O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI HUZURIDAGI PEDAGOG KADRLARNI QAYTA TAYYORLASH VA ULARNING MALAKASINI OSHIRISH TARMOQ (MINTAQAVIY) MARKAZI

GAMILTON SISTEMALARI VA INTEGRAL INVARIANTLAR

MODULI BO‘YICHA
O‘QUV – USLUBIY
MAJMUA

2025

O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY TA’LIM, FAN VA INNOVATSIYALAR VAZIRLIGI

OLIY TA’LIM TIZIMI KADRLARINI QAYTA TAYYORLASH VA MALAKASINI OSHIRISH INSTITUTI

O’ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI HUZURIDAGI PEDAGOG KADRLARNI QAYTA TAYYORLASH VA ULARNING MALAKASINI OSHIRISH TARMOQ (MINTAQAVIY) MARKAZI

“Gamilton sistemalari va integral invariantlar” moduli bo‘yicha

o‘ q u v –u s l u b i y m a j m u a

Toshkent – 2025

Mazkur modulning o‘quv-uslubiy majmuasi Oliy ta’lim, fan va innovatsiyalar vazirligining 2024-yil “27” dekabrdagi 485-sonli buyrug‘I bilan tasdiqlangan o‘quv reja va namunaviy dastur asosida tayyorlandi.

Tuzuvchi: Rossiya Milliy texnologik tadqiqotlar universiteti, Olmaliq filiali, f.-m.f.n., M.N. Sidiqov

Taqrizchi: f-m.f.d., prof. A.B.Axmedov

O‘quv-uslubiy majmua Mirzo Ulug‘bek nomidagi O‘zbekiston Milliy universiteti Kengashining qarori bilan nashrga tavsiya qilingan (2024- yil “29” noyabrdagi 4-sonli bayonnoma).

I. ISHCHI DASTUR

KIRISH

Ushbu dastur Oʻzbekiston Respublikasining 2020-yil 23-sentabrda tasdiqlangan “Taʼlim toʻgʻrisida”gi Qonuni, Oʻzbekiston Respublikasi Prezidentining 2015 yil 12 iyundagi “Oliy taʼlim muassasalarining rahbar va pedagog kadrlarini qayta tayyorlash va malakasini oshirish tizimini yanada takomillashtirish toʻgʻrisida”gi PF-4732-son, 2019-yil 27-avgustdagi “Oliy taʼlim muassasalari rahbar va pedagog kadrlarining uzluksiz malakasini oshirish tizimini joriy etish toʻgʻrisida”gi PF-5789-son, 2019-yil 8-oktabrdagi “Oʻzbekiston Respublikasi oliy taʼlim tizimini 2030 yilgacha rivojlantirish konsepsiyasini tasdiqlash toʻgʻrisida”gi PF-5847-son, 2022-yil 28- yanvardagi “2022-2026 yillarga moʻljallangan Yangi Oʻzbekistonning taraqqiyot strategiyasi toʻgʻrisida”gi PF-60-son, 2023-yil 25-yanvardagi “Respublika ijro etuvchi hokimiyat organlari faoliyatini samarali yoʻlga qoʻyishga doir birinchi navbatdagi tashkiliy chora-tadbirlar toʻgʻrisida”gi PF-14-son Farmonlari, shuningdek, Oʻzbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasining 2019-yil 23-sentabrdagi “Oliy taʼlim muassasalari rahbar va pedagog kadrlarining malakasini oshirish tizimini yanada takomillashtirish boʻyicha qoʻshimcha chora-tadbirlar toʻgʻrisida”gi 797-son Qarorida belgilangan ustuvor vazifalar mazmunidan kelib chiqqan holda tuzilgan boʻlib, u oliy taʼlim muassasalari pedagog kadrlarining kasb mahorati hamda innovatsion kompetentligini rivojlantirish, sohaga oid ilgʻor xorijiy tajribalar, yangi bilim va malakalarni oʻzlashtirish, shuningdek amaliyotga joriy etish koʻnikmalarini takomillashtirishni maqsad qiladi.

Dastur doirasida berilayotgan mavzular taʼlim sohasi boʻyicha pedagog kadrlarni qayta tayyorlash va malakasini oshirish mazmuni, sifati va ularning tayyorgarligiga qoʻyiladigan umumiy malaka talablari va oʻquv rejalari asosida shakllantirilgan boʻlib, uning mazmuni yangi Oʻzbekistonning taraqqiyot strategiyasi va jamiyatning maʼnaviy asoslarini yoritib berish, oliy taʼlimning normativ-huquqiy asoslari boʻyicha taʼlim-tarbiya jarayonlarini tashkil etish, pedagogik faoliyatda raqamli kompetensiyalarni rivojlantirish, ilmiy-innovatsion faoliyat darajasini oshirish, pedagogning kasbiy kompetensiyalarini rivojlantirish, taʼlim sifatini taʼminlashda baholash metodikalaridan samarali foydalanish, Gamilton sistemalari va integral invariantlar asoslarini oʻzlashtirish, tutash muhitlarning matematik modellaridan foydalanish boʻyicha tegishli bilim, koʻnikma, malaka va kompetensiyalarni rivojlantirishga yoʻnaltirilgan.

Qayta tayyorlash va malaka oshirish kursining oʻquv dasturi quyidagi modullar mazmunini oʻz ichiga qamrab oladi:

Kursning maqsadi va vazifalari

Oliy taʼlim muasasalari pedagog kadrlarini qayta tayyorlash va ularning malakasini oshirish kursining **maqsadi** pedagog kadrlarning innovatsion yondoshuvlar asosida oʻquv-tarbiyaviy jarayonlarni yuksak ilmiy-metodik darajada loyihalashtirish, sohadagi ilgʻor tajribalar, zamonaviy bilim va malakalarni oʻzlashtirish va amaliyotga joriy etishlari uchun zarur boʻladigan kasbiy bilim, koʻnikma va malakalarini takomillashtirish, shuningdek ularning ijodiy faolligini rivojlantirishdan iborat

Kursning **vazifalariga** quyidagilar kiradi:

“Mexanika va matematik modellashtirish” yoʻnalishida pedagog kadrlarning kasbiy bilim, ko‘nikma, malakalarini takomillashtirish va rivojlantirish;

- pedagoglarning ijodiy-innovatsion faollik darajasini oshirish;

-pedagog kadrlar tomonidan zamonaviy axborot-kommunikatsiya texnologiyalari, zamonaviy ta’lim va innovatsion texnologiyalar sohasidagi ilg‘or xorijiy tajribalarning o‘zlashtirilishini ta’minlash;

- o‘quv jarayonini tashkil etish va uning sifatini ta’minlash borasidagi ilg‘or xorijiy tajribalar, zamonaviy yondashuvlarni o‘zlashtirish;

- “Mexanika va matematik modellashtirish” yo‘nalishida qayta tayyorlash va malaka oshirish jarayonlarini fan va ishlab chiqarishdagi innovatsiyalar bilan o‘zaro integratsiyasini ta’minlash.

Kurs yakunida tinglovchilarning bilim, ko‘nikma va malakalari hamda kompetensiyalariga qo‘yiladigan talablar:

Qayta tayyorlash va malaka oshirish kursining o‘quv modullari bo‘yicha tinglovchilar quyidagi yangi bilim, ko‘nikma, malaka hamda kompetensiyalarga ega bo‘lishlari talab etiladi:

Tinglovchi:

- Gamilton prinsipi va Gamilton tenglamalarini;
- Gamilton sistemasining integral invariantlari;
- Puankare va Puankare-Kartan integral invarianlarini;
- almashtirishlarni kanoniklik alomatini;
- erkin kanonik almashtirishlarni;
- Gamilton-Yakobi tenglamasini;
- Gamilton-Yakobi tenglamasining umumiy integralini;
- zamonaviy mexanikada matematik modellashtirishni;
- tutash muxit tenglamalarini;
- tutash muhit modellari uchun to‘la tenglamalar sistemasini;
- elastik jismlar uchun Lyame tenglamasini;
- muvozanat tenglamalarini ***bilishi*** kerak.

Tinglovchi:

- Gamilton prinsipi va Gamilton tenglamalarini yoritib berish;
- kanonik almashtirishlarni qo‘llash;
- almashtirishlarni kanoniklik alomatini tahlil etish va baholash;
- tutash muxitlarning turli modellari tahlil etish;
- tutash muhit modellari uchun to‘la tenglamalar sistemasidan foydalanish ***ko‘nikmalariga*** ega bo‘lishi lozim.

Tinglovchi:

- erkin kanonik almashtirishlarni amalga oshirish;
- Gamilton-Yakobi tenglamasini o‘zlashtirish;
- Gamilton-Yakobi tenglamasining umumiy integralini qo‘llash;

- tutash muhitlarning matematik modellarini tahlil etish;
- yopishqoq suyuqlik uchun Nave-Stok tenglamasidan foydalanish;
- muvozanat tenglamalarini tadbiq etish ***malakalariga*** ega bo‘lishi lozim.

Tinglovchi:

- birinchi integrallar yordamida Gamilton sistemasining tartibini pasaytirish;
- Gamilton tenglamalarini integrallashga tegishli usullarni boshqarish masalalarini yechishda qo‘llash;
- elastik jismlar uchun Lyame tenglamasini qo‘llash;
- Nave-Stok tenglamasining aniq, taqribiy va sonli yechimlarini topish;
- suyuqlik va qattiq jismlar uchun erkin chegarali masalalarni amaliy ahamitini ochib berish ***kompetensiyalariga*** ega bo‘lishi lozim.

Modulni tashkil etish va o‘tkazish bo‘yicha tavsiyalar

- Modulni o‘qitish ma’ruza va amaliy mashg‘ulotlar shaklida olib boriladi.

- Modulni o‘qitish jarayonida ta’limning zamonaviy metodlari, pedagogik texnologiyalar va axborot-kommunikatsiya texnologiyalari qo‘llanilishi nazarda tutilgan:

-ma’ruza darslarida zamonaviy kompyuter texnologiyalari yordamida prezentatsion va elektron-didaktik texnologiyalardan;

-o‘tkaziladigan amaliy mashg‘ulotlarda texnik vositalardan, ekspress-so‘rovlar, test so‘rovlari, aqliy hujum, guruhli fikrlash, kichik guruhlar bilan ishlash, kollokvium o‘tkazish, va boshqa interaktiv ta’lim usullarini qo‘llash nazarda tutiladi.

Modulning o‘quv rejadagi boshqa modullar bilan bog‘liqligi va uzviyligi

“Gamilton sistemalari va integral invariantlar” moduli mazmuni o‘quv rejadagi “Yangi O‘zbekistonning taraqqiyot strategiyasi va jamiyatning ma’naviy asoslari”, “Oliy ta’limning normativ-huquqiy asoslari”, “Pedagogik faoliyatda raqamli kompetensiyalar” “Ilmiy va innovatsion faoliyatni rivojlantirish”, “Pedagogning kasbiy kompetensiyalarini rivojlantirish” “Ta’lim sifatini ta’minlashda baholash metodikalari”, “Tutash muhitlarning matematik modellari” mutaxassislik o‘quv modullari bilan uzviy bog‘langan holda pedagoglarning ta’lim jarayonida kasbiy pedagogik tayyorgarlik darajasini oshirishga xizmat qiladi.

Modulning oliy ta’limdagi o‘rni

Modulni o‘zlashtirish orqali tinglovchilar ta’lim jarayonida genom tadqiq etishga, katta ma’lumotlar va nukleotid va oqsil ketma-ketliklar ma’lumotlar bazasi tizimlaridan foydalanish va amalda qo‘llashga doir kasbiy kompetentlikka ega bo‘ladilar.

Gamilton sistemalari va integral invariantlar moduli bo‘yicha soatlar taqsimoti

№	Modul mavzulari	Auditoriya uquv yuklamasi			
		Jami	jumladan		
			Nazariy	Amaiy mashg’ ulot	Ko‘ chma mashg‘ uloti
1.	Gamilton prinsipi va Gamilton tenglamalari	10	2	2	6
2.	Birinchi integrallar yordamida Gamilton sistemasining tartibini pasaytirish.	4	2	2	
3.	Almashtirishlarni kanoniklik alomati	10	2	2	6
4.	Gamilton-Yakobi tenglamasining umumiy integrali	4	2	2	
	Jami:	**28**	**8**	**8**	**12**

NAZARIY VA AMALIY MASHG‘ULOTLAR MAZMUNI

1-mavzu: Gamilton prinsipi va Gamilton tenglamalari

Gamilton prinsipi va Gamilton tenglamalari. Gamilton sistemasining integral invariantlari. Puankare va Puankare-Kartan integral invarianlari.

2-mavzu: Birinchi integrallar yordamida Gamilton sistemasining tartibini pasaytirish.

Birinchi integrallar yordamida Gamilton sistemasining tartibini pasaytirish. Kanonik almashtirishlar.

3-mavzu: Almashtirishlarni kanoniklik alomati

Almashtirishlarni kanoniklik alomati. Erkin kanonik almashtirishlar. Gamilton-Yakobi tenglamasi.

4-mavzu: Gamilton-Yakobi tenglamasining umumiy integrali

Gamilton-Yakobi tenglamasining umumiy integrali. Gamilton tenglamalarini integrallashga tegishli usullarni boshqarish masalalarini yechishda qo‘llash.

KO‘CHMA MASHG‘ULOT MAZMUNI

1-mavzu: “Gamilton prinsipi va Gamilton tenglamalari”

2-mavzu:“ Almashtirishlarni kanoniklik alomati”

Ko‘chma mashg‘ulotlar “Falsafa” ta’lim yo‘nalishlari va mutaxassisliklari asosida, “Gamilton prinsipi va Gamilton tenglamalari” (6 soat) mavzusi hamda

“Almashtirishlarni kanoniklik alomati” (6 soat) mavzularida oʻtkaziladi. Oʻzbekiston Respublikasi Fanlar Akademiyasi institutlarining ilmiy uslubiy jihatdan tajribali professor-oʻqituvchilari va mutaxassislar faoliyat koʻrsatayotgan Oliy ta’lim muassasalarining mutaxassislik kafedralari va universitetning tayanch kafedralarda tashkil etiladi. Unda oʻtkazilgan darsni tegishli mezonlar asosida tahlil qilish orqali oʻqituvchilarning ilgʻor pedagogik tajribalarini oʻrganish tashkil etiladi. Bu jarayonga koʻchma mashgʻulot tashkil qilingan professor oʻqituvchilarini jalb etish, ularning darslarini tahlil qilish orqali ularga metodik yordam koʻrsatish ham koʻzda tutiladi.

OʻQITISH SHAKLLARI

- Mazkur modul boʻyicha quyidagi oʻqitish shakllaridan foydalaniladi:
- ma’ruzalar, amaliy mashgʻulotlar (ma’lumotlar va texnologiyalarni anglab olish, aqliy qiziqishni rivojlantirish, nazariy bilimlarni mustahkamlash);
- davra suhbatlari (koʻrilayotgan loyiha yechimlari boʻyicha taklif berish qobiliyatini oshirish, eshitish, idrok qilish va mantiqiy xulosalar chiqarish);
- bahs va munozaralar (loyihalar yechimi boʻyicha dalillar va asosli argumentlarni taqdim qilish, eshitish va muammolar yechimini topish qobiliyatini rivojlantirish).

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO’YXATI

I. Maxsus adabiyotlar

1. Oliy ta’limning meyoriy - huquqiy xujjatlari toʻplami. -T., 2013.
2. Oʻrinov V. Oʻzbekiston Respublikasi oliy ta’lim muassasalarida ECTS kredit-modul tizimi: asosiy tushunchalar va qoidalar. Oʻquv qoʻllanma. Nyu Bransvik Universiteti, 2020.
3. The European Higher Education Area. - Joint Declaration of the Ministers of Education. - Bologna, 1999, 19 June.
4. Shaping our Own Future in the European Higher Education Area // Convention of European Higher Education Institutions. - Salamanca, 2001, 29-30 march.
5. Virtualnaya realnost kak novaya issledovatelskaya i obrazovatelnaya sreda. Serfuz D.n. i dr. // JURNAL Nauchno-analiticheskiy jurnal «Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta Gosudarstvennoy protivopojarnoy slujbi MCHS Rossii», 2015. – s.185-197.
6. Ibraymov A.YE. Masofaviy oʻqitishning didaktik tizimi. Metodik qoʻllanma. – T.: “Lesson press”, 2020. -112 b.
7. Ignatova N. Y. Obrazovaniye v sifrovuyu epoxu: monografiya. M-vo obrazovaniya i nauki RF. – Nijniy Tagil: NTI (filial) UrFU, 2017. – 128 s. http://elar.urfu.ru/bitstream/10995/54216/1/978-5-9544-0083-0_2017.pdf
8. Kiryakova A.V, Olxovaya T.A., Mixaylova N.V., Zaporojko V.V. Internet-texnologii na baze LMS Moodle v kompetentnostno-oriyentirovannom obrazovanii: uchebno-metodicheskoye posobiye / A.V. Kiryakova, T.A. Olxovaya, N.V.

