**ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ**

**МИРЗО УЛУҒБЕК НОМИДАГИ
ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ**

Ш.Ғ. ҚОСИМОВ, Т.Н. АЛИҚУЛОВ

ДИРИХЛЕ МАСАЛАСИНИ ЕЧИШДА КОМПЛЕКС АНАЛИЗ УСУЛЛАРИНИ ҚЎЛЛАШ

УСЛУБИЙ ҚЎЛЛАНМА

Тошкент - 2010

Услубий қўлланмада аналитик функцияларга оид масалалар, конформ акслантиришларга доир намунавий мисоллар ечилиши ва иккинчи тартибли дифференциал тенгламалар учун Дирихле масаласи баён этилган.

Ушбу услубий қўлланма университетларнинг “Амалий математика” йўналишлари бўйича бакалаврлар тайёрлайдиган факультет талабалари учун мўлжалланган.

В методическом пособии излагаются вопросы аналитических функций, примеры конформных отображений и задача Дирихле для дифференциальных уравнений второго порядка.

Данное методическое пособие предназначено для студентов университетов, обучающихся по специальности “Прикладная математика”.

In this methodic book are shown the questions of analytical functions, examples of conform mapping and the Dirichlet problem for differential equations of the second order.

Current methodic book is intended for the university students, who study in the faculty of “Applied mathematics”.

М у а л л и ф л а р:
физика–математика фанлари доктори **Қ о с и м о в Ш.Ғ.**
физика–математика фанлари номзоди **А л и қ у л о в Т.Н.**

М а съ у л м у ҳ а р р и р:
ф.–м. ф. д., профессор Холмухамедов О.Р.

Т а қ р и з ч и л а р:
ф.– м. ф. н., доцент Қаюмов Э.
ф.– м. ф. н., доцент Зикиров О.С.

Услубий қўлланма Мирзо Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий университети Илмий Кенгаши томонидан нашрга тавсия қилинган.
(2009 йил 29 декабрь, 6 – сонли баённома)

М у н д а р и ж а

Кириш

Маълумки, математик физика тенгламаларининг кўпгина масалалари турли хил усуллар билан ечилади. Жумладан, иссиқлик тарқалиши тенгламаси учун қўйилган Коши масаласининг ечими Фурье алмаштириши ёрдамида Пуассон формуласи орқали хосмас интегрални ҳисоблашга олиб келинади. Бундай аниқ интегралларни ҳисоблашда қолдиқлар назариясининг ўз ўрни бор.

Табиий фанларнинг ҳар хил соҳаларида учрайдиган кўпгина математик масалаларни ечиш учун комплекс ўзгарувчили функциялар назариясининг усуллари кенг ва унумли ҳолда қўлланилади. Жумладан, аналитик функцияларнинг қўлланилиши кўпгина ҳолларда Лаплас тенгламаси учун чегаравий масала ечимини аниқлашнинг содда усулларини беради. Бу комплекс ўзгарувчили аналитик функциялар ва икки ҳақиқий ўзгарувчили гармоник функция орасидаги мавжуд бўлган жипс боғлиқлик, ҳамда конформ акслантиришда Лаплас тенгламасининг инвариантлигида кўринади.

Ихтиёрий чегарланган соҳада классик Дирихле масаласи ечимининг мавжудлиги ҳақидаги масалани ечишда қўлланиладиган интеграл тенгламалар усули, варацион усул ёки гильберт фазоси усули билан биргаликда субгармоник функцияларнинг Перрон усули ҳам қўлланилади. Бу усул шар учун Дирихле масаласининг ечилиши ва максимум принципига асосланади. Шу усулни қўллаш йўли билан биз эллиптик типдаги тенгламалар учун Дирихле масаласининг ечилиши ҳақидаги саволларга жавоб берамиз.

Ушбу услубий қўлланма амалий математика ва информатика йўналишлари бўйича бакалаврлар тайёрлаш ўқув режасидаги асосий фанлардан бири “Математик физика тенгламалари” даги Дирихле масаласини ечишда “Комплекс анализ” усулларини қўллашга бағишланган.

1 - §. ЯГОНАЛИК ТЕОРЕМАСИ. АНАЛИТИК ДАВОМ ЭТТИРИШ

Фараз қилайлик, $f(z)$ функция G соҳада аналитик бўлсин. Агар $f(z)=(z-a)^n\cdot\varphi(z)$ $\left(a\neq\infty\right)$ бўлиб, $\varphi(z)$ функция a нуқтада аналитик ва $\varphi(a)\neq 0$ бўлса, a нуқта $f(z)$ функциянинг $n-$тартибли ноли дейилади. Агар $f(z)=z^{-n}\varphi_1(z)$ бўлиб, $\varphi_1(z)$ функция $z=\infty$ нуқтада аналитик ва $\varphi_1(\infty)\neq 0$ бўлса, $z=\infty$ нуқта $f(z)$ функциянинг $n-$тартибли ноли дейилади.

Ягоналик теоремаси деб аталувчи қуйидаги теоремани келтирамиз:

1 – теорема. *Агар $f(z)$ ва $g(z)$ функциялар G соҳада аналитик бўлиб, G соҳанинг ички a нуқтасига яқинлашувчи z_1, z_2, ... , z_n, ... нуқталар кетма–кетлигида бу функцияларнинг қийматлари ўзаро тенг бўлса, G соҳанинг барча нуқталарида $f(z)\equiv g(z)$ бўлади.*

1 – натижа. *Агар $f(z)$ функция G соҳада аналитик бўлиб, G соҳанинг ички a нуқтасига яқинлашувчи z_1, z_2, ... , z_n, ... нуқталар кетма–кетлигида бу функциянинг қийматлари нолга тенг бўлса, G соҳада $f(z)\equiv 0$ бўлади.*

2 – натижа. *Агар $f(z)$ ва $g(z)$ функциялар G соҳада аналитик бўлиб, G соҳада ётувчи бирор эгри чизиқда бу функцияларнинг қийматлари ўзаро тенг бўлса, G соҳада $f(z)\equiv g(z)$ бўлади.*

3 – натижа. *Агар $f(z)$ функция G соҳада аналитик ва $f(z)\not\equiv 0$ бўлса, бу функция G соҳанинг ихтиёрий чегараланган ёпиқ қисмида чекли сондаги нолга эга.*

4 – натижа. Агар *$f_1(z)$ ва $f_2(z)$ функциялар мос равишда G_1 ва G_2 соҳаларда аналитик бўлиб, $G=G_1\cap G_2\neq\varnothing$ бўлган соҳада $f_1(z)\equiv f_2(z)$ бўлса, у ҳолда*

$$F(z)=\begin{cases} f_1(z), & z\in G_1 \\ f_2(z), & z\in G_2 \end{cases}$$

шартни қаноатлантирувчи ягона аналитик $F(z)$ функция мавжуд бўлади.

Энди мисоллар қараймиз:

1 – мисол. $z=0$ нуқта атрофида аналитик бўлиб, $f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n^5}$ $(n\in N)$ шартни қаноатлантирувчи $f(z)$ функция мавжудми?

Ечиш. $g(z)=z^5$ функцияни қараймиз. Бу функция $G=\{z: \ |z|<2\}$ соҳада аналитикдир. G соҳада $n\to\infty$ да нолга интилувчи $z_n=\frac{1}{n}$, $(n\in N)$ кетма–кетликни қараймиз. $g(z_n)=g\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n^5}$ бўлганлиги учун ягоналик теоремасига асосан $g\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n^5}$ шартни қаноатлантирувчи функция ягона бўлиб, $\forall\ z\in G$ учун $f(z)\equiv g(z)\equiv z^5$ бўлади.

2 – мисол. $z=0$ нуқта атрофида аналитик бўлиб, $f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{n}{n+1}$ $(n\in N)$ шартни қаноатлантирувчи $f(z)$ функция мавжудми?

Ечиш. Фараз қилайлик, $g(z)$ функция $z=0$ нуқта атрофида аналитик бўлиб, $g\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{n}{n+1}$ $(n\in N)$ шартни қаноатлантирсин. $g(z)$ аналитик функция бўлганлиги учун уни $z=0$ нуқта атрофида даражали қаторга ёйиш мумкин:

$$g(z)=c_0+c_1z+c_2z^2+\ldots+c_kz^k+\ldots$$

$$g\left(\frac{1}{n}\right)=c_0+c_1\frac{1}{n}+c_2\frac{1}{n^2}+\ldots+c_k\frac{1}{n^k}+\ldots=\frac{n}{n+1}. \qquad (1.1)$$

Охирги тенгликдан $c_k \ (k \in N)$ коэффициентларни аниқлаймиз. (1.1) тенгликда $n \to \infty$ да лимитга ўтсак, $c_0 = 1$ ни ҳосил қиламиз. У ҳолда

$$\frac{c_1}{n} + \frac{c_2}{n^2} + \ldots + \frac{c_k}{n^k} + \ldots = \frac{n}{n+1} - 1 = -\frac{1}{n+1},$$

$$c_1 + \frac{c_2}{n} + \ldots + \frac{c_k}{n^{k-1}} + \ldots = -\frac{n}{n+1}.$$

Бу тенгликдан $n \to \infty$ да лимитга ўтсак, $c_1 = -1$ ни ҳосил қиламиз. Натижада

$$\frac{c_2}{n} + \ldots + \frac{c_k}{n^{k-1}} + \ldots = -\frac{n}{n+1} + 1 = \frac{1}{n+1},$$

$$c_2 + \frac{c_3}{n} + \ldots + \frac{c_k}{n^{k-1}} + \ldots = \frac{n}{n+1}.$$

Кўриниб турибдики, $n \to \infty$ да лимитга ўтсак, $c_2 = 1$ дир. Бу жараённи давом эттириб, $c_0 = 1, \ c_1 = -1, \ c_2 = 1,$ $c_3 = -1, \ldots, c_k = (-1)^k, \ldots$ ларни ҳосил қиламиз. Демак,

$$g(z) = 1 - z + z^2 - z^3 + \ldots + (-1)^k z^k + \ldots = \frac{1}{1+z}, \ z \in \{z : \ |z| < 1\}.$$

Ҳақиқатдан ҳам, $g(z) = \dfrac{1}{1+z}$ функция $z = 0$ нуқта атрофида аналитик бўлиб, $g\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{n}{n+1}$ шартни қаноатлантиради. $z_n = \dfrac{1}{n}, \ (n \in N)$ кетма–кетликнинг лимити $z = 0$ нуқта бўлганлиги учун ягоналик теоремасига кўра, $g\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{n}{n+1}$ шартни қаноатлантирувчи функция ягона бўлиб, $z = 0$ нуқтанинг атрофида $g(z) \equiv \dfrac{1}{1+z} \equiv f(z)$ бўлади.

3 – мисол. $z=0$ нуқта атрофида аналитик бўлиб, $f\left(\frac{1}{n}\right)=f\left(-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n^9}$ $\left(n\in N\right)$ шартни қаноатлантирувчи функция мавжудми?

Ечиш. $z_n=\frac{1}{n}$, $\left(n\in N\right)$ кетма–кетликни ўзида сақлайдиган $z=0$ нуқтанинг атрофини G билан белгилаймиз. $z_n=\frac{1}{n}$, $\left(n\in N\right)$ кетма–кетликнинг лимити $z=0$ нуқта G соҳага қарашлидир. G соҳада аналитик бўлган $g(z)=z^9$ функция қараймиз. Бу функция $z_n=\frac{1}{n}$ нуқталарда $g\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n^9}$ қийматларни қабул қилади. Ягоналик теоремасига кўра мисол шартларини қаноатлантирувчи $g(z)=z^9$ функциядан бошқа функция мавжуд бўлиши мумкин эмас. Демак, $f(z)\equiv g(z)\equiv z^9$. Лекин, $f(z)=z^9$ функция $-\frac{1}{n}$ нуқталарда $-\frac{1}{n^9}$ қийматларни қабул қилади. Шу сабабдан, G соҳада аналитик бўлиб, $f\left(\frac{1}{n}\right)=f\left(-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n^9}$ $\left(n\in N\right)$ шартни қаноатлантирувчи функция мавжуд эмас.

4 – мисол. Ихтиёрий икки t ва z сонлар учун $\left(t,\ z\in C\right)$

$$\sin(t+z)=\sin t\cdot\cos z+\cos t\cdot\sin z \tag{1.2}$$

формулани исботланг.

Ечиш. $f(t,z)=\sin(t+z)$ ва $g(t,z)=\sin t\cdot\cos z+\cos t\cdot\sin z$ функцияларни қараймиз. $f(t,\ z)$ ва $g(t,\ z)$ функциялар t ҳамда z ўзгарувчилар бўйича комплекс текисликда аналитикдир. Агар t ва z ўзгарувчилар ҳақиқий бўлса, (1.2) тенглик тригонометриядан маълум бўлган формулани беради. z фиксирланган ҳақиқий сон бўлсин. $f_1(t)=f(t,\ z)$,

$g_1(t) = g(t,\ z)$ деб белгилаймиз. У ҳолда, 2–натижага асосан, ҳақиқий ўқда $f_1(t) = g_1(t)$ бўлганлиги учун, ихтиёрий комплекс t сон учун $f_1(t) = f(t,\ z) = g(t,\ z) = g_1(t)$ тенглик ўринли. Энди t комплекс сонни фиксирлаймиз. $f_2(z) = f(t,\ z)$, $g_2(z) = g(t,\ z)$ деб белгилаймиз. Ҳақиқий ўқда $f_2(z) = g_2(z)$ бўлганлиги учун 2–натижага мувофиқ ихтиёрий $z \in C$ учун $f_2(z) \equiv g_2(z)$ ўринлидир, яъни ихтиёрий $t,\ z \in C$ учун $f(t,\ z) \equiv g(t,\ z)$ бўлади.

Таъриф. *Қуйидаги шартлар бажарилган бўлсин:*

1) E тўпламда $f(z)$ функция аниқланган.

2) E тўпламни сақловчи D соҳада $F(z)$ функция аналитик.

3) Барча $z \in E$ учун $F(z) \equiv f(z)$. У ҳолда $F(z)$ функцияга E тўпламдан D соҳагача $f(z)$ функциянинг аналитик давоми дейилади.

2 – теорема. *E тўплам D соҳага қарашли a лимитик нуқтага эга бўлсин. У ҳолда E тўпламдан D соҳагача аналитик давом эттириш ягонадир.*

5 – мисол. $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$ функциянинг аналитик давомини топамиз. Бу қатор $E = \{z : |z| < 1\}$ доирада яқинлашувчи ва аналитик функциядан иборат. $|z| < 1$ учун $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$ бўлади. $F(z) = \dfrac{1}{1-z}$ функция $D = \{z : |z-1| > 0\}$ соҳада аналитикдир. Шунинг учун, $F(z)$ функция $f(z)$ функциянинг E тўпламдан D соҳага ягона аналитик давомидан иборат.

$f(z)$ аналитик функция D берилиш соҳаси билан биргаликда элемент деб аталади ва $(f,\ D)$ шаклида белгиланади. $(f_1,\ D_1)$ ва $(f_2,\ D_2)$ элементлар учун $d = D_1 \cap D_2 \neq \varnothing$ соҳадаги барча $z \in d$ учун $f_1(z) = f_2(z)$

тенглик ўринли бўлса, у ҳолда бу элементларнинг бири иккинчисининг бевосита аналитик давоми деб аталади.

Агар ҳар бир (f_k, D_k) элемент (f_{k-1}, D_{k-1}) элементнинг бевосита аналитик давоми бўлса, у ҳолда

$$(f_0, D_0),\ (f_1, D_1),\ ...,(f_m, D_m)$$

элементларнинг чекли тўпламига занжир дейилади.

Агар (f, D) элементларнинг бўш бўлмаган $\Im$ тўпламининг ихтиёрий иккита элементи учун биттаси иккинчисидан ҳамма элементлари $\Im$ га қарашли бўлган занжир ёрдамида ҳосил қилинса, у ҳолда $\Im$ тўпламга умумий аналитик функция дейилади.

Ҳар бир элементнинг барча аналитик давомини сақлайдиган умумий аналитик функцияга тўла аналитик функция дейилади.

z_0 ва z_* нуқталарни туташтирувчи L – Жордан чизиғи берилган бўлсин. Агар L да $z_1, z_2, ..., z_k$ нуқталарнинг чекли системасини кўрсатиш мумкин бўлиб, қуйидаги z_0 дан z_* га йўналган

$$(f_0, D_0),\ (f_1, D_1),\ ...,(f_k, D_k),\ \ (f_0(z) = f(z),\ z \in D_0)$$

занжир учун ҳар бир D_i соҳа ичида L – чизиқнинг

$$\overset{\cup}{z_i z_{i+1}},\ i = 0,\ 1,\ ...,\ k;\ z_{k+1} = z_*$$

ёйи ётса, у ҳолда z_0 нуқтадан z_* нуқтага L – чизиқ бўйлаб $f(z)$ функция аналитик давом этади дейилади.

Монодром ҳақидаги қуйидаги теорема ўринлидир.

3 – теорема. *Агар бир боғламли D соҳадаги ҳар қандай Жордан чизиғи бўйлаб $f(z)$ функцияни аналитик давом эттириш мумкин бўлса, у ҳолда бу функция D соҳада бир қийматлидир.*

4 – теорема. $\left|\arg\zeta - \varphi\right| < \alpha,\ \alpha \le \dfrac{\pi}{2}$ *бурчакда* $f(\zeta)$ *функция аналитик ва чегараланган бўлсин. У ҳолда*

$$F(z)=\int_{0}^{\infty e^{i\varphi}} f(\zeta)\cdot e^{-z\zeta}d\zeta$$

функцияни $\left|\arg z+\varphi\right|<\dfrac{\pi}{2}+\alpha$ *бурчакка аналитик давом эттириш мумкин.*

6 – мисол. Ҳақиқий $z=x>0$ мусбат сонлар учун $F(z)$ функция

$$F(z)=\int_{0}^{+\infty}\frac{e^{-z\zeta}}{\sqrt{1+\zeta^2}}d\zeta \qquad \left(\sqrt{1+\zeta^2}>0\right)$$

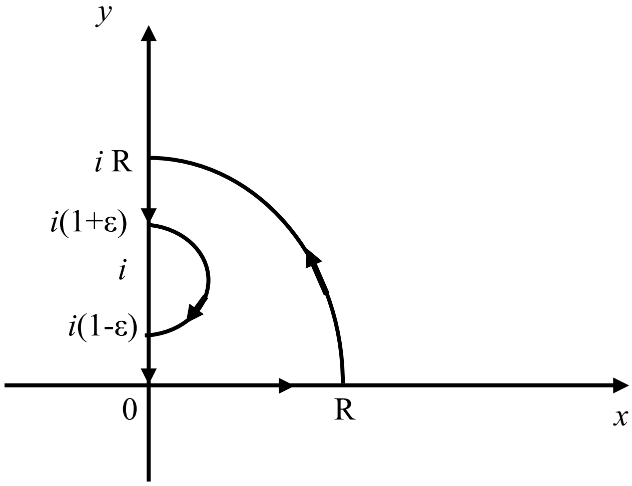
тенглик билан берилган бўлсин. Бу функцияни $\left|\arg z\right|<\pi$ соҳагача аналитик давом эттирамиз. $f(\zeta)=\dfrac{1}{\sqrt{1+\zeta^2}}$ функция $\operatorname{Re}\zeta>0$ ярим текисликда аналитик ва ҳар бир $\left|\arg\zeta\right|\le\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ бурчакда чегаралангандир. $\delta>0,\ \operatorname{Re}z\ge\delta,\ \zeta\in[0,+\infty)$ бўлсин. У ҳолда $\varphi(\zeta,z)=\dfrac{\zeta\cdot e^{-z\zeta}}{\sqrt{1+\zeta^2}}$ функция учун

$$\left|\varphi(\zeta,z)\right|=\left|\frac{\zeta\cdot e^{-z\zeta}}{\sqrt{1+\zeta^2}}\right|=\left|\frac{\zeta\cdot e^{-(x+iy)\zeta}}{\sqrt{1+\zeta^2}}\right|\le\frac{\zeta\cdot e^{-x\zeta}}{\sqrt{1+\zeta^2}}\le\frac{\zeta\cdot e^{-\delta\zeta}}{\sqrt{1+\zeta^2}}$$

бўлади. Интеграл

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{\zeta\cdot e^{-\delta\zeta}}{\sqrt{1+\zeta^2}}d\zeta<\infty$$

яқинлашувчи бўлганлиги учун Вейерштрасс аломатига кўра $\int\limits_{0}^{+\infty}\varphi(\zeta,z)\,d\zeta$ интеграл $\operatorname{Re}z\ge\delta$ ярим текисликда z бўйича текис яқинлашади ва $F(z)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-z\zeta}}{\sqrt{1+\zeta^2}}d\zeta$ функция бу $\operatorname{Re}z\geq\delta$ ярим текисликда аналитикдир. $\delta>0$ сон ихтиёрий бўлганлиги учун $F(z)$ функция $\operatorname{Re}z>0$ ўнг ярим текисликда аналитикдир. Хўш савол туғилади: бу $F(z)$ функцияни $\operatorname{Re}z>0$ ярим текисликдан кенгроқ соҳага давом эттириш мумкинми?. Шу мақсадда қуйидаги $C_{R,\,\varepsilon}$ ёпиқ контурни қурамиз.



$C_{R,\,\varepsilon}-$контур $[0,\ R]$ кесма, $\gamma_R: |\zeta|=R,\ \ 0\leq\arg\zeta\leq\frac{\pi}{2}$ айлана ёйи, $\left[iR,\,(1+\varepsilon)i\right],\ \left[(1-\varepsilon)i,\ 0\right]$ кесмалар ва $\gamma'_\varepsilon:\ |\zeta-i|=\varepsilon,\ \frac{\pi}{2}\geq\arg(\zeta-i)\geq-\frac{\pi}{2}$ айлана ёйларидан ташкил топган. Коши теоремасига кўра,

$$\int\limits_{C_{R,\,\varepsilon}}\frac{e^{-z\zeta}}{\sqrt{1+\zeta^2}}d\zeta=0$$

бўлади. Бундан ташқари, $z=re^{i\varphi}$, $\zeta=\operatorname{Re}^{i\psi}$, $e^{-z\zeta}=e^{-rR\cdot e^{i(\varphi+\psi)}}$ бўлгани учун $\left|e^{-z\zeta}\right|=e^{-rR\cdot\cos(\varphi+\psi)}$.

Шунинг учун

$$\left|\int\limits_{\gamma_R}\frac{e^{-z\zeta}}{\sqrt{1+\zeta^2}}d\zeta\right|=\left|\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-rR\cdot e^{i(\varphi+\psi)}}}{\sqrt{1+R^2\cdot e^{2i\psi}}}\cdot iR\cdot e^{i\psi}d\psi\right|\le$$

$$\le\frac{R}{\sqrt{R^2-1}}\cdot\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-rR\cdot\cos(\varphi+\psi)}d\psi$$

бўлади, бунда $R>1$. Агар $|\varphi+\psi|\le\alpha<\frac{\pi}{2}$ бўлса, $\cos(\varphi+\psi)\ge\cos\alpha>0$ бўлади, яъни $0\le\psi\le\frac{\pi}{2}$ бўлгани учун $-\alpha\le\varphi+\psi\le\alpha$ тенгсизликдан $-\alpha-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\alpha$ ни ҳосил қиламиз. $\alpha<\frac{\pi}{2}$ ихтиёрий сон бўлганлиги учун $-\pi<\varphi<\frac{\pi}{2}$ учун $\lim\limits_{R\to+\infty}\int\limits_{\gamma_R}\frac{e^{-z\zeta}}{\sqrt{1+\zeta^2}}d\zeta=0$ бўлади. Худди шунингдек,

$$\left|\int\limits_{\gamma'_\varepsilon}\frac{e^{-z\zeta}}{\sqrt{1+\zeta^2}}d\zeta\right|=\left|\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-r\varepsilon\cdot e^{i(\varphi+\psi)}}}{\sqrt{1+\varepsilon^2\cdot e^{2i\psi}}}\cdot i\varepsilon\cdot e^{i\psi}d\psi\right|\le$$

$$\le\frac{\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}e^{-r\varepsilon\cdot\cos(\varphi+\psi)}d\psi$$

бўлади. Бундан

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_{\gamma'_\varepsilon}\frac{e^{-z\zeta}}{\sqrt{1+\zeta^2}}d\zeta=0$$

ҳосил бўлади. Ҳамда

$$\left|\int_{iR}^{i(1+\varepsilon)} \frac{e^{-z\zeta}}{\sqrt{1+\zeta^2}}\,d\zeta\right| = \left|\int_{iR}^{i(1+\varepsilon)} \frac{e^{-r|\zeta|\cdot e^{i(\varphi+\psi)}}}{\sqrt{1+\zeta^2}}\,d\zeta\right| =$$

$$\left|-i\int_{1+\varepsilon}^{R} \frac{e^{-rt\cdot e^{i(\varphi+\frac{\pi}{2})}}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt\right| \le \int_{1+\varepsilon}^{R} \frac{e^{-rt\cdot\cos(\varphi+\frac{\pi}{2})}}{\sqrt{t^2-1}}\,dt$$

бўлади.

Худди шунингдек,

$$\left|\int_{i(1-\varepsilon)}^{0} \frac{e^{-z\zeta}}{\sqrt{1+\zeta^2}}\,d\zeta\right| \le \int_{0}^{1-\varepsilon} \frac{e^{-rt\cdot\cos(\varphi+\frac{\pi}{2})}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

бўлади.

Агар $\left|\varphi+\frac{\pi}{2}\right| \le \alpha < \frac{\pi}{2}$, яъни $-\alpha-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \alpha-\frac{\pi}{2}$ бўлса, у ҳолда

$$F_1(z) = \int_{0}^{+i\infty} \frac{e^{-z\zeta}}{\sqrt{1+\zeta^2}}\,d\zeta$$

интеграл яқинлашувчи ва аналитик функциядан иборат. $\alpha < \frac{\pi}{2}$ ихтиёрий сон бўлганлиги учун $-\pi < \varphi < 0$ пастки ярим текисликда $F_1(z)$ аналитик функциядан иборат. $x>0,\ y<0$ учун

$$\left(\int_{0}^{R} + \int_{\gamma_R} + \int_{iR}^{(1+\varepsilon)i} + \int_{\gamma'_\varepsilon} + \int_{(1-\varepsilon)i}^{0}\right)\frac{e^{-z\zeta}}{\sqrt{1+\zeta^2}}\,d\zeta = 0$$

тенгликда $R\to+\infty,\ \varepsilon\to+0$ да лимитга ўтсак, $x>0,\ y<0$ учун $F(z)=F_1(z)$ тенгликка эга бўламиз.

$$\Phi_1(z)=\begin{cases} F(z), & \text{агар} \quad \operatorname{Re} z>0 \quad \text{бўлса} \\ F_1(z), & \text{агар} \quad \operatorname{Im} z<0 \quad \text{бўлса} \end{cases}$$

функцияни қараймиз. Ягоналик теоремасига кўра $\Phi_1(z)$ функция $-\pi<\arg z<\dfrac{\pi}{2}$ соҳада аналитикдир.

Аналогик равишда $C_{R,\,\varepsilon}$ ёпиқ контурни ўзгартириб, $x>0,\ y>0$ учун $F(z)=F_2(z)$ тенгликка эга бўламиз, бунда

$$F_2(z)=\int_0^{-i\infty}\frac{e^{-z\zeta}}{\sqrt{1+\zeta^2}}d\zeta$$

бўлиб, $\operatorname{Im} z>0$ юқори ярим текисликда аналитикдир.

$$\Phi_2(z)=\begin{cases} F(z), & \text{агар} \quad \operatorname{Re} z>0 \quad \text{бўлса} \\ F_2(z), & \text{агар} \quad \operatorname{Im} z>0 \quad \text{бўлса} \end{cases}$$

функция $-\dfrac{\pi}{2}<\arg z<\pi$ соҳада аналитикдир. Шундай қилиб, $\operatorname{Re} z>0$ учун $\Phi_1(z)=\Phi_2(z)$ бўлиб,

$$\Phi(z)=\begin{cases} \Phi_1(z), & \text{агар} \quad -\pi<\arg z<\dfrac{\pi}{2} \quad \text{бўлса} \\[2ex] \Phi_2(z), & \text{агар} \quad -\dfrac{\pi}{2}<\arg z<\pi \quad \text{бўлса} \end{cases}$$

функция $\left|\arg z\right|<\pi$ соҳада аналитикдир. Шунинг учун $\Phi(z)$ функция $F(z)$ функциянинг $E=\left(0,\,+\infty\right)$ тўпламдан $\left|\arg z\right|<\pi$ соҳагача аналитик давомидан иборат.

5 – теорема. *$\varphi(\zeta)$ функция $r\le\left|\zeta\right|\le R$ ҳалқада аналитик бўлсин. Агар $f(z)$ функция $\left|z\right|<r$ доирада*

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\left|\zeta\right|=r}(\zeta-z)^m\cdot\varphi(\zeta)\,d\zeta \quad \left(\left|z\right|<r\right),$$

бунда $m-$ *бутун сон, формула билан берилган бўлса, у ҳолда бу функцияни* $|z|<R$ *доирага давом эттириш мумкин ва унинг давоми* $F(z)$ *функция*

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=R}(\zeta-z)^m\cdot\varphi(\zeta)\,d\zeta \qquad \left(|z|<R\right),$$

формула билан аниқланади.

7 – мисол. $|z|<1$ доирадан бутун C текисликка

$$f(z)=\int\limits_{|\zeta|=1}e^{a\left(\zeta+\frac{1}{\zeta}\right)}\cdot\frac{d\zeta}{\zeta-z}$$

функцияни аналитик давом эттириш мумкин эканлигини исботлаймиз. 5 – теоремага кўра, $\varphi(\zeta)=e^{a(\zeta+\frac{1}{\zeta})}$ функция $1\le|\zeta|\le R$, бунда $1<R$ – ихтиёрий сон, ҳалқада аналитикдир. Шунинг учун

$$F(z)=\int\limits_{|\zeta|=R}e^{a(\zeta+\frac{1}{\zeta})}\cdot\frac{d\zeta}{\zeta-z}$$

функция $f(z)$ функциянинг $|z|<R$ доирага аналитик давомидан иборат. $R>1$– ихтиёрий сон бўлганлиги учун $f(z)$ функцияни $C=\{z:|z|<\infty\}$ соҳага давом эттириш мумкин бўлади.

6 – теорема. $\varphi(t)$ *функция* $|t|<1$ *доирада аналитик ва* $\varphi(t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n t^n$ *бўлиб,* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n$ *қатор яқинлашувчи бўлсин. У ҳолда* $\operatorname{Re}z>0$ *учун* $f(z)=\int\limits_0^1 t^{z-1}\cdot\varphi(t)\,dt$ *формула билан* *аниқланган* $f(z)$ *функцияни* $D=\{z:\ z\neq 0,-1,-2,...\}$ *соҳага аналитик давом эттириш мумкин ва бу* $F(z)$ *давоми*

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n+z}$$

формула билан аниқланади.

8 – мисол. $f(z)=\int\limits_0^1 t^{z-1}\cdot e^{-t}\,dt$ функциянинг аналитик давоми

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(n+z)}$$

эканлигини исбот қиламиз. Ҳақиқатдан ҳам, 6 – теоремага кўра,

$$\varphi(t)=e^{-t}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^n}{n!},\quad c_n=\frac{(-1)^n}{n!}$$

бўлиб, теорема шарти ўринли бўлганлиги учун

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n+z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\left(n+z\right)}$$

функция $f(z)$ функциянинг $\operatorname{Re} z>0$ ўнг ярим текисликдан $D=\{z:\ z\neq 0,-1,-2,...\}$ соҳага аналитик давомидан иборат.

Мустақил ечиш учун мисоллар

Қуйидаги мисолларда $z=0$ нуқта атрофида аналитик бўлиб, берилган шартларни қаноатлантирувчи функция мавжудлиги аниқлансин:

1) $f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1+2n}{1-3n},\ \ n\in N$.

2) $f\left(\frac{1}{n}\right)=f\left(-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2n^2+5},\ \ n\in N$.

3) $f\left(\dfrac{1}{n}\right)=e^{\frac{1}{2n+1}}, \quad n\in N.$

Қуйидаги функцияларни кўрсатилган D соҳагача аналитик давом эттириш мумкин эканлигини исботланг:

4) $f(z)=\int\limits_0^\infty \dfrac{e^{-z\zeta}}{1+\zeta^2}d\zeta; \quad D=\left\{z:\ |\arg z|<\pi\right\}.$

5) $f(z)=\int\limits_0^\infty \dfrac{e^{-z\zeta}}{ch\,a\zeta}d\zeta, \quad a>0; \quad D=\left\{z:\ |\arg(z+a)|<\pi\right\}.$

6) $f(z)=\int\limits_0^\infty \dfrac{e^{-z\zeta^2}}{1+\zeta^4}d\zeta, \quad a>0; \quad D=\left\{z:\ |\arg z|<\pi\right\}.$

7) $f(z)=\int\limits_{|\zeta|=1} e^{a(\zeta+\frac{1}{\zeta})}\cdot\dfrac{d\zeta}{\zeta-z}, \quad \left(|z|>1\right); \quad D=\left\{z:\ |z|>0\right\}.$

8) $f(z)=\int\limits_{|\zeta|=2} \dfrac{\cos(\zeta+\frac{1}{\zeta})}{\zeta^2+1}\cdot\dfrac{d\zeta}{(\zeta-z)^2},$

$\left(|z|<2\right); \quad D=\left\{z:\ |z|<\infty\right\}.$

Қуйидаги $f(z)$ функциянинг аналитик давоми $F(z)$ функция эканлигини исботланг:

9) $f(z)=\int\limits_1^\infty \dfrac{t^{z-1}}{t^2+1}dt; \quad F(z)=\sum\limits_{n=1}^\infty \dfrac{(-1)^n}{z-2n}.$

10) $f(z)=\int\limits_0^\infty \dfrac{e^{-\alpha t z}}{e^{-t}+1}dt, \quad \alpha>0; \quad F(z)=\sum\limits_{n=0}^\infty \dfrac{(-1)^n}{n+\alpha\cdot z}.$

11) $f(z)=\int\limits_0^\infty \dfrac{t\,e^{-tz}}{1-e^{-t}}dt; \quad F(z)=\sum\limits_{n=0}^\infty \dfrac{1}{(n+z)^2}.$

2 - §. ЛОРАН ҚАТОРИ

Комплекс текисликда a фиксирланган нуқта бўлсин.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n \tag{2.1}$$

қаторга Лоран қатори дейилади, бу ерда c_n – қандайдир сонлар (комплекс) бўлиб, Лоран қаторининг коэффициентлари дейилади. Агар z нуқтада

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n, \quad \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n(z-a)^n \tag{2.2}$$

қаторлар яқинлашувчи бўлса, бу нуқтада (2.1) қатор ҳам яқинлашувчи бўлади. Бундан кўринадики, (2.1) қаторнинг яқинлашиш соҳаси (2.2) қаторлар яқинлашиш соҳаларининг умумий қисмидан иборатдир. $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ қатор маркази a нуқтада бўлган R_1 радиусли доирада яқинлашади ($R_1 = 0$ ёки $R_1 = \infty$ бўлиши ҳам мумкин). Бу $|z-a| < R_1$ доиранинг ичида $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ қатор қандайдир $f_1(z)$ аналитик функцияга яқинлашади. $\sum_{n=-1}^{-\infty} c_n(z-a)^n$ қатор $|z-a| > \frac{1}{R_0} = R_2$ соҳанинг барча нуқталарида қандайдир $f_2(z)$ аналитик функцияга яқинлашади (бу ерда R_0 эса $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}W^n$ қаторнинг яқинлашиш радиуси, $W = \frac{1}{z-a}$). Агар $R_2 < R_1$ бўлса, (2.1) қатор $R_2 < |z-a| < R_1$ ҳалқада қандайдир $f(z)$ аналитик функцияга яқинлашади.

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\cdot(z-a)^n, \quad R_2<|z-a|<R_1 \quad . \tag{2.3}$$

Юқоридаги (2.2) қаторларнинг биринчисига Лоран қаторининг тўғри қисми ва иккинчисига эса, унинг бош қисми дейилади.

Теорема. $R_2<|z-a|<R_1$ *ҳалқада аналитик* $f(z)$ *функция ихтиёрий ёпиқ* $\rho_2\le|z-a|\le\rho_1$ $\left(R_2<\rho_2,\ \rho_1<R_1\right)$ *ҳалқада текис яқинлашувчи (2.3) Лоран қаторига бир қийматли ёйилади,* c_n *коэффициентлари*

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\cdot\int_\Gamma\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}} \quad \left(n=0,\ \pm1,\ \pm2,...\right)$$

формулалар билан ҳисобланади (бу ерда $\Gamma-$*ҳалқа ичидаги маркази* a *нуқтада бўлган ихтиёрий айлана).*

Агар $a=\infty$ бўлса, бу нуқта атрофида $f(z)$ функциянинг Лоран қаторига ёйилмаси қуйидагичадир:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_nz^n=\sum_{n=1}^{\infty}c_nz^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_{-n}}{z^n} \quad .$$

Ўнг томондаги биринчи қатор $a=\infty$ нуқта атрофида Лоран қаторининг бош қисми, иккинчиси тўғри қисмидир.

Қуйидаги функциялар берилган ҳалқаларда $z-a$ нинг даражалари бўйича Лоран қаторига ёйилсин:

1 – мисол. $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}, \quad 1<|z|<2,\ a=0$.

Ечиш. Изланаётган қаторни қуйидагича ҳосил қиламиз:

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=-\frac{1}{2\left(1-\frac{z}{2}\right)}-\frac{1}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)}\ ,$$

бунда $|z|<2$ бўлганлиги учун

$$\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2^2}+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}$$

ва $1<|z|$ бўлганлиги учун

$$\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n}$$

бўлади. У ҳолда

$$f(z)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}\ .$$

2 – мисол. $f(z)=\dfrac{1}{z(z-4)^2},\ 0<|z|<4,\ a=0\ .$

Ечиш. Аввал $\dfrac{1}{z-4}$ функцияни $0<|z|<4$ халқада Лоран қаторига ёямиз:

$$\frac{1}{z-4}=-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{4}}=-\frac{1}{4}\left(1+\frac{z}{4}+\frac{z^2}{4^2}+...+\frac{z^n}{4^n}+...\right)=$$

$$=-\frac{1}{4}-\frac{z}{4^2}-...-\frac{z^n}{4^{n+1}}-...=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{4^{n+1}}.$$

Ҳосил бўлган қатор $0\le|z|<4$ доиранинг ичида текис яқинлашганлиги учун Вейерштрасс теоремасига мувофиқ уни ҳадлаб дифференциаллаш мумкин:

$$-\frac{1}{(z-4)^2}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot z^{n-1}}{4^{n+1}}$$

ёки $\dfrac{1}{(z-4)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n\cdot z^{n-1}}{4^{n+1}}$. У ҳолда

$$\frac{1}{z(z-4)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot z^{n-2}}{4^{n+1}}$$

бўлади.

3 – мисол. $f(z)=\dfrac{1}{z(z-3)},\ 1<\left|z-1\right|<2,\ a=1$.

Ечиш. $\dfrac{1}{z\left(z-3\right)}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{z-3}-\dfrac{1}{z}\right)$ бўлганлиги учун $\dfrac{1}{z-3}$ ва $\dfrac{1}{z}$ функцияларни алоҳида қаторга ёямиз:

$$\frac{1}{z-3}=\frac{1}{(z-1)-2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z-1}{2}}=$$

$$-\frac{1}{2}\left(1+\frac{z-1}{2}+\frac{(z-1)^2}{2^2}+\ldots+\frac{(z-1)^n}{2^n}+\ldots\right)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{2^{n+1}},$$

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{z-1+1}=\frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{1-\left(-\dfrac{1}{z-1}\right)}=$$

$$=\frac{1}{z-1}\left(1-\frac{1}{z-1}+\frac{1}{\left(z-1\right)^2}-\ldots+\frac{\left(-1\right)^n}{\left(z-1\right)^n}+\ldots\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n-1}}{\left(z-1\right)^n}.$$

У ҳолда $$\frac{1}{z(z-3)}=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(z-1)^n}-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{2^{n+1}}.$$

4 – мисол. $f(z)=z^2\sin b\dfrac{z+1}{z},\ 0<\left|z\right|<\infty,\ a=0$.

Ечиш. $$z^2\sin b\frac{z+1}{z}=z^2\sin b\left(1+\frac{1}{z}\right)=$$

$=z^2\sin b\cdot\cos\dfrac{b}{z}+z^2\cos b\cdot\sin\dfrac{b}{z}$ бўлганлиги учун $z^2\cdot\cos\dfrac{b}{z}$

ва $z^2\cdot\sin\dfrac{b}{z}$ функцияларни алоҳида қаторга ёямиз:

$$z^2\cdot\cos\frac{b}{z}=z^2\left(1-\frac{b^2}{2!z^2}+\frac{b^4}{4!z^4}-...+\left(-1\right)^n\cdot\frac{b^{2n}}{\left(2n\right)!z^{2n}}+...\right)=$$

$$=z^2-\frac{b^2}{2!}+\frac{b^4}{4!z^2}-...+(-1)^n\cdot\frac{b^{2n}}{(2n)!z^{2n-2}}+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot b^{2n}}{(2n)!z^{2n-2}},$$

$$z^2\sin\frac{b}{z}=$$

$$=z^2\left(\frac{b}{z}-\frac{b^3}{3!z^3}+\frac{b^5}{5!z^5}-...+(-1)^{n-1}\cdot\frac{b^{2n-1}}{(2n-1)!z^{2n-1}}+...\right)=$$

$$=bz-\frac{b^3}{3!z}+\frac{b^5}{5!z^3}-...+(-1)^{n-1}\cdot\frac{b^{2n-1}}{(2n-1)!z^{2n-3}}+...=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot b^{2n-1}}{(2n-1)!z^{2n-3}}.$$

У ҳолда

$$z^2\sin b\frac{z+1}{z}=\sin b\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot b^{2n}}{(2n)!z^{2n-2}}+\cos b\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot b^{2n-1}}{(2n-1)!z^{2n-3}}$$

тенгликни ҳосил қиламиз.

5 – мисол. $f(z)=\dfrac{z}{4+z^3},\ \ a=\infty.$

Ечиш. $a=\infty$ нуқта атрофида $|z|>\sqrt[3]{4}$ бўлганлиги учун

$$\frac{1}{4+z^3}=\frac{1}{z^3}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{4}{z^3}\right)}=$$

$$=\frac{1}{z^3}\left(1+\left(-\frac{4}{z^3}\right)+\left(-\frac{4}{z^3}\right)^2+\ldots+\left(-\frac{4}{z^3}\right)^n+\ldots\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 4^n}{z^{3n+3}}$$

тенгликдан қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\frac{z}{4+z^3}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 4^n}{z^{3n+2}}\ .$$

Мустақил ечиш учун мисоллар

1) $\dfrac{1}{(z-2)(z^2+1)},\ 1<|z|<4,\ a=0$.

2) $\dfrac{2}{1-z^2},\ 1<|z+2|<3,\ a=-2$.

3) $\dfrac{e^{\frac{1}{z-1}}}{z-2},\ 0<|z-1|<1,\ a=1$.

3 - §. БИР ҚИЙМАТЛИ ФУНКЦИЯЛАРНИНГ ЯККАЛАНГАН МАХСУС НУҚТАЛАРИ

Барча элементар функциялар ва кўпчиллик махсус функциялар яккаланган махсус нуқталарга эгадир.

1 – таъриф. *Агар бирор G соҳада аниқланган $f(z)$ функция $z=a$ нуқтада аналитик бўлса, $z=a$ нуқта $f(z)$ функциянинг тўғри нуқтаси дейилади. Барча тўғри бўлмаган нуқталарга $f(z)$ функциянинг махсус нуқтаси дейилади.*

2 – таъриф. *Агар* a *нуқта* $f(z)$ *функциянинг махсус нуқтаси бўлиб,* $f(z)$ *функция* a *нуқтанинг бирор* $0<|z-a|<r$ *ўйилган атрофида аналитик бўлса,* a *нуқта* $f(z)$ *функциянинг бир қийматли характердаги яккаланган (ажралган) махсус нуқтаси дейилади.*

3 - таъриф. *Агар*

1) $\lim\limits_{z\to a} f(z)=A$ *бўлиб,* A *чекли сон бўлса ёки* a *нуқта атрофида* $f(z)$ *функциянинг Лоран қатори* $(z-a)$ *нинг манфий даражаларини сақламаса, яъни* $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ *бўлса, у ҳолда* a *нуқта* $f(z)$ *функциянинг тузатиладиган (четлаштириладиган, қутулиб бўладиган) махсус нуқтаси дейилади;*

2) $\lim\limits_{z\to a} f(z)=\infty$ *бўлса ёки* a *нуқта атрофида* $f(z)$ *функциянинг Лоран қатори* $(z-a)$ *нинг чекли сондаги манфий даражаларини сақласа, яъни* $f(z)=\sum\limits_{n=-m}^{\infty} c_n (z-a)^n$ *бўлса, у ҳолда* a *нуқта* $f(z)$ *функциянинг қутб махсус нуқтаси дейилади;*

3) $\lim\limits_{z\to a} f(z)$ *мавжуд бўлмаса ёки* a *нуқта атрофида* $f(z)$ *функциянинг Лоран қатори* $(z-a)$ *нинг чексиз кўп манфий даражаларини сақласа, яъни* $f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$ *бўлса, у ҳолда* a *нуқта* $f(z)$ *функциянинг муҳим махсус нуқтаси дейилади.*

1 – теорема. $f(z)$ *функция* $D=\{z:\ 0<|z-a|<r\}$ *соҳада бир қийматли ва аналитик бўлсин. У ҳолда* a *нуқта* $f(z)$ *функциянинг тузатиладиган махсус нуқтаси бўлиши учун* $f(z)$

функция шу a нуқтанинг бирор атрофида чегараланган бўлиши зарур ва етарлидир.

2 – теорема. *$z = a$ нуқта $f(z)$ функциянинг қутб махсус нуқтаси (қутби) бўлиши учун бу нуқта $\psi(z) = \dfrac{1}{f(z)}$ функциянинг ноли бўлиши зарур ва етарлидир.*

$f(z)$ функция қутбининг тартиби $\psi(z) = \dfrac{1}{f(z)}$ функция нолининг тартибидан иборат ва аксинча. Биринчи тартибли ноль ва қутбга мос равишда оддий ноль ва оддий қутб дейилади.

3 – теорема (Ю.В. Сохоцкий). *a нуқта $f(z)$ функция учун муҳим махсус нуқта бўлсин. У ҳолда ҳар қандай чекли ёки чексиз ўзгармас A сон учун муҳим махсус a нуқтага яқинлашувчи $z_1,\ z_2,\dots,\ z_n,\dots$ нуқталар кетма–кетлиги мавжуд бўлиб, бу кетма–кетлик учун $\lim\limits_{z_n \to a} f(z_n) = A$ бўлади.*

Аввалги параграфдан маълумки, $a = \infty$ нуқта атрофида $f(z)$ функциянинг Лоран қаторига ёйилмаси $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$ дан иборат.

