O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI
HUZURIDAGI PEDAGOG KADRLARNI
QAYTA TAYYORLASH VA ULARNING
MALAKASINI OSHIRISH TARMOQ
(MINTAQAVIY) MARKAZI

TUTASH MUHITLARNING MATEMATIK MODELLARI

MODULI BO‘YICHA
O‘QUV – USLUBIY
MAJMUA

2025

O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY TA’LIM, FAN VA INNOVATSIYALAR VAZIRLIGI

OLIY TA’LIM TIZIMI KADRLARINI QAYTA
TAYYORLASH VA MALAKASINI OSHIRISH INSTITUTI

O’ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI HUZURIDAGI PEDAGOG KADRLARNI QAYTA TAYYORLASH VA ULARNING MALAKASINI OSHIRISH TARMOQ (MINTAQAVIY) MARKAZI

“Tutash muhitlarning matematik modellari” moduli bo‘yicha

o‘ q u v –u s l u b i y m a j m u a

Toshkent – 2025

Mazkur modulning o‘quv-uslubiy majmuasi Oliy ta’lim, fan va innovatsiyalar vazirligining 2024-yil “27” dekabrdagi 485-sonli buyrug‘I bilan tasdiqlangan o‘quv reja va namunaviy dastur asosida tayyorlandi.

Tuzuvchi: Rossiya Milliy texnologik tadqiqotlar universiteti, Olmaliq filiali, f.-m.f.n., M.N. Sidiqov

Taqrizchi: f-m.f.d., prof. A.B.Axmedov

O‘quv-uslubiy majmua Mirzo Ulug‘bek nomidagi O‘zbekiston Milliy universiteti Kengashining qarori bilan nashrga tavsiya qilingan (2024- yil “29” noyabrdagi 4-sonli bayonnoma).

I. ISHCHI DASTUR

KIRISH

Ushbu dastur O‘zbekiston Respublikasining 2020-yil 23-sentabrda tasdiqlangan “Ta’lim to‘g‘risida”gi Qonuni, O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2015 yil 12 iyundagi “Oliy ta’lim muassasalarining rahbar va pedagog kadrlarini qayta tayyorlash va malakasini oshirish tizimini yanada takomillashtirish to‘g‘risida”gi PF-4732-son, 2019-yil 27-avgustdagi “Oliy ta’lim muassasalari rahbar va pedagog kadrlarining uzluksiz malakasini oshirish tizimini joriy etish to‘g‘risida”gi PF-5789-son, 2019-yil 8-oktabrdagi “O‘zbekiston Respublikasi oliy ta’lim tizimini 2030 yilgacha rivojlantirish konsepsiyasini tasdiqlash to‘g‘risida”gi PF-5847-son, 2022-yil 28- yanvardagi “2022-2026 yillarga mo‘ljallangan Yangi O‘zbekistonning taraqqiyot strategiyasi to‘g‘risida”gi PF-60-son, 2023-yil 25-yanvardagi “Respublika ijro etuvchi hokimiyat organlari faoliyatini samarali yo‘lga qo‘yishga doir birinchi navbatdagi tashkiliy chora-tadbirlar to‘g‘risida”gi PF-14-son Farmonlari, shuningdek, O‘zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasining 2019-yil 23-sentabrdagi “Oliy ta’lim muassasalari rahbar va pedagog kadrlarining malakasini oshirish tizimini yanada takomillashtirish bo‘yicha qo‘shimcha chora-tadbirlar to‘g‘risida”gi 797-son Qarorida belgilangan ustuvor vazifalar mazmunidan kelib chiqqan holda tuzilgan bo‘lib, u oliy ta’lim muassasalari pedagog kadrlarining kasb mahorati hamda innovatsion kompetentligini rivojlantirish, sohaga oid ilg‘or xorijiy tajribalar, yangi bilim va malakalarni o‘zlashtirish, shuningdek amaliyotga joriy etish ko‘nikmalarini takomillashtirishni maqsad qiladi.

Dastur doirasida berilayotgan mavzular ta’lim sohasi bo‘yicha pedagog kadrlarni qayta tayyorlash va malakasini oshirish mazmuni, sifati va ularning tayyorgarligiga qo‘yiladigan umumiy malaka talablari va o‘quv rejalari asosida shakllantirilgan bo‘lib, uning mazmuni yangi O‘zbekistonning taraqqiyot strategiyasi va jamiyatning ma’naviy asoslarini yoritib berish, oliy ta’limning normativ-huquqiy asoslari bo‘yicha ta’lim-tarbiya jarayonlarini tashkil etish, pedagogik faoliyatda raqamli kompetensiyalarni rivojlantirish, ilmiy-innovatsion faoliyat darajasini oshirish, pedagogning kasbiy kompetensiyalarini rivojlantirish, ta’lim sifatini ta’minlashda baholash metodikalaridan samarali foydalanish, Gamilton sistemalari va integral invariantlar asoslarini o‘zlashtirish, tutash muhitlarning matematik modellaridan foydalanish bo‘yicha tegishli bilim, ko‘nikma, malaka va kompetensiyalarni rivojlantirishga yo‘naltirilgan.

Qayta tayyorlash va malaka oshirish kursining o‘quv dasturi quyidagi modullar mazmunini o‘z ichiga qamrab oladi:

Kursning maqsadi va vazifalari

Oliy ta’lim muasasalari pedagog kadrlarini qayta tayyorlash va ularning malakasini oshirish kursining **maqsadi** pedagog kadrlarning innovatsion yondoshuvlar asosida o‘quv-tarbiyaviy jarayonlarni yuksak ilmiy-metodik darajada loyihalashtirish, sohadagi ilg‘or tajribalar, zamonaviy bilim va malakalarni o‘zlashtirish va amaliyotga joriy etishlari uchun zarur bo‘ladigan kasbiy bilim, ko‘nikma va malakalarini takomillashtirish, shuningdek ularning ijodiy faolligini rivojlantirishdan iborat

Kursning **vazifalariga** quyidagilar kiradi:

“Mexanika va matematik modellashtirish” yo‘nalishida pedagog kadrlarning kasbiy bilim, koʻnikma, malakalarini takomillashtirish va rivojlantirish;

- pedagoglarning ijodiy-innovatsion faollik darajasini oshirish;

-pedagog kadrlar tomonidan zamonaviy axborot-kommunikatsiya texnologiyalari, zamonaviy ta'lim va innovatsion texnologiyalar sohasidagi ilgʻor xorijiy tajribalarning oʻzlashtirilishini ta'minlash;

- oʻquv jarayonini tashkil etish va uning sifatini ta'minlash borasidagi ilgʻor xorijiy tajribalar, zamonaviy yondashuvlarni oʻzlashtirish;

- **"Mexanika va matematik modellashtirish"** yoʻnalishida qayta tayyorlash va malaka oshirish jarayonlarini fan va ishlab chiqarishdagi innovatsiyalar bilan oʻzaro integratsiyasini ta'minlash.

Kurs yakunida tinglovchilarning bilim, koʻnikma va malakalari hamda kompetensiyalariga qoʻyiladigan talablar:

Qayta tayyorlash va malaka oshirish kursining oʻquv modullari boʻyicha tinglovchilar quyidagi yangi bilim, koʻnikma, malaka hamda kompetensiyalarga ega boʻlishlari talab etiladi:

Tinglovchi:

- Gamilton prinsipi va Gamilton tenglamalarini;
- Gamilton sistemasining integral invariantlari;
- Puankare va Puankare-Kartan integral invarianlarini;
- almashtirishlarni kanoniklik alomatini;
- erkin kanonik almashtirishlarni;
- Gamilton-Yakobi tenglamasini;
- Gamilton-Yakobi tenglamasining umumiy integralini;
- zamonaviy mexanikada matematik modellashtirishni;
- tutash muxit tenglamalarini;
- tutash muhit modellari uchun toʻla tenglamalar sistemasini;
- elastik jismlar uchun Lyame tenglamasini;
- muvozanat tenglamalarini ***bilishi*** kerak.

Tinglovchi:

- Gamilton prinsipi va Gamilton tenglamalarini yoritib berish;
- kanonik almashtirishlarni qoʻllash;
- almashtirishlarni kanoniklik alomatini tahlil etish va baholash;
- tutash muxitlarning turli modellari tahlil etish;
- tutash muhit modellari uchun toʻla tenglamalar sistemasidan foydalanish ***koʻnikmalariga*** ega boʻlishi lozim.

Tinglovchi:

- baholash turlari,tamoyillari va mezonlarini;

- erkin kanonik almashtirishlarni amalga oshirish;
- Gamilton-Yakobi tenglamasini o‘zlashtirish;
- Gamilton-Yakobi tenglamasining umumiy integralini qo‘llash;
- tutash muhitlarning matematik modellarini tahlil etish;
- yopishqoq suyuqlik uchun Nave-Stok tenglamasidan foydalanish;
- muvozanat tenglamalarini tadbiq etish ***malakalariga*** ega bo‘lishi lozim.
-

Tinglovchi:

- birinchi integrallar yordamida Gamilton sistemasining tartibini pasaytirish;
- Gamilton tenglamalarini integrallashga tegishli usullarni boshqarish masalalarini yechishda qo‘llash;
- elastik jismlar uchun Lyame tenglamasini qo‘llash;
- Nave-Stok tenglamasining aniq, taqribiy va sonli yechimlarini topish;
- suyuqlik va qattiq jismlar uchun erkin chegarali masalalarni amaliy ahamitini ochib berish ***kompetensiyalariga*** ega bo‘lishi lozim.

Modulni tashkil etish va o‘tkazish bo‘yicha tavsiyalar

- Modulni o‘qitish ma’ruza va amaliy mashg‘ulotlar shaklida olib boriladi.

- Modulni o‘qitish jarayonida ta’limning zamonaviy metodlari, pedagogik texnologiyalar va axborot-kommunikatsiya texnologiyalari qo‘llanilishi nazarda tutilgan:

-ma’ruza darslarida zamonaviy kompyuter texnologiyalari yordamida prezentatsion va elektron-didaktik texnologiyalardan;

-o‘tkaziladigan amaliy mashg‘ulotlarda texnik vositalardan, ekspress-so‘rovlar, test so‘rovlari, aqliy hujum, guruhli fikrlash, kichik guruhlar bilan ishlash, kollokvium o‘tkazish, va boshqa interaktiv ta’lim usullarini qo‘llash nazarda tutiladi.

Modulning o‘quv rejadagi boshqa modullar bilan bog‘liqligi va uzviyligi

“Tutash muhitlarning matematik modellari” moduli mazmuni o‘quv rejadagi “Yangi O‘zbekistonning taraqqiyot strategiyasi va jamiyatning ma’naviy asoslari”, “Oliy ta’limning normativ-huquqiy asoslari”, “Pedagogik faoliyatda raqamli kompetensiyalar” “Ilmiy va innovatsion faoliyatni rivojlantirish”, “Pedagogning kasbiy kompetensiyalarini rivojlantirish” “Ta’lim sifatini ta’minlashda baholash metodikalari”, “Gamilton sistemalari va integral invariantlar” mutaxassislik o‘quv modullari bilan uzviy bog‘langan holda pedagoglarning ta’lim jarayonida kasbiy pedagogik tayyorgarlik darajasini oshirishga xizmat qiladi.

Modulning oliy ta’limdagi o‘rni

Modulni o‘zlashtirish orqali tinglovchilar ta’lim jarayonida genom tadqiq etishga, katta ma’lumotlar va nukleotid va oqsil ketma-ketliklar ma’lumotlar bazasi tizimlaridan foydalanish va amalda qo‘llashga doir kasbiy kompetentlikka ega bo‘ladilar.

Tutash muhitlarning matematik modellari moduli bo‘yicha soatlar taqsimoti

№	Modul mavzulari	Auditoriya o‘quv yuklamasi		
		Jami	jumladan	
			Nazariy	Amaiy mashg’ ulot
1.	Zamonaviy mexanikada matematik modellashtirish	4	2	2
2.	Tutash muxitlarning turli modellari tahlili.	6	2	4
3.	Yopishqoq suyuqlik uchun Nave-Stok tenglamasi.	4	2	2
4.	Elastik jismlar uchun Lyame tenglamasi.	4	2	2
	Jami:	**18**	**8**	**10**

NAZARIY VA AMALIY MASHG‘ULOTLAR MAZMUNI

1-mavzu: Zamonaviy mexanikada matematik modellashtirish

Zamonaviy mexanikada matematik modellashtirish. Tutash muxit tenglamalari

2-mavzu: Tutash muxitlarning turli modellari tahlili.

Tutash muxitlarning turli modellari tahlili. Tutash muhit modellari uchun to‘la tenglamalar sistemasi.

3-mavzu: Yopishqoq suyuqlik uchun Nave-Stok tenglamasi

Yopishqoq suyuqlik uchun Nave-Stok tenglamasi. Nave-Stok tenglamasining aniq, taqribiy va sonli yechimlari.

4-mavzu: Elastik jismlar uchun Lyame tenglamasi

Elastik jismlar uchun Lyame tenglamasi. Muvozanat tenglamalari. Suyuqlik va qattiq jismlar uchun erkin chegarali masalalar.

O‘QITISH SHAKLLARI

- Mazkur modul bo‘yicha quyidagi o‘qitish shakllaridan foydalaniladi:
- ma’ruzalar, amaliy mashg‘ulotlar (ma’lumotlar va texnologiyalarni anglab olish, aqliy qiziqishni rivojlantirish, nazariy bilimlarni mustahkamlash);
- davra suhbatlari (ko‘rilayotgan loyiha yechimlari bo‘yicha taklif berish qobiliyatini oshirish, eshitish, idrok qilish va mantiqiy xulosalar chiqarish);
- bahs va munozaralar (loyihalar yechimi bo‘yicha dalillar va asosli argumentlarni taqdim qilish, eshitish va muammolar yechimini topish qobiliyatini rivojlantirish).

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI

I. Maxsus adabiyotlar

1. Oliy ta'limning meyoriy - huquqiy xujjatlari to'plami. -T., 2013.

2. O'rinov V. O'zbekiston Respublikasi oliy ta'lim muassasalarida ECTS kredit-modul tizimi: asosiy tushunchalar va qoidalar. O'quv qo'llanma. Nyu Bransvik Universiteti, 2020.

3. The European Higher Education Area. - Joint Declaration of the Ministers of Education. - Bologna, 1999, 19 June.

4. Shaping our Own Future in the European Higher Education Area // Convention of European Higher Education Institutions. - Salamanca, 2001, 29-30 march.

5. Virtualnaya realnost kak novaya issledovatelskaya i obrazovatelnaya sreda. Serfuz D.n. i dr. // JURNAL Nauchno-analiticheskiy jurnal «Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta Gosudarstvennoy protivopojarnoy slujbi MCHS Rossii», 2015. – s.185-197.

6. Ibraymov A.YE. Masofaviy o'qitishning didaktik tizimi. Metodik qo'llanma. – T.: "Lesson press", 2020. -112 b.

7. Ignatova N. Y. Obrazovaniye v sifrovuyu epoxu: monografiya. M-vo obrazovaniya i nauki RF. – Nijniy Tagil: NTI (filial) UrFU, 2017. – 128 s. http://elar.urfu.ru/bitstream/10995/54216/1/978-5-9544-0083-0_2017.pdf

8. Kiryakova A.V, Olxovaya T.A., Mixaylova N.V., Zaporojko V.V. Internet-texnologii na baze LMS Moodle v kompetentnostno-oriyentirovannom obrazovanii: uchebno-metodicheskoye posobiye / A.V. Kiryakova, T.A. Olxovaya, N.V. Mixaylova, V.V. Zaporojko; Orenburgskiy gos. un-t. – Orenburg: OGU, 2011. – 116 s. http://www.osu.ru/docs/fpkp/kiryakova_internet_technologies.pdf

9. Kononyuk A.YE. Oblachniye vichisleniya. – Kiyev, 2018. – 621 s.

10. Oliy ta'lim tizimini raqamli avlodga moslashtirish konsepsiyasi. Yevropa Ittifoqi Erasmus+ dasturining ko'magida. https://hiedtec.ecs.uni-ruse.bg/pimages/34/3._UZBEKISTAN-CONCEPT-UZ.pdf

11. Emelyanova O. A. Ta'limda bulutli texnologiyalardan foydalanish // Yosh olim. - 2014. - № 3. - S. 907-909.

12. Moodle LMS tizimida masofaviy kurslar yaratish. O'quv-uslubiy qo'llanma. – T.: Toshkent farmatsevtika instituti, 2017.

13. Tendensi i razvitiya visshego obrazovaniya v mire i v Rosii. Analiticheskiy doklad-daydjest. - M., 2021.- 198 s.

14. A.S. Zikriyoyev. Dunyo universitetlari reytingidagi tadqiqotchi olimlar orasida o'zingizni kashf qiling. -T.: Navro'z,2020. ISBN.9789943659285

15. Sherzod Mustafakulov, Aziz Zikriyoev, Dilnoza Allanazarova, Tokhir Khasanov, Sokhibmalik Khomidov. Explore Yourself Among World – Class Researchers. Grand OLEditor, Tashkent 2019, ISBN: 8175 25766-0.

16. Ackoff, Russell L., Scientific Method, New York: John Wiley & Sons, 1962.

17. Barzun, Jacques & Graff. F. (1990). The Modern Researcher, Harcourt, Brace Publication: New York.

18. Muslimov N.A va boshqalar. Innovatsion ta'lim texnologiyalari. O'quv-metodik qo'llanma. – T.: "Sano-standart", 2015. – 208 b.

19. Muslimov N.A va boshqalar. Pedagogik kompetentlik va kreativ asoslari. O‘quv-metodik qo‘llanma. – T.: “Sano-standart”, 2015. – 120 b.
20. Pecherkina, A. A. Razvitiye professionalnoy kompetentnosti pedagoga: teoriya i praktika [Tekst] : monografiya / A. A. Pecherkina, E. E. Simanyuk, YE. L. Umnikova : Ural. gos. ped. un-t. – Yekaterinburg : [b.i.], 2011. – 233 s.
21. O.S. Frolova. Formirovaniye innovatsionnoy kompetensii pedagoga v protsesse vnutrishkolnogo povisheniya kvalifikatsii. Diss.k.p.n. Voronej 2018.
22. Kompetensii pedagoga XXI veka [Elektronniy resurs]: sb. materialov resp. konferensii (Minsk, 25 noyab. 2021 g.) / M-vo obrazovaniya Resp. Belarus, GUO «Akad. poslediplom. obrazovaniya», OO «Belorus. ped. o-vo». – Minsk: APO, 2021.
23. Ishmuhamedov R.J., M.Mirsoliyeva. O‘quv jarayonida innovatsion ta’lim texnologiyalari. – T.: «Fan va texnologiya», 2017, 60 b.
24. Ishmuhamedov R, Mirsoliyeva M, Akramov A. Rahbarning innovatsion faoliyati. – T.: “Fan va texnologiyalar”, 2019.- 68 b.
25. Kodjaspirova G.M. Pedagogika v sxemax, tablitsax i opornix konspektax./ -M.:Ayris-press, 2016.
26. Natanzon E. Sh. Priyemi pedagogicheskogo vozdeystviya. - M, 2012. - 202 s.
27. Sergeyev I.S. Osnovi pedagogicheskoy deyatelnosti: Uchebnoye posobiye. – SPb.: Piter, 2014.
28. Margaret L. Lial, Thomas W. Hungerford, John P. Holcomb, Bernadette Mullins, Mathematics with Applications In the Management, Natural and Social Sciences (11th Edition), Pearsonb 2018.
29. Massey B., Ward-Smith J. Mechanics of Fluids. Solutions Manual Eighth edition. - Taylor &. Francis, 2016.
30. N.A.Korshunova and D.M.Azimov. Analytical Solutions for Thrust Arcs in a Field of Two Fixed Centers // «Journal of Guidance, Control, and Dynamics», (AIAA, USA), 2014, V.37, №5, P.1716-1719
31. Rao, M. M. Random and Vector Measures, Series on Multivariate Analysis, 9, World Scientific, 2012.
32. Robert D. Zucker, Oscar Biblarz Fundamentals of Gas Dynamics, Wiley, 2002. 512r.
33. Steve Taylor “Destination” Vocabulary and grammar”, Macmillan 2010.
34. Tao, Terence. An Introduction to Measure Theory. Providence, R.I.: American Mathematical Society, 2019.
35. Weaver, Nik Measure Theory and Functional Analysis. World Scientific, 2013, 423 p.
36. Avilova L.V., Bolotyuk V.A., Bolotyuk L.A. Analiticheskaya geometriya i lineynaya algebra// 2013. Izdaniye: 1-ye izd. 421 s.
37. Azimov D.M., Korshunova N.A Harakatning ustuvorlik nazariyasi bo‘yicha tanlangan ma’ruzalar. - Uchebnoye posobiye. - Tashkent, Universitet, 2005.
38. Belogurov A.Y. Modernizatsiya protsessa podgotovki pedagoga v kontekste innovatsionnogo razvitiya obshestva: Monografiya. — M.: MAKS Press, 2016. — 116 s. ISBN 978-5-317-05412-0.

39. Gulobod Qudratulloh qizi, R.Ishmuhamedov, M.Normuhammedova. An'anaviy va noan'anaviy ta'lim. – Samarqand: "Imom Buxoriy xalqaro ilmiy-tadqiqot markazi" nashriyoti, 2019. 312 b.
40. Ibraymov A.YE. Masofaviy oʻqitishning didaktik tizimi. metodik qoʻllanma/ tuzuvchi. A.YE. Ibraymov. – Toshkent: "Lesson press", 2020. 112 bet.
41. Ishmuhamedov R.J., M.Mirsoliyeva. Oʻquv jarayonida innovatsion ta'lim texnologiyalari. – T.: «Fan va texnologiya», 2014. 60 b.
42. Kiryanov D. Mathcad 15/Mathcad Prime 1.0. - SPb.: BXV-Peterburg, 2012. — 432 s.
43. Muslimov N.A va boshqalar. Innovatsion ta'lim texnologiyalari. Oʻquv-metodik qoʻllanma. – T.: "Sano-standart", 2015. – 208 b.
44. Ignatova N. Y. Obrazovaniye v sifrovuyu epoxu: monografiya. M-vo obrazovaniya i nauki RF. – Nijniy Tagil: NTI (filial) UrFU, 2017. – 128 s. http://elar.urfu.ru/bitstream/10995/54216/1/978-5-9544-0083-0_2017.pdf
45. Oliy ta'lim tizimini raqamli avlodga moslashtirish konsepsiyasi. Yevropa Ittifoqi Erasmus+ dasturining koʻmagida. https://hiedtec.ecs.uni-ruse.bg/pimages/34/3._UZBEKISTAN-CONCEPT-UZ.pdf
46. O.K. Asekretov, B.A. Borisov, N.Y. Bu-gakova i dr. M – Kniga 16 / Sovremenniye obrazovatelniye texnologii: pedagogika i psixologiya: Novosibirsk: Izdatelstvo SRNS, 2015. – 318 s. http://science.vvsu.ru/files/5040BC65-273B-44BB-98C4-CB5092BE4460.pdf
47. Turayev X. Harakatning turgʻunlik nazariyasi. - SamGU, 2004.
48. Usmonov B.SH., Habibullayev R.A. Oliy oʻquv yurtlarida oʻquv jarayonini kredit-modul tizimida tashkil qilish. Oʻquv qoʻllanma. T.: "Tafakkur" nashriyoti, 2020 y. 120 bet.

IV. Elektron ta'lim resurslari

1. www.edu.uz.
2. www.aci.uz.
3. www.ictcouncil.gov.uz.
4. www.lib.bimm.uz
5. www. Ziyonet. Uz
6. www.sciencedirect.com
7. www.acs.org
8. www.nature.com
9. http://www.kornienko-ev.ru/BCYD/index.html.

II. MODULNI O‘QITISHDA FOYDALANILADIGAN INTREFAOL TA’LIM METODLARI

“KWHL” metodi

Metodning maqsadi: Mazkur metod tinglovchilarni yangi axborotlar tizimini qabul qilishi va bilimlarni tizimlashtirishi uchun qo‘llaniladi, shuningdek, bu metod tinglovchilar uchun mavzu bo‘yicha qo‘yidagi jadvalda berilgan savollarga javob topish mashqi vazifasini belgilaydi.

Izoh. *KWHL:*
Know – nimalarni bilaman?
Want – nimani bilishni xohlayman?
How - qanday bilib olsam bo‘ladi?
Learn - nimani o‘rganib oldim?

“KWHL” metodi	
1. Nimalarni bilaman: -	***2. Nimalarni bilishni xohlayman, nimalarni bilishim kerak:*** -
3. Qanday qilib bilib va topib olaman: -	***4. Nimalarni bilib oldim:*** -

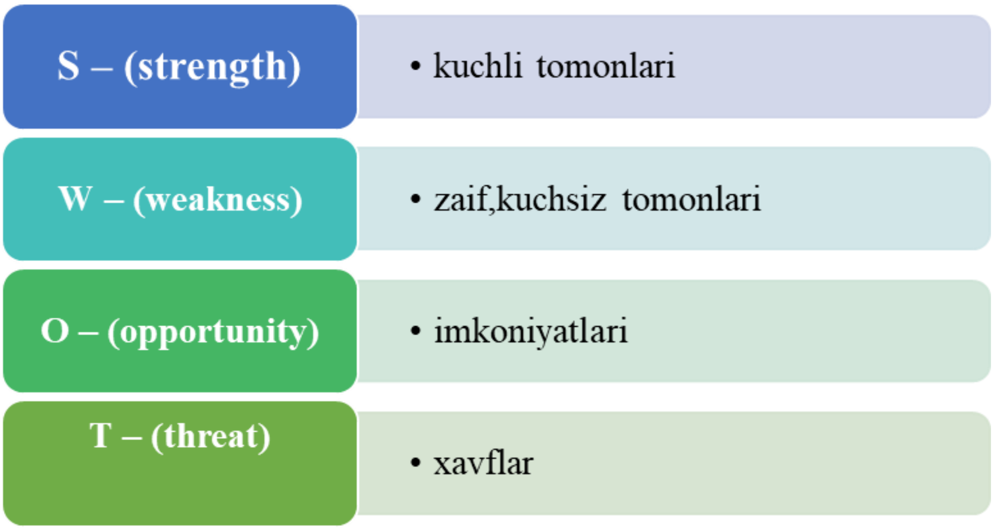
“W1H” metodi

Metodning maqsadi: Mazkur metod tinglovchilarni yangi axborotlar tizimini qabul qilishi va bilimlarni tizimlashtirishi uchun qo‘llaniladi, shuningdek, bu metod tinglovchilar uchun mavzu bo‘yicha qo‘yidagi jadvalda berilgan oltita savollarga javob topish mashqi vazifasini belgilaydi.

What?	Nima? (ta’rifi, mazmuni, nima uchun ishlatiladi)	
Where?	Qaerda (joylashgan, qaerdan olish mukin)?	
What kind?	Qanday? (parametrlari, turlari mavjud)	
When?	Qachon? (ishlatiladi)	
Why?	Nima uchun? (ishlatiladi)	
How?	Qanday qilib? (yaratiladi, saqlanadi, to‘ldiriladi, tahrirlash mumkin)	

“SWOT-tahlil” metodi

Metodning maqsadi: mavjud nazariy bilimlar va amaliy tajribalarni tahlil qilish, taqqoslash orqali muammoni hal etish yo‘llarni topishga, bilimlarni mustahkamlash, takrorlash, baholashga, mustaqil, tanqidiy fikrlashni, nostandart tafakkurni shakllantirishga xizmat qiladi.



2.1-rasm.

“VEER” metodi

Metodning maqsadi: Bu metod murakkab, ko‘ptarmoqli, mumkin qadar, muammoli xarakteridagi mavzularni o‘rganishga qaratilgan. Metodning mohiyati shundan iboratki, bunda mavzuning turli tarmoqlari bo‘yicha bir xil axborot beriladi va ayni paytda, ularning har biri alohida aspektlarda muhokama etiladi. Masalan, muammo ijobiy va salbiy tomonlari, afzallik, fazilat va kamchiliklari, foyda va zararlari bo‘yicha o‘rganiladi. Bu interfaol metod tanqidiy, tahliliy, aniq mantiqiy fikrlashni muvaffaqiyatli rivojlantirishga hamda o‘quvchilarning mustaqil g‘oyalari, fikrlarini yozma va og‘zaki shaklda tizimli bayon etish, himoya qilishga imkoniyat yaratadi. “Veer” metodidan ma’ruza mashg‘ulotlarida individual va juftliklardagi ish shaklida, amaliy va seminar mashg‘ulotlarida kichik guruhlardagi ish shaklida mavzu yuzasidan bilimlarni mustahkamlash, tahlili qilish va taqqoslash maqsadida foydalanish mumkin.