Mixaylova, V.V. Zaporojko; Orenburgskiy gos. un-t. – Orenburg: OGU, 2011. – 116 s. http://www.osu.ru/docs/fpkp/kiryakova_internet_technologies.pdf

9. Kononyuk A.YE. Oblachniye vichisleniya. – Kiyev, 2018. – 621 s.

10. Oliy ta'lim tizimini raqamli avlodga moslashtirish konsepsiyasi. Yevropa Ittifoqi Erasmus+ dasturining ko'magida. https://hiedtec.ecs.uni-ruse.bg/pimages/34/3._UZBEKISTAN-CONCEPT-UZ.pdf

11. Emelyanova O. A. Ta'limda bulutli texnologiyalardan foydalanish // Yosh olim. - 2014. - № 3. - S. 907-909.

12. Moodle LMS tizimida masofaviy kurslar yaratish. O'quv-uslubiy qo'llanma. – T.: Toshkent farmatsevtika instituti, 2017.

13. Tendensi i razvitiya visshego obrazovaniya v mire i v Rosii. Analiticheskiy doklad-daydjest. - M., 2021.- 198 s.

14. A.S. Zikriyoyev. Dunyo universitetlari reytingidagi tadqiqotchi olimlar orasida o'zingizni kashf qiling. -T.: Navro'z,2020. ISBN.9789943659285

15. Sherzod Mustafakulov, Aziz Zikriyoev, Dilnoza Allanazarova, Tokhir Khasanov, Sokhibmalik Khomidov. Explore Yourself Among World – Class Researchers. Grand OLEditor, Tashkent 2019, ISBN: 8175 25766-0.

16. Ackoff, Russell L., Scientific Method, New York: John Wiley & Sons, 1962.

17. Barzun, Jacques & Graff. F. (1990). The Modern Researcher, Harcourt, Brace Publication: New York.

18. Muslimov N.A va boshqalar. Innovatsion ta'lim texnologiyalari. O'quv-metodik qo'llanma. – T.: "Sano-standart", 2015. – 208 b.

19. Muslimov N.A va boshqalar. Pedagogik kompetentlik va kreativ asoslari. O'quv-metodik qo'llanma. – T.: "Sano-standart", 2015. – 120 b.

20. Pecherkina, A. A. Razvitiye professionalnoy kompetentnosti pedagoga: teoriya i praktika [Tekst] : monografiya / A. A. Pecherkina, E. E. Simanyuk, YE. L. Umnikova : Ural. gos. ped. un-t. – Yekaterinburg : [b.i.], 2011. – 233 s.

21. O.S. Frolova. Formirovaniye innovatsionnoy kompetensii pedagoga v protsesse vnutrishkolnogo povisheniya kvalifikatsii. Diss.k.p.n. Voronej 2018.

22. Kompetensii pedagoga XXI veka [Elektronniy resurs]: sb. materialov resp. konferensii (Minsk, 25 noyab. 2021 g.) / M-vo obrazovaniya Resp. Belarus, GUO «Akad. poslediplom. obrazovaniya», OO «Belorus. ped. o-vo». – Minsk: APO, 2021.

23. Ishmuhamedov R.J., M.Mirsoliyeva. O'quv jarayonida innovatsion ta'lim texnologiyalari. – T.: «Fan va texnologiya», 2017, 60 b.

24. Ishmuhamedov R, Mirsoliyeva M, Akramov A. Rahbarning innovatsion faoliyati. – T.: "Fan va texnologiyalar", 2019.- 68 b.

25. Kodjaspirova G.M. Pedagogika v sxemax, tablitsax i opornix konspektax./ -M.:Ayris-press, 2016.

26. Natanzon E. Sh. Priyemi pedagogicheskogo vozdeystviya. - M, 2012. - 202 s.

27. Sergeyev I.S. Osnovi pedagogicheskoy deyatelnosti: Uchebnoye posobiye. – SPb.: Piter, 2014.

28. Margaret L. Lial, Thomas W. Hungerford, John P. Holcomb, Bernadette Mullins, Mathematics with Applications In the Management, Natural and Social Sciences (11th Edition), Pearsonb 2018.

29. Massey B., Ward-Smith J. Mechanics of Fluids. Solutions Manual Eighth edition. - Taylor &. Francis, 2016.

30. N.A.Korshunova and D.M.Azimov. Analytical Solutions for Thrust Arcs in a Field of Two Fixed Centers // «Journal of Guidance, Control, and Dynamics», (AIAA, USA), 2014, V.37, №5, P.1716-1719

31. Rao, M. M. Random and Vector Measures, Series on Multivariate Analysis, 9, World Scientific, 2012.

32. Robert D. Zucker, Oscar Biblarz Fundamentals of Gas Dynamics, Wiley, 2002. 512r.

33. Steve Taylor “Destination” Vocabulary and grammar”, Macmillan 2010.

34. Tao, Terence. An Introduction to Measure Theory. Providence, R.I.: American Mathematical Society, 2019.

35. Weaver, Nik Measure Theory and Functional Analysis. World Scientific, 2013, 423 p.

36. Avilova L.V., Bolotyuk V.A., Bolotyuk L.A. Analiticheskaya geometriya i lineynaya algebra// 2013. Izdaniye: 1-ye izd. 421 s.

37. Azimov D.M., Korshunova N.A Harakatning ustuvorlik nazariyasi bo‘yicha tanlangan ma’ruzalar. - Uchebnoye posobiye. - Tashkent, Universitet, 2005.

38. Belogurov A.Y. Modernizatsiya protsessa podgotovki pedagoga v kontekste innovatsionnogo razvitiya obshestva: Monografiya. — M.: MAKS Press, 2016. — 116 s. ISBN 978-5-317-05412-0.

39. Gulobod Qudratulloh qizi, R.Ishmuhamedov, M.Normuhammedova. An’anaviy va noan’anaviy ta’lim. – Samarqand: “Imom Buxoriy xalqaro ilmiy-tadqiqot markazi” nashriyoti, 2019. 312 b.

40. Ibraymov A.YE. Masofaviy o‘qitishning didaktik tizimi. metodik qo‘llanma/ tuzuvchi. A.YE. Ibraymov. – Toshkent: “Lesson press”, 2020. 112 bet.

41. Ishmuhamedov R.J., M.Mirsoliyeva. O‘quv jarayonida innovatsion ta’lim texnologiyalari. – T.: «Fan va texnologiya», 2014. 60 b.

42. Kiryanov D. Mathcad 15/Mathcad Prime 1.0. - SPb.: BXV-Peterburg, 2012. — 432 s.

43. Muslimov N.A va boshqalar. Innovatsion ta’lim texnologiyalari. O‘quv-metodik qo‘llanma. – T.: “Sano-standart”, 2015. – 208 b.

44. Ignatova N. Y. Obrazovaniye v sifrovuyu epoxu: monografiya. M-vo obrazovaniya i nauki RF. – Nijniy Tagil: NTI (filial) UrFU, 2017. – 128 s. http://elar.urfu.ru/bitstream/10995/54216/1/978-5-9544-0083-0_2017.pdf

45. Oliy ta’lim tizimini raqamli avlodga moslashtirish konsepsiyasi. Yevropa Ittifoqi Erasmus+ dasturining ko‘magida. https://hiedtec.ecs.uni-ruse.bg/pimages/34/3._UZBEKISTAN-CONCEPT-UZ.pdf

46. O.K. Asekretov, B.A. Borisov, N.Y. Bu-gakova i dr. M – Kniga 16 / Sovremenniye obrazovatelniye texnologii: pedagogika i psixologiya: Novosibirsk: Izdatelstvo SRNS, 2015. – 318 s. http://science.vvsu.ru/files/5040BC65-273B-44BB-98C4-CB5092BE4460.pdf

47. Turayev X. Harakatning turg‘unlik nazariyasi. - SamGU, 2004.

48. Usmonov B.SH., Habibullayev R.A. Oliy o‘quv yurtlarida o‘quv jarayonini kredit-modul tizimida tashkil qilish. O‘quv qo‘llanma. T.: “Tafakkur” nashriyoti, 2020 y. 120 bet.

II. Elektron ta’lim resurslari

1. www.edu.uz.
2. www.aci.uz.
3. www.ictcouncil.gov.uz.
4. www.lib.bimm.uz
5. www. Ziyonet. Uz
6. www.sciencedirect.com
7. www.acs.org
8. www.nature.com
9. http://www.kornienko-ev.ru/BCYD/index.html.

II. MODULNI O‘QITISHDA FOYDALANILADIGAN INTREFAOL TA’LIM METODLARI

“KWHL” metodi

Metodning maqsadi: Mazkur metod tinglovchilarni yangi axborotlar tizimini qabul qilishi va bilimlarni tizimlashtirishi uchun qo‘llaniladi, shuningdek, bu metod tinglovchilar uchun mavzu bo‘yicha qo‘yidagi jadvalda berilgan savollarga javob topish mashqi vazifasini belgilaydi.

Izoh. *KWHL:*
Know – nimalarni bilaman?
Want – nimani bilishni xohlayman?
How - qanday bilib olsam bo‘ladi?
Learn - nimani o‘rganib oldim?

“KWHL” metodi	
1. Nimalarni bilaman: -	***2. Nimalarni bilishni xohlayman, nimalarni bilishim kerak:*** -
3. Qanday qilib bilib va topib olaman: -	***4. Nimalarni bilib oldim:*** -

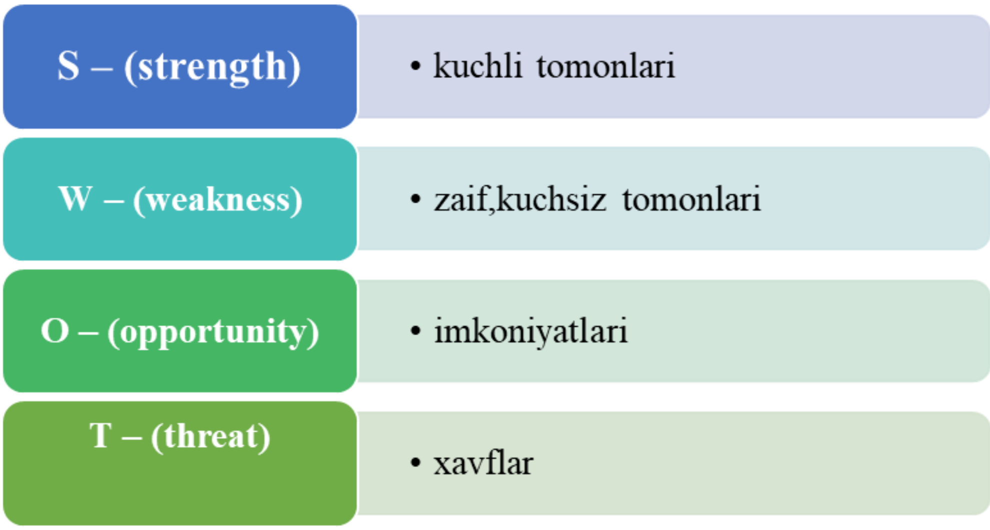
“W1H” metodi

Metodning maqsadi: Mazkur metod tinglovchilarni yangi axborotlar tizimini qabul qilishi va bilimlarni tizimlashtirishi uchun qo‘llaniladi, shuningdek, bu metod tinglovchilar uchun mavzu bo‘yicha qo‘yidagi jadvalda berilgan oltita savollarga javob topish mashqi vazifasini belgilaydi.

What?	Nima? (ta’rifi, mazmuni, nima uchun ishlatiladi)	
Where?	Qaerda (joylashgan, qaerdan olish mukin)?	
What kind?	Qanday? (parametrlari, turlari mavjud)	
When?	Qachon? (ishlatiladi)	
Why?	Nima uchun? (ishlatiladi)	
How?	Qanday qilib? (yaratiladi, saqlanadi, to‘ldiriladi, tahrirlash mumkin)	

“SWOT-tahlil” metodi

Metodning maqsadi: mavjud nazariy bilimlar va amaliy tajribalarni tahlil qilish, taqqoslash orqali muammoni hal etish yo‘llarni topishga, bilimlarni mustahkamlash, takrorlash, baholashga, mustaqil, tanqidiy fikrlashni, nostandart tafakkurni shakllantirishga xizmat qiladi.



2.1-rasm.

“VEER” metodi

Metodning maqsadi: Bu metod murakkab, ko‘ptarmoqli, mumkin qadar, muammoli xarakteridagi mavzularni o‘rganishga qaratilgan. Metodning mohiyati shundan iboratki, bunda mavzuning turli tarmoqlari bo‘yicha bir xil axborot beriladi va ayni paytda, ularning har biri alohida aspektlarda muhokama etiladi. Masalan, muammo ijobiy va salbiy tomonlari, afzallik, fazilat va kamchiliklari, foyda va zararlari bo‘yicha o‘rganiladi. Bu interfaol metod tanqidiy, tahliliy, aniq mantiqiy fikrlashni muvaffaqiyatli rivojlantirishga hamda o‘quvchilarning mustaqil g‘oyalari, fikrlarini yozma va og‘zaki shaklda tizimli bayon etish, himoya qilishga imkoniyat yaratadi. “Veer” metodidan ma’ruza mashg‘ulotlarida individual va juftliklardagi ish shaklida, amaliy va seminar mashg‘ulotlarida kichik guruhlardagi ish shaklida mavzu yuzasidan bilimlarni mustahkamlash, tahlili qilish va taqqoslash maqsadida foydalanish mumkin.

Metodni amalga oshirish tartibi:

trener-o‘qituvchi ishtirokchilarni 5-6 kishidan iborat kichik guruhlarga ajratadi;

trening maqsadi, shartlari va tartibi bilan ishtirokchilarni tanishtirgach, har bir guruhga umumiy muammoni tahlil qilinishi zarur bo‘lgan qismlari tushirilgan tarqatma materiallarni tarqatadi;

har bir guruh o‘ziga berilgan muammoni atroflicha tahlil qilib, o‘z mulohazalarini tavsiya etilayotgan sxema bo‘yicha tarqatmaga yozma bayon qiladi;

navbatdagi bosqichda barcha guruhlar o‘z taqdimotlarini o‘tkazadilar. Shundan so‘ng, trener tomonidan tahlillar umumlashtiriladi, zaruriy axborotlr bilan to‘ldiriladi va mavzu yakunlanadi.

2.2-rasm.

Muammoli savol					
1-usul		**2-usul**		**3-usul**	
afzalligi	kamchiligi	afzalligi	kamchiligi	afzalligi	kamchiligi
Xulosa:					

“Keys-stadi” metodi

«Keys-stadi» - inglizcha so‘z bo‘lib, («case» – aniq vaziyat, hodisa, «stadi» – o‘rganmoq, tahlil qilmoq) aniq vaziyatlarni o‘rganish, tahlil qilish asosida o‘qitishni amalga oshirishga qaratilgan metod hisoblanadi. Mazkur metod dastlab 1921 yil Garvard universitetida amaliy vaziyatlardan iqtisodiy boshqaruv fanlarini o‘rganishda foydalanish tartibida qo‘llanilgan. Keysda ochiq axborotlardan yoki aniq voqea-hodisadan vaziyat sifatida tahlil uchun foydalanish mumkin.