4 – таъриф. *Агар*

1) $\lim\limits_{z \to \infty} f(z) = A$ $\left(A = const\right)$ ёки $a = \infty$ нуқта атрофида $f(z)$ функциянинг Лоран қатори z нинг мусбат даражали ҳадларини сақламаса, яъни $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{0} c_n z^n$ бўлса, $a = \infty$ нуқта $f(z)$ функциянинг тузатиладиган (четлаштириладиган, қутулиб бўладиган) махсус нуқтаси дейилади;

2) $\lim\limits_{z \to \infty} f(z) = \infty$ бўлса ёки $f(z)$ функциянинг $a = \infty$ нуқта атрофида Лоран қатори z нинг чекли сондаги мусбат даражали *ҳадларини сақласа, яъни* $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{m} c_n z^n$ *бўлса,* $a=\infty$ *нуқтага* $f(z)$ *функциянинг қутб махсус нуқтаси дейилади;*

3) $\lim_{z\to\infty} f(z)$ *мавжуд бўлмаса ёки* $f(z)$ *функциянинг* $a=\infty$ *нуқта атрофида Лоран қатори* z *нинг чексиз кўп мусбат даражали ҳадларини сақласа, яъни* $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$ *бўлса,* $a=\infty$ *нуқтага* $f(z)$ *функциянинг муҳим махсус нуқтаси дейилади.*

Қуйидаги функцияларнинг қандай махсус нуқталари борлиги ва уларнинг типлари аниқлансин:

1 – мисол. $f(z)=e^{\frac{1}{z-1}}$.

Ечиш. Маълумки, e^t функция комплекс текисликда аналитик, 2 – теоремага асосан $t=\dfrac{1}{z-1}$ функция учун $z=1$ нуқта оддий қутб, чунки $\dfrac{1}{t}=z-1$ функция учун $z=1$ нуқта оддий ноль. Демак, $f(z)=e^{\frac{1}{z-1}}$ функциянинг фақат $z=1$ махсус нуқтаси бўлиши мумкин. Агар бутун комплекс текисликда яқинлашувчи

$$e^t=1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+...+\frac{t^n}{n!}+...$$

қаторда $t=\dfrac{1}{z-1}$ деб олинса, $z=1$ нуқта атрофида $e^{\frac{1}{z-1}}$ функциянинг Лоран қаторига ёйилмаси ҳосил бўлади:

$$e^{\frac{1}{z-1}}=1+\frac{1}{z-1}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{(z-1)^2}+...+\frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{(z-1)^n}+... \ .$$

Бу қатор $z=1$ нуқтанинг ҳар қандай ўйилган атрофида яқинлашувчи бўлиб, $z-1$ нинг чексиз кўп манфий даражаларини сақлайди. Демак, таърифга кўра, $z=1$ нуқта $f(z)=e^{\frac{1}{z-1}}$ функция учун муҳим махсус нуқта экан.

2 – мисол. $f(z)=\dfrac{1}{e^z-1}$.

Ечиш. Бу функциянинг махсус нуқталари фақат махражнинг нолларидан иборатдир.

$$e^z-1=e^{x+iy}-1=e^x(\cos y+\sin y)-1=$$
$$=(e^x\cos y-1)+ie^x\sin y=0\ ,$$

бундан эса, $e^x\cos y-1=0,\ \ e^x\sin y=0$ тенгламаларни биргаликда ечиб, $x=0,\ y=2k\pi\ \left(k=0,\ \pm1,...\right)$ га эга бўламиз, яъни $e^z-1=0$ тенгламанинг ноллари $z=2k\pi i\ \ \left(k\in Z\right)$ нуқталардан иборат. Ҳар бир фиксирланган k сон учун

$$e^z-1=(z-2k\pi i)\left[1+\frac{z-2k\pi i}{2!}+\frac{(z-2k\pi i)^2}{3!}+...\right]=$$

$=(z-2k\pi i)\varphi(z)$, бунда $\varphi\left(2k\pi i\right)\neq0$ ва $z=2k\pi i$ нуқталарда $\varphi(z)$ аналитик функция. Демак, $z=2k\pi i$ нуқталар $\dfrac{1}{f(z)}=e^z-1$ функция учун оддий нолдир. У ҳолда 2 – теоремага кўра, $z=2k\pi i\ \left(k\in Z\right)$ нуқталар $f(z)=\dfrac{1}{e^z-1}$ функция учун оддий қутблардан иборат бўлади.

Иккинчи томондан, эса

$$f(z)=\frac{1}{e^z-1}=\frac{1}{z-2k\pi i}\cdot\frac{1}{\varphi(z)}=\sum_{n=-1}^{\infty}c_n(z-2k\pi i)^n,$$

чунки $\dfrac{1}{\varphi(z)}$ аналитик функция, яъни $f(z)$ функциянинг $z=2k\pi i$ нуқталар атрофида Лоран қаторига ёйилмаси $(z-2k\pi i)$ ларнинг манфий даражаларидан фақат $(z-2k\pi i)^{-1}$ ни ўзида сақлайди. Демак, 3 – таърифга кўра $z=2k\pi i$ $\left(k\in Z\right)$ нуқталар оддий қутблардир.

3 – мисол. $f(z)=\dfrac{1}{1-\cos z}$.

Ечиш. Бу функциянинг махсус нуқталари $a=\infty$ ва махражининг нолларидан иборатдир. Шунинг учун $1-\cos z$ функциянинг нолларини аниқлаймиз.

$$0=1-\cos z=1-\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=1-\frac{1}{2}\left(e^{i\left(x+iy\right)}+e^{-i\left(x+iy\right)}\right)=$$

$$=1-\frac{1}{2}\left(e^{-y}\left(\cos x+i\sin x\right)+e^{y}\left(\cos x-i\sin x\right)\right)=$$

$$=1-\frac{1}{2}\cos x\cdot\left(e^{y}+e^{-y}\right)+\frac{i}{2}\cdot\sin x\cdot\left(e^{y}-e^{-y}\right).$$

Бундан,

$$\frac{1}{2}\cos x\cdot\left(e^{y}+e^{-y}\right)=1 \text{ ва } \frac{1}{2}\sin x\cdot\left(e^{y}-e^{-y}\right)=0$$

тенгламаларни биргаликда ечиб, $y=0$, $x=2k\pi$ $\left(k\in Z\right)$ га эга бўламиз, яъни $z=2k\pi$ $\left(k\in Z\right)$ нуқталар $1-\cos z$ функциянинг нолларидир. Демак, бу нуқталар $f(z)=\dfrac{1}{1-\cos z}$ функция учун махсус нуқталар бўлади. $z=2k\pi$ $\left(k\in Z\right)$ нуқталар

$$\frac{1}{f(z)}=1-\cos z=(z-2k\pi)^2\cdot\varphi(z)$$

(бу ерда $\varphi(z)$, $z=2k\pi$ нуқталарда аналитик ва $\varphi\left(2k\pi\right)\neq 0$) функциянинг 2 – тартибли ноллари бўлганлиги учун бу нуқталар функциянинг 2 – тартибли қутбларидир. Энди $a=\infty$ нуқта

$f(z)=\dfrac{1}{1-\cos z}$ функция учун муҳим махсус нуқта эканлигини кўрсатамиз. Бунинг учун $\lim\limits_{z\to\infty}\cos z$ мавжуд эмаслигини кўрсатамиз. $z_n^{'}=2n\pi$ кетма–кетликни қараймиз. $n\to\infty$ да $z_n^{'}\to\infty$. $\lim\limits_{z_n^{'}\to\infty}\cos z_n^{'}=\lim\limits_{n\to\infty}\cos 2n\pi=1.$ Иккинчидан $z_n^{''}=\dfrac{\pi}{2}+2n\pi$ $(n\to\infty$ да $z_n^{''}\to\infty)$ кетма–кетлик учун $\lim\limits_{z_n^{''}\to\infty}\cos z_n^{''}=\lim\limits_{n\to\infty}\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+2n\pi\right)=0$. Демак, $\lim\limits_{z\to\infty}\cos z$ мавжуд эмас. Шунинг учун $a=\infty$ нуқта $f(z)=\dfrac{1}{1-\cos z}$ функция учун муҳим махсус нуқтадир.

4 – мисол. $f(z)=\dfrac{z^2+\pi}{z^2-\pi z-i\sqrt{\pi}(z-\pi)}$.

Ечиш. $z^2+\pi$ ва $z^2-\pi z-i\sqrt{\pi}(z-\pi)$ функциялар бутун комплекс текисликда аналитик бўлганликлари учун $f(z)$ функциянинг махсус нуқталари $z^2-\pi z-i\sqrt{\pi}(z-\pi)$ функциянинг нолларидан ва $a=\infty$ нуқтадан иборат бўлади.

$$z^2-\pi z-i\sqrt{\pi}(z-\pi)=(z-i\sqrt{\pi})(z-\pi)=0$$

дан $z_1=i\sqrt{\pi}$ ва $z_2=\pi$ ларни топамиз.

$$\lim_{z\to i\sqrt{\pi}}\frac{z^2+\pi}{z^2-\pi z-i\sqrt{\pi}(z-\pi)}=$$

$$=\lim_{z\to i\sqrt{\pi}}\frac{(z-i\sqrt{\pi})(z+i\sqrt{\pi})}{(z-i\sqrt{\pi})(z-\pi)}=\frac{2i}{i-\sqrt{\pi}}$$

бўлгани учун $z_1 = i\sqrt{\pi}$, $f(z)$ учун тузатиладиган махсус нуқтадир. $z_2 = \pi$ нуқта $\dfrac{1}{f(z)} = \dfrac{(z - i\sqrt{\pi})(z-\pi)}{z^2+\pi}$ функциянинг оддий ноли бўлгани учун 2 – теоремага кўра $f(z) = \dfrac{z^2+\pi}{z^2 - \pi z - i\sqrt{\pi}(z-\pi)}$ функциянинг оддий қутбидир. $\lim\limits_{z\to\infty} \dfrac{z^2+\pi}{z^2 - \pi z - i\sqrt{\pi}(z-\pi)} = 1$ бўлганлиги учун, $a = \infty$ нуқта $f(z)$ функция учун тузатиладиган махсус нуқтадир.

Мустақил ечиш учун мисоллар

Қуйидаги функцияларнинг махсус нуқталарини топинг ва классификацияланг:

1) $f(z) = \dfrac{z+6}{(z^2+1)(z-3)^2}$.

2) $f(z) = tg\, z$.

3) $f(z) = \sin\dfrac{\pi}{z+1}$.

4 - §. ЯККАЛАНГАН МАХСУС НУҚТАГА НИСБАТАН ФУНКЦИЯНИНГ ҚОЛДИҒИ

Агар $f(z)$ функция бирор a нуқтада аналитик бўлса, Коши теоремасига мувофик $\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = 0$ бўлиб, бунда Γ - маркази a нуқтада бўлган етарлича кичик радиусли айланадир. Агар a нуқта $f(z)$ функция учун яккаланган махсус нуқта бўлса, $\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz$ интегралнинг қиймати, умуман айтганда, нолдан фарқлидир. Интегралнинг бу қиймати Γ контурнинг шаклига боғлиқ эмас.

1 – таъриф. *Яккаланган махсус* $z = a$ *нуқтага нисбатан* $f(z)$ *функция қолдиғи деб,* $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz$ *интегралнинг қийматига айтилади ва*

$$\underset{z=a}{res}\, f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz$$

деб белгиланади.

Агар $f(z)$ функциянинг a нуқта атрофидаги (2.3) Лоран қаторидан фойдалансак,

$$c_{-1} = \underset{z=a}{res}\, f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz$$

ни ҳосил қиламиз. Демак, $f(z)$ функциянинг a нуқтага нисбатан қолдиғи деб, шу функциянинг a нуқта атрофидаги Лоран қатори $(z-a)^{-1}$ ҳадининг c_{-1} коэффициентини қабул қиламиз.

Агар a нуқта $f(z)$ функциянинг тўғри ёки тузатиладиган махсус нуқтаси бўлса, $c_{-1} = 0$ бўлиб, $\underset{z=a}{res}\, f(z) = 0$ бўлади.

Теорема. (асосий). *Агар* $f(z)$ *функция* Γ *чизиқ билан ўралган* $\overline{G}$ *ёпиқ соҳанинг, яккаланган махсус* $a_1,\ a_2, ..., a_n$ *нуқталардан бошқа, барча нуқталарида узлуксиз ва* $G \setminus \{ a_1,\ a_2,\ ...\ , a_n \}$ *соҳада аналитик бўлса,*

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \underset{z=a_k}{res}\, f(z) \tag{4.1}$$

бўлади.

Агар a нуқта $f(z)$ функция учун $m-$ тартибли қутб бўлса,

$$\underset{z=a}{res}\, f(z) = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[\ (z-a)^m f(z)\right] \tag{4.2}$$

бўлади.

Агар $f(z)$ функция $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ каср шаклида ифодаланиб, $\varphi(z)$ ва $\psi(z)$ функциялар a нуқта атрофида аналитик бўлса ва $f(z)$ функция учун a нуқта оддий қутб бўлса,

$$\underset{z=a}{res}\, f(z)=\frac{\varphi(a)}{\psi\,'(a)} \tag{4.3}$$

бўлади.

Агар a нуқта $f(z)$ учун муҳим махсус нуқта бўлса, бу нуқтага нисбатан функциянинг қолдиғини ҳисоблаш учун $f(z)$ ни a нуқта атрофида Лоран қаторига ёйиб c_{-1} коэффициентни топиш керак.

2 – таъриф. *Чексиз узоқлашган $a=\infty$ нуқтага нисбатан $f(z)$ функциянинг қолдиғи деб, $f(z)$ функциянинг $a=\infty$ нуқта атрофида Лоран қаторидаги $\dfrac{1}{z}$ ҳадининг тескари ишора билан олинган коэффициентига айтилади, яъни*

$$\underset{r=\infty}{res}\, f(z)=-c_{-1}. \quad \left(f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n \right).$$

Қуйидаги мисолларда $f(z)$ функциянинг махсус a нуқтага нисбатан қолдиғи ҳисоблансин.

1 – мисол. $f(z)=\dfrac{z^2}{(z-1)(z+10)}$, $a_1=1$, $a_2=-10$.

Ечиш. Кўриниб турибдики $a_1=1$, ва $a_2=-10$ нуқталар $f(z)$ функция учун оддий қутблардир. У ҳолда (4.2) формулада $m=1$ деб, қолдиқни ҳисоблаймиз:

$$\underset{z=1}{res}\, f(z)=\lim_{z\to 1}(z-1)\cdot\frac{z^2}{(z-1)(z+10)}=\frac{1}{11};$$

$$\underset{z=-10}{res}\, f(z)=\lim_{z\to -10}(z+10)\cdot\frac{z^2}{(z-1)(z+10)}=-\frac{100}{11}.$$

Бу ерда (4.3) формуладан ҳам фойдаланиб ҳисоблаш мумкин эди.

2 – мисол. $f(z)=\dfrac{\cos z+1}{\sin z}$, $a=k\pi$, $k\in Z$.

Ечиш. $a=k\pi$ нуқталар $f(z)$ функция учун оддий қутб бўлгани учун (4.3) формуладан фойдаланамиз. Бу ерда $\varphi(z)=\cos z+1$, $\psi(z)=\sin z$. У ҳолда

$$\underset{z=a}{res}\, f(z)=\left.\frac{\cos z+1}{\cos z}\right|_{z=k\pi}=\begin{cases}2, & k=2n\\ 0, & k=2n+1\end{cases}.$$

3 – мисол. $f(z)=\dfrac{z+1}{(z+2)^3 z}$, $a_1=-2$, $a_2=0$.

Ечиш. Кўриниб турибдики $f(z)$ функция учун $a_1=-2$ нуқта 3 – тартибли ва $a_2=0$ нуқта оддий қутблардир. (4.2) формулага мувофиқ

$$\underset{z=-2}{res}\frac{z+1}{(z+2)^3\cdot z}=\frac{1}{2!}\lim_{z\to-2}\frac{d^2}{dz^2}\left[\left(z+2\right)^3\frac{z+1}{\left(z+2\right)^3\cdot z}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\lim_{z\to-2}\frac{d}{dz}\left[-\frac{1}{z^2}\right]=\frac{1}{2}\cdot\lim_{z\to-2}\frac{2}{z^3}=-\frac{1}{8};$$

$$\underset{z=0}{res}\frac{z+1}{\left(z+2\right)^3\cdot z}=\lim_{z\to0}z\cdot\frac{z+1}{\left(z+2\right)^3\cdot z}=\lim_{z\to0}\frac{z+1}{\left(z+2\right)^3}=\frac{1}{8}.$$

4 – мисол. $\displaystyle\int\limits_{|z-i|=1}\frac{dz}{1+z^2}$ интеграл ҳисоблансин.

Ечиш. Берилган интегрални ҳисоблаш учун асосий теоремадаги (4.1) формуладан фойдаланамиз. Интеграл остидаги $f(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$ функция $a_1=i$ ва $a_2=-i$ яккаланган махсус нуқталарга эга. Лекин $|z-i|\le1$ доира ичида фақат $a_1=i$ нуқта ётади. Асосий теоремага мувофиқ

$$\int\limits_{|z-i|=1} \frac{dz}{1+z^2} = 2\pi i \cdot \underset{z=i}{res} \frac{1}{1+z^2} =$$

$$= 2\pi i \cdot \lim_{z \to i} (z-i) \cdot \frac{1}{1+z^2} = 2\pi i \cdot \lim_{z \to i} \frac{1}{z+i} = \pi \ .$$

5 – мисол. $\int\limits_{|z|=4} z \cdot \sin \frac{z}{z+1} dz$ интеграл ҳисоблансин.

Ечиш. $f(z) = z \cdot \sin \frac{z}{z+1}$ функциянинг $|\, z \,| \le 4$ доира ичида $z = -1$ яккаланган махсус нуқтаси бўлиб, бу нуқта муҳим махсус нуқтадир. $z = -1$ нуқтага нисбатан қолдиқни ҳисоблаш учун $f(z)$ ни бу нуқта атрофида Лоран қаторига ёйиб, $(z+1)^{-1}$ ҳаднинг олдидаги c_{-1} коэффициентини топамиз:

$$z \cdot \sin \frac{z}{z+1} = z \cdot \sin \frac{z+1-1}{z+1} = z \cdot \sin \left(1 - \frac{1}{z+1}\right) =$$

$$= z \cdot \sin 1 \cdot \cos \frac{1}{z+1} - z \cdot \cos 1 \cdot \sin \frac{1}{z+1}; \qquad 4.4)$$

$$z \cdot \cos \frac{1}{z+1} = \left[(z+1) - 1\right] \cdot \left(1 - \frac{1}{2!(z+1)^2} + \frac{1}{4!} \cdot \frac{1}{(z+1)^4} - \ldots\right) =$$

$$= (z+1) - \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{z+1} + \frac{1}{4!} \cdot \frac{1}{(z+1)^3} - \ldots +$$

$$+ \left(-1 + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{(z+1)^2} - \frac{1}{4!} \cdot \frac{1}{(z+1)^4} + \ldots\right);$$

$$z \cdot \sin \frac{1}{z+1} =$$

$$= \left[(z+1) - 1\right] \cdot \left(\frac{1}{z+1} - \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{(z+1)^3} + \frac{1}{5!} \cdot \frac{1}{(z+1)^5} - \ldots\right) =$$

$$=1-\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{(z+1)^2}+\frac{1}{5!}\cdot\frac{1}{(z+1)^4}-...+$$

$$+\left(-\frac{1}{z+1}+\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{(z+1)^3}-\frac{1}{5!}\cdot\frac{1}{(z+1)^5}+...\right).$$

Ҳосил бўлган ифодаларни (4.4) га келтириб қўйсак, қуйидагига эга бўламиз.

$$z\cdot\sin\frac{z}{z+1}=\sin1\cdot(z+1)-\left(\sin1+\cos1\right)-\left(\frac{\sin1}{2!}-\cos1\right)\cdot\frac{1}{z+1}+$$

$$+\left(\frac{\sin1}{2!}+\frac{\cos1}{3!}\right)\cdot\frac{1}{(z+1)^2}-... \ .$$

Демак,

$$c_{-1}=\cos1-\frac{\sin1}{2}=\underset{z=-1}{res}\left(z\cdot\sin\frac{z}{z+1}\right).$$

У ҳолда асосий теоремадаги (4.1) формулага мувофиқ

$$\int\limits_{|z|=4} z\cdot\sin\frac{z}{z+1}dz=2\pi i\left(\cos1-\frac{\sin1}{2}\right)$$

га тенг бўлади.

Мустақил ечиш учун мисоллар

1) $f(z)=\dfrac{\sin z}{(z-\pi)(z+9)^2}$, $a_1=\pi$, $a_2=-9$.

2) $\displaystyle\int\limits_{|z-i|=1}\frac{e^z\,d\,z}{(z-i)^2\cdot(z+5)}$ интеграл ҳисоблансин.

3) $\displaystyle\int\limits_{|z+1|=3}\cos\frac{z}{z+1}dz$ интеграл ҳисоблансин.

5 - §. ҚОЛДИҚЛАР НАЗАРИЯСИНИНГ АНИҚ ИНТЕГРАЛЛАРНИ ҲИСОБЛАШГА ТАДБИҒИ

$f(z)$ функция юқори ярим текисликнинг $a_1, \ a_2, ..., a_n$ махсус нуқталаридан ташқари барча нуқталари ва ҳақиқий ўқда, яъни $D = \{z: \ \operatorname{Im} z \geq 0\} \setminus \{a_1, \ a_2, ..., a_n\}$ соҳада аналитик бўлсин. Ҳамда $z \to \infty$ да $f(z)$ функция $\dfrac{1}{z}$ га нисбатан тезроқ текис нолга интилсин. У ҳолда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \underset{z=a_k}{res}\, f(z) \qquad (5.1)$$

тенглик ўринлидир.

Жордан леммаси. *Агар $F(z)$ функция юқори ярим текисликда ва ҳақиқий ўқда $z \to \infty$ да 0 га текис интилса, у ҳолда ихтиёрий мусбат $m > 0$ сон учун*

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} F(z) \cdot e^{imz}\, dz = 0 \qquad (5.2)$$

бўлиб, бунда C_R −маркази координаталар бошида ва радиуси R га тенг бўлган юқори ярим текисликдаги ярим айланадир.

Жордан леммасига кўра,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x) \cdot e^{imx} dx = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{n} \underset{z=a_k}{res} \left[F(z) \cdot e^{imz} \right] \qquad (5.3)$$

ёки

$$\int_{0}^{+\infty} \left[F(x) \cdot e^{imx} + F(-x) \cdot e^{-imx} \right] dx = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{n} \underset{z=a_k}{res} \left[F(z) \cdot e^{imz} \right]$$

бўлади.

Агар $F(z)$ функция жуфт бўлса,

$$\int_{0}^{+\infty} F(x) \cos mx\, dx = \pi i \cdot \sum_{k=1}^{n} \underset{z=a_k}{res} \left[F(z) \cdot e^{imz} \right] \qquad (5.4)$$

ва агар $F(z)$ тоқ функция бўлса,

$$\int_0^{+\infty} F(x)\sin mx\,dx = \pi\cdot\sum_{k=1}^{n}\underset{z=a_k}{res}\left[F(z)\cdot e^{imz}\right] \qquad (5.5)$$

формулаларни ҳосил қиламиз.

Қуйидаги интеграллар ҳисоблансин.

1 – мисол. $I=\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{1-2a\cos\varphi+a^2}$, бунда $|a|<1$.

Ечиш. $z=e^{i\varphi}$ бўлсин. У ҳолда

$$\sin\varphi=\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right),\ \cos z=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right),\ d\varphi=-i\frac{dz}{z}\ .$$

Шунинг учун, $I=\int_{|z|=1}\frac{i\,dz}{az^2-(a^2+1)z+a}$ бўлади.

$az^2-\left(a^2+1\right)z+a=0$ тенглама $z_1=a$ ва $z_2=\frac{1}{a}$ илдизга эга. $|a|<1$ бўлгани учун, $|z|<1$ доира ичида фақат $z_1=a$ нуқта ётади. Бу $z_1=a$ нуқта $f(z)=\frac{i}{az^2-(a^2+1)z+a}$ функция учун биринчи тартибли қутбдир. (4.3) формулага мувофиқ

$$\underset{z=a}{res}\,f(z)=\frac{i}{\left[2az-(a^2+1)\right]_{z=a}}=\frac{i}{a^2-1}\ .$$

Демак, $I=2\pi i\cdot\underset{z=a}{res}\,f(z)=2\pi i\cdot\frac{i}{a^2-1}=\frac{2\pi}{1-a^2}$.

2 – мисол. $I=\int_0^{2\pi}\frac{2+\cos\varphi}{2-\sin\varphi}d\varphi$ интегрални ҳисобланг.

Ечиш. $z=e^{i\varphi}$ бўлсин. У ҳолда

$$\cos\varphi=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right),\ \sin\varphi=\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right),\ d\varphi=-i\frac{dz}{z}.$$

Шунинг учун

$$I=\int\limits_{|z|=1}\frac{2+\dfrac{z^2+1}{2z}}{2-\dfrac{z^2-1}{2iz}}\cdot\frac{dz}{iz}=-\int\limits_{|z|=1}\frac{z^2+4z+1}{z(z^2-4iz-1)}dz$$

бўлади. $f(z)=-\dfrac{z^2+4z+1}{z(z^2-4iz-1)}$ функция учун $z_1=0,\ z_2=2i+i\sqrt{3},\ z_3=2i-i\sqrt{3}$ нуқталар биринчи тартибли қутблардир. $|z|<1$ доира ичида $f(z)$ аналитик функциянинг z_1 ва z_3 махсус нуқталари ётади. (4.3) формулага мувофиқ

$$\underset{z_1=0}{res}\, f(z)=\lim_{z\to 0}\left[-\frac{z}{z}\cdot\frac{z^2+4z+1}{z^2-4iz-1}\right]=1;$$

$$\underset{z_3=(2-\sqrt{3})i}{res} f(z)=\lim_{z_3=(2-\sqrt{3})i}\left[-\frac{z^2+4z+1}{z(z-z_2)(z-z_3)}(z-z_3)\right]=$$

$$=-\frac{z_3^2+4z_3+1}{z_3(z_3-z_2)}=-1-\frac{2i}{\sqrt{3}}\ .$$

Демак,

$$I=2\pi i\cdot\left(\underset{z_1=0}{res}\, f(z)+\underset{z_3=\left(2-\sqrt{3}\right)i}{res} f(z)\right)=2\pi i\cdot\left(1-1-\frac{2i}{\sqrt{3}}\right)=\frac{4\pi}{\sqrt{3}}.$$

3 – мисол. $I=\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^3}$ интегрални ҳисобланг.

Ечиш. $f(z)=\dfrac{1}{(z^2+1)^3}$ функция $a=i$ нуқтадан ташқари юқори ярим текисликнинг барча нуқталарида ва ҳақиқий ўқда аналитикдир. $a=i$ нуқта $f(z)$ функция учун 3 – тартибли қутбдир. Ундан ташқари, $z=\infty$ нуқта $f(z)=\dfrac{1}{(z^2+1)^3}$ функция учун 6 – тартибли нолдир. Демак, интегрални ҳисоблаш учун (5.1) формуладан фойдаланиш мумкин:

(4.2) формулага мувофиқ

$$\underset{z=i}{res}\,\frac{1}{(z^2+1)^3}=\frac{1}{2!}\lim_{z\to i}\frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{(z-i)^3}{(z^2+1)^3}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{z\to i}\frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{1}{(z+i)^3}\right]=\frac{1}{2}\lim_{z\to i}\left[\frac{12}{(z+i)^5}\right]=-\frac{3}{16}i\ .$$

Демак, (5.1) формулага мувофиқ

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^3}=2\pi i\cdot\underset{z=i}{res}\frac{1}{(z^2+1)^3}=2\pi i\cdot\left(-\frac{3}{16}i\right)=\frac{3}{8}\pi\ .$$

4 – мисол. $I=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2dx}{(x^2-3xi-2)^2}$ интегрални ҳисобланг.

Ечиш. $f(z)=\dfrac{z^2}{(z^2-3zi-2)^2}$ функция $a_1=i$ ва $a_2=2i$ нуқталардан ташқари $\{z:\ \mathrm{Im}\,z\ge 0\}\setminus\{i,\ 2i\}$ соҳада аналитик бўлиб, $z=\infty$ нуқта $f(z)$ функция учун 2 – тартибли нолдир. $a_1=i$ ва $a_2=2i$ нуқталар $f(z)$ функциянинг 2 – тартибли қутбларидир. Шунинг учун, (4.2) формулага асосан қуйидагиларга эга бўламиз.

$$\underset{z=i}{res}\frac{z^2}{(z^2-3zi-2)^2}=\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left[\frac{(z-i)^2\cdot z^2}{(z^2-3zi-2)^2}\right]=$$

$$=\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left[\frac{z^2}{(z-2i)^2}\right]=\lim_{z\to i}\left(-\frac{4zi}{(z-2i)^3}\right)=-4i;$$

$$\underset{z=2i}{res}\frac{z^2}{(z^2-3zi-2)^2}=\lim_{z\to 2i}\frac{d}{dz}\left[\frac{(z-2i)^2\cdot z^2}{(z^2-3zi-2)^2}\right]=$$

$$=\lim_{z\to 2i}\frac{d}{dz}\left[\frac{z^2}{(z-i)^2}\right]=\lim_{z\to 2i}\left(-\frac{2zi}{(z-i)^3}\right)=4i\ .$$

У ҳолда (5.1) формулага асосан

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2dx}{(x^2-3xi-2)^2}=$$

$$=2\pi i\left(\underset{z=i}{res}\frac{z^2}{(z^2-3zi-2)^2}+\underset{z=2i}{res}\frac{z^2}{(z^2-3zi-2)^2}\right)=$$

$$=2\pi i\cdot\left(-4i+4i\right)=0\ .$$

5 – мисол. $I=\int_{0}^{\infty}\frac{\cos mx}{a^2+x^2}dx\ \left(a>0,\ m>0\right)$ интегрални ҳисобланг.

Ечиш. $F(z)=\dfrac{1}{a^2+z^2}$ функция $z=ai$ оддий қутб махсус нуқтадан ташқари ҳақиқий ўқ ва юқори ярим текисликнинг барча нуқталарида аналитикдир. Шу билан бирга $F(z)$ функция Жордан леммасининг шартларини қаноатлантиради, яъни $\left\{z:\ \mathrm{Im}\,z\ge 0\right\}\setminus\left\{ai\right\}$ соҳада $z\to\infty$ да $F(z)\to 0$ дир. Кўриниб турибдики, $F(z)=\dfrac{1}{a^2+z^2}$ жуфт функциядир. Берилган интегрални ҳисоблаш учун (5.4) формуладан фойдаланамиз. $f(z)=\dfrac{e^{imz}}{a^2+z^2}$ функция учун $z=ai$ нуқта ягона оддий қутб нуқтадир. Бу нуқтага нисбатан қолдиқни ҳисоблаймиз. (4.3) формулага мувофиқ

$$\underset{z=ai}{res}\,\frac{e^{imz}}{a^2+z^2}=\left.\frac{e^{imz}}{2z}\right|_{z=ai}=\frac{e^{-am}}{2ai}\ .$$

У ҳолда (5.4) га асосан

$$I=\int\limits_0^\infty\frac{\cos mx}{a^2+x^2}dx=\pi i\cdot\frac{e^{-am}}{2ai}=\frac{\pi\cdot e^{-am}}{2a}\ .$$

6 – мисол. $I=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{(x+2)\cdot\sin 2x}{x^2-2x+2}d\,x$ интегрални ҳисобланг.

Ечиш. $F(z)=\dfrac{z+2}{z^2-2z+2}$ функция $z=1+i$ оддий қутбдан ташқари $\{\,z:\ \operatorname{Im}z\geq 0\,\}\setminus\{\,1+i\,\}$ соҳада аналитик бўлиб, $\{\,z:\ \operatorname{Im}z\geq 0\,\}\setminus\{\,1+i\,\}$ соҳада $z\to\infty$ да $F(z)\to 0$ дир. $f(z)=\dfrac{(z+2)e^{i2z}}{z^2-2z+2}$ функция юқори ярим текисликда $a=1+i$ оддий қутбга эга. Берилган интегрални ҳисоблашда (5.3) формуладан фойдаланамиз. Бунинг учун $f(z)$ функциянинг $a=1+i$ нуқтада қолдиғини ҳисоблаймиз. (4.3) формулага кўра

$$\underset{z=1+i}{res}\,f(z)=\left.\frac{(z+2)e^{i2z}}{2z-2}\right|_{z=1+i}=\frac{(3+i)\cdot e^{-2+2i}}{2i}=$$

$$=\frac{1-3i}{2}\cdot e^{-2}(\cos 2+i\sin 2)=$$

$$=\frac{e^{-2}}{2}(\cos 2+3\sin 2)+i\cdot\frac{e^{-2}}{2}(\sin 2-3\cos 2)\ .$$

Демак, (5.3) формулага мувофиқ

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x+2)\cdot(\cos 2x+i\cdot\sin 2x)}{x^2-2x+2}d\,x=$$

$$=2\pi i\cdot\left[\frac{e^{-2}}{2}(\cos 2+3\sin 2)+i\cdot\frac{e^{-2}}{2}(\sin 2-3\cos 2)\right].$$

Бу тенгликнинг иккала томонида ҳақиқий ва мавҳум қисмларни таққослаб, берилган интегралнинг қийматини топамиз:

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x+2)\cdot\sin 2x}{x^2-2x+2}d\,x=\frac{\pi}{e^2}(\cos 2+3\sin 2)\ .$$

Мустақил ечиш учун мисоллар

1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\,d\,x}{(x^2+4x+13)^2}$; 4) $\displaystyle\int_{0}^{2\pi}\frac{2+\cos\varphi}{4-\sin\varphi}d\varphi$;

2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\cdot\cos x\,d\,x}{x^2-2x+10}$; 5) $\displaystyle\int_{0}^{2\pi}\frac{3+\cos\varphi}{5-\sin\varphi}d\varphi$;

3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}\,d\,x}{x^2-2ix-2}$; 6) $\displaystyle\int_{0}^{2\pi}\frac{3+\cos\varphi}{6-\sin\varphi}d\varphi$.

6 - §. КОНФОРМ АКСЛАНТИРИШНИНГ УМУМИЙ ПРИНЦИПЛАРИ

1 – таъриф. *Агар* $w = f(z)$ *функция* D *соҳанинг ҳар хил нуқталарида ҳар хил қийматлар қабул қилса, яъни* $\forall z_1,\ z_2 \in D,\ z_1 \neq z_2 \Rightarrow f(z_1) \neq f(z_2)$ *бўлса, у ҳолда бу функция шу* D *соҳада бир варақли дейилади.*

1 – мисол. Чизиқли функция $w = f(z) = az + b$, бунда $a,\ b$ – комплекс сонлар $(a \neq 0)$. Бу функциянинг $D = C$ соҳада бир варақли эканлигини кўрсатамиз: $\forall z_1,\ z_2 \in C,\ z_1 \neq z_2$ бўлсин. У ҳолда $az_1 \neq az_2$ бўлади. Бундан $az_1 + b \neq az_2 + b$ ёки $f(z_1) \neq f(z_2)$ эканлиги келиб чиқади. Демак, $f(z) = az + b$ функция $a \neq 0$ бўлганда $D = C$ соҳада бир варақли экан.

2 – мисол. Каср чизиқли функция $w = f(z) = \dfrac{az + b}{cz + d}$, бунда $a,\ b,\ c,\ d$ – комплекс сонлар бўлиб, $ad - bc \neq 0$ бўлсин. Бу функциянинг $D = C$ соҳада бир варақли эканлигини кўрсатамиз: $\forall z_1,\ z_2 \in C,\ z_1 \neq z_2$ бўлсин. У ҳолда $ad - bc \neq 0$ бўлгани учун $ad(z_2 - z_1) \neq bc(z_2 - z_1)$ бўлади, ёки

$$adz_2 + bcz_1 \neq bcz_2 + adz_1 .$$

Бундан

$$adz_2 + bcz_1 + acz_1z_2 + bd \neq bcz_2 + adz_1 + acz_1z_2 + bd$$

ёки

$$(a \cdot z_2 + b)(cz_1 + d) \neq (a \cdot z_1 + b)(c \cdot z_2 + d)$$

ёки

$$\frac{az_2 + b}{cz_2 + d} \neq \frac{az_1 + b}{cz_1 + d}$$

ёки $f(z_2) \neq f(z_1)$ эканлиги келиб чиқади. Демак, $f(z) = \dfrac{az + b}{cz + d}$ функция $ad - bc \neq 0$ бўлганда $D = C$ соҳада бир варақли экан.

3 – мисол. $w=z^2$ функция $D=\{\, z:\ \operatorname{Im} z>0\}$ соҳада бир варақли эканлигини кўрсатамиз: $\forall z_1,\ z_2\in D,\ z_1\neq z_2$ бўлсин. $D=\{\, z:\ \operatorname{Im} z>0\}$ соҳада ўзаро симметрик $z_1=-z_2$ кўринишдаги нуқталар мавжуд эмас. Шунинг учун $z_1\neq -z_2$ ёки $z_1+z_2\neq 0$. Бундан ташқари, $z_1-z_2\neq 0$ бўлгани учун $(z_1+z_2)(z_1-z_2)\neq 0$ бўлиб, $z_1^2-z_1^2\neq 0$, яъни $z_1^2\neq z_1^2$ бўлади. Бундан эса $f(z_1)\neq f(z_2)$ эканлиги келиб чиқади. Демак, $f(z)=z^2$ функция $D=\{\, z:\ \operatorname{Im} z>0\}$ соҳада бир варақли экан.

2 – таъриф. *Агар $w=f(z)$ функция z_0 нуқтанинг қандайдир атрофида бир варақли функциядан иборат бўлса, у ҳолда бу $w=f(z)$ функция z_0 нуқтада бир варақли дейилади.*

Кўриниб турибдики, агар функция соҳада бир варақли функциядан иборат бўлса, у ҳолда шу соҳанинг исталган нуқтасида бир варақли функциядан иборатдир. Тескариси ҳамиша ўринли эмас. D соҳанинг ҳар бир нуқтасида бир варақли функция бўлишлигидан унинг шу D соҳада бир варақли функция бўлишлиги келиб чиқавермайди.

Энди нуқтада бир варақли функция бўлишлик критериясини келтирамиз.

1 – теорема. *$w=f(z)$ аналитик функция $z_0\neq\infty$ нуқтада бир варақли функция бўлишлиги учун $f'(z_0)\neq 0$ бўлишлиги зарур ва етарлидир.*

3 – таъриф. *Агар $w=f(z)$ акслантириш z_0 нуқтада икки чизиқ орасидаги бурчакни сақласа (йўналиши ўзгармаган ҳолда) ва шу z_0 нуқтада чизиқларнинг чўзилиш коэффициенти ўзгармас бўлса, у ҳолда бу $w=f(z)$ акслантиришни z_0 нуқтада конформ акслантириш дейилади.*

4 – таъриф. *Агар $w=f(z)$ функция D соҳада бир варақли ва D соҳанинг ҳар бир нуқтасида конформ акслантиришдан* *иборат бўлса, у ҳолда бу $w = f(z)$ функция D соҳада конформ деб айтилади.*

2 – теорема. *Агар $w = f(z)$ функция D соҳада бир варақли аналитик функция бўлиб, шу соҳада $f'(z) \neq 0$ бўлса, у ҳолда бу $w = f(z)$ акслантириш D соҳада конформдир.*

Бу теоремага тескари бўлган қуйидаги теорема ҳам ўринлидир:

Д.Е. Меньшов теоремаси: $\overline{C}$ *текисликдаги бирор D соҳани бошқа бир соҳага ўзаро бир қийматли ва конформ акслантириш D соҳадаги бирор бир варақли аналитик функция ёрдамида бажарилади.*

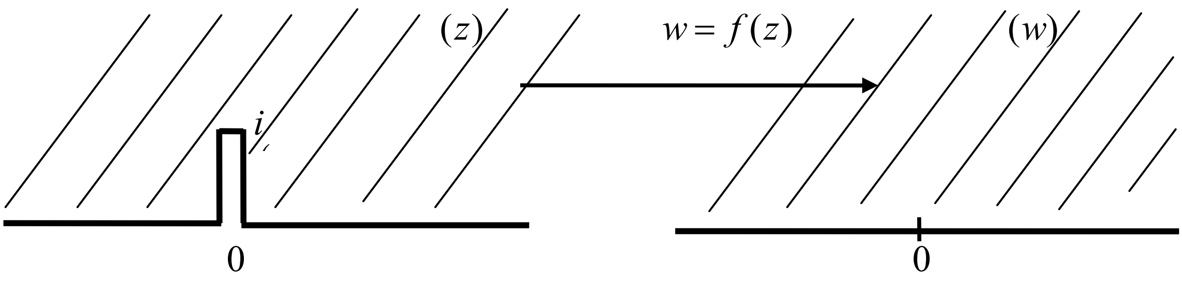
Энди соҳани сақлаш принципи деб аталувчи қуйидаги принципни келтирамиз:

3 – теорема. *Агар $w = f(z)$ функция D соҳада аналитик ва $f(z) \neq const$ бўлса, у ҳолда $w = f(z)$ акслантиришдаги D соҳанинг образи ҳам соҳадан иборат бўлади.*

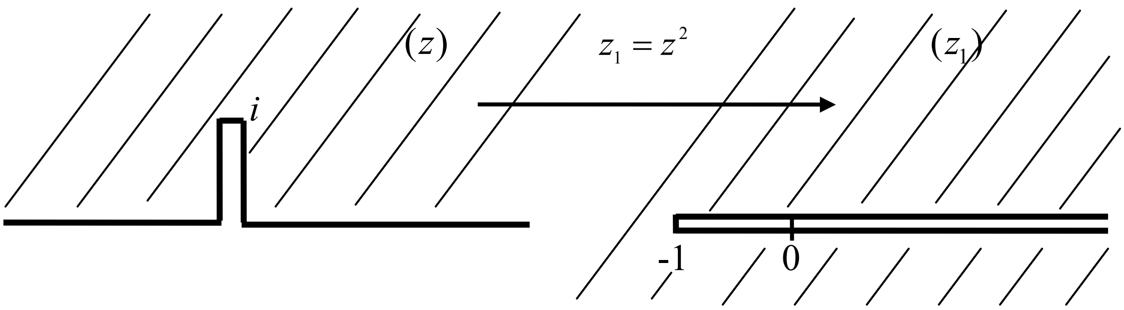
Конформ акслантириш қуйидаги хоссаларга эга:

1. Конформ акслантиришга тескари бўлган акслантириш ҳам конформдир.
2. Иккита конформ акслантиришнинг суперпозицияси ҳам конформ акслантиришдир.

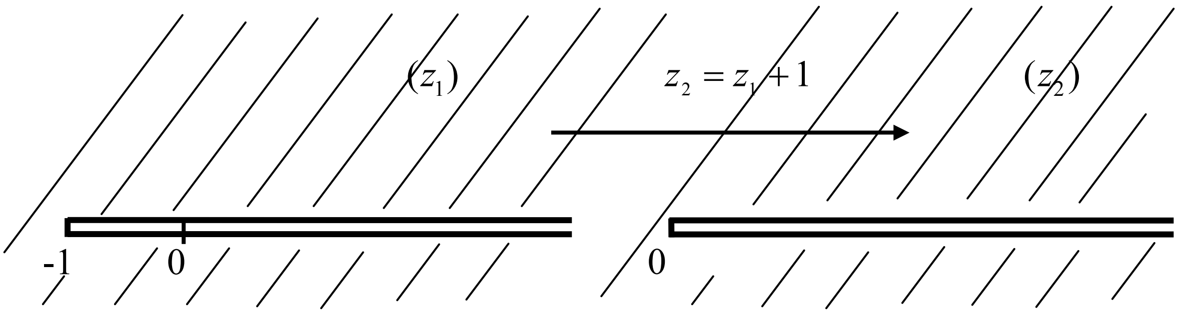
4 – мисол. $D = \{ z: \ z \in C, \ \ \mathrm{Im}\, z > 0, \ \ z \notin [0, \ i] \}$ соҳани юқори ярим текисликка акслантирувчи $w = f(z)$ конформ акслантириш тузилсин.



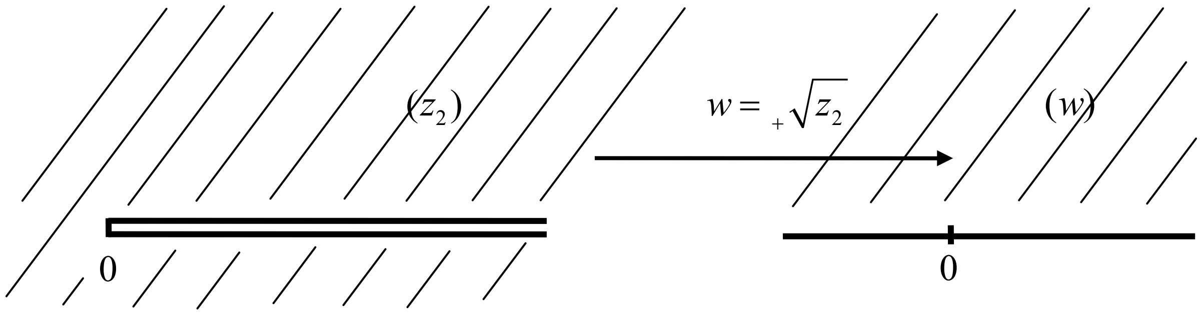
Ечиш. Маълумки, $z_1 = z^2$ акслантиришни олсак,



ни ҳосил қиламиз. Энди $z_2 = z_1 + 1$ акслантиришни олсак,



ни ҳосил қиламиз. Энди $w = {}_{+}\sqrt{z_2}$ акслантириш натижасида



ҳосил бўлади. Шундай қилиб, $w = f(z) = {}_{+}\sqrt{z^2 + 1}$ акслантириш D соҳани юқори ярим текисликка конформ акслантириш экан.

Энди конформ акслантиришлар назариясининг асосий теоремасини келтирамиз.

Риман теоремаси: *Кенгайтирилган комплекс текисликда бир боғламли D соҳа берилган бўлиб, унинг чегараси битта нуқтадан кўп бўлсин. У ҳолда*

1) D соҳани $|w| < 1$ доирага конформ акслантирувчи $w = f(z)$ функция мавжуд.

2) Агар $f(z_0)=w_0$, $\arg f'(z_0)=\alpha$ *шартлар бажарилса, бу функция ягонадир. Бунда* z_0, w_0 − *берилган нуқталар* $\left(z_0\in D,\ |w_0|<1\right)$, α −*берилган ҳақиқий сон.*

Натижа. D *ва* G *бир боғламли соҳалар берилган бўлиб, уларнинг чегаралари бир нуқтадан кўп бўлсин. У ҳолда* $f(z_0)=w_0$, $\arg f'(z_0)=\alpha$ *шартларни қаноатлантирувчи* D *соҳани* G *соҳага конформ акслантирувчи ягона* $w=f(z)$ *функция мавжуддир, бу ерда* $z_0\in D$, $w_0\in G$, α −*ҳақиқий сон.*

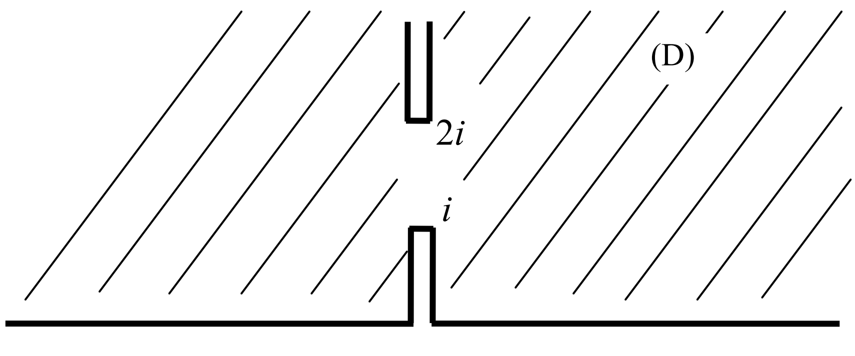
Энди чегараларнинг мослиги принципи деб аталувчи қуйидаги теоремани келтирамиз:

Теорема. *Агар* $w=f(z)$ *функция* D *соҳани* G *соҳага конформ акслантирса, у ҳолда*

1) $w=f(z)$ *функцияни* D *соҳанинг ёпиғигача узлуксиз давом эттириш мумкин, яъни* $\overline{D}$ *да узлуксиз бўладиган қилиб* $w=f(z)$ *функцияни* Γ *чегарада аниқлаш мумкин.*

2) Бу $w=f(z)$ *функция* Γ *чегарани* G *соҳанинг чегараси* $\tilde{\Gamma}$ *чизиққа йўналишини сақлаган ҳолда ўзаро бир қийматли акслантиради.*

5 – мисол.