Metodni amalga oshirish tartibi:

trener-o‘qituvchi ishtirokchilarni 5-6 kishidan iborat kichik guruhlarga ajratadi;

trening maqsadi, shartlari va tartibi bilan ishtirokchilarni tanishtirgach, har bir guruhga umumiy muammoni tahlil qilinishi zarur bo‘lgan qismlari tushirilgan tarqatma materiallarni tarqatadi;

har bir guruh o‘ziga berilgan muammoni atroflicha tahlil qilib, o‘z mulohazalarini tavsiya etilayotgan sxema bo‘yicha tarqatmaga yozma bayon qiladi;

navbatdagi bosqichda barcha guruhlar o‘z taqdimotlarini o‘tkazadilar. Shundan so‘ng, trener tomonidan tahlillar umumlashtiriladi, zaruriy axborotlr bilan to‘ldiriladi va mavzu yakunlanadi.

2.2-rasm.

Muammoli savol					
1-usul		**2-usul**		**3-usul**	
afzalligi	kamchiligi	afzalligi	kamchiligi	afzalligi	kamchiligi
Xulosa:					

“Keys-stadi” metodi

«Keys-stadi» - inglizcha so‘z bo‘lib, («case» – aniq vaziyat, hodisa, «stadi» – o‘rganmoq, tahlil qilmoq) aniq vaziyatlarni o‘rganish, tahlil qilish asosida o‘qitishni amalga oshirishga qaratilgan metod hisoblanadi. Mazkur metod dastlab 1921 yil Garvard universitetida amaliy vaziyatlardan iqtisodiy boshqaruv fanlarini o‘rganishda foydalanish tartibida qo‘llanilgan. Keysda ochiq axborotlardan yoki aniq voqea-hodisadan vaziyat sifatida tahlil uchun foydalanish mumkin.

“Keys metodi” ni amalga oshirish bosqichlari

Ish bosqichlari	Faoliyat shakli va mazmuni
1-bosqich: Keys va uning axborot ta'minoti bilan tanishtirish	✓ yakka tartibdagi audio-vizual ish; ✓ keys bilan tanishish (matnli, audio yoki media shaklda); ✓ axborotni umumlashtirish; ✓ axborot tahlili; ✓ muammolarni aniqlash
2-bosqich: Keysni aniqlashtirish va o'quv topshirig'ni belgilash	✓ individual va guruhda ishlash; ✓ muammolarni dolzarblik ierarxiyasini aniqlash; ✓ asosiy muammoli vaziyatni belgilash
3-bosqich: Keysdagi asosiy muammoni tahlil etish orqali o'quv topshirig'ining yechimini izlash, hal etish yo'llarini ishlab chiqish	✓ individual va guruhda ishlash; ✓ muqobil yechim yo'llarini ishlab chiqish; ✓ har bir yechimning imkoniyatlari va to'siqlarni tahlil qilish; ✓ muqobil yechimlarni tanlash
4-bosqich: Keys yechimini shakllantirish va asoslash, taqdimot.	✓ yakka va guruhda ishlash; ✓ muqobil variantlarni amalda qo'llash imkoniyatlarini asoslash; ✓ ijodiy-loyiha taqdimotini tayyorlash; ✓ yakuniy xulosa va vaziyat yechimining amaliy aspektlarini yoritish

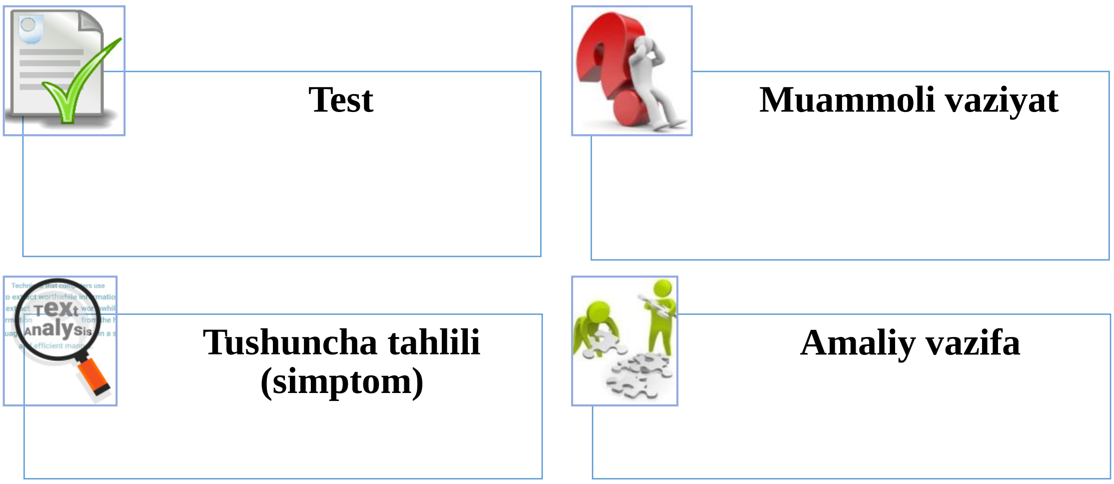
"Assesment" metodi

Metodning maqsadi: mazkur metod ta'lim oluvchilarning bilim darajasini baholash, nazorat qilish, o'zlashtirish ko'rsatkichi va amaliy ko'nikmalarini tekshirishga yo'naltirilgan. Mazkur texnika orqali ta'lim oluvchilarning bilish faoliyati turli yo'nalishlar (test, amaliy ko'nikmalar, muammoli vaziyatlar mashqi, qiyosiy tahlil, simptomlarni aniqlash) bo'yicha tashhis qilinadi va baholanadi.

Metodni amalga oshirish tartibi:

"Assesment"lardan ma'ruza mashg'ulotlarida talabalarning yoki qatnashchilarning mavjud bilim darajasini o'rganishda, yangi ma'lumotlarni bayon qilishda, seminar, amaliy mashg'ulotlarda esa mavzu yoki ma'lumotlarni o'zlashtirish darajasini baholash, shuningdek, o'z-o'zini baholash maqsadida individual shaklda foydalanish tavsiya etiladi. Shuningdek, o'qituvchining ijodiy yondashuvi hamda o'quv maqsadlaridan kelib chiqib, assesmentga qo'shimcha topshiriqlarni kiritish mumkin.

Har bir katakdagi to'g'ri javob 5 ball yoki 1-5 balgacha baholanishi mumkin.



2.3-rasm.

“Insert” metodi

Metodni amalga oshirish tartibi:

- o‘qituvchi mashg‘ulotga qadar mavzuning asosiy tushunchalari mazmuni yoritilgan matnni tarqatma yoki taqdimot ko‘rinishida tayyorlaydi;
- yangi mavzu mohiyatini yorituvchi matn ta’lim oluvchilarga tarqatiladi yoki taqdimot ko‘rinishida namoyish etiladi;
- ta’lim oluvchilar individual tarzda matn bilan tanishib chiqib, o‘z shaxsiy qarashlarini maxsus belgilar orqali ifodalaydilar. Matn bilan ishlashda talabalar yoki qatnashchilarga quyidagi maxsus belgilardan foydalanish tavsiya etiladi:

Belgilar	Matn
“V” – tanish ma’lumot.	
“?” – mazkur ma’lumotni tushunmadim, izoh kerak.	
“+” bu ma’lumot men uchun yangilik.	
“– ” bu fikr yoki mazkur ma’lumotga qarshiman?	

Belgilangan vaqt yakunlangach, ta’lim oluvchilar uchun notanish va tushunarsiz bo‘lgan ma’lumotlar o‘qituvchi tomonidan tahlil qilinib, izohlanadi, ularning mohiyati to‘liq yoritiladi. Savollarga javob beriladi va mashg‘ulot yakunlanadi.

III. NAZARIY MASHG'ULOT MATERIALLARI

1-MAVZU: Zamonaviy mexanikada matematik modellashtirish.

REJA:

1.1. M*exanikada matematik modellashtirish*;
***1.2.* Chekli elementlar usuli haqida**
***1.3.* Chekli elementlar usulida to'rtburchakli element.**

Tayanch so'zlar Nazariy mexanikasi, tutash muxitlar mexanikasi, Suyuqlik va gazlar, matematik munosabatlari, Chekli ayirmali usuli, Chekli elementlar usuli, Chegaraviy elementlar usuli, *kuchlanishlar tenzori*.

*1.1. M*exanikada matematik modellashtirish

Nazariy va tutash muxitlar mexanikasi masalalari turli xil matematik model tenglamalar orqali ifodalanadi. Odatda, bu tenglamalar oddiy yoki xususiy xosilali differensial tenglamalar ko'rinishida yoziladi. Nazariy maxanikada, moddiy nuqta yoki moddiy nuqtalar sistemasi qaralib, ular odatda ikkinchi tartibli chiziqli va chiziqsiz oddiy differensial tenglamalarga masalalarga(Koshi masalasi) keltiriladi.

Deformasiyalanuvchi qattiq jismlar, suyuqlik va gazlarda kechadigan jaroyonlarni o'rganishga va ularni matematik modellashtirishga bag'ishlangan. Odatda, bu masalalar, vaqtga bog'liqligiga nisbatan, giperbolik, parabolik va elliptik tipdagi xususiy hosilali differensial tenglamalar bilan ifodalanadi. Bu kursning asosiy maqsadi, nazariy mexanika va tutish muxit mexanikasida uchraydigan matematik modellarning yani chegaraviy masalalarni (boshlang'ich va chegaraviy shartli) masalalarni foydalanilgan xolda sonli yechish usullarini bayon etishdan iborat. Xozirgi kunda, nazariy mexanika va tutash muxit mexanikasi masalalarini sonli yechishning asosiy usullari sifatida
1. Chekli elementlar usuli
2. Chekli ayirmali usul
3 Chegaraviy elementlar usullarini
sanab o'tish mumkin.

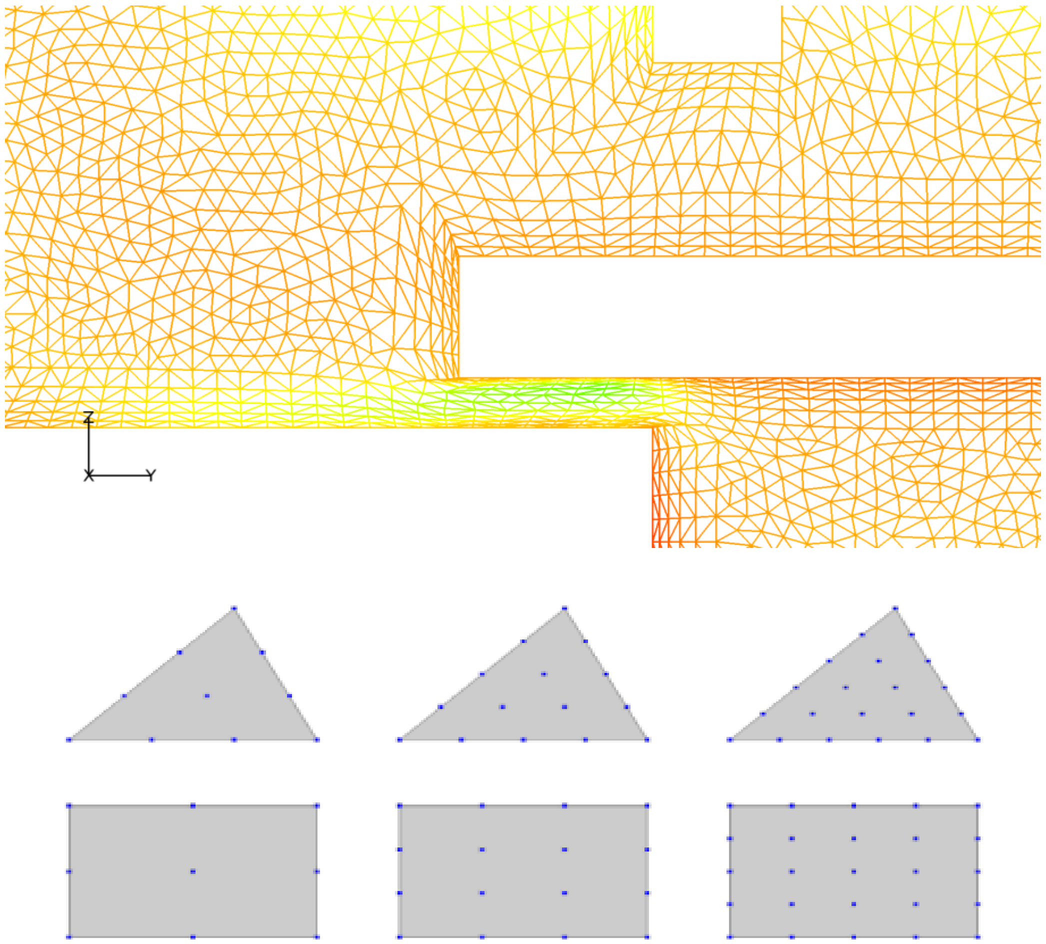
1.2. Chekli elementlar usuli haqida

Chekli elementlar usuli (FEM- Finite Element Method) hozirgi kunda juda keng o'llaniladigan zamonaviy metodlardan biri. Chekli elementda ikki o'lchamli holatini ko'rib chiqaylik. Elementga ajratish bu metodda ikki holatda mavjud:

1. Bitta element bir necha elementlarga ajratiladi. Har bir element qattiqlik

matrisasalari topilib birlashtiriladi.

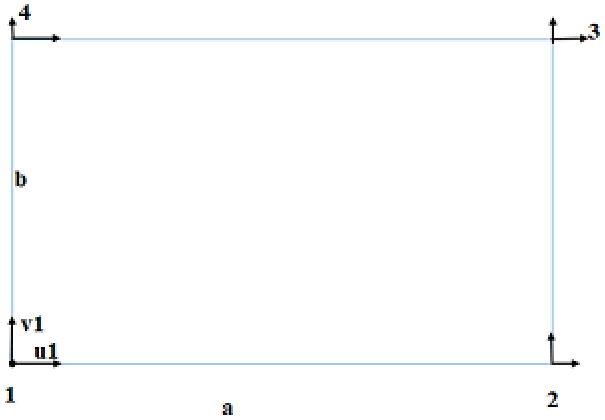
2. Bitta oddiy elementni bir necha uzel nuqtali holatda olish ham mumkin.(1-rasm). Bu element uchun qattiqlik matrisasi hisoblanadi.



1-rasm

Bu metodda energiya integralini minimumlashtirish prinsipiga asoslanadi. Umumiy energiya uzel nuqtalariga nisbatan topilib, o’zgaruvchilarga nisbatan minumumlashtirilib, tenglamalar sistemasiga keltiriladi. Tekislikda elementlar to’rtburchak va uchburchak ko’rinishda bo’lishi mumkin. Keling to’rtburchak element uchun metodning ishlash bosqichini ko’rib chiqaylik.

1.3. Chekli elementlar usulida to’rtburchakli element.



$$u = u(x, y); \quad v = v(x, y); \quad w = 0.$$

Sohaning umumiy ko'chishini U va V orqali ifodalab olaylik. Quyidagi $\xi = \frac{x}{a}$; $\quad \eta = \frac{y}{b}$ belgilash kiritib o'lchamsiz sistemasiga o'tib olamiz .

$$\begin{cases} U = \alpha 1 \cdot \xi + \alpha 2 \cdot \xi\eta + \alpha 3 \cdot \eta + \alpha 4 \\ V = \alpha 5 \cdot \xi + \alpha 6 \cdot \xi\eta + \alpha 7 \cdot \eta + \alpha 8 \end{cases}$$ ko'rinishida ko'chish ko'rinishida izlasak,

Bu yerda $\alpha 1, \alpha 2, \alpha\ 3\ , \alpha 4 \ldots . \alpha 8$ – konstantantalar, ularni aniqlovchi quyidagi ifodalarga ega bo'lamiz:

$$\xi = 0; \quad \eta = 0 \text{ da } \; U = u1; \; V = v1;$$
$$\xi = 1; \quad \eta = 0 \text{ da } \; U = u2; \; V = v2;$$
$$\xi = 1; \quad \eta = 1 \text{ da } \; U = u3; \; V = v3;$$
$$\xi = 0; \quad \eta = 1 \text{ da } \; U = u4; \; V = v4;$$

Bu sistemani yechib , $\alpha 1, \alpha 2, \alpha\ 3\ , \alpha 4 \ldots . \alpha 8$ larni aniqlab olamiz. Natijada

$$\begin{cases} U = (1-\xi)(1-\eta)\, u1 + \xi(1-\eta)\, u2 + \xi\eta\, u3 + \eta(1-\xi)\, u4 \\ V = (1-\xi)(1-\eta)\, v1 + \xi(1-\eta)\, v2 + \xi\eta\, v3 + \eta(1-\xi)\, v4 \end{cases}$$

Ko'chishning o'zgarishi ixtiyoriy tomonda chiziqli, bog'liqligi faqat shu tomondagi ikki uzel nuqtaga bog'liq.

Deformatsiya komponentalari esa Koshi munosabatidan quyidagiga teng:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x};$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \gamma_{yz} = \cancel{\frac{\partial v}{\partial z}} + \cancel{\frac{\partial w}{\partial y}};$$

$$\varepsilon_z = \cancel{\frac{\partial w}{\partial z}}; \quad \gamma_{zx} = \cancel{\frac{\partial w}{\partial x}} + \cancel{\frac{\partial u}{\partial z}}.$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{a}\frac{\partial u}{\partial \xi};$$
$$\varepsilon_y = \frac{1}{b}\frac{\partial v}{\partial \eta};$$
$$2\varepsilon_{xy} = \frac{1}{b}\frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{1}{a}\frac{\partial v}{\partial \eta};$$

Bundan

$$[\varepsilon_{ij}] = \begin{cases} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ 2\varepsilon_{xy} \end{cases} = \begin{bmatrix} -\frac{1-\eta}{a} & \frac{0}{a} & \frac{1-\eta}{a} & \frac{0}{a} & \frac{\eta}{a} & \frac{0}{a} & -\frac{\eta}{a} & \frac{0}{a} \\ \frac{0}{b} & -\frac{1-\xi}{b} & \frac{0}{b} & -\frac{\xi}{b} & \frac{0}{1} & \frac{\xi}{b} & \frac{0}{b} & \frac{1-\xi}{b} \\ -\frac{1-\xi}{b} & -\frac{1-\eta}{a} & \frac{-\xi}{b} & \frac{1-\eta}{a} & \frac{\xi}{b} & \frac{\eta}{a} & \frac{1-\xi}{b} & -\frac{\eta}{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u1 \\ v1 \\ u2 \\ v2 \\ u3 \\ v3 \\ u4 \\ v4 \end{bmatrix}; \text{ yoki}$$

$[\boldsymbol{\varepsilon_{ij}}] = [\boldsymbol{b}] * [\boldsymbol{u}]$; **bu yerda**

$$[\boldsymbol{b}] = \begin{bmatrix} -\frac{1-\eta}{a} & \frac{0}{a} & \frac{1-\eta}{a} & \frac{0}{a} & \frac{\eta}{a} & \frac{0}{a} & -\frac{\eta}{a} & \frac{0}{a} \\ \frac{0}{b} & -\frac{1-\xi}{b} & \frac{0}{b} & -\frac{\xi}{b} & \frac{0}{1} & \frac{\xi}{b} & \frac{0}{b} & \frac{1-\xi}{b} \\ -\frac{1-\xi}{b} & -\frac{1-\eta}{a} & \frac{-\xi}{b} & \frac{1-\eta}{a} & \frac{\xi}{b} & \frac{\eta}{a} & \frac{1-\xi}{b} & -\frac{\eta}{a} \end{bmatrix}; \; u = \begin{bmatrix} u1 \\ v1 \\ u2 \\ v2 \\ u3 \\ v3 \\ u4 \\ v4 \end{bmatrix};$$

Guk qonuniga ko'ra $[\sigma_{ij}] = [A][\varepsilon_{ij}]^T = [A] * [\boldsymbol{b}] * [\boldsymbol{u}]$**;**
Agar temperature ham mavjud bo'lsa, $[\boldsymbol{\sigma}] = [A] * [\boldsymbol{b}] * [\boldsymbol{u}] + [A]^T * \alpha[\boldsymbol{T}]$**;**
Bu yerda $[A]$:

$$C11 := \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}$$

1) Tekis kuchlanganlik holati uchun $[A] = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix};$

2) Tekis deformatsiya holati uchun $[A]=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix}1-\nu & \nu & 0\\ \nu & 1-\nu & 0\\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2}\end{bmatrix}$;

Deformatsiyalanuvchi qattiq jism uchun ichki Energiyani kuchlanish va deformatsiya orqali uchun yozib olsak,

$E_k=\frac{1}{2}\iiint_{(V)}\varepsilon_{ij}\sigma_{ij}dV=\frac{1}{2}\iint_{(S)}\varepsilon_{ij}\sigma_{ij}hdS=\frac{h}{2}\int_0^1\left(\int_0^1[\boldsymbol{b}]^{\boldsymbol{T}}*[\boldsymbol{u}]^{\boldsymbol{T}}[A]*[\boldsymbol{b}]*[\boldsymbol{u}]\,d\xi\right)d\eta=\frac{h}{2}\left\{\int_0^1\left(\int_0^1[\boldsymbol{b}]^{\boldsymbol{T}}*[A]*[\boldsymbol{b}]\,d\xi\right)d\eta\right\}[\boldsymbol{u}]^{\boldsymbol{T}}[\boldsymbol{u}]$

;

Potensial energiya esa Kuchlarning o’z yo’nalishi bo’yicha ta’sir holati ekanligini nazarda tutsak, $E_p=\iiint_{(V)}[F][u]^T dV=\iint_{(S)}[F][u]^T hdS$

Agar kuchlar koordinata qonuni bo’yicha o’zgarmasa, $E_p=[F][u]^T h*S$ ga teng.

Kastilyo teoemasiga ko’ra, Tashqi potensialning teng yarmi jism ichki kinetic energiyasiga sarf bo’lishini ijnobatga olsak,

$$E_k=\frac{1}{2}E_p;\ \text{ya'ni}$$

$$\frac{h}{2}\left\{\int_0^1\left(\int_0^1[\boldsymbol{b}]^{\boldsymbol{T}}*[A]*[\boldsymbol{b}]\,d\xi\right)d\eta\right\}[\boldsymbol{u}]^{\boldsymbol{T}}=\frac{1}{2}[F][u]^T h*S$$

Bundan

$\frac{1}{S}\int_0^1\left(\int_0^1[\boldsymbol{b}]^{\boldsymbol{T}}*[A]*[\boldsymbol{b}]\,d\xi\right)d\eta*[\boldsymbol{u}]=[F]$ ga ega bo’lamiz.

Bu ifodadan $[k][\boldsymbol{u}]=[F]$ ifodani olamiz.

Bu yerda $[k]=\frac{1}{S}\int_0^1\left(\int_0^1[\boldsymbol{b}]^{\boldsymbol{T}}*[A]*[\boldsymbol{b}]\,d\xi\right)d\eta$;

Endi yuqoridagi $[k]\ matrisa$ elementlarini hosil qilaylik.

1. Tekis kuchlanganlik holati uchun

$$[\boldsymbol{b}]^T*[A]*[\boldsymbol{b}]=\left[\begin{bmatrix}-\frac{1-\eta}{a} & \frac{0}{a} & \frac{1-\eta}{a} & \frac{0}{a} & \frac{\eta}{a} & \frac{0}{a} & -\frac{\eta}{a} & \frac{0}{a}\\ \frac{0}{b} & -\frac{1-\xi}{b} & \frac{0}{b} & -\frac{\xi}{b} & \frac{0}{1} & \frac{\xi}{b} & \frac{0}{b} & \frac{1-\xi}{b}\\ -\frac{1-\xi}{b} & -\frac{1-\eta}{a} & \frac{-\xi}{b} & \frac{1-\eta}{a} & \frac{\xi}{b} & \frac{\eta}{a} & \frac{1-\xi}{b} & -\frac{\eta}{a}\end{bmatrix}\right]^T*\frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2}\end{bmatrix}$$

$$*\begin{bmatrix}-\frac{1-\eta}{a} & \frac{0}{a} & \frac{1-\eta}{a} & \frac{0}{a} & \frac{\eta}{a} & \frac{0}{a} & -\frac{\eta}{a} & \frac{0}{a}\\ \frac{0}{b} & -\frac{1-\xi}{b} & \frac{0}{b} & -\frac{\xi}{b} & \frac{0}{1} & \frac{\xi}{b} & \frac{0}{b} & \frac{1-\xi}{b}\\ -\frac{1-\xi}{b} & -\frac{1-\eta}{a} & \frac{-\xi}{b} & \frac{1-\eta}{a} & \frac{\xi}{b} & \frac{\eta}{a} & \frac{1-\xi}{b} & -\frac{\eta}{a}\end{bmatrix};$$

$$j := \Bigg[\Bigg[\frac{(1-\eta)^2}{a^2}+\frac{(1-\xi)^2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu\right)}{b^2},\ \frac{(1-\eta)\nu(1-\xi)}{ab}+\frac{(1-\xi)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu\right)(1-\eta)}{ba},\ -\frac{(1-\eta)^2}{a^2}+\frac{(1-\xi)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu\right)\xi}{b^2},\ \frac{(1-\eta)\nu\xi}{ab}-\frac{(1-\xi)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu\right)(1-\eta)}{ba},\ -\frac{(1-\eta)\eta}{a^2}-\frac{(1-\xi)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu\right)\xi}{b^2},\ -\frac{(1-\eta)\nu\xi}{ab}-\frac{(1-\xi)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu\right)\eta}{ba},\ \frac{(1-\eta)\eta}{a^2}-\frac{(1-\xi)^2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu\right)}{b^2},\ -\frac{(1-\eta)\nu(1-\xi)}{ab}+\frac{(1-\xi)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu\right)\eta}{ba}\Bigg],$$

$$\Bigg[\frac{(1-\eta)\nu(1-\xi)}{ab}+\frac{(1-\xi)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu\right)(1-\eta)}{ba},\ \frac{(1-\xi)^2}{b^2}+\frac{(1-\eta)^2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu\right)}{a^2},\ -\frac{(1-\eta)\nu(1-\xi)}{ab}+\frac{(1-\eta)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu\right)\xi}{ab},\ \frac{(1-\xi)\xi}{b^2}-\frac{(1-\eta)^2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu\right)}{a^2},\ -\frac{(1-\xi)\nu\eta}{ba}-\frac{(1-\eta)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu\right)\xi}{ab},\ -\frac{(1-\xi)\xi}{b^2}-\frac{(1-\eta)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu\right)\eta}{a^2},\ \frac{(1-\xi)\nu\eta}{ba}-\frac{(1-\xi)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu\right)(1-\eta)}{ba},\ -\frac{(1-\xi)^2}{b^2}+\frac{(1-\eta)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu\right)\eta}{a^2}\Bigg],$$

$$\Bigg[-\frac{(1-\eta)^2}{a^2}+\frac{(1-\xi)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu\right)\xi}{b^2},\ -\frac{(1-\eta)\nu(1-\xi)}{ab}+\frac{(1-\eta)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu\right)\xi}{ab},\ \frac{(1-\eta)^2}{a^2}+\frac{\xi^2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu\right)}{b^2},\ -\frac{(1-\eta)\nu\xi}{ab}-\frac{(1-\eta)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu\right)\xi}{ab},\ \frac{(1-\eta)\eta}{a^2}-\frac{\xi^2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu\right)}{b^2},\ \frac{(1-\eta)\nu\xi}{ab}-\frac{\xi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu\right)\eta}{ba},\ -\frac{(1-\eta)\eta}{a^2}-\frac{(1-\xi)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu\right)\xi}{b^2},\ \frac{(1-\eta)\nu(1-\xi)}{ab}+\frac{\xi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu\right)\eta}{ba}\Bigg],$$

$$\Bigg[\frac{(1-\eta)\nu\xi}{ab}-\frac{(1-\xi)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu\right)(1-\eta)}{ba},\ \frac{(1-\xi)\xi}{b^2}-\frac{(1-\eta)^2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu\right)}{a^2},\ -\frac{(1-\eta)\nu\xi}{ab}-\frac{(1-\eta)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu\right)\xi}{ab},\ \frac{\xi^2}{b^2}+\frac{(1-\eta)^2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu\right)}{a^2},\ -\frac{\xi\nu\eta}{ba}+\frac{(1-\eta)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu\right)\xi}{ab},\ -\frac{\xi^2}{b^2}+\frac{(1-\eta)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu\right)\eta}{a^2},\ \frac{\xi\nu\eta}{ba}+\frac{(1-\xi)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu\right)(1-\eta)}{ba},\ -\frac{(1-\xi)\xi}{b^2}-\frac{(1-\eta)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu\right)\eta}{a^2}\Bigg],$$

$$\Bigg[-\frac{(1-\eta)\eta}{a^2}-\frac{(1-\xi)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu\right)\xi}{b^2},\ -\frac{(1-\xi)\nu\eta}{ba}-\frac{(1-\eta)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu\right)\xi}{ab},\ \frac{(1-\eta)\eta}{a^2}-\frac{\xi^2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu\right)}{b^2},\ -\frac{\xi\nu\eta}{ba}+\frac{(1-\eta)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu\right)\xi}{ab},\ \frac{\eta^2}{a^2}+\frac{\xi^2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu\right)}{b^2},\ \frac{\xi\nu\eta}{ba}+\frac{\xi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu\right)\eta}{ba},\ -\frac{\eta^2}{a^2}+\frac{(1-\xi)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu\right)\xi}{b^2},\ \frac{(1-\xi)\nu\eta}{ba}-\frac{\xi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu\right)\eta}{ba}\Bigg],$$

$$\Bigg[-\frac{(1-\eta)\nu\xi}{ab}-\frac{(1-\xi)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu\right)\eta}{ba},\ -\frac{(1-\xi)\xi}{b^2}-\frac{(1-\eta)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu\right)\eta}{a^2},\ \frac{(1-\eta)\nu\xi}{ab}-\frac{\xi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu\right)\eta}{ba},\ -\frac{\xi^2}{b^2}+\frac{(1-\eta)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu\right)\eta}{a^2},\ \frac{\xi\nu\eta}{ba}+\frac{\xi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu\right)\eta}{ba},\ \frac{\xi^2}{b^2}+\frac{\eta^2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu\right)}{a^2},\ -\frac{\xi\nu\eta}{ba}+\frac{(1-\xi)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu\right)\eta}{ba},\ \frac{(1-\xi)\xi}{b^2}-\frac{\eta^2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu\right)}{a^2}\Bigg],$$

$$\Bigg[\frac{(1-\eta)\eta}{a^2}-\frac{(1-\xi)^2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu\right)}{b^2},\ \frac{(1-\xi)\nu\eta}{ba}-\frac{(1-\xi)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu\right)(1-\eta)}{ba},\ -\frac{(1-\eta)\eta}{a^2}-\frac{(1-\xi)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu\right)\xi}{b^2},\ \frac{\xi\nu\eta}{ba}+\frac{(1-\xi)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu\right)(1-\eta)}{ba},\ -\frac{\eta^2}{a^2}+\frac{(1-\xi)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu\right)\xi}{b^2},\ -\frac{\xi\nu\eta}{ba}+\frac{(1-\xi)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu\right)\eta}{ba},\ \frac{\eta^2}{a^2}+\frac{(1-\xi)^2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu\right)}{b^2},\ -\frac{(1-\xi)\nu\eta}{ba}-\frac{(1-\xi)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu\right)\eta}{ba}\Bigg],$$

$$\Bigg[-\frac{(1-\eta)\nu(1-\xi)}{ab}+\frac{(1-\xi)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu\right)\eta}{ba},\ -\frac{(1-\xi)^2}{b^2}+\frac{(1-\eta)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu\right)\eta}{a^2},\ \frac{(1-\eta)\nu(1-\xi)}{ab}+\frac{\xi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu\right)\eta}{ba},\ -\frac{(1-\xi)\xi}{b^2}-\frac{(1-\eta)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu\right)\eta}{a^2},\ \frac{(1-\xi)\nu\eta}{ba}-\frac{\xi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu\right)\eta}{ba},\ \frac{(1-\xi)\xi}{b^2}-\frac{\eta^2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu\right)}{a^2},\ -\frac{(1-\xi)\nu\eta}{ba}-\frac{(1-\xi)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu\right)\eta}{ba},\ \frac{(1-\xi)^2}{b^2}+\frac{\eta^2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu\right)}{a^2}\Bigg]\Bigg]$$

Endi har bir elementni berilgan oraliqda integrallab hisoblaymiz.

$$K_{11}=\int_0^1\int_0^1\left[\left(\frac{1-\eta}{a}\right)^2+\frac{(1-\nu)}{2b^2}(1-\xi)^2\right]d\xi d\eta=\frac{1}{6}\left(\frac{2}{a^2}+\frac{1-\nu}{b^2}\right)$$

.