“Keys metodi” ni amalga oshirish bosqichlari

Ish bosqichlari	Faoliyat shakli va mazmuni
1-bosqich: Keys va uning axborot ta’minoti bilan tanishtirish	✓ yakka tartibdagi audio-vizual ish; ✓ keys bilan tanishish (matnli, audio yoki media shaklda); ✓ axborotni umumlashtirish; ✓ axborot tahlili; ✓ muammolarni aniqlash
2-bosqich: Keysni aniqlashtirish va o‘quv topshirig‘ni belgilash	✓ individual va guruhda ishlash; ✓ muammolarni dolzarblik ierarxiyasini aniqlash; ✓ asosiy muammoli vaziyatni belgilash
3-bosqich: Keysdagi asosiy muammoni tahlil etish orqali o‘quv topshirig‘ining yechimini izlash, hal etish yo‘llarini ishlab chiqish	✓ individual va guruhda ishlash; ✓ muqobil yechim yo‘llarini ishlab chiqish; ✓ har bir yechimning imkoniyatlari va to‘siqlarni tahlil qilish; ✓ muqobil yechimlarni tanlash
4-bosqich: Keys yechimini shakllantirish va asoslash, taqdimot.	✓ yakka va guruhda ishlash; ✓ muqobil variantlarni amalda qo‘llash imkoniyatlarini asoslash; ✓ ijodiy-loyiha taqdimotini tayyorlash; ✓ yakuniy xulosa va vaziyat yechimining amaliy aspektlarini yoritish

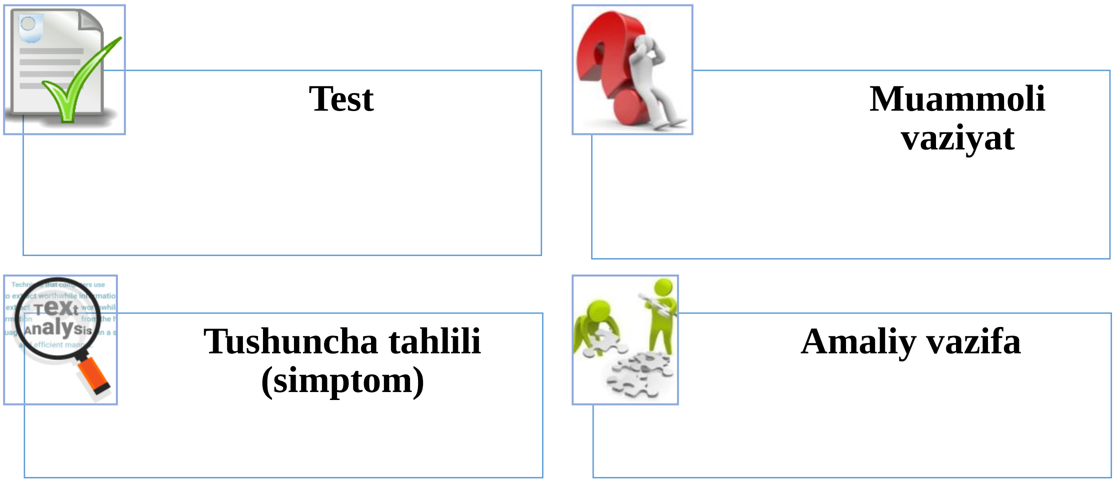
“Assesment” metodi

Metodning maqsadi: mazkur metod ta’lim oluvchilarning bilim darajasini baholash, nazorat qilish, o‘zlashtirish ko‘rsatkichi va amaliy ko‘nikmalarini tekshirishga yo‘naltirilgan. Mazkur texnika orqali ta’lim oluvchilarning bilish faoliyati turli yo‘nalishlar (test, amaliy ko‘nikmalar, muammoli vaziyatlar mashqi, qiyosiy tahlil, simptomlarni aniqlash) bo‘yicha tashhis qilinadi va baholanadi.

Metodni amalga oshirish tartibi:

“Assesment”lardan ma’ruza mashg‘ulotlarida talabalarning yoki qatnashchilarning mavjud bilim darajasini o‘rganishda, yangi ma’lumotlarni bayon qilishda, seminar, amaliy mashg‘ulotlarda esa mavzu yoki ma’lumotlarni o‘zlashtirish darajasini baholash, shuningdek, o‘z-o‘zini baholash maqsadida individual shaklda foydalanish tavsiya etiladi. Shuningdek, o‘qituvchining ijodiy yondashuvi hamda o‘quv maqsadlaridan kelib chiqib, assesmentga qo‘shimcha topshiriqlarni kiritish mumkin.

Har bir katakdagi to‘g‘ri javob 5 ball yoki 1-5 balgacha baholanishi mumkin.



2.3-rasm.

“Insert” metodi

Metodni amalga oshirish tartibi:

- o‘qituvchi mashg‘ulotga qadar mavzuning asosiy tushunchalari mazmuni yoritilgan matnni tarqatma yoki taqdimot ko‘rinishida tayyorlaydi;
- yangi mavzu mohiyatini yorituvchi matn ta’lim oluvchilarga tarqatiladi yoki taqdimot ko‘rinishida namoyish etiladi;
- ta’lim oluvchilar individual tarzda matn bilan tanishib chiqib, o‘z shaxsiy qarashlarini maxsus belgilar orqali ifodalaydilar. Matn bilan ishlashda talabalar yoki qatnashchilarga quyidagi maxsus belgilardan foydalanish tavsiya etiladi:

Belgilar	Matn
“V” – tanish ma’lumot.	
“?” – mazkur ma’lumotni tushunmadim, izoh kerak.	
“+” bu ma’lumot men uchun yangilik.	
“– ” bu fikr yoki mazkur ma’lumotga qarshiman?	

Belgilangan vaqt yakunlangach, ta’lim oluvchilar uchun notanish va tushunarsiz bo‘lgan ma’lumotlar o‘qituvchi tomonidan tahlil qilinib, izohlanadi, ularning mohiyati to‘liq yoritiladi. Savollarga javob beriladi va mashg‘ulot yakunlanadi.

III. NAZARIY MASHG'ULOT MATERIALLARI

1- MAVZU. GAMILTON PRINSIPI VA GAMILTON TENGLAMALARI

Reja:

1. Gamilton prinsipi va Gamilton tenglamalari.
2. Gamilton sistemasining integral invariantlari.
3. Puankare va Puankare-Kartan integral invarianlari

1. Gamilton prinsipi va Gamilton tenglamalari.

Gamilton prinsipi:

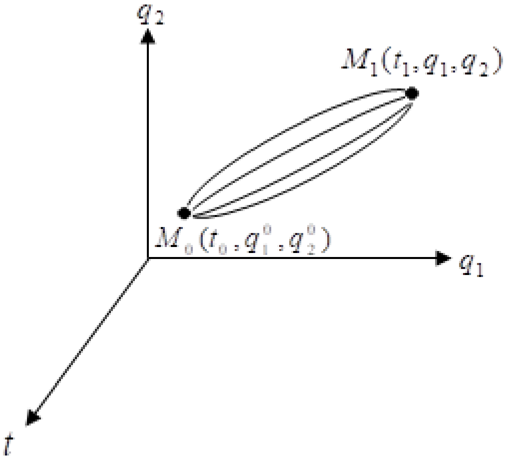
Gamilton prinsipi, klassik mexanika va kvant mexanikasida muhim ahamiyatga ega bo'lgan konseptdir. Bu prinsip, tizimning dinamikasini aniqlashda qulay usulni taklif etadi. Gamilton prinsipiga ko'ra, tizimning harakatini aniqlash uchun harakatlanish harakati (Lagrangian) va energiya holati (Hamiltonian) asosida differensial tenglamalar hosil qilinadi.

Gamilton prinsipi asosida, tizimning harakatlari minimal ish qoidasi asosida belgilangan, ya'ni harakat yo'li orqali bajarilgan ishning integralini minimallashtirishga intiladi. Bu prinsip fizikada ko'plab murakkab tizimlarni tushunish va tahlil qilishda foydalidir, ayniqsa, mexanikada, kvant mexanikasida va matematik fizika sohalarida.

Gamilton prinsipiga ko‘ra, fizik sistemaning harakat yo‘li, uning harakatlanishining har bir nuqtasida Lagrangian funksiyasining (L = T - V, bu yerda T - kinetik energiya, V - potentsial energiya) integraliga mos keladi. Ushbu prinsipga ko‘ra, sistemaning harakat yo‘li, vaqt bo‘yicha eng kichik (yoki eng katta) harakat integralini minimallashtiradi yoki maksimalga oshiradi.

Gamilton ta’siri xaqiqiy harakat uchun mumkin bo‘lgan harakatlardan farqli, ekstremal (statsionar) qiymatga ega bo‘ladi (Gamilton ta’sirining variatsiyasi $\delta w = 0$ bo‘ladi).

Gamilton prinsipining yana bir ko‘rinishiga to‘xtalib o‘tamiz. $(n+1)$ o‘lchamli kengaytirilgan $(t, q_1, \ldots, q_n)$ koordinata fazosi o‘rniga $(2n+1)$ o‘lchamli kengaytirilgan $t, q_i, p_i (i = 1, \ldots, n)$ (p_i umumlashgan impulslar) fazoni ko‘rib chiqamiz. Bu fazoda fiksirlangan $B_0(q_i^0, p_i^0, t_0)$ va $B_1(q_i^1, p_i^1, t_1)$ nuqtalar orqali o‘tuvchi xaqiqiy harakatga mos keluvchi trayektoriyani, shunindek bu nuqtalardan o‘tuvchi barcha boshqa mumkin bo‘lgan harakatlarni (“atrof” yo‘llarni) qarab chiqamiz(1-rasm). Xaqiqiy harakatga mos keluvchi $H(q_i(t),p_i(t),t)$ va $q_i(t)$, $p_i(t)$ o‘zgaruvchilar Gamilton



1-Rasm

tengmalarini $\frac{dq_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i},\ \frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_i},\ (i=1,\ldots,n)$ qanoatlantiradi.

Gamilton funksiyasi $H(q_i(t),p_i(t),t)$ bilan Lagranj funksiyasi $L(t,q_i,\dot{q}_i)$ orasidagi bog‘lanishni

$$L^* = \sum_{i=1}^{n} p_i\,\dot{q}_i - H(t,q_i,p_i)$$

hisobga olsak, u holda Gamilton prinsipi quyidagi

$$\delta\int_{t_0}^{t_1} L^* dt = \delta\int_{t_0}^{t_1} (\sum_{i=1}^{n} p_i\dot{q}_i - H)dt = 0$$

ko‘rinishda yoziladi (prinsipning birinchi ko‘rinishidan shartli o‘laroq) va atrof yo‘llar sifatida taqqoslashga B_0 va B_1 nuqtalardan o‘tuvchi $(2n+1)$ –o‘lchamli kengaytirilgan harakat fazosining ixtiyoriy egri chiziqlari olinadi. Lekin kengaytirilgan $(2n+1)$ *o*‘lchovli fazoning $p_1,\ldots,p_n$ *o*‘zgaruvchilari (umumlashgan impulslar)

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (i=1,\ldots,n)$$

tenglamani qanoatlantirishini hisobga olsak, u holda Gamilton prinsipining ikkinchi ko‘rinishi birinchi ko‘rinishga o‘tadi.

Gamilton Tenglamalari

Gamilton tenglamalari klassik mexanikaning muhim qismidir va tizimning harakatini tavsiflash uchun ishlatiladi. Ular Lagrangian mexanikasi asosida ishlab chiqilgan va tizimning dinamikasini Gamiltonian (energiya) funksiyasi orqali ifodalaydi.

Gamilton tenglamalarining asosiy ko'rinishi

Agar q_i — p_i umumiy koordinatalar va — umumiy impulslar bo'lsa, Gamilton tenglamalari quyidagicha ifodalanadi:

1. **Umumiy koordinatalar uchun tenglama:**

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

2. **Umumiy impulslar uchun tenglama:**

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

Bu yerda:

- *H* — Gamiltonian, ya'ni tizimning umumiy energiyasi.
- $\dot{q}_i$ va $\dot{p}_i$ — vaqt bo'yicha derivativlar, ya'ni harakatning tezligi va impulsning o'zgarish tezligi.

Gamiltonian funksiyasi

Gamiltonian, odatda, kinetik energiya *T* va potentsial energiya *V* ni o'z ichiga oladi:

H(q,p,t)=T(q,p)+V(q)

Gamilton tenglamalarining ahamiyati

Gamilton tenglamalari:

- Tizimning harakatini yanada umumiy va moslashuvchan tavsiflash imkonini beradi.
- Energiya va simmetriya prinsiplari bilan bog'liq fundamental qonunlarni o'rganishda foydalaniladi.
- Kvant mexanikasi va statistik mexanika kabi sohalarda asosiy konseptlar sifatida ishlatiladi.

2. **Gamilton sistemasining integral invariantlari.**

Gamilton sistemasining integral invariantlari — bu tizimning harakatiga bog'liq bo'lgan va vaqt davomida o'zgarishsiz qoladigan fizik kattaliklardir. Ular Gamiltonian mexanikasida muhim ahamiyatga ega, chunki ular tizimning xususiyatlarini saqlaydi va simmetriya bilan bog'liq qonunlarni ko'rsatadi.

Integral invariantlari

1. **Energiya**: Agar tizimda Gamiltonian vaqt bilan bog'liq bo'lmasa (ya'ni, (ya'ni, $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$), energiya invariant bo'ladi.
2. **Impuls invariantlari**: Agar tizimda translatsion simmetriya bo'lsa, ya'ni tashqi kuchlar mavjud bo'lmasa, impuls invariant bo'ladi. Bu, bir xil energiya holatlaridagi harakatlar orasida saqlanadi.
3. **Burchak momentlari**: Agar tizimda aylanish simmetriyasi bo'lsa, ya'ni tashqi momentlar mavjud bo'lmasa, burchak momenti invariant bo'ladi. Bu, ayniqsa, aylanishli tizimlarda muhimdir.

Noether teoremasi

Integral invariantlar Gamilton sistemasida Noether teoremasi orqali aniqlanadi. Noether teoremasi, simmetriyaning har bir turiga mos ravishda integral invariantni beradi. Misol uchun:

- **Translatsion simmetriya** → impuls invariantlari.
- **Aylanish simmetriya** → burchak momentlari invariantlari.
- **Vaqt simmetriya** → energiya invariantlari.

Foydalanish

Integral invariantlar Gamilton mexanikasida harakatni tahlil qilish va nazorat qilishda, shuningdek, murakkab tizimlarning dinamikasini tushunishda muhim ahamiyatga ega. Ular, shuningdek, fizikadagi ko'plab masalalarni, masalan, qattiq jismlarning harakatini, kvant tizimlarini va boshqa ko'plab sohalarni tushunishda yordam beradi.

Gamilton sistemlarining integral invariantlari, ya'ni integral invariantlar, Gamilton mexanikasida muhim ahamiyatga ega. Bu invariantlar tizimning dinamikasi davomida o'zgarishsiz qoladigan miqdorlardir. Gamilton tizimlarining bir qator xususiyatlari va invariantlari quyidagilardan iborat:

1. **Energiya invariantlari**: Gamilton tizimlarida energiya, odatda, vaqt davomida o'zgarishsiz qoladi. Bu, tizimning konservativ bo'lishi bilan bog'liq.
2. **Pleyadiya invariantlari**: Agar tizimning potentsial energiyasi ba'zi simmetriyalarga ega bo'lsa, masalan, rotatsiya simmetriyasi, tizimning ba'zi invariantlari ham saqlanadi.
3. **Liuvill teoremasi**: Bu teorema Gamilton tizimlarida faza fazasida hajmning saqlanishini ifodalaydi. Bu, har qanday Gamilton tizimining faza fazasidagi harakatlar davomida hajm o'zgarishsiz qolishini anglatadi.
4. **Konsistensiya invariantlari**: Gamilton tizimlarida tizimning muvozanat nuqtalariga qarab o'zgaruvchan invariantlar mavjud bo'lishi mumkin.
5. **Simmetriya va invariantlar**: Gamilton tizimlarida simmetriya ko'pincha invariantlarni keltirib chiqaradi. Noether teoremasi simmetriya va invariantlar o'rtasidagi bog'lanishni ko'rsatadi.

Bu invariantlar Gamilton tizimlarining xususiyatlarini chuqurroq o'rganish va tushunishda muhim ahamiyatga ega. Agar sizda ma'lum bir kontekstda savol bo'lsa yoki yanada batafsil ma'lumot kerak bo'lsa, bemalol so'rang!

3. Puankare va Puankare-Kartan integral invarianlari

Sistema harakati quyidagi birinchi tartibli differensial

$$\frac{dq_i}{dt} = Q_i(t, q_j p_j), \qquad \frac{dp_i}{dt} = P_i(t, q_j, p_j), \qquad (i = 1, \dots, n) \tag{13}$$

tenglamalar sistemasi bilan aniqlanishi mu’lum bo‘lsin va $t = 0$ да q_i^0, p_i^0 $(i = 1, \dots, n)$ Koshi (boshlang‘ich) shartlari qo‘yilgan bo‘lsin.

Bundan tashqari, (12) Puankare-Kartan integrali (13) tenglamalar sistemasi bilan aniqlanuvchi xaqiqiy harakatlarga nisbatan integral invariant bo‘lsin, ya’ni bu xaqiqiy harakatlarning har qanday naychasi uchun yopiq konturni qamrab olgan egri chiziq bo‘yicha hisoblangan Puankare-Kartan integrali o‘z qiymatini o‘zgartirmaydi. U holda biz Gamilton funksiyasi H va Q_i, P_i funksiyalar o‘rtasida quyidagicha

$$Q_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad P_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \tag{14}$$

bog‘lanish mavjud.

Puankare va Puankare-Kartan integral invariantlari Gamilton mexanikasi va dinamikada muhim rol o'ynaydi. Ular tizimlarning harakatlarini tahlil qilishda va simmetriya xususiyatlarini o'rganishda qo'llaniladi. Keling, har birini qisqacha ko'rib chiqamiz:

1. Puankare invariantlari

Puankare invariantlari, asosan, Gamilton tizimlarining dinamikasidagi ba'zi muhim xususiyatlarni aks ettiradi. Ular ko'pincha tizimning energiya, moment va boshqa konservativ miqdorlari bilan bog'liq bo'ladi. Puankare invariantlari tizimning simmetriya xususiyatlarini ham ko'rsatadi. Ular tizimning harakat tenglamalaridan kelib chiqadi va bu invariantlar Gamilton tizimining harakatini aniq tushunishga yordam beradi.