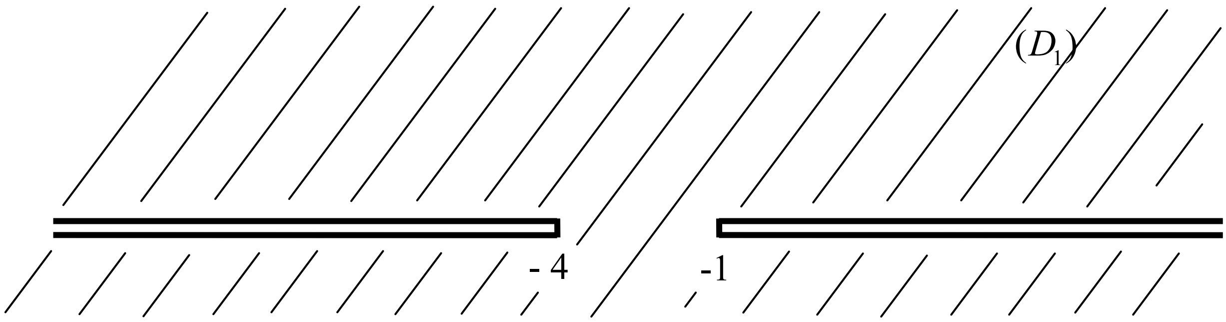


Чизмадаги

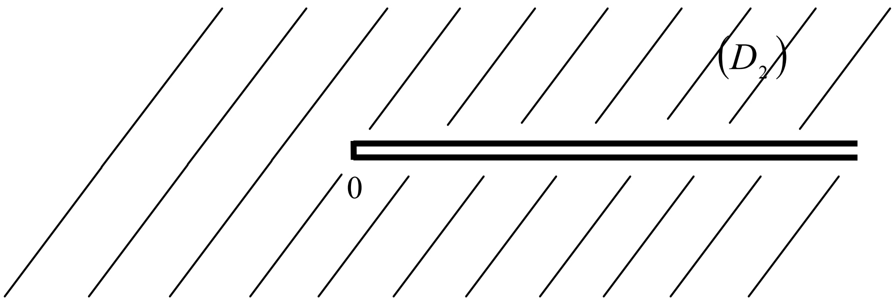
$$D=\{z:\ \operatorname{Im}z>0\}\setminus\{\,z:\ \ \operatorname{Re}z=0,\ \ 0\le\operatorname{Im}z\le1,\ \operatorname{Im}z\ge2\,\}$$

соҳани юқори ярим текисликка конформ акслантирувчи $w=f(z)$ функция тузилсин.

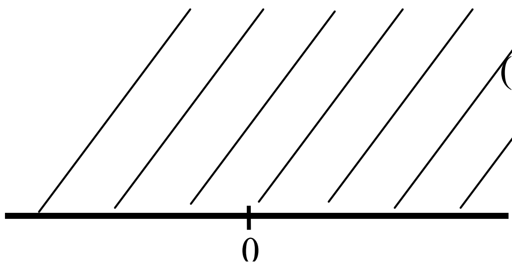
Ечиш. $z_1=z^2$ акслантиришни олсак, D соҳа



$D_1=\{z:\ \ z\in C,\ z\notin(-\infty,\ -4]\bigcup[-1,\ +\infty)\}$ соҳага ўтади. Энди D_1 соҳага $z_2=\dfrac{z_1+1}{z_1+4}$ каср чизиқли акслантиришни қўлласак,

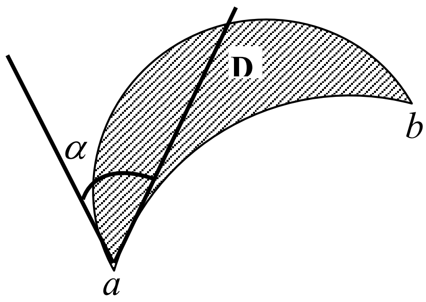


$D_2=\left\{\,z:\ \ z\in C,\ \ \ z\notin\left[\,0,\ +\infty\right)\right\}$ соҳага ўтади. Энди $w={}_{+}\sqrt{z_2}$ акслантиришни оламиз. Бу акслантириш D_2 соҳани



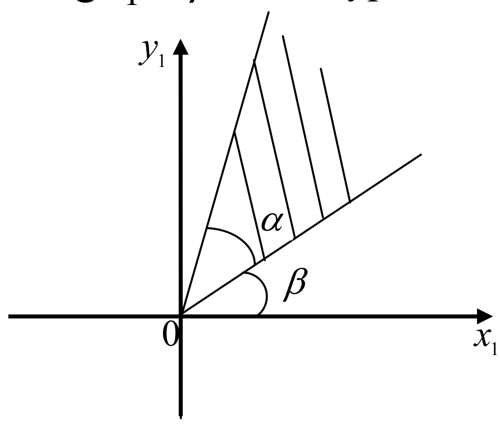
юқори ярим текисликка акслантиради. Шундай қилиб, $w=f(z)={}_{+}\sqrt{\dfrac{z^2+1}{z^2+4}}$ акслантириш берилган D соҳани юқори ярим ярим текисликка конформ акслантирар экан.

6 – мисол. a ва b нуқталарда $\alpha>0$ бурчак ташкил қилиб, кесишувчи иккита айлана ёйи билан чегараланган

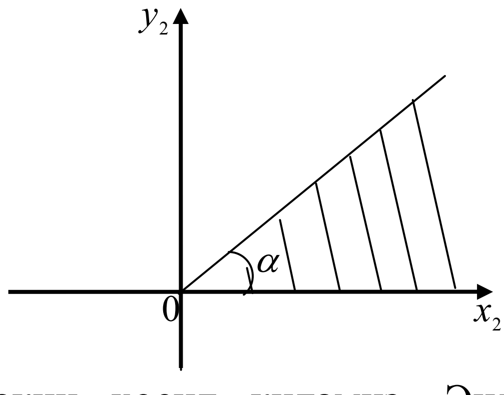


D соҳани юқори ярим текисликка акслантирувчи $w = f(z)$ конформ акслантириш тузилсин.

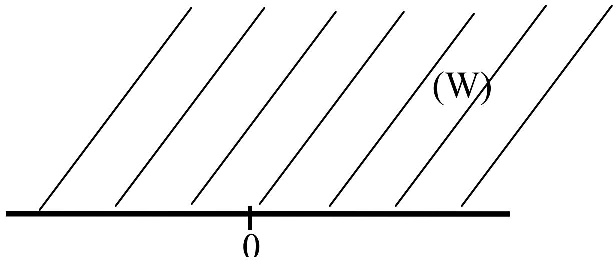
Ечиш. Бу “ойча” деб аталувчи D соҳани $z_1 = \dfrac{z-a}{z-b}$ каср чизиқли функция $\beta < \arg z_1 < \beta + \alpha$ бурчакка



акслантиради, бунда $\beta -$ айлана ёйларига боғлиқ бўлган қандайдир сон. $z_2 = e^{-i\beta} \cdot z_1$ акслантиришни қўлласак,

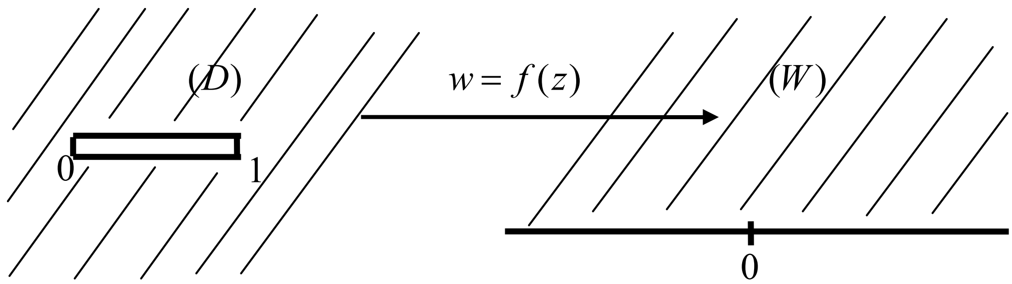


$0 < \arg z_2 < \alpha$ бурчакни ҳосил қиламиз. Энди бу бурчакка $w = z_2^{\frac{\pi}{\alpha}}$ акслантиришни қўллаб,

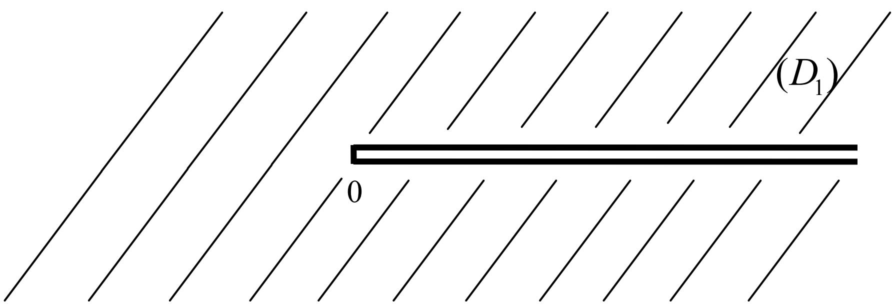


юқори ярим текисликни ҳосил қиламиз. Шундай қилиб, $w=\left(\dfrac{z-a}{z-b}\cdot e^{-i\cdot\beta}\right)^{\frac{\pi}{\alpha}}$ функция берилган ойчани юқори ярим текисликка конформ акслантирар экан.

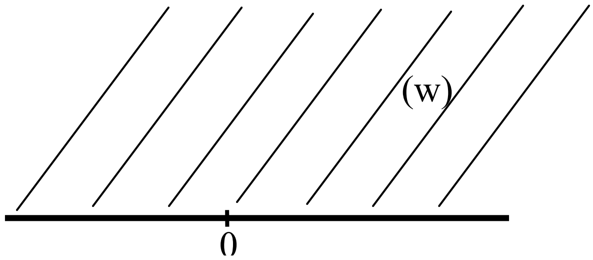
7 – мисол. $D=\left\{z:\ z\in\overline{C},\ \ z\notin[\,0,\ 1\,]\right\}$ соҳани юқори ярим текисликка конформ акслантирувчи $w=f(z)$ функция тузилсин:



Ечиш. $z_1=\dfrac{z}{1-z}$ каср чизиқли конформ акслантиришни қараймиз. Бу акслантириш D соҳани

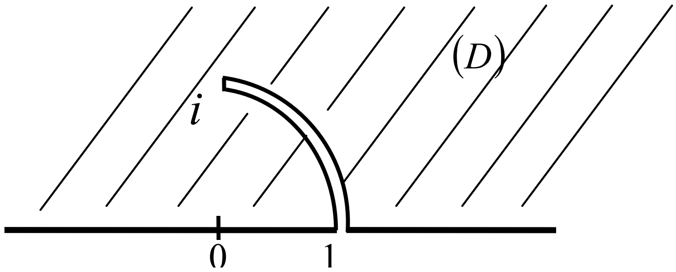


$D_1=\left\{z:\ z\in C,\ \ z\notin\left[0,\ +\infty\right)\right\}$ соҳага акслантиради. Энди $w={}_{+}\sqrt{z_1}$ акслантиришни олсак, бу акслантириш D_1 соҳани



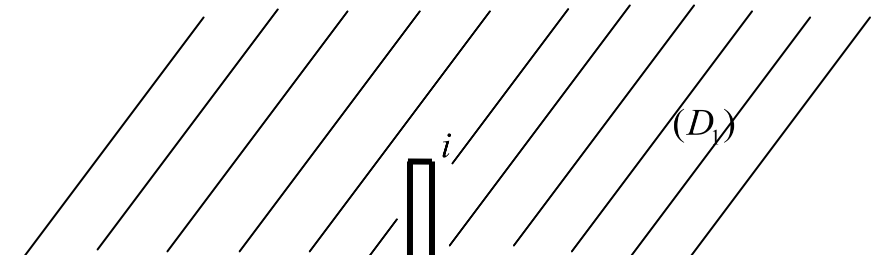
юқори ярим текисликка акслантиради. Шундай қилиб, $w=f(z)={}_{+}\sqrt{\dfrac{z}{1-z}}$ акслантириш берилган D соҳани юқори ярим текисликка конформ акслантиради.

8 – мисол.

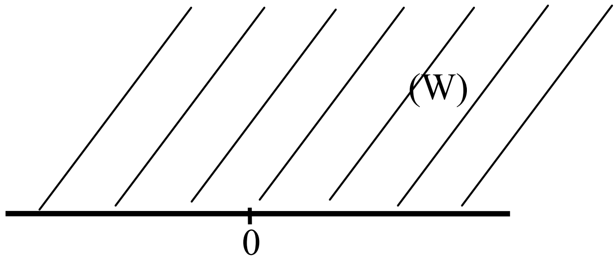


$D=\{z:\ \operatorname{Im} z>0\}\setminus\left\{z:\ \ |z|=1,\ 0\le\arg z\le\dfrac{\pi}{2}\right\}$ соҳани юқори ярим текисликка конформ акслантирувчи $w=f(z)$ функция тузилсин.

Ечиш. $z_1=\dfrac{z-1}{z+1}$ каср чизиқли акслантиришни қараймиз. Бу акслантириш D соҳани

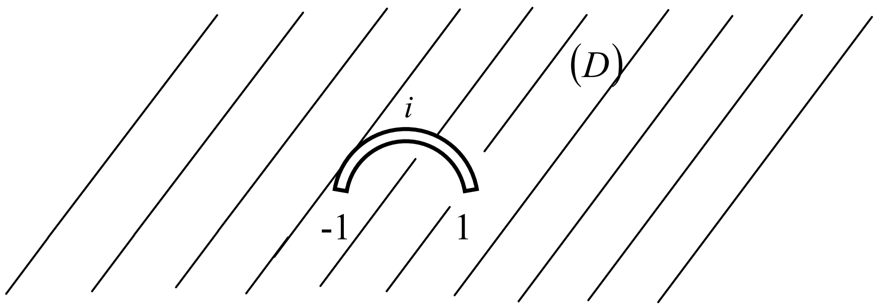


$D_1=\{z:\ z\in C,\ \operatorname{Im} z>0\}\setminus\{z:\operatorname{Re} z=0,\operatorname{Im} z\in[0,\ 1]\}$ соҳага акслантиради. 4 – мисолга кўра, $W={}_{+}\sqrt{z_1^2+1}$ акслантириш D_1 соҳани



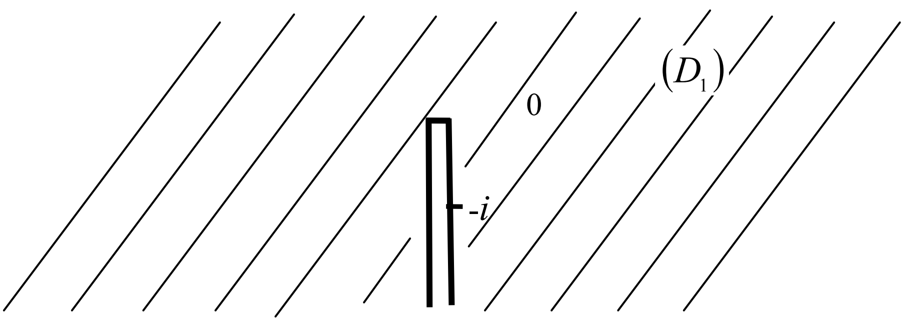
юқори ярим текисликка конформ акслантиради. Шундай қилиб, $w = f(z) = {}_{+}\sqrt{\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2 + 1}$ акслантириш берилган D соҳани юқори ярим текисликка конформ акслантирар экан.

9 – мисол.

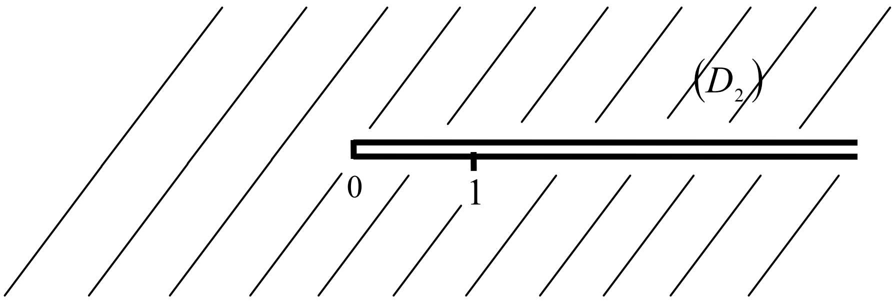


Чизмадаги $D = \left\{ z:\ z \in \overline{C} \right\} \setminus \left\{ z:\ \left| z \right| = 1,\ 0 \le \arg z \le \pi \right\}$ соҳани юқори ярим текисликка конформ акслантирувчи $w = f(z)$ акслантириш тузилсин.

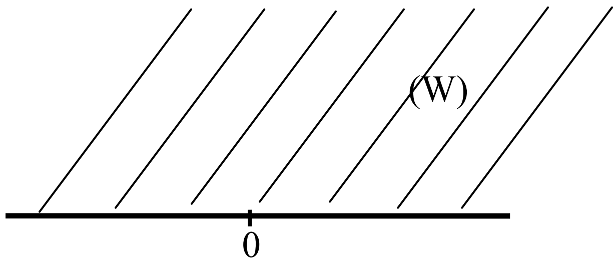
Ечиш. $z_1 = \dfrac{z+1}{z-1}$ каср чизиқли акслантириш D соҳани



D_1 соҳага конформ акслантиради. Энди $z_2 = e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot z_1$ акслантиришни қўлласак,

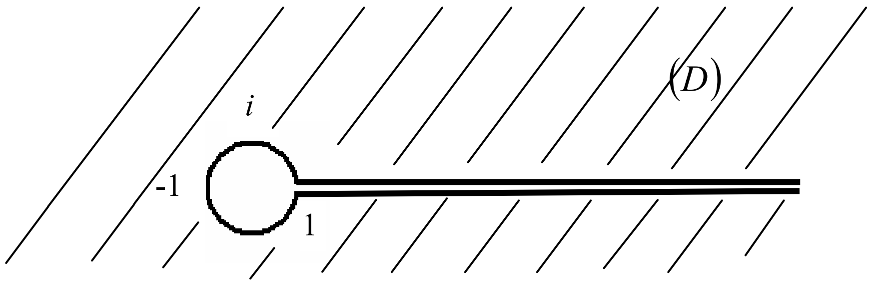


D_2 соҳани ҳосил қиламиз. Энди $w = {}_{+}\sqrt{z_2}$ акслантиришни D_2 соҳага қўлласак,



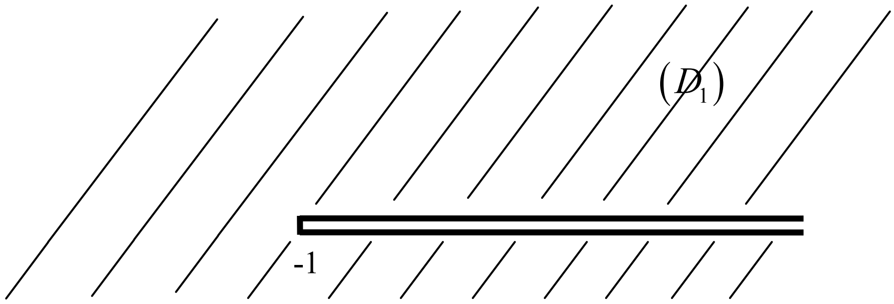
натижада юқори ярим текислик ҳосил бўлади. Шундай қилиб, $w = {}_{+}\sqrt{e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{z+1}{z-1}} = e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot {}_{+}\sqrt{\frac{z+1}{z-1}}$ акслантириш берилган D соҳани юқори ярим текисликка конформ акслантирар экан.

10 – мисол.

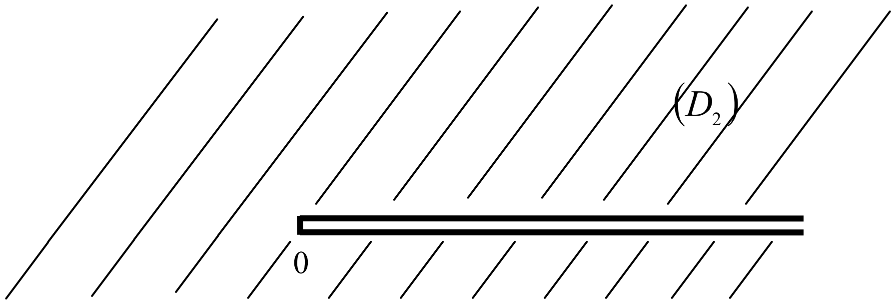


Чизмадаги D соҳани юқори ярим текисликка конформ акслантирувчи $w = f(z)$ функцияни тузинг.

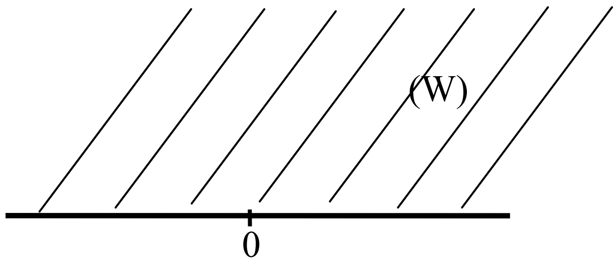
Ечиш. $z_1 = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ Жуковский функцияси D соҳани



D_1 соҳага конформ акслантиради. Энди $z_2 = z_1 + 1$ акслантиришни қўлласак,



D_2 соҳани ҳосил қиламиз. Энди $w = {}_{+}\sqrt{z_2}$ акслантиришни D_2 соҳага қўлласак,



юқори ярим текисликни ҳосил қиламиз. Шундай қилиб, $w = {}_{+}\sqrt{\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) + 1}$ акслантириш берилган D соҳани юқори ярим текисликка конформ акслантирар экан.

Теорема. *Агар $f_1(z)$ ва $f_2(z)$ функциялар умумий нуқталарга эга бўлмаган D_1 ва D_2 соҳаларда аналитик бўлиб, бу соҳаларнинг чегаралари умумий L қисмга эга бўлса ва бундан ташқари $f_1(z)$ ва $f_2(z)$ функциялар мос равишда $D_1 \bigcup (L)$ ва*

$D_2 \bigcup (L)$ да узлуксиз бўлиб, L да бир – бирига тенг бўлса, у ҳолда $f_2(z)$ функция $f_1(z)$ функциянинг D_2 соҳага бевосита аналитик давомидир, бошқача айтганда бу функциялар биргаликда $D_1 \bigcup (L) \bigcup D_2$ соҳада битта $F(z)$ аналитик функцияни аниқлайди.

Симметрия принципи деб аталувчи қуйидаги теорема ҳам ўринлидир:

Б. Риман ва Г. Шварц теоремаси: *D_1 соҳанинг чегараси C айлана ёйини сақласин ва $w = f_1(z)$ функция бу D_1 соҳани D_1^* соҳага конформ акслантириб, C айлана ёйини D_1^* соҳа чегарасининг айлана ёйидан иборат C^* қисмига акслантирсин. Бу шартларда $f_1(z)$ функция C айлана ёйига нисбатан D_1 соҳага симметрик бўлган D_2 соҳадаги $f_2(z)$ аналитик давомига C айлана ёйи орқали эришади, бундан ташқари $w = f_2(z)$ функция D_2 соҳани D_1^* соҳа чегарасининг айлана ёйидан иборат C^* қисмига нисбатан симметрик бўлган D_2^* соҳага конформ акслантиради. Ҳамда*

$$w = F(z) = \begin{cases} f_1(z), & \text{агарда } z \in D_1 \text{ бўлса} \\ f_1(z) = f_2(z), & \text{агарда } z \in C \text{ бўлса} \\ f_2(z), & \text{агарда } z \in D_2 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функция $D_1 \bigcup C \bigcup D_2$ соҳани $D_1^* \bigcup C \bigcup D_2^*$ соҳага конформ акслантиради.

Аналитик давом эттириш принципи деб аталувчи қуйидаги теоремани келтирамиз:

Г. Шварц теоремаси: *D соҳанинг чегараси C аналитик ёйни сақласин ва $w = f(z)$ функция бу D соҳани D^* соҳага конформ акслантириб, C аналитик ёйни D^* соҳа чегарасининг аналитик ёйидан иборат C^* қисмига акслантирсин. Бу* *шартларда* $f(z)$ *функцияни* C *ёй орқали аналитик давом эттириш мумкин.*

Қуйидаги теорема ҳам ўринлидир:

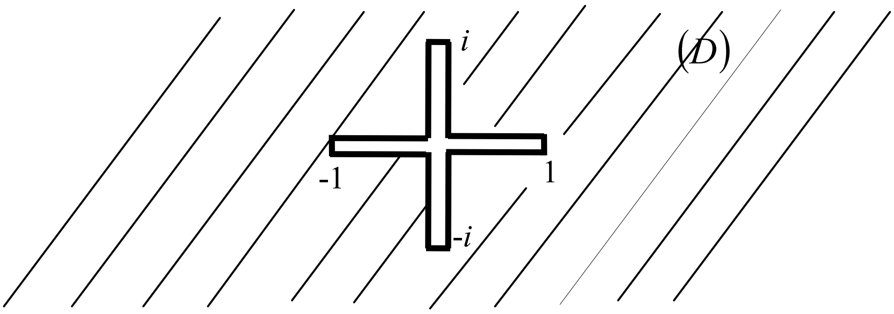
Г. Шварц ва Э. Кристоффель теоремаси: *Агар* $w = f(z)$ *функция* $\operatorname{Im} z > 0$ *юқори ярим текисликни учларидаги бурчаклари* $\alpha_k \pi$ $(0 < \alpha_k \le 2,\ k = 1, 2, ..., n)$ *бўлган чегараланган кўпбурчак ичига конформ акслантирса, ҳамда бу кўпбурчакнинг учларига мос келувчи ҳақиқий ўқдаги* a_k $(-\infty < a_1 < a_2 < ... < a_n < \infty)$ *нуқталар маълум бўлса, у ҳолда* $f(z)$ *функция*

$$f(z) = C \int_{z_0}^{z} (z - a_1)^{\alpha_1 - 1} (z - a_2)^{\alpha_2 - 1} ... (z - a_n)^{\alpha_n - 1} dz + C_1$$

интеграл орқали тасвирланади, бунда z_0, C *ва* C_1 *– қандайдир ўзгармаслардир.*

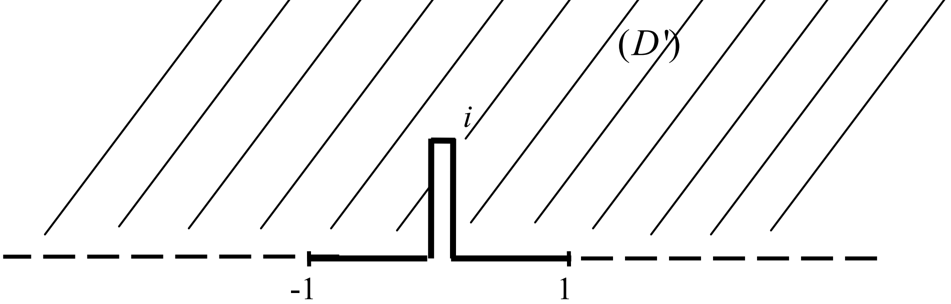
Энди симметрия принципини қўллаб мисоллар ечамиз.

11 – мисол.

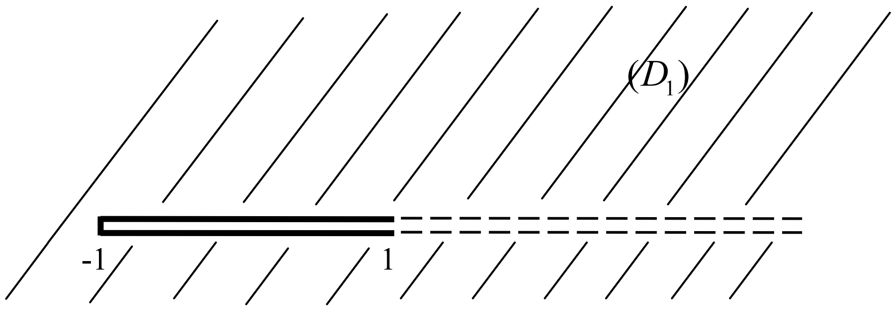


Чизмадаги D соҳани юқори ярим текисликка конформ акслантирувчи $w = f(z)$ функцияни тузинг.

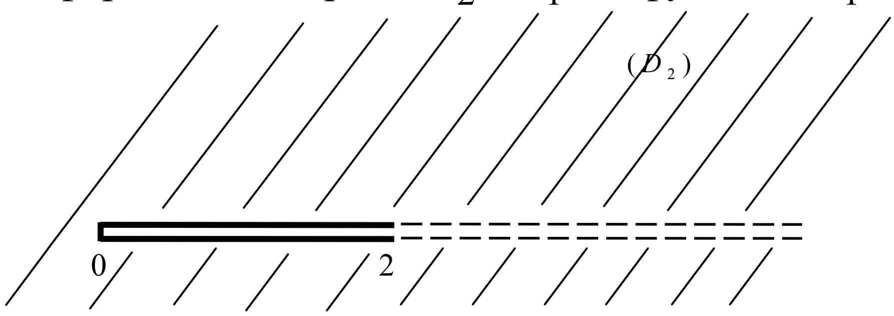
Ечиш.



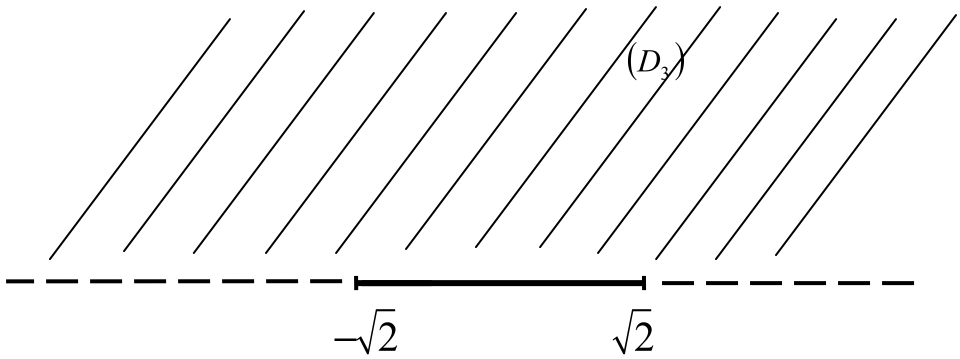
D' соҳани $z_1 = z^2$ функция



D_1 соҳага конформ акслантиради. $z_2 = z_1 + 1$ функция D_1 соҳани

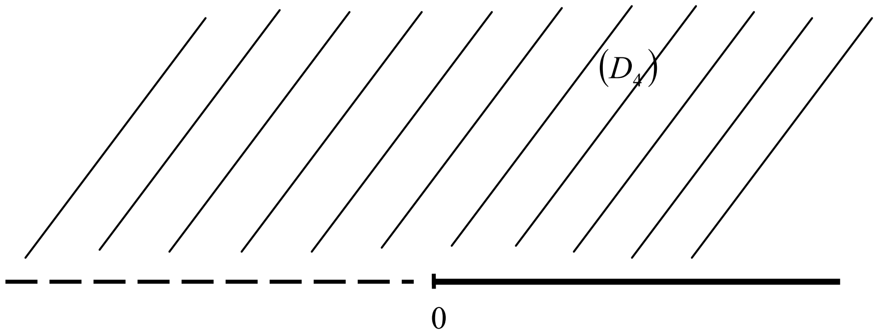


D_2 соҳага конформ акслантиради. $z_3 = {}_{+}\sqrt{z_2}$ функция D_2 соҳани

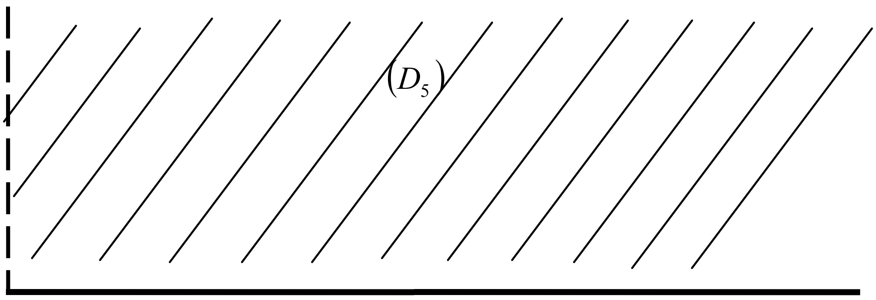


D_3 соҳага конформ акслантиради. $z_4 = -\dfrac{z_3 + \sqrt{2}}{z_3 - \sqrt{2}}$ функция

D_3 соҳани

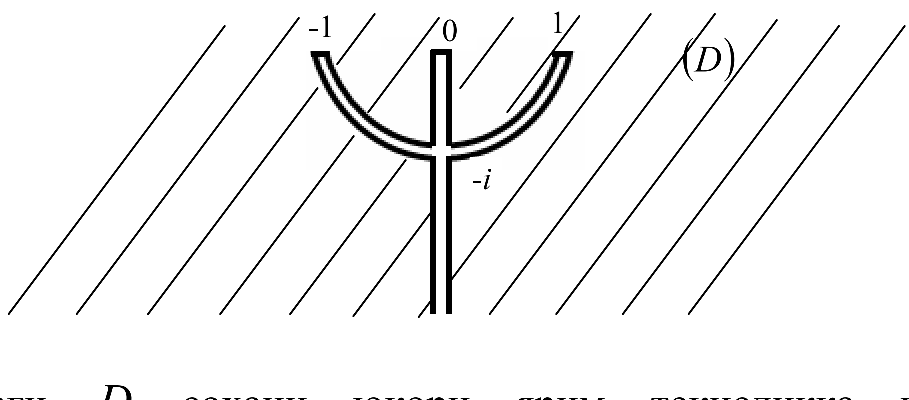


D_4 соҳага конформ аксантиради. $w = {}_{+}\sqrt{z_4}$ функция D_4 соҳани



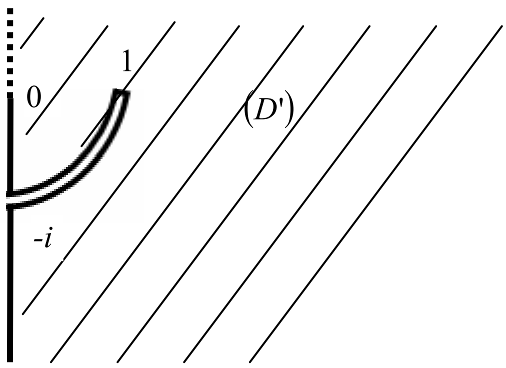
D_5 соҳага конформ аксантиради. Энди симметрия принципини қўлласак, $w = {}_{+}\sqrt{\dfrac{\sqrt{2} + {}_{+}\sqrt{z^2+1}}{\sqrt{2} - {}_{+}\sqrt{z^2+1}}}$ функция берилган D соҳани юқори ярим текисликка конформ аксантирар экан.

12 – мисол.

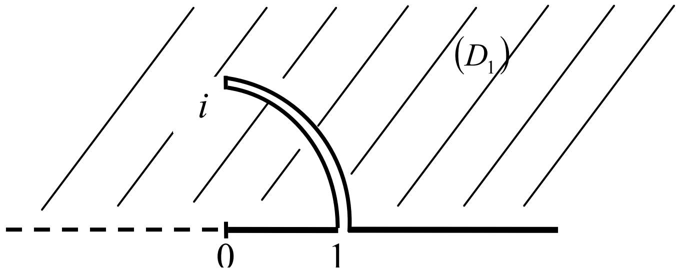


Чизмадаги D соҳани юқори ярим текисликка конформ аксантирувчи $w = f(z)$ функцияни тузинг.

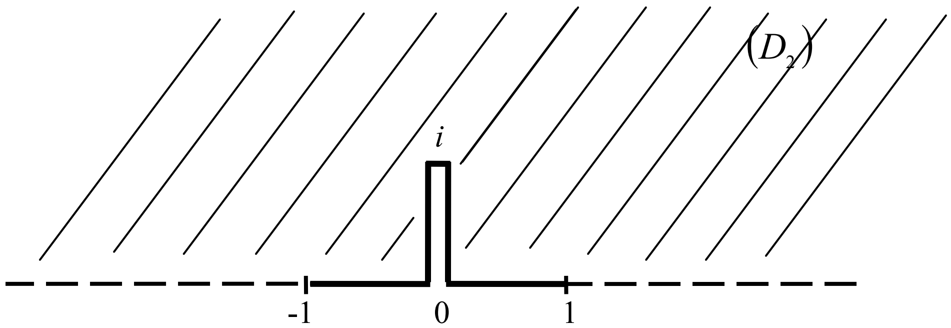
Ечиш.



D' соҳани $z_1 = e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot z$ функция

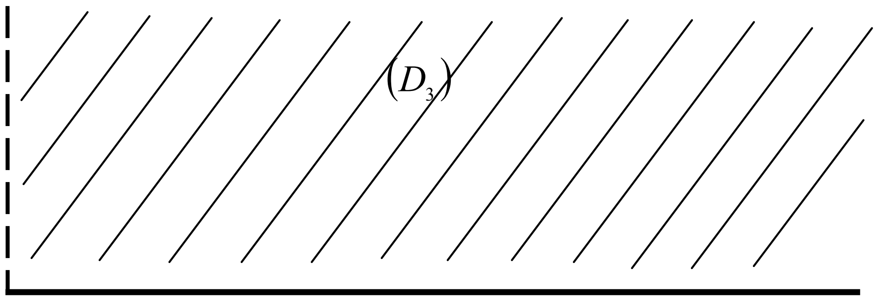


D_1 соҳага конформ акслантиради. $z_2 = \dfrac{z_1 - 1}{z_1 + 1}$ функция D_1 соҳани



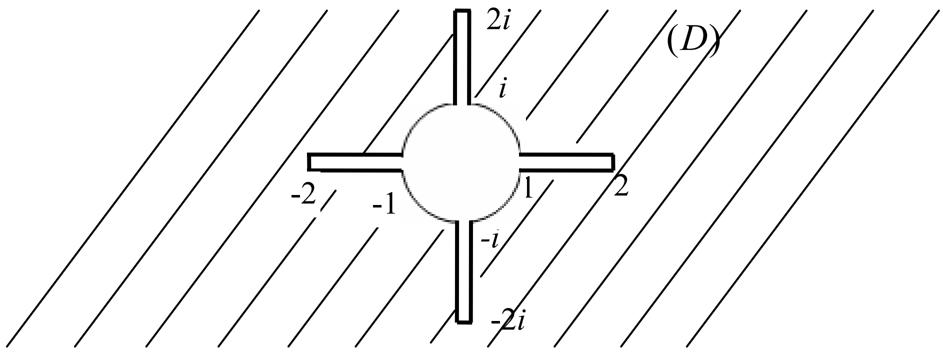
D_2 соҳага конформ акслантиради. Юқоридаги 11 – мисолга кўра

D_2 соҳани $w = {}_{+}\sqrt{\dfrac{\sqrt{2} + {}_{+}\sqrt{z_2^2 + 1}}{\sqrt{2} - {}_{+}\sqrt{z_2^2 + 1}}}$ функция



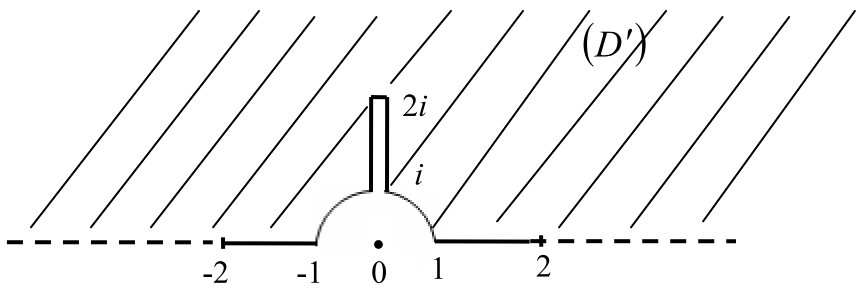
D_3 соҳага конформ акслантиради. Энди симметрия принципини қўлласак, $w = \sqrt[+]{\dfrac{\sqrt{2} + \sqrt[+]{\left(\dfrac{iz-1}{iz+1}\right)^2 + 1}}{\sqrt{2} - \sqrt[+]{\left(\dfrac{iz-1}{iz+1}\right)^2 + 1}}}$ функция берилган D соҳани юқори ярим текисликка конформ акслантирар экан.

13 – мисол.

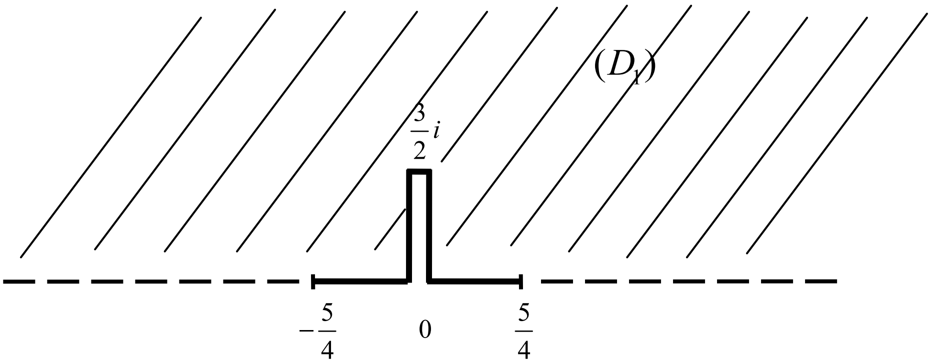


Чизмадаги D соҳани юқори ярим текисликка конформ акслантирувчи $w = f(z)$ функцияни тузинг.

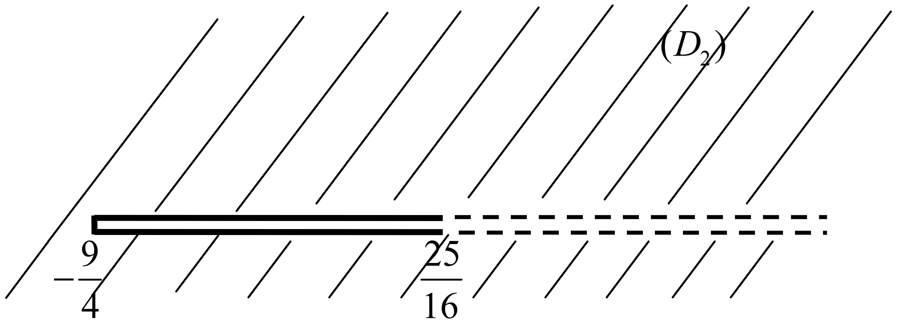
Ечиш.



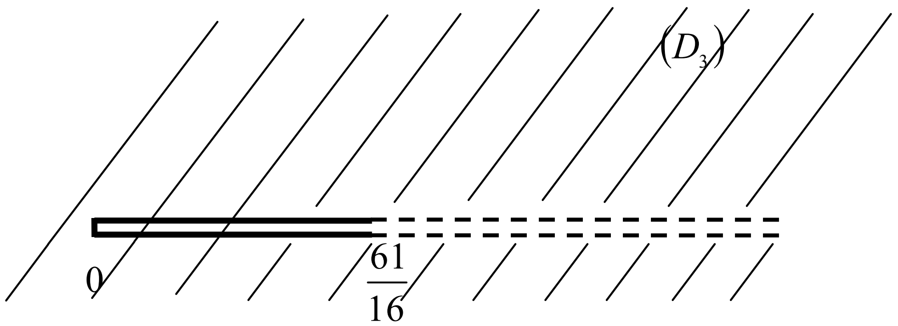
D' соҳани $z_1 = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ функция



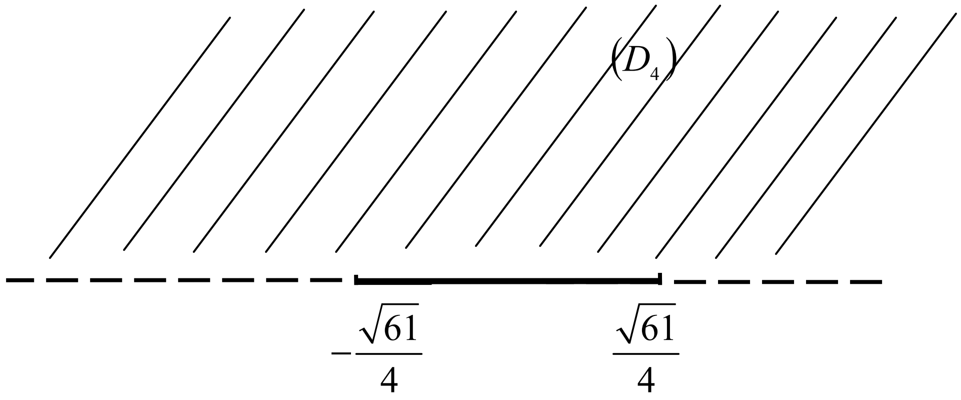
D_1 соҳага конформ акслантиради. $z_2 = z_1^2$ функция D_1 соҳани



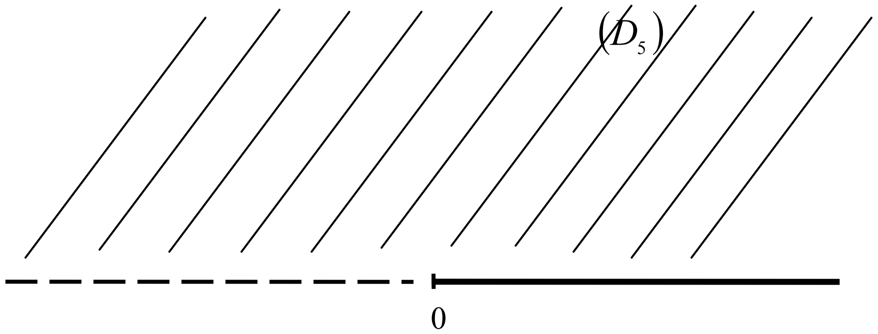
D_2 соҳага конформ акслантиради. $z_3 = z_2 + \frac{9}{4}$ функция D_2 соҳани



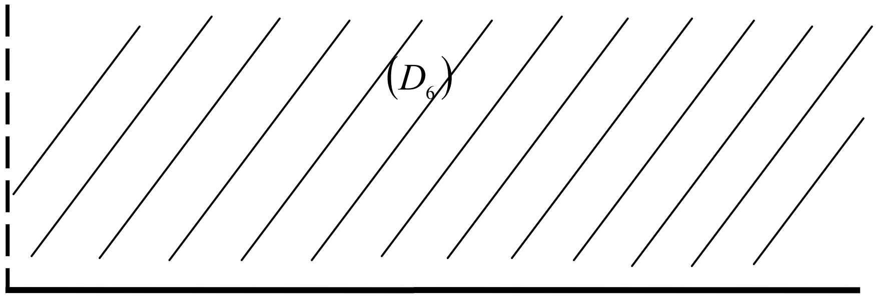
D_3 соҳага конформ акслантиради. $z_4 = {}_{+}\sqrt{z_3}$ функция D_3 соҳани



D_4 соҳага конформ акслантиради. $z_5 = \dfrac{\dfrac{\sqrt{61}}{4} + z_4}{\dfrac{\sqrt{61}}{4} - z_4}$ функция D_4 соҳани



D_5 соҳага конформ акслантиради. $w = {}_{+}\sqrt{z_5}$ функция D_5 соҳани



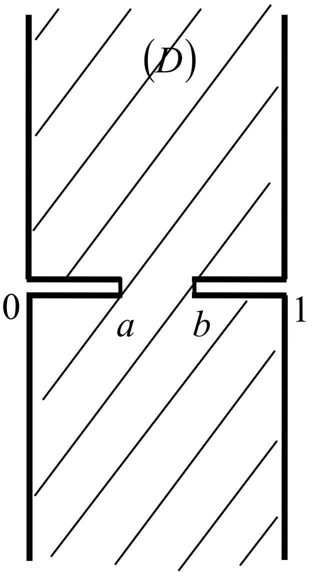
D_6 соҳага конформ акслантиради. Энди симметрия принципини қўлласак,

$$w =$$

$$= {}_{+}\sqrt{\frac{\dfrac{\sqrt{61}}{4} + {}_{+}\sqrt{\dfrac{9}{4}+\dfrac{1}{4}\left(z+\dfrac{1}{z}\right)^2}}{\dfrac{\sqrt{61}}{4} - {}_{+}\sqrt{\dfrac{9}{4}+\dfrac{1}{4}\left(z+\dfrac{1}{z}\right)^2}}} = {}_{+}\sqrt{\frac{\sqrt{61} + {}_{+}\sqrt{36+4\left(z+\dfrac{1}{z}\right)^2}}{\sqrt{61} - {}_{+}\sqrt{36+4\left(z+\dfrac{1}{z}\right)^2}}}$$

функция берилган D соҳани юқори ярим текисликка конформ акслантирар экан.