.

.

.

.

$$K_{88}=\int_0^1\int_0^1\left[\frac{(1-\nu)}{2}\left(\frac{\eta}{a}\right)^2+\frac{(1-\xi)^2}{b^2}\right]d\xi d\eta=\frac{1}{6}\left(\frac{2}{b^2}+\frac{1-\nu}{a^2}\right)$$

Natijada quyidagi ifodaga ega bo’lamiz.

$$K:=\left[\begin{matrix}
\frac{1}{3a^2}+\frac{1}{3}\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu}{b^2}, & \frac{5}{8}\frac{1+\nu}{ab}+\frac{1}{2}\frac{-1-\nu}{ab}, & -\frac{1}{3a^2}+\frac{1}{6}\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu}{b^2}, & \frac{1}{4}\frac{\nu}{ab}-\frac{5}{4}\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu}{ab}-\frac{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\nu}{ab}, & -\frac{1}{6a^2}-\frac{1}{6}\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu}{b^2}, & -\frac{1}{4}\frac{\nu}{ab}-\frac{1}{4}\frac{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\nu}{ab}-\frac{1}{2}\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu}{ab}, & \frac{1}{6a^2}-\frac{1}{3}\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu}{b^2}, & -\frac{1}{4}\frac{\nu}{ab}+\frac{1}{4}\frac{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\nu}{ab}+\frac{1}{2}\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu}{ab} \\
\frac{5}{8}\frac{1+\nu}{ab}+\frac{1}{2}\frac{-1-\nu}{ab}, & \frac{1}{3}\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu}{a^2}+\frac{1}{3b^2}, & -\frac{1}{4}\frac{\nu}{ab}+\frac{1}{4}\frac{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\nu}{ab}+\frac{1}{2}\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu}{ab}, & -\frac{1}{3}\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu}{a^2}+\frac{1}{6b^2}, & -\frac{1}{4}\frac{\nu}{ab}-\frac{1}{4}\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu}{ab}, & -\frac{1}{6}\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu}{a^2}-\frac{1}{6b^2}, & \frac{1}{4}\frac{\nu}{ab}-\frac{1}{4}\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu}{ab}, & \frac{1}{3}\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu}{a^2}+\frac{1}{3b^2} \\
-\frac{1}{3a^2}+\frac{1}{6}\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu}{b^2}, & \frac{1}{3a^2}+\frac{1}{3}\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu}{b^2}, & \frac{1}{3a^2}+\frac{1}{3}\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu}{b^2}, & -\frac{1}{4}\frac{\nu}{ab}-\frac{1}{4}\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu}{ab}, & \frac{1}{6a^2}-\frac{1}{3}\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu}{b^2}, & \frac{1}{4}\frac{\nu}{ab}-\frac{1}{4}\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu}{ab}, & -\frac{1}{6a^2}-\frac{1}{6}\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu}{b^2}, & \frac{1}{4}\frac{\nu}{ab}+\frac{1}{4}\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu}{ab} \\
\frac{1}{4}\frac{\nu}{ab}-\frac{1}{4}\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu}{ab}, & -\frac{1}{3}\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu}{a^2}+\frac{1}{6b^2}, & -\frac{1}{4}\frac{\nu}{ab}-\frac{1}{4}\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu}{ab}, & \frac{1}{3}\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu}{a^2}+\frac{1}{3b^2}, & -\frac{1}{4}\frac{\nu}{ab}+\frac{1}{4}\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu}{ab}, & \frac{1}{6}\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu}{a^2}-\frac{1}{3b^2}, & \frac{1}{4}\frac{\nu}{ab}+\frac{1}{4}\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu}{ab}, & -\frac{1}{6}\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu}{a^2}-\frac{1}{6b^2} \\
-\frac{1}{6a^2}-\frac{1}{6}\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu}{b^2}, & -\frac{1}{4}\frac{\nu}{ab}-\frac{1}{4}\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu}{ab}, & \frac{1}{6a^2}-\frac{1}{3}\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu}{b^2}, & -\frac{1}{4}\frac{\nu}{ab}+\frac{1}{4}\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu}{ab}, & \frac{1}{3a^2}+\frac{1}{3}\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu}{b^2}, & \frac{1}{4}\frac{\nu}{ab}+\frac{1}{4}\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu}{ab}, & \frac{1}{4}\frac{\nu}{ab}+\frac{1}{4}\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu}{ab}, & \frac{1}{4}\frac{\nu}{ab}-\frac{1}{4}\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu}{ab} \\
-\frac{1}{4}\frac{\nu}{ab}-\frac{1}{4}\frac{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\nu}{ab}-\frac{1}{2}\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu}{ab}, & -\frac{1}{6}\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu}{a^2}-\frac{1}{6b^2}, & \frac{1}{4}\frac{\nu}{ab}-\frac{1}{4}\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu}{ab}, & \frac{1}{6}\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu}{a^2}-\frac{1}{3b^2}, & \frac{1}{4}\frac{\nu}{ab}+\frac{1}{4}\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu}{ab}, & \frac{1}{3}\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu}{a^2}+\frac{1}{3b^2}, & -\frac{1}{4}\frac{\nu}{ab}+\frac{1}{4}\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu}{ab}, & -\frac{1}{3}\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu}{a^2}+\frac{1}{6b^2} \\
\frac{1}{6a^2}-\frac{1}{3}\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu}{b^2}, & \frac{1}{4}\frac{\nu}{ab}-\frac{1}{4}\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu}{ab}, & -\frac{1}{6a^2}-\frac{1}{6}\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu}{b^2}, & \frac{1}{4}\frac{\nu}{ab}+\frac{1}{4}\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu}{ab}, & \frac{1}{4}\frac{\nu}{ab}+\frac{1}{4}\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu}{ab}, & -\frac{1}{4}\frac{\nu}{ab}+\frac{1}{4}\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu}{ab}, & \frac{1}{3a^2}+\frac{1}{3}\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu}{b^2}, & -\frac{1}{4}\frac{\nu}{ab}-\frac{1}{4}\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu}{ab} \\
-\frac{1}{4}\frac{\nu}{ab}+\frac{1}{4}\frac{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\nu}{ab}+\frac{1}{2}\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu}{ab}, & \frac{1}{3}\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu}{a^2}+\frac{1}{3b^2}, & \frac{1}{4}\frac{\nu}{ab}+\frac{1}{4}\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu}{ab}, & -\frac{1}{6}\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu}{a^2}-\frac{1}{6b^2}, & \frac{1}{4}\frac{\nu}{ab}-\frac{1}{4}\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu}{ab}, & -\frac{1}{3}\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu}{a^2}+\frac{1}{6b^2}, & -\frac{1}{4}\frac{\nu}{ab}-\frac{1}{4}\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu}{ab}, & \frac{1}{3}\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu}{a^2}+\frac{1}{3b^2}
\end{matrix}\right]$$

Masalan element kvadrat shaklda bo’lish uchun a=b va jismning Puasson koeffisentini $\nu=0,3$ inobatga olib soddalashtirsak:

$$\begin{bmatrix}
0.4945054946 & 0.1785714286 & -0.3021978022 & -0.01373626374 & -0.2472527473 & -0.1785714286 & 0.05494505492 & 0.01373626374 \\
0.1785714286 & 0.4945054946 & 0.01373626374 & 0.05494505498 & -0.1785714286 & -0.2472527473 & -0.01373626374 & 0.4945054946 \\
-0.3021978022 & 0.01373626374 & 0.4945054946 & -0.1785714286 & 0.05494505492 & -0.01373626374 & -0.2472527473 & 0.1785714286 \\
-0.01373626374 & 0.05494505498 & -0.1785714286 & 0.4945054946 & 0.01373626374 & -0.3021978022 & 0.1785714286 & -0.2472527473 \\
-0.2472527473 & -0.1785714286 & 0.05494505492 & 0.01373626374 & 0.4945054946 & 0.1785714286 & -0.3021978022 & -0.01373626374 \\
-0.1785714286 & -0.2472527473 & -0.01373626374 & -0.3021978022 & 0.1785714286 & 0.4945054946 & 0.01373626374 & 0.05494505498 \\
0.05494505492 & -0.01373626374 & -0.2472527473 & 0.1785714286 & -0.3021978022 & 0.01373626374 & 0.4945054946 & -0.1785714286 \\
0.01373626374 & 0.4945054946 & 0.1785714286 & -0.2472527473 & -0.01373626374 & 0.05494505498 & -0.1785714286 & 0.4945054946
\end{bmatrix}$$

$$\frac{E}{b^2}\cdot\begin{bmatrix}
0,4945054946 & 0,1785714286 & -0,3021978022 & -0,01373626374 & -0,2472527473 & -0,1785714286 & 0,05494505492 & 0,01373626374 \\
0,1785714286 & 0,49450554946 & 0,01373626374 & 0,05494505498 & -0,1785714286 & -0,2472527473 & -0,0173626374 & 0,4945054946 \\
-0,3021978022 & 0,01373626374 & 0,49450554946 & -0,01373626374 & 0,05494505498 & -0,01373626374 & -0,2472527473 & 0,1785714286 \\
-0,01373626374 & 0,05494505498 & -0,1785714286 & 0,49450554946 & 0,01373626374 & -0,3021978022 & 0,1785714286 & -0,2472527473 \\
-0,2472527473 & -0,1785714286 & 0,05494505498 & 0,01373626374 & 0,49450554946 & 0,1785714286 & -0,2472527473 & -0,01373626374 \\
-0,1785714286 & -0,2472527473 & -0,01373626374 & -0,2472527473 & 0,1785714286 & 0,49450554946 & -0,3021978022 & 0,05494505498 \\
0,05494505492 & -0,0173626374 & -0,2472527473 & 0,1785714286 & -0,2472527473 & 0,01373626374 & 0,49450554946 & -0,1785714286 \\
0,01373626374 & 0,4945054946 & 0,1785714286 & -0,2472527473 & -0,01373626374 & 0,05494505498 & -0,1785714286 & 0,49450554946
\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} u1 \\ v1 \\ u2 \\ v2 \\ u3 \\ v3 \\ u4 \\ v4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ F_{3x} \\ F_{3y} \\ F_{4x} \\ F_{4y} \end{bmatrix}$$

Ushbu tenglamalar sistemasini bog’lanishlarni va ta’sir kuchlarni boshlang’ich holatini inobatga olib yechamiz. Ixtiyoriy bog’lanishda qattiqlik matrisasi o’zgarmasligi bir xil tipdagi turli masalalarni yechishda qulay hisoblanadi.

Nazorat savollari

1. Mexanika masalalarini yechishda qanday metodlardan ko’proq foydalaniladi?.
2. Chekli elementlar metodining ishlash prinsipi nimaga asoslanadi?.
3. Izotrop chiziqli elastik jism uchun Guk qonuni qanday k**o‘**rinishda b**o‘**ladi?
4. Deformatsiya tenzorini ko‘chish vektori orqali hisoblash formulasini vektorlar ko’paytmasi ko’rinishida tasvirlab yozing

2-MAVZU: Tutash muxitlarning turli modellari tahlili.

REJA:

2.1. **Ideal suyuqlik harakatining to'la tenglamalari sistemasi*;***
2.2. **. Yopishqoq suyuqlik va elastik jism modellari*;***
2.3. **Tutash muhit klassik masalasini qo'yilishi xaqida**

Tayanch so'zlar *Tutash muhit , gaz, suyuqlik, mexanika, postulat, uziliksizlik, massa, zichlik, Eyler o'zgaruvchilari, Lagranj koordinatalari, harakat miqdorining saqlanish qonuni, muvozanat tenglamalari, kuchlanishlar tenzori, bosh o'qlar va bosh kuchlanishlar*

2.1. **Ideal suyuqlik harakatining to'la tenglamalari sistemasi*;***

Jismlarning tutash muhitlarga mansubligini tajribalar asosida tekshirish mumkin. Suyuqliklar, gazlar va deformatsiyalanadigan qattiq jismlar tutash muhit sifatida eng umumiy fizik xususiyatlarga ega bo'lishlaridan tashqari, ularning har birlariga xos farqlari mavjudki, ularni e'tiborga olgan holda tahlil etish ham tutash muhit mexanikasining asosiy vazifalaridandir. Ichki va tashqi kuchlarga, kuchlanishlarga tutash muhit zarralari reaksiyalari turlicha bo'lishi tabiiydir. Masalan, suv va temir bo'laklari og'irlik maydonida bir-biridan nihoyatda katta farq qila oladigan mexanik ko'chishlarga, siljishlarga ega bo'lishi kundalik hayotda ma'lum: suyuqlik zarralarida har bir elementar maydonchaga tegishli urinma kuchlanishlar temirdagiga qaraganda nihoyatda kichik yoki nolga tengligini elementar fizika kursi asosida, oddiy tajriba asosida ta'kidlash mumkin. Albatta, tutash muhitlar sifatida faqatgina suyuqlik va gazlar, ma'lum qonuniyatlar asosida deformatsiyalanadigan qattiq jismlargina emas, balki murakkab ichki kuchlanganlik, u bilan bog'liq bo'lgan va vaqt o'tishiga ham bog'liq bo'lgan jarayonlar tekshirilishi mumkin.

Bu bobda tutash muhitning eng sodda modellari sifatida tan olingan va shuning uchun ham klassik modellar deb ataluvchi tutash muhit modellari bilan ish ko'ramiz. Har bir model uchun ta'rif berish asosida ularning boshqa tutash muhit modellaridan farqi va ta'sir doirasi ajratiladi, ular uchun mexanika qonunlari tatbiqi asosida asosiy tenglamalari keltirib chiqariladi. Olingan tenglamalar massaning saqlanish qonuni, harakat miqdori, uning momenti o'zgarishi tenglamalari va, umuman olganda, keyingi boblarda o'rganiladigan termodinamika qonunlaridan kelib chiqadigan munosabatlar asosidagi tenglamalar sistemasidan iborat bo'lib, bu tenglamalar real fizik jarayonlarga mos keluvchi chegaraviy va boshlang'ich shartlarni ifodalovchi tenglamalar bilan birgalikda yagona sistemani tashkil etadi.

Bu bobda termodinamik jarayonlar o'zgarmas bo'lgan hol uchun tutash muhitning eng sodda modellari - klassik modellari o'rganiladi. Bu modellarni tuzish yopiq tenglamalar sistemasini tuzishdan iboratdir.

Ideal suyuqlik va gazlar

Ideal suyuqlik va gazlar uchun ushbu ta’rifni berish mumkin: muvozanat va harakat jarayoni uchun har bir ko‘rilayotgan $\vec{P}_n$ kuchlanish vektori shu kuchlanish aniqlangan birlik normali $\vec{n}$ bo‘lgan ixtiyoriy yuzaga normal chizig‘i yo‘nalishida bo‘lgan tutash muhitga ***ideal suyuqlik (gaz)*** deyiladi.

Ta’rifdan ideal suyuqlik va gazlarda $\vec{P}_n$ kuchlanishning $\vec{n}$ ga tik yo‘nalishga proeksiyasi - urunma tashkil etuvchisi nolga teng bo‘ladi. Ta’rifdan $\vec{P}_n = \lambda \cdot \vec{n}$ ligi kelib chiqadiki, bu yerda λ skalyar miqdor va u noldan farqli deb olinishi kerak. Umuman olganda, λ musbat va manfiy bo‘lishi mumkin. Lekin ideal suyuqlik (gazlar) odatda siqilgan holda uchrashini e’tiborga olsak $\lambda < 0$ bo‘ladi va uni $\lambda = -P$ (P>0 - bosim deb ataladi) deb belgilanadi. Bunday tutash muhit ixtiyoriy nuqtasida harakat va muvozanat onlarida kuchlanish sirti sferadan iborat bo‘lib, bosh kuchlanishlar uzaro teng va $p_1 = p_2 = p_3 = -p$ bo‘ladi.

Shunday qilib, kuchlanish tenzori ushbu ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$\begin{Bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{Bmatrix} \tag{1}$$

Bunday tenzorga shar tenzori deyiladi, ko‘rish qiyin emaski, ushbu formulal.ar o‘rinli bo‘ladi:

$$P^{ij} = -p \cdot \delta^{ij}, \; P_{ij} = -p \cdot \delta_{ij} \tag{2}$$

Ideal suyuqlik va gazlarning Dekart koordinatalari sistemasidagi harakat differensial tenglamalarini chiqaraylik. Buning uchun ixtiyoriy tutash muhitning eyler koordinatalaridagi ushbu tenglamasini olaylik:

$$\rho \cdot \frac{d\upsilon_i}{dt} = \rho \cdot F_i + \frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j} \tag{3}$$

(2) ni (3) ga qo‘yib, topamiz:

$$\rho \cdot \frac{d\upsilon_i}{dt} = \rho \cdot F_i + \frac{\partial p}{\partial x_i} \tag{4}$$

(4) ni birlik $\vec{e}_i$ bazis vektorga ko‘paytirib qo‘shsak ushbu vektor tenglamaga ega bo‘lamiz:

$$\rho \cdot \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \rho \cdot \vec{F} - gradp \tag{5}$$

(5) yoki (6) tenglama ideal suyuqlik (gaz) lar uchun E***ylerning harakat differensial tenglamasi*** deyiladi. Bu tenglama eyler koordinatalaridagi ushbu differensial tenglamalar sistemasidan iboratdir:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \upsilon_1}{\partial t}+\upsilon_1\frac{\partial \upsilon_1}{\partial x_1}+\upsilon_2\frac{\partial \upsilon_1}{\partial x_2}+\upsilon_3\frac{\partial \upsilon_1}{\partial x_3}=F_1-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x_1}\\
&\frac{\partial \upsilon_2}{\partial t}+\upsilon_2\frac{\partial \upsilon_2}{\partial x_1}+\upsilon_2\frac{\partial \upsilon_2}{\partial x_2}+\upsilon_3\frac{\partial \upsilon_2}{\partial x_3}=F_2-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x_2}.\\
&\frac{\partial \upsilon_3}{\partial t}+\upsilon_1\frac{\partial \upsilon_3}{\partial x_1}+\upsilon_2\frac{\partial \upsilon_3}{\partial x_2}+\upsilon_3\frac{\partial \upsilon_3}{\partial x_3}=F_3-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x_3}
\end{aligned} \qquad (6)$$

Masala. Eyler koordinatalarida $\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}=\frac{\partial\vec{\upsilon}}{\partial t}+grad\frac{\upsilon^2}{2}+2[\vec{\omega}\times\vec{\upsilon}]$ bo‘lishi isbotlansin. Bu yerda $\vec{\omega}=\frac{1}{2}rot\vec{\upsilon}$ - uyurma vektoridir.

Agar bu masaladan foydalansak, (6) tenglama o‘rniga ushbu tenglamani ham olish mumkin:

$$\frac{\partial\vec{\upsilon}}{\partial t}+\frac{1}{2}grad\upsilon^2+[rot\vec{\upsilon}\times\vec{\upsilon}]=\vec{F}-\frac{1}{\rho}gradp \qquad (7)$$

(7) tenglama ideal suyuqlik (gaz) harakati tenglamasining Lemb-Gromeko shaklidagi vektor differensial tenglamasi deyiladi.

Ideal suyuqlik va gazlar harakati o‘rganilganda (6) yoki (7) tenglamalardan maqsadga muvofiq holda foydalanish mumkin.

Yuqoridagi tenglamalar qatoriga massaning saqlanish qonuni tenglamasini qo‘shib qaraylik. U holda tenglamalar sistemasi uchta (7) tenglama va ushbu tenglamadan iborat bo‘ladi:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+div(\rho\vec{\upsilon})=0 \qquad (8)$$

Massaviy kuchlar zichligi $\vec{F}$ ma’lum desak, (6) va (8) tenglamalar sistemasida v_1, v_2, v_3, p va ρ lar noma’lumlardan iborat bo‘lib, tenglamalar soni to‘rtta, noma’lumlar soni esa beshta bo‘ladi. Tenglamalar sistemasi yopiq sistemadan iborat bo‘lishi uchun, ravshanki, yana bitta tenglama etishmaydi.

Endi ideal suyuklik va gaz tenglamalari sistemasi yopiq bo‘lgan ayrim hollarni ko‘raylik:

a) bosim va zichliklar o‘rtasida har bir muhit zarrasi uchun funksional munosabat o‘rnatilgan hol - $p=f(\rho)$. Agar bu munosabat yuqorida keltirilgan tenglamalar sistemasi safiga keltirilsa, u holda tenglamalar sistemasi yopiq bo‘ladi. Bunday munosabat mavjud bo‘lgan jarayon ***barotrop jarayon*** deyiladi. $p=R\cdot\rho\cdot T$ tenglamasiga bo‘ysinuvchi elementar fizika kursidan ma’lum bo‘lgan gaz holati tenglamasi bunga misol bo‘la oladi (bu yerda R va T lar o‘zgarmas miqdorlar).

b) $\frac{dp}{dt}=0$ bo‘lgan hol. Bu holda massaning saqlanish tenglamasi $div\vec{\upsilon}=0$

bo‘ladi. Bu ikki tenglamani eyler tenglamalari bilan birgalikda olinganda yopiq tenglamalar sistemasi hosil bo‘ladi. Bunday holat har bir fizik zarra zichligi vaqt o‘tishi bilan o‘zgarmas, deb olinishini bildiradi.

Yuqorida keltirilgan yopiq tenglamalar sistemasi chekli yoki cheksiz sohalarda ko‘riladi va ularni integrallashda soha chegarasidagi shartlar va izlanuvchi funksiyalarni topish uchun boshlang‘ich shartlar berilishi talab etiladi.

2.2. Yopishqoq suyuqlik va elastik jism modellari*;*

Tutash muhitning klassik modellaridan yana biri chiziqli elastik jism deb qaraladigan deformatsiyalanuvchi tutash muhit modelidir. Chiziqli elastik jism umumiy holda ta’rif berish mumkin bo‘lgan elastik jismlarning xususiy holi bo‘lib, tutash muhit ayrim zarrasi yoki ko‘rilayotgan muhit zarralaridan tashkil topgan uzluksiz soha fizik nuqtalari uchun kuchlanish tenzori elementlari deformatsiya tenzori va boshqa o‘zgaruvchilarning chiziqli funksiyasi bo‘ladi. elastik jism modeli ta’rifini berishdan ilgari deformatsiyalanuvchi qattiq jismlar haqida umumiy tasavvurimizni kengaytirishga harakat qilaylik. Jism bo‘lagi qo‘yilgan tashqi va ichki kuchlar ta’sirida o‘zining hajmi va shaklini o‘zgartirishi va bu ta’sirlar yo‘qotilsa, u o‘zining dastlabki holatiga qaytishi mumkin. Bunday jism e***lastik jism*** deyiladi. Jismlarning uning deformatsiyalanishiga sabab bo‘lgan ta’sirlari olib tashlanishi bilan, o‘zining dastlabki shakli va hajmiga qayta olishi xossasi jism elastiklik xossasi deyiladi, yo‘qotilgan deformatsiya esa elastik deformatsiyani ifodalaydi. Turli muhitlarda tashqi kuchlar olib tashlanganda o‘z holatiga to‘la qayta olmaydigan jarayonlar ham mavjudligini kuzatish mumkin, bunday jism elastik jism bo‘la olmaydi: yuksizlanish jarayonida hosil bo‘lgan deformatsiya qoldiq deformatsiya bo‘ladi va bunday deformatsiya plastik deformatsiya deyiladi va jismni elastik jism modeli bilan ifodalab bo‘lmaydi.

Elastik jism modelining ta’rifini beraylik: kuchlanish tenzori elementlari jism zarrasida ushbu $p^{ij} = f^{ij}(\varepsilon_{\alpha\beta}, g^{\alpha\beta}, T, \chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n)$ bir qiymatli munosabat bilan aniqlansa, bunday muhit elastik jism deyiladi. Bu erda $g^{\alpha\beta}$ - metrik tenzor elementlari, T - harorat, χ_i lar jismni xarakterlovchi parametrlar.

Tajribalar shuni ko‘rsatadiki, ko‘pgina qattiq jismlar uchun kuchlanish tenzori elementlari deformatsiya tenzori elementlari va haroratning o‘zgarishi bilan chiziqli munosabatda bo‘ladi. Bunday chiziqli munosabat Guk qonuni deyiladi. Formal nuqtayi nazardan deformatsiyalanish boshlanishidan oldin, ya’ni dastlabki paytda jism harorati ko‘rilayotgan zarra uchun o‘zgarmas va o‘z qiymatini saqlaydi va shu paytda $p^{ij} = 0, \varepsilon_{ij} = 0$ deylik. U holda $p^{ij} = f^{ij}(\varepsilon_{\alpha\beta}, g^{\alpha\beta})$ ni teylor qatoriga yoyib, ε_{ij} lar cheksiz kichik miqdorlar deb olib, ushbu munosabatni - umumlashgan Guk qonuni deb ataluvchi formulani yoza olamiz:

$$p^{ij} = A^{ij\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta} \tag{9}$$

(9) formula elastik jism biror zarrasi uchun yozilgan bo'lib, muhit turli nuqtalarida $A^{ij\alpha\beta}$ lar o'zgarishi mumkin. $A^{ij\alpha\beta}$ lar T va χ_i larga ham bog'liq bo'lishi, T va χ_i lar turli zarralar uchun turlicha o'zgarishi yoki turli o'zgarmas miqdorlarga teng bo'lishi mumkin. Shunday qilib, $A^{ij\alpha\beta}$ lar muhit turli qismlari (zarralari) uchun turlicha o'zgarmaslarni berishi mumkin. Bunday elastik jism bir jinsli bo'lmagan elastik jism deyiladi, aks holda jism bir ljinsli elastik jism deyiladi.