2. Puankare-Kartan invariantlari

Puankare-Kartan invariantlari esa, asosan, ko'p o'lchovli Gamilton tizimlarida muhim ahamiyatga ega. Bu invariantlar, Puankare invariantlaridan farqli ravishda, biror vaqt davomida yoki vaqtga bog'liq bo'lmagan, lekin ma'lum bir faza fazasi sifatida qabul qilinadigan invariantlar bo'lib, tizimning harakati davomida saqlanadi. Puankare-Kartan invariantlari, odatda, kuchli simmetriya va ba'zi maxsus holatlar uchun to'g'ri keladi.

Puankare va Puankare-Kartan invariantlari Gamilton tizimlarida muhim rol o'ynaydi va tizimlarning simmetriya xususiyatlarini, energiya va boshqa konservativ miqdorlarning saqlanishini tahlil qilishda yordam beradi. Bu invariantlar fizik tizimlarni yanada chuqurroq tushunishga imkon invariantlar fizik tizimlarni yanada chuqurroq tushunishga imkon beradi.

2-MAVZU. BIRINCHI INTEGRALLAR YORDAMIDA GAMILTON SISTEMASINING TARTIBINI PASAYTIRISH.

Reja:

1. *Birinchi integrallar yordamida Gamilton sistemasining tartibini pasaytirish.*
2. *Kanonik almashtirishlar.*

2.1. Birinchi integrallar yordamida Gamilton sistemasining tartibini pasaytirish.

Gamilton sistemasining tartibini pasaytirish uchun birinchi integrallarni qo'llash jarayoni quyidagicha amalga oshiriladi:

1.Gamilton tizimi: Gamilton sistemasining umumiy ko'rinishi quyidagicha:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

bu yerda **H** — Gamilton funktsiyasi, q_i—umumiy koordinatalar, p_i— umumiy impulslar.

2.Birinchi integrallar: Agar Gamilton tizimida birinchi integrallar (konservativ miqdorlar) mavjud bo'lsa, ularni aniqlash zarur. Birinchi integrallar tizimning harakatini tavsiflaydigan funktsiyalar bo'lib, ularning o'zgarishi vaqtga bog'liq emas.

3. Tartibni pasaytirish: Har bir birinchi integralni kiritish orqali Gamilton tizimining tartibini pasaytirish mumkin. Masalan, agar sizda n ta koordinata va n ta impuls bo'lsa, har bir birinchi integral kiritilishi bilan tizimning tartibi 1 ga pasayadi.

4.Tizimni yozish: Agar sizda k ta birinchi integral bo'lsa, tizimni $n-k$ ta differensial tenglama shaklida yozish mumkin:

$$\dot{q}_i = f_i(q, p)$$

va p ni birinchi integrallar yordamida qqq ga bog'liq qilib yozish mumkin.

5.Tahlil va yechim: Tizimning yangi shaklini tahlil qilish va kerakli yechimlarni topish uchun oddiy differensial tenglamalardan foydalanish mumkin.

Gamilton bo‘yicha ta’sir

Klassik mexanikada kanonik almashtirishlar Gamilton tenglamalariga tegishli bo‘lib, bu tenglamalarning integral invariantlariga asoslanadi. Shuning uchun bu invariantlarni kelib chiqishiga to‘xtalib o‘tamiz.

Lagranj funksiyasi $L(t, q_i, q_i)$ va erkinlik darajasi n ga teng bo‘lgan ixtiyoriy geometrik bog‘lanishli mexanik sistemani ko‘rib chiqamiz.

Ma’lumki, quyidagi integral

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L(t, q_i, \dot{q}_i) dt$$

(t_0, t_1) vaqt oralig‘idagi **Gamilton ta’siri** deb ataladi.

Integral ostidagi L Lagranj funksiyasi sistemaning umumlashgan koordinata va tezliklarning funksiyasi bo‘lgani uchun, integralni hisoblashda (t_0, t_1) vaqt oraligida $q_i(t)$ umumlashgan koordinatalar ma’lum bo‘lishi kerak. Boshqacha qilib ta’riflaganda, Gamilton ta’siri sistema harakatiga bog‘liq bo‘lgan funksional bo‘ladi.

Sistema harakatini talqin qiladigan bo‘lsak, harakatni $(n+1)$ o‘lchovli kengaytirilgan fazoda nuqta trayektoriyasi deb qarash mumkin. Kengaytirilgan fazoda ikkita “fiksirlangan” $M(t_0, q_i^0)$ va $M_1(t_1, q_i^1)$ nuqtalardan o‘tuvchi, sistemani boshlang‘ich (q_i^0) holatdan (t_0 vaqtga mos keluvchi) (q_i^1) (t_1 vaqtga mos keluvchi) keyingi holatiga o‘tkazuvchi mumkin bo‘lgan harakatlarni ko‘rib chiqamiz. Faraz qilamiz, mumkin bo‘lgan harakatlar orasida xaqiqiy harakat mavjud deb va bu harakat uchun $L(t, q_1, \dots q_n, \dot{q}_1, \dots \dot{q}_n)$ Lagranj funksiyasi mos keladi, umumlashgan $q_i(t)$ koordinatalar esa

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0. \quad (i = 1, \dots, n)$$

Lagranjning 2-tur differensial tenglamalarini qanoatlantiradi.

Qolgan, M_0 va M_1 nuqtalardan o‘tuvchi boshqa trayektoriyalar to‘plamini **mumkin bo‘lgan** (atrof yo‘llar**)** harakatlar deb ataymiz.

Gamilton ta’sirining variatsiyasini, vaqtning shuningdek koordinatalarning boshlang‘ich va oxirgi qiymatlari o‘zgaruvchan bo‘lgan holda, ya’ni α parametrning

$$t_0 = t_0(\alpha), \quad q_i^0 = q_i^0(\alpha),$$
$$t_1 = t_1(\alpha), \quad q_i^1 = q_i^1(\alpha) \qquad (i = 1, \dots, n) \qquad (1)$$

funksiyasi bo‘lgan hol uchun ko‘rib chiqamiz.

Bu holda $W = \int_{t_0}^{t_1} L\, dt$ integralni parametr bo‘yicha differensiallab quyidagi ifodani hosil qilamiz:

$$\delta W = \delta \int_{t_0(\alpha)}^{t_1(\alpha)} L dt = L_1 \delta t_1 - L_0 \delta t_0 + \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) dt = L_1 \delta t_1 +$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i^1 [\delta q_i]_{t=t_1} - L_0 \delta t_0 - \sum_{n=1}^{n} p_i^0 [\delta q_i]_{t=t_0} + \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt,$$

(2)

$$[\delta q_i]_{t=t_\lambda} = \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} q_i(t,\alpha) \right]_{t=t_\lambda} \delta \alpha \ (i = 1, \ldots, n; \lambda = 0,1).$$

(3)

Lekin $q_i^1 = q_i^1(t_1, \alpha)$ umumlashgan koordinatalarning chegaradagi to‘liq variatsiyalari uchun

$$\delta q_i^1 = \dot{q}_i^1 \delta t_1 + \left[\frac{\partial q_i(t,\alpha)}{\partial \alpha} \right]_{t=t_1} \delta \alpha,$$

formulaga egamiz.

Yoki

$$\delta q_i^1 = [\delta q_i]_{t=t_1} + \dot{q}_i^1 \delta t_1 \ (i = 1, \ldots, n).$$

Bu yerdan

$$[\delta q_i]_{t=t_1} = \delta q_i^1 - \dot{q}_i^1 \delta t_1 \ (i = 1, \ldots n).$$ (4)

Aynan shunday ifoda umumlashgan koordinataning boshlang‘ich qiymatlari uchun ham o‘rinli:

$$[\delta q_i]_{t=t_0} = \delta q_i^0 - \dot{q}_i^0 \delta t_0 \quad (i = 1, \ldots n)$$ (5)

(4) va (5) tenglamalardan foydalanib δW uchun (2) ifodani quyidagi

$$\delta W = \left[\sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i - H \delta t \right]_0^1 + \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{dL}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt.$$

(6)

ko‘rinishini (odatdagiday umumlashgan $\dot{q}_i$ tezliklarni umumlashgan impulslar p_i orqali ifodalab va $\sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - L' = H$ tenglikni hisobga olib) hosil qilamiz.

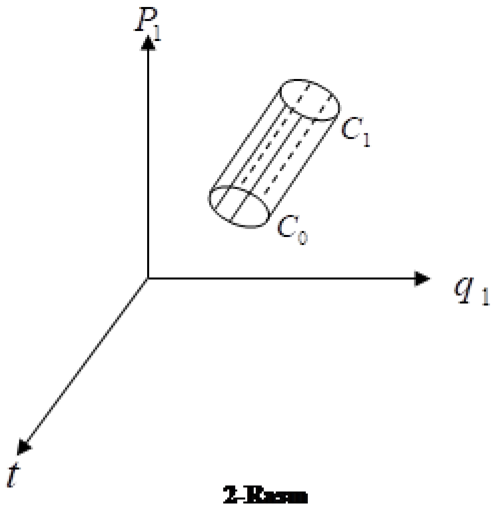
Bu tenglamada

$$\left[\sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i - H \delta t \right]_0^1 = \sum_{i=1}^{n} p_i^1 \delta q_i^1 - H_1 \delta t_1 - \sum_{i=1}^{n} p_i^0 \delta q^0{}_i + H_0 \delta t_0.$$

Xususiy holda, har qanday α uchun mos keluvchi yo‘l haqiqiy yo‘l bo‘lganda, ya’ni $q_i = q_i(t,\alpha) \ (i = 1, \ldots, n)$ haqiqiy harakatlar to‘plamidan iborat bo‘lsa, (6) tenglikni o‘ng tomonidagi integral har qanday α uchun nolga teng bo‘ladi va Gamilton ta’siri variatsiyasi uchun ifoda

$$\delta W = \left[\sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i - H \delta t \right]_0^1 \qquad (7)$$

oddiy ko‘rinishni qabul qiladi.



2-Rasm

Kengaytirilgan $(n+1)$ o‘lchovli fazo o‘rniga $(2n+1)$ o‘lchovli fazo olinsa, u holda bu fazoda nuqtaning koordinatalari q_i, p_i, t kattaliklardan iborat bo‘ladi. Bu fazoda

$$q_i = q^0{}_i(t,\alpha), \quad p_i = p_i^0(t,\alpha), \quad t = t_0(\alpha) \qquad (8)$$

$$(i = 1,\dots n, \quad 0 \le \alpha \le L)$$

ixtiyoriy yopiq C_0 egri chiziqni olamiz va α parametrni shunday tanlab olamizki. $\alpha = 0$, $\alpha = L$ qiymatlar C_0 yopiq egri chiziqning aynan bitta nuqtasiga mos kelsin. C_0 yopiq egri chiziqning har bir nuqtasidan tegishli xaqiqiy harakat trayektoriyalarini o‘tkazamiz va xaqiqiy harakat trayektoriyalari naychasini hosil qilamiz (2-rasm).

$$q_i = q_i(t,\alpha), \quad p_i = p_i(t,\alpha) \ (i = 1,\dots n. \ 0 \le \alpha \le L) \qquad (9)$$

Bu ifodada $q_i(t,0) \equiv q_i(t,L), \quad p_i(t,0) \equiv p_i(t,L) \qquad (i = 1,\dots,n).$

Bu naychada ixtiyoriy ravishda naychani qamrab oluvchi va har bir yasovchi bilan faqat bittagina umumiy nuqtaga ega bo‘lgan C_1 egri chiziqni tanlab olamiz. C_1 egri chiziqning tenglamasini quyidagi ko‘rinishda yozish mumkin:

$$q_i = q_i^1(\alpha), \ p_i = p_i^1(\alpha), \ t = t_1(\alpha) \qquad (10)$$

Gamilton ta’sirini $W = \int_{t_0(\alpha)}^{t_1(\alpha)} L dt$ xaqiqiy harakatlar naychasi bo‘ylab C_0 egri chiziqdan C_1 egri chiziqqacha qarab chiqamiz.

U holda har qanday α uchun (7) ifodaga ko‘ra

$$\delta W = W'(\alpha)\delta\alpha = \left[\sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i - H \delta t \right]_0^1 .$$

2- Bu tenglikni $0 < \alpha < l$ oraliqda integrallab quyidagi

$$0 = W(l) - W(0) = \int_0^l \left[\sum_{i=1}^n p_i \delta q_i - H\delta t \right]_0^1 = \int_0^l \left[\sum_{i=1}^n p_i^1 \delta q_i^1 - H_1 \delta t_1 \right] -$$

$$-\int_0^l \left[\sum_{i=1}^n p_i^0 \delta q_i^0 - H_0 \delta t_0 \right] = \oint_{c_1} \sum_{i=1}^n (p_i \delta q_i - H\delta t) - \oint_{c_0} \sum_{i=1}^n (p_i \delta q_i - H\delta t)$$

ifodani hosil qilamiz.

Ya’ni $$\oint_{c_0} \left[\sum_{i=1}^n p_i \delta q_i - H\delta t \right] = \oint_{c_1} \left[\sum_{i=1}^n p_i \delta q_i - H\delta t \right].$$ (11)

Shunday qilib, ixtiyoriy yopiq kontur bo‘yicha

$$I = \int_c \sum_{i=1}^n p_i \delta q_i - H\delta t \qquad (12)$$

integral bu konturni to‘g‘ri yo‘llar naychasi bo‘ylab ixtiyoriy siljitilganda (deformatsiya bilan) o‘z qiymatini o‘zgartirmaydi, ya’ni integral ***invariant*** bo‘ladi. Biz sistema Gamilton sistamasidan iborat bo‘lsa, u holda (12) ko‘rinishdagi integral invariant bo‘lishini ko‘rsatdik.

Endi sistema harakati quyidagi birinchi tartibli differensial

$$\frac{dq_i}{dt} = Q_i(t, q_j, p_j), \qquad \frac{dp_i}{dt} = P_i(t, q_j, p_j), \qquad (i = 1, \dots, n) \qquad (13)$$

tenglamalar sistemasi bilan aniqlanishi mu’lum bo‘lsin va $t = 0$ да q_i^0, p_i^0 $(i = 1, \dots, n)$ Koshi (boshlang‘ich) shartlari qo‘yilgan bo‘lsin.

Bundan tashqari, (12) Puankare-Kartan integrali (13) tenglamalar sistemasi bilan aniqlanuvchi xaqiqiy harakatlarga nisbatan integral invariant bo‘lsin, ya’ni bu xaqiqiy harakatlarning har qanday naychasi uchun yopiq konturni qamrab olgan egri chiziq bo‘yicha hisoblangan Puankare-Kartan integrali o‘z qiymatini o‘zgartirmaydi. U holda biz Gamilton funksiyasi H va Q_i, P_i funksiyalar o‘rtasida quyidagicha

$$Q_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad P_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad (14)$$

bog‘lanish mavjud.

2.2. Kanonik almashtirishlar.

Kanonik almashtirishlar Gamilton sistemalariga tegishli bo‘lib, bu almashtirishlardan asosiy maqsad, berilgan ixtiyoriy Gamilton sistemasini boshqa struktura jihatidan soddaroq Gamilton funksisiga ega bo‘lgan sistema bilan almashtirishdir. Umumiy holda vaqtga bog‘liq bo‘lgan quyidagi

$$q_i' = q_i'(t, q_k, p_k), \quad p_i' = p_i'(t, q_k, p_k) \ (i, k = 1, 2, \dots, n)$$
$$\frac{\partial(q'_1, p'_1, \dots, q'_n, p'_n)}{\partial(q_1, p_1, \dots, q_n, p_n)} \neq 0, \qquad (1)$$

almashtirishlar kanonik deyiladi, agar bu almashtirishlar ixtiyoriy Gamilton

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \ \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} (i = 1, \dots, n) \qquad (2)$$

sistemasini yana Gamilton sistemasiga (umumiy holda boshqa H' Gamilton funksiyasi bilan) o‘tkazsa.

Ya’ni quyidagi ko‘rinishni egallasa:

$$\frac{dq'_i}{dt} = \frac{\partial H'}{\partial p'_i}, \ \frac{dp'_i}{dt} = -\frac{\partial H'}{\partial q'_i} \ (i = 1, \dots, n). \qquad (3)$$

Kanonik almashtirish shartlarini keltirib chiqarish uchun kengaytirilgan $2n+1$ o‘lchovli (q_i, p_i, t) va (q'_i, p'_i, t) koordinat sistemalarida kanonik almashtirishlar natijasida, biri ikkinchisiga o‘tuvchi Gamilton sistemalarinig xaqiqiy harakatlar naylari bo‘ylab, ixtiyoriy yopiq C, C' chiziqlar bo‘yicha olingan

$$I = \int_c \sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i - H \delta t, \quad I' = \int_{c'} \sum_{i=1}^{n} p'_i \delta q'_i - H' \delta t$$

integrallarni ko‘rib chiqamiz.