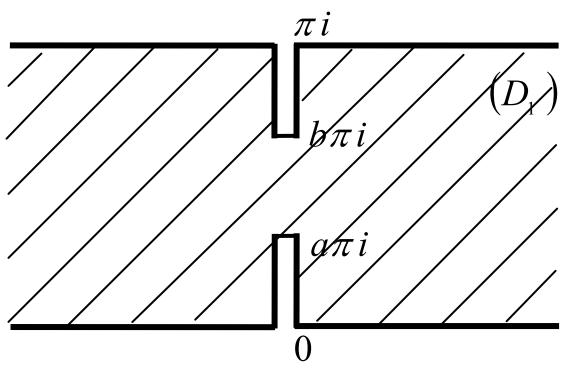
14 – мисол.



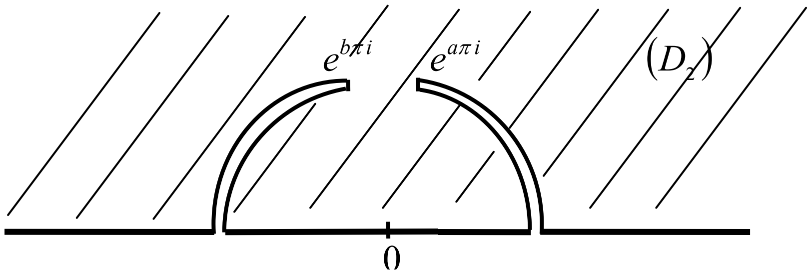
$(0 < a < b < 1)$

Чизмадаги D соҳани юқори ярим текисликка конформ акслантирувчи $w = f(z)$ функцияни тузамиз.

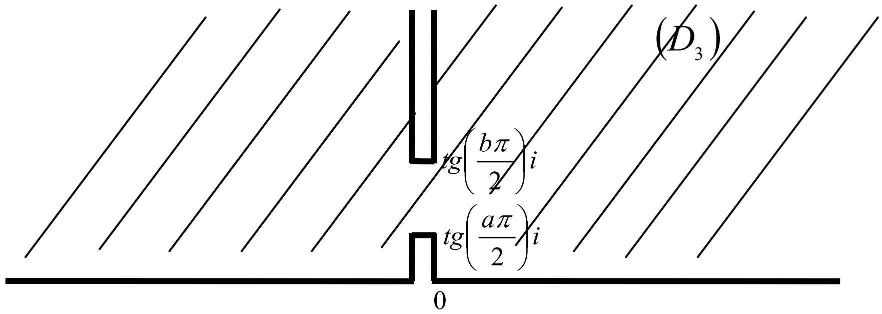
Ечиш. $z_1 = \pi \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} z$ функция D соҳани



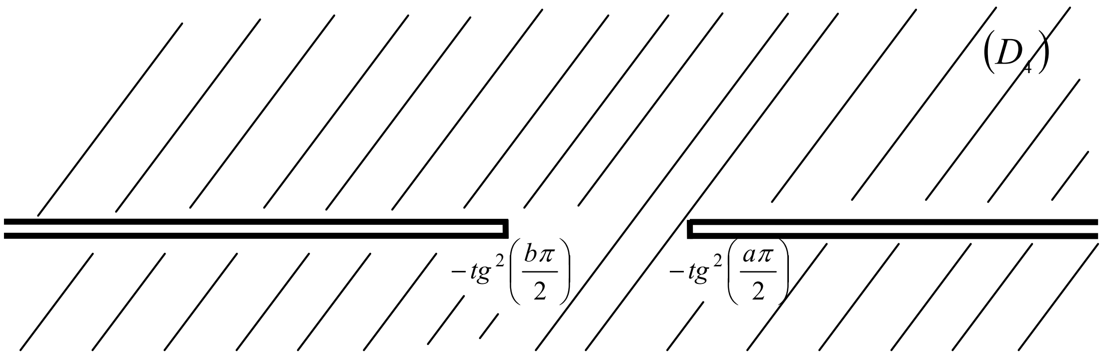
D_1 соҳага конформ акслантиради. $z_2 = e^{z_1}$ функция D_1 соҳани



D_2 соҳага конформ акслантиради. $z_3 = \dfrac{z_2 - 1}{z_2 + 1}$ функция D_2 соҳани

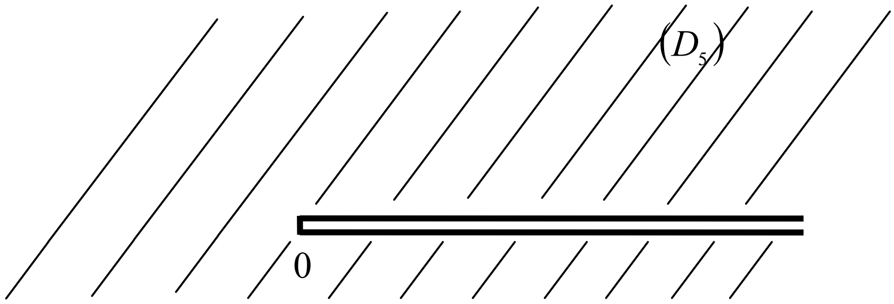


D_3 соҳага конформ акслантиради. $z_4 = z_3^2$ функция D_3 соҳани

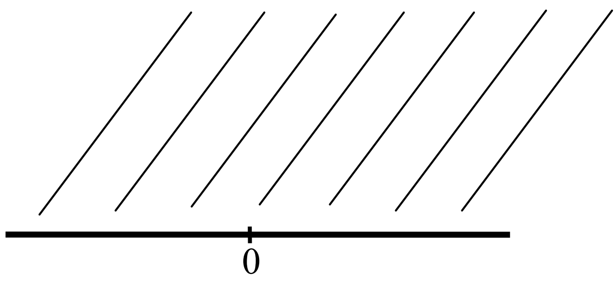


D_4 соҳага конформ акслантиради. $z_5 = \dfrac{z_4 + tg^2\left(\dfrac{a\pi}{2}\right)}{z_4 + tg^2\left(\dfrac{b\pi}{2}\right)}$

функция D_4 соҳани



D_5 соҳага конформ акслантиради. $w = {}_{+}\sqrt{z_5}$ функция D_5 соҳани



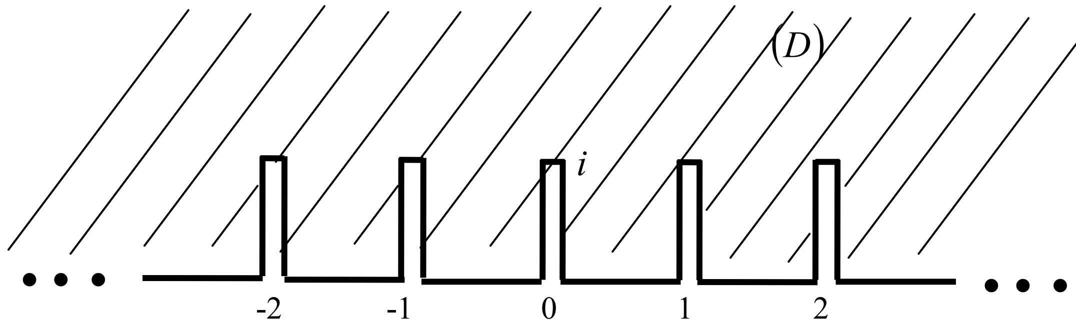
юқори ярим текисликка конформ акслантиради. Шундай қилиб,

$$w = {}_{+}\sqrt{\frac{tg^2\left(\frac{a\pi}{2}\right)+\left(\frac{e^{\pi i z}-1}{e^{\pi i z}+1}\right)^2}{tg^2\left(\frac{b\pi}{2}\right)+\left(\frac{e^{\pi i z}-1}{e^{\pi i z}+1}\right)^2}} = {}_{+}\sqrt{\frac{tg^2\left(\frac{a\pi}{2}\right)-tg^2\left(\frac{\pi z}{2}\right)}{tg^2\left(\frac{b\pi}{2}\right)-tg^2\left(\frac{\pi z}{2}\right)^2}}$$

функция D соҳани юқори ярим текисликка конформ акслантирар экан.

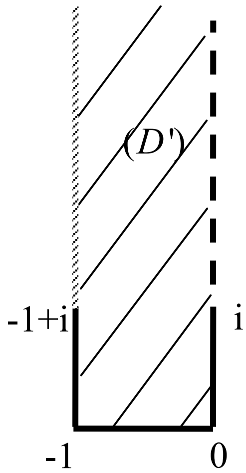
Энди симметрик принципи қўлланадиган экзотик ҳолатга доир мисоллар ечамиз.

15 – мисол.

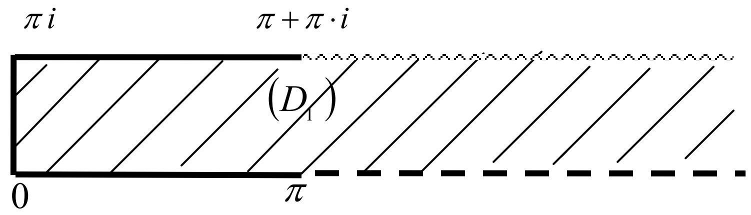


Чизмадаги D соҳани юқори ярим текисликка конформ акслантирувчи $w = f(z)$ функцияни тузинг.

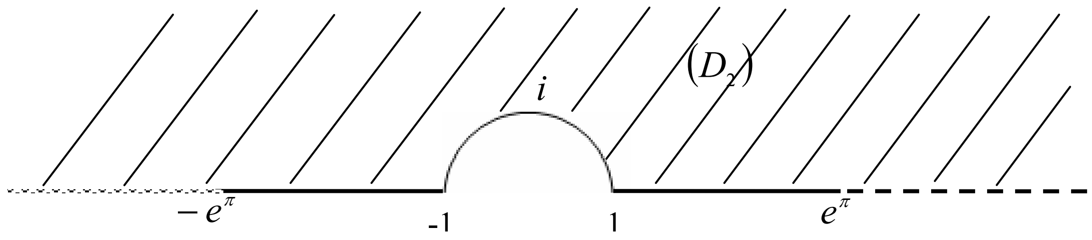
Ечиш. Чизмадаги



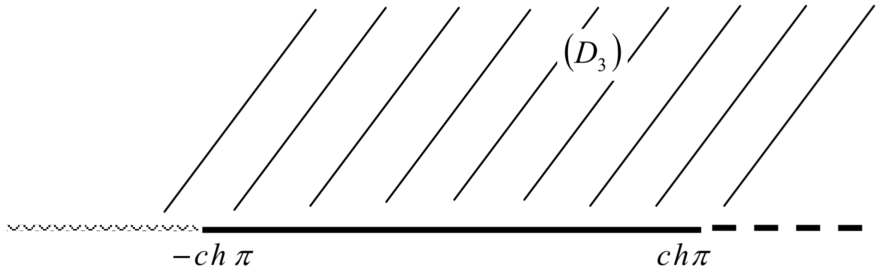
D' соҳани $z_1 = \dfrac{\pi}{i} z$ функция



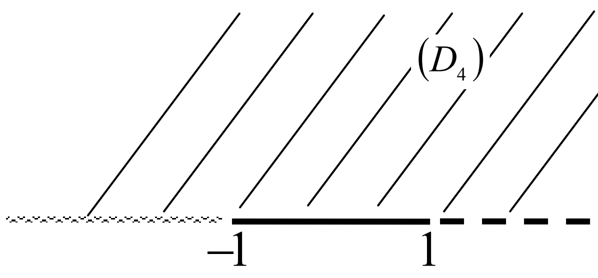
D_1 соҳага конформ акслантиради. $z_2 = e^{z_1}$ функция D_1 соҳани



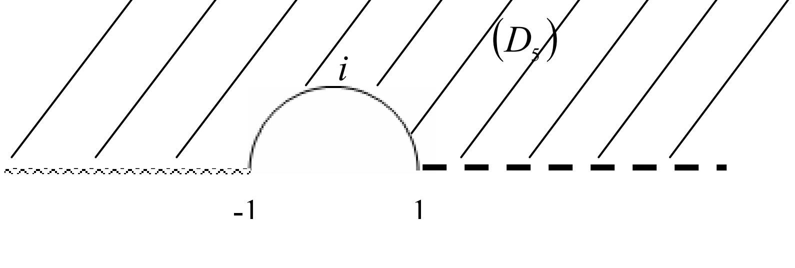
D_2 соҳага конформ акслантиради. $z_3 = \frac{1}{2}\left(z_2 + \frac{1}{z_2}\right)$ функция D_2 соҳани



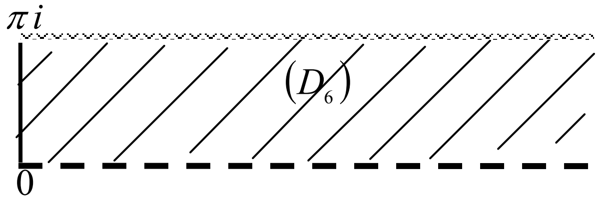
D_3 соҳага конформ акслантиради. $z_4 = \frac{1}{ch\pi} \cdot z_3$ функция D_3 соҳани



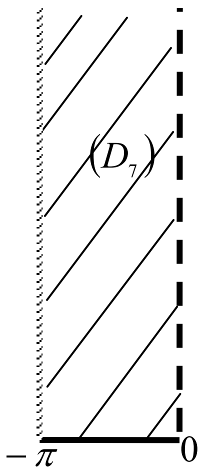
D_4 соҳага конформ акслантиради. $z_5 = z_4 + {}_{+}\sqrt{z_4^2 - 1}$ функция D_4 соҳани



D_5 соҳага конформ акслантиради. $z_6 = \ln z_5$ функция D_5 соҳани



D_6 соҳага конформ акслантиради. $w = i\,z_6$ функция D_6 соҳани

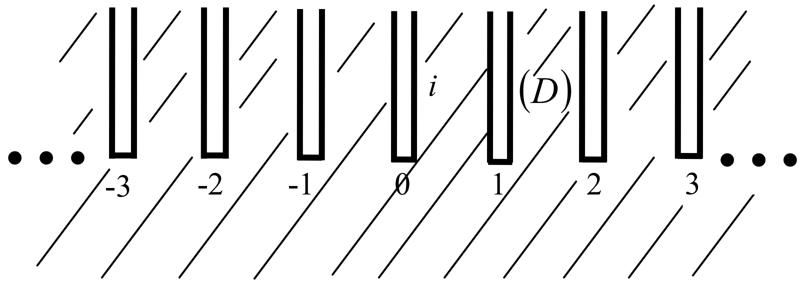


D_7 соҳага конформ акслантиради. Энди симметрия принципини экзотик ҳолатига қўлласак, юқори ярим текисликни ҳосил қиламиз. Шундай қилиб,

$$w = i \ln\left(\frac{1}{ch\pi} \cdot \cos\pi z + \sqrt[+]{\frac{\cos^2 \pi z}{ch^2 \pi} - 1} \right)$$

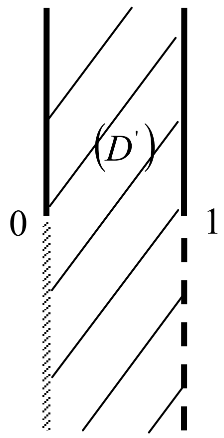
функция D соҳани юқори ярим текисликка конформ акслантирар экан.

16 – мисол.

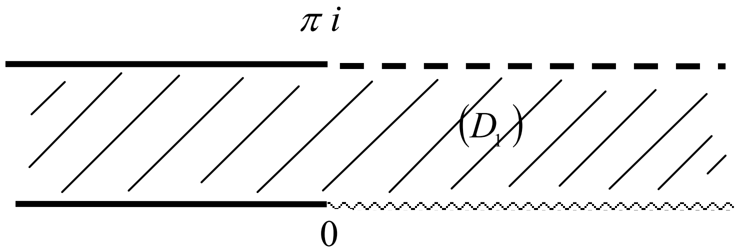


Чизмадаги D соҳани юқори ярим текисликка конформ аслантирувчи $w = f(z)$ функцияни тузинг.

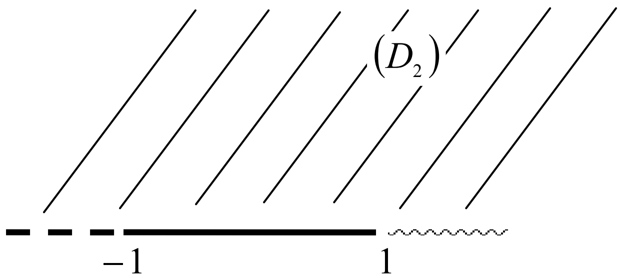
Ечиш. Чизмадаги



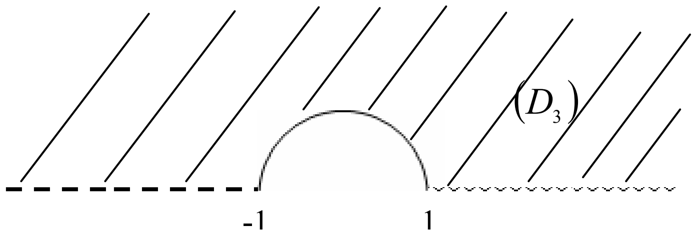
D' соҳани $z_1 = \pi i z$ функция



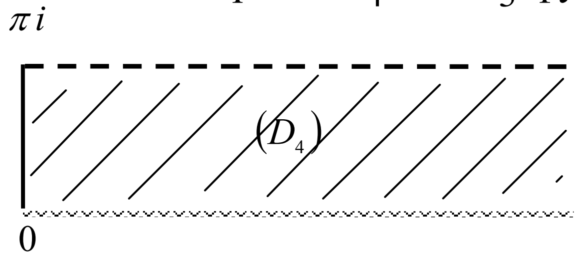
D_1 соҳага конформ акслантиради. $z_2 = e^{z_1}$ функция D_1 соҳани



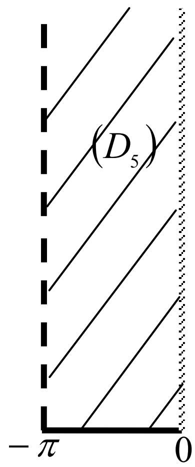
D_2 соҳага конформ акслантиради. $z_3 = z_2 + {}_{+}\sqrt{z_2^2 - 1}$ функция D_2 соҳани



D_3 соҳага конформ акслантиради. $z_4 = \ln z_3$ функция D_3 соҳани



D_4 соҳага конформ акслантиради. $w = i\,z_4$ функция D_4 соҳани

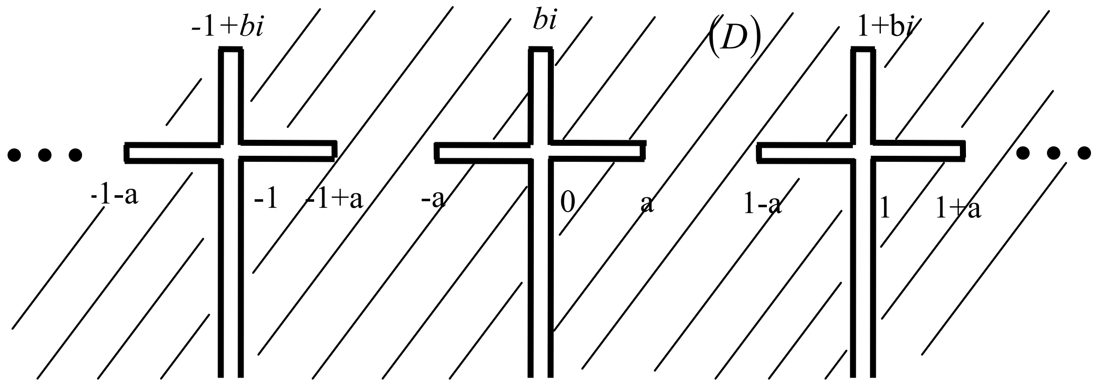


D_5 соҳага конформ акслантиради. Энди симметрия принципини экзотик ҳолатга қўлласак, юқори ярим текисликни ҳосил қиламиз. Шундай қилиб,

$$w = i\ln\left(e^{\pi i z} + {}_{+}\sqrt{e^{2\pi i z} - 1} \right)$$

функция D соҳани юқори ярим текисликка конформ акслантирар экан.

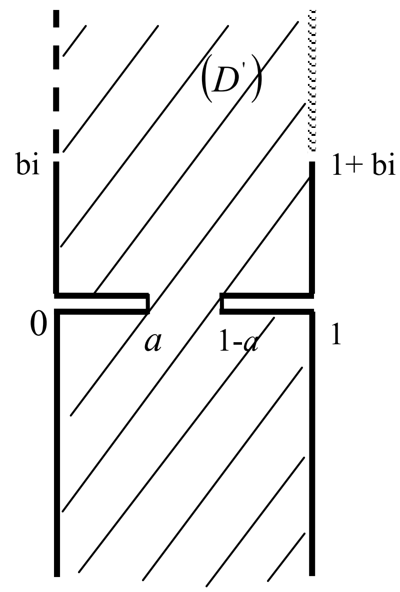
17 – мисол.



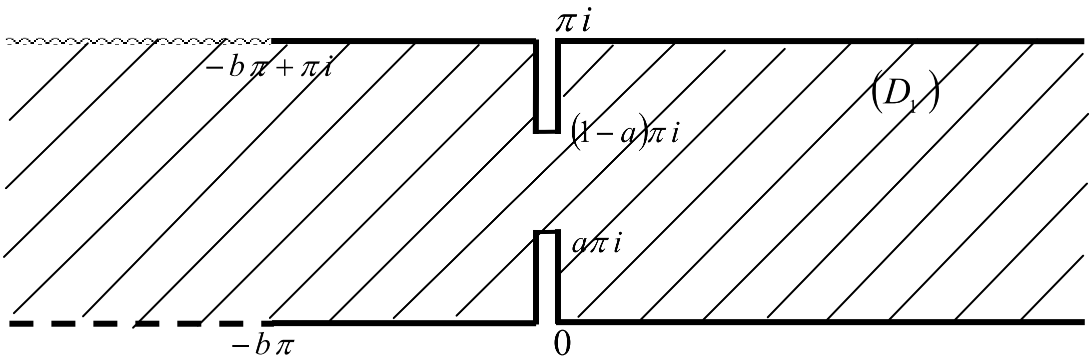
$$\left(0<b,\quad 0<a<\frac{1}{2}\right)$$

Чизмадаги D соҳани юқори ярим текисликка конформ акслантирувчи $w=f(z)$ функцияни тузинг.

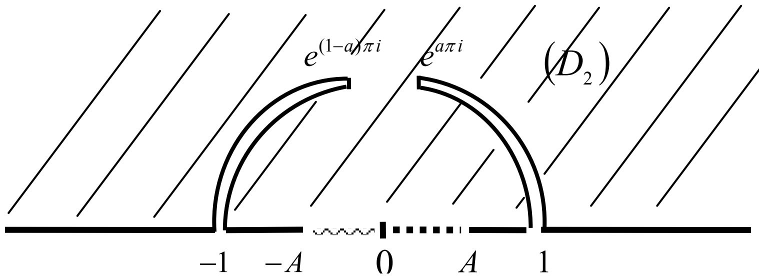
Ечиш. Чизмадаги



D' соҳани $z_1 = i\pi z$ функция

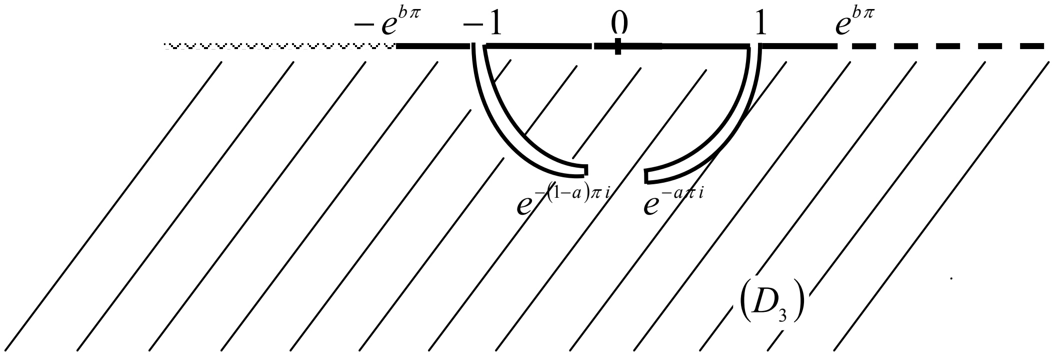


D_1 соҳага конформ акслантиради. $z_2 = e^{z_1}$ функция D_1 соҳани

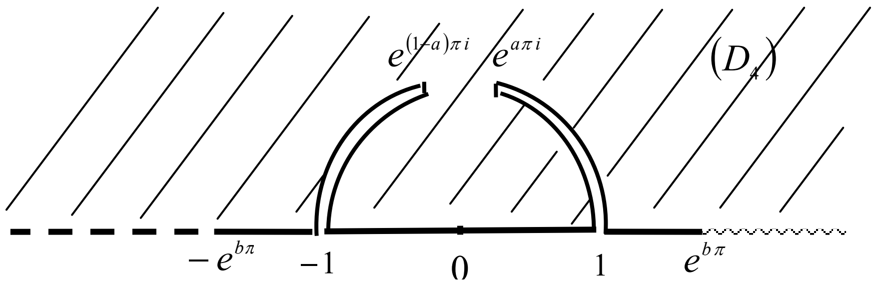


(бунда $A = e^{-b\pi}$)

D_2 соҳага конформ акслантиради. $z_3 = \dfrac{1}{z_2}$ функция D_2 соҳани

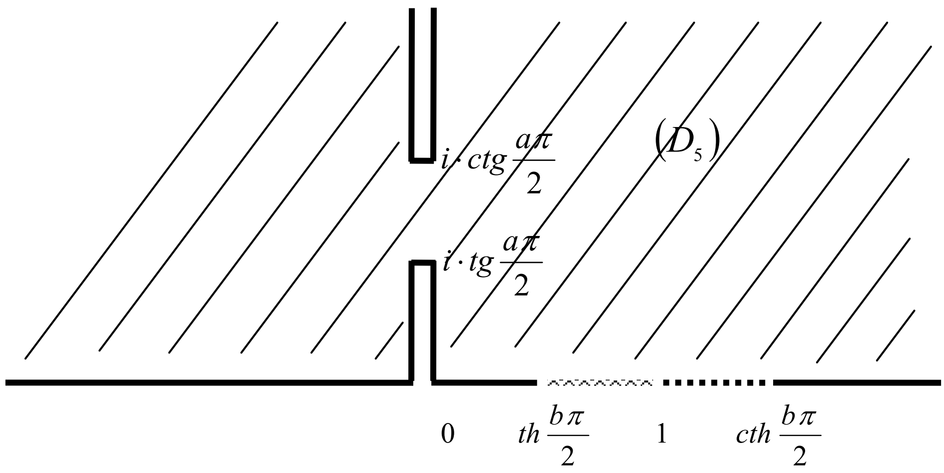


D_3 соҳага конформ акслантиради. $z_4 = -z_3$ функция D_3 соҳани

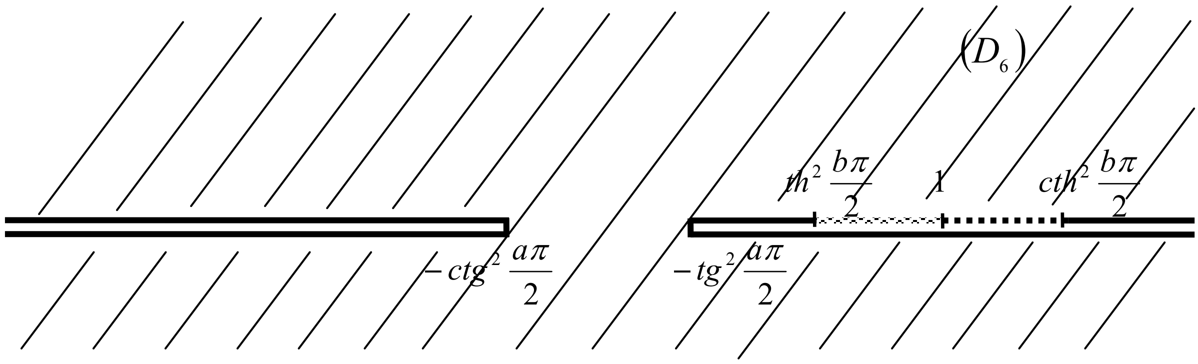


D_4 соҳага конформ акслантиради. $z_5 = \dfrac{z_4 - 1}{z_4 + 1}$ функция D_4

соҳани

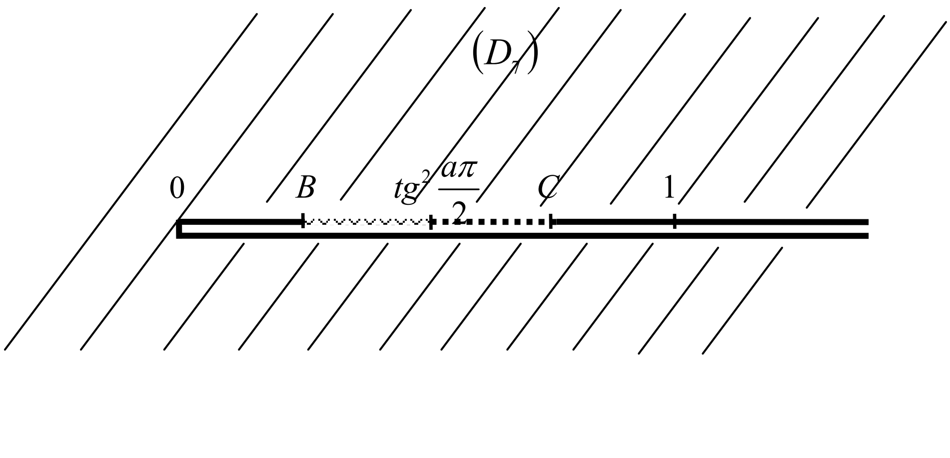


D_5 соҳага конформ акслантиради. $z_6 = z_5^2$ функция D_5 соҳани



D_6 соҳага конформ акслантиради. $z_7 = \dfrac{z_6 + tg^2 \dfrac{a\pi}{2}}{z_6 + ctg^2 \dfrac{a\pi}{2}}$ функция

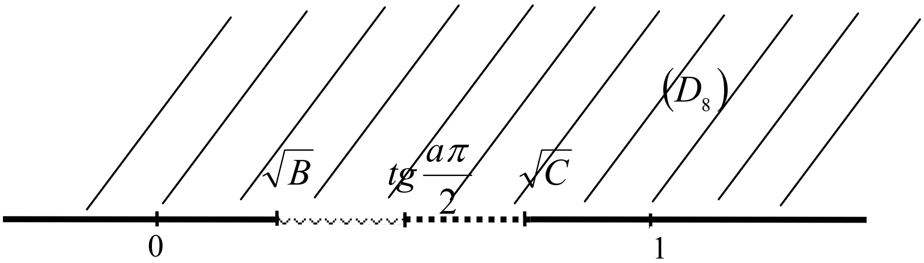
D_6 соҳани



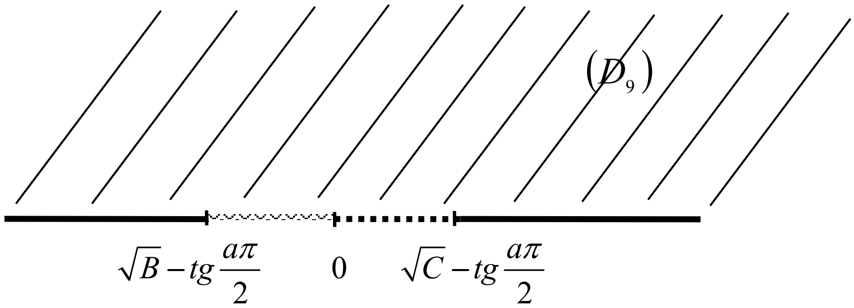
D_7 соҳага конформ акслантиради, бунда

$$B=\frac{th^2\frac{b\pi}{2}+tg^2\frac{a\pi}{2}}{th^2\frac{b\pi}{2}+ctg^2\frac{a\pi}{2}}\,,\quad C=\frac{cth^2\frac{b\pi}{2}+tg^2\frac{a\pi}{2}}{cth^2\frac{b\pi}{2}+ctg^2\frac{a\pi}{2}}\,.$$

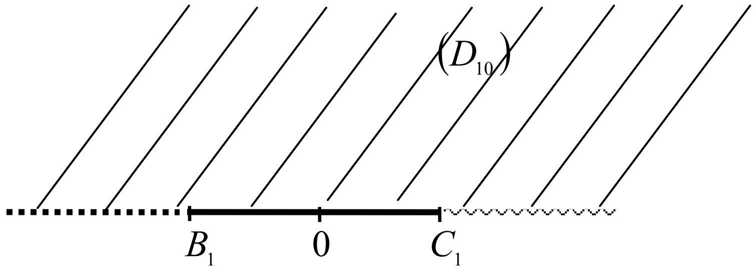
$z_8={}_{+}\sqrt{z_7}$ функция D_7 соҳани



D_8 соҳага конформ акслантиради. $z_9=z_8-tg\dfrac{a\pi}{2}$ функция D_8 соҳани

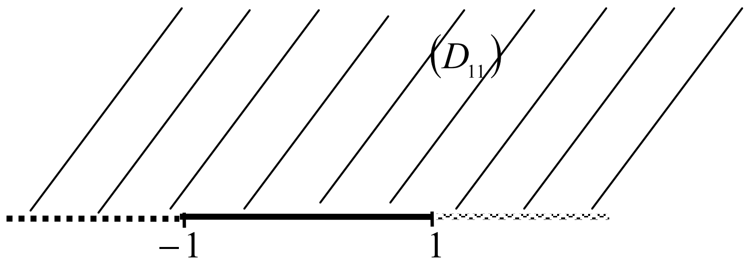


D_9 соҳага конформ акслантиради. $z_{10}=-\dfrac{1}{z_9}$ функция D_9 соҳани

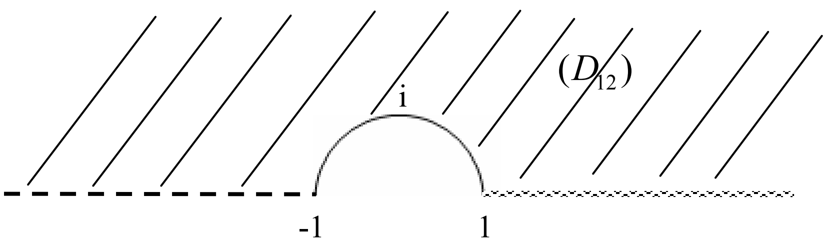


(бунда $B_1 = \dfrac{-1}{\sqrt{C} - tg\dfrac{a\pi}{2}}$, $C_1 = \dfrac{-1}{\sqrt{B} - tg\dfrac{a\pi}{2}}$)

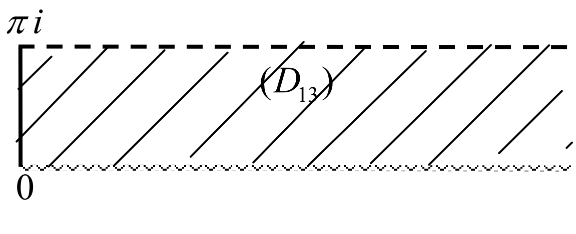
D_{10} соҳага конформ акслантиради. $z_{11} = \dfrac{2}{C_1 - B_1} z_{10} - \dfrac{C_1 + B_1}{C_1 - B_1}$ функция D_{10} соҳани



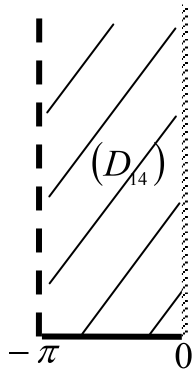
D_{11} соҳага конформ акслантиради. $z_{12} = z_{11} + {}_{+}\sqrt{z_{11}^2 - 1}$ функция D_{11} соҳани



D_{12} соҳага конформ акслантиради. $z_{13} = \ln z_{12}$ функция D_{12} соҳани



D_{13} соҳага конформ акслантиради. $w = i\, z_{13}$ функция D_{13} соҳани



D_{14} соҳага конформ акслантиради. Энди симметрия принципини экзотик ҳолатга қўлласак, юқори ярим текисликни ҳосил қиламиз. Шундай қилиб,

$$w = i\ln\left[\frac{2}{C_1 - B_1}\cdot\frac{-1}{\sqrt{\dfrac{tg^2\dfrac{a\pi}{2} - ctg^2\dfrac{\pi z}{2}}{ctg^2\dfrac{a\pi}{2} - ctg^2\dfrac{\pi z}{2}}} - tg\dfrac{a\pi}{2}} - \frac{C_1 + B_1}{C_1 - B_1} + \right.$$

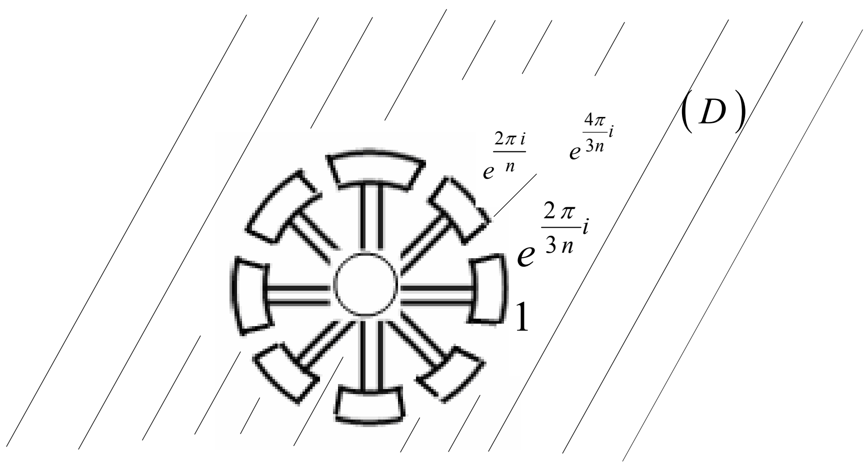
$$\left. + \sqrt{\left(\frac{2}{C_1 - B_1}\cdot\frac{-1}{\sqrt{\dfrac{tg^2\dfrac{a\pi}{2} - ctg^2\dfrac{\pi z}{2}}{ctg^2\dfrac{a\pi}{2} - ctg^2\dfrac{\pi z}{2}}} - tg\dfrac{a\pi}{2}} - \frac{C_1 + B_1}{C_1 - B_1}\right)^2 - 1}\right]$$

функция D соҳани юқори ярим текисликка конформ акслантирар экан, бунда

$$B_1=\frac{-1}{\sqrt{\dfrac{cth^2\dfrac{b\pi}{2}+tg^2\dfrac{a\pi}{2}}{cth^2\dfrac{b\pi}{2}+ctg^2\dfrac{a\pi}{2}}}-tg\dfrac{a\pi}{2}},$$

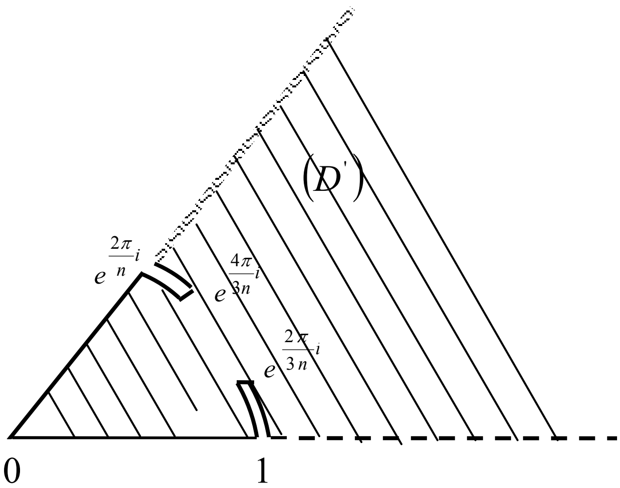
$$C_1=\frac{-1}{\sqrt{\dfrac{th^2\dfrac{b\pi}{2}+tg^2\dfrac{a\pi}{2}}{th^2\dfrac{b\pi}{2}+ctg^2\dfrac{a\pi}{2}}}-tg\dfrac{a\pi}{2}}.$$

18 – мисол.

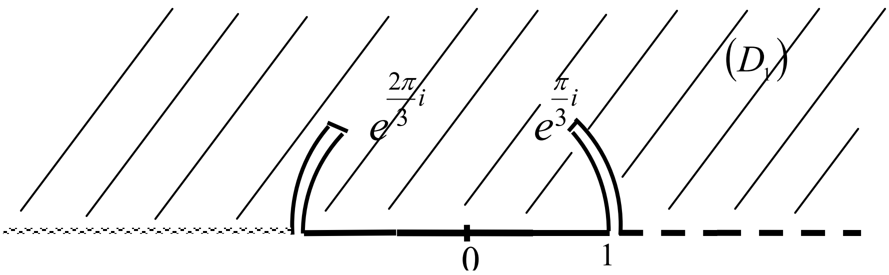


Чизмадаги D соҳани юқори ярим текисликка конформ акслантирувчи $w=f(z)$ функцияни тузинг.