Umumlashgan *Guk qonunini* ifodalovchi (3.10) ifodadagi $A^{ij\alpha\beta}$ rangi 4 ga teng tenzorligi p^{ij} va ε_{ij} lar tenzorligidan ravshandir va bu tenzor elementlari soni 81 tadir. p^{ij}=p^{ji} va $\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\beta\alpha}$ ligidan (3.10) ifodada $A^{ij\alpha\beta}$ lar soni 36 tadan iboratligini ko'rish qiyin emas.

Barcha yo'nalishlar bo'yicha jism xossalari bir xil bo'lsa bu jism izotrop, aks holda anizotrop deyiladi. Ushbu munosabatlarni yoza olamiz:

$$\begin{gathered} p^{ij} = A^{ij11}\cdot\varepsilon_{11} + A^{ij22}\cdot\varepsilon_{22} + A^{ij33}\cdot\varepsilon_{33} + (A^{ij12} + A^{ij21})\cdot\varepsilon_{12} + \\ +(A^{ij13} + A^{ij31})\cdot\varepsilon_{13} + (A^{ij23} + A^{ij32})\cdot\varepsilon_{23} \end{gathered} \tag{10}$$

$$\begin{gathered} p^{ji} = A^{ji11}\cdot\varepsilon_{11} + A^{ji22}\cdot\varepsilon_{22} + A^{ji33}\cdot\varepsilon_{33} + (A^{ji12} + A^{ji21})\cdot\varepsilon_{12} + \\ +(A^{ji13} + A^{ji31})\cdot\varepsilon_{13} + (A^{ji23} + A^{ji32})\cdot\varepsilon_{23} \end{gathered} \tag{11}$$

(10) va (11) munosabatlarda chap va o'ng tomonlari o'zaro tengligidan ushbu munosabatlarni keltirib chiqaramiz:

$$A^{ij11} = A^{ji11},\ A^{ij22} = A^{ji22},\ A^{ij33} = A^{ji33} \tag{12}$$

$$\begin{gathered} A^{ij12} + A^{ij21} = A^{ji12} + A^{ji21} \\ A^{ij13} + A^{ij31} = A^{ji13} + A^{ji31} \\ A^{ij23} + A^{ij32} = A^{ji23} + A^{ji32} \end{gathered} \tag{13}$$

(12) va (13) asosida, umumiyatga chek qo'ymagan holda, ushbu munosabatlarni olamiz:

$$A^{ij\alpha\beta} = A^{ji\alpha\beta}, A^{ij\alpha\beta} = A^{ij\beta\alpha} \tag{14}$$

Shunday qilib, eng umumiy holdagi anizotrop chiziqli elastik jism uchun $A^{ij\alpha\beta}$ lar soni 36 ta bo'ladi.

Izotrop muhit uchun Guk qonuni

Dekart koordinatalar sistemasini ixtiyoriy ravishda o'zgartirganda elastik jism xossalarini aniqlovchi $A^{ij\alpha\beta}$ lar o'zgarmasdan qolsa, bunday jism izotrop elastik jism deyiladi va $A^{ij\alpha\beta}$ izotrop to'rtinchi rangli tenzor deyiladi. endi δ_{ij} -birlik izotrop tenzorligi asosida olingan ushbu rangi to‘rtga teng bo‘lgan $\delta_{ij} \cdot \delta_{kl}$ va $\delta_{ik} \cdot \delta_{jl} + \delta_{il} \cdot \delta_{kj}$ izotrop tenzorlarni olaylik. Ixtiyoriy izotrop tenzor $A^{ij\alpha\beta}$ ni ularning chiziqli kombinatsiyasi sifatida, ya’ni

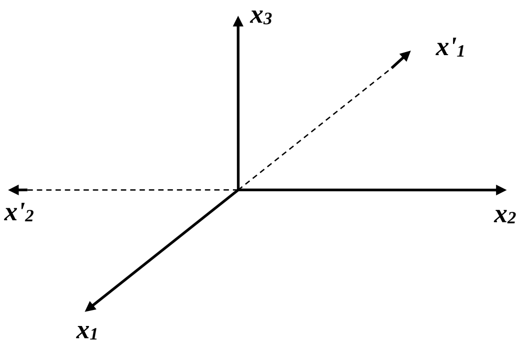
$$A^{ij\alpha\beta} = \lambda \cdot \delta_{ij} \cdot \delta_{kl} + \mu \cdot (\delta_{ik} \cdot \delta_{jl} + \delta_{il} \cdot \delta_{jk}) \qquad (15)$$

ko‘rinishida yozish mumkinligini isbotlaylik. (3.11) da *i* va *j* indekslarni *1, 2, 3* lar bo‘yicha qo‘yib o‘qlarni almashtirishdan p^{ij} lar o‘zgarmas bo‘lishi kerakligini e’tiborga olsak, masalan, ushbu munosabatlarni hosil qilamiz:

$$\begin{gathered} A^{1122} = A^{1133} = A^{2211} = A^{2233} = A^{3311} = A^{3322} \\ A^{1212} = A^{1313} = A^{2121} = A^{2323} = A^{3131} = A^{3232} \end{gathered} \qquad (16)$$

Endi x_1, x_2, x_3 o‘rniga akslantirib hosil qilingan $x_1' = -x_1$, $x_2' = x_2$, $x_3' = x_3$ yangi koordinatalar sistemasini olaylik. $A^{ij\alpha\beta}$ tenzorning x_i koordinatalaridan x_i' koordinatalariga o‘tishda $A'^{ij\alpha\beta}$ bo‘lib o‘zgarishi tenzor ta’rifidan ushbu formulaga ko‘ra almashadi:

$$A'^{ij\alpha\beta} = \frac{\partial x_i'}{\partial x_p} \cdot \frac{\partial x_j'}{\partial x_q} \cdot \frac{\partial x_\alpha'}{\partial x^\lambda} \cdot \frac{\partial x_\beta'}{\partial x^\mu} \cdot A^{pq\lambda\mu} \qquad (17)$$



4-расм

Agar to‘gri burchakli koordinatalar sistemasini -o‘q atrofida *180⁰* ga bursak (masalan *i=3* da $x_1' = -x_1$, $x_2' = -x_2$, $x_3' = x_3$ bo‘ladi):

$$A'^{ij\alpha\alpha} = -A^{ij\alpha\alpha} \quad (i \neq j) \qquad (18)$$

bo‘ladi. (17) va (18) asosida $i \neq j$ da

$$A^{ij\alpha\alpha} = 0 \qquad (19)$$

kelib chiqadi. Agar to‘g‘ri burchakli koordinatalar sistemasini i o‘qqa nisbatan akslantirsak (masalan *i=1* da $x_1' = -x_1$, $x_2' = x_2$, $x_3' = x_3$),

$$\frac{\partial x_j'}{\partial x_q} = \delta_q^j$$

$$A'^{1j\alpha\beta} = -\delta_q^j \cdot \delta_\lambda^\alpha \cdot \delta_\mu^\beta \cdot A^{iq\lambda\mu} = -A^{1j\alpha\beta} \qquad (20)$$

Ikkinchi tomondan $A'^{1j\alpha\beta} = A^{1j\alpha\beta}$

Bu munosabatlar asosida *i=1* o‘q teskari yo‘nalishga almashtirishdan

$$A^{11\alpha\beta} = A^{12\alpha\beta} = A^{13\alpha\beta} = 0, \ (\alpha \neq \beta) \qquad (21)$$

yekani kelib chiqadi. Xuddi shunday akslantirishni *i=2* va *i=3* uchun ham ko‘rish mumkin va tegishli $A^{ij\alpha\beta}$ lar nolga teng ekani kelib chiqasi. Natijada noldan farqli elementlar A^{1111}, A^{1122} va A^{1212} dan iborat bo‘ladi.

Endi ushbu chiziqli almashtirishni ko‘raylik:

$$x'_j = (\delta_{ij} + d\theta \cdot \varepsilon_{3ij}) \cdot x_i \tag{22}$$

(22) almashtirish yangi x'_j koordinatalar sistemasini eski koordinatalar sistemasi x_i ni x_3 o‘qi atrofida cheksiz kichik $d\theta$ burchakka burish natijasida hosil qilinishini ko‘rsatadi. U holda

$$A'^{pqrs} = A^{pqrs} + d\theta \cdot \left\lfloor \varepsilon_{3ip} \cdot A^{iqrs} + \varepsilon_{3iq} \cdot A^{pirs} + \varepsilon_{3ir} \cdot A^{pqis} + \varepsilon_{3is} \cdot A^{pqri} \right\rfloor \tag{23}$$

(23) ifodani qisqartirgandi $d\theta$ ga nisbatan yuqori tartibli cheksiz kichik miqdorlar tashlab yuborilgan A^{pqrs} izotrop tenzorligidan $A'^{pqrs} = A^{pqrs}$ bo‘ladi. U holda (21) dan

$$-A^{2222} + A^{1122} + A^{1212} + A^{1221} = 0$$

(14) ning ikkinchi ifodasini e’tiborga olsak

$$A^{2222} = A^{1122} + 2A^{1212}$$

bo‘lib, $A^{1122} = \lambda,\ A^{1212} = \mu$ belgilash kiritsak $A^{2222} = \lambda + 2\mu$ bo‘ladi va demak,

$$A^{ijkl} = \lambda \cdot \delta_{ij} \cdot \delta_{kl} + \mu \cdot (\delta_{ik} \cdot \delta_{jl} + \delta_{il} \cdot \delta_{jk}) \tag{24}$$

deb yozish mumkin.

Ixtiyoriy egri chiziqli koordinatalar sistemasida (3.26) formula quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$A^{ijkl} = \lambda \cdot g^{ij} \cdot g^{kl} + \mu \cdot (g^{ik} \cdot g^{jl} + g^{il} \cdot g^{jk}) \tag{25}$$

Shunday qilib, Dekart koordinatalari sistemasida izotrop chiziqli elastik jism uchun ***Guk qonuni*** quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$p^{ij} = \lambda \cdot (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \cdot \delta_{ij} + 2\mu \cdot \varepsilon_{ij} \tag{26}$$

2.3.**Tutash muhit klassik masalasini qo‘yilishi xaqida**

«Sodda masalalar» deb ataluvchi tutash muhit masalalari o‘z ichiga tutash muhit zarralari uchun temperatura o‘zgarmas ($T=T_0$), issiqlik energiyasi, kimyoviy va elektrodinamik maydon va uning o‘zgarishlari e’tiborga olinmagan holda ko‘rish mumkin bo‘lgan jarayonlarni o‘z ichiga oladi. Bunday jarayonlar va ular bilan bog‘liq ravishda tutash muhitning eng sodda modellari – ideal suyuqliklar (gazlar), chiziqli elastik jismlar va yopishqoq suyuqliklar modellari-klassik modellar tutash muhitning eng rivoj topgan va amaliy masalalar yechishda keng qo‘llaniladigan sohalaridir. Ma’lumki, klassik modellar uchun $p^{ij} = p^{ji}$ kuchlanish tenzori simmetrik va bu natija zarralar uchun ichki momentlar nolga teng, deb olinishi tufayli, harakat miqdori momenti o‘zgarishi teoremasidan kelib chiqadi. Bu yerda elastiklik nazariyasi esa cheksiz kichik deformatsiya nazariyasi asosida ko‘riladi, Lagranj va eyler koordinatalari farqi yo‘qoladi.

Klassik modelga kiritiladigan tutash muhit masalalari asosiy tenglamalari massaning saqlanish qonuni, harakat miqdori va harakat miqdori momenti o‘zgarishi teoremasi (uning natijasi $p^{ij} = p^{ji}$) asosida olinishi bilan birga, eksperimentlarga asoslangan va har bir tutash muhit ta’rifidan kelib chiqadigan fizik munosabatlari sistemasi olinishini yuqorida ko‘rgan edik. Bu tenglamalar sistemasi bo‘lgandagina ularni yechish uchun urinish mumkin. Faraz qilaylik, yopiq tenglamalar ixtiyoriy turdagi klassik tutash muhit uchun tuzilgan bo‘lsin. U holda har bir aniq hol uchun bu tenglamalar sistemasi soni nechta bo‘lishidan qat’iy nazar, bu tenglamalardagi noma’lumlar va erkli o‘zgaruvchilar (masalan, fazoviy koordinatalar va vaqt) o‘zgarish sohalari aniqlangan bo‘lishi kerak.

Ko‘rilayotgan sohada maxsus nuqta yoki nuqtalar to‘plami mavjud bo‘lishligi mumkin. Bu nuqtalarda izlanayotgan funksiyalar uzilishga ega bo‘lishi, ularning mazmuni esa, masalan, nuqtaviy massa manbalar, nuqtaga qo‘yilgan mujassamlangan kuchlar va h.k. lar bo‘lishi mumkin. Tutash muhitga ta’sir etuvchi tashqi sabablar ham maxsus nuqtalar orqali tenglamalar sistemasidan alohida holda berilishi mumkin.

Tutash muhitning Yevklid fazosi chekli va cheksiz sohasidagi harakati va muvozanati o‘rganiladi. Izlanayotgan funksiyalar uchun soha chegaralarida avvaldan qo‘yilgan mexanik munosabatlar bajarilishi talab qilinishi mumkin. Agar soha o‘z ichiga cheksiz uzoq nuqtalarni olsa, bu nuqtalarda ham masala qo‘yilishidagi mexanik mazmunni akslantiruvchi shartlar qo‘yilishi kerak. Shuni ta’kidlash joizki, matematik ifodalarda yoziladigan bu shartlar mexanika qonunlariga va ular asosida yozilgan har bir tutash muhit modellari tenglamalari sistemasiga zid bo‘lmasligi kerak. Ikkinchi tomondan, har bir tutash muhit yopiq tenglamalari sistemasi integrallanishida ixtiyoriy funksiya va o‘zgarmaslar paydo bo‘ladiki, bu o‘zgarmaslar qo‘shimcha shartlar va jumladan, boshlang‘ich shartlar asosida aniqlanishi mumkin (masalan $t = t_0$ boshlang‘ich onda tutash muhit zarralari holati va ularning tezliklari berilishi kerak). Tutash muhit tenglamalari sistemasi aniqlanadigan sohaning o‘zi ham o‘zining o‘zgaruvchan chegaralariga ega bo‘lib, bu chegaralar noma’lum bo‘lishi va ularni ham aniqlash talab etilishi mumkin. Bu chegaralarda mexanik jarayonni akslantiruvchi munosabatlar yozilishi mumkin. Umumiy holda deformatsiyalanadigan yoki o‘zgarmas umumiy chegaralarga ega bo‘lgan turli tutash muhit modellari tenglamalari sistemasi birgalikda ko‘rilishi va tutash muhitlarning o‘zaro dinamik yoki statik o‘zaro mexanik ta’sirlari dolzarb masalalardan iborat bo‘lishligi mumkin. Bunday holda, masalan, suyuqlik va elastik jismlar o‘zaro ta’siri masalalarida chegaraning har ikki tomonidan masala yechilishidan ilgari, umuman olganda, noma’lum bo‘lgan kuchlanishlar o‘zaro tengligi, ko‘chish vektori yoki zarralar o‘zaro tezligi shartlari yozilishi mumkin. Ayrim hollarda bulardan ancha murakkab bo‘lgan matematik munosabatlar ham yozilishi mumkin. Tabiiyki, bu munosabatlar oʻz mazmuniga ega, kuzatish va qonuniyatlarga asoslangan boʻlishi kerak.

Chiziqli elastik jism modeliga kiruvchi tutash muhit masalalari qoʻyilishi va Sen-Venan prinsipi deb ataluvchi prinsip bilan tanishaylik.

Chiziqli elastik jism tashqi va ichki kuchlar ta’sirida kuchlanganlik-deformatsiyalanish holati uning egallagan hajmi va dinamik jarayon bilan bogʻlangan boʻlishi mumkin. Cheksiz kichik deformatsiya nazariyasiga asosan deformatsiya tenzori elementlari koʻchish vektori komponentalari hosilalari Koshi munosabatlari orqali bogʻlangan va odatda gaz, suyuqliklardan farqli ravishda jism zarralari zichligi oʻzgarmas, va uni ma’lum deyish mumkin. Jismning deformatsiyalanmagan holda fazodagi koʻchishiga chek qoʻyish ham maqsadga muvofiqdir. Buning uchun elastik jism biror nuqtasida koʻchish vektori va bu nuqtada olingan oʻzaro tik oʻqlar atrofida aylanish miqdorlari nolga teng deb olinishi kerak. elastik jism egallagan hajm va uning chegarasi Lagranj va Eyler koordinatalari oʻrtasidagi farq boʻlmaganligi tufayli chegaraviy shartlar elastik jism dastlabki egallagan chegaralarida beriladi va bu chegaralar holati fazoda oʻzgarishi cheksiz kichik boʻlganligi uchun chegaraviy shartlar jism dastlabki holati chegarasiga nisbatan qaraladi.

Nazorat savollari

1. Qanday jismga elastik jism deyiladi?
2. Umumlashgan qonunini ifodalovchi formulani yozing.
3. Izotrop chiziqli elastik jism uchun Guk qonuni qanday k**oʻ**rinishda b**oʻ**ladi?
4. Deformatsiya tenzorini koʻchish vektori orqali hisoblash formulalari.

3-MAVZU: Yopishqoq suyuqlik uchun Nave-Stok tenglamasi.

REJA:

3.1 Yopishqoq suyuqlik modeli*;*

3.2 Siqilmaydigan yopishqoq suyuqliklar harakati nostatsionar jarayonlarini tadqiq etish boʻyicha asosiy adabiyotlar sharhi.

3.3 Siqilmaydigan yopishqoq suyuqliklar harakatini tadqiq etishning matematik modellashtirish konstruktiv metodologiyasini ishlab chiqish

Tayanch soʻzlar *Eyler oʻzgaruvchilari*, ***Nave-Stoks formulasi,Reynols soni ,*** turbulent va laminar oqim.

3.1 . Yopishqoq suyuqlik modeli;

Tabiatda suyuq va gaz holatida uchraydigan barcha muhitlar o‘rnatilgan ideal suyuqlik yoki gaz modeli doirasida bo‘la olmasligiga kuzatish va tajribalar asosida ishonch hosil qilish mumkin. Haqiqatan ham, «quyuq» yoki «suyuq» suyuqliklar haqida fikr yuritish mumkin. Distirlangan suv va glitserinlarda ularning harakati davomida birlik normali $\vec{n}$ bo‘lgan yuzachadagi kuchlanish vektorining shu yuzachaga proeksiyalari miqdori suv uchun glitseringa qaraganda nihoyatda kichikligiga ishonch hosil qilish mumkin. Bu kuchlanishlar suyuqliklar muvozanat holatida birlik normal $\vec{n}$ bo‘yicha (yoki unga teskari) bo‘lishiga ham ishonch hosil qilish mumkin. Bundan suyuqlik zarralari o‘rtasida urinma kuchlanishlar ham mavjud bo‘lishiga va ularning miqdori suyuqlik moddasining ichki xossalariga bog‘liqligi va bu xossalar urinma kuchlanishlar mavjudligi va uning miqdoriga ta’sir etuvchi asosiy omillardan biri ekanligiga ham ishonch hosil qilish mumkin. Yana shuni kuzatish mumkinki, biror koordinatalar sistemasiga nisbatan muvozanatda bo‘lgan «quyuq» suyuqlik va «suyuq» suyuqliklar (masalan, ko‘rilgan glitserin va suv) uchun kuchlanish vektori birlik vektor $\vec{n}$ ga proporsional bo‘ladi va bu kuchlanish vektorining $\vec{n}$ dan og‘ishi harakat jarayonidagina vujudga keladi, ya’ni bunday tutash muhit zarralari o‘rtasida urinma kuchlanishlar paydo bo‘ladi. Bunday real hossali tutash muhitlar uchun yopishqoq suyuqlik modeli olinadi

$$p^{ij} = -p \cdot g^{ij} + \tau^{ij} \tag{3.33}$$

ko‘rinishdagi kuchlanish tenzoriga ega bo‘lgan tutash muhitga ***yopishqoq suyuqlik*** deyiladi. Bu yerda

$$p^{ij} = p(\rho, T, \chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n) \tag{3.34}$$

$$\tau^{ij} = \varphi^{ij}(e_{\alpha\beta}, g^{\alpha\beta}, T, \chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n) \tag{3.35}$$

bo‘lib,

$$e_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \cdot (\nabla_\beta v^\alpha + \nabla_\alpha v^\beta)$$

Deformatsiya tezligi tenzori elementlari. Tutash muhit klassik modelining bu ta’rifidagi (3.34) va (3.35) bog‘lanishlarda T va χ_i larni o‘zgarmaslar, deb qarash bilan chegaralanamiz.

(3.35) munosabat uchun, umumlashgan Guk qonuni olinishi kabi, ushbu chiziqli munosabatni yozish mumkin

$$\tau^{ij} = B^{ij\alpha\beta} \cdot e_{\alpha\beta} \tag{3.36}$$

Bu yerda $B^{ij\alpha\beta}$ o‘zgarmaslar ko‘rilayotgan yopishqoq suyuqlik xossasini aniqlovchi parametrlar bo‘lib, (3.36) ustida umumlashgan Guk qonuni formulasi ustida bajarilgan amaliyotlarni bajarish mumkin (bu yerda $\varepsilon_{\alpha\beta}$ o‘rniga $e_{\alpha\beta}$ ishtirok etmoqda). Chiziqli elastik jism uchun bajarilgan tenzorlar ustidagi amaliyotlarni (3.36) uchun qo‘llash mumkin. Yopishqoqlik xossasi barcha yo‘nalishlar bo‘yicha bir xil bo‘lgan jism izotrop, aks holda, bu yerda ham, jism anizotrop bo‘ladi.

Izotrop chiziqli yopishqoq suyuqlik uchun ushbu formulani yozaylik:

$$p^{ij} = -p \cdot g^{ij} + \lambda_1 \cdot div\vec{v} \cdot g^{ij} + 2 \cdot \mu \cdot g^{i\alpha} \cdot g^{j\beta} \cdot e_{\alpha\beta} \qquad (3.37)$$

(3.37) formula ***Nave-Stoks formulasi*** deb ataladi. Bu yerda $div\vec{v}$ - deformatsiya tezligi tenzori 1-invarianti, λ_1 va μ_1 yopishqoqlik koeffitsientlari deyiladi. (3.37) ni Dekart koordinatalar sistemasida yozaylik:

$$p_{11} = -p + \lambda_1 \cdot div\vec{\upsilon} + 2 \cdot \mu_1 \cdot \frac{\partial \upsilon_1}{\partial x_1}$$

$$p_{22} = -p + \lambda_1 \cdot div\vec{\upsilon} + 2 \cdot \mu_1 \cdot \frac{\upsilon v_2}{\partial x_2} \qquad (3.38)$$

$$p_{33} = -p + \lambda_1 \cdot div\vec{\upsilon} + 2 \cdot \mu_1 \cdot \frac{\partial \upsilon_3}{\partial x_3}$$

$$p_{ij} = 2 \cdot \mu \cdot e_{ij} = \mu_1 \cdot \left(\frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \upsilon_j}{\partial x_i} \right), \ (i \neq j)$$

Yopishqoq suyuqliklarning ixtiyoriy egri chiziqli eyler koordinatalari sistemasidagi tenglamasi (3.37) ni ushbu tenglamaga - tutash muhit harakat differensial tenglamasiga qo‘yish orqali topiladi:

$$p \cdot \frac{d\upsilon_i}{dt} = \rho \cdot F_{\mathrm{i}} + \nabla_j p^{ij} \qquad (3.39)$$

Agar Dekart koordinatalarida ish ko‘rilsa, elastik jism uchun Lyame tenglamasi olingani kabi, ushbu ko‘rinishdagi Nave-Stoks tenglamalari deb ataluvchi tenglamalar hosil bo‘ladi:

$$p \cdot \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \rho \cdot \vec{F} - gradp + (\lambda_1 + \mu_1) graddiv\vec{\upsilon} + \mu_1 \Delta \vec{\upsilon} \qquad (3.40)$$

Chiziqli elastik jismlardan farqli ravishda ρ zichlik funksiyasi asosiy noma’lumlar qatoridan o‘rin oladi. Agar $\vec{F}$ berilgan bo‘lsa, (3.40) tenglama tezlik vektori proeksiyalari v_1, v_2, v_3 , zichlik ρ va bosim funksiyasi p lar qatnashadigan skalyar ravishda yozilgan uchta tenglamani beradi.

Yopishqoq suyuqlik uchun tenglamalar sistemasi (3.40) tenglama va uzluksizlik tenglamasi $\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \vec{\upsilon}) = 0$ lardan iborat bo‘lib, tenglamalar soni noma’lumlar sonidan bitta kamdir. Tenglamalar sistemasi yopiq tenglamalar sistemasidan iborat bo‘lishi uchun noma’lum funksiyalar qatnashadigan qo‘shimcha tenglama zarurdir.

Quyidagi xususiy holda, $div\vec{\upsilon} = 0$ ya’ni muhit siqilmas bo‘lsa, tenglamalar sistemasi quyidagicha bo‘ladi:

$$\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho}\cdot gradp + \frac{\mu}{\rho}\cdot\Delta\vec{\upsilon} \qquad (3.41)$$
$$div\vec{\upsilon} = 0$$

(3.41) da μ o‘zgarmas son bo‘lib, agar suyuqlik yopishqoqlik koeffitsienti $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ deb belgilansa, bu o‘zgarmas miqdor kinematik yopishqoqlik koeffitsienti deyiladi.

Bir jinsli bo‘lmagan siqilmas yopishqoq suyuqlik uchun to‘gri burchakli Dekart koordinatalari sistemasida ushbu yopiq tenglamalar sistemasi o‘rinlidir:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \upsilon_1\cdot\frac{\partial p}{\partial x_1} + \upsilon_2\cdot\frac{\partial p}{\partial x_2} + \upsilon_3\cdot\frac{\partial p}{\partial x_3} = 0$$
$$\frac{\partial \upsilon_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \upsilon_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \upsilon_3}{\partial x_3} = 0$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \upsilon_1}{\partial t} + \upsilon_1\frac{\partial \upsilon_1}{\partial x_1} + \upsilon_2\frac{\partial \upsilon_1}{\partial x_2} + \upsilon_3\frac{\partial \upsilon_1}{\partial x_3} = F_1 - \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x_1} + \upsilon\cdot\Delta\upsilon_1\\
&\frac{\partial \upsilon_2}{\partial t} + \upsilon_1\frac{\partial \upsilon_2}{\partial x_1} + \upsilon_2\frac{\partial \upsilon_2}{\partial x_2} + \upsilon_3\frac{\partial \upsilon_3}{\partial x_3} = F_2 - \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x_2} + \upsilon\cdot\Delta\upsilon_2 \qquad (3.42)\\
&\frac{\partial \upsilon_3}{\partial t} + \upsilon_1\frac{\partial \upsilon_3}{\partial x_1} + \upsilon_2\frac{\partial \upsilon_3}{\partial x_2} + \upsilon_3\frac{\partial \upsilon_3}{\partial x_3} = F_3 - \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x_3} + \upsilon\cdot\Delta\upsilon_3
\end{aligned}$$

$\Delta\upsilon_i$ - v_i dan olingan Laplas operatori.