Birinchi integral Gamilton funksiyasi $H(q_i, p_i, t)$ bo‘lgan Gamilton sistemasi uchun invariant bo‘lsa, ikkinchi integral kanonik almashtirishlardan hosil bo‘lgan $H'(q'_i, p'_i, t)$ Gamilton sistemasi uchun invariant bo‘ladi. Agar ikkinchi integral ostidagi (q'_i, p'_i) o‘zgaruvchilarni (1) tenglamaga asosan (q_i, p_i) lar bilan almashtirsak C yopiq kontur C' yopiq konturga o‘tadi va ikkinchi integral boshlang‘ich Gamilton sistemasi uchun yangi invariantga aylanadi. Lekin Li Xua-chjun teoremasiga ko‘ra bu ikki integral orasida quyidagi

$$\int_{c'} \left(\sum_{i=1}^{n} p'_i \delta q'_i - H' \delta t\right) = c \int_{c} \left(\sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i - H \delta t\right) \qquad (4)$$

bog‘lanish o‘rinli bo‘ladi (vaqt kanonik almashtirishlarda o‘zgarmasdan qoladi) yoki

$$\int_c ((\sum_{i=1}^{n} p_i' \delta q_i' - H'\delta t) - c(\sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i - H\delta t)) = 0 \tag{5}$$

tenglama bajariladi.

Xaqiqiy harakatlar trubkasida olingan ixtiyoriy yopiq soha bo‘yicha integral nolga teng bo‘lishi uchun integral ostidagi ifoda (q_i, p_i, t) o‘zgaruvchilarga bog‘liq bo‘lgan qandaydir $F(q_i, p_i, t)$ funksiyaning to‘liq differensiali bo‘lishi kerak.

U holda

$$\sum_{i=1}^{n} p_i' \delta q_i' - H' \delta t = c(\sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i - H \delta t) - \delta F. \tag{6}$$

va tenglikdagi o‘zgarmas $c \neq 0$ chunki, tenglikning chap tomonidagi ifoda to‘liq differensial emas, shuning uchun δF ga teng bo‘lmaydi.

$F(q_i, p_i, t)$ funksiyani **keltirib chiqaruvchi funksiya**, c o‘zgarmasni kanonik almashtirishlar **valentligi** deb ataladi. $c = 1$ bo‘lgan holda, almashtirishlar ***univalent kanonik o‘zgartirishlar*** deyiladi. Yuqoridagi analitik amallarni hisobga olib, quyidagi teoremani keltirishimiz mumkin:

Gamilton sistemasidagi (1) almashtirishlar kanonik bo‘lishi uchun, (6) tenglamani qanoatlantiruvchi keltirib chiqaruvchi F funksiya va $c \neq 0$ o‘zgarmasning mavjud bo‘lishi zarur va yetarli.

3-MAVZU. ALMASHTIRISHLARNI KANONIKLIK ALOMATI

Reja:

3.1. *Almashtirishlarni kanoniklik alomati.*
3.2. *Erkin kanonik almashtirishlar*.

3.1 Almashtirishlarni kanoniklik alomati (kriteriysi).

Almashtirishlarni kanoniklik alomati (kriteriysi) algebraik strukturalarda, xususan, guruhlar va boshqa algebraik tizimlar bilan bog'liq muammolarni hal qilishda muhim o'rin tutadi. Kanoniklik alomati ko'pincha quyidagi talablarga asoslanadi:

1. **Almashtirishlar o'rtasidagi bog'lanish**: Agar bir almashtirish boshqa almashtirishning natijasi bo'lsa, bu ularning o'zaro qanday bog'liqligini ko'rsatadi.

2. **Kanonik ko'rinish**: Har bir almashtirishni o'ziga xos tarzda ko'rinishga keltirish (masalan, ko'rsatmalar yoki parametrlar yordamida), bu esa nazorat qilishni osonlashtiradi.

3. **Guruh strukturasi**: Almashtirishlar guruhni hosil qilishi yoki uning ichida qanday rol o'ynashi, masalan, normal guruhi bo'lishi.

Bu alomatlar yordamida, matematiklar turli algebraik muammolarni yechishda yoki matematik strukturalarning o'zaro munosabatlarini aniqlashda foydalanadilar.

Yuqorida keltirilgan kanonik almashtirish shartida qatnashuvchi o‘zaro bog‘liq bo‘lmagan va q_i, p_i o‘zgaruvchilarning funksiyasi bo‘lgan

$$q_i' = \varphi_i(p_i, q_i, t), \quad p_i' = \phi_i(q_i, p_i, t) \qquad (7)$$

almashtirishlar kanonik bo‘lishi uchun qanday shartlarni qanoatlantirishi kerakligini ko‘rib chiqamiz.

Faraz qilamiz (6) ko‘rinishdagi almashtirishlar kanonik almashtirishlardan iborat bo‘lsin. U holda bu almashtirishlar uchun quyidagi

$$\sum_{i=1}^{n} p_i' \delta q_i' - H' \delta t = c\left(\sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i - H \delta t\right) - \delta F \qquad (8)$$

ayniyat o‘rinli bo‘lishi kerak.

Endi vaqtning ixtiyoriy fiksirlangan $t = t'$ qiymatini olamiz. U holda yuqoridagi (8) ayniyat

$$\sum_{i=1}^{n} p_i' \delta q_i' = c\left(\sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i\right) - \delta F \qquad (9)$$

ko‘rinishga ega bo‘ladi.

Bu tenglama valentligi c bo‘lgan va fiksirlangan vaqtdagi

$$q_i' = \varphi_i(q_i, p_i, t'), \; p_i' = \phi(q_i, p_i, i') \; (i = 1, \dots, n)$$

kanonik almashtirishlarni aniqlaydi.

Endi teskarisi, ya'ni (9) tenglama bilan aniqlanuvchi barcha almashtirishlar vaqtning ixtiyoriy fiksirlangan qiymatida bir xil valentlik almashtirishlar bo'lsin.

Bu holda almashtirishlar natijasida hosil bo'lgan Gamilton funksiyasini quyidagicha

$$H' = cH + \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} p_i' \frac{\partial q_i'}{\partial t} \tag{10}$$

aniqlab va bu tenglamani vaqtning variatsiyasiga ko'paytirib (9) va (10) tenglamalarni ikki tomonini qo'shsak (8) ifodaga ega bo'lamiz.

Shunday qilib, vaqtga oshkor ravishda bog'liq bo'lgan

$$q_i' = \varphi_i(q_i, p_i, t), \; p_i' = \phi(q_i, p_i, i), \; (i = 1, \dots, n)$$

almashtirishlar kanonik bo'lishi uchun, ixtiyoriy fiksirlangan vaqtni qiymatida

$$q_i' = \varphi_i(q_i, p_i, t'), \; p_i' = \phi(q_i, p_i, i'), \; (i = 1, \dots, n)$$

almashtirishlar bir xil c valentlik kanonik almashtirishlar bo'lishi zarur va yetarlidir.

Bizga quyidagi almashtirishlar berilgan bo'lsin:

$$q_i' = \varphi_i(q_i, p_i), \; p_i' = \phi(q_i, p_i'), \; \frac{\partial(q'_1, \dots, p'_n)}{\partial(q_1, \dots, p_n)} \neq 0, \; (i = 1, \dots, n). \tag{11}$$

Bu holda almashtirishlarni kanonikligini aniqlovchi ayniyat quyidagicha aniqlanadi:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i' \delta q_i' = c(\sum_{i=1}^{n} p_i \delta q)_i - \delta F(q_i, p_i) \,. \tag{12}$$

Agar bu tenglamadagi $p_i', \delta q_i'$ larni (p_i, q_i) o'zgaruvchilar orqali ifodalasak (7) yordamida

$$\sum_{i-1}^{n} (\Phi_i \delta q_i + \Psi_i \delta p_i) = -\delta K(q_i, p_i) \tag{13}$$

tenglikni hosil qilamiz.

Bu tenglikdagi (Ψ_i, Φ_i) funksiyalar uchun

$$\Phi_i = \sum_{i-1}^{n} p_i' \frac{\partial q_i'}{\partial q_i} - cp_i, \Psi_i = \sum_{i=1}^{n} p_i' \frac{\partial q_i'}{\partial p_i} \; (i - 1, \dots, n)$$

ifodalarga ega bo'lamiz.

Almashtirishlar kanonikligi (12) tenglamaning chap qismida turgan ifodaning to‘liq differensiallik shartidan aniqlanadi:

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial q_k} = \frac{\partial \Phi_k}{\partial q_i}, \frac{\partial \Psi_i}{\partial p_k} = \frac{\partial \Psi_k}{\partial p_i}, \frac{\partial \Phi_i}{\partial p_k} = \frac{\partial \Psi_k}{\partial q_i}, (i, k = 1, \ldots, n)$$

3.2.Erkin kanonik almashtirishlar

Erkin kanonik almashtirishlar (yoki erkin kanonik transformatsiyalar) klassik mexanikada va algebraik geometriyada muhim tushunchadir. Ular quyidagi xususiyatlarga ega:

1. **Erkinlik**: Almashtirishlar tizimdagi barcha holatlarni qamrab oladi va xususiy shartlar bilan cheklanmaydi. Bu, o'z navbatida, dinamik yoki geometrik tizimning barcha holatlarini ifodalash imkonini beradi.
2. **Kanoniklik**: Almashtirishlar biror tizimning strukturaviy xususiyatlarini saqlab qoladi. Masalan, klassik mexanikada erkin kanonik almashtirishlar, odatda, Hamiltonian tizimlarida energiya va boshqa saqlovchi miqdorlar o'rtasidagi bog'lanishni saqlaydi.
3. **Formulalar**: Erkin kanonik almashtirishlar ko'pincha matematik ifodalar bilan ifodalanadi, masalan, Hamilton formulalari yordamida.
4. **Geometrik talqin**: Bu almashtirishlar ko'pincha fazoviy ob'ektlar (masalan, fazoviy nuqtalar) o'rtasida bog'lanishlarni ko'rsatadi va geometrik tushunchalarni ifodalashda muhim o'rin tutadi.

Erkin kanonik almashtirishlar, ayniqsa, fizikada va matematikada muhim rol o'ynaydi, chunki ular tizimning dinamikasini yoki geometriyasini o'zgartirmasdan, xususiyatlarini o'rganishga imkon beradi.

Agar kanonik almashtirishlar uchun quyidagi qo‘shimcha $\frac{\partial(q_1', \ldots, q_n')}{\partial(p_i, \ldots, p_i)} \neq 0$ shart bajarilsa, u holda bu almashtirishlar erkin kanonik almashtirishlar deyiladi. Bu holda yangi o‘zgaruvchilar sifatida (q_i, q_i') larni olish mumkin. Xaqiqatdan ham, qo‘shimcha quyilgan shart kanonik almashtirishlardagi birinchi n ta tenglamadagi umumlashgan impulslar p_i larni qolgan (q'_i, q_i, t) o‘zgaruvchilar orqali ifodalash imkoniyatini beradi. Bu holda keltirib chiqaruvchi funksiyani quyidagi $F(t, q_i, p_i) = S(t, q_i, q'_i),$ ko‘rinishda olish mumkin, ya’ni yangi o‘zgaruvchilar funksiyasi deb qarash mumkin va erkin kanonik almashtirishlar sharti

$$\sum_{i=1}^{n} p'_i \delta q'_i - H' \delta t = c(\sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i - H\delta t) - \delta S(t, q_i, q'_i) \qquad (14)$$

ko‘rinishga keladi.

Variatsiyalar oldidagi koeffitsiyentlarni tenglab

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = cp_i, \quad \frac{\partial S}{\partial q'_i} = -p'_i \quad H' = cH + \frac{\partial S}{\partial t} \qquad (15)$$

ifodalarni hosil qilamiz.

Bu tenglamalar sistemasi erkin kanonik **almashtirish**larni aniqlaydi. $C = 1$ bo‘lgan holda almashtirishlar erkin ***univalent kanonik almashtirishlar*** deyiladi. (14) tenglamalar sistemasi uchun quyidagi xususiy hol o‘rinli. Agarda $H' = cH$ ga teng bo‘lsa, u holda $\frac{\partial S}{\partial t} = 0,$ ya’ni keltirib chiqaruvchi funksiya S vaqtga oshkor ravishda bog‘liq bo‘lmaydi.

Erkin kanonik almashtirishlar shartidan, almashtirishlar vaqtga oshkor ravishda bog‘liq bo‘lmagan holda Gamilton funksiyasining ko‘rinishi ko‘p ham o‘zgarmasligi kelib chiqadi. Shuning uchun Gamilton funksiyasini oddiyroq ko‘rinishga keltirish uchun almashtirishlarni vaqtga oshkor ravishda bog‘liq bo‘lgan holda olinadi.

Erkin kanonik almashtirishlar shartlari, asosan, Gamilton mexanikasi va simmetriya nazariyalarida muhim o'rin tutadi. Erkin kanonik almashtirishlar uchun asosiy shartlar quyidagilar:

1. **Almashtirishlar simmetriyasi**: Erkin kanonik almashtirishlar tizimning fazoviy ob'ektlarini almashtirish bilan bog'liq bo'lishi kerak. Ya'ni, agar siz bir nuqtani boshqa nuqtaga almashtirsangiz, tizimning dinamikasi o'zgarmasligi kerak.
2. **Kanonik o'zgarishlar**: Almashtirishlar kanonik bo'lishi uchun Hamiltonian tizimining strukturasini saqlab qolishi zarur. Bu shuni anglatadiki, yangi fazoviy

o'zgarishlar, eski tizimning Hamiltonianiga mos ravishda, yangi Hamiltonianni beradi.

3. **Erkinlik**: Almashtirishlar tizimning barcha mumkin bo'lgan holatlarini qamrab olishi kerak. Boshqacha aytganda, bu almashtirishlar qandaydir cheklovlarga ega bo'lmasligi kerak.
4. **Fazoviy shartlar**: Almashtirishlar fazoviy koordinatalar va ularning momentlarini qanday bog'lashini ko'rsatishi kerak. Bu o'zaro bog'lanishlar, odatda, qandaydir parametrlar yoki funksiyalar yordamida ifodalanadi.

Erkin kanonik almashtirishlar, shuningdek, simmetriya qoidalarini ifodalashda va fizikaviy tizimlarning fundamental xususiyatlarini o'rganishda qo'llaniladi.

4-MAVZU. GAMILTON-YAKOBI TENGLAMASINING UMUMIY INTEGRALI.

Reja:

4.1.Gamilton-Yakobi tenglamasining umumiy integrali.

4.2.Gamilton tenglamalarini integrallashga tegishli usullarni boshqarish masalalarini yechishda qo‘llash.

Gamilton-Yakobi tenglamasi

Erkin kanonik almashtirishlar natijasi sifatida Gamilton–Yakobi tenglamasi kelib chiqadi. Buning uchun shunday erkin kanonik almashtirishlarni qidiramizki, bu almashtirishlar natijasida berilgan Gamilton tenglamalari

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \ (i = 1, \dots n) \qquad (15)$$

Gamilton fuksiyasi $H' = 0$ bulgan Gamilton sitemasiga o‘tsin, ya’ni

$$\frac{dq'_i}{dt} = \frac{\partial H'}{\partial p'_i}, \frac{dp'_i}{dt} = -\frac{\partial H'}{\partial q'_i} \ (i = 1, \dots, n). \qquad (16)$$

U holda $H' = 0$ ekanligini hisobga olsak bu tenglamalarni integrallab quyidagi

$$q'_i = \alpha_i, \ p'_i = \beta_i \ (i = 1, \dots, n)$$

yechimlarni hosil qilamiz va bu tenglamalar sistemasini q_i, p_i o‘zgaruvchilarga nisbatan yechib boshlang‘ich sistema harakatini aniqlaymiz.

Bunday almashtirishlarni topish uchun erkin kanonik o‘zgartirishlar shartlariga murojat qilamiz. Agar $H' = 0$ ekanligini qisobga olsak, keltirib chiqaruvchi funksiya uchun

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(t, q_i, p_i) = 0$$

tenglamani hosil qilamiz.

Lekin $\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i$ bo‘lgani uchun, keltirib chiqaruvchi funksiya $\frac{\partial S}{\partial t} + H(t, q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}) = 0$ tenglamani qanoatlantiradi.

Bu xususiy hosilali tenglama **Gamilton-Yakobi tenglamasi** deb ataladi. Bu tenglamadan tashqari, keltirib chiqaruvchi funksiya uchun quyidagi $\det(\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial \alpha_i}) \neq 0$ shart bajarilishi kerak.