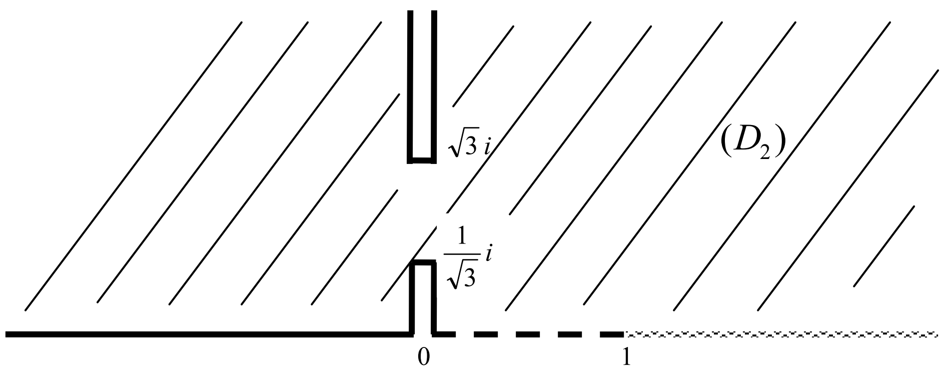
Ечиш. Чизмадаги



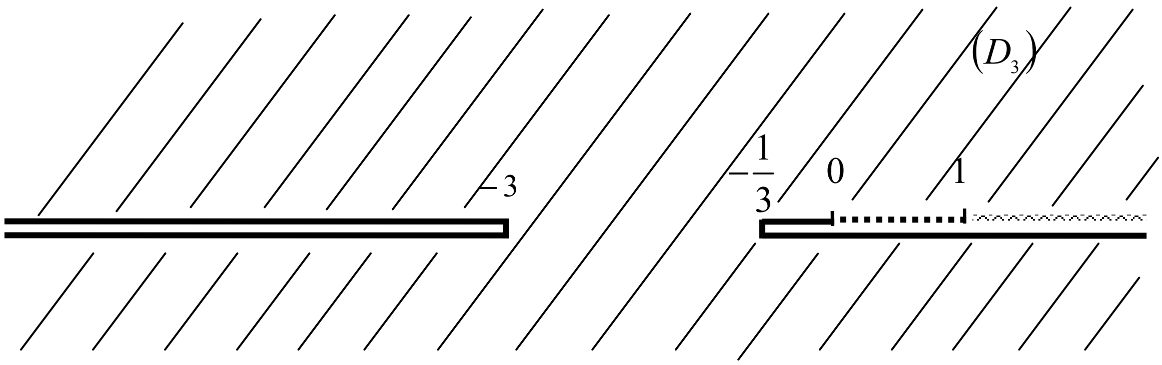
D' соҳани $z_1 = z^{\frac{n}{2}}$ функция



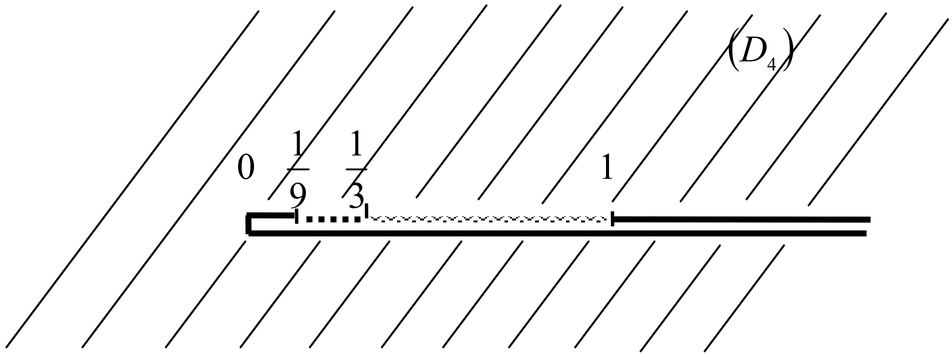
D_1 соҳага конформ акслантиради. $z_2 = \dfrac{z_1 - 1}{z_1 + 1}$ функция D_1 соҳани



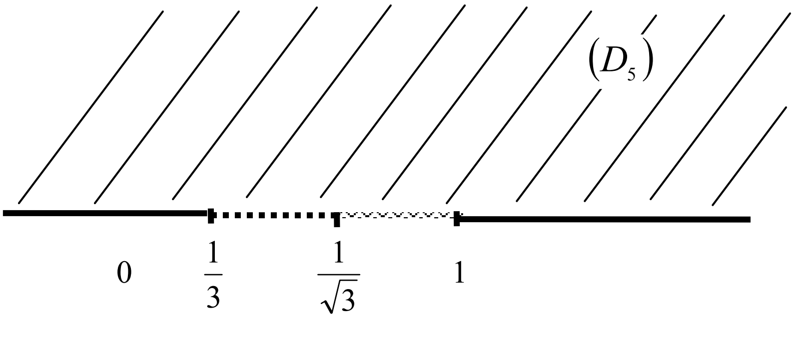
D_2 соҳага конформ акслантиради. $z_3 = z_2^2$ функция D_2 соҳани



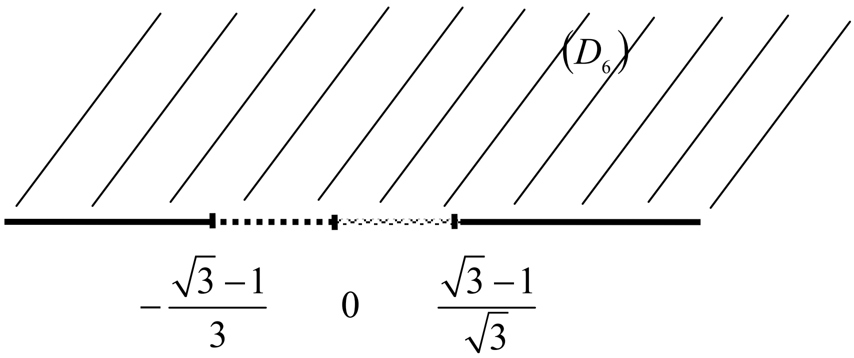
D_3 соҳага конформ акслантиради. $z_4 = \dfrac{z_3 + \frac{1}{3}}{z_3 + 3}$ функция D_3 соҳани



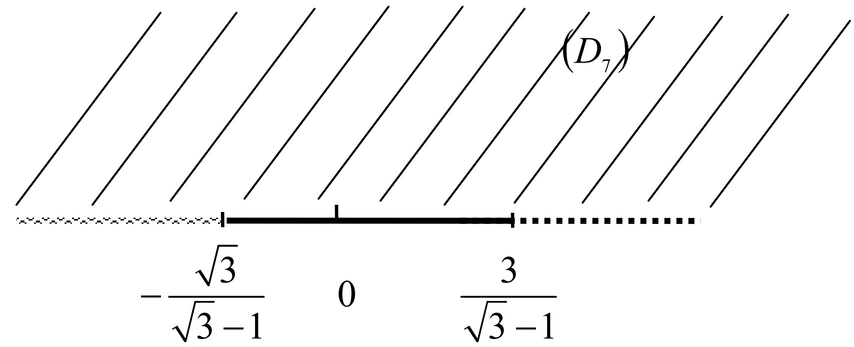
D_4 соҳага конформ акслантиради. $z_5 = {}_{+}\sqrt{z_4}$ функция D_4 соҳани



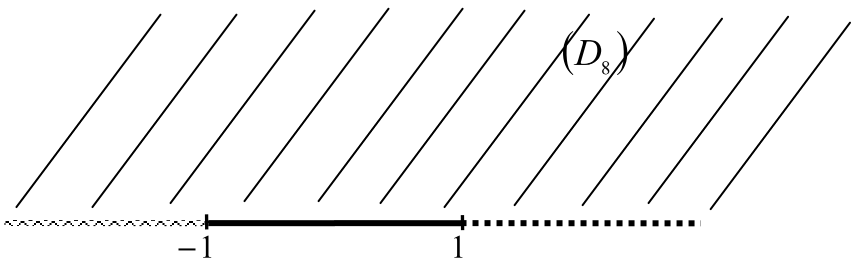
D_5 соҳага конформ акслантиради. $z_6 = z_5 - \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ функция D_5 соҳани



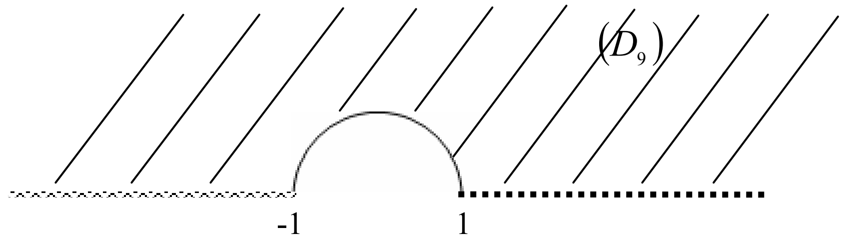
D_6 соҳага конформ акслантиради. $z_7 = -\dfrac{1}{z_6}$ функция D_6 соҳани



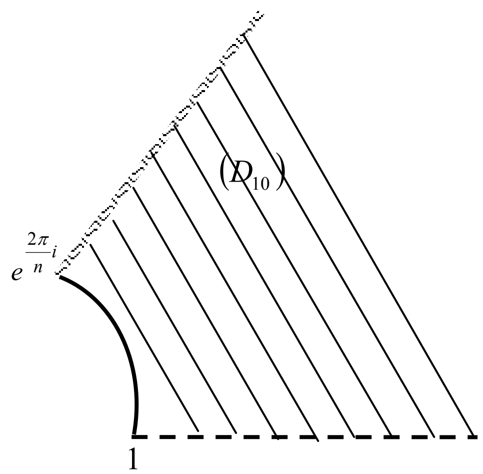
D_7 соҳага конформ акслантиради. $z_8 = \dfrac{4-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} z_7 - \left(2-\sqrt{3}\right)$ функция D_7 соҳани



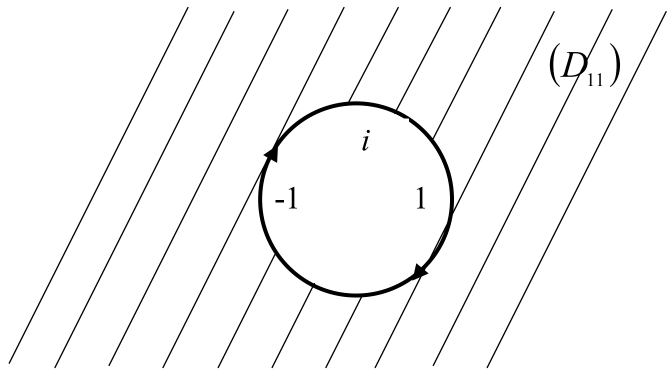
D_8 соҳага конформ акслантиради. $z_9 = z_8 + {}_{+}\sqrt{z_8^2 - 1}$ функция D_8 соҳани



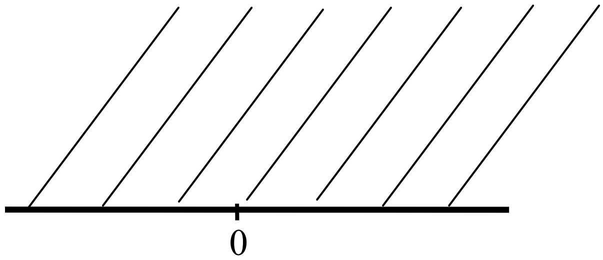
D_9 соҳага конформ акслантиради. $z_{10} = z_9^{\frac{2}{n}}$ функция D_9 соҳани



D_{10} соҳага конформ акслантиради. Энди симметрия принципини экзотик ҳолатга қўлласак



D_{11} соҳага эга бўламиз. $w = i\dfrac{z_{10}+1}{z_{10}-1}$ функция D_{11} соҳани



юқори ярим текисликка конформ акслантиради.

Шундай қилиб,

$$w=i\frac{\left[\left(\dfrac{4-2\sqrt{3}}{1-\sqrt{\dfrac{3\left(z^{\frac{n}{2}}-1\right)^2+\left(z^{\frac{n}{2}}+1\right)^2}{\left(z^{\frac{n}{2}}-1\right)^2+3\left(z^{\frac{n}{2}}+1\right)^2}}}-2+\sqrt{3}\right)+\sqrt{\left(\dfrac{4-2\sqrt{3}}{1-\sqrt{\dfrac{3\left(z^{\frac{n}{2}}-1\right)^2+\left(z^{\frac{n}{2}}+1\right)^2}{\left(z^{\frac{n}{2}}-1\right)^2+3\left(z^{\frac{n}{2}}+1\right)^2}}}-2+\sqrt{3}\right)^2-1}\,\right]^{\frac{2}{n}}+1}{\left[\left(\dfrac{4-2\sqrt{3}}{1-\sqrt{\dfrac{3\left(z^{\frac{n}{2}}-1\right)^2+\left(z^{\frac{n}{2}}+1\right)^2}{\left(z^{\frac{n}{2}}-1\right)^2+3\left(z^{\frac{n}{2}}+1\right)^2}}}-2+\sqrt{3}\right)+\sqrt{\left(\dfrac{4-2\sqrt{3}}{1-\sqrt{\dfrac{3\left(z^{\frac{n}{2}}-1\right)^2+\left(z^{\frac{n}{2}}+1\right)^2}{\left(z^{\frac{n}{2}}-1\right)^2+3\left(z^{\frac{n}{2}}+1\right)^2}}}-2+\sqrt{3}\right)^2-1}\,\right]^{\frac{2}{n}}-1}$$

функция D соҳани юқори ярим текисликка конформ акслантирар экан.

Мустақил ечиш учун мисоллар

Қуйидаги функцияларнинг берилган соҳада бир варақли эканлигини кўрсатинг:

1. $w = z^4; \quad D = \{z: \quad \operatorname{Re} z > 0, \ \operatorname{Im} z > 0\}$

2. $w = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right); \quad D = \{\, z: \quad |\, z \,| < 1\,\}$

3. $w = z^n; \quad D = \left\{ z: \quad 0 < \arg z < \dfrac{2\pi}{n} \right\}$

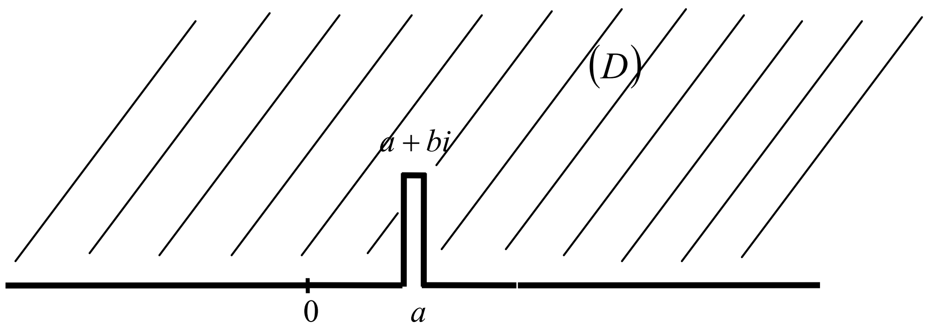
Қуйидаги функциялар соҳанинг ҳар бир нуқтасида бир варақли, лекин соҳанинг ўзида бир варақли эмаслигини кўрсатинг:

4. $w = z^4; \quad D = \{\, z: \quad \operatorname{Im} z > 0\,\}$

5. $w = e^z; \quad D = \{\, z: \quad \operatorname{Im} z > 0\,\}$

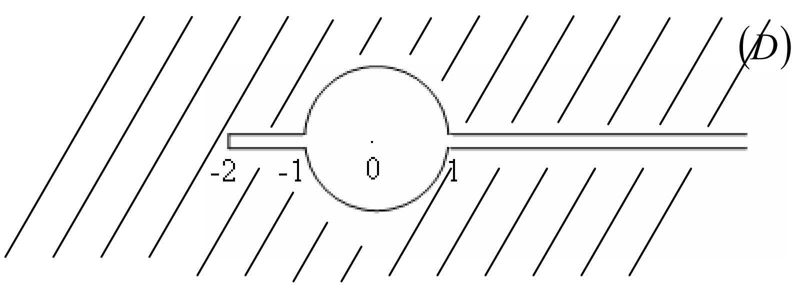
Қуйидаги чизмада тасвирланган соҳаларни юқори ярим текисликка конформ акслантирувчи функцияларни тузинг:

6.

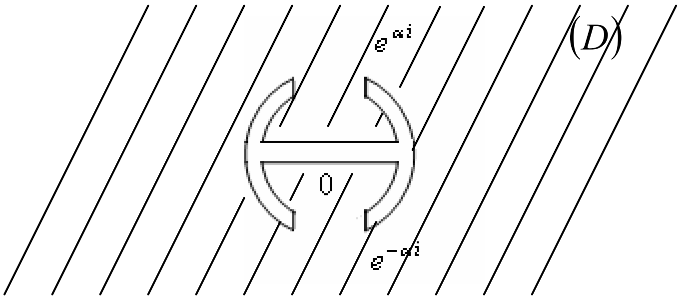


$(b > 0)$

7.

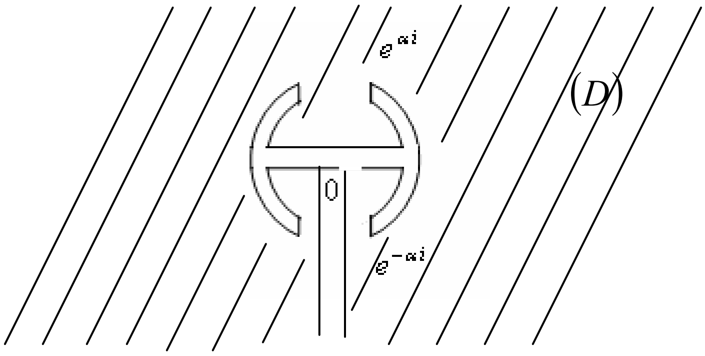


8.



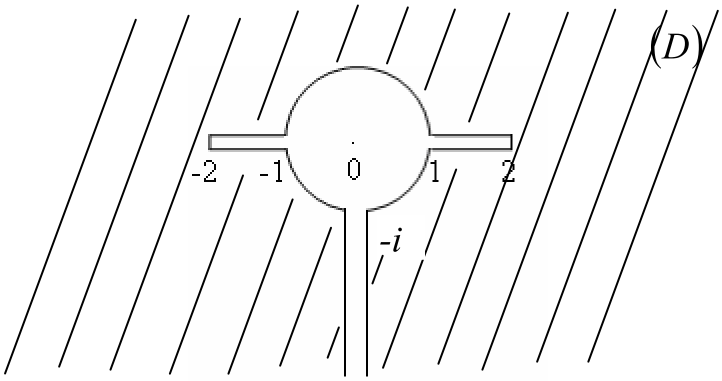
$e^{\alpha i}$
(D)
0
$e^{-\alpha i}$

9.



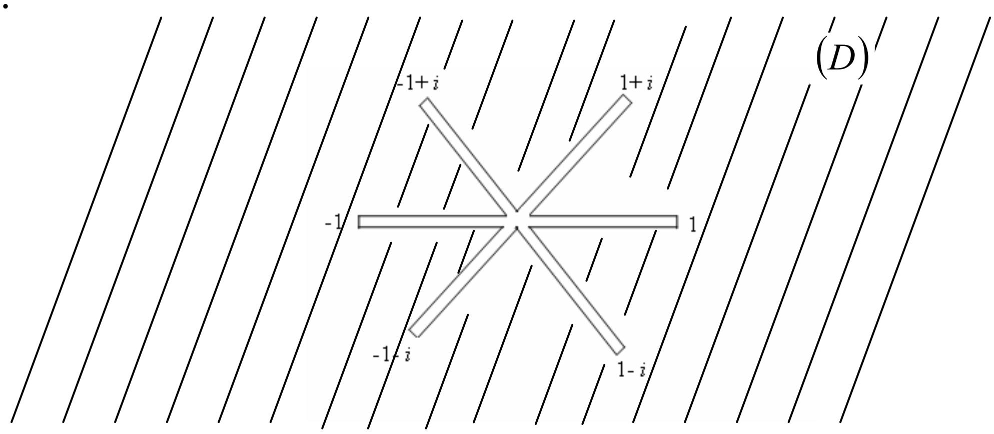
$e^{\alpha i}$
(D)
0
$e^{-\alpha i}$

10.



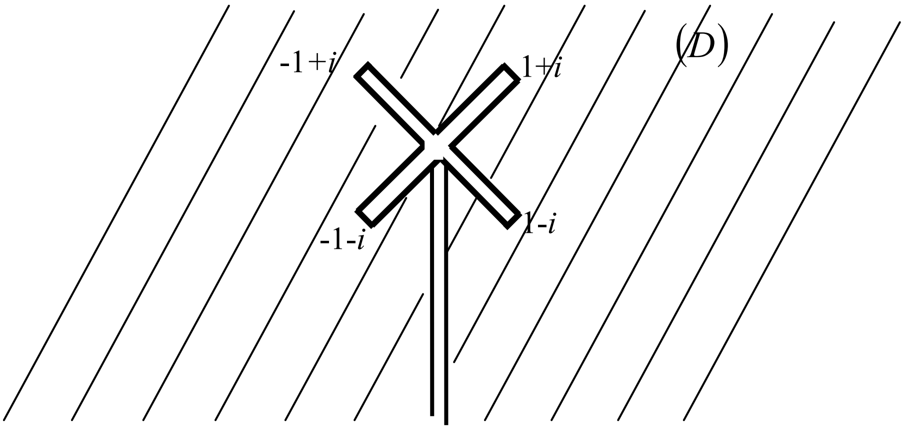
(D)
-2
-1
0
1
2
$-i$

11.

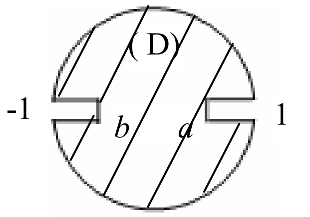


(D)
$-1+i$
$1+i$
-1
1
$-1-i$
$1-i$

12.

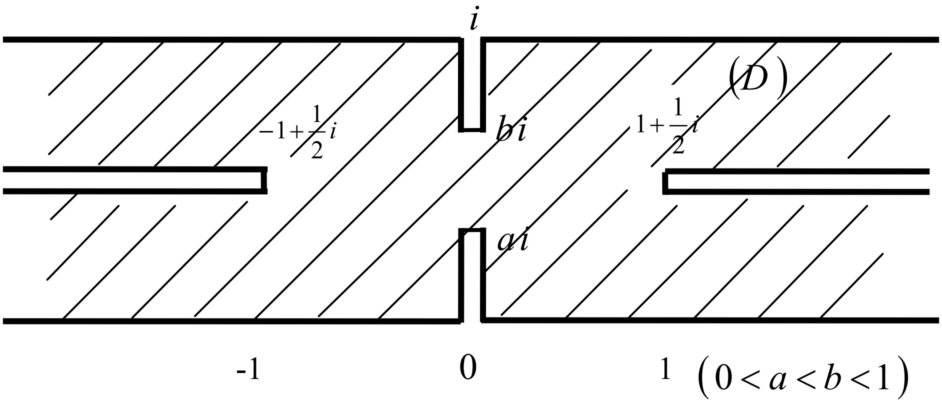


13.



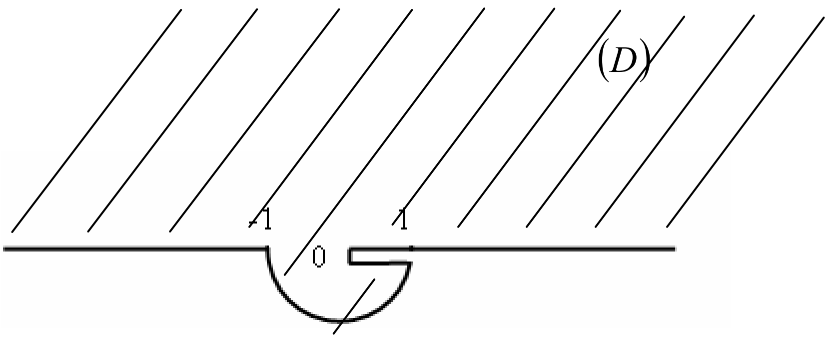
$(-1<b<a<1)$

14.



$(0<a<b<1)$

15.



7 - §. ГАРМОНИК ФУНКЦИЯНИНГ ХОССАЛАРИ

Агар $u(x)\in C^2(D)$ ва $x\in D$ учун $\Delta u=0$ бўлса, у ҳолда $u(x)=u(x_1,\, x_2,...,\, x_n)$ функция D соҳада гармоник функция дейилади.

Бевосита текшириш ёрдамида иккита x ва ξ нуқталарга боғлиқ

$$E(x,\ \xi)=\begin{cases}\dfrac{1}{n-2}\cdot|\,\xi-x\,|^{2-n}, & n>2\\ -\ln|\,\xi-x\,| & ,\ n=2\end{cases}, \qquad (7.1)$$

функция $x\neq\xi$ учун x бўйича ва ξ бўйича ҳам, Лаплас тенгламасининг ечими бўлади, бунда $|\,\xi-x\,|=\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\xi_k-x_k\right)^2}$ эса x ва ξ орасидаги масофадир.

Ҳақиқатан ҳам, $x\neq\xi$ учун (7.1) дан

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x_i^2}=-|\xi-x|^{-n}+n|\xi-x|^{-n-2}\cdot\left(\xi_i-x_i\right)^2$$

эканлигини ҳосил қиламиз. Бу ифодани қўйиш ёрдамида

$$\Delta E=-n|\,\xi-x\,|^{-n}+n|\,\xi-x\,|^{-n-2}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(\xi_i-x_i\right)^2=0$$

айниятга эга бўламиз. $E(x,\,\xi)$ функция x ва ξ га нисбатан симметрик, шунинг учун бу функция ξ бўйича $x\neq\xi$ бўлганда ҳам Лаплас тенгламасини қаноатлантиради. $E(x,\,\xi)$ функция Лаплас тенгламасининг элементар ёки фундаментал ечими деб аталади.

$S-$силлиқ (ёпиқ ёки ёйиқ) гиперсирт E_n фазодан олинган ва $\mu(\xi)-$ эса унда берилган ҳақиқий қийматли узлуксиз функция бўлсин.

$$u(x)=\int\limits_S E(x,\ \xi)\mu(\xi)ds_\xi$$

ифода E_n фазодаги S га қарашли бўлмаган барча x нуқталарда гармоник функциядан иборат, яъни $x \in E_n \setminus S$ учун $\Delta u = 0$, бунда $ds_{\xi} -$ эса $S-$гиперсиртдаги ξ ўзгарувчи бўйича юза элементи. Бу хулосанинг тўғрилиги $x \neq \xi$ учун $E(x,\, \xi)$ функциянинг гармоник эканлиги ва интегрални интеграл остида дифференциаллашдан келиб чиқади.

Бевосита текшириш ёрдамида кўрсатиш мумкинки, агар $u(x)$ функция D соҳада гармоник бўлса, у ҳолда

$$v(x) = |x|^{2-n} u\left(\frac{x}{|x|^2}\right)$$

функция ўзининг барча аниқланиш соҳасида гармоник бўлади.

$D \subset E_n$ соҳа ўзининг етарлича силлиқ S чегарасига эга, ҳамда $\Delta u = 0$ ва $\Delta v = 0$ бўлиб, бунда $u,\, v \in C^2\left(D\right) \cap C^1\left(\overline{D}\right)$ бўлсин. D соҳа бўйича

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(v \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}, \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(v \frac{\partial u}{\partial x_i} - u\frac{\partial v}{\partial x_i}\right) = 0$$

айниятларни интеграллаб ва

$$\int_D \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial A_i}{\partial x_i} d\tau_x = \int_S \sum_{i=1}^{n} A_i\left(y\right)\gamma_i\left(y\right) ds_y$$

Гаусс–Остроградский формуласидан фойдаланиб,

$$\int_S v(y) \cdot \frac{\partial u(y)}{\partial \gamma_y} ds_y = \sum_{i=1}^{n} \int_D \frac{\partial v}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i} d\tau_x \tag{7.2}$$

$$\int_S \left[v(y) \cdot \frac{\partial u(y)}{\partial \gamma_y} - u(y) \cdot \frac{\partial v(y)}{\partial \gamma_y} \right] ds_y = 0 \tag{7.3}$$

эканлигини ҳосил қиламиз, бунда $d\tau_x -$ҳажм элементи, $\gamma = \left(\gamma_1,\, \gamma_2, \ldots, \gamma_n\right) -$ эса S га $y \in S$ нуқтада ўтказилган ташқи нормалдир. Худди шунга ўхшаш, ихтиёрий $u,\ v\in C^2\left(D\right)\cap C^1\left(\overline{D}\right)$ учун

$$\int\limits_D u\,\Delta v\,d\tau_x=\int\limits_S u\frac{\partial v(y)}{\partial\gamma_y}ds_y-\int\limits_D\left(\sum_{i=1}^n\frac{\partial u}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)d\tau_x \qquad (7.4)$$

Гриннинг биринчи формуласини ҳосил қиламиз. Ҳақиқатан ҳам, $A_i=u\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x_i},\quad i=\overline{1,n},$ деб олиб, Гаусс–Остроградский формуласидан Грин формуласини ҳосил қиламиз. Энди u ва v функцияларни ўринларини алмаштириб

$$\int\limits_D v\,\Delta u\,d\tau_x=\int\limits_S v\frac{\partial u(y)}{\partial\gamma_y}ds_y-\int\limits_D\left(\sum_{i=1}^n\frac{\partial v}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)d\tau_x \qquad (7.5)$$

формулага эга бўламиз. (7.4) тенгликдан (7.5) тенгликни айириб,

$$\int\limits_D\left(u\,\Delta v-v\,\Delta u\right)d\tau_x=\int\limits_S\left(u\frac{\partial v(y)}{\partial\gamma_y}-v\frac{\partial u(y)}{\partial\gamma_y}\right)ds_y \qquad (7.6)$$

Гриннинг иккинчи формуласини ҳосил қиламиз.

Гармоник функциянинг ягоналик хоссаси. Агар $x\in D$ учун $\Delta u=0$ ва $u(x)\in C^2\left(D\right)\cap C^1\left(\overline{D}\right),\ \ u(x)\big|_{x\in S}=0$ бўлса, у ҳолда $x\in\overline{D}$ учун $u(x)\equiv 0$ бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, (7.4) формулада $u(x)=v(x)$ деб олсак,

$$\sum_{i=1}^n\int\limits_D\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 d\tau_x=\int\limits_S u(y)\frac{\partial u(y)}{\partial\gamma_y}ds_y$$

ҳосил бўлади. $u(x)\big|_{x\in S}=0$ шартдан $\displaystyle\sum_{i=1}^n\int\limits_D\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 d\tau_x=0$ келиб чиқади. Бундан, эса $x\in D$ учун $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}=0,\ i=\overline{1,n}$ яъни $\forall x\in D$ учун $u(x)=const$ эканлиги ва узлуксизликка кўра,

$x \in \overline{D}$ учун $u(x) \equiv 0$ эканлигини ҳосил қиламиз. Худди шунга ўхшаш, агар $u(x) \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$, $\Delta u = 0$ ва $\left.\dfrac{\partial u(y)}{\partial \gamma_y}\right|_{y \in S} = 0$ бўлса, у ҳолда $x \in \overline{D}$ учун $u(x) \equiv const$ ўринли бўлади.

Агар $u(x) \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$, $\Delta u = 0$ бўлса, у ҳолда

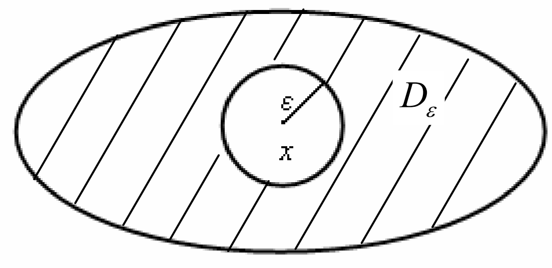
$$\int_S \frac{\partial u(y)}{\partial \gamma_y} ds_y = 0 \qquad (7.7)$$

тенглик ўринли бўлади. Ҳақиқатан ҳам, (7.5) формулада $x \in D$ учун $v(x) = 1$ деб олсак, $\displaystyle\int_S \frac{\partial u(y)}{\partial \gamma_y} ds_y = 0$ эканлигини ҳосил қиламиз.

Гармоник функциянинг интеграл тасвири. Агар $u(x) \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$ ва $\Delta u = 0$ бўлса, у ҳолда

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n} \cdot \int_S E(x,\, y) \frac{\partial u(y)}{\partial \gamma_y} ds_y - \frac{1}{\omega_n} \cdot \int_S u(y) \frac{\partial E(x,\, y)}{\partial \gamma_y} ds_y \qquad (7.8)$$

интеграл тасвир ўринли бўлади, бунда $E(x,\, y)$ – Лаплас тенгламасининг фундаментал ечими, $\omega_n = \dfrac{1}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)} \cdot 2\pi^{\frac{n}{2}}$ – эса E_n фазодаги бирлик сферанинг юзи, S – эса D соҳанинг чегараси. (7.8) формулани келтириб чиқариш учун D соҳадан x нуқтани D да ётувчи ε радиусли $|y - x| \le \varepsilon$ ёпиқ шар билан биргаликда ажратиб ва D соҳанинг қолган қисмини D_ε деб олсак, у S – сирт ва $|y - x| = \varepsilon$ сфера билан чегараланган бўлади.



(7.3) ёки (7.6) формулада $v(y)=E(x,\ y)$ деб олсак,

$$\int_S\left[E(x,\ y)\frac{\partial u(y)}{\partial\gamma_y}-u(y)\frac{\partial E(x,\ y)}{\partial\gamma_y}\right]ds_y=$$

$$=\int_{|y-x|=\varepsilon}\left[E(x,\ y)\frac{\partial u(y)}{\partial\gamma_y}-u(y)\frac{\partial E(x,\ y)}{\partial\gamma_y}\right]ds_y=$$

$$=\int_{|y-x|=\varepsilon}E(x,\ y)\frac{\partial u(y)}{\partial\gamma_y}ds_y-$$

$$-\int_{|y-x|=\varepsilon}\left[u(y)-u(x)\right]\frac{\partial E(x,\ y)}{\partial\gamma_y}ds_y-u(x)\int_{|y-x|=\varepsilon}\frac{\partial E(x,\ y)}{\partial\gamma_y}ds_y \tag{7.9}$$

тенглик ҳосил бўлади. $|y-x|=\varepsilon$ сферада

$$E(x,\ y)=\begin{cases}\dfrac{1}{(n-2)\cdot\varepsilon^{n-2}}, & n>2 \quad \text{учун}\\ -\ln\varepsilon, & n=2 \quad \text{учун}\end{cases},$$

$$\frac{\partial E(x,\ y)}{\partial\gamma_y}=-\frac{1}{\varepsilon^{n-1}},\quad n\ge 2 \quad \text{учун}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|y-x|=\varepsilon}\left[u(y)-u(x)\right]\frac{\partial E(x,y)}{\partial\gamma_y}ds_y=0,\quad \int_{|y-x|=\varepsilon}\frac{ds_y}{\varepsilon^{n-1}}=\omega_n$$

эканлигини ҳисобга олиб, (7.7) тенгликка кўра, (7.9) дан $\varepsilon\to 0$ да лимитик ҳолатда (7.8) интеграл тасвирини ҳосил қиламиз.

Агар $u(x)$ функция D соҳада гармоник бўлса, у ҳолда бу соҳанинг ички нуқталарида барча тартибли ҳосилаларга эга бўлади. Ҳақиқатан ҳам, соҳанинг ихтиёрий $x^0 \in D$ ички нуқтасини олайлик. D соҳа ичида бутунича жойлашган S' сирт билан шу нуқтани ўраб оламиз. D соҳада $u(x)$ функция гармоник бўлса, у ҳолда бу функция S' сирт билан чегараланган D' соҳада ҳам гармоник функция бўлиб, $u(x) \in C^2\left(\overline{D'}\right)$. Интеграл тасвирига кўра,

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_{S'} \left[E(x,\ y) \frac{\partial u(y)}{\partial \gamma_y} - u(y) \frac{\partial E(x,\ y)}{\partial \gamma_y} \right] ds_y \tag{7.10}$$

ўринли бўлади. x нуқта S' сиртга қарашли бўлмаганлиги учун $E(x,\ y) -$ функция узлуксиз ва x_i ўзгарувчи бўйича исталган тартибли узлуксиз ҳосилага эга. Шунга кўра, (7.10) формуланинг ўнг томонини интеграл остида x_i бўйича исталган марта дифференциаллаш мумкин. Бундан эса, бизнинг хулосамиз келиб чиқади.

Гармоник функциялар учун сфера ва шар бўйича ўрта қиймат ҳақидаги формулалар. Агар $|y-x| \le R$ шар $u(x)$ функция гармоник бўлган D соҳада жойлашган бўлса, у ҳолда бу функциянинг шар марказидаги қиймати $|y-x| = R$ сферадаги қийматларининг ўрта арифметигига тенг, яъни

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \int_{|y-x|=R} u(y)\, ds_y .$$

Худди шунга ўхшаш шар бўйича

$$u(x) = \frac{n}{\omega_n R^n} \cdot \int_{|y-x| \le R} u(y)\, d\tau_y .$$

Ҳақиқатан ҳам, $|y-x| = R$ сферада

$$E(x,\,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{(n-2)R^{n-2}}, & n>2\\ -\ln R, & n=2\end{cases}$$

$\dfrac{\partial E(x,\ y)}{\partial \gamma_y}=-\dfrac{1}{R^{n-1}},\quad n\geq 2$ тенгликлар ўринли бўлиб, $\int\limits_S \dfrac{\partial u(y)}{\partial \gamma_y}ds_y=0$ тенгликка кўра, (7.8) формуладан $\left|y-x\right|<R$ шар учун ёзилган $u(x)=\dfrac{1}{\omega_n R^{n-1}}\cdot\int\limits_{|y-x|=R} u(y)\,ds_y$ тенгликни ҳосил қиламиз. Бу формулани $\left|y-x\right|=\rho\leq R$ сфералар учун ёзиб, $\rho^{n-1}u(x)=\dfrac{1}{\omega_n}\cdot\int\limits_{|y-x|=\rho} u(y)\,ds_y$ ифодани ρ бўйича $0\leq\rho\leq R$ оралиқда интеграллаб,

$$u(x)=\frac{n}{\omega_n R^n}\int\limits_{|y-x|\leq R} u(y)d\tau_y$$

формулани ҳосил қиламиз, бунда $d\tau_y-$ эса y ўзгарувчи бўйича ҳажм элементи, $\dfrac{\omega_n R^n}{n}-$ эса $\left|y-x\right|\leq R$ шар ҳажмидир. $n=2$ учун сферик ўртача арифметик

$$u(x_1\,,x_2)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}u(x_1+R\cos\varphi,\ x_2+R\sin\varphi)\,d\varphi,$$

$n=3$ учун эса,

$$u(x_1\,,x_2\,,x_3)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{\pi}d\theta\int\limits_0^{2\pi}u(x_1+R\sin\theta\cos\psi\,,$$

$$x_2+R\sin\theta\sin\psi\,,x_3+R\cos\theta)\sin\theta\,d\psi$$

кўринишларида бўлади.

1 – натижа. *Юқоридаги шартлар талаб қилинганда*

$$\left|u(x)\right| \le \sqrt{\frac{n}{\omega_n \cdot R^n}} \cdot \sqrt{\int\limits_{|y-x|\le R} u^2(y)d\tau_y}$$

тенгсизлик бажарилади.

Ҳақиқатан ҳам, Коши – Буняковский тенгсизлигидан,

$$\left|u(x)\right| \le \frac{n}{\omega_n \cdot R^n} \cdot \int\limits_{|y-x|\le R} \left|u(y)\right| d\tau_y \le$$

$$\le \frac{n}{\omega_n \cdot R^n} \cdot \sqrt{\int\limits_{|y-x|\le R} u^2(y)\,d\tau_y} \cdot \sqrt{\int\limits_{|y-x|\le R} 1\,d\tau_y} =$$

$$= \frac{n}{\omega_n \cdot R^n} \cdot \sqrt{\frac{\omega_n \cdot R^n}{n}} \cdot \sqrt{\int\limits_{|y-x|\le R} u^2(y)\,d\tau_y} =$$

$$= \sqrt{\frac{n}{\omega_n \cdot R^n}} \cdot \sqrt{\int\limits_{|y-x|\le R} u^2(y)d\tau_y}$$

эканлиги келиб чиқади.

D_δ орқали D соҳанинг чегарадан $\delta > 0$ дан катта узоқликдаги барча нуқталари тўпламини белгилаймиз.

2 – натижа. *D соҳада берилган $\left\{u_m(x)\right\}$ гармоник функциялар кетма – кетлиги D соҳада ўртача маънода яқинлашувчи бўлса, у ҳолда ҳар бир ички D_δ қисм – соҳада текис яқинлашувчи бўлади.*

Бу хулоса

$$\max_{x\in D_\delta}\left|u_k(x) - u_m(x)\right| \le \sqrt{\frac{n}{\omega_n \cdot \delta^n}} \cdot \sqrt{\int\limits_D \left(u_k(y) - u_m(y)\right)^2 d\tau_y}$$

тенгсизлик маркази D_δ да бўлган δ радиусли ихтиёрий шар тўласинча D га қарашли, ҳамда $u_k(x) - u_m(x)$ айирма гармоник функция эканлигидан келиб чиққани учун ўринли бўлади.

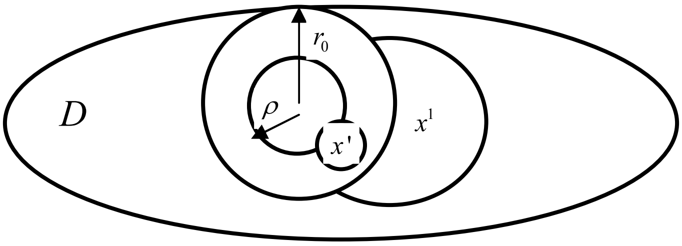
Экстремум(Максимум ва минимум) принципи ва Дирихле масаласи ечимининг ягоналиги.

Теорема. *Агар* $u(x) \neq const$ *функция* D *чегараланган соҳада гармоник ва* $\overline{D} = D \cup S$ *да узлуксиз бўлса, у ҳолда бу функция* D *соҳа ичида ўзининг минимал ва максимал қийматларини қабул қила олмайди, яъни* $x \in D$ *учун* $\min\limits_{x \in S} u(x) < u(x) < \max\limits_{x \in S} u(x)$ тенгсизлик ўринлидир.

Исбот. Тескарисини фараз қиламиз, яъни $u(x)$ функция бирор $x^0 \in D$ ички нуқтада ўзининг M максимал қийматини қабул қилсин, яъни

$$M = u(x^0) = \max_{x \in \overline{D}} u(x) \quad . \tag{7.11}$$

D соҳанинг x^0 –ички нуқтаси бўлгани учун етарлича катта r_0 радиусли $U\left(x^0, r_0\right)$ шар мавжуд бўлиб, D га қарашли бўлади.



Аввал $x \in \overline{U}\left(x^0, r_0\right)$ учун $u(x) \equiv M$ эканлигини исбот қиламиз. (7.11) шартдан $x \in U\left(x^0, r_0\right)$ учун $u(x) \leq M = u(x^0)$ келиб чиқади. Агар бирор $x' \in \overline{U}\left(x^0, r_0\right)$ нуқтада $u(x') < M$ бўлса, у ҳолда узлуксизлик бўйича, $u(x) < M$ тенгсизлик x' нуқтанинг $U_{x'}$ қандайдир атрофида ўринли бўлар эди. Лекин, у ҳолда $S\left(x^0, \rho\right)$, бунда $\rho = \left| x' - x^0 \right|$, сферага ўрта арифметиклар формуласини қўллаб, ҳамда $x \in U_{x'}$ учун $u(x) < M$ тенгсизликдан

$$u(x_0)=\frac{1}{\omega_n\cdot\rho^{n-1}}\cdot\int\limits_{S\left(x^0,\,\rho\right)}u(x)\,ds<\frac{M}{\omega_n\cdot\rho^{n-1}}\int\limits_{S\left(x^0,\,\rho\right)}ds=M$$

ҳосил бўлади. Бу эса (7.11) формулага қарама – қаршидир. Шундай қилиб, $x\in\overline{U}\left(x^0,\ r_0\right)$ учун $u(x)\equiv M$. Энди ихтиёрий $x^1\in D$ нуқтани $\overline{U}\left(x^0,r_0\right)$ шарнинг чегарасига қарашли қилиб оламиз. Исбот қилинишига кўра, $u(x^1)=M$. Юқоридаги фикрни x^1 нуқтага қўллаб, мумкин қадар катта $\overline{U}\left(x^1,r_1\right)$ шарда $u(x)\equiv M$ эканлигини ҳосил қиламиз ва ҳ.к. Гейне–Борель леммасига кўра саноқлидан кўп бўлмаган қадамдан кейин бутун D соҳа қопланади ва $x\in D$ учун $u(x)\equiv M$ ҳосил бўлади.

Ҳосил қилинган бу қарама–қаршилик дастлабки фаразимизнинг нотўғри эканлигини билдиради. Шунинг учун, $u(x)$ функция D соҳанинг ички нуқтасида ўзининг максимал қийматини қабул қила олмайди. Бундан, $u(x)$ функцияни $-u(x)$ орқали алмаштириб, $u(x)$ функция D соҳанинг ички нуқтасида минимал қийматни қабул қила олмаслигини ҳосил қиламиз. Теорема исботланди.

Бу теоремадан, ҳар қандай гармоник функция соҳанинг ичида локал максимум ёки локал минимумга эриша олмаслиги келиб чиқади.

Энди максимум принципи исботининг иккинчи вариантини келтирамиз.

Теорема. $u(x)\in C^2\left(D\right)\cap C\left(\overline{D}\right)$ *ва* $\Delta u=0$ *бўлсин. У ҳолда* $u(x)$ *функция бу* D *соҳанинг ички нуқтасида* ∂D *чегарасидаги қийматлари максимумидан катта қиймат ва* ∂D *чегарсидаги қийматлари минимумидан кичик қиймат қабул қила олмайди.*

Исбот. $m = \max\limits_{x \in \partial D} u(x)$ деб белгилаймиз. Фараз қилайлик, $M = u(x^0) > m$, бунда $x^0 \in D$ бўлсин. $v = u(x) + \dfrac{M-m}{2d^2} \cdot \left| x - x^0 \right|^2$, бунда $d = diamD$ ёрдамчи функцияни тузамиз. $\left| x - x^0 \right|^2 \le d^2$ тенгсизликдан, $x \in \partial D$ учун

$$v(x) \le m + \frac{M-m}{2d^2} \cdot d^2 = \frac{M+m}{2} < M$$

тенгсизлик келиб чиқади. Шу билан бирга $v(x^0) = u(x^0) = M$. Бу тенгсизликдан, $v(x)$ функция максимуми D соҳа ичида M дан кичик эмас эканлиги келиб чиқади. Шунга кўра, ∂D чегарадаги $v(x)$ функция максимумидан катта. Бу максимум кўриниб турибдики, $x \in D$ қандайдир ички нуқтада эришади. Маълумки, максимум нуқтасида

$$\frac{\partial v}{\partial x_1} = \frac{\partial v}{\partial x_2} = \ldots = \frac{\partial v}{\partial x_n} = 0; \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} \le 0, \ \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} \le 0, \ldots, \frac{\partial^2 v}{\partial x_n^2} \le 0$$

ва шунга кўра $\Delta v(x) = 0$. Бироқ,

$$\Delta v = \Delta u + \frac{M-m}{2d^2} \cdot \Delta \left| x - x^0 \right|^2 = 0 + \frac{M-m}{2d^2} \cdot 2n = \frac{(M-m)n}{d^2} > 0.$$

Ҳосил қилинган қарама–қаршилик $M > m$ фаразимизнинг нотўғри эканлигини кўрсатади. Шундай қилиб, биз $x \in D$ ички нуқтада $u(x) \le \max\limits_{x \in \partial D} u(x)$ эканлигини исбот қилдик. $u(x)$ функцияни $-u(x)$ функция билан алмаштириб, $\min\limits_{x \in \partial D} u(x) \le u(x)$ тенгсизликни ҳосил қиламиз.

Агар $u(x)$ функция D соҳада гармоник ва $\overline{D} = D \cup S$ да узлуксиз бўлса, у ҳолда бу функция ўзининг максимал (минимал) қийматини қандайдир $x^0 \in \overline{D} = D \cup S$ нуқтада қабул қилади. Гармоник функция учун исбот қилинган экстремум принципи хоссасига кўра, x^0 нуқта D соҳа учун ички нуқта бўла олмайди. Шунга кўра, $x^0 \in S$ бўлади.

$D \subset R^n$ – ихтиёрий чегараланган соҳа бўлсин. $u(x) \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$ функция ҳар бир $x \in D$ учун $\Delta u(x) = 0$ Лаплас тенгламасини ва $\lim\limits_{x \to y} u(x) = \varphi(x)$, $x \in D$, $y \in S$ чегаравий шартни қаноатлансин, бунда $\varphi(x)$– эса $S = \partial D$ чегарада берилган ҳақиқий қийматли узлуксиз функция бўлсин. Бундай $u = u(x)$ функцияни топиш масаласи Лаплас тенгламаси учун қўйилган биринчи чегаравий масала ёки Дирихле масаласи дейилади ва $u = u(x)$ функцияга Дирихле масаласининг классик ечими деб айтилади. Гармоник функция учун исбот қилинган экстремум принципи хоссасига кўра, Дирихле масаласи биттадан кўп ечимга эга бўла олмайди. Ҳақиқатан ҳам, агар $u(x)$ ва $v(x)$ бу масаланинг ечими бўлса, у ҳолда $w(x) = u(x) - v(x)$ айирма D соҳанинг S чегарасида нолга тенг бўлади ва шунинг учун экстремум принципига кўра $w(x) = 0$, яъни барча $x \in D \cup S$ учун $u(x) = v(x)$ бўлади.

Теорема (Махсусликни йўқотиш ҳақидаги теорема). *$u(x)$ функция $D \setminus \{x_0\}$ соҳада гармоник бўлсин, бунда $x^0 \in D$. Агар $x \to x^0$ учун, $u(x) = o\left(E(x,\, x^0)\right)$ бўлса, у ҳолда $\lim\limits_{x \to x^0} u(x) = A$ мавжуд ва x^0 нуқтада A қиймат билан қўшимча аниқланган функция D соҳада гармоник бўлади.*

Исбот. D соҳада қатъий жойлашган $S\left(x^0, R\right) = \left\{x:\ \left|x - x^0\right| < R\right\}$ шарни олайлик, $v(x)$ орқали $S\left(x^0, R\right)$ шарда Лаплас тенгламаси учун

$$v\big|_{\partial S\left(x^0,\, R\right)} = u\big|_{\partial S\left(x^0,\, R\right)}$$

чегаравий шартни қаноатлантирувчи Дирихле масаласи ечимини белгилаймиз. $u(x)-v(x)=W(x)$ функция $S\left(x^0, R\right)\setminus\left\{x^0\right\}$ соҳада гармоник ва $W\big|_{\partial S\left(x^0, R\right)}=0$ бўлади. Теоремани исбот қилиш учун, $S\left(x^0, R\right)\setminus\left\{x^0\right\}$ тўпламнинг ҳар бир нуқтасида W функция учун $W=0$ эканлигини кўрсатиш етарлидир. Бу ҳолда $u(x)$ функция барча $x\in S\left(x^0, R\right)\setminus\left\{x^0\right\}$ учун $v(x)$ функция билан устма–уст тушади ва шунга кўра, x^0 нуқтада қўшимча $A=v(x^0)$ сон билан аниқланган $u(x)$ функция бутун $S\left(x^0, R\right)$ шарда $v(x)$ гармоник функция билан устма – уст тушади. Ихтиёрий $\varepsilon>0$ сон учун $n>2$ бўлганда

$$Z_{\pm}(x)=\frac{\varepsilon}{\left|x-x^0\right|^{n-2}}\pm W(x),$$

ва $n=2$ бўлганда

$$Z_{\pm}(x)=\varepsilon\cdot\ln\frac{2R}{\left|x-x^0\right|}\pm W(x)$$

иккита функцияни қараймиз. $Z_{\pm}(x)$ функция $S\left(x^0, R\right)\setminus\left\{x^0\right\}$ соҳада гармоник ва

$$Z_{\pm}(x)\big|_{\partial S\left(x^0, R\right)}=\frac{\varepsilon}{R^{n-2}}>0.$$

$x\to x^0$ учун $u(x)=o\left(\dfrac{1}{\left|x-x^0\right|^{n-2}}\right)$ шартга кўра,

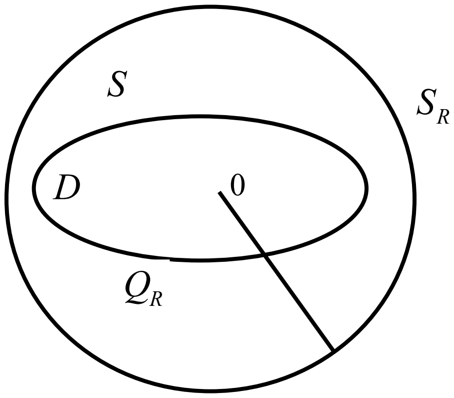
$$Z_{\pm}(x)\big|_{\left|x-x^0\right|=\rho}=\frac{\varepsilon}{\rho^{n-2}}\pm W\big|_{\left|x-x^0\right|=\rho}=\frac{\varepsilon}{\rho^{n-2}}+o\left(\frac{1}{\rho^{n-2}}\right).$$

Шунга кўра, етарлича кичик $\rho > 0$ учун $Z_{\pm}(x)\Big|_{\left|x-x^0\right|=\rho} > 0$ эканлигини ҳосил қиламиз. Максимум принципига кўра, $\rho \le \left| x - x^0 \right| \le R$ шарсимон қатламдаги барча x учун $Z_{\pm}(x) > 0$ бўлади. $S\left(x^0, R\right) \setminus \left\{ x^0 \right\}$ дан олинган x^1 ихтиёрий нуқта бўлсин. Етарлича кичик ρ учун бу нуқта $\rho \le \left| x - x^0 \right| \le R$ шарсимон қатламга қарашли. Шунга кўра, $Z_{\pm}(x^1) > 0$, яъни $\left| W(x^1) \right| < \dfrac{\varepsilon}{\left| x^1 - x^0 \right|^{n-2}}$, бундан $\varepsilon > 0$ ихтиёрийлигига кўра,

$\left| W(x^1) \right| = 0$ ҳосил бўлади. Теорема исбот бўлди.

