizimi

**O'quv materialining elektron shakli.** Bosma shaklda bayon etilgan asosiy, tushuntiruvchi, amaliy matnlarning ovozli elektron versiyasi takdim etiladi.

**O'quvchilarning matematik tayyorgarligiga qo'yiladigan talablar:** a) matematik ta'lim jarayonida o'quvchilarga beriladigan imkoniyatlar bayon etiladi; v) o'quvchilarning matematikadan egallashlari majbur bo'lgan bilim va malakalar, masalalar yechish ko'nikmalari ko'rsatiladi.

**Umumlashtirish-** obyektlar to'plamiga tegishli va bu obyektlarni birlashtiruvchi birorta xossa fikran ajratiladi.

**Hamkorlikda o'qitish** - mashg'ulotlar jarayonida talabalar bilan axborot, shaxsiy va kasbiy tajribalarni almashish asosidagi guruhi yo'qitish shakli

**Evrastiko'qitish** - o'qituvchi o'quvchilar bilan hamkorlikda hal etilishi zarur bo'lgan masalani aniqlab olishi. O'quvchilar esa mustaqil ravishda taklif etilgan masalani tadqiq etish jarayonida zaruriy bilimlarni o'zlashtirib oladilar va uning yechimi bo'yicha boshqa vaziyatlar bilan taqqoslaydi. O'rnatilgan masalani yechish davomida o'quvchilar ilmiy bilish metodlarini o'zlashtirib tadqiqotchilik faoliyatini olib borish ko'nikmasi tajribasini egallaydilar.

**Ellips-Tekislikda ixtiyori**

**Elektron darslik** - fanning o'quv hajmini to'liq qamragan va masofaviy yo'qitish hamda mustaqil o'rganish uchun kompyuter sxnologiyalariga asoslangan, mustaqil ta'lim olishga hamda fanga oid o'quv materiallar, ilmiy ma'lumotlarning har tomonlama samarali o'zlashtirishga mo'ljallangan bo'lib: o'quv va ilmiy

materiallar faqat verbal (matn) shaklda; o'quv materiallar verbal (matn) va ikki o'lchamli grafik shaklda; multimedia (ko'p axborotli) elementlari, ya'ni ma'lumot ikki-uch o'lchamli grafik ko'rinishda, ovozli, video, animasiya va qisman verbal (matn) shaklda; taktil (his qilinuvchi, seziladigan) xususiyatli, obektlarga nisbatan harakatlanish tasavvurini yaratadigan shaklda ifodalanadi.

**Elektron lug'at-an'anaviy "qog'ozli"** lug'atga mos keluvchi elektron axborot manbai. Kompyuter versiyada so'z yoki so'zlar guruhiga maxsus ajratilgan ko'rsatma bilan istalgan dasturdan chaqirilishi mumkin. An'anaviy lug'atlardan farqli ravishda elektron lug'at matn va grafikaviy tasvirlar bilan bir qatorda video va animasion lavhalar, tovush, musiqa va boshqalar bilan birga media-obyektlarning butun spektrlarini o'z ichiga olishi mumkin.

**Elektron nazorat (testlashtirish)** - elektron o'quv adabiyotining komponenti bo'lib, an'anaviy kompyutersiz testlashtirishning analogidir. Elektron testlashtirish holatida kompyuter test va uning natijalarini ko'rsatib beradi, bu bilan bog'liq bo'lgan algoritmlarni joriy qiladi. (Masalan, bajarilgan yoki o'tkazib yuborilgan topshiriqlarga qaytish imkoniyatining borligi yoki yo'qligi, bitta testga vaqtning chegaralanganligi va hokazo).

**Elektron testlar**-saqlangan, ishlov berilgan va baxolash uchun kompyuter yoki telekommunikasion texnikasi yordamida taqdim etiladigan testlar. Testlar berilishi o'rganilgan matnni talabaning qanchalik darajada o'zlashtirganligi o'z-o'zini baholash imkonini beradi

**Elektron topshiriqlar** - o'qituvchiga ta'lim oluvchilarning individul imkoniyatlarini hisobga olgan xolda mustaqil va nazorat ishlari uchun tartibga keltiradigan topshiriqlar majmuini o'zida aks ettiruvchi axborot manbasining muhim ko'rinishidir. Yaratilgan topshiriqlar ta'lim oluvchilarga an'anaviy «qog'oz» li va elektron variantlarida tavsiya etilishi mumkin.

**Elektron o'quv qo'llanma** – fanning o'quv hajmini qisman yoki to'liq qamragan va axborotning adaptasiya blokini o'z ichiga olgan bo'lib, masofaviy yo'qitish va mustaqil o'rganish uchun mo'ljallangan o'quv manbai.