Keltirib chiqaruvchi funksiya topilishi bilan

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i'} = -\beta_i', \quad \frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i$$

tenglamalardan qidirilayotgan erkin kanonik almashtirishlarni topamiz.

Ta’rif. Quyidagi $\det(\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial \alpha_i}) \neq 0$ shartni qanoatlantiruvchi, Gamilton-Yakobi tenglamasining yechimi bo‘lgan va ixtiyoriy n ta o‘zaro bog‘liq bo‘lmagan $\alpha_1, ..., \alpha_n$ o‘zgarmaslarni o‘z ichiga olgan $S(t, q_i, \alpha_i)$ funksiya, Gamilton-Yakobi tenglamasining to‘liq integrali deyiladi.

Gamilton-Yakobi teoremasi. Agar $S(t, q_i, \alpha_i)$ funksiya Gamilton-Yakobi tenglamasining to‘liq integrali bo‘lsa, u holda Gamilton funksiyasi $H(t, q_i, p_i)$ bo‘lgan sistemaning yechimi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i'} = -\beta_i', \quad \frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i .$$

Shunday qilib, Gamilton-Yakobi tenglamasining to‘liq integrali ma’lum bo‘lsa, u holda Gamilton tenglamalarini, ya’ni oddiy differensial tenglamalar sistemasini integrallashga xojat qolmaydi.

Agar sistema umumlashgan konservativ sistemadan iborat bo‘lsa, ya’ni $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ bajarilsa, u holda Gamilton- Yakobi tenglamasi

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}) = 0 \qquad (17)$$

ko‘rinishda bo‘ladi va to‘liq integralini

$$S = -ht + W(q_1, ..., q_n, \alpha_1, ..., \alpha_{n-1}, h)$$

ikkita yig‘indi sifatida qarash mumkin.

Keltirib chiqaruvchi funksiyaning bu ifodasini (17) tenglamaga qo‘yib, W funksiyani aniqlash uchun

$$H\left(\frac{\partial W}{\partial q_1}, \frac{\partial W}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_n}, q_1, q_2, \dots, q_{n-1}\right) = h \qquad (18)$$

tenglamani olamiz.

Gamilton-Yakobi teoremasiga ko‘ra h va o‘zaro bog‘liq bo‘lmagan $n-1$ ta $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ doimiylar qatnashadigan quyidagi $W(q_1, q_2, \dots q_n, \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{n-1}, h)$ to‘liq integralini topish yetarlidir.

Sistema harakat qonuni esa

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \ \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \dots, \ \frac{\partial W}{\partial \alpha_{n-1}} = \beta_{n-1}, \ \frac{\partial V}{\partial h} = t + \gamma, \qquad (19)$$

$$P_1 = \frac{\partial W}{\partial q_1}, \ P_2 = \frac{\partial W}{\partial q_2}, \dots, \ P_n = \frac{\partial W}{\partial q_n} \qquad (20)$$

tenglamalardan aniqlanadi. Hozirgina biz qarab chiqqan hol, xususan kuchlar kuch funksiyasiga ega bo‘lganda va bog‘lanishlar vaqtga oshkor bog‘liq bo‘lmagan holga mos keladi.

Gamilton-Yakobi tenglamasidagi Gamilton funksiyasi vaqtga oshkor ravishda bog‘liq bo‘lmagan holda to‘liq integralni topishni soddalashtirish uchun biz foydalangan usul shuningdek, sistemada bir nechta o‘zgaruvchi siklik o‘zgaruvchi (koordinata) bo‘lgan hol uchun ham o‘rinlidir

Gamilton tenglamalarini boshqarish masalalarini yechishda qo‘llash.

Variatsion masalaning qo‘yilishi.

Faraz qilamiz, obyektning harakati quyidagi

$$\dot{x}_i = f_i(x_j, u_s, t), \ (i, j = 1,2,3,\dots,n; s = 1,2,3,\dots,r) \qquad (1)$$

Bunda $x_i -$ uzluksiz, bo‘lakli silliq va sistema holatini aniqlovchi koordinatalar; $u_s -$ boshqaruvchi parametrlar bo‘lib, bo‘lakli uzluksiz funksiyalar sinfiga tegishli; $t-$ vaqti ($t_0 \le t \le t_1$); f_i -aniqlanish sohasida yetarlicha tartibli xususiy hosilalari mavjud bo‘lgan funksiyalar. Ko‘pgina hollarda sistemaga tegishli koordinatalar va boshqarish parametrlariga qo‘shimcha

$$\psi_\kappa(x_i, u_s, t) = 0, \ (1,2,3,\dots, p < r) \qquad (2)$$

qo‘shimcha bog‘lanishlar qo‘yiladi. Bunda $\psi_k -$ funksiyalar uchun ham f_i funksiyalar qanoatlantiradigan shartlar bajariladi.

Faraz qilamiz, sistemaning holati uchun quyidagilar o‘rinli bo‘lsin:

$$t = t_0; x_i(t_0) = x_{i0}, \ (i = 1,2,3,\dots,n); \qquad (3)$$

$$t = t_1; x_l(t_1) = x_{l1}, \ (l = 1,2,3,\dots, q \le n) \qquad (4)$$

Variatsion masalani qo‘yilishi quyidagicha: $t_0 \le t \le t_1$ vaqt intervalida (1) harakat tenglamalarini, (2) bog‘lanishlarni. (3) va (4) chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi va argumentlariga nisbatan xususiy hosilalari uzluksiz bo‘lgan

$$J = J(x_{q+1}, x_{q+2}, \dots, x_n, t_1) \qquad (5)$$

funksionalni minimallovchi x_i koordinatalarni va u_z boshqarish parametrlarini toping.

Masala qo‘yilishiga ko‘ra, funksionalni minimum qiymatini aniqlash shartli ekstremum masalasiga keladi, ya’ni funksionalda qatnashuvchi o‘zgaruvchilarga (1) va (2) ko‘rinishdagi differensial va chekli bog‘lanishlar qo‘yilgan. Bizga nazariy mexanika fanidan ma’lumki, bunday hollarda o‘zaro bog‘liq bo‘lmagan Lagranj ko‘paytuvchilari λ_i va $\mu_k\ (i = 1,2,3,\dots n;\ k = 1,2,3,\dots p)$ kiritish usulidan foydalaniladi va masala shartsiz ekstremumni aniqlashga keltiriladi.

$$I = J + \int_{t_0}^{t_1} F dt, \qquad (6)$$

funksionalni ko‘rib chiqamiz.

Bunda
$$F = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (\dot{x}_i - f_i) + \sum_{k=1}^{p} \mu_k \psi_k \qquad (7)$$

Lagranj funksiyasi.

Ko‘rish qiyin emaski, J funksionalni mumkin bo‘lgan trayektoriyalardagi ekstremumini aniqlash I funksionalni ekstremumini aniqlashga ekvivalent, chunki ekstremal trayektoriyalarda $F = 0$. Bundan $I = J$ ekanligi kelib chiqadi.

Qo‘yilgan masalani yechishda, xuddi analitik mexanikaga tegishli prinsiplarda ko‘rilganidek xaqiqiy tayektoriya kinematik mumkin bo‘lgan trayektoriyalar bilan solishtiriladi. Bunda o‘zgaruvchilarni variatsiyalash usulidan foydalanamiz. Ko‘rilayotgan holda harakat vaqti va chegara o‘zgaruvchan bo‘lgani uchun, sistemaga tegishli koordinatalar va boshqarish parametrlarining variatsiyalarini hisoblashda

$$\Delta f = \delta f + \dot{f}\Delta t \qquad (8)$$

to‘liq variatsiyadan foydalanamiz. Bunda δf -izoxron variatsiya (faqat funksiyaning ko‘rinishini o‘zgarishi hisobga olinadi); $\dot{f}\Delta t$ -vaqt o‘zgarishi hisobiga hosil bo‘ladigan variatsiya. Bundan tashqari, boshqarish parametrlari bo‘lakli uzluksiz bo‘lgani uchun, vaqtning ma’lum qiymatlarida birinchi tartibli uzulish nuqtalari mavjud. Shuning uchun, (6) funksionalni to‘liq variatsiyasini hisoblashda quyidagi formuladan foydalanamiz:

$$\Delta I = \Delta J + \Delta \int_{t_0}^{t_-^*} F dt + \Delta \int_{t_-^*}^{t_1} F dt, \qquad (9)$$

$$\Delta \int_{t_0}^{t_-^*} F dt = \int_{t_0}^{t_-^*} \delta F dt + [F \Delta t]_{t_0}^{t_-^*}, \qquad (10)$$

bunda t^* –uzulish vaqti. Bunga ko‘ra

$$\int_{t_0}^{t_-^*}\delta F dt=\int_{t_0}^{t_-^*}[\sum_{i=1}^{n}(\frac{\partial F}{\partial x_i}\delta x_i+\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\delta\dot{x}_i+\frac{\partial F}{\partial \lambda_i}\delta\lambda_i)+\sum_{k=1}^{p}\frac{\partial F}{\partial \mu_k}\delta\mu_k+\sum_{s=1}^{q}\frac{\partial F}{\partial u_s}\delta u_s]dt. \quad (11)$$

Agar integral ostidagi ikkinchi yig‘indini bo‘laklab integrallasak,

$$\int_{t_0}^{t_-^*}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\delta\dot{x}_i dt=\int_{t_0}^{t_-^*}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\frac{d}{dt}\delta x_i dt=(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\delta x_i)_{t_0}^{t_-^*}-\int_{t_0}^{t_-^*}\sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dt}(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i})\delta x_i dt.$$

Olingan natijani (30) munosabatga olib borib qo‘ysak

$$\int_{t_0}^{t_-^*}\delta F dt=\int_{t_0}^{t_-^*}[(\sum_{i=1}^{n}(\frac{\partial F}{\partial x_i}-\frac{d}{dt}(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}))\delta x_i+\frac{\partial F}{\partial \lambda_i}\delta\lambda_i)+\sum_{k=1}^{p}\frac{\partial F}{\partial \mu_k}\delta\mu_k+\sum_{s=1}^{q}\frac{\partial F}{\partial u_s}\delta u_s]dt+(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\delta x_i)I_{t_0}^{t_-^*}.$$

Optimal trayektoriya bo‘ylab $\frac{\partial F}{\partial \lambda_i}=0,\ \frac{\partial F}{\partial \mu_k}=0,$ bo‘lgani uchun

$$\int_{t_0}^{t_-^*}\delta F dt=\int_{t_0}^{t_-^*}[\sum_{i=1}^{n}(\frac{\partial F}{\partial x_i}-\frac{d}{dt}(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}))\delta x_i+\sum_{s=1}^{q}\frac{\partial F}{\partial u_s}\delta u_s]dt+(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\delta x_i)I_{t_0}^{t_-^*}. \quad (12)$$

kelib chiqadi. Agar oxirgi yig‘indidagi izoxron variatsiyalar uchun $\delta x_i=\Delta x_i-\dot{x}_i\Delta t$ munosabatlar o‘rinliligini hisobga olsak, (29) formula quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$\Delta\int_{t_0}^{t_-^*}F dt=\int_{t_0}^{t_-^*}[\sum_{i=1}^{n}(\frac{\partial F}{\partial x_i}-\frac{d}{dt}(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}))\delta x_i+\sum_{s=1}^{q}\frac{\partial F}{\partial u_s}\delta u_s]dt+(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\Delta x_i)I_{t_0}^{t_-^*}+[(F-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i)\Delta t]I_{t_0}^{t_-^*} \quad (1.32)$$

$$\Delta\int_{t_+^*}^{t_1}F dt=\int_{t_+^*}^{t_1}[\sum_{i=1}^{n}(\frac{\partial F}{\partial x_i}-\frac{d}{dt}(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}))\delta x_i+\sum_{s=1}^{q}\frac{\partial F}{\partial u_s}\delta u_s]dt+(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\Delta x_i)I_{t_+^*}^{t_1}+[(F-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i)\Delta t]I_{t_+^*}^{t_1} \quad (13)$$

formula keltirib chiqarish mumkin. Sistema holatiga tegishli x_i koordinatalar (nuqta trayektoriyasi uzluksiz) va vaqt uzluksiz bo‘lgani uchun

$$x_i(t_-^*)=x_i(t_+^*)=x_i(t^*),\ \Delta t_-^*=\Delta t_+^*=\Delta t^*.$$

Bu munosabatlarni hisobga olib, (32) va (33) formulalarni qo‘shamiz.

$$\Delta\int_{t_0}^{t_1}F dt=\Delta\int_{t_0}^{t_-^*}F dt+\Delta\int_{t_+^*}^{t_1}F dt=\int_{t_0}^{t_1}[\sum_{i=1}^{n}(\frac{\partial F}{\partial x_i}-\frac{d}{dt}(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}))\delta x_i+\sum_{s=1}^{q}\frac{\partial F}{\partial u_s}\delta u_s]dt+(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\Delta x_i)I_{t_0}^{t_1}+$$

$$+[(F-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i)\Delta t]I_{t_0}^{t_1}+\sum_{i=1}^{n}[(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i})_{t_-^*}-(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i})_{t_+^*}]\Delta x_i(t^*)+ \quad (14)$$

$$+[(F-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i)_{t_-^*}-(F-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i)_{t_+}]\Delta t^*.$$

Hisoblashlarni oxirga yetkazish uchun J funksionalni variatsiyasini hisoblash qoldi.

$$\Delta J=\frac{\partial J}{\partial t}\Delta t_1+\sum_{i=q+1}^{n}\frac{\partial J}{\partial x_{i,1}}\Delta x_{i,1} \quad (15)$$

Harakat boshlanishiga tegishli t_0 onda $\Delta x_i = 0,\ \Delta t = 0$ va t_1 onda zsa chegaraviy shartlarga ko‘ra $\Delta x_j\ (j = 1,2,3,\dots,q)$, ya’ni koordinalarning bir qismi qo‘zg‘almas. Buni hisobga olgan holda, yuqorida olingan (13) va (14) formulalarni qo‘shib, (9) funksionalning to‘liq variatsiyasini hosil qilamiz.

$$\Delta I = \int_{t_0}^{t_1} [\sum_{i=1}^{n} (\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}))\delta x_i + \sum_{s=1}^{q} \frac{\partial F}{\partial u_s} \delta u_s]dt + \qquad (16)$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} [(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i})_{t_-^*} - (\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i})_{t_+^*}]\Delta x_i(t^*) + \qquad [(F - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i})_{t_-^*} - (F - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i})_{t_+}]\Delta t^* +$$

$$+ \sum_{l=q+1}^{n} (\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_{l1}} + \frac{\partial J}{\partial x_{l1}})\Delta x_{l1} + [(F - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i)_{t=t_1} + \frac{\partial J}{\partial t}]\Delta t_1 = 0.$$

Statsionarlikning zaruriy shartlari

Ekstremumning zaruriy shartlari bu optimal trayektoriya bo‘ylab funksional-ni to‘liq variatsiyasini

$$\Delta I = 0 \qquad (17)$$

nolga teng bo‘lishdir. Bunga ko‘ra, o‘zaro bog‘liq bo‘lmagan o‘zgaruvchilarga nisbatan variatsiyalar oldidagi koeffitsiyentlar nolga teng bo‘lishi zarur. Bundan kelib chiqadiki:

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}) - \frac{\partial F}{\partial x_i} = 0,\ \ (i = 1,2,3,\dots,n), \qquad (18)$$

$$\frac{\partial F}{\partial u_s} = 0,\ (s = 1,2,3,\dots,r) \ . \qquad (19)$$

(18) va (19) birgalikda Eyler-Lagranj tenglamalari deb ataladi va (18) sistema

$$\dot{\lambda}_{ui} = \frac{\partial F}{\partial x_i},\ (i = 1,2,3,\dots,n) \qquad (20)$$

tenglamalar sistemasiga ekvivalent bo‘ladi.

Transversallik shartlari.

Bu shartlar o‘zgaruvchilarni chegaradagi qiymatlariga tegishli bo‘lib, quyidagicha aniqlanadi:

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_{l1}} + \frac{\partial J}{\partial x_{l1}} = 0,\ l = q+1, q+2,\dots,n \qquad (21)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_{i1}}\dot{x}_{i1} = \frac{\partial J}{\partial t_1}, \qquad (22)$$

yoki

$$\lambda_{l1} = -\frac{\partial I}{\partial x_{l1}};\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_{i1}\dot{x}_{i1} = \frac{\partial I}{\partial t_1},\ \ (l = q+1,\dots,n) \qquad (23)$$

Shuni eslatib o‘tish kerakki, bu zaruriy shartlarni keltirib chiqarishda optimal trayektoriya bo‘ylab Lagranj funksiyasi $F = 0$ nolga teng deb olinadi.