Таъриф. *Агарда $u(x)$ функция қандайдир шар ташқарисида узлуксиз ва $\left| x \right| \to \infty$ учун $u(x) \to a$ бўлса, у ҳолда чексизликда узлуксиз ва унда $u(\infty) = a$ қийматни қабул қилади дейилади.*

Агар $u(x) \in C\left(\overline{D_1}\right)$ функция $D_1 = R^n \setminus \overline{D}$ соҳада гармоник ва $u(\infty) = 0$ бўлса, у ҳолда $x \in \overline{D_1}$ учун $\left| u(x) \right| \le \max\limits_{x \in S} \left| u(x) \right|$ бўлади. Хусусан, агар $u\Big|_S = 0$ ва $u(\infty) = 0$ бўлса, у ҳолда $x \in \overline{D_1}$ учун $u(x) \equiv 0$ бўлади. Ҳақиқатан ҳам, $U_R\left(0\right)$ шар $\overline{D}$ соҳани сақлайди. Унда $S \cup S_R$ эса $Q_R = D_1 \cap U_R\left(0\right)$ соҳанинг чегараси бўлади.



Максимум принципини қўллаб, $x \in Q_R$ учун

$$\left| u(x) \right| \leq \max_{x \in S \cup S_R} \left| u(x) \right| \leq \max_{x \in S} \left| u(x) \right| + \max_{x \in S_R} \left| u(x) \right|,$$

ҳамда $u(\infty) = 0$ эканлигидан $R \to \infty$ да $\max\limits_{x \in S_R} \left| u(x) \right| \to 0$ ҳосил бўлади. Шунинг учун $R \to \infty$ да лимитга ўтиб, $x \in \overline{D_1} = \overline{(R^n \setminus D)}$ учун $\left| u(x) \right| \leq \max\limits_{x \in S} \left| u(x) \right|$ тенгсизликни ҳосил қиламиз.

Агар D соҳада $\left\{ u_k \left(x \right) \right\}$ функциялар кетма–кетлиги гармоник ва $\overline{D}$ да узлуксиз бўлиб, S чегарада текис яқинлашувчи бўлса, у ҳолда бу кетма–кетлик $\overline{D}$ соҳада ҳам текис яқинлашувчи бўлади. Ҳақиқатан ҳам, $u_p(x) - u_q(x)$ гармоник функция бўлгани учун, агарда $p,\ q \to \infty$ бўлса, $x \in D$ учун

$$\left| u_p(x) - u_q(x) \right| \leq \max_{x \in S} \left| u_p(x) - u_q(x) \right| \to 0$$

бўлади. Худди шунга ўхшаш хулоса $D_1 = R^n \setminus \overline{D}$ соҳа учун $u_k(\infty) = 0$ шартлар бажарилган ҳолда ҳам ўринли бўлади.

Лаплас тенгламаси учун Дирихле масаласининг Грин функцияси. Агар иккита $x,\ \xi \in \overline{D}$ нуқталарга боғлиқ $G(x,\ \xi)$ функция

1) $$G(x,\ \xi) = E(x,\ \xi) + g(x,\ \xi), \qquad (7.12)$$

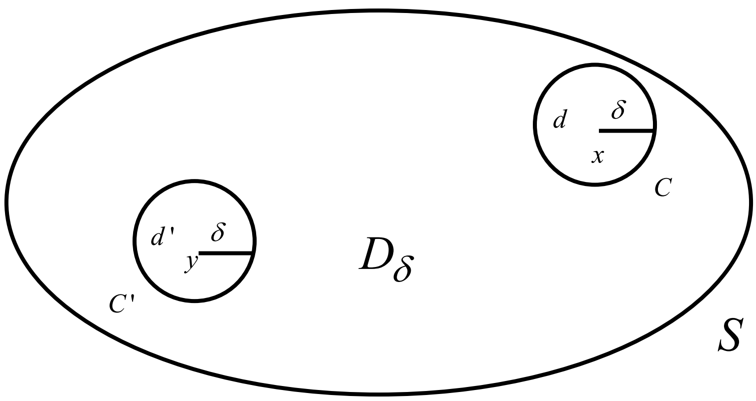
бунда $E(x, \xi) -$ Лаплас тенгламасининг фундаментал ечими, $g(x,\ \xi) -$ эса $x \in D$ ва $\xi \in D$ бўйича гармоник;

2) Агар x ёки ξ нуқта D соҳанинг S чегарасига қарашли бўлса, у ҳолда

$$G(x,\ \xi) = 0 \tag{7.13}$$

хоссаларга эга бўлганда D соҳада Лаплас тенгламаси учун Дирихле масаласининг Грин функцияси дейилади.

Бевосита кўриш мумкинки, бутун D соҳада $G(x,\ \xi) \geq 0$ бўлади. Ҳақиқатан ҳам, D_δ орқали D соҳанинг шу соҳада жойлашган $\left| y - \xi \right| \leq \delta,\ \xi \in D$ шардан ташқарисини етарлича кичик δ радиус учун белгилаймиз. $\lim\limits_{x \to \xi} G(x,\ \xi) = +\infty$ бўлгани учун, етарлича кичик δ учун $\left| x - \xi \right| < \delta$ да $G(x,\ \xi) > 0$ бўлади. Шунга кўра, D_δ соҳанинг чегарасида $G(x,\ \xi) \geq 0$ тенгсизликка эга бўламиз ва экстремум принципига кўра, $x \in D_\delta$ учун $G(x,\ \xi) \geq 0$ эканлигини ҳосил қиламиз. Бундан, бутун $\overline{D}$ соҳада $G(x,\ \xi) \geq 0$ бўлиши келиб чиқади. $G(x,\ y)$ Грин функцияси x ва y нуқталарга нисбатан симметрикдир. Бу фактни кўрсатиш учун D соҳадан x ва y нуқталарни ўзларининг $d : \left| z - x \right| \leq \delta$ ва $d' : \left| z - y \right| \leq \delta$ ёпиқ шарлар билан ажратиб ташлаймиз ва D соҳанинг қолган қисмини D_δ орқали белгилаймиз.



D_δ соҳада $v(z) = G(z,\ y)$ ва $u(z) = G(z,\ x)$ функциялар гармоникдир. Шунинг учун

$$\int\limits_{\partial D_\delta}\left[v(z)\frac{\partial u(z)}{\partial\gamma_z}-u(z)\frac{\partial v(z)}{\partial\gamma_z}\right]ds_z=0.$$

Бундан

$$\int\limits_S\left[G(z,y)\frac{\partial G(z,x)}{\partial\gamma_z}-G(z,x)\frac{\partial G(z,y)}{\partial\gamma_z}\right]ds_z=$$

$$=\left(\int\limits_C+\int\limits_{C'}\right)\left[G(z,y)\frac{\partial G(z,x)}{\partial\gamma_z}-G(z,x)\frac{\partial G(z,y)}{\partial\gamma_z}\right]ds_z$$

тенгликка эга бўламиз. $z\in S$ учун $G(z,\ x)=G(z,\ y)=0.$ Шунга кўра, бу тенгликни

$$\int\limits_C\left[G(z,y)\frac{\partial G(z,x)}{\partial\gamma_z}-G(z,x)\frac{\partial G(z,y)}{\partial\gamma_z}\right]ds_z=$$

$$\int\limits_{C'}\left[G(z,x)\frac{\partial G(z,y)}{\partial\gamma_z}-G(z,y)\frac{\partial G(z,x)}{\partial\gamma_z}\right]ds_z$$

шаклида ёзамиз. Бундан эса, $G(z,\ x)=E(z,\ x)+g(z,\ x),\ G(z,\ y)=E(z,\ y)+g(z,\ y),$ бу ерда $g(z,\ x)$ ва $g(z,\ y)-$ гармоник функциялар бўлиб, (7.8) формулани келтириб чиқарилгани сингари $\delta\to 0$ да $G(x,\ y)=G(y,\ x)$ ҳосил бўлади.

Худди шунга ўхшаш, (7.8) тенгликда $u(x)$ Лаплас тенгламаси учун Дирихле масаласининг ечими ва $E(x,\ y)$ ўрнига $G(x,\ \xi)$ функцияни олиб, (7.8) тенгликни келтириб чиқарилгани сингари (7.12) ва (7.13) ларни ҳисобга олган, ҳолда

$$u(x)=-\frac{1}{\omega_n}\int\limits_S\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial\gamma_\xi}\cdot\varphi(\xi)ds_\xi \tag{7.14}$$

интеграл тасвирини ҳосил қиламиз, бунда $\varphi(\xi)-$олдиндан берилган ҳақиқий қийматли узлуксиз функциядир.

Агар D соҳада гармоник ва $\overline{D}=D\cup S$ да узлуксиз, ҳамда $\lim\limits_{x\to y} u(x)=\varphi(x)$, $x\in D$, $y\in S$ чегаравий шартни қаноатлантирувчи $u(x)$ функция изланаётган бўлса, бу Дирихле масаласининг ечими Грин функцияси маълум бўлганда (7.14) формула орқали ҳосил қилинади.

Шар учун Дирихле масаласининг ечими. Пуассон формуласи. D соҳа шар бўлган ҳолда Грин функциясини ошкор кўринишда қурамиз. D соҳа $|x|<1$ шардан иборат бўлиб, x ва ξ шу шарнинг ички нуқталари бўлсин. $\xi'=\dfrac{\xi}{|\xi|^2}$ нуқта ξ нуқтага $S:|x|=1$ сферага нисбатан симметрик нуқтадир. $|x|<1$ шар учун Дирихле масаласининг $G(x,\xi)$ Грин функцияси

$$G(x,\xi)=E(x,\xi)-E\left(|x|\xi,\frac{x}{|x|}\right) \qquad (7.15)$$

шаклга эга эканлигини кўрсатамиз. Ҳақиқатан ҳам,

$$\left||x|\xi-\frac{x}{|x|}\right|=\left[\,|x|^2|\,\xi\,|^2-2x\xi+1\,\right]^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\left||\,\xi\,|x-\frac{\xi}{|\xi|}\right|=|\,\xi\,|\cdot\left|x-\frac{\xi}{|\,\xi\,|^2}\right|=|\,x\,|\cdot\left|\xi-\frac{x}{|\,x\,|^2}\right|$$

бўлиб, $|x|<1,\ \ |\xi|<1$ учун $g\left(x,\xi\right)=-E\left(|x|\xi,\dfrac{x}{|x|}\right)$ функция x ва ξ бўйича гармоник бўлади. $|\xi|=1$ учун

$$|\,\xi-x\,|=\left[\,|\,x\,|^2-2x\xi+1\,\right]^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\left||\,\xi\,|x-\frac{\xi}{|\,\xi\,|}\right|=\left||\,x\,|\xi-\frac{x}{|\,x\,|}\right|. \qquad (7.16)$$

Шунга кўра, $G(x,\xi)=E(x,\xi)-E\left(|x|\xi,\frac{x}{|x|}\right)$ функция Грин функциясининг барча талабларини қаноатлантиради.

$|\xi|=1$ учун (7.16) кўра, $\dfrac{\partial G(x,\xi)}{\partial\gamma_\xi}=$

$$=-\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{\xi_i(\xi_i-x_i)}{|\xi-x|^n}-|x|\frac{\xi_i\left(|x|\xi_i-\frac{x_i}{|x|}\right)}{\left||x|\xi-\frac{x}{|x|}\right|^n}\right\}=-\frac{1-|x|^2}{|\xi-x|^n}.$$

Бундан, (7.14) формулани

$$u(x)=\frac{1}{\omega_n}\int\limits_{|\xi|=1}\frac{1-|x|^2}{|\xi-x|^n}\varphi(\xi)ds_\xi$$

шаклида ҳосил қиламиз. Бу эса $|x|<1$ учун Пуассон формуласидир.

Агар $|x|<R$ шарда $u(x)-$ гармоник функция бўлиб, $|x|\le R$ ёпиқ шарда узлуксиз ва $|x|<R,\ |y|=R$ учун $\lim\limits_{x\to y}u(x)=\varphi(y)$ чегаравий шартни қаноатлантирса, у ҳолда $v(z)=u(Rz)$ функция $|z|<1$ шарда гармоник, $|z|\le 1$ учун узлуксиз ва $\lim\limits_{z\to t}v(z)=\varphi(Rt),\ |z|<1,\ |t|=1$ чегаравий шартни қаноатлантиради. Шунинг учун

$$v(z)=\frac{1}{\omega_n}\int\limits_{|\xi|=1}\frac{1-|z|^2}{|\xi-z|^n}\cdot\varphi(R\xi)ds_\xi$$

яъни

$$u(x)=v\left(\frac{x}{R}\right)=\frac{1}{\omega_n R}\int\limits_{|\xi|=1}\frac{R^2-|x|^2}{|R\xi-x|^n}\cdot R^{n-1}\cdot\varphi(R\xi)ds_\xi$$

ёки $y=R\cdot\xi$ алмаштиришдан кейин,

$$u(x)=\frac{1}{\omega_n R}\int\limits_{|y|=R}\frac{R^2-|x|^2}{|y-x|^n}\cdot\varphi(y)ds_y$$

ҳосил бўлади.

$u(x)$ функция $\left|x-x^0\right|<R$ шарда гармоник, чегарагача узлуксиз ва $\lim\limits_{x\to y}u(x)=\varphi(y)$, $\left|x-x^0\right|<R$, $\left|y-x^0\right|=R$ чегаравий шартни қаноатлантирсин. $w(z)=u(z+x^0)$ функция шарда гармоник, $|z|\leq R$ учун узлуксиз ва $\lim\limits_{z\to t}w(z)=\varphi(t+x^0)$, $|z|<R$, $|t|=R$ бўлса, у ҳолда юқоридаги исбот қилинган формулага кўра

$$w(z)=\frac{1}{\omega_n R}\int\limits_{|t|=R}\frac{R^2-|z|^2}{|t-z|^n}\cdot\varphi(t+x^0)ds_t$$

бўлади. Бундан, $\left|x-x^0\right|<R$ шар учун

$$u(x)=w(x-x^0)=\frac{1}{\omega_n R}\int\limits_{\left|\xi-x^0\right|=R}\frac{R^2-\left|x-x^0\right|^2}{|\xi-x|^n}\cdot\varphi(\xi)ds_\xi$$

яъни

$$u(x)=\frac{1}{\omega_n R}\int\limits_{\left|\xi-x^0\right|=R}\frac{R^2-\left|x-x^0\right|^2}{|\xi-x|^n}\cdot\varphi(\xi)ds_\xi \qquad (7.17)$$

бўлиб, охирги (7.17) тенглик одатда $\left|x - x^0\right| < R$ шар учун ***Пуассон формуласи*** дейилади.

Ярим фазо учун Дирихле масаласининг ечими. Пуассон формуласи. D соҳа $x_n > 0$ ярим фазо бўлган ҳолда Грин функциясини ошкор кўринишда қурамиз. Дирихле масаласининг изланаётган ечими чегараланган бўлишлигини талаб этамиз. x ва ξ шу ярим фазонинг нуқталари бўлсин. $\xi' = (\xi_1, \xi_2, ...\xi_{n-1}, -\xi_n)$ нуқта ξ нуқтага $\xi_n = 0$ текисликка нисбатан симметрик нуқтадир. $x_n > 0$ ва $\xi_n > 0$ учун $g(x, \xi) = -E(x, \xi')$ функция x ва ξ бўйича гармоник, ҳамда $\xi_n = 0$ учун $E(x, \xi) - E(x, \xi') = 0$ бўлгани учун

$$G(x, \xi) = E(x, \xi) - E(x, \xi') \tag{7.18}$$

қаралаётган ярим фазо учун Грин функцияси бўлади.

$\xi_n = 0$ текислик учун

$$\frac{\partial G(x, \xi)}{\partial \gamma_\xi} = -\frac{\partial G(x, \xi)}{\partial \xi_n} =$$

$$= \frac{\xi_n - x_n}{|\,\xi - x|^n} - \frac{\xi_n + x_n}{\left|\xi' - x\right|^n} = -\frac{2x_n}{\left[\sum\limits_{i=1}^{n-1}\left(\xi_i - x_i\right)^2 + x_n^2\right]^{\frac{n}{2}}},$$

шаклга эга бўлгани учун

$$\lim_{x \to y} u(x) = \varphi(y_1,\ y_2, ..., y_{n-1}), \quad x_n > 0, \quad y_n = 0$$

чегаравий шартда $x_n > 0$ ярим фазо учун Дирихле масаласининг изланаётган ечими

$$u(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\pi^{\frac{n}{2}}} \cdot x_n \cdot \int\limits_{\xi_n = 0} \frac{\varphi(\xi_1,\ \xi_2, ..., \xi_{n-1})}{\left[\sum\limits_{i=1}^{n-1}\left(\xi_i - x_i\right)^2 + x_n^2\right]^{\frac{n}{2}}} d\xi_1 ... d\xi_{n-1}$$

шаклида ҳосил бўлади. Бу формула ҳам Пуассон формуласи деб аталади.

E_n фазода $u(x)$ функция гармоник бўлиб, ҳамма жойда манфиймас (мусбатмас) бўлса, у ҳолда бу функция ўзгармасдир. Ҳақиқатан ҳам, $|x|<R$, $|y|=R$ учун $R-|x|\le|y-x|<R+|x|$ тенгсизлик ўринли ва $u(x)\ge 0$ шартга кўра, ҳамда Пуассон формуласидан ва сфера бўйича ўрта арифметиклар формуласидан ихтиёрий R учун

$$R^{n-2}\frac{R-|x|}{\left(R+|x|\right)^{n-1}}u(0)\le u(x)\le R^{n-2}\frac{R+|x|}{\left(R-|x|\right)^{n-1}}u(x)$$

Гарнак тенгсизлиги келиб чиқади. Бундан, ихтиёрий $x\in E_n$ нуқтани фиксирлаб ва R ни чексизликка интилтириб, E_n фазонинг ҳар бир x нуқтаси учун $u(x)=u(0)$ эканлигини ҳосил қиламиз. Бундан қуйидаги теорема келиб чиқади.

Теорема (Лиувилль теоремаси). *Агар E_n фазода $u(x)$ функция гармоник ва юқоридан (қуйидан) чегараланган бўлса, у ҳолда бу функция ўзгармасдир.*

Ҳақиқатдан ҳам, агар $\forall x\in E_n$ учун $u(x)\le M$ бўлса, унда $M-u(x)\ge 0$ бўлади. Бундан $M-u(x)=M-u(0)$, яъни $u(x)=u(0)=const$ эканлиги келиб чиқади.

Теорема (Гарнак теоремаси). *Агар D соҳада $u_k(x)$ функциялар гармоник, $\overline{D}$ да эса узлуксиз бўлиб, $\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)$ қатор ∂D чегарада текис яқинлашувчи бўлса, у ҳолда бу қатор $\overline{D}$ да текис яқинлашади ва унинг йиғиндиси $u(x)$ ҳам D соҳада гармоник бўлади.*

Ҳақиқатан ҳам, ∂D чегарада қаторнинг текис яқинлашишидан $\forall\varepsilon>0$ учун $N(\varepsilon)$ номер топилиб, $\forall p\ge 1$ ва

$\forall\ x \in \partial D$ учун $\left|\sum_{i=1}^{p} u_{N+i}(x)\right| < \varepsilon$ тенгсизлик ўринли бўлади. Экстремум принципига кўра, $\forall\ x \in \overline{D}$ учун $\left|\sum_{i=1}^{p} u_{N+i}(x)\right| < \varepsilon$ тенгсизликка эга бўламиз, Бу эса $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ қаторнинг $\overline{D}$ соҳада текис яқинлашишини билдиради.

$x^0 \in D$ ва $\left|y - x^0\right| < R$ шар D соҳа ичида жойлашган бўлсин. У ҳолда Пуассон формуласи

$$u_k(x) = \frac{1}{\omega_n R} \int\limits_{\left|y-x^0\right|=R} \frac{R^2 - \left|x - x^0\right|^2}{|\, y - x\,|^n} \cdot u_k(y) ds_y$$

ўринли эканлигини ҳисобга олган ҳолда, текис яқинлашувчи қаторни ҳадлаб интеграллаш мумкинлигидан

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_n R} \int\limits_{\left|y-x^0\right|=R} \frac{R^2 - \left|x - x^0\right|^2}{|\, y - x\,|^n} \cdot u_k(y) ds_y =$$

$$= \frac{1}{\omega_n R} \int\limits_{\left|y-x^0\right|=R} \frac{R^2 - \left|x - x^0\right|^2}{|\, y - x\,|^n} \cdot u(y) ds_y$$

тенглик ўринли бўлади. Бундан эса, $\left|x - x^0\right| < R$ шарда $u(x)$ функциянинг гармоник эканлиги келиб чиқади. x^0 нуқта D соҳанинг ихтиёрий нуқтаси бўлгани учун $u(x)$ функциянинг бутун D соҳада гармоник эканлигини ҳосил қиламиз.

8 – §. ДИРИХЛЕ МАСАЛАСИ. СУБГАРМОНИК ФУНКЦИЯЛАРНИНГ ПЕРРОН УСУЛИ

$\Omega \subset R^n$ − ихтиёрий чегараланган соҳа бўлсин. $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ функция ҳар бир $x \in \Omega$ учун $\Delta u(x) = 0$ Лаплас тенгламасини ва $u\big|_{\partial\Omega} = \varphi(x)$ чегаравий шартни қаноатлансин. Бундай $u = u(x)$ функцияни топиш масаласи Лаплас тенгламаси учун қўйилган Дирихле масаласи дейилади ва $u(x)$ функцияга Дирихле масаласининг классик ечими деб айтилади. Энди шу ихтиёрий чегараланган соҳа учун Дирихле масаласи классик ечимининг мавжудлиги ҳақидаги масалани қараб чиқамиз. Бунда биз шар учун Дирихле масаласининг ечилиши ва максимум принципига асосланган субгармоник функцияларнинг Перрон усулидан кенг фойдаланамиз. Бу усул бир қатор махсус қулайликларга эга бўлиб, масала ечимининг мавжудлиги ечимнинг чегара атрофидаги характерни ўрганишдан ажралган ҳолда олиб қаралади. Ҳамда бу усул иккинчи тартибли эллиптик тенгламаларнинг умумийроқ синфлари учун ҳам соддагина умумлаштирилади. Мавжудлик теоремаларини исбот қилишнинг бошқа маълум усуллари ҳам мавжуд бўлиб, улар интеграл тенгламалар усули, вариацион усул ёки гильберт фазоси усули ва бошқалардир.

Таъриф. *Агар* $\Omega \subset R^n$ *−соҳада аниқланган* $u(x)$ $\left(-\infty \le u(x) < \infty\right)$ *функция учун*

1) Ω *соҳада* $u(x)$ *функция юқоридан ярим узлуксиз, яъни ихтиёрий* $x^0 \in \Omega$ *учун* $\overline{\lim\limits_{x \to x^0}}\, u(x) \le u(x^0)$;

2) *Ҳар бир* $x^0 \in \Omega$ *нуқта учун* $u(x^0)$ *қиймат етарлича кичик* $r > 0$ $\left(r \le r(x^0)\right)$ *радиусли* $S\left(x^0, r\right)$ *сфера бўйича олинган* $u(x)$ *функциянинг ўрта қийматидан катта эмас:*

$$u(x^0) \le \frac{1}{\sigma_n r^{n-1}} \int\limits_{S\left(x^0,\, r\right)} u(x) d\sigma, \qquad (8.1)$$

бунда $\sigma_n = \dfrac{n \cdot \pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}+1\right)}-$ *эса* R^n *фазодаги* $S\left(0,\, 1\right)-$*бирлик сферанинг юзи, шартлар ўринли бўлса, у ҳолда* $u(x)$ *функция* Ω *соҳада субгармоник функция дейилади.*

$C^2\left(\Omega\right)$ синфга қарашли $u(x)$ функция учун $\Delta u = 0$ $\left(\Delta u \ge 0,\ \ \Delta u \le 0\right)$ муносабат бажарилса, у ҳолда $u(x)$ функция гармоник (субгармоник, супергармоник) функция деб аталади.

$C^2\left(\Omega\right)$ синфга қарашли субгармоник ва супергармоник функцияларнинг таърифини узлуксиз функциялар учун қуйидагича ҳам умумлаштириш мумкин.

Агар Ω соҳада узлуксиз $u(x)$ функция ихтиёрий B Р Ω шар ва B да гармоник ихтиёрий $h(x)$ функция учун ∂B да $u(x) \le h(x)$ $\left(u(x) \ge h(x)\right)$ тенгсизлик ўринли эканлигидан шу $u(x) \le h(x)$ $\left(u(x) \ge h(x)\right)$ тенгсизликнинг B да ҳам ўринли эканлиги келиб чиқса, у ҳолда $u(x)$ функция Ω соҳада субгармоник (супергармоник) функция дейилади. Узлуксиз субгармоник функцияларнинг қуйидаги хоссаларини кўрсатиш мумкин.

1) Ω соҳада узлуксиз $u(x)$ субгармоник функция учун максимумнинг кучли принципи ўринлидир, яъни агар Ω чегараланган соҳада $v(x)$ супергармоник функция ва $\partial\Omega$ да $v(x) \ge u(x)$ бўлса, у ҳолда бутун Ω соҳада $v(x) > u(x)$ ёки $v(x) \equiv u(x)$ бўлади. Бу ерда $v(x)$ супергармоник функция ва $u(x)$ субгармоник функциялар $\overline{\Omega}$ да узлуксиз деб қаралади.

Охирги хулосани исбот қилиш учун тескарисини фараз қиламиз. У ҳолда бирор $x^0 \in \Omega$ нуқта учун $\left(u-v\right)(x^0)=\sup\limits_{x\in\Omega}\left(u(x)-v(x)\right)=M\geq 0$ ва шундай бир $B=B\left(x^0\right)$ шар топилиб, ∂B да $u-v \not\equiv M$ бўлади. $\overline{u}$ ва $\overline{v}$ функциялар гармоник функциялар бўлиб, ∂B да u ва v ларга мос равишда тенг бўлсин. У ҳолда

$$M\geq \sup_{x\in\partial B}\left(\overline{u}(x)-\overline{v}(x)\right)\geq\left(\overline{u}-\overline{v}\right)(x^0)\geq\left(u-v\right)(x^0)=M$$

ва шунга кўра бу формулада тенгсизлик белгиларини тенглик белгиси билан алмаштириш мумкин. Гармоник функциялар учун максимумнинг кучли принципига кўра, B да $\overline{u}-\overline{v}\equiv M$ бўлгани учун $u-v\equiv M$ эканлиги ∂B да келиб чиқади. Бу эса B шарнинг танланишига зиддир. Демак, 1) хосса ўринли экан.

2) Ω соҳада $u(x)$ функция субгармоник ва B шар шу Ω соҳанинг ичида қатъий жойлашган (компакт жойлашган) , яъни B Р Ω бўлсин. $\overline{u}$ орқали B да гармоник бўлган ва ∂B да $u(x)$ функциянинг қиймати орқали Пуассон интеграли билан берилган функцияни белгилаймиз. Бу функция учун ∂B да $\overline{u}=u$ бўлади.

Ω соҳада B га нисбатан u функциянинг гармоник қирқимини

$$U(x)=\begin{cases}\overline{u}(x), & x\in B\\ u(x), & x\in\Omega\setminus B\end{cases}$$

тенглик билан аниқлаймиз. $U(x)$ функция Ω соҳада субгармоник функция бўлади. Ҳақиқатан ҳам, Ω соҳадаги ихтиёрий B' Р Ω шар ва B' шарда $h(x)$ гармоник функция бўлиб, $x\in\partial B'$ да $h(x)\geq U(x)$ тенгсизликни қаноатлантирсин. $u(x)\leq U(x)$ тенгсизлик B' да ўринли бўлгани учун $u(x)\leq h(x)$ тенгсизлик ҳам, B' да ўринли ва шунга кўра, $U(x)\leq h(x)$ тенгсизлик $x\in B'\setminus B$ да ҳам ўринли. Лекин $U(x)$ функция B да гармоник. Шунинг учун, максимум принципига кўра,

$U(x)\le h(x)$ тенгсизлик $x\in B\cap B'$ да ҳам ўринлидир. Шунга кўра, $U(x)\le h(x)$ тенгсизлик B' да ўринли бўлади, яъни Ω соҳада $U(x)$ субгармоник функциядир.

3) Ω соҳада $u_1(x),\, u_2(x),...u_N(x)$ субгармоник функциялар бўлсин. У ҳолда $u(x)=\max\{\, u_1(x),\, u_2(x),...u_N(x)\,\}$ функция ҳам Ω соҳада субгармоник функциядир.

Бу хосса бевосита субгармоник функциянинг таърифидан келиб чиқади. Супергармоник функциялар учун шунга ўхшаш хоссаларни ҳосил қилиш учун 1), 2), 3) хоссаларда $u(x)$ функцияни $-u(x)$ функция билан алмаштириш керак.

$\Omega-$чегараланган соҳа, $\varphi(x)-$эса $\partial\Omega$ да чегараланган функция бўлсин. Агар $\overline{\Omega}$ да узлуксиз бўлган $u(x)-$ субгармоник функция $\partial\Omega$ да $u(x)\le\varphi(x)$ тенгсизликни қаноатлантирса, $\varphi(x)$ га нисбатан субфункция дейилади. Худди шунга ўхшаш $\overline{\Omega}$ да узлуксиз бўлган $u(x)-$ супергармоник функция $\partial\Omega$ да $u(x)\ge\varphi(x)$ тенгсизликни қаноатлантирса, $\varphi(x)$ га нисбатан суперфункция дейилади.

Максимум принципига кўра, ҳар бир субфункция ($\varphi(x)$ га нисбатан) ихтиёрий суперфункциядан кичик ёки тенг бўлади.

Хусусан, $\inf\limits_{x\in\partial\Omega}\varphi(x)$ дан ошмайдиган ($\sup\limits_{x\in\partial\Omega}\varphi(x)$ дан кичик бўлмаган) ўзгармас функция субфункция (суперфункция) бўлади. $\varphi(x)$ функция учун барча субфункциялар тўпламини S_φ орқали белгилаймиз.

Перрон усулининг асосий натижаси қуйидаги теоремада жамланган.

Теорема. $u(x)=\sup\limits_{v(x)\in S_\varphi} v(x)$ *функция* Ω *соҳада гармоникдир.*

Исбот. Максимум принципига кўра ихтиёрий $v(x)\in S_\varphi$ функция $v(x)\le\sup\limits_{x\in\Omega}\varphi(x)$ тенгсизликни қаноатлантиради. Шунга кўра, $u(x)$ функция бутун $\overline{\Omega}$ да аниқланади. $y \in \Omega$ ихтиёрий тайинланган нуқта бўлсин. $u(x)$ функция аниқланиши бўйича шундай бир $\{ v_n(x) \}_1^{\infty} \subset S_{\varphi}$ кетма–кетлик мавжуд бўлиб, $v_n(y) \to u(y)$ бўлади. $v_n(x)$ ни $\max\left(v_n(x),\ \inf\limits_{x \in \partial\Omega} \varphi(x) \right)$ билан алмаштириб, $\{ v_n(x) \}$ кетма–кетликни чегараланган деб ҳисоблаш мумкин. Энди R сонни $B = B_R(y)\ \text{Р}\ \Omega$ бўладиган қилиб танлаймиз ва $V_n(x)$ орқали B га нисбатан $v_n(x)$ функциянинг гармоник қирқимини белгилаймиз. У ҳолда $V_n(x) \in S_{\varphi}$, $V_n(y) \to u(y)$ бўлади, ҳамда $\{ V_n(x) \}$ кетма–кетликнинг $\{ V_{n_k}(x) \}$ қисмий кетма–кетлиги топилиб, $\rho < R$ радиусли ихтиёрий $B_{\rho}(y)$ шарда $v(x)$ гармоник функцияга текис яқинлашувчи бўлади. B да $v(x) \le u(x)$ ва $v(y) = u(y)$ тенглик ўринли. Энди B да $v(x) = u(x)$ эканлигини кўрсатамиз. Фараз қилайлик, бирор $z \in B$ нуқтада $v(z) < u(z)$ бўлсин. У ҳолда шундай бир $\overline{u} \in S_{\varphi}$ функция мавжуд бўлиб, $v(z) < \overline{u}(z)$ ўринли бўлади. $w_k(x) = \max\left(\overline{u}(x),\ V_{n_k}(x) \right)$ деб белгилаб, бу функциянинг W_k гармоник қирқимини олсак, олдин ҳосил қилганимиздек $\{ W_k \}$ кетма–кетликнинг бирор қисмий кетма–кетлиги w гармоник функцияга яқинлашиб, B да $v(x) \le w(x) \le u(x)$ тенгсизликни қаноатлантиради. Бундан ташқари, $v(y) = w(y) = u(y)$. Лекин, у ҳолда максимум принципига кўра, B да $v(x) = w(x)$ тенглик бажарилиши керак бўлади. Бу эса $\overline{u}(x)$ нинг танлашига зиддир. Шундай қилиб, $u(x)$ функция Ω соҳада гармоникдир.

Биз конструктив равишда қурган гармоник функция табиийки, $\Delta u = 0,\ x \in \Omega,\quad u\big|_{\partial\Omega} = \varphi(x)$ классик Дирихле масаласининг ечими (бу ечимга Перрон ечими деб айтилади) деб ҳисоблаш мумкин. Ҳақиқатан ҳам, агар Дирихле масаласи ечиладиган бўлса, у ҳолда унинг ечими Перрон ечими билан устма–уст тушади. Ҳақиқатдан ҳам, w ечим бўлсин. У ҳолда, $w \in S_{\varphi}$ бўлиб, максимум принципига кўра, $w \geq u$ тенгсизлик барча $u \in S_{\varphi}$ учун ўринли бўлади. Бундан $w = u$ ҳосил қилинади.

Перрон усулида ечимнинг чегара атрофидаги характери шу ечимнинг мавжудлиги масаласидан ажратилганлиги муҳимдир. Перрон ечими чегарада қийматининг берилишига ва соҳа чегарасининг геометрик хоссаларига боғлиқ бўлиб, барьер функцияси ёрдамида ўрганилади.

$\xi \in \partial\Omega$ нуқта бўлсин. Агар $C\left(\overline{\Omega}\right)$ синфга қарашли $W = W_{\xi}$ функция

1) Ω соҳада W супергармоник функция;

2) $x \in \overline{\Omega} \setminus \{\xi\}$ учун $W(x) > 0$, $W(\xi) = 0$ бўлса, Ω учун ξ нуқтада барьер функцияси дейилади.

Барьер функциясига умумийроқ ҳолда ҳам таъриф бериш мумкин бўлиб, унда W функция супергармоник ва Ω соҳадагагина узлуксиз, мусбат ҳамда $x \to \xi$ да $W(x) \to 0$ шартларни қаноатлантиришини талаб қиламиз. Барьер функцияни қуришга асосланган йўналишнинг муҳимлиги шундан иборатки, бунда $\partial\Omega$ чегаранинг локал хоссаларигина зарур бўлади.

W функция $\xi \in \partial\Omega$ нуқтада локал барьер бўлсин, яъни ξ нуқтанинг шундай бир N атрофи мавжуд бўлиб, $\Omega \cap N$ да W функция юқоридаги таърифни қаноатлантирсин. У ҳолда Ω учун ξ нуқтада барьерни қуйидагича аниқлаш мумкин. B шар бўлиб, $\xi \in B$ Р N ва $m = \inf\limits_{x \in N \setminus B} W(x) > 0$ шартларни қаноатлантирсин.

$$\overline{W}(x) = \begin{cases} \min\left(m,\, W(x)\right), & x \in \overline{\Omega} \cap B, \\ m \qquad\qquad\qquad , & x \in \overline{\Omega} \setminus B \end{cases}$$

функция Ω учун ξ нуқтада барьер бўлади. Бунга 1) ва 2) хоссаларнинг бажарилишини текшириш билан ишонч ҳосил қилиш мумкин. Ҳақиқатан ҳам, $\overline{W}$ функция $\overline{\Omega}$ соҳада узлуксиз ва Ω соҳада супергармоник эканлиги субгармоник функцияларнинг 3) хоссасидан келиб чиқади. 2) хосса бевосита кўрсатилади.

Агар чегара нуқтасида барьер мавжуд бўлса, у ҳолда бу нуқта (Лаплас тенгламаси учун) регуляр нуқта дейилади. Барьернинг мавжудлиги ва ечимнинг чегара атрофидаги характери орасидаги боғлиқлик қуйидаги леммада ифодаланади.

Лемма. *Ω соҳада $u(x) = \sup\limits_{v(x)\in S_{\varphi}} v(x)$ тенглик билан аниқланган гармоник функция бўлсин. Агар $\xi -$нуқта Ω соҳанинг чегарасидаги регуляр нуқта ва ξ нуқтада $\varphi(\xi)$ узлуксиз бўлса, у ҳолда $x \to \xi$ да $u(x) \to \varphi(\xi)$ бўлади.*

Исбот. Ихтиёрий $\varepsilon > 0$ ва $M = \sup\limits_{x\in\partial\Omega} |\varphi(x)|$ бўлсин. $\xi -$ чегарадаги регуляр нуқта бўлганлиги учун ξ нуқтада $W(x)$ барьер мавжуд ва $\varphi(x)$ функциянинг узлуксизлигига кўра, δ ва k сонлари мавжуд бўлиб, $|x-\xi| < \delta$ учун $|\varphi(x)-\varphi(\xi)| < \varepsilon$, ҳамда $|x-\xi| \geq \delta$ учун $kW(x) \geq 2M$ тенгсизлик ўринли. $\varphi(\xi)+\varepsilon+kW$ ва $\varphi(\xi)-\varepsilon-kW$ функциялар φ учун мос равишда суперфункция ва субфункция бўлади. Шунга кўра, u функциянинг аниқланишига кўра ва ҳар бир суперфункция ва субфункциядан катта ёки тенг эканлигидан $x \in \Omega$ учун $\varphi(\xi)-\varepsilon-kW(x) \leq u(x) \leq \varphi(\xi)+\varepsilon+kW(x)$ ёки $|u(x)-\varphi(\xi)| \leq \varepsilon + kW(x)$ тенгсизликка эга бўламиз. Бундан, $x \to \xi$ да $W(x) \to 0$ эканлигини ҳисобга олсак, $x \to \xi$ да $u(x) \to \varphi(\xi)$ ҳосил бўлади. Бу исбот қилинган натижадан қуйидаги теорема келиб чиқади.

Теорема. *Чегараланган соҳада классик Дирихле масаласи ихтиёрий узлуксиз чегаравий қийматда ечилиши учун соҳанинг барча чегара нуқталари регуляр бўлиши зарур ва етарлидир.*

Исбот. Агар $\varphi(x)$ чегаравий функция узлуксиз ва $\partial\Omega$ чегара регуляр нуқталардан ташкил топган бўлса, у ҳолда юқоридаги леммага кўра, Дирихле масаласининг ечими $u(x) = \sup\limits_{v(x)\in S_{\varphi}} v(x)$ бўлади. Аксинча, агар Дирихле масаласи барча узлуксиз чегаравий қийматлар учун ечимга эга бўлса, у ҳолда ихтиёрий $\xi \in \partial\Omega$ учун $\varphi(x) = \left| x - \xi \right|$ узлуксиз чегаравий функция учун Ω соҳада Дирихле масаласининг ечими бўлган гармоник функция ξ нуқтада барьер бўлади. Шунга кўра, ξ нуқта регуляр нуқтадир. Теорема исбот бўлди.

Энди қуйидаги савол муҳимдир: қандай соҳалар учун барча чегара нуқталари регуляр бўлади? Умумий ҳолда етарли шартларни чегаранинг локал геометрик хоссалари терминида бериш мумкин. Бундай шартлардан айримларини келтирамиз.

$n = 2$ бўлган ҳолда чегараланган Ω соҳани қараймиз. $z_0 -$нуқта Ω соҳанинг чегара нуқтаси бўлсин. r, $\theta -$орқали координата боши z_0 нуқтада бўлган қутб координаталарни белгилаймиз. z_0 нуқтанинг шундай бир N атрофи мавжуд бўлиб, $\Omega \cap N$ да ёки z_0 нуқтани ўз чегарасида сақловчи $\Omega \cap N$ нинг компонентасида аниқланган θ функциянинг бир қийматли варағини ажратиш мумкин бўлсин. У ҳолда

$$W = -\mathrm{Re}\frac{1}{\log(z - z_0)} = -\frac{\log r}{\log^2 r + \theta^2}$$

функция z_0 нуқта учун (суст) локал барьер функция бўлади ва шунга кўра z_0 нуқта регуляр нуқтадир. Хусусан, агар z_0 нуқта Ω соҳанинг ташқарисида ётувчи содда ёйнинг чекка нуқта бўлса, у ҳолда бу z_0 нуқта чегаранинг регуляр нуқтаси бўлади. Шундай қилиб, текисликда Дирихле масаласининг чегараланган соҳада узлуксиз чегаравий қийматлар учун ечилиши соҳанинг барча чегара нуқталарига ташқаридан ўтувчи содда ёйнинг чекка нуқтаси бўлиши мумкин бўлган ҳолда ўринли бўлади. Бир оз умумийроқ ҳолда, шу барьер кўрсатадики, агар соҳа тўлдирувчисининг ихтиёрий компонентаси биттадан ортиқ нуқтани сақласа, чегаравий масала ечилади. Бундай соҳага мисол сифатида чекли сондаги содда ёпиқ эгри чизиқлар билан чегараланган соҳани келтириш мумкин. Бошқа бир мисол – бирлик доирадан қандайдир ёйни қирқиб ташлаш билан ҳосил қилиш мумкин. Бу ҳолда чегаравий қиймат қирқилган қисмининг ҳар иккала қирғоғида ҳам берилиши мумкин.

Юқори ўлчамли соҳалар учун бу масала қаралган масаладан муҳим фарқи бор бўлиб, умумий ҳолда Дирихле масаласи ечилмаслиги ҳам мумкин. Уч ўлчовли фазо бўлган ҳолда ёпиқ сирт билан чегараланган ва соҳа ичига йўналган етарлича ўткир бигизли Лебег томонидан қурилган соҳани мисол сифатида келтириш мумкин: бу бигизнинг ўткир учи шу сирт билан чегараланган соҳа чегарасининг регуляр бўлмаган нуқтаси бўлади.

Дирихле масаласи ечилишининг содда етарли шарти чегараланган Ω соҳа учун ташқи сфера шартидир:

ҳар бир $\xi \in \partial\Omega$ нуқта учун $B = B_R(y)$ шар мавжуд бўлиб, $\overline{B} \cap \overline{\Omega} = \xi$ шартни қаноатлантирсин.

Агар бу шарт бажарилса, у ҳолда

$$W(x) = \begin{cases} R^{2-n} - |x-y|^{2-n}, & n \geq 3 \\ \log \dfrac{|x-y|}{R}, & n = 2 \end{cases}$$

тенглик билан аниқланган W функция ξ нуқтада барьер бўлади. Хусусан, чегараси C^2 синфга тегишли соҳаларнинг барча чегара нуқталари регулярдир.

Сиғим физик тушунчаси чегара нуқтасининг регулярлиги ва чиқариб ташланган нуқта эканлигини характерлашда ёрдамчи воситадир. $\Omega-$орқали R^n $\left(n \geq 3\right)$ фазодаги $\partial\Omega$ силлиқ чегарага эга чегараланган соҳани белгилаймиз. $u-$гармоник функция $R^n \setminus \overline{\Omega}$ тўлдирувчи соҳада аниқланган ва $u\big|_{\partial\Omega} = 1$ чегаравий шартни ва $u(\infty) = 0$ шартни қаноатлантирсин. Одатда бундай функция ўтказувчанлик потенциали деб аталади. Бундан $u(x)$ функциянинг мавжудлиги ички чегараси $\partial\Omega$ (бунда $u_k(x) = 1$) бўлган ва ташқи чегараси (бунда $u_k(x) = 0$)

чексизликка интилувчи бўлган кенгайувчи чегараланган соҳалар кетма–кетлигида аниқланган $u_k(x)$ гармоник функцияларнинг ягона лимити эканлигини кўрсатиш мумкин. Агар $\sum$ орқали $\partial\Omega$ ни ёки Ω соҳани ўраб олувчи ихтиёрий ёпиқ сиртни белгиласак,

$$cap\,\Omega = -\int\limits_{\sum} \frac{\partial u}{\partial \gamma} ds = \int\limits_{R^n\setminus\Omega} \left| Du \right|^2 dx$$

миқдор Ω соҳанинг сиғимини аниқлайди, бунда $\gamma -$ташқи нормалдир. Электростатикада $cap\,\Omega$ сиғим $\partial\Omega$ да 1 бўлган потенциалга эга ва $\partial\Omega$ да жойлашган тўла электрик заряд билан кўпайтувчи ўзгармас сон аниқлигида устма–уст тушади.

Сиғим тушунчаси соҳанинг чегараси силлиқ бўлмаган ҳолда ҳам киритилиши мумкин ва ихтиёрий компакт тўплам учун чегараси силлиқ ичма–ич жойлашган чегараланган соҳаларнинг сиғимлари кетма–кетлигининг ягона лимити сифатида аниқланади. Сиғим тушунчасининг эквивалент таърифини аппроксимация қилувчи соҳаларсиз ҳам бериш мумкин. Хусусан, қуйидаги варацион характеристика ўринли:

$$cap\,\Omega = \inf_{v(x)\in K} \int\limits_{R^n} \left| Dv(x) \right|^2 dx$$

бунда $K = \left\{ v(x) \in C_0^1\left(R^n\right) \colon v(x) = 1,\ x \in \Omega \right\}$.

$x^0 \in \partial\Omega$ чегара нуқтасининг регулярлигини аниқлашда ихтиёрий тайинланган $\lambda \in (0,\,1)$ сон учун

$$c_j = cap\left\{ x \in \Omega \colon \left| x - x^0 \right| \le \lambda^j \right\}$$

сиғимни қараймиз. Винер критериясига кўра, Ω соҳанинг x^0 чегара нуқтаси регуляр бўлиши учун $\sum\limits_{j=0}^{\infty} c_j \cdot \lambda^{-j(n-2)}$ қаторнинг узоқлашувчи бўлиши зарур ва етарлидир.

9 – §. ПУАССОН ТЕНГЛАМАСИ УЧУН ДИРИХЛЕ МАСАЛАСИ

Юқорида Лаплас тенгламаси учун фундаментал ечим $E(x,\ y)$ функция киритилган эди. Энди унинг ўрнига қуйидаги нормаллашган фундаментал ечимни киритамиз:

$$\Gamma(x-y)=\Gamma(|x-y|)=\begin{cases}\dfrac{1}{n(2-n)\omega_n}|x-y|^{2-n}, & n>2\\ \dfrac{1}{2\pi}\log|x-y|, & n=2\end{cases}. \tag{9.1}$$

$f(x)$ функция Ω соҳа бўйича интегралланувчи бўлсин. R^n фазода

$$W(x)=\int_{\Omega}\Gamma(x-y)f(y)dy \tag{9.2}$$

тенглик билан аниқланадиган $W(x)$ функция $f(x)$ зичлик билан берилган Ньютон потенциали деб аталади.