Endi ideal suyuqlik va gazlarga xos bo‘lgan eng sodda masalalar qo‘yilishini ko‘raylik. Birinchi navbatda tenglamalar sistemasini (massaning saqlanish qonuni va eyler tenglamalari-ularning soni 4 ta bo‘lib) 5 ta noma’lumlarni (tezlik vektori 3 ta komponentalari, bosim va zichlik) o‘z ichiga oladi. Agar beshinchi tenglama ham mavjud bo‘lsa (masalan, barotropik munosabat yoki siqilmas suyuqlik deb olinadigan xususiy hollar), u holda yopiq tenglamalar sistemasiga-tenglamalar soni noma’lumlar soniga teng bo‘lgan holat vujudga keladi. Bu modelga tegishli ixtiyoriy muvozanat va harakat tenglamalari, agar tashqi massaviy kuchlar berilgan bo‘lsa, ko‘rilayotgan yopiq tenglamalar sistemasini integrallashga keltiriladi. Har bir aniq masalada chegaraviy va boshlang‘ich shartlar berilgan bo‘lishi kerak. Ideal suyuqlik yoki gazlar uchun urinma kuchlanishlar barcha zarralarda nolga tengligi va bu xossa chegaraviy sirtlarda ham saqlanishini e’tiborga olish kerak: gaz va suyuqlik zarralari deformatsiyalanuvchi yoki absolyut qattiq sirtlarda ularga o‘tkazilgan har bir ondagi urinma tekisliklarda qarshilikka uchramagan holda bemalol harakatlana olishi va bu tekisliklarga normal yo‘nalishi bo‘yicha olingan tezliklar jism normal yo‘nalishi bo‘yicha olingan tezliklarga teng bo‘lishi kerak:

$$(v_n)_{suyuqlik} = (v_n)_{chegara}$$

$$(v_\tau)_{suyuqlik} \neq (v_\tau)_{chegara}$$

Agar ideal suyuqlik potensialli tezlik maydoniga ega, ya’ni $\vec{\upsilon} = grad\vec{\varphi}$ bo‘lsa,

$$(v_n)_{suyuqlik} = \frac{\partial \varphi}{\partial n} = (v_n)_{chegara}$$

bo‘ladi.

Agar ideal suyuqlik tezlik maydoni olinayotgan koordinatalar sistemasiga nisbatan qo‘zg‘almas chegaraviy sirtlarga ega bo‘lsa, chegaradagi shart

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$$

ga almashadi.

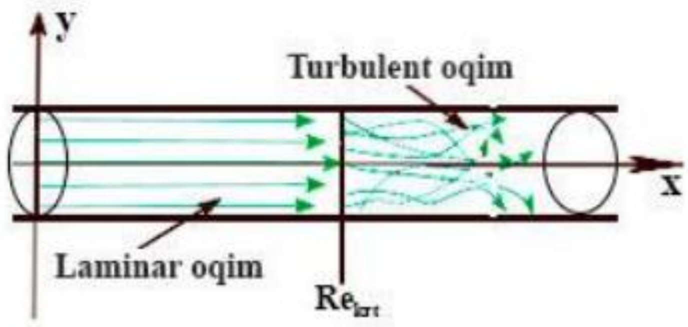
Agar ideal suyuqlik yoki gaz uchun soha erkin sirtlarga ega bo‘lsa, va bu sirtlarning fazodagi holati noma’lum bo‘lsa, masala qo‘yilishida bu sirtlarni aniqlash masalasi ham qo‘yilishi mumkin. Odatda bunday noma’lum va o‘zgarishi mumkin bo‘lgan sirtlarda suyuqlik va gaz zarralari uchun bosim chegaradagi ikkinchi bir ma’lum(masalan, atmosfera bosimiga teng) bosimga teng qilib olinishi mumkin. Bu holda chegaraviy shart, masalan, quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi: $p_{nn} = -p_0,\ p_{n\tau} = 0$- normali $\vec{n}$ bo‘lgan yuzadagi kuchlanishning normalga proeksiyasi $-p_0$, urinma yo‘nalishga proeksiyasi nolga teng bo‘ladi deyish mumkin.

3.2. Siqilmaydigan yopishqoq suyuqliklar harakati nostatsionar jarayonlarini tadqiq etish bo‘yicha asosiy adabiyotlar sharhi

Ilmiy-texnika taraqqiyotining hozirgi bosqichida suvlar va suv resurslaridan samarali foydalanish yetakchi ahamiyatga ega. Jahonda ichimlik suviga ehtiyojni qondirish uchun zamon talablariga mos suv inshootlarini loyihalash, yaratish va yangi suv zaxiralarini harakatga keltirish, xuddi shuningdek, eski suv havzalaridagi va boshqa oqar suvlarni filtrlash orqali ichimlik suv zaxirasini oshirish talab etiladi. Yuqorida ko‘rsatilgan maqsadlarga mos turli tabiiy va sun’iy sharoitlarda suv oqimlaridagi jarayonlarni kompleks tadqiq etishga yo‘naltirilgan matematik modellar, yuqori aniqlikka ega bo‘lgan samarali hisoblash usullari va dasturiy mahsulotlarini yaratmasdan erishib bo‘lmaydi. Suvdan samarali foydalanish amaliyotini yo‘lga qo‘yishda suv oqimlari harakatiga bosim gradientining ta’siridan foydalanish keng qo‘llanilmoqda. Boshqa tomondan, laminar oqimlarning turbulent (tartiblashmagan) oqimlarga aylanishi chegaralarini aniqlash muhim ahamiyat kasb etadi. Shunday qilib, siqilmaydigan yopishqoq suyuqliklar harakatiga ikki toifadagi kuchlar ta'sir etadi: birinchidan - bosim gradienti, ikkinchidan - yopishqoqlik (ishqalanish) kuchi. Suyuqliklar harakatiga bosim gradientining manfiy, nolga teng va musbat bo'lgan hollari ta'sirini aniqlash, ularning oqimlar harakatiga ijobiy va salbiy ta'sir etishiga mos qiymatlarini topish zarur bo'ladi. 7 Suyuqliklar harakatida bosim gradientini o'zgartirib oqimlarning laminar holatdan turbulent holatga o'tishini tezlashtirish yoki kechiktirish mumkin. Bu, o'z navbatida, tanlangan bosim gradientiga mos kritik Reynolds sonini aniqlash bilan bog'liq. Mazkur muammo esa qaralayotgan oqimni adekvat tavsiflovchi matematik modellarni ishlab chiqish va ularga mos algoritmlarni hamda hisoblash eksperimentini o'tkazish uchun dasturiy-instrumental vositalarni yaratish bilan bog'liq.

Suyuqliklar harakatidagi ushbu murakkab jarayonlarni matematik modellashtirish tutash muhit mexanikasi usullariga asoslanadi. Ular, odatda siqilmaydigan yopishqoq suyuqliklar harakatini tavsiflovchi Nave-Stoks tenglamalari bilan bog'liq masalalar ko'rinishida talqin etiladi. Siqilmaydigan yopishqoq suyuqliklar harakatini tavsiflovchi matematik model nostatsionar uch o'lchamli Nave-Stoks tenglamalari G.Shlixting, L.G.Loysyanskiy va S.S.Lin ishlarida keltirilgan. Modelda uchta harakat tenglamalari va bitta uzluksizlik tenglamasi mavjud bo'lib, noma'lumlar sifatida tezlik vektorining uchta komponentasi va bosim qaraladi. Bunda bosim vaqtga bog'liq emas degan gipotezaga asoslaniladi. Olib borilgan tadqiqotlarda Nave-Stoks tenglamalari laminar chegaraviy qatlam masalalariga bog'liq ravishda qaralgan, chegaraviy qatlamda laminar formadagi oqimning turbulent oqimga aylanish mexanizmi bayon qilingan. Nave-Stoks tenglamalarining chegaraviy qatlamdagi ayrim xususiy yechimlarini tuzish masalalari hal etilgan. Ushbu ishlarda tadqiqotlar asimtotik usul asosida olib borilgan. Asimptotik usulni qo'llanish juda murakkab hisoblashlarni talab etadi va olinadigan asimptotik yechimlar qo'pol ko'rinishda bo'ladi. Matematik modellashtirish va hisoblash eksperimentining tizimli konstruktiv texnologiyasini qo'llanish suyuqlik oqimlaridagi jarayonlarni batafsil va chuqur o'rganish uchun muhim ahamiyatga ega. Chunki, ularda qaralayotgan obyektning bir holatdan ikkinchi bir holatga o'tishi, xuddi shuningdek bosim gradientining o'zgarishi sodir bo'ladi. [1] monografiyada kanallar, chegaraviy qatlam va quvurlardagi oqimlar harakatini matematik modellashtirishga bag'ishlangan ishlar tahlili keltirilgan va ular tanqidiy baholangan. Ta'kidlash lozimki, siqilmaydigan yopishqoq suyuqliklar harakatini gidrodinamik turg'unlik nuqtai-nazaridan modellashtirish muammolari bilan ko'p tadqiqotchilar shug'ullanishgan. Bu borada hozirgacha e'tiborga molik bir qator nazariy va amaliy natijalar [2] ishda olingan. [3] monografiyada olib borilgan tadqiqotlarda Nave-Stoks tenglamalarini yechishga gidrodinamik turg'unlikni tadqiq etish nuqtai-nazaridan yondashilgan.

Ushbu ishda yechimning kichik qo'zg'alishlarga nisbatan turg'unligini tadqiq etishda asimptotik usul qo'llanilgan. Tadqiqotda uch o'lchamli qo'zg'alishlarga nisbatan kichik qo‘zg‘alishlar usuli bilan Nave-Stoks tenglamalaridan gidrodinamik turg‘unlik tenglamalari hosil qilingan. [4] maqolada ikki o‘lchamli qo‘zg‘alishlar uchun kritik Reynolds soni uch o‘lchamli qo‘zg‘alishlarning kritik Reynolds soniga nisbatan kichik bo‘lish haqidagi teorema isbotlangan. Boshqacha qilib aytganda, uch o‘lchamli qo‘zg‘alishlarning turg‘unmaslik sohasi ikki o‘lchamli qo‘zg‘alishlarning turg‘unmaslik sohasi ichida yotishi ko‘rsatilgan. Bundan o‘z navbatida, ikki o‘lchamli qo‘zg‘alishlar turg‘un bo‘lmaganda, uch o‘lchamli qo‘zg‘alishlar ham turg‘un bo‘lmasligi kelib chiqadi. Shu sababli, gidrodinamik turg‘unlik muammosini tadqiq etishda ikki o‘lchamli qo‘zg‘alishlar bilan chegaralanish kifoya. Hozirgacha Nave-Stoks tenglamalarini keskin soddalashtirishga va ularning amaliyot uchun juda dolzarb bo‘lgan xususiy yechimlarini topishga bag‘ishlangan ko‘pgina [5-9] ishlar mavjud. Mazkur tadqiqotlar odatda yoki simmetriklik mulohazalariga yoki ayniylik va o‘lchamlar nazariyasiga asoslangan holda bajarilgan. Nave-Stoks tenglamalarining xususiy yechimlaridan iborat bo‘lgan hamda ularni aniqlagan olimlar nomlari bilan ataladigan bir qator asosiy oqimlar [5] ishda mavjud, masalan: Blazius oqimi, Puazeyl oqimi, Fokner-Sken oqimi, Xagen-Puazeyl oqimlari. [9-11] tadqiqot ishlarida Blazius oqimi tekis (yupqa, yarim cheksiz) plastinkani siqilmaydigan yopishqoq suyuqlikning o‘zgarmas tezlik bilan statsionar oqib o‘tishidagi chegaraviy qatlam tenglamalarining yechimi sifatidada aniqlangan. Puazeyl oqimi ikkita tekis parallel plastinka orasidagi parabolasimon laminar oqim. Fokner-Sken oqimi (chegaraviy qatlam) laminar chegaraviy qatlam tenglamalarining statsionar avtomodel yechimi bo‘lib, u bosim gradientiga bog‘liq bo‘ladi. Xagen-Puazeyl oqimi siqilmaydigan barqarorlashgan suyuqliklarning doiraviy kesimga ega bo‘lgan yupqa silindrsimon naychada doimiy bosim farqi ta’sirida o‘zgarmas yopishqoqlik bilan harakat qilishi natijasida paydo bo‘ladi. Turbulentlik nazariyasining hozirgi holati va zamonaviy gidrodinamikaning dolzarb muammolari [12-13] ishlarda bayon qilingan. Ularda turli ko‘rinishdagi oqimlar tahlil qilinganda, ikkita turli oqimning mexanik ayniy bo‘lish mezoni Reynolds soni Re dan iborat ekanligi ko‘rsatilgan. Har bir tipdagi oqim geometriyasi uchun o‘zining kritik Reynolds soni mos kelishi va ushbu son laminar rejimdagi suyuqlik oqimining turbulent oqimga aylanishini xarakterlashi ko‘rsatilgan. Kritik Reynolds soni krt Re suyuqlik oqimi modelini tanlashda hal qiluvchi omil hisoblanadi.



Yopishqoq suyuqlikning gidromexanik tenglamalarini aniq shaklda integrallash nisbatan kam uchraydi. Bundan tashqari, shuni ta’kidlash kerakki, yopishqoq suyuqlik harakati tenglamalarining ko‘plab aniq yechimlari gidrodinamik ahamiyatga ega emas, balki ular amalda noodatiy turdagi chegaraviy shartlar mavjud bo‘lgandagina amalga oshirilishi mumkin. Boshqa tomondan, tabiatda tajriba yoki kuzatish imkoniyati nuqtai nazaridan muhim bo‘lgan yopishqoq suyuqlikning aksariyat harakatlari gidromexanika tomonidan to‘g‘ri tahlil qilinishi mumkin emas. Misol tariqasida sharning miqdori va yo‘nalishi bo‘yicha o‘zgarmas tezlik bilan yopishqoq suyuqlikdagi harakati masalasini ko‘rsatishimiz mumkin.

Biror masalani aniq yechimini olish imkoniyati bo‘lmaganliqi uchun olimlar ushbu muammoni yechishning taqribiy usullarini topishga e’tibor qaratdilar.

Gidromexanikaning barcha taqribiy usullari bitta umumiy xususiyat bilan tavsiflanadi. Bu usullarda yoki asosiy tenglamalarni yoki chegaraviy shartlarni bir qismi

- yoki butunlay tashlab yuborilgan;
- yoki to‘liq hisobga olinmagan.

Yopishqoq suyuqlikning harakati bizni birinchi navbatda qiziqtiradigan hollarda, kuchlarning uchta turi hisobga olinadi:

inersiya kuchlari, yopishqoqlik kuchlari va bosim kuchlar.

Oxirgi kuchlar ichki kuchlar bo‘lib, ularning kattalik tartibi birinchi ikki turdagi kuchlarning kattalik tartibi bilan belgilanadi.

Inersiya kuchlari va yopishqoqlik kuchlarining qiyosiy kattaligi Reynolds soni $Re = \frac{L\,v}{\nu}$ orqali aniqlanadi, bu bizga ma’lum bo‘lgan xarakterli tezlikni xarakterli uzunlikka ko‘paytmasini kinematik yopishqoqlik koeffitsientiga nisbatiga teng.

Shunga ko‘ra, yopishqoq suyuqliklar mexanikasi tenglamalarining ikki xil taqribiy yechimlari haqida gapirishimiz mumkin.

Birinchi turga inersiya kuchlari yopishqoqlik kuchlari bilan solishtirganda kichik bo‘lgan, ya’ni Reynolds soni kichik bo‘lgan hollarini o‘z ichiga oladi. Reynolds soni uchta holatda kichik bo‘lishi mumkin:

- L xarakterli uzunlik juda kichik bo‘lganda, yoki
- v xarakterli tezlik juda kichik bo‘lsa, yoki
- ν kinematik yopishqoqlik koeffitsienti juda katta bo‘lganda.

Shunday qilib, ko‘rib chiqilayotgan turga, masalan, yopishqoq suyuqliklarda nisbatan juda kichik zarrachalarning sekin harakatlanishi holatlari kiradi. Birinchi turdagi harakatlarning taqribiy talqini gidromexanika tenglamalaridan inersiya kuchlarini beradigan hadlarni butunlay tashlab yuborish yoki ushbu hadlarni soddalashtirishdan iborat.

Harakatning boshqa turi esa yopishqoqlik kuchlari inersiya kuchlarga nisbatan kichik bo‘lgan va natijada Reynolds soni juda katta bo‘lgan hollarni o‘z ichiga oladi.

Buning uchun yoki xarakterli uzunlik yoki xarakterli tezlik juda katta bo‘lishi kerak, yoki suyuqlikning yopishqoqligi juda kichik bo‘lishi kerak.

Shunday qilib, ikkinchi turdagi harakatlarga kam yopishqoqlikdagi suyuqliklarda katta o‘lchovli jismlarning tez harakatlanishi holatlari kiradi.

Reynolds soni kichik bo‘lgan hol. Ma’lumki, yopishqoq suyuqlik harakati tenglamasining aniq yechimlarini xususiy hollarda olish mumkin. Tabiiyki, qandaydir muammoni aniq yechimini olish imkoniyati bo‘lmaganda uning taqribiy yechimini qidirishga murojaat qilinadi.

Tabiatda yopishqoq suyuqliklar harakatida imkoniyat nuqtai nazardan ko'pgina muhim tajriba va kuzatishlar aniq gidromexanik tahlilga bo‘ysunmaydi. Misol sifatida sferaning yopishqoq suyuqlikda o‘zgarmas tezlik bilan harakati haqidagi masalasini ko‘rsatish mumkin.

Gidromexanikaning barcha taqribiy usullari bitta umumiy alomat bilan xarakterlanadi: asosiy tenglamalarda yoki chegaraviy shartlarda hadlarning bir qismi umuman tashlab yuboriladi yoki qisman hisobga olinadi.

Yopishqoq suyuqlik harakatida inersiya kuchlari, yopishqoqlik kuchi va bosim kuchlari hisobga olinadi. Inersiya kuchi va yopishqoqlik kuchi kattaliklarini solishtirish uchun Reynolds sonini olamiz:

$Re = vl/\nu$,

bunda $v -$ tezlik, l-uzunlik, ν-kinematik yopishqoqlik.

Inersiya kuchlari yopishqoqlik kuchlariga nisbatan kichik bo‘lgan holga to‘g‘ri keluvchi harakatlarni, ya’ni **Reynolds soni kichik hol**ni qaraymiz. Reynolds soni quyidagi hollarda kichik bo‘ladi:

l uzunlik juda kichik, yoki;

v tezlik juda kichik, yoki;

ν kinematik yopishqoqlik koeffitsienti juda katta.

Shunday qilib, yopishqoq suyuqlikning sekin harakati qaralayotgan holga kiradi. Bunday harakatlarni taxminiy talqini yoki yopishqoq suyuqlik harakati tenglamalaridan inersiya kuchlarini to‘liq tashlab yuborish yoki bu hadlarni soddalashtirishdan iborat.

Ishqalanishni hisobga olgan holni qaraymiz. O‘tgan asrlarda suyuqlik harakatining nazariy tadqiqotlari ko‘p hollarda suyuqlikning ideal ekanligi haqidagi faraz asosida amalga oshirildi, ya'ni, ishqalanish mavjud emas va siqilmaydigan. Suyuqlik harakatida ishqalanish e’tiborga olinmasa, uning alohida urinuvchi qatlamlari orasida faqat normal kuchlar (bosimlar) paydo bo‘ladi, tangensial kuchlar (urinma kuchlanishlar) bo‘lmaydi.

Urinma kuchlanishlarining mavjudligi va suyuqlikni qattiq devorlarga yopishishi real (haqiqiy) suyuqlikni ideal suyuqlikdan sezilarli darajada ajratib turadi. Ba’zi suyuqliklar, ayniqsa amaliy jihatdan muhim, masalan, suv va havo juda kam yopishqoqlikka ega.

Bunday kam yopishqoqlikka ega suyuqliklar oqimlari ko‘p hollarda ideal suyuqlik oqimlariga juda mos keladi, chunki ulardagi tangensial kuchlar odatda juda kichik bo‘lib qoladi. Shuning uchun ideal suyuqlik nazariyasida yopishqoqlik butunlay e’tiborga olinmaydi, chunki bu harakat tenglamalarini juda sezilarli darajada soddalashtirishga olib keladi, bu esa keng matematik nazariyani yaratishga imkon beradi.

Ikkita parallel plastinkalar orasidagi yopishqoq suyuqlik oqimi masalasi. Reynolds soni kichik holni qaraymiz.

Ikkita parallel plastinkalar orasidagi o‘ta yopishqoq suyuqlik oqimini qaraymiz. Plastinkalar orasidagi h masofa juda kichik, tashqi kuchlar hisobga olinmaydi. Nav’e-Stoks tenglamasining chap tomonidagi inersiya kuchlarini tashlab yuborsak, quyidagi tenglamani olamiz:

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right), \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right), \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = \nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right), \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

Ox va Oy o‘qlar chegara tekisliklaridan birida yotadi, Oz o‘qi esa bu tekisliklarga perpendikulyar yo‘naladi. Ikkita tekisliklar tenglamasi:

$$\mathrm{z} = 0, \quad \mathrm{z} = \mathrm{h}.$$

Suyuqlikning har bir zarrachasi parallel tekisliklar bo‘ylab yo‘naladi, ya’ni $w = 0$ o‘rinli deb qabul qilinadi. h kichik miqdorligidan, u va v tezliklarni Oz o‘qi bo‘yicha o‘zgarishi bu kattaliklarni Ox va Oy o‘qlar bo‘ylab o‘zgarishiga nisbatan ancha tezroq bo‘lishini ko‘ramiz. Bundan, $\frac{\partial u}{\partial z}$ hosila tartibi $\frac{\partial u}{\partial x}$ va $\frac{\partial u}{\partial y}$ hosilalar tartibiga nisbatan kattaligi; xuddi shunday $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ hosila tartibi $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ va $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ hosilalar tartibiga nisbatan kattaligi kelib chiqadi.

Mazkur shartlar asosida (1.1) tenglama

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \tag{1.2}$$

ko‘rinishni oladi.

Uchinchi tenglamadan p bosim faqat x va y ning funksiyasi ekanligini ko‘ramiz: $p(x, y)$.

Birinchi tenglamani integrallasak:

$$\mu u = \frac{z^2}{2}\frac{\partial p}{\partial x} + z\,f(x, y) + g(x, y).$$

$f(x, y)$ va $g(x, y)$ noma’lum funksiyalar $u = 0$ da $\mathrm{z} = 0$, $\mathrm{z} = \mathrm{h}$ chegaraviy shartlardan aniqlanadi:

$$g(x, y) = 0, \qquad f(x, y) = -\frac{h}{2}\frac{\partial p}{\partial x}.$$

Natijada u va v tezliklar uchun

$$u = -\frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x} z\,(h - z) \tag{1.3}$$

$$v = -\frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial y} z\,(h - z). \tag{1.4}$$

munosabatni olamiz.

(1.3) va (1.4) ni (1.2) tenglamalar sistemasidagi uzluksizlik tenglamasiga qo‘ysak, $p(x, y)$ bosim funksiyasini aniqlash uchun tenglama kelib chiqadi:

$$\Delta p = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0. \tag{1.5}$$

Topilgan yechimlar (1.1) tenglamalarni qat’iy qanoatlantiradi.

u va v ni o‘rniga balandlik bo‘yicha o‘rtacha tezliklarni kiritamiz:

$$\bar{u}(x, y) = \frac{1}{h}\int_0^h u(x, y, z)\,dz, \;\; \bar{v}(x, y) = \frac{1}{h}\int_0^h v(x, y, z)\,dz. \tag{1.6}$$

$\frac{1}{h}\int_0^h z\,(h - z)\,dz = \frac{h^2}{6}$ ekanligidan, o‘rtacha tezliklar uchun quyidagi formulalar o‘rinli:

$$\bar{u}(x, y) = -\frac{h^2}{12\mu}\frac{\partial p}{\partial x}, \;\; \bar{v}(x, y) = -\frac{h^2}{12\mu}\frac{\partial p}{\partial y}.$$

Endi $p(x, y)$ funksiya o‘rniga

$$\varphi(x, y) = -\frac{\mathrm{p}\mathrm{h}^2}{12\mu}, \tag{1.7}$$

funksiyani kiritsak, u holda $\varphi(x, y)$ o‘rtacha tezlik potensiali bo‘ladi:

$$\bar{u}(x, y) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \bar{v}(x, y) = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \tag{1.8}$$

Bunda $\varphi(x, y)$ funksiya $p(x, y)$ garmonik funksiyadan faqat o‘zgarmas ko‘paytuvchiga farq qiladi:

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0. \tag{1.9}$$

(1.8) va (1.9) formulalardan ko‘rinadiki, qaralayotgan holda suyuqlikning o‘rtacha harakati ideal siqilmaydigan suyuqlikning potensialli harakati kabi bo‘ladi.

Yuqoridagi ma’lumotlar Ch.B. Normurodov, Sh.A. Mengliyev. Siqilmaydigan yopishqoq suyuqlik harakatini matematik modellashtirish. –T.: “Fan va texnologiya”(2019) asosida shakllantirildi.

Nazorat savollari

1. Yopishqoq suyulik modelini kuchlanish tenzori orqali ifodasini yozing.
2. Izotrop chiziqli yopishqoq suyuqlik uchun Nave-Stoks formulasi qanday k**o‘**rinishda b**o‘**ladi?
3. Nave-Stoks tenglamasining Dekart koordinalar sistemasidagi ifodasini yozing.

4-Mavzu. Elastik jismlar uchun Lyame tenglamasi

Elastik jismlar nazariyasi deformatsiyalanadigan jismlarning tashqi kuchlar ta'sirida qanday holatga kelishini o'rganadi. Ushbu nazariya mexanika, qurilish muhandisligi, mashinasozlik, aerokosmik va biomexanik sohalarda keng qo'llaniladi. Lyame tenglamasi bu nazariyaning markaziy elementlaridan biri bo'lib, uch o'lchamli elastik muhitdagi siljish (displeysment) vektorining differensial tenglamasini ifodalaydi.

1. Elastiklik nazariyasining asoslari

1.1. Elastik muhit va deformatsiya

Elastik jism deb, tashqi kuchlar ta'sirida shakl va hajmini o'zgartira oladigan, ammo bu kuchlar olib tashlangach, avvalgi holatiga qayta oladigan jismlarga aytiladi. Deformatsiya – bu elastik jismlarning kuch ta'sirida yuzaga keladigan ichki o'zgarishidir.

Deformatsiyalar quyidagi turlarga bo'linadi:

- **Cho'zilish** – jismning uzunligi ortadi.
- **Siqilish** – jismning uzunligi kamayadi.
- **Egilish** – jismning shakli egiladi.
- **Qiyshiyish** – jismlar siljib, burchak o'zgaradi.

1.2. Kuchlanishlar va Cauchy tenzori

Elastik jismlar ichida har bir nuqtaga ichki kuchlar ta'sir qiladi. Bu kuchlar kuchlanish deb yuritiladi va ular Cauchy kuchlanish tenzori σij\sigma_{ij}σij orqali ifodalanadi. Bu tenzor jismlarning har bir yuzasida qanday kuchlanishlar paydo bo'lishini ko'rsatadi.

Kuchlanish tenzori simmetrik bo'lib, 9 ta elementdan iborat: 3 ta diagonal (normal kuchlanishlar) va 6 ta simmetrik (qiyshiq kuchlanishlar).

1.3. Deformatsiya (strain) tenzori

Deformatsiyani matematik ifodalash uchun strain tenzori εij ishlatiladi. U har bir

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

nuqtaning siljish holatini aniqlaydi: bu yerda

u_i – harakat koordinatalari bo'yicha siljishlar.

2. Hooke qonuni va Lyame doimiylari

2.1. Hooke qonuni

Chiziqli elastiklik holatida kuchlanishlar va deformatsiyalar orasidagi bog‘lanish Hooke qonuni bilan ifodalanadi:

$$\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk} + 2\mu\varepsilon_{ij}$$

bu yerda λ va μ – Lyame doimiylari, δ_{ij} – Kroneker delta funksiyasi.

2.2. Lyame doimiylari va ularning fizik mazmuni

Lyame doimiylari elastik materialning xossalarini ifodalaydi:

μ– kesish moduli (shear modulus), deformatsiyaga qarshilik.

λ – hajmiy deformatsiyaga qarshilikni bildiradi.

Ular quyidagi modullar bilan bog‘liq:

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

bu yerda *E* – Young moduli, *ν* – Poisson koeffitsienti.

3. Elastiklik tenglamalari va Lyame tenglamasi

3.1. Elastiklik tenglamalari tizimi

Elastik jismlarning harakatini aniqlash uchun quyidagi tenglamalar tizimi tuziladi:

a) Kinematik tenglama:

Deformatsiya tenzori siljish vektoriga bog‘liq:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

b) Fizik qonun (Hooke qonuni):

$$\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk} + 2\mu\varepsilon_{ij}$$

c) Muvozanat tenglamasi:

Tashqi kuchlar mavjud bo‘lsa:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + F_i = 0$$

3.2. Lyame tenglamasining chiqarilishi

Yuqoridagi uch tenglamani ketma-ket birlashtirib, Lyame tenglamasi olinadi.

Siljish vektorini $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ deb olsak, quyidagi tenglama hosil bo‘ladi:

$$\mu\nabla^2\mathbf{u} + (\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}) + \mathbf{F} = 0$$

Agar tashqi tana kuchlari $\boldsymbol{F}$=0 bo‘lsa, Lyame tenglamasi quyidagicha yoziladi:

$$\mu\nabla^2\mathbf{u} + (\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0$$

Bu tenglama elastik jismlarning ichki siljish holatini ifodalaydi va ularning kuch ta’sirida qanday harakatga kelishini aniqlashga xizmat qiladi.