IV. AMALIY MASHG‘ULOT MATERIALLARI

1-amaliy mashg‘ulot: Gamilton prinsipi va gamilton tenglamalari

Gamilton prinsipi:

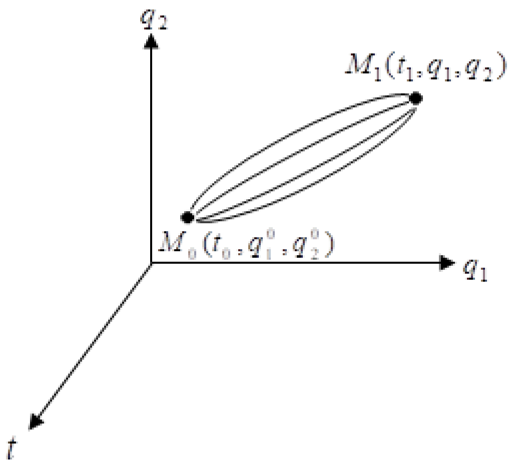
Gamilton prinsipi, klassik mexanika va kvant mexanikasida muhim ahamiyatga ega bo'lgan konseptdir. Bu prinsip, tizimning dinamikasini aniqlashda qulay usulni taklif etadi. Gamilton prinsipiga ko'ra, tizimning harakatini aniqlash uchun harakatlanish harakati (Lagrangian) va energiya holati (Hamiltonian) asosida differensial tenglamalar hosil qilinadi.

Gamilton prinsipi asosida, tizimning harakatlari minimal ish qoidasi asosida belgilangan, ya'ni harakat yo'li orqali bajarilgan ishning integralini minimallashtirishga intiladi. Bu prinsip fizikada ko'plab murakkab tizimlarni tushunish va tahlil qilishda foydalidir, ayniqsa, mexanikada, kvant mexanikasida va matematik fizika sohalarida.

Gamilton ta’siri xaqiqiy harakat uchun mumkin bo‘lgan harakatlardan farqli, ekstremal (statsionar) qiymatga ega bo‘ladi (Gamilton ta’sirining variatsiyasi $\delta w = 0$ bo‘ladi). Gamilton prinsipining yana bir ko‘rinishiga to‘xtalib o‘tamiz. $(n+1)$ o‘lchamli kengaytirilgan $(t, q_1, \ldots, q_n)$ koordinata fazosi o‘rniga $(2n+1)$ o‘lchamli kengaytiril-gan $t, q_i, p_i (i = 1, \ldots, n)$ (p_i umumlashgan impulslar) fazoni ko‘rib chiqamiz. Bu fazoda fiksirlangan $B_0(q_i^0, p_i^0, t_0)$ va $B_1(q_i^1, p_i^1, t_1)$ nuqtalar orqali o‘tuvchi xaqiqiy harakatga mos keluvchi trayektoriyani, shunindek bu nuqtalardan o‘tuvchi barcha boshqa mumkin bo‘lgan harakatlarni (“atrof” yo‘llarni) qarab chiqamiz(1-rasm). Xaqiqiy harakatga mos keluvchi $H(q_i(t), p_i(t), t)$ va $q_i(t)$, $p_i(t)$ o‘zgaruvchilar Gamilton tengmalarini

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (i = 1, \ldots, n)$$

qanoatlantiradi.



1-Rasm

Gamilton funksiyasi $H(q_i(t), p_i(t), t)$ bilan Lagranj funksiyasi $L(t, q_i, \dot{q}_i)$ orasidagi bog‘lanishni

$$L^* = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - H(t, q_i, p_i)$$

hisobga olsak, u holda Gamilton prinsipi quyidagi

$$\delta\int_{t_0}^{t_1} L^* dt = \delta\int_{t_0}^{t_1} (\sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - H) dt = 0$$

ko‘rinishda yoziladi (prinsipning birinchi ko‘rinishidan shartli o‘laroq) va atrof yo‘llar sifatida taqqoslashga B_0 va B_1 nuqtalardan o‘tuvchi $(2n+1)$ –o‘lchamli kengaytirilgan harakat fazosining ixtiyoriy egri chiziqlari olinadi. Lekin kengaytirilgan $(2n+1)$ *o*‘lchovli fazoning $p_1,\ldots,p_n$ *o*‘zgaruvchilari (umumlashgan impulslar)

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (i = 1,\ldots,n)$$

tenglamani qanoatlantirishini hisobga olsak, u holda Gamilton prinsipining ikkinchi ko‘rinishi birinchi ko‘rinishga o‘tadi.

Gamilton Tenglamalari

Gamilton tenglamalari klassik mexanikaning muhim qismidir va tizimning harakatini tavsiflash uchun ishlatiladi. Ular Lagrangian mexanikasi asosida ishlab chiqilgan va tizimning dinamikasini Gamiltonian (energiya) funksiyasi orqali ifodalaydi.

Gamilton tenglamalarining asosiy ko'rinishi

Agar q_i — p_i umumiy koordinatalar va — umumiy impulslar bo'lsa, Gamilton tenglamalari quyidagicha ifodalanadi:

4. **Umumiy koordinatalar uchun tenglama:**

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

2. **Umumiy impulslar uchun tenglama:**

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

Bu yerda:

- H — Gamiltonian, ya'ni tizimning umumiy energiyasi.

- $\dot{q}_i$ va $\dot{p}_i$ — vaqt bo'yicha derivativlar, ya'ni harakatning tezligi va impulsning o'zgarish tezligi.

Gamilton sistemasining integral invariantlari — bu tizimning harakatiga bog'liq bo'lgan va vaqt davomida o'zgarishsiz qoladigan fizik kattaliklardir. Ular Gamiltonian mexanikasida muhim ahamiyatga ega, chunki ular tizimning xususiyatlarini saqlaydi va simmetriya bilan bog'liq qonunlarni ko'rsatadi.

Integral invariantlari

4. **Energiya**: Agar tizimda Gamiltonian vaqt bilan bog'liq bo'lmasa (ya'ni, (ya'ni, $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$), energiya invariant bo'ladi.
5. **Impuls invariantlari**: Agar tizimda translatsion simmetriya bo'lsa, ya'ni tashqi kuchlar mavjud bo'lmasa, impuls invariant bo'ladi. Bu, bir xil energiya holatlaridagi harakatlar orasida saqlanadi.

Burchak momentlari: Agar tizimda aylanish simmetriyasi bo'lsa, ya'ni tashqi momentlar mavjud bo'lmasa, burchak momenti invariant bo'ladi. Bu, ayniqsa, aylanishli tizimlarda muhimdir.

2-amaliy mashg'ulot: Birinchi integrallar yordamida gamilton sistemasining tartibini pasaytirish

Gamilton sistemasining tartibini pasaytirish uchun birinchi integrallarni qo'llash jarayoni quyidagicha amalga oshiriladi:

1.Gamilton tizimi: Gamilton sistemasining umumiy ko'rinishi quyidagicha:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

bu yerda **H** — Gamilton funktsiyasi, q_i—umumiy koordinatalar, p_i— umumiy impulslar.

2.Birinchi integrallar: Agar Gamilton tizimida birinchi integrallar (konservativ miqdorlar) mavjud bo'lsa, ularni aniqlash zarur. Birinchi integrallar tizimning harakatini tavsiflaydigan funktsiyalar bo'lib, ularning o'zgarishi vaqtga bog'liq emas.

3. Tartibni pasaytirish: Har bir birinchi integralni kiritish orqali Gamilton tizimining tartibini pasaytirish mumkin. Masalan, agar sizda n ta koordinata va n ta impuls bo'lsa, har bir birinchi integral kiritilishi bilan tizimning tartibi 1 ga pasayadi.

4.Tizimni yozish: Agar sizda k ta birinchi integral bo'lsa, tizimni $n-k$ ta differensial tenglama shaklida yozish mumkin:

$$\dot{q}_i = f_i(q, p)$$

va p ni birinchi integrallar yordamida qqq ga bog'liq qilib yozish mumkin.

5.Tahlil va yechim: Tizimning yangi shaklini tahlil qilish va kerakli yechimlarni topish uchun oddiy differensial tenglamalardan foydalanish mumkin.

Gamilton bo‘yicha ta’sir

Klassik mexanikada kanonik almashtirishlar Gamilton tenglamalariga tegishli bo‘lib, bu tenglamalarning integral invariantlariga asoslanadi. Shuning uchun bu invariantlarni kelib chiqishiga to‘xtalib o‘tamiz.

Lagranj funksiyasi $L(t, q_i, q_i)$ va erkinlik darajasi n ga teng bo‘lgan ixtiyoriy geometrik bog‘lanishli mexanik sistemani ko‘rib chiqamiz.

Ma’lumki, quyidagi integral

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L(t, q_i, \dot{q}_i) dt$$

(t_0, t_1) vaqt oralig‘idagi **Gamilton ta’siri** deb ataladi.

Kanonik almashtirishlar Gamilton sistemalariga tegishli bo‘lib, bu almashtirishlardan asosiy maqsad, berilgan ixtiyoriy Gamilton sistemasini boshqa struktura jihatidan soddaroq Gamilton funksisiga ega bo‘lgan sistema bilan almashtirishdir. Umumiy holda vaqtga bog‘liq bo‘lgan quyidagi

$$q_i' = q_i'(t, q_k, p_k), \quad p_i' = p_i'(t, q_k, p_k) \quad (i, k = 1, 2, \dots, n)$$

$$\frac{\partial(q'_1, p'_1, \dots, q'_n, p'_n)}{\partial(q_1, p_1, \dots, q_n, p_n)} \neq 0, \qquad (1)$$

almashtirishlar kanonik deyiladi, agar bu almashtirishlar ixtiyoriy Gamilton

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} (i = 1, \dots, n) \qquad (2)$$

sistemasini yana Gamilton sistemasiga (umumiy holda boshqa H' Gamilton funksiyasi bilan) o‘tkazsa.

Ya’ni quyidagi ko‘rinishni egallasa:

$$\frac{dq'_i}{dt}=\frac{\partial H'}{\partial p'_i},\ \frac{dp'_i}{dt}=-\frac{\partial H'}{\partial q'_i}\ (i=1,\dots,n). \qquad (3)$$

Kanonik almashtirish shartlarini keltirib chiqarish uchun kengaytirilgan $2n+1$ o‘lchovli (q_i, p_i, t) va (q'_i, p'_i, t) koordinat sistemalarida kanonik almashtirishlar natijasida, biri ikkinchisiga o‘tuvchi Gamilton sistemalarinig xaqiqiy harakatlar naylari bo‘ylab, ixtiyoriy yopiq C, C' chiziqlar bo‘yicha olingan

$$I=\int_c \sum_{i=1}^{n} p_i\delta q_i - H\delta t,\quad I'=\int_{c'}\sum_{i=1}^{n} p'_i\delta q'_i - H'\delta t$$

integrallarni ko‘rib chiqamiz.

3-amaliy mashg‘ulot: Almashtirishlarni kanoniklik alomati

Kanonik almashtirish shartida qatnashuvchi o‘zaro bog‘liq bo‘lmagan va q_i, p_i o‘zgaruvchilarning funksiyasi bo‘lgan

$$q'_i=\varphi_i(p_i, q_i, t),\ p'_i=\phi_i(q_i, p_i, t) \qquad (7)$$

almashtirishlar kanonik bo‘lishi uchun qanday shartlarni qanoatlantirishi kerakligini ko‘rib chiqamiz.

Faraz qilamiz (6) ko‘rinishdagi almashtirishlar kanonik almashtirishlardan iborat bo‘lsin. U holda bu almashtirishlar uchun quyidagi

$$\sum_{i=1}^{n} p'_i\delta q'_i - H'\delta t = c\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\delta q_i - H\delta t\right)-\delta F \qquad (8)$$

ayniyat o‘rinli bo‘lishi kerak.

Endi vaqtning ixtiyoriy fiksirlangan $t=t'$ qiymatini olamiz. U holda yuqoridagi (8) ayniyat

$$\sum_{i=1}^{n} p'_i\delta q'_i = c\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\delta q_i\right)-\delta F \qquad (9)$$

ko‘rinishga ega bo‘ladi.

Bu tenglama valentligi c bo‘lgan va fiksirlangan vaqtdagi

$$q'_i=\varphi_i(q_i, p_i, t'),\ p'_i=\phi(q_i, p_i, i')\ (i=1,\dots,n)$$

kanonik almashtirishlarni aniqlaydi.

Endi teskarisi, ya'ni (9) tenglama bilan aniqlanuvchi barcha almashtirishlar vaqtning ixtiyoriy fiksirlangan qiymatida bir xil valentlik almashtirishlar bo'lsin.

Bu holda almashtirishlar natijasida hosil bo'lgan Gamilton funksiyasini quyidagicha

$$H' = cH + \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} p_i' \frac{\partial q_i}{\partial t} \qquad (10)$$

aniqlab va bu tenglamani vaqtning variatsiyasiga ko'paytirib (9) va (10) tenglamalarni ikki tomonini qo'shsak (8) ifodaga ega bo'lamiz.

Shunday qilib, vaqtga oshkor ravishda bog'liq bo'lgan

$$q_i' = \varphi_i(q_i, p_i, t), p_i' = \phi(q_i, p_i, i), (i = 1, \dots, n)$$

almashtirishlar kanonik bo'lishi uchun, ixtiyoriy fiksirlangan vaqtni qiymatida

$$q_i' = \varphi_i(q_i, p_i, t'), p_i' = \phi(q_i, p_i, i'), (i = 1, \dots, n)$$

almashtirishlar bir xil c valentlik kanonik almashtirishlar bo'lishi zarur va yetarlidir.

Bizga quyidagi almashtirishlar berilgan bo'lsin:

$$q_i' = \varphi_i(q_i, p_i), p_i' = \phi(q_i, p_i'), \frac{\partial(q'_1, \dots, p'_n)}{\partial(q_1, \dots, p_n)} \neq 0, (i = 1, \dots, n). \qquad (11)$$

Bu holda almashtirishlarni kanonikligini aniqlovchi ayniyat quyidagicha aniqlanadi:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i' \delta q_i' = c(\sum_{i=1}^{n} p_i \delta q)_i - \delta F(q_i, p_i) \qquad (12)$$

Agar bu tenglamadagi $p_i', \delta q_i'$ larni (p_i, q_i) o'zgaruvchilar orqali ifodalasak (7) yordamida

$$\sum_{i=1}^{n} (\Phi_i \delta q_i + \Psi_i \delta p_i) = -\delta K(q_i, p_i) \qquad (13)$$

tenglikni hosil qilamiz.

Bu tenglikdagi (Ψ_i, Φ_i) funksiyalar uchun

$$\Phi_i = \sum_{i=1}^{n} p_i' \frac{\partial q_i'}{\partial q_i} - cp_i, \Psi_i = \sum_{i=1}^{n} p_i' \frac{\partial q_i'}{\partial p_i} \ (i-1, \dots, n)$$

ifodalarga ega bo'lamiz.

Almashtirishlar kanonikligi (12) tenglamaning chap qismida turgan ifodaning to‘liq differensiallik shartidan aniqlanadi:

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial q_k} = \frac{\partial \Phi_k}{\partial q_i}, \frac{\partial \Psi_i}{\partial p_k} = \frac{\partial \Psi_k}{\partial p_i}, \frac{\partial \Phi_i}{\partial p_k} = \frac{\partial \Psi_k}{\partial q_i}, (i, k = 1, \ldots, n)$$

Erkin kanonik almashtirishlar (yoki erkin kanonik transformatsiyalar) klassik mexanikada va algebraik geometriyada muhim tushunchadir. Ular quyidagi xususiyatlarga ega:

5. **Erkinlik**: Almashtirishlar tizimdagi barcha holatlarni qamrab oladi va xususiy shartlar bilan cheklanmaydi. Bu, o'z navbatida, dinamik yoki geometrik tizimning barcha holatlarini ifodalash imkonini beradi.
6. **Kanoniklik**: Almashtirishlar biror tizimning strukturaviy xususiyatlarini saqlab qoladi. Masalan, klassik mexanikada erkin kanonik almashtirishlar, odatda, Hamiltonian tizimlarida energiya va boshqa saqlovchi miqdorlar o'rtasidagi bog'lanishni saqlaydi.
7. **Formulalar**: Erkin kanonik almashtirishlar ko'pincha matematik ifodalar bilan ifodalanadi, masalan, Hamilton formulalari yordamida.
8. **Geometrik talqin**: Bu almashtirishlar ko'pincha fazoviy ob'ektlar (masalan, fazoviy nuqtalar) o'rtasida bog'lanishlarni ko'rsatadi va geometrik tushunchalarni ifodalashda muhim o'rin tutadi.

Erkin kanonik almashtirishlar, ayniqsa, fizikada va matematikada muhim rol o'ynaydi, chunki ular tizimning dinamikasini yoki geometriyasini o'zgartirmasdan, xususiyatlarini o'rganishga imkon beradi.