$\partial\Omega$ чегараси етарлича силлиқ бўлган соҳадаги $u(x)\in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$ ихтиёрий функция

$$u(x)=\int_{\partial\Omega}\left(u(y)\cdot\frac{\partial\Gamma}{\partial\gamma}(x-y)-\Gamma(x-y)\frac{\partial u(y)}{\partial\gamma}\right)ds+$$

$$+\int_{\Omega}\Gamma(x-y)\Delta u(y)dy,\ x\in\Omega$$

Грин формуласига кўра, гармоник функциялар йиғиндиси ва шу функция Лапласианининг Ньютон потенциали йиғиндиси шаклида тасвирланади. Шунинг учун, $\Delta u(x)=f(x)$ Пуассон тенгламасини ўрганиш $f(x)$ функциянинг Ньютон потенциалини ўрганишга кўп боғлиқдир. $f(x)$ функция Ньютон потенциалининг ҳосиласини баҳолаш Пуассон тенгламаси учун классик Дирихле масаласининг ечилиши ҳақидаги теоремани келтириб чиқаришга имкон беради. Агар $f(y)\in C_0^\infty(\Omega)$ бўлса, у ҳолда

$$W(x)=\int\limits_{\Omega}\Gamma(x-y)f(y)\,dy=$$

$$=\int\limits_{R^n}\Gamma(x-y)f(y)\,dy=\int\limits_{R^n}\Gamma(z)f(x-z)\,dz$$

шаклида ёзиб, $W(x)\in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$ эканлигини кўрамиз. Агар $f(y)$ функциядан фақат узлуксизлик талаб қилинса, у ҳолда $W(x)$ Ньютон потенциали икки марта дифференциалланувчи ҳам бўлмайди. Ньютон потенциалини ўрганишда Гёльдер синфлари муҳим роль ўйнайди.

$x_0\in R^n$ ва f функция x_0 нуқтани сақловчи D чегараланган соҳада аниқланган бўлсин. Агар $0<\alpha<1$ учун

$$\left[\,f\,\right]_{\alpha,\,x_0}=\sup_{D-\{x_0\}}\frac{|\,f(x)-f(x_0)|}{|\,x-x_0|^{\alpha}} \tag{9.3}$$

миқдор чекли бўлса, f функция x_0 нуқтада α кўрсаткич билан Гёльдер бўйича узлуксиз дейилади.

$\left[\,f\,\right]_{\alpha,\,x_0}$ миқдорни (α кўрсаткич билан) f функциянинг x_0 нуқтадаги D тўпламга нисбатан Гёльдер коэффициенти деб айтилади. Кўриниб турибдики, агар f функция x_0 нуқтада Гёльдер бўйича узлуксиз бўлса, у ҳолда f функция x_0 нуқтада узлуксиздир. Агар (9.3) миқдор $\alpha=1$ учун чекли бўлса, f функция x_0 нуқтада Липщиц бўйича узлуксиз дейилади.

Мисол. $B_1(0)$ шарда $f(x)=|x|^{\beta}$ тенглик билан аниқланган f функция $x=0$ нуқтада $0<\beta<1$ учун β кўрсаткич билан Гёльдер бўйича узлуксиздир. Агар $\beta=1$ бўлса, Липщиц бўйича узлуксиздир.

Гёльдер бўйича узлуксизлик тушунчаси бутун D тўпламга ҳам умумлаштирилади. Агар

$$\left[f \right]_{\alpha, x_0} = \sup_{\substack{x, y \in D \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^{\alpha}}, \quad 0 < \alpha \leq 1, \tag{9.4}$$

миқдор чекли бўлса, $f(x)$ функция D соҳада α кўрсаткич билан Гёльдер бўйича текис узлуксиз дейилади. Агар D тўпламдаги барча компакт қисм–тўпламлар учун α кўрсаткич билан $f(x)$ функция текис узлуксиз бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция α кўрсаткич билан D тўпламда Гёльдер бўйича локал узлуксиз дейилади. Агар D компакт тўплам бўлса, бу икки тушунча устма – уст тушади.

$\Omega \subset R^n$ очиқ тўплам бўлсин ва $k-$ манфиймас бутун сон бўлсин. $C^{k,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ $\left(C^{k,\alpha}(\Omega)\right)$ орқали $C^k\left(\overline{\Omega}\right)$ $\left(C^k(\Omega)\right)$ фазодан олинган ва $k-$ чи ҳосилалари Ω соҳада α кўрсаткич билан Гёльдер бўйича текис узлуксиз (Гёльдер бўйича локал узлуксиз) функциялар тўпламини белгилаймиз. Соддалик учун $C^{0,\alpha}(\Omega) = C^{\alpha}(\Omega)$, $C^{0,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right) = C^{\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ деб белгилаймиз, бунда $0 < \alpha < 1$. $\alpha = 0$ учун $C^{k,0}(\Omega) = C^k(\Omega)$, $C^{k,0}\left(\overline{\Omega}\right) = C^k\left(\overline{\Omega}\right)$. Бундан ташқари, $C_0^{k,\alpha}(\Omega)$ орқали $C^{k,\alpha}(\Omega)$ фазога қарашли ва Ω соҳада компакт ташувчили функцияларни белгилаймиз. Бу фазоларда мос нормалар

$$\| u \|_{C^k\left(\overline{\Omega}\right)} = \sum_{j=0}^{k} \left| D^j u \right|_{0, \Omega} = \sum_{j=0}^{k} \sup_{|\beta| = j} \sup_{x \in \Omega} \left| D^{\beta} u(x) \right|,$$

$$\| u \|_{C^{k,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)} = \| u \|_{C^k\left(\overline{\Omega}\right)} + \left[D^k u \right]_{\alpha, \Omega} =$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \sup_{|\beta| = j} \sup_{x \in \Omega} \left| D^{\beta} u(x) \right| + \sup_{|\beta| = k} \left[D^{\beta} u \right]_{\alpha, \Omega}$$

шаклида киритилади.

1 – лемма. *$f(x)$ функция Ω соҳада чегараланган ва интегралланувчи бўлсин. $W(x)-$эса зичлиги $f(x)$ бўлган Ньютон потенциали бўлсин. У ҳолда $W(x)\in C^1(R^n)$ ва барча Ω учун*

$$D_iW(x)=\int_{\Omega} D_i\Gamma(x-y)f(y)\,dy,\quad i=1,2,...,n \tag{9.5}$$

формула ўринли бўлади.

Исбот. $D\Gamma(x-y)$ функция учун

$$\left|D_i\Gamma(x-y)\right|\le\frac{1}{n\omega_n}\left|x-y\right|^{1-n},\ \left|D_{ij}\Gamma(x-y)\right|\le\frac{1}{\omega_n}\left|x-y\right|^{-n},$$

$$\left|D^{\beta}\Gamma(x-y)\right|\le C\left|x-y\right|^{2-n-|\beta|},\ C=C(n,|\beta|) \tag{9.6}$$

баҳолашларга кўра, $v(x)=\int\limits_{\Omega} D_j\Gamma(x-y)f(y)\,dy$ функция

барча $x\in R^n$ учун аниқланади. $v=D_iW$ эканлигини исбот қилиш учун, $\eta\in C^1\left(R\right)$ функцияни $t\le 1$ учун $0\le\eta\le 1$, $0\le\eta'\le 2$, $\eta(t)=0$, $t\ge 2$ учун $\eta(t)=1$ шартларни қаноатлантирадиган қилиб танлаймиз ва $\varepsilon>0$ учун

$$W_{\varepsilon}(x)=\int_{\Omega}\Gamma\eta_{\varepsilon}f(y)\,dy,\ \Gamma=\Gamma(x-y),\ \eta_{\varepsilon}=\eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right)$$

функцияни қурамиз. Кўриниб турибдики, $W_{\varepsilon}(x)\in C^1\left(R^n\right)$ ва $v(x)-D_iW_{\varepsilon}(x)=\int\limits_{|x-y|\le 2\varepsilon} D_i\left\{(1-\eta_{\varepsilon})\Gamma\right\}f(y)\,dy$ бўлади.

Бундан,

$$\left|v(x)-D_jW_{\varepsilon}(x)\right|\le\sup_{x\in R^n}|f(y)|\int_{|x-y|\le 2\varepsilon}\left(\left|D_j\Gamma\right|+\frac{2}{\varepsilon}|\Gamma|\right)dy\le$$

$$\le \sup_{x\in R^n} |f(y)| \begin{cases} \dfrac{2n\varepsilon}{n-2}, & n>2 \quad учун \\ 4\varepsilon\left(1+\left|\log 2\varepsilon\right|\right), & n=2 \quad учун \end{cases}$$

келиб чиқади. Шунга кўра, $W_\varepsilon(x)$ ва $D_iW_\varepsilon(x)$ функциялар $\varepsilon\to 0$ да мос равишда $W(x)$ ва $v(x)$ функцияларга R^n фазодаги ҳар бир компактда текис яқинлашади. Шунинг учун $W(x)\in C^1\left(R^n\right)$ ва $D_iW(x)=v(x)$ бўлади.

2 – лемма. *$f(x)$ функция чегараланган ва ($\alpha\le 1$ кўрсаткич билан) Гёльдер бўйича локал узлуксиз бўлсин, ҳамда $W(x)-$ Ньютон потенциали $f(x)$ зичлик билан берилган бўлсин. У ҳолда $W(x)\in C^2(\Omega)$, $\Delta W(x)=f(x)$ тенглик ва барча $x\in\Omega$ учун*

$$D_{ij}W(x)=\int_{\Omega_0} D_{ij}\Gamma(x-y)\big(f(y)-f(x)\big)dy-$$
$$-f(x)\int_{\partial\Omega_0} D_i\Gamma(x-y)\gamma_j(y)ds_y,\ i,j=1,...,n. \tag{9.7}$$

тенглик ўринли бўлади. Бу ерда Ω_0 орқали Ω соҳани ўзида сақловчи ва дивергенция ҳақидаги теорема қўлланиладиган тўплам бўлиб, Ω нинг ташқарисига $f(x)$ функция ноль билан давом эттирилади.

Исбот. $\left|D_{ij}\Gamma(x-y)\right|\le \dfrac{1}{\omega_n}|x-y|^{-n}$ баҳолаш ва $f(x)$ функциянинг Ω соҳада Гёльдер бўйича нуқтавий узлуксизлигига кўра

$$u(x)=\int_{\Omega_0} D_{ij}\Gamma\cdot\big(f(y)-f(x)\big)dy-f(x)\int_{\partial\Omega_0} D_i\Gamma\cdot\gamma_j(y)ds_y$$

функция барча $x \in \Omega$ учун аниқланади. $v(x) = D_i W(x)$ бўлсин. $\varepsilon > 0$ учун $v_\varepsilon(x) = \int\limits_\Omega D_i \Gamma \eta_\varepsilon f(y)\,dy$ функцияни аниқлаймиз, бунда $\eta_\varepsilon(x)$ – функция юқорида киритилган шаклда бўлиб, $v_\varepsilon(x) \in C^1(\Omega)$ бўлади. Дифференциаллаш ёрдамида етарли кичик ε учун

$$D_j v_\varepsilon(x) = \int\limits_\Omega D_j\left(D_i \Gamma \eta_\varepsilon\right) f(y)\,dy =$$

$$= \int\limits_\Omega D_j\left(D_i \Gamma \eta_\varepsilon\right)\left(f(y) - f(x)\right) dy + f(x) \int\limits_{\Omega_0} D_j\left(D_i \Gamma \eta_\varepsilon\right) dy =$$

$$= \int\limits_{\Omega_0} D_j\left(D_i \Gamma \eta_\varepsilon\right)\left(f(y) - f(x)\right) dy - f(x) \int\limits_{\partial\Omega_0} D_i \Gamma \eta_\varepsilon \gamma_j(y)\,ds_y\,,$$

бундан $2\varepsilon < dist\left(x,\ \partial\Omega\right)$ шартда

$$\left| u(x) - D_j v_\varepsilon(x) \right| =$$

$$= \left| \int\limits_{|x-y| \le 2\varepsilon} D_j\left\{ (1-\eta_\varepsilon) D_i \Gamma \right\} \cdot \left(f(y) - f(x) \right) dy \right| \le$$

$$\le [\,f\,]_{\alpha,\,x} \cdot \int\limits_{|x-y| \le 2\varepsilon} \left(\left| D_{ij}\Gamma \right| + \frac{2}{\varepsilon} \left| D_i \Gamma \right| \right) \cdot \left| x - y \right|^\alpha dy \le$$

$$\le \left(\frac{n}{\alpha} + 4 \right) \cdot [\,f\,]_{\alpha,\,x} \cdot (2\varepsilon)^\alpha$$

тенгсизликка эга бўламиз. Шунинг учун, $\varepsilon \to 0$ да Ω соҳадаги компакт қисм тўпламда $D_j v_\varepsilon(x)$ функция $u(x)$ га текис яқинлашади. $v_\varepsilon(x)$ функция $v(x) = D_i W(x)$ га Ω соҳада текис яқинлашгани учун $W(x) \in C^2(\Omega)$ ва $u(x) = D_{ij} W(x)$ келиб чиқади. Ниҳоят, (9.7) формулада $\Omega_0 = B_R(x)$ шарни олиб, етарлича катта R учун

$$\Delta W(x)=\frac{1}{n\omega_n R^{n-1}}f(x)\cdot\int\limits_{|x-y|=R}\gamma_i(y)\cdot\gamma_i(y)\,ds_y=f(x)$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Шундай қилиб, 2 – лемма исбот бўлди.

1– ва 2– леммалар ҳамда юқоридаги Лаплас тенгламаси учун келтирилган теоремадан фойдаланиб, қуйидаги теоремани ҳосил қиламиз.

Теорема. $\Omega-$*чегараланган соҳа бўлсин.* $\partial\Omega$ *чегаранинг барча нуқталари* (*Лаплас операторига нисбатан*) *регуляр бўлсин. Агар* $f(x)$ *функция чегараланган ва* Ω *соҳада Гёльдер бўйича локал узлуксиз бўлса, у ҳолда*

$$\Delta u(x)=f(x),\ \ \forall x\in\Omega$$

$$u\big|_{x\in\partial\Omega}=\varphi(x)$$

классик Дирихле масаласи ихтиёрий узлуксиз $\varphi(x)-$*чегаравий функция учун бир қийматли ечилади.*

Исбот. $W(x)-$орқали $f(x)$ зичлик билан Ньютон потенциалини белгилаймиз ва $v(x)=u(x)-W(x)$ деб оламиз. У ҳолда

$$\Delta u(x)=f(x),\ \ \forall x\in\Omega$$

$$u\big|_{x\in\partial\Omega}=\varphi(x)$$

масала

$$\Delta v(x)=0,\ \ \forall x\in\Omega$$

$$v\big|_{x\in\partial\Omega}=\varphi(x)-W(x)$$

масалага эквивалент бўлади. Охирги масаланинг бир қийматли ечилиши олдинги параграфда исбот қилинган эди. Теорема исбот бўлди.

Ω соҳа $\Omega=B=B_R(0)$ шар бўлганда юқоридаги теорема Пуассон интеграл формуласидан ва 1 – чи, 2 – чи леммалардан келиб чиқади. Бундан ташқари, бу ҳолда ечим учун

$$u(x)=\int\limits_{\partial B}K(x,\ y)\varphi(y)ds_y+\int\limits_{B}G(x,\ y)f(y)dy$$

ошкор формулани ҳам ёзишимиз мумкин, бунда

$$K(x,y)=\frac{R^2-|x|^2}{n\omega_n R|x-y|^n} \; - \quad \text{Пуассон ядроси,}$$

$$G(x,y)=\begin{cases} \Gamma(|x-y|)-\Gamma(\frac{|y|}{R}|x-y|) \;,\; y\neq 0, \\ \Gamma(|x|)-\Gamma(R) \;,\quad y=0 \end{cases} =$$

$$=\Gamma\left(\sqrt{|x|^2+|y|^2-2xy}\right)-\Gamma\left(\sqrt{\left(\frac{|x||y|}{R}\right)^2+R^2-2xy}\right)- \;\text{эса}$$

Грин функциясидир.

Эслатма. 2 – леммадаги Гёльдер бўйича узлуксизликни Дини шарти билан ҳам алмаштириш мумкин. Бошқача қилиб айтганда, агарда $\left|f(x)-f(y)\right|\le\varphi(|x-y|)$ тенгсизлик ўринли бўлиб, бунда $\int\limits_0^{\delta}\frac{\varphi(r)}{r}dr<\infty$ бўлса, у ҳолда $f(x)$ зичлик билан $W(x)$ Ньютон потенциали $C^2(\Omega)$ синфга қарашли ва $\Delta u(x)=f(x)$ тенгламанинг ечими бўлади. Бироқ агар $f(x)$ функция фақат узлуксиз бўлса, у ҳолда $W(x)$ Ньютон потенциали икки марта дифференциалланувчи бўлмаслиги ҳам мумкин.

Масалан. $P(x)=x_1x_2$, $D_{12}P=1$ ва $\eta(x)\in C_0^{\infty}\left(\{x:|x|<2\}\right)$, $|x|<1$ учун $\eta(x)=1$, ҳамда $t_k=2^k$ ва $k\to\infty$ да $c_k\to 0$ бўлиб, $\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_k$ қатор узоқлашувчи бўлсин.

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k\,\Delta(\eta P)(t_kx) \quad \text{функцияни аниқлаймиз.}$$

$f(x)-$узлуксиз бўлиб, координата бошининг ихтиёрий атрофида $\Delta u(x)=f(x)$ тенглама $C^2(\Omega)$ синфга қарашли ечимга эга эмас.

10 – §. ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ ЭЛЛИПТИК ТИПДАГИ ТЕНГЛАМАЛАР УЧУН ДИРИХЛЕ МАСАЛАСИ

Биз

$$Lu = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)\, D_{ij} u + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\, D_i u + c(x) u = f(x) \quad (10.1)$$

шаклдаги тенгламани қараймиз ва уни $Lu = f$ шаклда ёзамиз, бунда барча коэффициентлар ва ўнг томондаги $f(x)$ функция $\Omega \subset R^n$ очиқ тўпламда аниқланган. $L-$ оператор қатъий эллиптик, яъни

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq c_0 |\xi|^2, \ \forall x \in \Omega, \ \xi \in R^n \quad (10.2)$$

тенгсизлик бирор $c_0 = const > 0$ учун ўринли деб оламиз. $Lu = f$ тенглама учун Дирихле масаласини $\Omega \subset R^n$ чегараланган соҳада қараймиз:

$$\begin{aligned} & Lu = f, \ \forall x \in \Omega \\ & u\big|_{x \in \partial\Omega} = \varphi(x). \end{aligned} \quad (10.3)$$

Ўзгарувчи коэффицентли тенглама учун Дирихле масаласининг ечилиш процедураси параметр бўйича давом эттириш усули ёрдамида ўзгармас коэффициентли бўлган ҳолга келтирилади. Қисқача қилиб айтганда, $\Delta u = f$ Пуассон тенгламасини ечишдан фойдаланиб, ҳамда $\Delta u = f$ ва $Lu = f$ эллиптик тенгламалар оиласи узлуксиз боғланганлигидан ҳосил қилинади. Аввал параметр бўйича давом эттириш усулини қараб чиқамиз.

Теорема. *$B-$Банах фазоси, $V-$эса чизиқли нормаллашган фазо ва L_0, L_1-чизиқли чегараланган операторлар B фазони V фазога акслантирсин. Ҳар бир $t \in [0, 1]$ учун $L_t = (1-t) L_0 + t L_1$ деб оламиз ва шундай бир C ўзгармас мавжуд бўлиб, барча $t \in [0, 1]$ учун*

$$\| x \|_B \le C \, \| L_t x \|_V \tag{10.4}$$

тенгсизлик бажарилсин. У ҳолда L_1 оператор B ни V га устига акслантириши учун L_0 оператор B ни V га устига акслантириши зарур ва етарлидир.

Исбот. Бирор $s \in [0,1]$ учун L_s оператор устига акслантириш бўлсин. (10.4) га кўра L_s оператор B фазони V фазога ўзаро бир қийматли акслантиради. Шунга кўра, $L_s^{-1} : V \to B$ тескари оператор мавжуд. Барча $t \in [0, 1]$ ва $y \in V$ учун $L_t x = y$ тенглама $L_s x = y + (L_s - L_t)x = = y + (t-s)L_0 x - (t-s)L_1 x$ тенгламага эквивалиент бўлиб, бу тенглама ўз навбатида $x = L_s^{-1} y + (t-s)L_s^{-1}(L_0 - L_1)x$ тенгламага эквивалиент бўлади. Агар $|s-t| < \delta = \left[C\left(\|L_0\| + \|L_1\| \right) \right]^{-1}$ бўлса, B фазони ўзига акслантирувчи $Tx = L_s^{-1} y + (t-s)L_s^{-1}(L_0 - L_1)x$ формула билан берилган T акслантириш қисқартириб акслантиришдан иборат бўлади. Шунга кўра, $|s-t| < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи $t \in [0, 1]$ учун L_t акслантириш V фазонинг устига акслантиради. Агар бирор $t \in [0, 1]$ қиймат учун, масалан $t = 0$ ёки $t = 1$ учун, V фазонинг устига акслантириш ўринли бўлса, у ҳолда $[0, 1]$ оралиқни узунлиги δ дан кичик бўлган оралиқчаларга бўлиб, L_t акслантириш барча $t \in [0, 1]$ учун V фазонинг устига акслантирувчи эканлигини ҳосил қиламиз. Теорема исбот бўлди.

Аввало Дирихле масаласини етарлича силлиқ соҳа ва етарлича силлиқ чегаравий шартлар учун қараймиз. Бу ҳолда Пуассон тенгламаси ва $c(x) \le 0$ учун $Lu = f$ тенгламанинг ечилиш масаласи қуйидагича бир–бири билан боғланган бўлади.

Теорема. $\Omega \subset R^n$ *соҳа* $C^{2,\alpha}$ *синфга қарашли ва* $L-$*оператор* Ω *соҳада қатъий эллиптик бўлиб, коэффициентлари* $C^{\alpha}(\overline{\Omega})$ *синфдан, ҳамда* $c(x) \le 0$ *бўлсин. У ҳолда агар Пуассон тенгламаси учун Дирихле масаласи*

$$\Delta u(x) = f(x), \ \forall x \in \Omega$$

$$u\big|_{x \in \partial\Omega} = \varphi(x)$$

ихтиёрий $f(x) \in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$ *ва ихтиёрий* $\varphi(x) \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ *функция учун* $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ *синфдан ечимга эга бўлса,*

$$Lu(x) = f(x), \ \forall x \in \Omega$$

$$u\big|_{x \in \partial\Omega} = \varphi(x)$$

масала ҳам барча шу каби $f(x)$ *ва* $\varphi(x)$ *функциялар учун* $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ *синфдан ягона ечимга эга бўлади.*

Исбот. Теорема шартига кўра $L-$операторнинг коэффициентлари

$$c_0 |\xi|^2 \le \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j, \ \forall x \in \Omega, \ \xi \in R^n$$

$$\|a_{ij}\|_{0,\alpha} \le C_1, \ \|b_i\|_{0,\alpha} \le C_1, \ \|c\|_{0,\alpha} \le C_1 \qquad (10.5)$$

шартларни қаноатлантирсин, бунда c_0, c_1- эса мусбат ўзгармаслардир. (10.3) масала

$$Lv(x) = f(x) - L\varphi(x) = f_1(x), \quad \forall x \in \Omega$$

$$v\big|_{x \in \partial\Omega} = 0.$$

масалага $v(x) = u(x) - \varphi(x)$ алмаштириш ёрдамида эквивалиент бўлганлиги учун чегаравий шарт ноль бўлган ҳол билан чекланамиз.

$$L_t u = t\,Lu + (1-t)\Delta u = f, \ 0 \le t \le 1 \qquad (10.6)$$

тенгламалар оиласини қараймиз. Бунда $L_0 = \Delta$, $L_1 = L$ бўлиб, L_t- операторнинг коэффициентлари (10.5) шартларни

$c_t = \min\left(1,\ c_0\right)$, $C_t = \max\left(1,\ C_1\right)$ ўзгармаслар билан қаноатлантиради. L_t операторни $B_1 = \left\{ u(x) \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) : u(x) = 0,\, x \in \partial\Omega \right\}$ Банах фазосини $B_2 = C^{\alpha}(\overline{\Omega})$ Банах фазосига акслантирувчи чизиқли чегараланган оператор деб қараш мумкин.

$$L_t u(x) = f(x),\ \forall x \in \Omega$$

$$u\big|_{x \in \partial\Omega} = 0$$

Дирихле масаласининг барча $f(x) \in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$ функция учун бир қийматли ечилиши масаласи L_t акслантиришнинг $C^{\alpha}(\overline{\Omega})$ фазо устига ўзаро бир қийматли акслантиришига эквивалентдир. Бу масала ечимини u_t орқали белгилаймиз. (10.3) масала ечими учун ҳосил қилинадиган

$$\sup_{x\in\Omega} \left| u(x) \right| \le \sup_{x\in\partial\Omega} \left| u(x) \right| + C \sup_{x\in\Omega} \frac{\left| f(x) \right|}{c_0}$$

тенгсизликдан фойдаланиб,

$$\left\| u_t(x) \right\|_0 \le C \cdot \sup_{x\in\Omega} \left| f(x) \right| \le C \left\| f(x) \right\|_{0,\alpha}$$

баҳолашни ҳосил қиламиз, бунда C ўзгармас фақат c_0, C_1 га ва Ω соҳа диаметрига боғлиқ. Шунга кўра

$$\left\| u \right\|_{2,\alpha,\Omega} \le C\left(\left\| u \right\|_{0,\Omega} + \left\| \varphi \right\|_{2,\alpha,\Omega} + \left\| f \right\|_{2,\alpha,\Omega} \right)$$

тенгсизликдан фойдаланиб

$$\left\| u_t \right\|_{2,\alpha} \le C \left\| f \right\|_{0,\alpha} \qquad (10.7)$$

тенгсизлик келиб чиқади, яъни

$$\left\| u(x) \right\|_{B_1} \le C \left\| L_t u(x) \right\|_{B_2}$$

бунда C ўзгармас t га боғлиқ эмас. Шартга кўра, $L_0 = \Delta$ оператор B_1 фазони B_2 фазо устига акслантиргани учун параметр бўйича давом эттириш усулини қўлласак, юқоридаги теорема исбот бўлади.

Юқоридаги теоремада Пуассон тенгламаси учун Дирихле масаласининг $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ фазода ечилиш шартида Ω соҳа ва чегаравий шартлардаги функция $C^{2,\alpha}$ синфга қарашли деб олинди. Ҳақиқатда эса бу шартни камайтириш мумкин. Олдинги параграфларда келтирилган Перрон усулини $L-$қатъий эллиптик операторларга умумлаштириш йўли билан қуйидаги теоремани ҳосил қиламиз.

Теорема. *L оператор чегараланган Ω соҳада қатъий эллиптик оператор бўлиб, $c(x)\le 0$ ва $f(x)$ ҳамда L операторнинг коэффициентлари чегараланган ва $C^{\alpha}(\Omega)$ синфга қарашли бўлсин. Бундан ташқари Ω соҳанинг ихтиёрий чегара нуқтаси ташқи сфера шартини қаноатлантирсин. У ҳолда, агар $\varphi(x)$ функция $\partial\Omega$ чегарада узлуксиз бўлса,*

$$Lu(x)=f(x),\ \forall x\in\Omega$$

$$u\big|_{x\in\partial\Omega}=\varphi(x)$$

Дирихле масаласи $C^{0}(\overline{\Omega})\cap C^{2,\alpha}(\Omega)$ синфга қарашли ягона $u(x)$ ечимга эга бўлади.

Дирихле масаласи ечимининг глобал регулярлиги ҳақидаги теорема ҳам ўринлидир:

Теорема. *L оператор $\Omega-$чегараланган соҳада қатъий эллиптик бўлиб, $c(x)\le 0$ ва $f(x)$ функция ҳамда L операторнинг коэффициентлари $C^{\alpha}(\overline{\Omega})$ синфга қарашли бўлсин. Ω соҳа $C^{2,\alpha}$ синфга қарашли ва $\varphi(x)\in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ функция бўлсин. У ҳолда*

$$Lu(x)=f(x),\ \forall x\in\Omega$$

$$u\big|_{x\in\partial\Omega}=\varphi(x)$$

Дирихле масаласи $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ синфга қарашли ягона ечимга эга бўлади.

11 – §. ЛАПЛАС ТЕНГЛАМАСИ УЧУН ҲАЛҚАДА ДИРИХЛЕ МАСАЛАСИНИ ЕЧИШ

Марказлари координата бошида радиуслари R_1 ва R_2 бўлган L_1 ва L_2 концентрик айланалар билан чегараланган соҳада $\Delta u = 0$ Лаплас тенгламаси учун Дирихле масаласини ечиш талаб қилинган бўлсин, яъни

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad R_1^2 < x^2 + y^2 < R_2^2 \\ u\big|_{L_1} = f_1, \qquad u\big|_{L_2} = f_2 \,. \end{cases}$$

Қутб координаталар системаси (ρ, φ) га ўтиш орқали Дирихле масаласи қуйидаги кўринишга келади:

$$\begin{cases} \rho^2 u_{\rho\rho} + \rho u_\rho + u_{\varphi\varphi} = 0, \quad R_1 < \rho < R_2, \quad 0 \le \varphi < 2\pi, \\ u(R_1, \varphi) = f_1(\varphi) \\ u(R_2, \varphi) = f_2(\varphi), \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi \,. \end{cases} \tag{11.1}$$

Бундан ташқари, бу ердаги $f_1(\varphi)$ ва $f_2(\varphi)$ чегаравий функцияларни 2π даврли даврий функциялар деб ҳисоблаймиз.

Масалани ечиш учун Фурье методини қўллаймиз. Ечимни $u(\rho, \varphi) = R(\rho)\Phi(\varphi)$ кўринишда қидирамиз. Ушбу $u(\rho, \varphi) = R(\rho)\Phi(\varphi)$ ифодани (11.1) тенгламага қўйиб

$$\Phi\rho^2 R'' + \Phi\rho R' + R\Phi'' = 0$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Охирги тенгликнинг ҳар иккала қисмини $R\Phi$ га бўлиб, натижада

$$\frac{\rho^2 R'' + \rho R'}{R} = -\frac{\Phi''}{\Phi} \tag{11.2}$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Одатда бу тенгламада ўзгарувчилари ажралган дейилади, чунки тенгламанинг чап томони фақат ρ га боғлиқ, ўнг томони эса фақат φ га боғлиқ. Шунингдек, ρ ва φ ўзгарувчиларнинг бир–бирига боғлиқ бўлмаганлигидан, (11.2) тенгламанинг ҳар иккала қисми ўзгармас бўлиши керак. Мазкур ўзгармасни λ деб белгилаймиз. У ҳолда

$$\frac{\rho^2 R''+\rho R'}{R}=-\frac{\Phi''}{\Phi}=\lambda \tag{11.3}$$

тенгликка эга бўламиз. Маълумки, φ бурчакнинг 2π бирликка ошиши натижасида $u(\rho,\varphi)$ функциянинг қиймати ўз ҳолатига қайтади, яъни $u(\rho,\varphi)=u(\rho,\varphi+2\pi)$. Бундан эса $R(\rho)\Phi(\varphi)=R(\rho)\Phi(\varphi+2\pi)$ эканлиги келиб чиқади. Демак, $\Phi(\varphi)=\Phi(\varphi+2\pi)$ бўлиб, $\Phi(\varphi)$ функция 2π даврли бўлган даврий функция экан. $\Phi''+\lambda\Phi=0$ тенгламадан $\Phi(\varphi)=A\cos(\sqrt{\lambda}\varphi)+B\sin(\sqrt{\lambda}\varphi)$ (A ва B – ихтиёрий ўзгармаслар) тенглик келиб чиқади, шунингдек $\Phi(\varphi)$ функциянинг даврий функция эканлигидан $\lambda=n^2$ тенглик бажарилади, бунда $n\geq 0-$ бутун сон.

Ҳақиқатан ҳам,

$$A\cos(\sqrt{\lambda}\varphi)+B\sin(\sqrt{\lambda}\varphi)=$$
$$=A\cos[\sqrt{\lambda(\varphi+2\pi)}]+B\sin[\sqrt{\lambda(\varphi+2\pi)}]$$

(белгилаш: $\sin\alpha=\dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$, $\cos\alpha=\dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$) тенгликдан $\sin(\alpha+\sqrt{\lambda}\varphi)=\sin(\alpha+\sqrt{\lambda}\varphi+2\pi\sqrt{\lambda})$ эканлиги келиб чиқади, демак $\sin(\pi\sqrt{\lambda})\cos(\alpha+\sqrt{\lambda}\varphi+\pi\sqrt{\lambda})=0$, бундан $\lambda=n^2$ эканлигини топамиз, бунда $n\geq 0-$ бутун сон. Энди (11.3) тенгламадан

$$\rho^2 R''+\rho R'-n^2 R=0 \tag{11.4}$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Агар $n\neq 0$ бўлса, у ҳолда ушбу тенгламанинг ечимини $R(\rho)=\rho^{\mu}$ кўринишда излаймиз. Бу ифодани (11.4) тенгламага қўямиз ва ρ^{μ} га қисқартириб

$$\mu^2=n^2, \text{ ёки } \mu=\pm n \quad (n>0)$$

эканлигини ҳосил қиламиз.

$n=0$ бўлганда (11.4) тенгламанинг ечими 1 ва $\ln\rho$ дан иборат бўлади. Шундай қилиб, биз дастлабки хусусий ҳосилали дифференциал тенгламанинг ечими бўладиган чексиз сондаги функциялар

$$1, \ln\rho,\ \rho^n\cos(n\varphi),\ \rho^n\sin(n\varphi),\ \rho^{-n}\cos(n\varphi),\ \rho^{-n}\sin(n\varphi)$$

$(n=1,\ 2,\ ...)$ тўпламига эга бўламиз. Ушбу ечимларнинг йиғиндиси ҳам дастлабки тенгламанинг ечими бўлиб, бизнинг ҳолимизда Лаплас тенгламаси умумий ечимининг кўриниши қуйидаги кўринишда бўлади:

$$u(\rho,\varphi)=a_0+b_0\ln\rho+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}[(a_n\rho^n+b_n\rho^{-n})\cos(n\varphi)+(c_n\rho^n+d_n\rho^{-n})\sin(n\varphi)]\,. \qquad (11.5)$$

Энди фақат (11.5) йиғинди $u(R_1,\varphi)=f_1(\varphi)$, $u(R_2,\varphi)=f_2(\varphi)$ чегаравий шартларни қаноатлантирадиган қилиб барча коэффициентларни аниқлаш қолди. (11.5) формулада $\rho=R_1$ ва $\rho=R_2$ деб олиб,

$$u(R_1,\varphi)=a_0+b_0\ln R_1+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}[(a_nR_1^{\,n}+b_nR_1^{\,-n})\cos(n\varphi)+(c_nR_1^{\,n}+d_nR_1^{\,-n})\sin(n\varphi)]\,,$$

$$u(R_2,\varphi)=a_0+b_0\ln R_2+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}[(a_nR_2^{\,n}+b_nR_2^{\,-n})\cos(n\varphi)+(c_nR_2^{\,n}+d_nR_2^{\,-n})\sin(n\varphi)]$$

тенгликларни ҳосил қиламиз.

Тригонометрик қаторларда Фурье коэффициентларини аниқлаш формуласидан фойдаланиб, қуйидаги тенгламалар системасини ҳосил қиламиз:

$$
\begin{cases}
a_0 + b_0 \ln R_1 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f_1(s)ds, \\
a_0 + b_0 \ln R_2 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f_2(s)ds
\end{cases} \tag{11.6$_1$}
$$

(a_0 ва b_0 га нисбатан ечилади);

$$
\begin{cases}
a_n R_1^n + b_n R_1^{-n} = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f_1(s)\cos(ns)ds, \\
a_n R_2^n + b_n R_2^{-n} = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f_2(s)\cos(ns)ds
\end{cases} \tag{11.6$_2$}
$$

(a_n ва b_n га нисбатан ечилади);

$$
\begin{cases}
c_n R_1^n + d_n R_1^{-n} = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f_1(s)\sin(ns)ds, \\
c_n R_2^n + d_n R_2^{-n} = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f_2(s)\sin(ns)ds
\end{cases} \tag{11.6$_3$}
$$

(c_n ва d_n га нисбатан ечилади).

Мазкур тенгламалар системасидан барча номаълум a_0, b_0, a_n, b_n, c_n, d_n коэффициентлар топилади. Шунга кўра (11.1) масала тўлиқ ечилади. Ечим (11.5) ёйилма кўринишида ёзилади, ёйилмадаги коэффициентлар эса (11.6$_1$), (11.6$_2$), (11.6$_3$) формулалар ёрдамида аниқланади.

Ҳалқада Дирихле масаласини ечишга доир мисоллар

1 – мисол. Агар потенциал халқанинг ички айланасида ноль бўлиб, ташқи айланасида $\cos\varphi$ га тенг бўлса, халқада потенциални аниқланг.

Ечиш. Халқада $u(\rho,\ \varphi)$ потенциалнинг таърифидан келиб чиқиб, қуйидаги масалани ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 1 < \rho < 2, \quad 0 \le \varphi < 2\pi, \\ u(1,\varphi) = 0, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \\ u(2,\varphi) = \cos\varphi, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi. \end{cases}$$

Умуман олганда мисолни ечишда (11.6_1), (11.6_2), (11.6_3) формулалардаги барча интегралларни ҳисоблаймиз ва мос тенгламалар системасини ечиб, a_0, b_0, a_n, b_n, c_n, d_n коэффициентларни аниқлаймиз. Бу ҳолда шундай хусусий ечимларни аниқлаш керакки, шу хусусий ечимларнинг чизиқли комбинацияси чегаравий шартларни қаноатлантирсин. Ушбу мисолда шундай хусусиятни $u(\rho,\ \varphi) = a_1\rho\cos\varphi + b_1\rho^{-1}\cos\varphi$ чизиқли комбинация бажаради. Чегаравий шартлардан қуйидаги тенгламалар системасини ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} a_1 + b_1 = 0, \\ 2a_1 + \dfrac{b_1}{2} = 1, \end{cases}$$

бу системани ечиб, $a_1 = \dfrac{2}{3},\ \ b_1 = -\dfrac{2}{3}$ эканлигини топамиз.

Шундай қилиб, ечим $u(\rho,\ \varphi) = \dfrac{2}{3}(\rho - \dfrac{1}{\rho})\cos\varphi$ дан иборат.

2 – мисол. Ҳалқа чегараларида ўзгармас потенциали бўлган

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 1 < \rho < 2, \quad 0 \le \varphi < 2\pi, \\ u(1,\varphi) = 2, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \\ u(2,\varphi) = 1, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \end{cases}$$

масалани ечинг.

Ечиш. Бу ҳолда ечимни φ га боғлиқ бўлмаган ҳолда қидирамиз, яъни ечимни $u(\rho) = a_0 + b_0\ln\rho$ кўринишда излаймиз. Ушбу функцияни чегаравий шартларга қўйиб,

$$\begin{cases} a_0 + b_0\ln 1 = 2 \\ a_0 + b_0\ln 2 = 1 \end{cases}$$

тенгламалар системасини ҳосил қиламиз ва тенгламалар системасини ечиб, $a_0 = 2, \ \ b_0 = -\log_2 e$ эканлигини аниқлаймиз. Шунга кўра,

$$u(\rho) = 2 - \frac{\ln \rho}{\ln 2}$$

функция ечим бўлади.

3 – мисол. Қуйидаги Дирихле масаласини ечинг:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \ \ 1 < \rho < 2, \ \ 0 \le \varphi < 2\pi, \\ u(1, \varphi) = \cos\varphi, \ \ 0 \le \varphi \le 2\pi, \\ u(2, \varphi) = \sin\varphi, \ \ 0 \le \varphi \le 2\pi. \end{cases}$$

Ечиш. Текшириб кўриш мумкинки, a_0, b_0, a_n, b_n, c_n, d_n $(n > 1)$ коэффициентларнинг барчаси нолга тенг бўлиб, a_1, b_1, c_1, d_1 коэффициентлар эса,

$$\begin{cases} a_1 + b_1 = 1 \\ 2a_1 + \dfrac{b_1}{2} = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} c_1 + d_1 = 0 \\ 2c_1 + \dfrac{d_1}{2} = 1, \end{cases}$$

тенгламалар системаси орқали аниқланади. Бу тенгламалар системасини ечиб,

$$a_1 = -\frac{1}{3}, \ \ b_1 = \frac{4}{3}, \ \ c_1 = \frac{2}{3}, \ \ d_1 = -\frac{2}{3}$$

эканлигини топамиз. Шундай қилиб,

$$u(\rho, \ \varphi) = \left(-\frac{1}{3}\rho + \frac{4}{3\rho} \right)\cos\varphi + \frac{2}{3}\left(\rho - \frac{1}{\rho} \right)\sin\varphi$$

функция масаланинг ечими бўлади.

Лаплас тенгламаси учун Дирихле масаласи чегараланган соҳаларда ягона ечимга эга бўлганлиги учун, 1 – 3 мисолларда кўрсатилган ечимлардан ташқари, бошқа ечимларга эга бўлиши мумкин эмас.

Ички ва ташқи Дирихле масалалари

Дирихле масаласида иккита асосий ҳолларни қараймиз. Бу ҳоллардан бири ҳалқа доира бўлган ҳол бўлса, иккинчиси доиранинг ташқарисидир. Ички Дирихле масаласи ($R_1 = 0,\ R_2 = R$)

$$\begin{cases} \rho^2 u_{\rho\rho} + \rho u_\rho + u_{\varphi\varphi} = 0, \quad 0 \le \rho < R, \quad 0 \le \varphi < 2\pi, \\ u(R,\ \varphi) = f(\varphi), \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$$

кўринишда бўлиб, масаланинг ечилиши халқада Дирихле масаласини ечиш сингари бўлиб, бунда, ρ нинг нолга интилганида чегараланмаган бўладиган

$\ln\rho$, $\rho^{-n}\cos(n\varphi)$, $\rho^{-n}\sin(n\varphi)$, $n = 1,\ 2, ...$ "хусусий" ечимлари олинмайди. Шунга кўра, ички Дирихле масаласининг ечими

$$u(\rho,\ \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{R}\right)^n [a_n\cos(n\varphi) + b_n\sin(n\varphi)]$$

кўринишдаги функция бўлиб, бунда a_n ва b_n коэффициентлар

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)d\varphi,\ a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\cos(n\varphi)d\varphi \ \ (n > 0),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\sin(n\varphi)d\varphi \tag{11.7}$$

формулалар орқали аниқланади.

Бошқача сўз билан айтганда, $f(\varphi)$ функцияни Фурье қаторига ёямиз:

$$f(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}[a_n\cos(n\varphi) + b_n\sin(n\varphi)],$$

кейин қаторнинг ҳар бир ҳадини $\left(\frac{\rho}{R}\right)^n$ коэффициентга кўпайтирамиз. Масалан,

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 0 \le \rho < 1, \quad 0 \le \varphi < 2\pi, \\ u(1,\ \varphi) = \cos^2\varphi, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$$

ички Дирихле масаласининг ечими

$u(\rho,\ \varphi)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\rho^2\cos(2\varphi)$ функциядан иборат.

$$\begin{cases}\rho^2 u_{\rho\rho}+\rho u_\rho+u_{\varphi\varphi}=0, \quad R<\rho<\infty, \quad 0\le\varphi<2\pi, \\ u(R,\ \varphi)=f(\varphi), \ 0\le\varphi\le 2\pi\end{cases}$$

ташқи Дирихле масаласи ($R_1=R,\ R_2=\infty$) олдинги масала сингари ечилиб, бунда, ρ нинг чексизликка интилганида чегараланмаган бўладиган $\ln\rho$, $\rho^n\cos(n\varphi)$, $\rho^n\sin(n\varphi), \quad n=1,\ 2,\ldots$ "хусусий" ечимлари олинмайди. Шунга кўра, ташқи Дирихле масаласининг ечими

$$u(\rho,\ \varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\rho}{R}\right)^{-n}[a_n\cos(n\varphi)+b_n\sin(n\varphi)]$$

кўринишдаги функциядан иборат бўлиб, a_n ва b_n коэффициентлар (11.7) формула орқали топилади. Масалан,

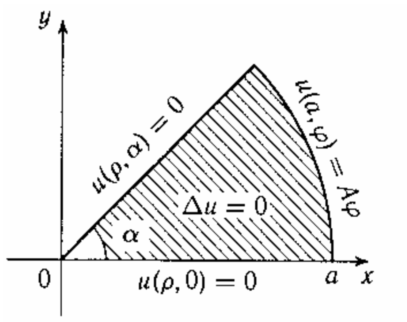
$$\begin{cases}\Delta u=0, \ \ 1<\rho<+\infty, \ \ 0\le\varphi<2\pi, \\ u(1,\ \varphi)=\sin^3\varphi, \quad 0\le\varphi\le 2\pi\end{cases}$$

ташқи Дирихле масаласининг ечими

$u(\rho,\ \varphi)=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{\rho}\sin\varphi-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\rho^3}\sin(3\varphi)$ функциядан иборат.

Шуни таъкидлаш керакки, икки ўлчовли чегараланмаган соҳада Лаплас тенгламаси учун Дирихле масаласининг чегараланган ечими ягонадир.

4 – мисол. Бир жинсли $0\le\rho\le a,\ 0\le\varphi\le\alpha$ секторда $u(\rho,0)=u(\rho,\ \alpha)=0, \quad u(a,\ \varphi)=A\varphi\ (A=const)$ чегаравий шартларни қаноатлантирадиган стационар тақсимланган температурани топинг.



Ечиш. Мисолдаги стационар тақсимланган температурани топиш қуйидаги Дирихле масаласининг ечими бўлади:

$$\begin{cases} \rho^2 u_{\rho\rho} + \rho u_\rho + u_{\varphi\varphi} = 0, \quad 0 < \rho < a, \quad 0 < \varphi < \alpha < 2\pi, \\ u(\rho,\ 0) = u(\rho,\ \alpha), \quad 0 \le \rho \le a, \\ u(a,\varphi) = A\varphi, \quad 0 \le \varphi \le \alpha. \end{cases}$$

Мисолни ечишда Фурье методидан фойдаланамиз. $u(\rho,\ \varphi) = R(\rho)\Phi(\varphi)$ деб олиб, ўзгарувчиларни ажратиш йўли билан, иккита оддий дифференциал тенглама ҳосил қиламиз:

$$\rho^2 R'' + \rho R' - \lambda R = 0, \quad \Phi'' + \lambda\Phi = 0. \tag{11.8}$$

$0 = u(\rho,\ 0) = R(\rho)\Phi(0)$ ва $0 = u(\rho,\ \alpha) = R(\rho)\Phi(\alpha)$ шартлардан $\Phi(0) = \Phi(\alpha) = 0$ бўлиши келиб чиқади. Натижада

$$\begin{cases} \Phi'' + \lambda\Phi = 0,\ 0 < \varphi < \alpha \\ \Phi(0) = \Phi(\alpha) = 0 \end{cases}$$

Штурм–Лиувилль масаласини ечиб, $\lambda_n = \left(\dfrac{n\pi}{\alpha}\right)^2$ хос қиймат ва $\Phi_n(\varphi) = \sin\left(\dfrac{n\pi}{\alpha}\varphi\right)$, $n = 1,\ 2,\ \ldots$ хос функцияларга эга бўламиз. $R(\rho)$ функцияни $R(\rho) = \rho^\mu$ кўринишда қидирамиз. Бу ифодани (11.8) тенгламага қўйиб, қуйидагини топамиз:

$$\mu(\mu-1) + \mu - \left(\frac{n\pi}{\alpha}\right)^2 = 0, \text{ бундан } \quad \mu = \pm\frac{n\pi}{\alpha}.$$

$R(\rho)$ функциянинг (масала маъносига кўра) чегараланганлигини эътиборга олиб, $R_n(\rho) = \rho^{\frac{n\pi}{\alpha}}$ эканлигини топамиз. Масаланинг хусусий ечимлари $u_n(\rho,\ \varphi) = \rho^{\frac{n\pi}{\alpha}} \sin\left(\frac{n\pi}{\alpha}\varphi\right),\quad n = 1,\ 2,...$ кўринишида бўлиб, бу ечимлар орқали масала ечими

$$u(\rho,\ \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \rho^{\frac{n\pi}{\alpha}} \sin\left(\frac{n\pi}{\alpha}\varphi\right)$$

функция шаклида ҳосил бўлади. Ечимдаги $c_n\ (n = 1, 2, ...)$ ўзгармас коэффициентларни $u(a,\varphi) = A\varphi$ шартдан фойдаланиб аниқлаймиз.

$$u(a,\ \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n a^{\frac{n\pi}{\alpha}} \sin\left(\frac{n\pi}{\alpha}\varphi\right)$$

тенгликка эгамиз.