4. Lyame tenglamasining qo‘llanishi

4.1. Amaliy masalalar

- Yarim tekislik: yer yuzasiga ta’sir qiluvchi kuchlar natijasidagi deformatsiyalarni hisoblash.
- Teshikli plastinka: stress konsentratsiyasi va kuchlanishlarni aniqlash.
- Quvur va halqalar: silindrik koordinatalarda Lyame tenglamasini yechish.

4.2. Chegara shartlari

Muammoni yechishda chegaraviy shartlar muhim rol o‘ynaydi:

- Displeysmentlar berilgan bo‘lsa: $u_i|_S = f_i$
- Kuchlanishlar berilgan bo‘lsa: $\sigma_{ij}n_j = T_i$

4.3. Yechim usullari

a) Analitik yechimlar:

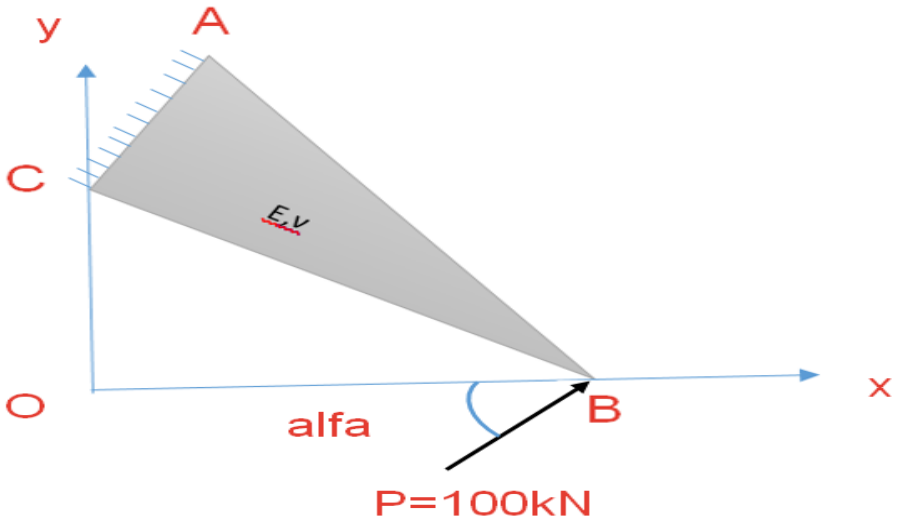
- Maxsus simmetriyali holatlar uchun.
- Potensial usullar.
- Kompleks funksiyalar nazariyasi asosida yechimlar.

b) Sonli usullar:

- Murakkab geometriya va shartlar uchun.
- Sonli farqlar usuli.
- Sonli elementlar usuli (FEM – Finite Element Method).

IV. AMALIY MASHG'ULOTLAR MAZMUNI

1-Amaliy mashg'ulot. Zamonaviy mexanikada matematik modellashtirish. Chekli elementlar metodi orqali Amaliyot na'muna uchburchakli element



Masalaning qo'yilishi: AC tomoni qattiq maxkamlangan uchburchakli plastinaning uchlari (3;8) , B(7;0) , C(0;5) nuqtalarda joylashgan. P kuch ta'sirida (burchak alfa=α) plastinaning deformatsion kuchlanish holatini aniqlang.

Plastina uchun bu yerda: E-yung moduli, ν- puasson koeffisenti

Yechish.

Chekli elementlar usuliga asosan to'liq jismni bitta uchburchakli element deb olsak, u holda plastinaning umumiy o'zgarishini *u(x;y)* va *v(x;y)* funksiyalar orqali yozamiz:

$$u(x;y)=\frac{1}{2\Delta}\left[(a_i+b_ix+c_iy)u_i+\left(a_j+b_jx+c_jy\right)u_j+(a_k+b_kx+c_k)u_k\right]$$

$$v(x;y)=\frac{1}{2\Delta}\left[(a_i+b_ix+c_iy)v_i+\left(a_j+b_jx+c_jy\right)v_j+(a_k+b_kx+c_k)v_k\right]$$

$\Delta=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & x_1 & y_1\\ 1 & x_2 & y_2\\ 1 & x_3 & y_3\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & 3 & 8\\ 1 & 7 & 0\\ 1 & 0 & 5\end{vmatrix}=18\,;$

$a_1=\begin{vmatrix}x_2 & y_2\\ x_3 & y_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}7 & 0\\ 0 & 5\end{vmatrix}=35\,;\ a_2=\begin{vmatrix}x_3 & y_3\\ x_1 & y_1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 5\\ 3 & 8\end{vmatrix}=-15\,;$

$a_3=\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & 8\\ 7 & 0\end{vmatrix}=-56\,;$

$b_1=\begin{vmatrix}y_2 & 1\\ y_3 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 1\\ 5 & 1\end{vmatrix}=-5\,;\ b_2=\begin{vmatrix}y_3 & 1\\ y_1 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5 & 1\\ 8 & 1\end{vmatrix}=-3\,;$

$b_3=\begin{vmatrix}y_1 & 1\\ y_2 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}8 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=8\,;$

$c_1=\begin{vmatrix}1 & x_2\\ 1 & x_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 7\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-7\,;\ c_2=\begin{vmatrix}1 & x_3\\ 1 & x_1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 3\end{vmatrix}=3\,;$

$c_3=\begin{vmatrix}1 & x_1\\ 1 & x_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 7\end{vmatrix}=4\,;$

$\varepsilon=Bu$ Koshi munosabati matrisasi B :

$B=\frac{1}{2\Delta}\begin{pmatrix}b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0\\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3\\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3\end{pmatrix}=\frac{1}{2\cdot 18}\begin{pmatrix}-5 & 0 & -3 & 0 & 8 & 0\\ 0 & -7 & 0 & 3 & 0 & 4\\ -7 & -5 & 3 & -3 & 4 & 8\end{pmatrix}=\frac{1}{36}\begin{pmatrix}-5 & 0 & -3 & 0 & 8 & 0\\ 0 & -7 & 0 & 3 & 0 & 4\\ -7 & -5 & 3 & -3 & 4 & 8\end{pmatrix};$

$\sigma=A*\varepsilon$ Guk qonuni matrisasi A:

$A=\frac{E}{1-\nu^2}\begin{pmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2}\end{pmatrix};$

Elementning qattiqlik matrisasi K:

$$K=\Delta\cdot B^T\cdot A^T\cdot B=18\cdot\frac{1}{36}\begin{pmatrix}-5 & 0 & -7\\ 0 & -7 & -5\\ -3 & 0 & 3\\ 0 & 3 & -3\\ 8 & 0 & 4\\ 0 & 4 & 8\end{pmatrix}\cdot\frac{E}{1-\nu^2}\begin{pmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2}\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{36}\begin{pmatrix}-5 & 0 & -3 & 0 & 8 & 0\\ 0 & -7 & 0 & 3 & 0 & 4\\ -7 & -5 & 3 & -3 & 4 & 8\end{pmatrix};$$

$$K=\frac{1}{72}\cdot\frac{E}{1-\nu^2}\begin{pmatrix}\frac{99-49\nu}{2} & \frac{35\nu+35}{2} & \frac{9+21\nu}{2} & \frac{21-51\nu}{2} & -54+14\nu & 8\nu-28\\ \frac{35-35\nu}{2} & \frac{123-25\nu}{2} & \frac{57\nu-15}{2} & \frac{-27-15\nu}{2} & -10-46\nu & -48+20\nu\\ \frac{9+21\nu}{2} & \frac{57\nu-15}{2} & \frac{27-9\nu}{2} & \frac{9-9\nu}{2} & -18-6\nu & -24\nu+12\\ \frac{21-51\nu}{2} & \frac{-27-15\nu}{2} & \frac{9-9\nu}{2} & \frac{27-9\nu}{2} & 30\nu-6 & 12\nu\\ -54+14\nu & -10-46\nu & -18-6\nu & 30\nu-6 & -8\nu+72 & 16\nu+16\\ 8\nu-28 & -48+20\nu & -24\nu+12 & 12\nu & 16\nu+16 & 48-32\nu\end{pmatrix};$$

Geometrik bog'lanishlar hisobidan: $u_1=0;\ v_1=0;\ u_3=0;\ v_3=0;\ u_2=?;\ v_2=?;$ Ta'sir va reaksiya kuchlari esa: $R_{1x}=?;\ R_{1y}=?;\ R_{3x}=?;\ R_{3y}=?;\ R_{2x}=Pcos\alpha;\ R_{2y}=Psin\alpha$

$$K*U=F$$

$$\frac{1}{72}\cdot\frac{E}{1-\nu^2}\begin{pmatrix} \frac{99-49\nu}{2} & \frac{35\nu+35}{2} & \frac{9+21\nu}{2} & \frac{21-51\nu}{2} & -54+14\nu & 8\nu-28 \\ \frac{35-35\nu}{2} & \frac{123-25\nu}{2} & \frac{57\nu-15}{2} & \frac{-27-15\nu}{2} & -10-46\nu & -48+20\nu \\ \frac{9+21\nu}{2} & \frac{57\nu-15}{2} & \frac{27-9\nu}{2} & \frac{9-9\nu}{2} & -18-6\nu & -24\nu+12 \\ \frac{21-51\nu}{2} & \frac{-27-15\nu}{2} & \frac{9-9\nu}{2} & \frac{27-9\nu}{2} & 30\nu-6 & 12\nu \\ -54+14\nu & -10-46\nu & -18-6\nu & 30\nu-6 & -8\nu+72 & 16\nu+16 \\ 8\nu-28 & -48+20\nu & -24\nu+12 & 12\nu & 16\nu+16 & 48-32\nu \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} R_{1x} \\ R_{1y} \\ R_{2x} \\ R_{2y} \\ R_{3x} \\ R_{3y} \end{pmatrix};$$

$$\frac{1}{144}\cdot\frac{E}{1-\nu^2}\begin{pmatrix} 99-49\nu & 35\nu+35 & 9+21\nu & 21-51\nu & -108+28\nu & 16\nu-56 \\ 35-35\nu & 123-25\nu & 57\nu-15 & -27-15\nu & -20-92\nu & -96+40\nu \\ 9+21\nu & 57\nu-15 & 27-9\nu & 9-9\nu & -36-12\nu & -48\nu+24 \\ 21-51\nu & -27-15\nu & 9-9\nu & 27-9\nu & 60\nu-12 & 24\nu \\ -108+28\nu & -20-46\nu & -36-12\nu & 60\nu-12 & -16\nu+144 & 32\nu+32 \\ 16\nu-56 & -96+40\nu & -48\nu+24 & 24\nu & 32\nu+32 & 96-64\nu \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u_2 \\ v_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} R_{1x} \\ R_{1y} \\ Pcos\alpha \\ Psin\alpha \\ R_{3x} \\ R_{3y} \end{pmatrix};$$

Bundan quyidagi tenglikga ega bo'lamiz:

$$\frac{1}{144}\cdot\frac{E}{1-\nu^2}\begin{pmatrix} 27-9\nu & 9-9\nu \\ 9-9\nu & 27-9\nu \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} Pcos\alpha \\ Psin\alpha \end{pmatrix};$$

Bundan

$$u_2=\frac{(3-\nu)\cdot cos\alpha-(1-\nu)\cdot sin\alpha}{2-\nu}\cdot\frac{1-\nu^2}{E}\cdot 4P$$

$$v_2=\frac{(3-\nu)\cdot sin\alpha-(1-\nu)\cdot cos\alpha}{2-\nu}\cdot\frac{1-\nu^2}{E}\cdot 4P$$

Bundan deformatsiya elementlari; $\varepsilon = Bu$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}=\frac{1}{2\Delta}\begin{pmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_2 \end{pmatrix}=\frac{1}{36}\begin{pmatrix} -5 & 0 & -3 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ -7 & -5 & 3 & -3 & 4 & 8 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{(3-\nu)\cdot cos\alpha-(1-\nu)\cdot sin\alpha}{2-\nu}\cdot\frac{1-\nu^2}{E}\cdot 4P \\ \frac{(3-\nu)\cdot sin\alpha-(1-\nu)\cdot cos\alpha}{2-\nu}\cdot\frac{1-\nu^2}{E}\cdot 4P \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{(3-\nu)\cdot cos\alpha-(1-\nu)\cdot sin\alpha}{2-\nu}\cdot\frac{1-\nu^2}{3E}\cdot P \\ \frac{(3-\nu)\cdot sin\alpha-(1-\nu)\cdot cos\alpha}{2-\nu}\cdot\frac{1-\nu^2}{3E}\cdot P \\ \frac{(3-\nu)\cdot cos\alpha-(1-\nu)\cdot sin\alpha}{2-\nu}\cdot\frac{1-\nu^2}{3E}\cdot P-\frac{(3-\nu)\cdot sin\alpha-(1-\nu)\cdot cos\alpha}{2-\nu}\cdot\frac{1-\nu^2}{3E}\cdot P \end{pmatrix};$$

Bundan deformatsiya tenzori

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}=\frac{1-\nu^2}{3(2-\nu)E}\cdot P\begin{pmatrix} -(3-\nu)\cdot cos\alpha+(1-\nu)\cdot sin\alpha \\ (3-\nu)\cdot sin\alpha-(1-\nu)\cdot cos\alpha \\ 2(2-\nu)\cdot cos\alpha-2(2-\nu)\cdot sin\alpha \end{pmatrix};$$

Kuchlanish tenzori esa $\sigma = A * \varepsilon$ Guk qonuniga ko'ra

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix}=\frac{E}{1-\nu^2}\begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix}*\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}=\frac{E}{1-\nu^2}\begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix}\cdot\frac{1-\nu^2}{3(2-\nu)E}\cdot P\begin{pmatrix} -(3-\nu)\cdot cos\alpha+(1-\nu)\cdot sin\alpha \\ (3-\nu)\cdot sin\alpha-(1-\nu)\cdot cos\alpha \\ 2(2-\nu)\cdot cos\alpha-2(2-\nu)\cdot sin\alpha \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{3(2-\nu)}P\begin{pmatrix} -(3-\nu)\cdot cos\alpha+(1-\nu)\cdot sin\alpha \\ (3-\nu)\cdot sin\alpha-(1-\nu)\cdot cos\alpha \\ 2(2-\nu)\cdot cos\alpha-2(2-\nu)\cdot sin\alpha \end{pmatrix};$$

Bundan kuchlanish tenzori shu uchburchak elementi uchun

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix}=\frac{1}{3(2-\nu)}12P\begin{pmatrix} (3+\nu^2)\cdot cos\alpha+(1+2\nu-\nu^2)\cdot sin\alpha \\ (\nu^2-2\nu-1)\cdot cos\alpha+(3-\nu^2)\cdot sin\alpha \\ (2-\nu)\cdot(1-\nu)(cos\alpha-sin\alpha) \end{pmatrix}$$

ga teng bo'ladi

2-Amaliy mashg‘ulot : Ideal siqilmaydigan suyuqlikni tekis uyurmasiz xarakati

Reja:

2.1 Koshi-Lagranj integrali.

2.2 Ideal siqilmaydigan suyuqlikni uyurmasiz harakatini o‘rganishga kompleks o‘zgaruvchili funksiyalar nazariyasini qo‘llash.

2.3 Kompleks potensiallarga misollar .

Tayanch so‘z va iboralar: *ideal suyuqlik differensial tenglamasining Gromeko-Lemb ko‘rinishini, Laplas tenglamasi, tok funktsiyasi, kompleks tezlik, kompleks potensial. elastik jism, Guk qonunini, yopishqoq suyuqlik, Navye-Stoks formulasi, izotrop chiziqli elastik jism, izotrop chiziqli yopishqoq suyuqlik.*

2.1 Koshi-Lagranj integrali.

Ideal suyuqlik va gazlar uchun tutash muhit harakat miqdori o‘zgarishi tenglamasi asosida olingan Eyler tenglamalari stasionar va nostatsionar oqimlar, siqiluvchan va siqilmas ideal suyuqlik va gazlar oqimlarini ifodalay olishiga ishonch hosil qilgan edik.

Bu tenglamalarda, agar $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$ bo‘lsa va ma’lum qo‘shimcha shartlar bajarilganda, Bernulli integrali olinishini ko‘rdik. endi $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \neq 0$ bo‘la oladigan, nostatsionar tezlik maydoniga ega muhit harakatini ko‘raylik.

Ideal suyuqlik uchun biror koordinatalar sistemasidagi harakat differensial tenglamasining Gromeko-Lemb ko‘rinishini yozaylik :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + grad\,\frac{v^2}{2} + 2[\vec{\omega} \times \vec{v}] = -\frac{1}{\rho}grad\ p + \vec{F} \tag{2.1}$$

Quyidagi shartlar bajariladi deb faraz qilaylik:

1) $\vec{\omega} = \frac{1}{2}rot\vec{v} = 0$ ва $\vec{v} = grad\ \vec{\varphi}$

2) $p = p(\rho)$ - baratropik oqim ko‘riladi va demak butun harakat maydoni uchun bosim funksiyasi mavjud bo‘lib,

$$\frac{1}{\rho}grad\ p = grad P$$

bo‘lsin deylik.

U holda (2.1) quyidagi ko‘rinishni oladi:

$$grad\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{v^2}{2} + P\right) = \vec{F}$$

Bundan massaviy kuchlar zichligi $\vec{F}$ potensialli bo‘lishi kerakligi kelib chiqadi: $\vec{F} = gradU$.

U hodla dastlabki (2.1) tenglama ushbu ko‘rinishda yoziladi:

$$grad\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}+\frac{v^2}{2}+P-U\right)=0 \tag{2.2}$$

(2.2) dan ushbu munosabatni hosil qilamiz:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}+\frac{1}{2}(grad\varphi)^2+P-U=f(t) \tag{2.3}$$

Bu yerda $f(t)$ vaqtning ixtiyoriy funksiyasi (2.3) ni (2.1) ning yuqoridagi keltirilgan shartlar bajarilgandagi integrali deyish mumkin. Bu integral Koshi-Lagranj integrali deyiladi va bu integral oqim sohasining barcha nuqtalarida o‘rinlidir.

Oqimning biror nuqtasida (2.3) ning chap qismi ma’lum bo‘lsa, u holda $f(t)$ ni aniqlab yozish mumkin. Bundan tashqari (2.3) da $\varphi(x,y,z,t)$ o‘rniga $\varphi_1(x,y,z,t)=\varphi(x,y,z,t)+\int f(t)dt$ kiritilsa, φ_1 ga nisbatan o‘ng tomoni nolga aylangan (2.3) tenglamani hosil qilish mumkin. $grad\varphi=grad\varphi_1$ bo‘lganligi uchun bunday almashtirish tezlik maydoni aniqlanishiga tasir etmaydi.

(2.3) da $f(t)=0$ deb olaylik va U ma’lum bo‘lib, $\varphi(x,y,z,t)$ aniqlangan bo‘lsa, suyuqlik oqimi har bir nuqtasidagi bosimni hisoblash mumkin bo‘ladi.

Ko‘rish qiyin emaski, Koshi–Lagranj integralidan hususiy holda Bernulli integrali hosil bo‘laoladi.

Harakatdagi koordinatalar sistemasida Koshi-Lagranj integrali. Ma’lumki, mexanik harakat, jumladan suyuqlik zarralarining harakati biror koordinatalar sistemasiga nisbatan o‘rganiladi. Yuqorida keltirilgan Koshi–Lagranj integrali harakat o‘rganilayotgan koordinatalar sistemasida olingandir. Ayrim hollarda Koshi–Lagranj integralini dastlabki tanlangan koordinatalar sistemasiga nisbatan yozilishi qulay bo‘lishi mumkin. Haqiqatdan ham, masalan, suyuqlikda harakatda bo‘lgan jismga biriktirilgan koordinatalar sistemasiga nisbatan ham o‘rganilishi mumkin.

Jism bilan mustahkamlangan koordinatalar sistemasini ξ,η,ζ , dastlabki koordinatalar sistemasini x,y,z deylik. Koordinatalar almashtirish formulalarini yozaylik:

$$x=x(\xi,\eta,\zeta,t),\ y=y(\xi,\eta,\zeta,t),\ z=z(\xi,\eta,\zeta,t) \tag{2.4}$$

Ko‘rish qiyin emaski, agar $\varphi(x,y,z,t)$ tezlik potensiali bo‘lsa, umumiy holda

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|_{x,y,z=const}\neq\left.\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|_{\xi,\eta,\zeta=const} \tag{2.5}$$

(2.4) ni etiborga olib yoza olamiz:

$$\frac{\partial\varphi(\xi,\eta,\zeta,t)}{\partial t}=\frac{\partial\varphi(x,y,z,t)}{\partial t}+grad\varphi\cdot\vec{v}_{куч} \tag{2.6}$$

(2.6) ifoda o‘ng tomonining ikkinchi hadi invariant miqdor bo‘lib, x,y,z va ξ,η,ζ koordinatalar sistemasida bir hil qiymatga ega. x,y,z koordinatalarida yuqorida keltirilgan (2.6) ifoda ξ,η,ζ koordinatalarida ushbu ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$\frac{\partial\varphi(\xi,\eta,\zeta,t)}{\partial t}-\vec{v}\cdot\vec{v}_{куч}+\frac{v^2}{2}+\mathrm{P}-U=f(t) \tag{2.7}$$

Agar harakatdagi koordinatalar sistemasi absolyut qattiq jism sifatida harakatda bo‘laoladi desak, bu harakat tezligida, nazariy mexanikadan ma’lumki, ko‘chirma harakat tezligi ilgarilanma va oniy burchak tezliklari orqali ifodalanadi:

$$\vec{v}_{куч}=\vec{v}_{0_1}+[\vec{\omega}\times\vec{r}] \tag{2.8}$$

Bu yerda $\vec{v}_{0_1}$ - x,y,z koordinatalar boshi nuqtasi tezligi, $\vec{\omega}$ - harakatdagi koordinatalar sistemasi oniy burchak tezligi, $\vec{r}$ - harakatdagi koordinatalar sistemasiga ko‘ra nuqta radius vektori.

Agar harakatdagi koordinatalar sistemasi hususiy holda $0x$ o‘qi bo‘ylab $\vec{v}$ tezlikda harakatda bo‘laoladigan hol ko‘riladigan bo‘lsa, (4.4) formula ushbu ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$\frac{\partial\varphi(\xi,\eta,\zeta,t)}{\partial t}-\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\cdot V+\frac{(grad\varphi)^2}{2}+\mathrm{P}-U=f(t) \tag{2.9}$$

Agar ko‘rilayotgan suyuqlik bir jinsli siqilmas suyuqlikdan iborat bo‘lsa, (2.6) quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\cdot V+\frac{(grad\varphi)^2}{2}+\frac{P}{\rho}-U=f(t) \tag{2.10}$$

Ideal siqilmas suyuqlikning potensialli tezlik maydonidagi impulsiv bosim ta’siridagi harakati masalasi.

Biror τ hajmdagi ideal siqilmas suyuqlikga juda qisqa t' vaqt davomida cheksiz katta yuqori bosim tasir etadi deylik. Suyuqlik harakatini o‘rganish uchun Eyler tenglamasining vektor ko‘rinishini yozaylik

$$\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{F}-\frac{1}{\rho}grad\ p \tag{2.11}$$

$[0,t']$ vaqt oralig‘ida bu tenglamani integrallaylik

$$\vec{v}(t',x,y,z)-\vec{v}(0,x,y,z)=\int_0^{t'}\vec{F}dt-\int_0^{t'}\frac{1}{\rho}grad\ p\,dt \tag{2.12}$$

Cheksiz kichik t' vaqt davomida tasir etuvchi bosim p' cheksiz katta bo‘lib, uning impulsi $\int_0^{t'}p'dt$ chekli miqdor bo‘lsin deylik. U holda, $p_t=\lim_{t'\to 0}\int_0^{t'}p'dt$ kiritsak, ushbu munosabatga ega bo‘lamiz

$$\vec{v}(t',M)-\vec{v}(0,M)=grad\varphi$$

buyerda $\varphi=-\dfrac{p_t}{\rho}$.

Siqilmas suyuqlik uchun $\vec{v} = grad\varphi$ bo‘lgani uchun, $\Delta\varphi = 0$ bo‘lib, bu tenglama Laplas tenglamasi deyiladi.

$\sum$ sirt bilan chegaralangan bir bog‘li τ sohada Laplas tenglamasiningechimini uning chegaradagi qiymatiga ko‘ra topish (tashqi bosim impulsi berilgan bo‘lsa), Dirixle masalasidan iborat bo‘ladi va uningechimi bir qiymatli ravishda aniqlanadi. $\sum$ sirtga tasir etuvchi tashqi impulsiv kuch tasiri butun τ sohaga cheksiz katta tezlikda tarqalishi zichlikning o‘zgarmasligidan kelib chiqadi.

2.2 Kompleks o‘zgaruvchili analitik funksiyalar va ideal suyuqlikning potensialli harakati.

Oqish (tok)funksiyasi. Siqilmas suyuqlikni statsionar harakati uchun

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho div\vec{v} = 0,$$

tenglama quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \tag{2.13}$$

Oqish chiziqlari differentsal tenglamasi esa:

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} \qquad \text{yoki} \qquad -vdx + udy = 0,$$

Bu yerda u va v - suyuqlik zarrasi teziligi vektorining tashkil etuvchilari.

So‘nggi tenglamaning chap tomoni biror ψ funksiyaning to‘la differensiali, yani $d\psi = 0$ ekanini ko‘rish qiyin emas. Buning uchun

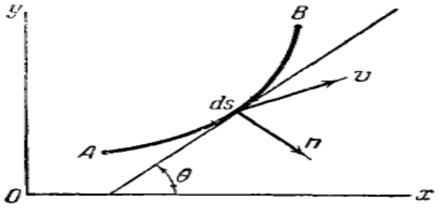
$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{2.14}$$

Ushbu $\psi(x, y)$ funktsiyani oqish (tok) funtsyiasi deb olish kifoya. U har bir oqish chizig’ida o‘zgarmas qiymatni qabul qiladi: $\psi(x, y) = C$.

Ushbu Funksiya yordamida biror egri chiziqning (oqish chizig’i bo‘lmagan) ikkita $A(x_1, y_1)$ va $B(x_2, y_2)$ nuqtalari orasidan o‘tuvchi suyuqlik oqimini hisoblash mumkin (6-rasm). Haqiqatdan

$$\begin{aligned} Q &= \int_B^A (\vec{V} \cdot \vec{n}) ds = \int_B^A [u\cos(n,x) + v\cos(n,y)] ds = \\ &= \int_B^A (u\sin\theta - v\cos\theta) ds = \int_B^A (-vdx + udy) = \int_B^A d\psi = \psi(x_1, y_1) - \psi(x_2, y_2) \end{aligned} \tag{2.15}$$

Buyerda θ - ds va Ox orasidagi burchak.



6-rasm

Yuqoridagi formulalar harakat potensialligi (uyurmalar yo'qligi) talab qilinmasdan olingan. Haqiqatdan, (2.14) ga ko'ra uyurma vektorining tashkil etuvchilari ushbu ko'rinishga ega

$$\omega_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad \omega_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = 0,$$

$$\omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = -\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\right) = -\Delta\psi$$

Endi harakatning potensialliligini, ya'ni uyurmalar mavjud emasligini talab qilsak

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \text{ yoki } \vec{V} = grad\varphi; \qquad \omega_x = \omega_y = \omega_z = 0 \qquad (2.16)$$

ish funksiyasi Laplas tenglamasini qanoatlantirishini ko'rish mumkin:

$$\Delta\psi = 0 \qquad (2.17)$$

(2.13) va (2.14) dan esa

$$\Delta\varphi = 0 \qquad (2.18)$$

ekanligi kelib chiqadi.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \qquad (2.19)$$

Kompleks tezlik va Kompleks potensial.

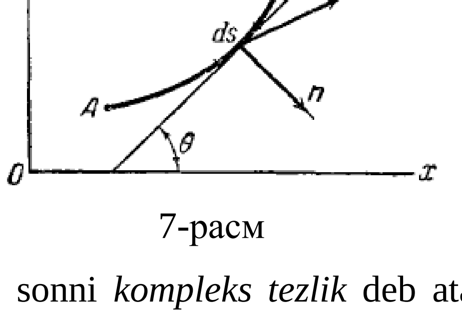
φ va ψ funktsyialar Koshi – Riman sharti (2.19) ni qanoatlantirgani tufayli $W = \varphi + i\psi$ ifoda $z = x + iy$ kompleks argumentning analitik funksiyasi bo'ladi. Bu $w = f(z)$ Funksiya kompleks potensial deb ataladi.

$w = f(z)$ funktsiyaning hosilasini hisoblaymiz

$$\bar{V} = \frac{dW}{dz} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} i = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - i\frac{\partial \varphi}{\partial y} \qquad (2.20)$$

Ushbu hosila $\frac{dW}{dz} = u - iv$ tezlik bilan bog'liq ekanligi ko'rinib turibdi.