**Elektron o'quv-metodik majmua** – davlat ta'lim standarti va fan dasturida belgilangan, bilim, ko'nikma, malaka va kompetensiyalarni shakllantirishni, o'quv jarayonini kompleks loyihalash asosida kafolatlangan natijalarni olishni, mustaqil bilim olish va o'rganishni hamda nazoratni amalga oshirishni ta'minlaydigan, talabaning ijodiy qobiliyatlarini rivojlantirishga yo'naltirilgan elektron o'quv – uslubiy manbalar, multimediali didaktik vositalar va materiallar, multimediali elektron ta'lim resurslari, multimediali baholash metodlari va mezonlarini o'z ichiga oladi.

**ADABIYOTLAR**

**RO‘YXATI**



## **ADABIYOTLAR RO‘YXATI**

### **Normativ-huquqiy hujjatlar**

1. O‘zbekiston Respublikasining Konstitusiyasi. – T.: O‘zbekiston, 2014.
2. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017 yil 7 fevraldagi “O‘zbekiston Respublikasini yanada rivojlantirish bo‘yicha Harakatlar strategiyasi to‘g‘risida”gi 4947-son Farmoni.
3. Mirziyoyev Sh.M. Milliy taraqqiyot yo‘limizni qat’iyat bilan davom ettirib, yangi bosqichga ko‘taramiz. T. 1. - Toshkent: O‘zbekiston.. 2017.
4. Mirziyoyev Sh.M. Buyuk kelajagimizni mard va oliyjanob xalqimiz bilan birga quramiz. - Toshkent: O‘zbekiston. 2017.
5. Mirziyoyev Sh.M. Qonun ustuvorligi va inson ma’nfaatlarini ta’minlash – yurt taraqqiyoti va xalq farovonligining garovi. O‘zbekiston Respublikasi Konstitusiyasi qabul qilinganining 24 yiliga bag‘ishlangan tantanali marosimidagi ma’ruzasi. - Toshkent: O‘zbekiston. 2017.
6. Mirziyoyev Sh.M. Erkin va farovon, demokratik O‘zbekiston davlatini birgalikda barpo etamiz. - Toshkent: O‘zbekiston. 2017.

### **Maxsus adabiyotlar**

1. A. A. Samarskiy, A. P. Mixaylov. Matematicheskoye modelirovaniye. M., Nauka, 1997.
2. S.P.Kapitsa, S.P.Kurdyumov, G.G.Malinetskiy. Sinergetika i prognozi budushego. –M., URSS, 2003.
3. Muzafarov X.A., Baklushin M.B., Abduraimov M.G. Matematicheskoye modelirovaniye. –T., Universitet. 2002.
4. Yu.Yu.Tarasevich. Matematicheskoye i kompyuternoye modelirovaniye. –M., URSS, 2003.
5. Vvedeniye v matematicheskoye modelirovaniye. Pod red. V. P. Trusova. -M., Logos, 2005.

6. M.I.Israilov. Hisoblash metodlari, I. Toshkent, O`zbekiston, 2003; Hisoblash metodlari, II. Toshkent, 2008.
7. D.Kiryanov MathCAD. S.Peterburg, «BXV». 2005.
8. Arnold V.I. Jyostkiye i myagkiye matematicheskiye modeli. -M., - MTSNMO. 2000.
9. Osipov G.V., Andreyev E.P. Metodi izmereniya v sotsiologii. M., 1977, Nauka.
10. Gorstko A.B. Poznakomtes s matematicheskim modelirovaniyem. M., Znaniye, 1991.
11. M.I.G`ulomov. Matematik modellastirish elementlari. “Buxoro”, 2001. -62 bet.
12. Bogolyubov A.N. Osnovi matematicheskogo modelirovaniya. –M., MGU.

### **Elektron ta’lim resurslari**

1. O‘zbekiston Respublikasi Maktabgacha va maktab ta’limi vazirligining elektron sayti: [www.uzedu.uz](http://www.uzedu.uz)
2. O‘zbekiston Respublikasi Oliy ta’lim, fan va innovatsiyalar vazirligining elektron sayti: [www.edu.uz](http://www.edu.uz)
3. Xalq ta’limi sohasida axborot-kommunikasiya texnologiyalarini rivojlantirish markazining elektron sayti: [www.multimediya.uz](http://www.multimediya.uz)
4. Oliy ta'lim tizimi kadrlarini qayta tayyorlash va malakasini oshirish instituti elektron sayti: [www.bimm.uz](http://www.bimm.uz)
5. Ziyonet ijtimoiy axborot ta’lim portalining elektron sayti: [www.ziyonet.uz](http://www.ziyonet.uz)