Шундай қилиб,

$$c_n a^{\frac{n\pi}{\alpha}} = \frac{2}{\alpha}\int_0^{\alpha} A\varphi \sin\left(\frac{n\pi}{\alpha}\varphi\right) d\varphi \qquad \text{бўлиб,}$$

бундан

$$c_n = \frac{2A}{\alpha a^{\frac{n\pi}{\alpha}}}\int_0^{\alpha} \varphi \sin\left(\frac{n\pi}{\alpha}\varphi\right) d\varphi = (-1)^{n+1}\frac{2\alpha A}{n\pi a^{\frac{n\pi}{\alpha}}}\ .$$

Демак, масаланинг ечими

$$u(\rho,\ \varphi) = \frac{2\alpha A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{\rho}{a}\right)^{\frac{n\pi}{\alpha}} \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{\alpha}\varphi\right)}{n}$$

кўринишда ёзилади.

Шуни таъкидлаш керакки, масаланинг ечими $\rho = a$, $\varphi = \alpha$ чегаравий нуқтада чегаравий қийматнинг келишувчан эмаслиги туфайли, махсусликка эга бўлади.

Доира учун Пуассон интеграли. Комплекс шаклда ёзиш. Чегаравий шарт $R(\sin\varphi,\ \cos\varphi)$ кўринишдаги рационал функция бўлган ҳолда Дирихле масаласининг ечими

Маълумки, доира учун ички ва ташқи Дирихле масалаларининг ечимини интеграл кўринишда тасвирлаш мумкин (Пуассон интеграли):

$$u(\rho,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2-\rho^2}{R^2-2\rho R\cos(\varphi-\alpha)+\rho^2} f(\alpha)\,d\alpha \quad (\rho < R),$$

$$u(\rho,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\rho^2-R^2}{\rho^2-2\rho R\cos(\varphi-\alpha)+R^2} f(\alpha)\,d\alpha \quad (\rho > R).$$

Бу формулалар умумий суперпозиция методининг натижаси эканлигини кўрсатамиз. Аниқлик учун ички масалани қараймиз. Ташқи масала ҳам шунга ўхшаш ёзилади.

$$u(\rho,\ \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\rho}{R}\right)^n [a_n\cos(n\varphi)+b_n\sin(n\varphi)]$$

формулада Фурье коэффициентлари ўрнига қўйиб,

$$u(\rho,\ \varphi) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\cdot$$

$$\cdot\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{R}\right)^n \left(a_n\cos(n\varphi)\cos(n\alpha)+\sin(n\varphi)\sin(n\alpha)\right)\right]d\alpha =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{R}\right)^n \cos(n(\varphi-\alpha))\right]d\alpha$$

тенгликни ҳосил қиламиз.

$\cos(n(\varphi-\alpha)) = \dfrac{e^{in(\varphi-\alpha)} + e^{-in(\varphi-\alpha)}}{2}, \quad q = \dfrac{\rho}{R} < 1$ бўлишини ҳисобга олиб, ҳамда чексиз камаювчи геометрик прогрессиянинг йиғиндисини топиш формуласига кўра,

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} q^n \cos(n(\varphi-\alpha)) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} q^n \left[e^{in(\varphi-\alpha)} + e^{-in(\varphi-\alpha)}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(qe^{i(\varphi-\alpha)}\right)^n + \left(qe^{-i(\varphi-\alpha)}\right)^n\right]\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 + \frac{qe^{i(\varphi-\alpha)}}{1-qe^{i(\varphi-\alpha)}} + \frac{qe^{-i(\varphi-\alpha)}}{1-qe^{-i(\varphi-\alpha)}}\right] =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1-q^2}{1-2q\cos(\varphi-\alpha)+q^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{R^2-\rho^2}{R^2-2R\rho\cos(\varphi-\alpha)+\rho^2}.$$

Шунга кўра,

$$u(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2-\rho^2}{R^2-2R\rho\cos(\varphi-\alpha)+\rho^2} f(\alpha)\,d\alpha \quad (\rho < R).$$

Пуассон формуласини бошқача (комплекс шаклдаги) кўринишга келтирамиз. Маълумки,

$$\frac{R^2-\rho^2}{R^2-2R\rho\cos(\varphi-\alpha)+\rho^2} = \frac{R^2-|z|^2}{\left|\mathrm{R\,e}^{i\alpha}-z\right|^2} = \mathrm{Re}\frac{R\,\mathrm{e}^{i\alpha}+z}{R\,\mathrm{e}^{i\alpha}-z},$$

чунки

$$\mathrm{Re}\frac{R\,\mathrm{e}^{i\alpha}+z}{R\,\mathrm{e}^{i\alpha}-z} = \mathrm{Re}\frac{(\mathrm{R\,e}^{i\alpha}+\rho e^{i\varphi})(\overline{\mathrm{R\,e}^{i\alpha}}-\overline{\rho e^{i\varphi}})}{(\mathrm{R\,e}^{i\alpha}-\rho e^{i\varphi})(\overline{\mathrm{R\,e}^{i\alpha}}-\overline{\rho e^{i\varphi}})} =$$

$$=\operatorname{Re}\frac{R^2-|z|^2+\rho R\left[e^{i(\varphi-\alpha)}-e^{i(\alpha-\varphi)}\right]}{\left|Re^{i\alpha}-z\right|^2}=\frac{R^2-|z|^2}{\left|Re^{i\alpha}-z\right|^2}.$$

Шунинг учун Пуассон интеграли

$$u(z)=\operatorname{Re}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\frac{Re^{i\alpha}+z}{Re^{i\alpha}-z}d\alpha$$

кўринишда ёзилади. Ушбу интегралда $\zeta=Re^{i\alpha}$ деб белгилаш киритсак, унда $d\alpha=\dfrac{d\zeta}{i\zeta}$ бўлиб, натижада Пуассон интегралининг охирги комплекс кўринишга келган ҳолдаги формуласини ҳосил қиламиз:

$$u(z)=\operatorname{Re}\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=R} f(\zeta)\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\frac{d\zeta}{\zeta},\quad |z|<R. \qquad (11.9)$$

Агар $f(\zeta)$ - чегаравий функция $\sin\varphi$ ва $\cos\varphi$ га нисбатан рационал функция бўлса, у ҳолда (11.9) формуладаги интеграл қолдиқлар назарияси ёрдамида ҳисобланади.

5 - м**исол.** Қуйидаги Дирихле масаласини ечинг:

$$\begin{cases}\Delta u=0, & |z|<2,\\ u\big|_{|z|=2}=\dfrac{2\sin\varphi}{5+3\cos\varphi}.\end{cases}$$

Ечиш. Дирихле масаласини ечишда (11.9) формуладан фойдаланамиз. $\zeta=2e^{i\alpha}$ деб олайлик, у ҳолда $\sin\alpha=\dfrac{1}{2i}\left(\dfrac{\zeta}{2}-\dfrac{2}{\zeta}\right)$, $\cos\alpha=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\zeta}{2}+\dfrac{2}{\zeta}\right)$ бўлиб, чегаравий функция

$$u(\zeta)=\frac{2\sin\alpha}{5+3\cos\alpha}=\frac{2\cdot\frac{1}{2i}\cdot\frac{\zeta^2-4}{2\zeta}}{5+\frac{3}{2}\left(\frac{\zeta}{2}+\frac{2}{\zeta}\right)}=$$

$$=\frac{2}{i}\cdot\frac{\zeta^2-4}{3\zeta^2+20\zeta+12}=\frac{2}{i}\cdot\frac{\zeta^2-4}{3(\zeta+6)\left(\zeta+\frac{2}{3}\right)}$$

бўлади. Қуйидаги интегрални ҳисоблаймиз:

$$I=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=2}\frac{2(\zeta^2-4)(\zeta+z)}{i\cdot 3(\zeta+6)\left(\zeta+\frac{2}{3}\right)(\zeta-z)\zeta}d\zeta\,.$$

Бу интегралда $|z|=2$ айланадаги йўналиш соат стрелкасига қарши. Интеграл остидаги $F(\zeta)$ функция $|\xi|>2$ соҳада $\zeta=-6$ бўлган битта чекли махсус нуқтага эга, бу махсус нуқта биринчи тартибли қутб махсус нуқта ва $\zeta=\infty$ нуқта эса бартараф қилиш мумкин бўлган махсус нуқтадир. Кенгайтирилган комплекс текислик учун қолдиқлар ҳақидаги Коши теоремасига кўра:

$$I=-\underset{\zeta=-6}{res}\,F(\zeta)-\underset{\zeta=\infty}{res}\,F(\zeta)$$

муносабат ўринли бўлади.

Дастлаб, $\zeta=-6$ нуқтада қолдиқни ҳисоблаймиз:

$$\underset{\zeta=-6}{res}\,F(\zeta)=\frac{2}{3i}\cdot\frac{32}{\left(-\frac{16}{3}\right)}\cdot\frac{z-6}{(z+6)\cdot 6}=$$

$$=-\frac{4}{i}\cdot\frac{z-6}{(z+6)\cdot 6}=\frac{2}{3i}\cdot\frac{6-z}{6+z}\ .$$

$F(\zeta)$ функцияни $\zeta=\infty$ нуқта атрофида ёямиз:

$$F(\zeta)=\frac{2}{3i}\cdot\frac{\left(1-\dfrac{4}{\zeta^2}\right)\left(1+\dfrac{z}{\zeta}\right)}{\left(1+\dfrac{6}{\zeta}\right)\left(1+\dfrac{2}{3\zeta}\right)}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z}{\zeta}}\cdot\frac{1}{\zeta}=\frac{2}{3i}\cdot\frac{1}{\zeta}+\dots .$$

Бундан $\underset{\zeta=\infty}{res}\, F(\zeta)=-\dfrac{2}{3i}$ бўлишини топамиз.

Демак,

$$I=\frac{2}{3i}\cdot\frac{z-6}{z+6}+\frac{2}{3i}=\frac{2}{3i}\cdot\frac{2z}{z+6}=\frac{4z}{3i(z+6)}=$$

$$=\frac{4}{3i}\cdot\frac{x+iy}{6+x+iy}=\frac{4}{3i}\cdot\frac{(x+iy)(6+x-iy)}{(6+x)^2+y^2},$$

бундан

$$\operatorname{Re} I=\frac{8y}{36+12x+x^2+y^2}$$

ёки

$$\operatorname{Re} I=\frac{8\rho\sin\varphi}{36+12\rho\cos\varphi+\rho^2}$$

бўлишини топамиз. Шундай қилиб, берилган Дирихле масаласининг ечими

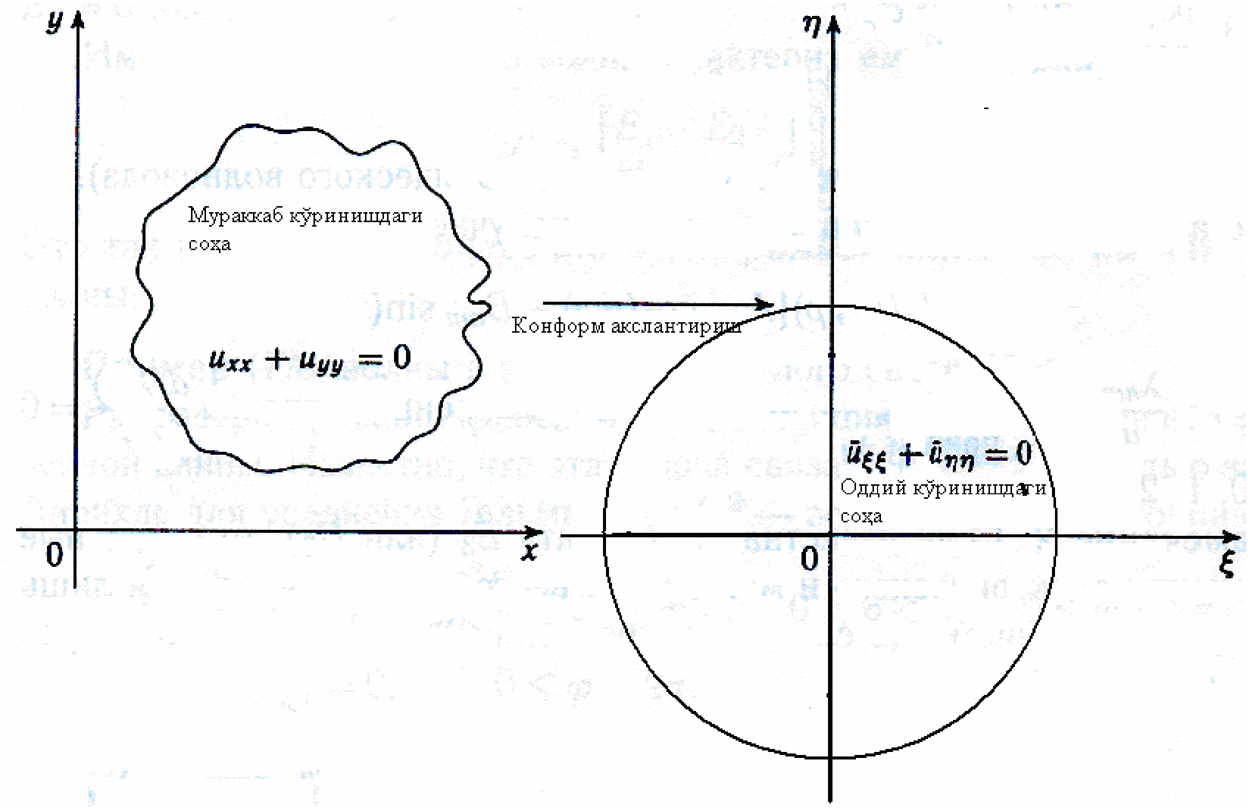
$$u(\rho,\ \varphi)=\frac{8\rho\sin\varphi}{36+12\rho\cos\varphi+\rho^2}$$

функциядан иборат бўлади.

12 – §. КОНФОРМ АКСЛАНТИРИШЛАР УСУЛИ

Комплекс ўзгарувчили функциялар назарияси усуллари кўпгина математик масалаларни ечишда самарали қўлланилади. Хусусан, Лаплас тенгламаси учун қўйилган чегаравий масалани ечишда аналитик функцияларни қўллаш кўпгина ҳолларда ечимнинг етарлича содда усулини беради. Бунинг асосий сабаби комплекс ўзгарувчили аналитик функциялар билан икки ўзгарувчили гармоник функциялар орасидаги мавжуд боғлиқлик ва конформ акслантиришда Лаплас тенгламасининг инвариант эканлигидир.

Текисликда x ва y ўзгарувчилар бўйича мураккаб шаклдаги соҳада $u_{xx}+u_{yy}=0$ Лаплас тенгламасини қандайдир чегаравий шартлар билан ечиш талаб қилинган бўлсин. Бу чегаравий масалани $\zeta=f(z)$ конформ акслантириш натижасида ξ ва η ўзгарувчиларга боғлиқ содда соҳада $\tilde{u}_{\xi\xi}+\tilde{u}_{\eta\eta}=0$ Лаплас тенгламаси учун янги чегаравий масалани ечишга алмаштириш мумкин бўлади, бунда $z=x+iy$, $\zeta=\xi+i\eta$ бўлиб, $\zeta=f(z)$ бўлганда $\tilde{u}(\zeta)=u(z)$.



Конформ акслантиришга нисбатан Лаплас тенгламасининг инвариантлиги ҳақидаги қуйидаги теорема ўринлидир.

1 –теорема. $z = g(\zeta)$ *аналитик функция* G *соҳани* D *соҳага конформ акслантирувчи ва* D *соҳада* $u(z)$ *гармоник функция бўлсин. У ҳолда* $\tilde{u}(\zeta) = u(g(\zeta))$ *функция* G *соҳада гармоник функция бўлади.*

Исбот. $\tilde{u}(\xi,\eta) = u(x(\xi,\eta),\ y(\xi,\eta))$ функция Лаплас оператори алмаштиришини қўллаганда қандай ўзгаришини аниқлаймиз.

$$u_x = \tilde{u}_\xi \xi_x + \tilde{u}_\eta \eta_x, \quad u_y = \tilde{u}_\xi \xi_y + \tilde{u}_\eta \eta_y,$$

$$u_{xx} = \tilde{u}_{\xi\xi}\xi_x^2 + \tilde{u}_{\eta\eta}\eta_x^2 + 2\tilde{u}_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + \tilde{u}_\xi \xi_{xx} + \tilde{u}_\eta \eta_{xx},$$

$$u_{yy} = \tilde{u}_{\xi\xi}\xi_y^2 + \tilde{u}_{\eta\eta}\eta_y^2 + 2\tilde{u}_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + \tilde{u}_\xi \xi_{yy} + \tilde{u}_\eta \eta_{yy}$$

ҳосилаларни ҳисоблаймиз. Бундан

$$u_{xx} + u_{yy} = \tilde{u}_{\xi\xi}(\xi_x^2 + \xi_y^2) + \tilde{u}_{\eta\eta}(\eta_x^2 + \eta_y^2) +$$

$$+2\tilde{u}_{\xi\eta}(\xi_x\eta_x + \xi_y\eta_y) + \tilde{u}_\xi(\xi_{xx} + \xi_{yy}) + \tilde{u}_\eta(\eta_{xx} + \eta_{yy})$$

тенгликни ҳосил қиламиз. $\xi = \xi(x,y)$ ва $\eta = \eta(x,y)$ тескари алмаштиришлар ўзаро қўшма гармоник функциялар бўлиб, улар ёрдамида $\zeta = f(z) = \xi + i\eta$ $(z = x + iy)$ аналитик бўлган тескари функцияни ҳосил қиламиз. Коши–Риман шартларига кўра,

$$\xi_x^2 + \xi_y^2 = \xi_x^2 + \eta_x^2 = \eta_y^2 + \eta_x^2 = \left|f'(z)\right|^2, \quad \xi_x\eta_x + \xi_y\eta_y = 0$$

тенгликларга эга бўламиз. Шунинг учун

$$u_{xx} + u_{yy} = (\tilde{u}_{\xi\xi} + \tilde{u}_{\eta\eta})\left|f'(z)\right|^2 \quad \text{ёки} \quad \Delta_{\xi,\eta}\tilde{u} = \frac{1}{\left|f'(z)\right|^2}\Delta_{x,y}u$$

тенглик ҳосил бўлади. Бундан эса, $u(z) = u(x,y)$ функциянинг D соҳада гармоник функция ва $\left|f'(z)\right|^2 \neq 0$ эканлигидан $\tilde{u}(\xi,\eta) = u(x(\xi,\eta),\ y(\xi,\eta))$ функциянинг ҳам гармоник функция эканлигини ҳосил қиламиз. Бу натижа конформ акслантиришлар ёрдамида Дирихле масаласини ечиш усулининг асосини ташкил этади.

Оддий соҳа (айлана, яримтекислик, тўғри тўртбурчак) учун Лаплас тенгламасининг $\tilde{u}(\xi,\ \eta)$ ечими топилгандан кейин, бу ечимга $\xi=\xi(x,\ y),\ \eta=\eta(x,\ y)$ тенгликларни қўйиб, дастлабки қидирилаётган масаланинг аввалги ўзгарувчилардаги $u(x,\ y)$ ечимни ҳосил қиламиз.

Чегараланган D соҳанинг чегараси Γ бўлиб, унда $u_0(z)$ узлуксиз функция берилган бўлсин. Лаплас тенгламаси учун классик Дирихле масаласи қуйидагича: шундай бир $u(z)$ функцияни топиш керакки, бу функция D соҳада гармоник функция бўлиб, D соҳанинг Γ чегарасигача узлуксиз ва Γ чегарада эса $u(z)$ функция $u_0(z)$ қийматни қабул қилсин, яъни

$$\Delta u=0,\ z\in D;\ u\big|_{z\in\Gamma}=u_0(z). \tag{12.1}$$

Бунда $u(z)=u(x,y),\ u_0(z)=u_0(x,y)$ - ҳақиқий қийматли функциялар, $\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ - Лаплас оператори. (12.1) классик Дирихле масаласининг ечими мавжуд ва ягонадир.

(12.1) классик Дирихле масаласи билан бирга ундан умумийроқ бўлган, яъни чегараланган, чекли сондаги узлишга эга бўлган $u_0(z)$ функция учун (12.1) кўринишдаги Дирихле масаласини ҳам қараймиз. Бунда D соҳада гармоник, чегараланган шундай $u(z)$ функцияни топиш талаб этиладики, бу функция учун $u(z)\big|_{\Gamma}=u_0(z)$ чегаравий шарт $u_0(z)$ функциянинг барча узлуксизлик нуқталарида ўринли бўлиб, бу нуқталарда $u(z)$ функция D соҳанинг Γ чегарасигача узлуксиздир. Ушбу масала қаралаётган пайтда D соҳа чегараланмаган соҳа бўлиши ҳам мумкин.

Ушбу кўринишдаги Дирихле масаласининг ечими ҳам мавжуд ва ягонадир.

2 – теорема. *Агар $u(z)$ функция $|z|<1$ доирада гармоник ва $|z|\le 1$ ёпиқ доирада чегараланган бўлиб, чекли сондаги чегара нуқталаридан ташқари, доира чегарасигача узлуксиз бўлса, у ҳолда қуйидаги Пуассон формуласи ўринли бўлади:*

$$u(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\varphi-\theta)+r^2} u(e^{i\theta})d\theta, \qquad (12.2)$$

бунда $z = re^{i\varphi}$, $0 \le r < 1$.

3 – теорема. Агар $u(z)$ *функция* $\operatorname{Im} z > 0$ *юқори ярим текисликда гармоник ва чегараланган бўлиб,* $\operatorname{Im} z = 0$ *тўғри чизиқгача чекли сондаги нуқталардан ташқари нуқталарда узлуксиз бўлса, у ҳолда* $u(z)$ *функция учун қуйидаги кўринишдаги Пуассон формуласи ўринли бўлади:*

$$u(z) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y\,u(t)}{(t-x)^2+y^2}dt, \qquad (12.3)$$

бунда $z = x + iy$, $y > 0$.

Шунингдек, $\dfrac{y}{(t-x)^2+y^2} = \operatorname{Re}\dfrac{1}{i(t-z)}$ тенгликдан фойдаланиб, Пуассон формуласини қуйидагича ҳам ёзиш мумкин:

$$u(z) = \operatorname{Re}\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(t)}{t-z}dt. \qquad (12.4)$$

Бу формула ёрдамида $\operatorname{Im} z > 0$ юқори ярим текисликда Лаплас тенгламаси учун Дирихле масаласи, яъни

$$\Delta u = 0, \quad y > 0; \; u\big|_{y=0} = R(x)$$

масалани ечиш мумкин, бунда $R(x)$ ҳақиқий рационал функция бўлиб, ҳақиқий ўқда қутбларга эга эмас ва $z \to \infty$ да $R(z) \to 0$. Бу масаланинг ечими (12.4) формулага кўра,

$$u(z) = \operatorname{Re}\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{R(t)}{t-z}dt$$

кўринишда бўлади, бунда $\operatorname{Im} z > 0$. Бу интегрални қолдиқлар назарияси ёрдамида ҳисоблаш мумкин:

$$u(z) = -2\,\mathrm{Re} \sum_{\operatorname{Im}\zeta_k < 0} \operatorname*{res}_{\zeta=\zeta_k} \frac{R(\zeta)}{\zeta - z} \tag{12.5}$$

Бу ерда $R(\zeta)$ функциянинг барча қутблар бўйича қолдиқларини $\operatorname{Im}\zeta < 0$ қуйи ярим текисликдан оламиз.

1 – мисол. Қуйидаги Дирихле масаласини ечинг:

$$\Delta u = 0,\ y > 0;\quad u\big|_{y=0} = \frac{1}{1+x^2}\ .$$

Ечиш. Қолдиқлар ёрдамида аниқланадиган (12.4) формуладан фойдаланиб,

$$u(z) = -2\,\mathrm{Re} \operatorname*{res}_{\zeta=-i} \frac{1}{(1+\zeta^2)(\zeta - z)} =$$

$$= -2\,\mathrm{Re}\frac{1}{2i(z+i)} = \frac{y+1}{x^2 + (y+1)^2}$$

эканлигини ҳосил қиламиз.

Энди ихтиёрий бир боғламли соҳада Лаплас тенгламаси учун Дирихле масаласини қараймиз:

$$\Delta u = 0,\ z \in D;\quad u\big|_{\Gamma} = u_0(z)\ , \tag{12.6}$$

бунда D соҳанинг Γ чегараси биттадан кўп нуқталардан ташкил топган. Бу масаланинг ечими D соҳада конформ акслантиришни қўллаб, доирага ёки юқори ярим текисликка конформ акслантирилади, ҳамда Пуассон формуласини қўллаб топилади. $\zeta = h(z)$ функция D соҳани $\operatorname{Im}\zeta > 0$ юқори ярим текисликка конформ акслантирсин, $z = g(\zeta)$ функция эса тескари акслантириш бўлсин. У ҳолда $\tilde{u}(\zeta) = u(g(\zeta))$ функция $\operatorname{Im}\zeta > 0$ юқори ярим текисликда гармоник функция бўлиб, $\tilde{u}\big|_{\eta=0} = u_0(z)\big|_{z\in\Gamma} = \tilde{u}_0(\xi)$, бунда $\zeta = \xi + i\eta$, чегаравий шартни қаноатлантиради. Шунингдек, (12.4) формулага асосан

$$\tilde{u}(\zeta) = \mathrm{Re}\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{u}_0(t)}{t-\zeta}\,dt$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Охирги тенгликда $\zeta = h(z)$, $t = h(\tau)$ деб ўзгарувчиларни алмаштириб, (12.6) масаланинг ечимини топамиз:

$$u(z) = \mathrm{Re}\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{u_0(\tau)h'(\tau)}{h(\tau) - h(z)}d\tau. \qquad (12.7)$$

Худди шунингдек, агар $w = f(z)$ функция D соҳани $|w| < 1$ доирага конформ акслантирса, у ҳолда

$$u(z) = \mathrm{Re}\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} f(\zeta)\frac{\zeta + z}{\zeta - z}\frac{d\zeta}{\zeta}, \quad |z| < 1$$

формуладан фойдаланиб, (12.6) масаланинг ечимини

$$u(z) = \mathrm{Re}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} u_0(\zeta)\frac{f(\zeta) + f(z)f'(\zeta)}{f(\zeta) - f(z)f(\zeta)}d\zeta \qquad 2.8)$$

кўринишда ёзиш мумкин бўлади.

Кўпгина ҳолларда, (12.6) масаланинг ечимини топишда (12.7) ёки (12.8) интегралларни ҳисоблаш ўрнига D соҳани бирлик доирага ёки юқори ярим текисликка топилган $\zeta = h(z)$ конформ акслантиришни қўллаб, Пуассон интеграли ҳисобланади ва олинган натижада $\zeta = h(z)$ алмаштириш қўланилади.

Қуйидаги мисол кўрсатадики, агар Дирихле масаласининг қўйилишида қидирилаётган $u(z)$ функция учун чегараланганлик шарти талаб қилинмаса, у ҳолда ягоналик теоремаси ўринли бўлмайди.

2 – мисол. а) $u(x, y) = y$ функция $y > 0$ юқори ярим текисликда гармоник, соҳа чегарасигача узлуксиз, $y = 0$ $(x \neq \infty)$ бўлганда $u(x, y) = 0$. Маълумки, $u(x, y) \equiv 0$ функция ҳам барча шартларни қаноатлантиради.

б) $u(x, y) = \dfrac{1 - x^2 - y^2}{(x-1)^2 + y^2} = \mathrm{Re}\dfrac{1+z}{1-z}$ функция $x^2 + y^2 < 1$ соҳада гармоник, соҳа чегарасининг (1,0) нуқтасидан бошқа барча нуқталарида узлуксиз, $x^2 + y^2 = 1$ айлана нуқталарининг

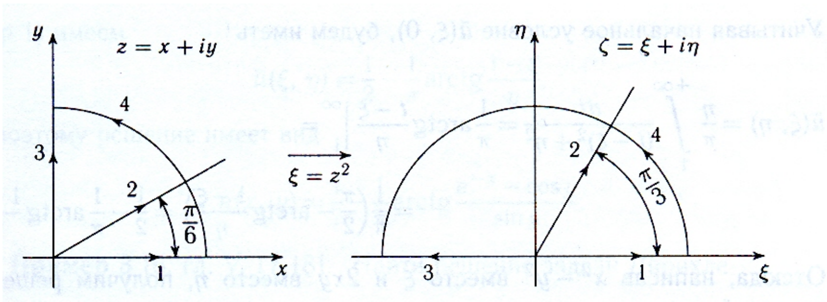
(1,0) нуқтасидан бошқа барча нуқталарида нолга тенг. $u(x,\ y)\equiv 0$ функция ҳам барча шартларни қаноатлантиради.

Конформ акслантиришлар усули билан текисликда Лаплас тенгламаси учун қўйилган чегаравий масалаларни ечишга доир бир қанча мисолларни келтирамиз.

3 – мисол. $x>0,\ y>0$ биринчи квадрантда $\Delta u=0$ Лаплас тенгламасининг $u\big|_{x=0}=0,\ u\big|_{y=0}=\theta(x-1)$ чегаравий шартларни қаноатлантирган ечимини топинг, бунда $\theta(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x\le 0\end{cases}$ – Хевисайд функцияси.

Ечиш. Маълумки, $\zeta=z^2$ комплекс ўзгарувчили функция z комплекс текисликнинг биринчи чорагида аниқланган бўлиб, берилган соҳани ζ комплекс текисликнинг $\eta>0$ юқори ярим текислигига акслантиргани, ҳолда:

– мусбат ярим ўқ x ни ҳақиқий ξ мусбат ярим ўққа акслантиради;
– мусбат ярим ўқ y ни ҳақиқий ξ манфий ярим ўққа акслантиради.



Шундай қилиб, қуйидаги хулосага келамиз:

$(x,\ y)$ текисликдаги чегаравий масала $\quad$ $(\xi,\ \eta)$ текисликдаги чегаравий масала

$$\begin{cases}\Delta u=0, \quad x>0, \quad y>0,\\ u\big|_{x=0}=0, \quad y\ge 0,\\ u\big|_{y=0}=\theta(x-1), \quad x\ge 0,\end{cases} \quad\to\quad \begin{cases}\Delta\tilde{u}=0, \quad \eta>0,\\ \tilde{u}\big|_{\eta=0}=\begin{cases}1, & \xi>1,\\ 0, & \xi\le 1.\end{cases}\end{cases}$$

Шуни таъкидлаш керакки, $\zeta = z^2$, яъни $\xi + i\eta = (x+iy)^2$ тенгликдан $\xi = x^2 - y^2$, $\eta = 2xy$ муносабатлар келиб чиқади.

$(\xi,\ \eta)$ текисликда Дирихле масаласининг ечими қуйидаги Пуассон интеграли орқали аниқланади:

$$\tilde{u}(\xi,\ \eta) = \frac{\eta}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\tilde{u}(t,\ 0)dt}{(t-\xi)^2+\eta^2}.$$

Қўйилган $\tilde{u}(\xi,\ 0)$ бошланғич шартни эътиборга олиб,

$$\tilde{u}(\xi,\ \eta) = \frac{\eta}{\pi}\int_{1}^{+\infty}\frac{dt}{(t-\xi)^2+\eta^2} = \frac{1}{\pi}arctg\frac{t-\xi}{\eta}\bigg|_1^{\infty} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - arctg\frac{1-\xi}{\eta}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}arctg\frac{1-\xi}{\eta}$$

функцияга эга бўламиз. Охирги тенгликдаξ нинг ўрнига $x^2 - y^2$ ни, η нинг ўрнига $2xy$ қўйиб,

$$u(x,\ y) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}arctg\frac{y^2-x^2+1}{2xy}$$

дастлабки масаланингечимини ҳосил қиламиз.

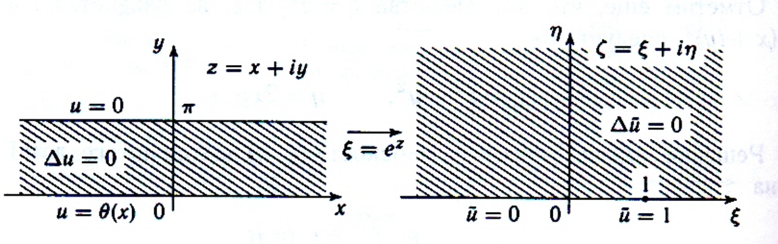
4 – мисол. $0 < y < \pi$ йўлакда $\Delta u = 0$ Лаплас тенгламаси учун қўйилган $u\big|_{y=0} = \theta(x),\ \ u\big|_{y=\pi} = 0$ чегаравий шартларни қаноатлантирадиган Дирихле масаласини ечинг.

Ечиш. $\zeta = e^z$ комплекс ўзгарувчили функция $0 < y < \pi$ йўлакни ζ комплекс текисликнинг $\eta > 0$ юқори ярим текислигига акслантиргани, ҳолда:

– мусбат x ўқни $\left[1,\ +\infty\right)$ мусбат ярим ўққа ўтказади;

– манфий x ярим ўқни $(0,\ 1)$ интервалга ўтказади;

– $y = \pi$ тўғри чизиқни манфий ξ ярим ўққа ўтказади.



Шундай қилиб, қуйидаги хулосага келамиз:

$(x,\ y)$ текисликдаги чегаравий масала $\qquad$ $(\xi,\ \eta)$ текисликдаги чегаравий масала

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \\ -\infty < x < +\infty,\ 0 < y < \pi, \\ u\big|_{y=0} = \theta(x), \quad -\infty < x < +\infty, \\ u\big|_{y=\pi} = 0, \quad -\infty < x < +\infty. \end{cases} \to \begin{cases} \Delta \tilde{u} = 0, \quad \eta > 0, \\ \tilde{u}\big|_{\eta=0} = \begin{cases} 1, & \xi \ge 1, \\ 0, & \xi \le 1. \end{cases} \end{cases}$$

$\xi = e^x \cos y, \quad \eta = e^x \sin y$ эканлигини эътиборга олиб ва олдинги масалага кўра

$$\tilde{u}(\xi,\ \eta) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} arctg \frac{1-\xi}{\eta}$$

эканлигидан

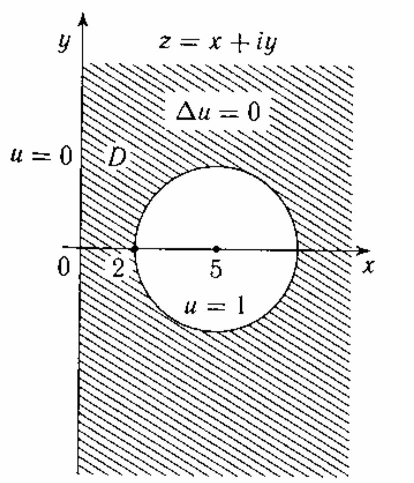
$$u(x,\ y) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} arctg \frac{e^{-x} - \cos y}{\sin y}$$

шаклдаги ечимни ҳосил қиламиз.

5 – мисол. Қуйидаги Дирихле масаласини ечинг:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad \operatorname{Re} z > 0, \\ |z-5| > 5, \quad u\big|_{\operatorname{Re} z=0} = 0, \quad u\big|_{|z-5|=3} = 1. \end{cases}$$

Ечиш. Олдин қандай D соҳада Дирихле масаласи ечиш кераклигини билиш учун соҳани тасвирлаймиз.



Соҳани концентрик бўлмаган халқа деб қараш мумкин (тўғри чизиқ – бу чексиз радиусли айлана). D соҳани концентрик халқага аксլантирадиган конформ акслантиришни топамиз. Бунинг учун иккита нуқтани $\operatorname{Re} z = 0$ тўғри чизиққа нисбатан ва $|z-5| = 3$ айланага нисбатан симметрик бўладиган қилиб аниқлаймиз. Аниқки, бу иккита нуқта $\operatorname{Re} z = 0$ тўғри чизиққа нисбатан ва $|z-5| = 3$ айланага нисбатан умумий бўлган перпендикуляр тўғри чизиқда, яъни ҳақиқий ўқда ётади. $\operatorname{Re} z = 0$ тўғри чизиққа нисбатан симметриклик шартидан $x_1 = a$, $x_2 = -a$ $(a > 0)$ бўлишини аниқлаймиз. Шунингдек, $|z-5| = 3$ айлананинг ҳам симметрик нуқталари бўлганлигидан фойдаланиб $(5+a)(5-a) = 9$ эканлигини топамиз, бундан $a = 4$ келиб чиқади.

Қидирилаётган конформ акслантириш

$$\zeta = \frac{z-4}{z+4} \tag{12.9}$$

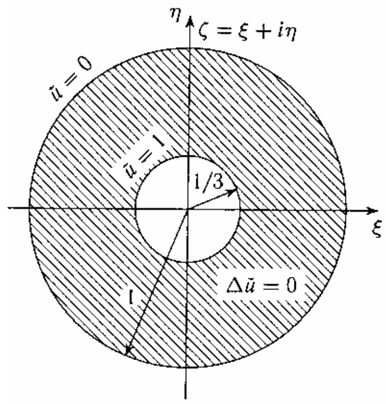
каср–чизиқли функция бўлишини кўрсатамиз. Ушбу акслантириш $\operatorname{Re} z = 0$ тўғри чизиқни γ айланага акслантиради. $z_1 = 4$ ва $z_2 = -4$ нуқталарни эса $\zeta_1 = 0$ ва $\zeta_2 = \infty$ нуқталарга акслантиради, бу нуқталар γ айланага нисбатан симметрик нуқталар бўлганлиги учун қаралаётган акслантириш симметриклик хоссасини қаноатлантиради. Шунга кўра, $\zeta = 0$ нуқта γ айлананинг марказидир. Ундан ташқари $z = 0$ нуқта

$\zeta=-1$ нуқтага ўтади, бундан эса γ айлана $|\zeta|=1$ эканлиги келиб чиқади.

Қаралаётган акслантириш $|z-5|=3$ айланани $|\zeta|=\dfrac{1}{3}$ айланага акслантиришини кўрсатамиз. Маълумки, каср–чизиқли акслантириш $|z-5|=3$ айланани айланага акслантиради ва унинг радиуси

$$|\zeta|=\left|\frac{2-4}{2+4}\right|=\frac{1}{3}$$

бўлади. Шундай қилиб, (12.9) кўринишдаги функция D соҳани концентрик $\dfrac{1}{3}<|\zeta|<1$ ҳалқага акслантиради.



Шундай қилиб, қуйидаги хулосага келамиз:

$(x,\ y)$ текисликдаги чегаравий масала $\qquad$ $(\xi,\ \eta)$ текисликдаги чегаравий масала

$$\begin{cases}\Delta u=0, \operatorname{Re} z>0, |z-5|>3,\\ u\big|_{\operatorname{Re} z=0}=0,\\ u\big|_{|z-5|=3}=1,\end{cases} \quad\rightarrow\quad \begin{cases}\Delta\tilde{u}=0,\ \dfrac{1}{3}<|\zeta|<1, & (12.10)\\ \tilde{u}\big|_{|\zeta|=1}=0,\\ u\big|_{|\zeta|=\frac{1}{3}}=1, & (12.11)\end{cases}$$

Энди $\frac{1}{3}<|\zeta|<1$ ($(\xi,\ \eta)$ текисликда) халқада Дирихле масаласини ечамиз. (12.11) чегаравий шарт φ қутб бурчагига боғлиқ эмас, бундан эса $\tilde{u}(\zeta)$ ечим фақат ρ ўзгарувчига боғлиқ (бунда $\xi=\rho\cos\varphi,\ \eta=\rho\sin\varphi$) эканлигини ҳосил қиламиз. Мазкур ечимни $\Delta\tilde{u}=0$ Лаплас тенгламасини

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\rho}\right)=0$$

шаклда ёзиб топамиз. Бу тенгламанинг умумий ечими

$$\tilde{u}(\zeta)=c_1+c_2\ln\rho$$

бўлиб, бунда c_1 ва c_2 лар ихтиёрий ўзгармаслардир. (12.11) чегаравий шарт шартдан фойдаланиб, $c_1=0$ ва $c_2=-\frac{1}{\ln 3}$ бўлишини топамиз. Демак,

$$\tilde{u}(\zeta)=-\frac{1}{\ln 3}\ln|\zeta|\ ,\ \text{бунда}\quad \rho=|\zeta|\ .$$

Қидиралаётган ечимни топиш учун (12.9) муносабатдан фойдаланилган ҳолда дастлабки z ўзгарувчига қайтамиз ва қуйидаги ечимни ҳосил қиламиз: $u(z)=\frac{1}{\ln 3}\ln\frac{z+4}{z-4}$.

Мустақил ечиш учун мисоллар

1. Бирлик доира ичида гармоник ва чегарасида $u\big|_{r=1}=\cos^4\varphi$ шартни қаноатлантирадиган u функцияни топинг.
2. Бирлик доира ичида гармоник ва чегарасида $u\big|_{r=1}=\sin^6\varphi+\cos^6\varphi$ шартни қаноатлантирадиган u функцияни топинг.

3. $R_1 < r < R_2$ халқада гармоник ва чегарасида $u\big|_{r=R_1} = u_1$, $u\big|_{r=R_2} = u_2$ шартларни қаноатлантирадиган u функцияни топинг.
4. $R_1 < r < R_2$ халқада гармоник ва чегарасида $u\big|_{r=R_1} = 1 + \cos^2\varphi$, $u\big|_{r=R_2} = \sin^2\varphi$ шартларни қаноатлантирадиган u функцияни топинг.
5. $R_1 < r < R_2$ халқада $\Delta u = A$ Пуассон тенгламасини ва чегарасида $u\big|_{r=R_1} = u_1$, $u\big|_{r=R_2} = u_2$ шартларни қаноатлантирадиган u функцияни топинг. (бунда A, u_1, u_2 – олдиндан берилган сонлар).
6. Маркази координата бошида бўлган R радиусли айланада $u\big|_{r=R} = 0$ шартни қаноаталантирадиган $\Delta u = -Axy \quad (A = const)$ Пуассон тенгламасининг ечимини топинг.

А Д А Б И Ё Т Л А Р

1. Алимов Ш.А. Об одной краевой задаче.//Доклады АН. 1980. т.252. №5. С.1033-1034.
2. Алимов Ш.А. Об одной краевой задаче для эллиптического оператора. //Доклады АН.1980. т.253. №2. С.255-256.
3. Алимов Ш.А. Об одной задаче с наклонной производной. //Дифференциальные уравнения . 1981. т.17. №10.С.1738-1751.
4. Алимов Ш.А. О гладкости решений одной задачи с косой производной.//Доклады АН. 1982. т.265. №2. С.265-266.
5. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1977.
6. Привалов И.И. Субгармонические функции, М. – Л. 1937.
7. Бицадзе А.В. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1982.
8. Бицадзе А.В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. М. “Наука”. 1966.
9. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М. “Наука”.1981.
10. Бицадзе А.В., Калиниченко Д.Ф. Сборник задач по уравнениям математической физики. М.: Наука, 1977.
11. Сираждинов С.Х., Мақсудов Ш., Салохитдинов М.С. Комплекс ўзгарувчининг функциялари назарияси. – Тошкент: Ўқитувчи, 1979.
12. Салоҳиддинов М. Математик физика тенгламалари.Т.: Ўзбекистон, 2002.
13. Садуллаев А.С. Плюрисубгармонические меры и емкости на комплексных многообразиях //Успехи мат. наук, 1981. т.36. №4. 53-105.
14. Садуллаев А.С. Плюрисубгармонические функции. Серия: Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т.8. М.: ВИНИТИ, 1985.

15. Евграфов М.А. Аналитические функции. – М.: Наука, 1968.
16. Евграфов М.А., Сидиров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И., Бежанов К.А. Сборник задач по теории аналитических функций. – М.: Наука, 1969.
17. Волковыский Л.И., Лунц Г.Л., Араманович И.Г. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1970.
18. Сидиров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И. Лекции по теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1989.
19. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. – М.: Наука, 1969.
20. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1973.
21. Фукс Б.А., Шабат Б.В. Функции комплексного переменного и некоторые их приложения. М.: Наука, 1964.
22. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1988.
23. Владимиров В.С., Михайлов В.П., Вашарин А.А., Каримова Х.Х., Сидоров Ю.В., Шабунин М.И. Сборник задач по уравнениям математической физики. М.: Наука, 1982.
24. Владимиров В.С. Методы теории функций многих комплексных переменных. М.: Наука, 1964.
25. Курант Р. Геометрическая теория функций комплексной переменной. М.: Гостехиздат, 1934.
26. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. т.1,2. М. “Гостехиздат”.1951.
27. Ронкин Л.И. Введение в теорию целых функций многих переменных. М.: Наука, 1971.
28. Лелон П., Груман Л. Целые функции многих комплексных переменных. М. 1989.
29. Тихонов А.Н.,Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972.
30. Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике. М.: Наука, 1980.

31. Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными. М.: Наука, 1961.
32. Олейник О.А. Лекции об уравнениях с частными производными. М.: Изд-во МГУ, 1976.
33. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высшая школа, 1970.
34. Смирнов М.М. Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка. М.: Наука, 1964.
35. Смирнов М.М. Задачи по уравнениям математической физики. М.: Наука, 1975.
36. Арсенин В.Я. Методы математической физики и специальные функции. М.: Наука, 1974.
37. Хёрмандер Л. Линейные дифференциальные уравнения с частными производными. М.: Мир, 1965.
38. Тешабоева Н.Х. Математик физика усуллари. Т.: Ўқитувчи, 1966.
39. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1976.
40. Михлин С.Г. Линейные уравнения в частных производных. М.: Высшая школа, 1977.
41. Гилбарг Д., Трудингер Н. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, 1989.
42. Миранда К. Уравнения с частными производными эллиптического типа. М.: ИЛ, 1957.
43. Перрон О. (Perron O.) Eine neue Behandlung der Randwertaufgebe für $\Delta u = 0$ // Math. Zeit. – 1923. – Bd. 18, S. 42 – 54.
44. Пикулин В.П., Похожаев С.И. Практический курс по уравнениям математической физики. М.: Изд-во МЦНМО, 2004.
45. Комеч А.И. Практическое решение уравнений математической физики. М.: Изд-во МГУ, 1993.
46. Ландис Е.М. Уравнение второго порядка эллиптического и параболического типов. М. 1971.

47. Берс Л., Джон Ф., Шехтер М. Уравнения с частными производными. М. “Мир”. 1966.
48. Соболев С.Л. Уравнения математической физики. М. “Гостехиздат”.1954.
49. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М. “Наука”. 1988.
50. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. М. “Наука”.1970.
51. Егоров Ю.В.Линейные дифференциальные уравнения главного типа. М. “Наука”.1984.
52. Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л. Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы. М. “ИЛ”.1962.
53. Мизохата С. Теория уравнений с частными производными. М. “Наука”.1977.
54. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М. “Наука”.1973.
55. Годунов С.К. Уравнения математической физики. М. “Наука”.1971.