Agar haqiqiy birlik +1 va mavhum birlik i larni Ox va Oy o'qlari bo'ylab yo'nalgan birlik vektorlar sifatida qaralsa, $u + iv$ Kompleks son tezlik vektori V bilan tasvirlanadi (7-rasm); qo'shma son $\frac{dW}{dz} = u - iv$ tezlik vektori V ning Ox o'qiga nisbatan ko'zgu aksi bo'lib, $\bar{V}$ vektor bilan tasvirlanadi.



7-расм

Mazkur $\vec{V} = \frac{dW}{dz}$ kompleks sonni *kompleks tezlik* deb ataladi; Kompleks tezlik moduli tezlik miqdoriga teng: $\left|\dfrac{dW}{dz}\right| = \sqrt{u^2 + v^2} = |V|.$

Yuqorida aytilganlardan va (2.20) dan har bir $f(z)$ analitik Funksiya oqish chiziqlari $\psi = const$ va $\varphi = const$ izopotensial chiziqlarining muayyan sistemasini beradi, yani, umuman olganda, muayyan tezlik maydoni kinematikasi kartinasini aniqlaydi. Kompleks argumentli funktsiyalar nazariyasi va suyuqlik tekis harakati kinematikasini o‘rganish orasidagi ushbu bog’lanish mazkur harakatni tadqiq qilish uchun katta imkoniyatlar beradi. Bunda kompleks potensiali W addiktiv o‘zgarmas aniqligida kiritiladi.

2.3Kompleks potensiallarga misollar

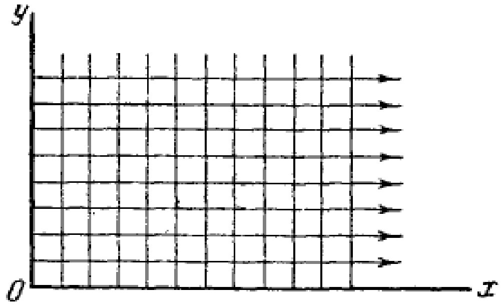
1) $W = az$, buyerda a- musbat son. W funksiyaning haqiqiy va mavhum qismlarini ajratib quyidagilarni topamiz

$\varphi = ax = const$, $\psi = ay = const$

bundan izopotensiallar Oy o‘qiga parallel, oqish chiziqlari esa Ox o‘qiga parallel to‘g‘ri chiziqlar ekanligini ko‘ramiz (8-rasm). Tezlik o‘zgarmas va $a > 0$ bo‘lsa Ox o‘qi bo‘ylab yo’nalgan:

$u = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = a$, $v = \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$, $\varphi = const$

Bunday oqim bir jinsli ilgarlanma deb ataladi.

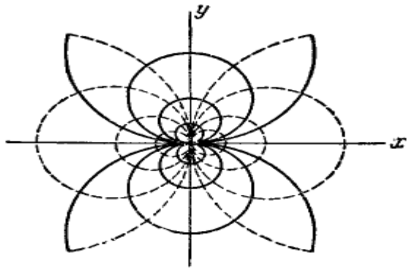


8-расм

2) Funksiya $W = \dfrac{1}{z}$, yani $W = \varphi + i\psi = \dfrac{x}{x^2 + y^2} - \dfrac{y}{x^2 + y^2} i$ bo‘lsa, oqish chiziqlari Ox o‘qiga koordinata boshida urinuvchi aylanalar sistemasidan iborat bo‘ladi

$$\frac{y}{x^2 + y^2} = const = C \Rightarrow x^2 + y^2 - \frac{1}{c} y = 0,$$

izopotensial chiziqlar esa $\dfrac{x}{x^2 + y^2} = const$ Oy o‘qiga koordinata boshida urinuvchi aylanalar sistemasini beradi (9-rasm).



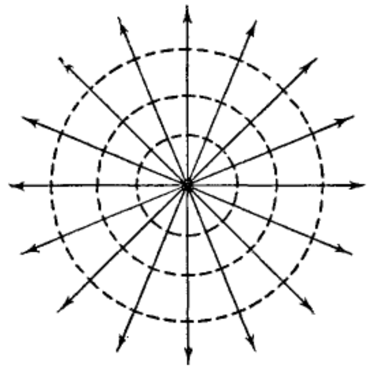
9-rasm

Kompleks tezlik ifodasi $\frac{dW}{dz}=-\frac{1}{z^2}$ tezlik miqdori koordinata boshida cheksiz katta bo‘lishini ko‘rsatadi. Bu holda koordinata boshi tezlik uchun maxsus nuqta ikki karrali qutb va Kompleks potensial uchun oddiy qutb bo‘ladi.

1) $W=\ln z$. Kompleks o‘zgaruvchini qutb koordinatalar sistemasida yozsak

$$z=re^{i\theta}=r(\cos\theta+i\sin\theta),$$

$\varphi=\ln r=const$, $\psi=\theta=const$ ekanligini, yani oqish chiziqlari $\theta=const$ to‘g’ri chiziqlar va izopotensial chiziqlari markazi koordinata boshida bo‘lgan $r=const$ konsentrik aylanalar bo‘lishini ko‘ramiz (10-rasm). Koordinata boshi tezlik uchun oddiy qutb bo‘lib, Kompleks potensial uchun logarifmik maxsuslikni beradi.



10-rasm

Nazorat savollari

1. Ideal suyuqlikning harakat tenglamasini Gromeko-Lamb ko‘rinishida yozing.
2. Eyler tenglamasining birinchi integrali – Koshi-Lagranj integrali o‘rinli bo‘lgan shartlarni ayting?
3. Suyuqlikning qanday harakati potensialli deyiladi?
4. Qanday shartlar bajarilsa Laplas tenglamasi kelib chiqadi.
5. Barotropik jarayon uchun suyuqlikning gidrodinamik parametrlari orasidagi bog‘lanishni aniqlang?
6. Oqim sohasida Kompleks potensial analitik Funksiya bo‘lishi uchun qanday shartlar bajarilishi kerak.
7. Kompleks tezlik qanday aniqlanadi.
8. Kompleks potensiallarga misollar keltiring.
9. Ideal siqilmas suyuqlikning tekislikka parallel potensialli oqimi uchun Koshi-Riman shartini tushuntiring.

3-Amaliy mashg‘ulot: Yopishqoq suyuqlik uchun Nave-Stok tenglamasi.

Reja:

1. Nave-Stoks tenglamasini yechishga chiziqli masalalar.
2. Blazius masalasini sonli yechish

Tayanch so‘z va iboralar: *potensialli oqim, Nave-Stoks tenglamasining aniq yechimlari, qatlamli nostatsionar oqim.*

2.1 Nave-Stoks tenglamasini yechishga chiziqli masalalar. (Siqilmaydigan suyuqlikning plastinkani oqib o‘tish masalasi)

Chegaraviy qatlam tenglamalarini qo‘llashning eng oddiy misoli juda yupqa tekis plastinka bo‘ylab oqimdir. Bunday oqim Prandtl tenglamalarini qo‘llashning birinchi illyustratsiyasi sifatida G.Blazius tomonidan o‘rganilgan.

Oqim tezligi U_0 o‘zgarmas va x o‘qi bo‘ylab (plastinka bo‘ylab) yo‘nalgan absolyut silliq yupqa qo‘zg‘almas plastinka, ya’ni $y = 0,\ x \geq 0$ yarim tekislikdagi statsionar chegaraviy qatlam masalasining to‘la yechimini topamiz (1-rasm).

U holda oqim statsionar kabi bo‘lgani uchun tashqi oqim p_0 o‘zgarmas bosim bilan ilgarilanma harakatda bo‘ladi, u holda quyidagi tenglama o‘rinli:

$$\begin{cases} u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} + \nu\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \text{ yoki } p = p(x,t)$$

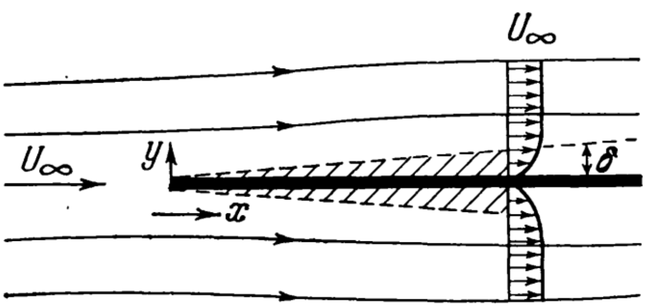
Plastinkada chegaraviy shartlar:

$y = 0$ da $x \geq 0,\quad u = v = 0;\quad y = \infty$ da $u = U_0$. (2)

Jismning sirtiga o‘tkazilgan normal bo‘yicha chegaraviy qatlamning berilgan barcha nuqtalarida bosim bir xil qiymatga ega:

$$\frac{\partial p}{\partial x} \equiv 0.$$

Chegaraviy qatlamda bu xususiyat, uning qalinligini kichikligi-tok chiziqlarini jism sirtiga parallellik natijasidan kelib chiqadi.



1-rasm. Bo‘ylama yo‘nalishda plastinkani oqib o‘tishda chegaraviy qatlam.

Ushbu xususiyat qaralayotgan holda chegaraviy qatlam sohasidagi statsionar suyuqlik harakatini (1) tenglamalar sistemasi birinchisining o‘ng tomonidagi $\frac{\partial p}{\partial x}$ xususiy hosilani $\frac{dp}{dx}$ to‘liq hosilaga almashtirish imkonini beradi. Shunga ko‘ra $p(x)$ bosim taqsimoti chegaraviy qatlam bo‘ylab tashqi potensial oqimdagi bosim taqsimoti bilan ustma-ust tushadi.

Chegaraviy qatlam qalinligi yupqa bo‘lgani uchun bu tezlikni jism sirtidagi faqat x bo‘ylama koordinataga bog‘liq bo‘lgan suyuqlikni jism sirti bo‘ylab $U(x)$ siljish tezligiga teng deb olish mumkin.

Bernulli teoremasiga muvofiq,

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = -U\frac{dU}{dx}\,. \tag{3}$$

Bu tenglamani integrallab, Bernulli tenglamasini olamiz:

$$p + \frac{\rho}{2}U^2 = const.$$

Tashqi oqim uchun chegaraviy shartlar taqriban ishqalanish kuchi hisobiga olinmagan oqim kabi bo‘ladi. Chegaraviy qatlam juda yupqa, uning tashqi chetida ko‘ndalang tezlik juda kichik $\frac{v}{V} \sim \frac{\delta}{l}$. Shu sababli, qaralayotgan jism devoridagi tezlikning normal tashkil etuvchisi nolga teng bo‘lgan potensialli oqimni yopishqoq suyuqlikning tashqi oqimi uchun juda yaxshi yaqinlashuv sifatida qarash mumkin.

Chegaraviy qatlamning bo‘ylama yo‘nalishida bosim kamayishini aniqlashda jism devori bilan tok chiziqi ustma-ust tushuvchi, berilgan deb hisoblangan potensialli oqim uchun Bernulli tenglamasini tuzish yetarli.

(3) ni e’tiborga olib, (2.7) sistemani quyidagicha yozamiz:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} = U\dfrac{dU}{dx} + \nu\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases} \tag{4}$$

(4) tenglamalar xususiy hosilali 2-tartibli parabolik tipdagi chiziqsiz tenglamalar sistemasini ifodalaydi. Bu tenglamalar 1904-yilda Prandtl tomonidan olingan.

Prandtl g‘oyasiga ko‘ra, (4) tenglamalarning birinchisiga kiruvchi $U(x)$ tashqi tezlik, ideal siqilmaydigan potensialli suyuqlikning jismni oqib o‘tishi nazariyasi bo‘yicha oldindan hisoblangan deb qaraladi. Masalani bunday qo‘yilishida, jismni oqib o‘tishda uning butun konturi bo‘ylab hosil bo‘lgan chegaraviy qatlam shunchalik yupqaki, uning tashqi oqimga ta’siri kichik deb faraz qilinadi.

(4) tenglamani quyidagi chegaraviy shartlar asosida integrallaymiz:

$$y = 0 \text{ da } \ u = v = 0,$$
$$y \to \infty \text{ da } \ u \to U(x),$$
$$x = x_0 \text{ da } \ u = u_0(y)\,.$$

Bu shartlarning birinchi ikkitasi yopishqoq suyuqlikni qattiq devor $(y = 0)$ ga yopishish shartini ifodalaydi. Uchinchisi esa bo‘ylama tezlikni chegaraviy qatlam chegarasidagi potensial oqim $U(x)$ tezligiga asimptotik yaqinlashishini ifodalaydi.

Chegaraviy qatlamning biror boshlang‘ich $x = x_0$ kesimida berilgan $u_0(y)$ tezlik profilini ifodalovchi oxirgi chegaraviy shart parabolik tenglamalar uchun harakterli hisoblanadi. Qaralayotgan sistema hech qanday harakterli uzunlikka ega emasligi sababli, faraz o‘z-o‘zidan $u(y)$ tezlik profillarini plastinkaning old chetidan turli x masofalarda bir-biriga affin o‘xshashligini ko‘rsatadi, agarda u va y uchun tegishli masshtablar tanlansa, bir-biriga mos kelishi mumkin.

Masshtab sifatida biz u uchun oqimning U_∞ tezligini, y uchun esa masshtab sifatida x koordinatani ortishi bilan o‘sib boradigan $\delta(x)$ chegaraviy qatlam qalinligini tanlaymiz. Keyin chegaraviy qatlamdagi barcha tezlik profillari bir-biriga affin o‘xshash degan taxminni quyidagicha yozish mumkin:

$$\frac{u}{U_\infty} = \varphi\left(\frac{y}{\delta}\right),$$

bunda φ funksiya plastinkaning old chetidan barcha x masofalar uchun bir xil bo‘lishi kerak.

Chegaraviy qatlamning qalinligini baholash uchun biz quyidagi usulga murojaat qilamiz. Nav’e-Stoks tenglamalarining oldin ko‘rib chiqilgan aniq yechimlariga asoslanib, chegaraviy qatlamning qalinligi uchun, masalan, to‘satdan harakatga kelgan plastinkada, $\delta = \sqrt{\nu t}$ baholashni olamiz.

Qaralayotgan masalaga tadbiq qilishda, suyuqlik zarrachasini plastinkaning old chetidan x koordinatali nuqtaga o‘tishi uchun zarur bo‘lgan t vaqt ichida olamiz. Agar zarracha chegaraviy qatlamdan tashqarida oqsa, u holda bu vaqt $t = \frac{x}{U_\infty}$ ga teng.

Shunday qilib, qaralayotgan holda, biz chegaraviy qatlam qalinligi uchun $\delta = \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}$ baholashga ega bo‘lamiz. Endi y koordinata o‘rniga boshqa o‘lchovsiz koordinata kiritamiz: $\eta = \frac{y}{\delta}$ yoki δ ning qiymati bilan almashtirgandan so‘ng,

$$\eta = y\sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} \tag{5}$$

Bundan tashqari, uzluksizlik tenglamasini integrallash uchun $\psi(x, y)$ oqish funksiyasini kiritamiz:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$\psi(x, y)$ oqish funksiyasini quyidagi ko‘rinishda olamiz:

$$\psi = \sqrt{\nu x U_\infty}\, f(\eta) \tag{6}$$

bunda $f(\eta)$ o‘lchovsiz funksiya.

Keyin tezlikni bo‘ylama va ko‘ndalang komponentalari uchun

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial \eta}\,\frac{\partial \eta}{\partial y} = U_\infty\, f'(\eta) \tag{7}$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\nu U_\infty}{x}}(\eta f' - f) \tag{8}$$

ifodani olamiz, bu yerda f' hosila f funksiyadan η bo‘yicha olingan.

Ushbu u va v ifodalarni (4) tenglamaga qo‘yib, $f(\eta)$ o‘lchovsiz oqish funksiyasini aniqlash uchun quyidagi oddiy differensial tenglamani olamiz:

$$-\frac{U_\infty^2}{2x}\eta f' f'' + \frac{U_\infty^2}{2x}(\eta f' - f)f'' = \nu\frac{U_\infty^2}{2x}f'''$$

yoki soddalashtirilgandan keyin

$$2f''' + ff'' = 0 \tag{9}$$

(2), (7) ва (8) tengliklar asosida chegaraviy shartlar quyidagi ko‘rinishni oladi:

$$\begin{cases} \eta = 0 \;\; da\; f = 0, f' = 0 \\ \quad \eta = \infty \;\; da\; f' = 1. \end{cases} \tag{10}$$

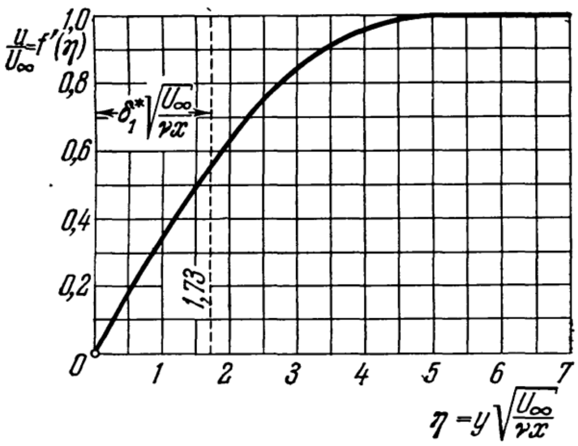
(2.11), (2.12) formulalar bilan berilgan almashtirishlarni bajarib, xususiy hosilali (2.10) tenglamalar sistemasi tok funksiyasiga nisbatan bitta oddiy differensial tenglama bilan almashtirildi. (2.15)-nochiziqli uchinchi tartibli tenglama, (2.16) uchta chegaraviy shartlar yechimni to‘liq aniqlash uchun yetarli.

(2.15) differensial tenglamani analitik yechish ancha qiyin. G.Blazius $f(\eta)$ funksiyani $\eta = 0$ nuqta atrofida darajali qatorga va η ning katta qiymatlari uchun asimptotik yoyib, keyin esa har ikkala yoyishni ham mos ravishda tanlangan η nuqtada birlashtirish yo‘li bilan yechim oldi.

Bungacha K.To‘pfer (9)-Blazius differensial tenglamasini Runge-Kutta usulida sonli integrallash yo‘li bilan yechgan. Keyinchalik L. Xovart barcha hisoblashlarni katta aniqlik bilan bajarib, yana bu tenglamani yechgan (1-jadval).

$\frac{u}{U_\infty} = f'(\eta)$ bo`ylama tezliklar taqsimoti 2-rasmda tasvirlangan. $\eta \to \infty$ da ko`ndalang tezlik quyidagiga teng.

$$v_\infty = 0,8604\, U_\infty \sqrt{\frac{\nu}{x U_\infty}}. \qquad (2.17)$$



2-rasm. Chegaraviy qatlam bo‘yicha bo‘ylama tezliklar taqsimoti.

1-jadval

$\eta = y\sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}}$	f	$f' = \frac{u}{U_\infty}$	f''	$\eta = y\sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}}$	f	$f' = \frac{u}{U_\infty}$	f''
0	0	0	0,33206	4,4	2,69238	0,97587	0,03897
0,2	0,00664	0,06641	0,33199	4,6	2,88826	0,98269	0,02948

0,4	0,02656	0,13277	0,33147	4,8	3,08534	0,98779	0,02187
0,6	0,05974	0,19894	0,33008	5,0	3,28329	0,99155	0,01591
0,8	0,10611	0,26471	0,32739	5,2	3,48189	0,99425	0,01134
1,0	0,16557	0,32979	0,32301	5,4	3,68094	0,99616	0,00793
1,2	0,23795	0,39378	0,31659	5,6	3,88031	0,99748	0,00543
1,4	0,32298	0,45627	0,30787	5,8	4,07990	0,99838	0,00365
1,6	0,42032	0,51676	0,29667	6,0	4,27964	0,99898	0,00240
1,8	0,52952	0,57477	0,28293	6,2	4,47948	0,99937	0,00155
2,0	0,65003	0,62977	0,26675	6,4	4,67938	0,99961	0,00098
2,2	0,78120	0,68132	0,24835	6,6	4,87931	0,99977	0,00061
2,4	0,92230	0,72899	0,22809	6,8	5,07928	0,99987	0,00037

2.2. Blazius masalasini sonli yechish

$\psi(x,y)$ oqish funksiyasi orqali ifodalangan, $f(\eta)$ ga nisbatan

$$2f''' + ff'' = 0 \tag{2.18}$$

nochiziqli uchinchi tartibli oddiy differensial tenglamani quyidagi chegaraviy shartlar asosida sonli yechishni ko'rib chiqamiz:

$$\begin{cases} \eta = 0 \;\; da \; f = 0, f' = 0 \\ \quad \eta = \infty \;\; da \; f' = 1. \end{cases} \tag{2.19}$$

Chekli ayirmalar usuli.

Biz hosilalarni son jihatdan qanday muhokama qilishdan boshlaymiz. Teylor qatorining $y(x+h) \; va \; y(x-h)$ ga yaqinlashishini ko'rib chiqishimiz uchun shu ifoda bilan berilgan

$$y(x+h) = y(x) + hy'(x) + \frac{1}{2}h^2 y'^{\prime(x)} + \frac{1}{6}h^3 y''^{\prime(x)} + \frac{1}{24}h^4 y'''^{\prime(x)} \ldots. ,$$

$$y(x-h) = y(x) - hy'(x) + \frac{1}{2}h^2 y''(x) - \frac{1}{6}h^3 y''^{\prime(x)} + \frac{1}{24}h^4 y'''^{\prime(x)} \ldots.$$

Hosilalarning standart ta'riflari birinchi darajali taxminlarni beradi

$$y'(x) = \frac{y(x+h) - y(x)}{h} + O(h)$$

$$y'(x) = \frac{y(x) - y(x-h)}{h} + O(h).$$

Ko‘proq qo‘llaniladigan ikkinchi tartibli yaqinlashish, markaziy farqning yaqinlashuvi deb ataladi va quyidagicha ifodalanadi:

$$y'(x) = \frac{y(x+h) - y(x-h)}{2h} + O(h^2). \qquad (2.20)$$

Ikkinchi tartibli hosilaga chekli farqning yaqinlashuvini ko‘rib chiqishdan

topish mumkin

$$y(x+h) + y(x-h) = 2y(x) + h^2 y''(x) + \frac{1}{12} h^4 y''''(x) + \cdots,$$

undan quyidagini topamiz

$$y''(x) = \frac{y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)}{h^2} + O(h^2)\,. \qquad (2.21)$$

Ba’zan domen chegaralarida x uchun ikkinchi darajali usul talab qilinadi. Chapdagi chegara nuqtasi uchun ikkinchi darajalidan farqli ravishda Teylor qatorini talab qiladi

$$y(x+2h) = y(x) + 2hy'(x) + 2h^2 y''(x) + \frac{4}{3} h^3 y'''(x) + \cdots.$$

Biz Teylor qatorini $y(x+h)$ va $y(x+2h)$ uchun birlashtiramiz, va h^2 ga nisbatan proporsionallikni olib tashlaymiz:

$$y(x+2h) - 4y(x+h) = -3y(x) - 2hy'(x) + O(h^2)\ .$$

Shuning uchun, u quyidagi ko`rinishga keladi

$$y'(x) = \frac{-3y(x) + 4y(x+h) - y(x+2h)}{2h} + O(h^2).$$

O'ngdagi chegara nuqtasi uchun biz $h \to -h$ ni topish uchun quyidagi ifodani yozamiz

$$y'(x) = \frac{3y(x) - 4y(x-h) + y(x-2h)}{2h} + O(h^2)\ .$$

Endi uni yechish uchun cheklangan farq sxemasini yozamiz. Biz x ni $x_i = ih,\ i = 0,1,\ldots\ldots,n+1$ ni aniqlash orqali diskretlashtiramiz. $x_{n+1} = 1$ bilan $h = \frac{1}{n+1}$ ifoda

Uchinchi tartibli hosilaga chekli farqning yaqinlashuvini quyidagicha yozamiz

$$y'''(x) = \frac{y(x+2h) - 3y(x+h) + 3y(x) - y(x-h)}{h^3} + O(h^2). \qquad (2.22)$$

Asosiy masalani yechishdan avval quyidagi chegaraviy masalani ko`ramiz. Biz birinchi navbatda differensial tenglamani ko`rib chiqamiz

$$-\frac{d^2y}{dx^2} = f(x), \qquad 0 \le x \le 1$$

ikki nuqtali chegara shartlari bilan

$$y(0) = A, \qquad y(1) = B \ .$$

Shu tenglamani kvadratura yo‘li bilan yechish mumkin, ammo bu yerda biz sonli yechimni chekli ayirma usuli yordamida ko‘rsatamiz.

bor. $y(x)$ va $f(x)$ funksiyalar $y_i = y(x_i)$ va $f_i = f(x_i)$ kabi diskretlanadi.

Keyin ikkinchi tartibli differensial tenglama domenning ichki nuqtalari uchun quyidagicha

$$-y_{i-1} + 2y_i - y_{i+1} = h^2 f_i \ , \qquad i = 1,2, \ldots . . n$$

bo'ladi. Chegaraviy shartlari $y_0 = A$ va $y_{n+1} = B$. Shuning uchun bizda yechishimiz kerak bo‘lgan chiziqli tenglamalar sistemasi mavjud. Birinchi va n – tartibli tenglama quyidagi chegaraviy shartlarini o‘z ichiga oladi va quyidagi ifoda berilgan

$$2y_1 - y_2 = h^2 f_1 + A \ ; \quad -y_{n-1} + 2y_n = h^2 f_n + B \ .$$

Ikkinchi, uchinchi va boshqa tenglamalar shu ko‘rinishda berilgan

$$-y_1 + 2y_2 - y_3 = h^2 f_2 \ ; \quad -y_2 + 2y_3 - y_4 = h^2 f_3 \ .$$

Matritsa shaklida esa quyiyidagicha berilgan:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \cdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h^2 f_1 + A \\ h^2 f_2 \\ h^2 f_3 \\ \cdots \\ h^2 f_{n-1} \\ h^2 f_n + B \end{bmatrix}$$

Yuqorida keltirilgan chegaraviy masalani quyidagi chegaraviy shartlar asosida qaraymiz:

$$2f''' + ff'' = 0 \qquad (2.18)$$

$$\eta = 0 \;\; da \;\; f = 0, \; f' = 0 \;, \qquad \eta = 8.8 \;\; da \;\; f' = 1$$

Ikkinchi va uchinchi tartibli hosilalarini olingan chekli ayirmali munosabatlarni differensial tenglamaga qo`yamiz:

$$f = y_i \qquad (2.23)$$

$$f' = y' = \frac{y_i - y_{i-1}}{h} \qquad (2.24)$$

$$f'' = y'' = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} \qquad (2.25)$$

$$f''' = y''' = \frac{y_{i+2} - 3y_{i+1} + 3y_i - y_{i-1}}{h^3}. \qquad (2.26)$$

(2.18)-tenglamani (2.23)-(2.26) munosabatlardan foydalanib quyidagicha ko`rinishda yozib olamiz:

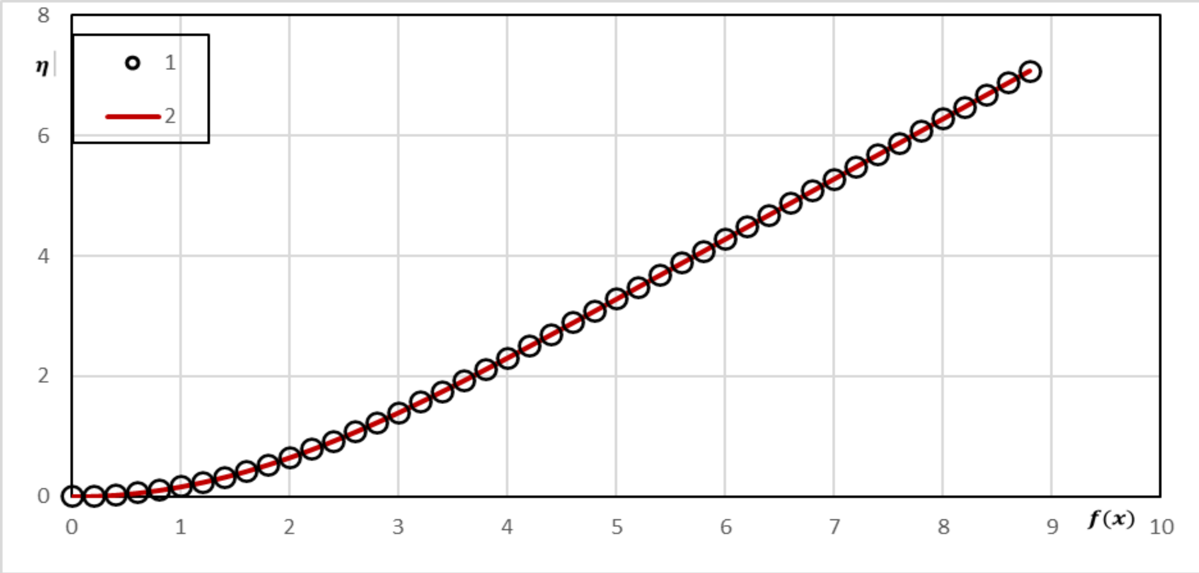
$$2\frac{y_{i+2} - 3y_{i+1} + 3y_i - y_{i-1}}{h^3} + y_i \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} = 0 \qquad (2.27)$$

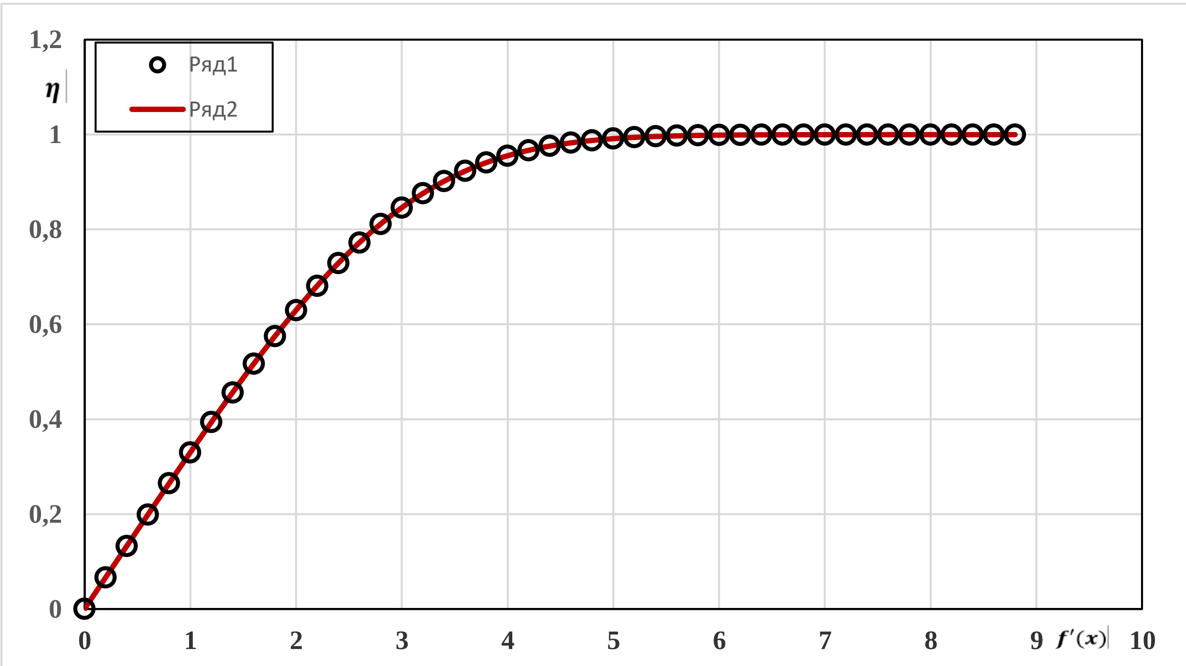
$$\eta = 0 \;\; da \;\; y = 0, \; y' = 0 \;, \qquad \eta = 8.8 \;\; da \;\; y' = 1 \qquad (2.28)$$

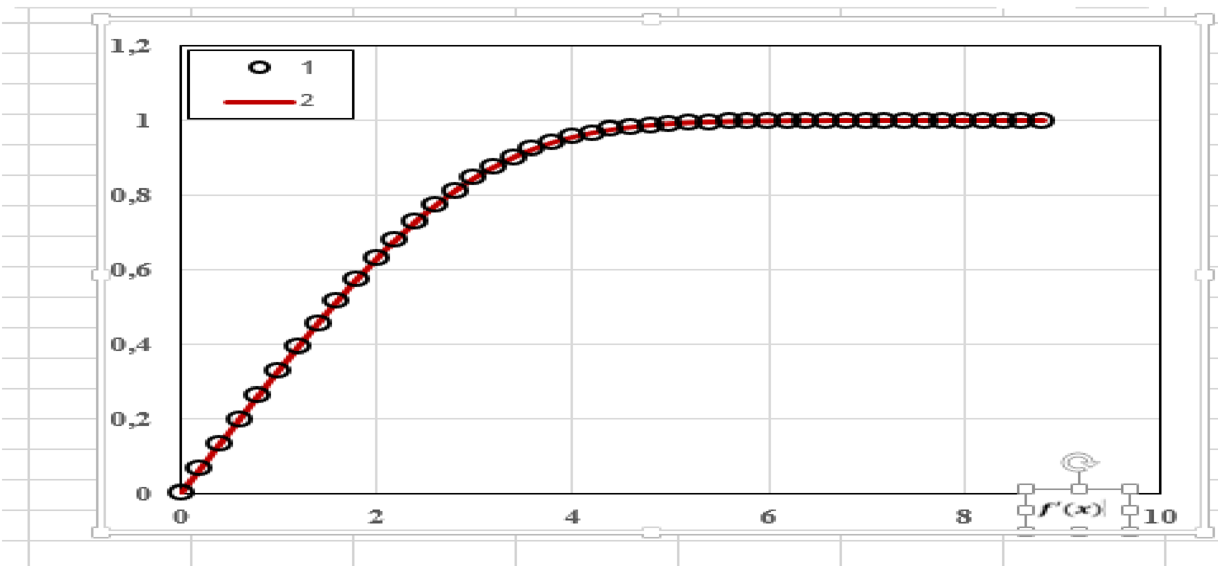
Maple va Eksperement programmasida javoblar taqqoslanishi

X	f(x)	df(x)/d(x)	d^2f(x)/d(x)^2	f(x)	df(x)/d(x)	d^2f(x)/d(x)^2		x
	Maple			Eksperement				
0	0	0	0,332057516	0	0	0,33206		0
0,2	6,64E-03	0,066408	0,33198401	0,00664	0,06641	0,33199		0,2
0,4	0,02656	0,132764	0,33147002	0,02656	0,13277	0,33147		0,4
0,6	0,059735	0,198937	0,330079303	0,05974	0,19894	0,33008		0,6
0,8	0,106108	0,264709	0,32738944	0,10611	0,26471	0,32739		0,8
1	0,165572	0,32978	0,323007273	0,16557	0,32979	0,32301		1
1,2	0,237949	0,393776	0,316589326	0,23795	0,39378	0,31659		1,2
1,4	0,322982	0,456262	0,307865507	0,32298	0,45627	0,30787		1,4
1,6	0,420321	0,516757	0,296663571	0,42032	0,51676	0,29667		1,6
1,8	0,529518	0,574758	0,282931132	0,52952	0,57477	0,28293		1,8
2	0,650025	0,629766	0,266751661	0,65003	0,62977	0,26675		2

2,2	0,781194	0,681311	0,248351006	0,7812	0,68132	0,24835		2,2
2,4	0,92229	0,728982	0,228091807	0,9223	0,72899	0,22809		2,4
2,6	1,072506	0,772455	0,206454657	1,07252	0,77246	0,20646		2,6
2,8	1,230978	0,81151	0,184006628	1,23099	0,81152	0,18401		2,8
3	1,396809	0,846045	0,161360288	1,39682	0,84605	0,16136		3
3,2	1,569095	0,876082	0,139127902	1,56911	0,87609	0,13913		3,2
3,4	1,746951	0,901762	0,117876029	1,74696	0,90177	0,11788		3,4
3,6	1,929526	0,92333	0,0980861	1,92954	0,92333	0,09809		3,6
3,8	2,116031	0,941118	0,080125816	2,11605	0,94112	0,08013		3,8
4	2,305747	0,955518	0,064234044	2,30576	0,95552	0,06424		4
4,2	2,498041	0,966957	0,050519674	2,49806	0,96696	0,05052		4,2
4,4	2,692362	0,975871	0,038972636	2,69238	0,97587	0,03897		4,4
4,6	2,888249	0,982684	0,029483925	2,88826	0,98269	0,02948		4,6
4,8	3,085322	0,98779	0,021871365	3,08534	0,98779	0,02187		4,8
5	3,283275	0,991542	0,015906908	3,28329	0,99155	0,01591		5
5,2	3,481869	0,994246	0,011341838	3,48189	0,99425	0,01134		5,2
5,4	3,68092	0,996156	0,007927695	3,68094	0,99616	0,00793		5,4
5,6	3,880292	0,997478	0,005431973	3,88031	0,99748	0,00543		5,6
5,8	4,079883	0,998376	0,003648352	4,0799	0,99838	0,00365		5,8
6	4,279622	0,998973	0,002401926	4,27964	0,99898	0,0024		6
6,2	4,479459	0,999363	0,00155008	4,47948	0,99937	0,00155		6,2
6,4	4,679358	0,999612	0,000980563	4,67938	0,99961	0,00098		6,4
6,6	4,879297	0,999768	0,000608006	4,87931	0,99977	0,00061		6,6
6,8	5,079261	0,999864	0,000369531	5,07928	0,99987	0,00037		6,8
7	5,27924	0,999922	0,000220159	5,27926	0,99992	0,00022		7
7,2	5,479229	0,999956	0,000128589	5,47925	0,99996	0,00013		7,2
7,4	5,679222	0,999976	7,36215E-05	5,67924	0,99998	0,00007		7,4
7,6	5,879218	0,999987	4,13046E-05	5,87924	0,99999	0,00004		7,6
7,8	6,079216	0,999993	2,27096E-05	6,07923	1	0,00002		7,8
8	6,279215	0,999997	1,22503E-05	6,27923	1	0,00001		8
8,2	6,479215	0,999998	6,47588E-06	6,67923	1	0,00001		8,2
8,4	6,679215	0,999999	3,31063E-06	6,87923	1	0		8,4
8,6	6,879214	1	1,63335E-06	7,07923	1	0		8,6
8,8	7,079214	1	8,45E-07		1	0		8,8


η
1
2
8
6
4
2
0
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
f(x)


η
Ряд1
Ряд2
1,2
1
0,8
0,6
0,4
0,2
0
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
f′(x)


1
2
1,2
1
0,8
0,6
0,4
0,2
0
0
2
4
6
8
10
f′(x)

Nazorat savollari

1. Tekislikdagi siqilmaydigan suyuqlik oqimi uchun Nave-Stoks tenglamasini yozing. Qatlamli oqim deganda nimani tushunasiz?
2. Nave-Stoks tenglamasi aniq yechimga egami?
3. Blazius masalasini sonli yechishda Chegaraviy muommolar metodi asosiy shartlari qanday?

4-Amaliy mashg‘ulot Elastik jismlar uchun Lyame tenglamasi

1-Amaliy masala: Bir o‘lchamli cho‘zilgan elastik novda

Shart: Uzunligi L ga teng bo‘lgan elastik novdaning bir uchi mahkamlangan, ikkinchi uchiga esa P kuchi qo‘llanilgan. Materialning Young moduli E, kesim yuzi A.

Topilsin:

- Siljish $u(x)$
- Kuchlanish $\sigma(x)$
- Deformatsiya $\varepsilon(x)$

Yechim:

a) Tenglama:

Bu holatda Lyame tenglamasi quyidagicha soddalashadi:

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} = 0$$

Integrallaymiz:

$$u(x) = C_1x + C_2$$

b) Chegara shartlari:

- $u(0)=0$
- $EA\frac{du}{dx}\Big|_{x=L} = P$

Shu asosida yechim:

$$u(x) = \frac{P}{EA}x$$

c) Kuchlanish va deformatsiya:

$$\varepsilon(x) = \frac{du}{dx} = \frac{P}{EA}, \quad \sigma(x) = E\varepsilon(x) = \frac{P}{A}$$

2-Amaliy masala: Tashqi bosim ostidagi ichi bo‘sh silindr

Shart: Ichki radiusi a, tashqi radiusi b, tashqi bosim p ta’sir qilmoqda. Material –

izotrop va elastik.

Topilsin:

- Radial siljish $ur(r)$
- Radial va aylana kuchlanishlar $\sigma r(r)$,$\sigma\theta(r)$

Yechim:

Sferik simmetriya tufayli Lyame tenglamasi quyidagi ko‘rinishga ega:

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{du_r}{dr}\right) - \frac{u_r}{r} = 0$$

a) Yechim:

$$u_r(r) = Ar + \frac{B}{r}$$

b) Kuchlanishlar:

$$\sigma_r = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du_r}{dr}\right), \quad \sigma_\theta = \frac{du_r}{dr} + \frac{u_r}{r}$$

c) Chegara shartlari:

- σ r (b)=−p
- σ r (a)=0

Shartlardan A va B aniqlanadi va kuchlanishlar ifodalanadi.

3-Amaliy masala: Teshikli plastinka kuch ta’sirida

Shart: Cheksiz tekislikda doirasimon teshik mavjud. Uzoqdan bir o‘qli cho‘zish kuchi qo‘llanadi: $\sigma\infty$

Topilsin:

Teshik atrofidagi kuchlanishlar σr,$\sigma\theta$

Yechim:

Bu masala Kirsh tenglamasi asosida yechiladi:

$$\sigma_r = \sigma_\infty\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right), \quad \sigma_\theta = \sigma_\infty\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)$$

Diqqat: r=a da, aylana kuchlanishi eng katta bo‘ladi:

$$\sigma_\theta(a) = 3\sigma_\infty$$

Bu stress konsentratsiyasi holatini ifodalaydi.

4-Amaliy masala: Sonli elementlar usuli (FEM) orqali Lyame tenglamasini yechish

Shart: Kvadrat plastinka, ikki tomoni mahkamlangan, yuqoridan kuch P ta’sir qiladi.

Topilsin:

- Har bir tugun nuqtasida siljishlar
- Stress tarqalishi

Yechim yo‘li:

1. Geometriya va to‘rni tanlash (mesh generation)
2. Lyame tenglamasini matritsa shaklida yozish
3. Kompyuterda (MATLAB, ANSYS, Abaqus) yechish
4. Grafikda deformatsiyalar va kuchlanishlarni ko‘rsatish

V. FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO’YXATI

I. O’zbekiston Respublikasi Prezidentining asarlari

1. Mirziyoyev Sh.M. Buyuk kelajagimizni mard va olijanob xalqimiz bilan birga quramiz. – T.: “O‘zbekiston”, 2017. – 488 b.
2. Mirziyoyev Sh.M. Milliy taraqqiyot yo‘ limizni qat’iyat bilan davom ettirib, yangi bosqichga ko‘ taramiz. 1-jild. – T.: “O‘zbekiston”, 2017. – 592 b.
3. Mirziyoyev Sh.M. Xalqimizning roziligi bizning faoliyatimizga berilgan eng oliy bahodir. 2-jild. T.: “O‘zbekiston”, 2018. – 507 b.
4. Mirziyoyev Sh.M. Niyati ulug‘ xalqning ishi ham ulug‘, hayoti yorug‘ va kelajagi farovon bo‘ ladi. 3-jild.– T.: “O‘zbekiston”, 2019. – 400 b.
5. Mirziyoyev Sh.M. Milliy tiklanishdan – milliy yuksalish sari. 4-jild.– T.: “O‘zbekiston”, 2020. – 400 b.
6. Mirziyoev Sh.M. ―Yangi O’zbekiston demokratik o’zgarishlar, keng imkoniyatlar va amaliy ishlar mamlakatiga aylanmoqda. - Toshkent: O’qituvchi MU MCHJ, 2021. 184 b.
7. Mirziyoev Sh.M. ―Yangi O’zbekiston uchinchi renessans ostonasida. -T: ―Zamin nashr, 2021. 212 b.
8. Mirziyoev Sh.M. ―Yangi O’zbekiston taraqqiyot strategiyasi. To’ldirilgan ikkinchi nashri. -Toshkent: ―O’zbekiston nashiryoti, 2023.- 416 bet.
9. Mirziyoev Sh. ―Hozirgi zamon va Yangi O’zbekiston. ―O’zbekiston. T.- – 2024. – 505 b.

II. Normativ-huquqiy hujjatlar

10. O‘zbekiston Respublikasining Konstitutsiyasi. – T.: O‘zbekiston, 2023.
11. O‘zbekiston Respublikasining 2020-yil 23-sentabrda qabul qilingan “Ta’lim to‘g‘risida”gi Qonuni.
12. O‘zbekiston Respublikasining “Korrupsiyaga qarshi kurashish to‘g‘risida”gi Qonuni.
13. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2015-yil 12-iyundagi “Oliy ta’lim muassasalarining rahbar va pedagog kadrlarini qayta tayyorlash va malakasini oshirish tizimini yanada takomillashtirish to‘g‘risida”gi PF-4732-sonli Farmoni.
14. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2019-yil 27-maydagi “O‘zbekiston Respublikasida korrupsiyaga qarshi kurashish tizimini yanada takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi PF-5729-son Farmoni.
15. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2019-yil 27-avgustdagi “Oliy ta’lim muassasalari rahbar va pedagog kadrlarining uzluksiz malakasini oshirish tizimini joriy etish to‘g‘risida”gi PF-5789-sonli Farmoni.
16. O‘zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasining 2019-yil 23-sentabrdagi “Oliy ta’lim muassasalari rahbar va pedagog kadrlarining malakasini oshirish tizimini yanada takomillashtirish bo‘yicha qo‘shimcha chora-tadbirlar to‘g‘risida”gi 797-sonli Qarori.
17. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2019-yil 8-oktabrdagi “O‘zbekiston Respublikasi oliy ta’lim tizimini 2030-yilgacha rivojlantirish

konsepsiyasini tasdiqlash to‘g‘risida”gi PF-5847- sonli Farmoni.

18. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2020-yil 29-oktabr “Ilm-fanni 2030 yilgacha rivojlantirish konsepsiyasini tasdiqlash to‘g‘risida”gi PF-6097-sonli Farmoni.

19. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2021-yil 17-fevraldagi “Sun’iy intellekt texnologiyalarini jadal joriy etish uchun shart-sharoitlar yaratish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi PQ-4996-son Qarori.

20. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2022-yil 28-yanvardagi “2022-2026 yillarga mo‘ljallangan Yangi O‘zbekistonning taraqqiyot strategiyasi to‘g‘risida”gi PF-60-son Farmoni.

21. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2023-yil 25-yanvardagi “Respublika ijro etuvchi hokimiyat organlari faoliyatini samarali yo‘lga qo‘yishga doir birinchi navbatdagi tashkiliy chora-tadbirlar to‘g‘risida”gi PF-14-sonli Farmoni.

22. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2023-yil 11-sentabrdagi ““O‘zbekiston - 2030” strategiyasi to‘g‘risida”gi PF-158-son Farmoni.

23. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2024-yil 21-iyundagi “Aholi va davlat xizmatchilarining korrupsiyaga qarshi kurashish sohasidagi bilimlarini uzluksiz oshirish tizimini joriy qilish chora-tadbirlari to‘g‘risida” PQ-228-son Qarori.

I. Maxsus adabiyotlar

24. Oliy ta’limning meyoriy - huquqiy xujjatlari to‘plami. -T., 2013.

25. O‘rinov V. O‘zbekiston Respublikasi oliy ta’lim muassasalarida ECTS kredit-modul tizimi: asosiy tushunchalar va qoidalar. O‘quv qo‘llanma. Nyu Bransvik Universiteti, 2020.

26. The European Higher Education Area. - Joint Declaration of the Ministers of Education. - Bologna, 1999, 19 June.

27. Shaping our Own Future in the European Higher Education Area // Convention of European Higher Education Institutions. - Salamanca, 2001, 29-30 march.

28. Virtualnaya realnost kak novaya issledovatelskaya i obrazovatelnaya sreda. Serfuz D.n. i dr. // JURNAL Nauchno-analiticheskiy jurnal «Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta Gosudarstvennoy protivopojarnoy slujbi MCHS Rossii», 2015. – s.185-197.

29. Ibraymov A.YE. Masofaviy o‘qitishning didaktik tizimi. Metodik qo‘llanma. – T.: “Lesson press”, 2020. -112 b.

30. Ignatova N. Y. Obrazovaniye v sifrovuyu epoxu: monografiya. M-vo obrazovaniya i nauki RF. – Nijniy Tagil: NTI (filial) UrFU, 2017. – 128 s. http://elar.urfu.ru/bitstream/10995/54216/1/978-5-9544-0083-0_2017.pdf

31. Kiryakova A.V, Olxovaya T.A., Mixaylova N.V., Zaporojko V.V. Internet-texnologii na baze LMS Moodle v kompetentnostno-oriyentirovannom obrazovanii: uchebno-metodicheskoye posobiye / A.V. Kiryakova, T.A. Olxovaya, N.V. Mixaylova, V.V. Zaporojko; Orenburgskiy gos. un-t. – Orenburg: OGU, 2011. – 116 s. http://www.osu.ru/docs/fpkp/kiryakova_internet_technologies.pdf

32. Kononyuk A.YE. Oblachniye vichisleniya. – Kiyev, 2018. – 621 s.

33. Oliy ta'lim tizimini raqamli avlodga moslashtirish konsepsiyasi. Yevropa Ittifoqi Erasmus+ dasturining ko'magida. https://hiedtec.ecs.uni-ruse.bg/pimages/34/3._UZBEKISTAN-CONCEPT-UZ.pdf
34. Emelyanova O. A. Ta'limda bulutli texnologiyalardan foydalanish // Yosh olim. - 2014. - № 3. - S. 907-909.
35. Moodle LMS tizimida masofaviy kurslar yaratish. O'quv-uslubiy qo'llanma. – T.: Toshkent farmatsevtika instituti, 2017.
36. Tendensi i razvitiya visshego obrazovaniya v mire i v Rosii. Analiticheskiy doklad-daydjest. - M., 2021.- 198 s.
37. A.S. Zikriyoyev. Dunyo universitetlari reytingidagi tadqiqotchi olimlar orasida o'zingizni kashf qiling. -T.: Navro'z,2020. ISBN.9789943659285
38. Sherzod Mustafakulov, Aziz Zikriyoev, Dilnoza Allanazarova, Tokhir Khasanov, Sokhibmalik Khomidov. Explore Yourself Among World – Class Researchers. Grand OLEditor, Tashkent 2019, ISBN: 8175 25766-0.
39. Ackoff, Russell L., Scientific Method, New York: John Wiley & Sons, 1962.
40. Barzun, Jacques & Graff. F. (1990). The Modern Researcher, Harcourt, Brace Publication: New York.
41. Muslimov N.A va boshqalar. Innovatsion ta'lim texnologiyalari. O'quv-metodik qo'llanma. – T.: "Sano-standart", 2015. – 208 b.
42. Muslimov N.A va boshqalar. Pedagogik kompetentlik va kreativ asoslari. O'quv-metodik qo'llanma. – T.: "Sano-standart", 2015. – 120 b.
43. Pecherkina, A. A. Razvitiye professionalnoy kompetentnosti pedagoga: teoriya i praktika [Tekst] : monografiya / A. A. Pecherkina, E. E. Simanyuk, YE. L. Umnikova : Ural. gos. ped. un-t. – Yekaterinburg : [b.i.], 2011. – 233 s.
44. O.S. Frolova. Formirovaniye innovatsionnoy kompetensii pedagoga v protsesse vnutrishkolnogo povisheniya kvalifikatsii. Diss.k.p.n. Voronej 2018.
45. Kompetensii pedagoga XXI veka [Elektronniy resurs]: sb. materialov resp. konferensii (Minsk, 25 noyab. 2021 g.) / M-vo obrazovaniya Resp. Belarus, GUO «Akad. poslediplom. obrazovaniya», OO «Belorus. ped. o-vo». – Minsk: APO, 2021.
46. Ishmuhamedov R.J., M.Mirsoliyeva. O'quv jarayonida innovatsion ta'lim texnologiyalari. – T.: «Fan va texnologiya», 2017, 60 b.
47. Ishmuhamedov R, Mirsoliyeva M, Akramov A. Rahbarning innovatsion faoliyati. – T.: "Fan va texnologiyalar", 2019.- 68 b.
48. Kodjaspirova G.M. Pedagogika v sxemax, tablitsax i opornix konspektax./ -M.:Ayris-press, 2016.
49. Natanzon E. Sh. Priyemi pedagogicheskogo vozdeystviya. - M, 2012. - 202 s.
50. Sergeyev I.S. Osnovi pedagogicheskoy deyatelnosti: Uchebnoye posobiye. – SPb.: Piter, 2014.
51. Margaret L. Lial, Thomas W. Hungerford, John P. Holcomb, Bernadette Mullins, Mathematics with Applications In the Management, Natural and Social Sciences (11th Edition), Pearsonb 2018.
52. Massey B., Ward-Smith J. Mechanics of Fluids. Solutions Manual Eighth

edition. - Taylor &. Francis, 2016.

53. N.A.Korshunova and D.M.Azimov. Analytical Solutions for Thrust Arcs in a Field of Two Fixed Centers // «Journal of Guidance, Control, and Dynamics», (AIAA, USA), 2014, V.37, №5, P.1716-1719

54. Rao, M. M. Random and Vector Measures, Series on Multivariate Analysis, 9, World Scientific, 2012.

55. Robert D. Zucker, Oscar Biblarz Fundamentals of Gas Dynamics, Wiley, 2002. 512r.

56. Steve Taylor "Destination" Vocabulary and grammar", Macmillan 2010.

57. Tao, Terence. An Introduction to Measure Theory. Providence, R.I.: American Mathematical Society, 2019.

58. Weaver, Nik Measure Theory and Functional Analysis. World Scientific, 2013, 423 p.

59. Avilova L.V., Bolotyuk V.A., Bolotyuk L.A. Analiticheskaya geometriya i lineynaya algebra// 2013. Izdaniye: 1-ye izd. 421 s.

60. Azimov D.M., Korshunova N.A Harakatning ustuvorlik nazariyasi boʻyicha tanlangan ma'ruzalar. - Uchebnoye posobiye. - Tashkent, Universitet, 2005.

61. Belogurov A.Y. Modernizatsiya protsessa podgotovki pedagoga v kontekste innovatsionnogo razvitiya obshestva: Monografiya. — M.: MAKS Press, 2016. — 116 s. ISBN 978-5-317-05412-0.

62. Gulobod Qudratulloh qizi, R.Ishmuhamedov, M.Normuhammedova. An'anaviy va noan'anaviy ta'lim. – Samarqand: "Imom Buxoriy xalqaro ilmiy-tadqiqot markazi" nashriyoti, 2019. 312 b.

63. Ibraymov A.YE. Masofaviy oʻqitishning didaktik tizimi. metodik qoʻllanma/ tuzuvchi. A.YE. Ibraymov. – Toshkent: "Lesson press", 2020. 112 bet.

64. Ishmuhamedov R.J., M.Mirsoliyeva. Oʻquv jarayonida innovatsion ta'lim texnologiyalari. – T.: «Fan va texnologiya», 2014. 60 b.

65. Kiryanov D. Mathcad 15/Mathcad Prime 1.0. - SPb.: BXV-Peterburg, 2012. — 432 s.

66. Muslimov N.A va boshqalar. Innovatsion ta'lim texnologiyalari. Oʻquv-metodik qoʻllanma. – T.: "Sano-standart", 2015. – 208 b.

67. Ignatova N. Y. Obrazovaniye v sifrovuyu epoxu: monografiya. M-vo obrazovaniya i nauki RF. – Nijniy Tagil: NTI (filial) UrFU, 2017. – 128 s. http://elar.urfu.ru/bitstream/10995/54216/1/978-5-9544-0083-0_2017.pdf

68. Oliy ta'lim tizimini raqamli avlodga moslashtirish konsepsiyasi. Yevropa Ittifoqi Erasmus+ dasturining koʻmagida. https://hiedtec.ecs.uni-ruse.bg/pimages/34/3._UZBEKISTAN-CONCEPT-UZ.pdf

69. O.K. Asekretov, B.A. Borisov, N.Y. Bu-gakova i dr. M – Kniga 16 / Sovremenniye obrazovatelniye texnologii: pedagogika i psixologiya: Novosibirsk: Izdatelstvo SRNS, 2015. – 318 s. http://science.vvsu.ru/files/5040BC65-273B-44BB-98C4-CB5092BE4460.pdf

70. Turayev X. Harakatning turgʻunlik nazariyasi. - SamGU, 2004.

71. Usmonov B.SH., Habibullayev R.A. Oliy oʻquv yurtlarida oʻquv jarayonini kredit-modul tizimida tashkil qilish. Oʻquv qoʻllanma. T.: "Tafakkur"

nashriyoti, 2020 y. 120 bet.

II. Elektron ta’lim resurslari

1. www.edu.uz.
2. www.aci.uz.
3. www.ictcouncil.gov.uz.
4. www.lib.bimm.uz
5. www. Ziyonet. Uz
6. www.sciencedirect.com
7. www.acs.org
8. www.nature.com
9. http://www.kornienko-ev.ru/BCYD/index.html.