Agar kanonik almashtirishlar uchun quyidagi qo‘shimcha $\frac{\partial(q_1', \ldots, q_n')}{\partial(p_i, \ldots, p_i)} \neq 0$ shart bajarilsa, u holda bu almashtirishlar erkin kanonik almashtirishlar deyiladi. Bu holda yangi o‘zgaruvchilar sifatida (q_i, q_i') larni olish mumkin. Xaqiqatdan ham, qo‘shimcha quyilgan shart kanonik almashtirishlardagi birinchi n ta tenglamadagi umumlashgan impulslar p_i larni qolgan (q_i', q_i, t) o‘zgaruvchilar orqali ifodalash imkoniyatini beradi. Bu holda keltirib chiqaruvchi funksiyani quyidagi $F(t,q_i,p_i)=S(t,q_i,q_i^{/}),$ ko‘rinishda olish mumkin, ya’ni yangi o‘zgaruvchilar funksiyasi deb qarash mumkin va erkin kanonik almashtirishlar sharti

$$\sum_{i=1}^{n} p_i^{/}\delta q_i^{/}-H^{/}\delta t=c(\sum_{i=1}^{n} p_i\delta q_i-H\delta t)-\delta S(t,q_i,q_i^{/}) \qquad (14)$$

ko‘rinishga keladi.

Variatsiyalar oldidagi koeffitsiyentlarni tenglab

$$\frac{\partial S}{\partial q_i}=cp_i,\quad \frac{\partial S}{\partial q_i^{/}}=-p_i^{/}\quad H^{/}=cH+\frac{\partial S}{\partial t} \qquad (15)$$

ifodalarni hosil qilamiz.

Bu tenglamalar sistemasi erkin kanonik **almashtirish**larni aniqlaydi. $C=1$ bo‘lgan holda almashtirishlar erkin ***univalent kanonik almashtirishlar*** deyiladi. (14) tenglamalar sistemasi uchun quyidagi xususiy hol o‘rinli. Agarda $H'=cH$ ga teng bo‘lsa, u holda $\frac{\partial S}{\partial t}=0,$ ya’ni keltirib chiqaruvchi funksiya S vaqtga oshkor ravishda bog‘liq bo‘lmaydi.

Erkin kanonik almashtirishlar shartidan, almashtirishlar vaqtga oshkor ravishda bog‘liq bo‘lmagan holda Gamilton funksiyasining ko‘rinishi ko‘p ham o‘zgarmasligi kelib chiqadi. Shuning uchun Gamilton funksiyasini oddiyroq ko‘rinishga keltirish uchun almashtirishlarni vaqtga oshkor ravishda bog‘liq bo‘lgan holda olinadi.

4-amaliy mashg‘ulot: Gamilton-Yakobi tenglamasining umumiy integrali

Gamilton-Yakobi tenglamasi

Erkin kanonik almashtirishlar natijasi sifatida Gamilton–Yakobi tenglamasi kelib chiqadi. Buning uchun shunday erkin kanonik almashtirishlarni qidiramizki, bu almashtirishlar natijasida berilgan Gamilton tenglamalari

$$\frac{dq_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i},\frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_i}\ (i=1,\dots n) \qquad (15)$$

Gamilton fuksiyasi $H'=0$ bulgan Gamilton sitemasiga o‘tsin, ya’ni

$$\frac{dq'_i}{dt}=\frac{\partial H'}{\partial p'_i},\frac{dp'_i}{dt}=-\frac{\partial H'}{\partial q'_i}\ (i=1,\dots,n). \qquad (16)$$

U holda $H'=0$ ekanligini hisobga olsak bu tenglamalarni integrallab quyidagi

$$q_i^{/} = \alpha_i,\; p_i^{/} = \beta_i \;\; (i = 1,\dots,n)$$

yechimlarni hosil qilamiz va bu tenglamalar sistemasini q_i, p_i o'zgaruvchilarga nisbatan yechib boshlang'ich sistema harakatini aniqlaymiz.

Bunday almashtirishlarni topish uchun erkin kanonik o'zgartirishlar shartlariga murojat qilamiz. Agar $H'=0$ ekanligini qisobga olsak, keltirib chiqaruvchi funksiya uchun

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(t, q_i . p_i) = 0$$

tenglamani hosil qilamiz.

Lekin $\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i$ bo'lgani uchun, keltirib chiqaruvchi funksiya $\frac{\partial S}{\partial t} + H(t, q_i . \frac{\partial S}{\partial q_i}) = 0$ tenglamani qanoatlantiradi.

Bu xususiy hosilali tenglama **Gamilton-Yakobi tenglamasi** deb ataladi. Bu tenglamadan tashqari, keltirib chiqaruvchi funksiya uchun quyidagi $\det(\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial \alpha_i}) \neq 0$ shart bajarilishi kerak.

Keltirib chiqaruvchi funksiya topilishi bilan

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i^{/}} = -\beta_i^{/},\quad \frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i$$

tenglamalardan qidirilayotgan erkin kanonik almashtirishlarni topamiz.

Ta'rif. Quyidagi $\det(\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial \alpha_i}) \neq 0$ shartni qanoatlantiruvchi, Gamilton-Yakobi tenglamasining yechimi bo'lgan va ixtiyoriy n ta o'zaro bog'liq bo'lmagan $\alpha_{1,\dots,}\alpha_n$ o'zgarmaslarni o'z ichiga olgan $S(t, q_i, \alpha_i)$ funksiya, Gamilton-Yakobi tenglamasining to'liq integrali deyiladi.

Gamilton-Yakobi teoremasi. Agar $S(t, q_i, \alpha_i)$ funksiya Gamilton-Yakobi tenglamasining to'liq integrali bo'lsa, u holda Gamilton funksiyasi $H(t, q_i, p_i)$ bo'lgan sistemaning yechimi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i^{/}} = -\beta_i^{/},\quad \frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i .$$

Shunday qilib, Gamilton-Yakobi tenglamasining to'liq integrali ma'lum bo'lsa, u holda Gamilton tenglamalarini, ya'ni oddiy differensial tenglamalar sistemasini integrallashga xojat qolmaydi.

Agar sistema umumlashgan konservativ sistemadan iborat bo'lsa, ya'ni $\frac{\partial H}{\partial t}=0$ bajarilsa, u holda Gamilton- Yakobi tenglamasi

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H\left(q_i,\frac{\partial S}{\partial q_i}\right)=0 \tag{17}$$

ko'rinishda bo'ladi va to'liq integralini

$$S=-ht+W(q_1,\ldots,q_n,\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1},h)$$

ikkita yig'indi sifatida qarash mumkin.

Keltirib chiqaruvchi funksiyaning bu ifodasini (17) tenglamaga qo'yib, W funksiyani aniqlash uchun

$$H\left(\frac{\partial W}{\partial q_1},\frac{\partial W}{\partial q_2},\ldots,\frac{\partial W}{\partial q_n},\ q_1,q_2,\ldots,q_{n-1}\right)=h \tag{18}$$

tenglamani olamiz.

Gamilton-Yakobi teoremasiga ko'ra h va o'zaro bog'liq bo'lmagan $n-1$ ta $\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1}$ doimiylar qatnashadigan quyidagi $W(q_1,q_2,\ldots q_n,\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_{n-1},h)$ to'liq integralini topish yetarlidir.

Sistema harakat qonuni esa

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_1}=\beta_1,\ \frac{\partial W}{\partial \alpha_2}=\beta_2,\ldots,\ \frac{\partial W}{\partial \alpha_{n-1}}=\beta_{n-1},\ \frac{\partial V}{\partial h}=t+\gamma \quad , \tag{19}$$

$$P_1=\frac{\partial W}{\partial q_1},\ P_2=\frac{\partial W}{\partial q_2},\ldots,\ P_n=\frac{\partial W}{\partial q_n} \tag{20}$$

tenglamalardan aniqlanadi. Hozirgina biz qarab chiqqan hol, xususan kuchlar kuch funksiyasiga ega bo'lganda va bog'lanishlar vaqtga oshkor bog'liq bo'lmagan holga mos keladi.

Gamilton-Yakobi tenglamasidagi Gamilton funksiyasi vaqtga oshkor ravishda bog'liq bo'lmagan holda to'liq integralni topishni soddalashtirish uchun biz foydalangan usul shuningdek, sistemada bir nechta o'zgaruvchi siklik o'zgaruvchi (koordinata) bo'lgan hol uchun ham o'rinlidir.

V. KO’CHMA MASHG’ULOT MATERIALLARI

1-Ko‘chma mashg‘ulot. Gamilton prinsipi va Gamilton tenglamalari

Kirish va nazariy asoslar

1.1. Klassik mexanika asoslari:

- Harakat tenglamalarining chiqishi (N'yuton qonunlari asosida);
- Lagrang va Gamilton yondashuvlar farqi;
- Dinamikaning umumlashgan koordinatalari haqida tushuncha.

1.2. Gamilton prinsipi nima?

- Gamilton prinsipi – mexanik tizimlarning tabiiy harakat yo‘li qanday tanlanishini ifodalovchi printsip.
- Bu prinsipga ko‘ra, tizimning haqiqiy harakat trayektoriyasi shunday bo‘ladiki, unga mos “harakat funksiyasi” yoki “harakat integralining” qiymati stasionar bo‘ladi (ya'ni maksimal yoki minimal emas, balki o‘zgarmas bo‘lishi kerak).
- Bu printsip fizikadagi ko‘plab qonunlar uchun umumiy asos bo‘lib xizmat qiladi.

Gamilton printsipining mohiyati

2.1. Stasionarlik tushunchasi:

- Gamilton prinsipi faqat harakat trayektoriyasi ustida emas, balki vaqt oralig‘ida umumiy tahlilni talab qiladi.
- Bu yondashuv o‘rta maktabda o‘rganilgan “bir nuqtadagi kuchlar ta’siri” yondashuvidan ko‘ra chuqurroq va umumiyroqdir.

2.2. Energetik yondashuv:

- Gamilton printsipi asosan energiyalar farqi – ya’ni kinetik va potensial energiyalarning ayirmasi – asosida quriladi.
- Bu yondashuv fizikada, ayniqsa murakkab sistemalarda juda qulay hisoblanadi.

Gamilton funksiyasi va uning fizik mazmuni

3.1. Gamilton funksiyasi nima?

- Gamilton funksiyasi – mexanik tizim holatini to‘liq tavsiflovchi funksiyadir.
- U ko‘pincha tizimning umumiy energiyasini (ya’ni kinetik + potensial energiya) bildiradi.

3.2. Holat o‘zgaruvchilari:

- Tizim holatini aniqlash uchun ikkita asosiy o‘zgaruvchi tanlanadi: koordinata va unga mos impuls.
- Bu o‘zgaruvchilar orqali tizim holati to‘liq tasvirlanadi.

Gamilton tenglamalari va ularning qo‘llanilishi

4.1. Gamilton tenglamalari:

- Gamilton prinsipi asosida chiqariladigan tenglamalar harakatning muhim qonuniyatlarini ifodalaydi.
- Bu tenglamalar yordamida tizimning vaqt bo‘yicha qanday o‘zgarishini kuzatish mumkin.

4.2. Amaliy qo‘llanilishi:

- Sodda mexanik sistemalar (masalan, prujinali osilator, to‘plarning harakati) uchun Gamilton tenglamalari yordamida harakat trayektoriyasini topish mumkin.
- Gamilton tenglamalari kvant mexanikasiga ham asos bo‘lgan, shu sababli ular fizikaning boshqa sohalariga o‘tishda muhim vosita hisoblanadi.

Amaliy mashg‘ulot – Gamilton yondashuvi bilan muammo yechish

5.1. Guruhlarda ish:

- Talabalar kichik guruhlarga bo‘linadi va ularga oddiy mexanik tizimlar (osilator, erkin harakatlanuvchi zarralar, buloqli harakat) beriladi.
- Har bir guruh tizimning energiyasini aniqlaydi va Gamilton funksiyasini tasvirlaydi.

5.2. Gamilton tenglamalarini tuzish:

- Guruhlar Gamilton funksiyasidan foydalanib harakat tenglamalarini shakllantiradilar.
- Harakatning qanday kechishini tahlil qiladilar.

Yakuniy muhokama va natijalarni tahlil qilish

6.1. Taqqoslash va tahlil:

- Har bir guruh o‘z yechimini taqdim etadi.
- Gamilton yondashuvining boshqa metodlarga (masalan, N'yuton yoki Lagrang) nisbatan afzalliklari muhokama qilinadi.

6.2. Savol-javob va umumlashtirish:

- Talabalar bilan savol-javoblar o‘tkaziladi.
- Gamilton prinsipi va Gamilton tenglamalarining umumiy fizik ahamiyati yana bir bor ta’kidlanadi.

2-Ko‘chma mashg‘ulot. Almashtirishlarni kanoniklik alomati

1. Kanonik almashtirishlar nima?

- Gamilton yondashuvida tizim holati koordinata (q) va unga mos impuls (p) orqali ifodalanadi.
- Agar biz q va p ni boshqa o‘zgaruvchilar (masalan, Q va P) bilan almashtirsak, Gamilton tenglamalari o‘z shaklini yo‘qotmasdan saqlanib qolsa, bu almashtirish kanonik deb ataladi.

- Oddiy so‘z bilan aytganda: tizimni boshqa “ko‘zoynak” orqali qarab, lekin fizikaning qonunlari (harakat tenglamalari) o‘zgarmagan bo‘lsa – bu to‘g‘ri va “kanonik” almashtirish bo‘ladi.

2. Nega bu muhim?

- Kanonik almashtirishlar – mexanik tizimlarni oddiylashtirishda, ayniqsa murakkab holatlarni soddalashtirish yoki yangi koordinatalarda qulayroq analiz qilish uchun qo‘llaniladi.
- Ular yordamida energiya saqlanishi, simmetriyalar, va harakat miqdori singari muhim fizik tushunchalar o‘zgarishsiz qoladi.

3. Kanoniklik alomati nima?

- Har qanday almashtirish kanonik emas. Uning kanonik ekanligini tekshirish uchun kanoniklik alomatlari mavjud.
- Bu alomatlar matematik tarzda ifodalanadi (masalan, Poasson qavslarining xossalari orqali), lekin ularning mazmuni shuki:
- Almashtirilgan o‘zgaruvchilar orasidagi aloqalar, harakat qonuniyatlariga zid kelmasligi kerak.
- Harakat funksiyasi (ya’ni Gamilton funksiyasi) yangi o‘zgaruvchilar orqali ifodalanganda, tizim fizik mazmunini yo‘qotmasligi kerak.

4. Amaliy misollar

- Tasavvur qiling, siz Gamilton yondashuvi bilan harakatni analiz qilyapsiz. Tizimda biror simmetriya mavjud, masalan aylanish simmetriyasi.
- Agar siz koordinatalarni burish orqali almashtirsangiz, harakat trayektoriyasi o‘zgaradi, lekin tizim energiyasi va impuls xususiyatlari saqlanadi.
- Agar bu almashtirish Gamilton tenglamalarini o‘z shaklida saqlasa – bu kanonikdir.

5. Talabalar bilan mashg‘ulotlar:

Amaliy qismda:

- Talabalar kichik guruhda ishlaydi va ular turli almashtirishlar beriladi.
- Har bir guruh almashtirishning kanonik yoki no-kanonik ekanligini aniqlashi kerak (albatta, nazariy tushunchalar asosida).
- Guruhlar almashtirish natijasida Gamilton funksiyasi qanday o‘zgarishini muhokama qiladi.

Muhokama uchun savollar:

a) Agar almashtirishdan so‘ng energiya saqlansa, bu kanonik almashtirishmi?
b) Harakat trayektoriyasi yangi koordinatalarda qanday ko‘rinadi?
c) Qaysi almashtirishlar Gamilton tenglamalarini o‘z shaklida saqlaydi?

VI. FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO’YXATI

I. O’zbekiston Respublikasi Prezidentining asarlari

1. Mirziyoyev Sh.M. Buyuk kelajagimizni mard va olijanob xalqimiz bilan birga quramiz. – T.: “O‘zbekiston”, 2017. – 488 b.
2. Mirziyoyev Sh.M. Milliy taraqqiyot yo‘ limizni qat’iyat bilan davom ettirib, yangi bosqichga ko‘ taramiz. 1-jild. – T.: “O‘zbekiston”, 2017. – 592 b.
3. Mirziyoyev Sh.M. Xalqimizning roziligi bizning faoliyatimizga berilgan eng oliy bahodir. 2-jild. T.: “O‘zbekiston”, 2018. – 507 b.
4. Mirziyoyev Sh.M. Niyati ulug‘ xalqning ishi ham ulug‘, hayoti yorug‘ va kelajagi farovon bo‘ ladi. 3-jild.– T.: “O‘zbekiston”, 2019. – 400 b.
5. Mirziyoyev Sh.M. Milliy tiklanishdan – milliy yuksalish sari. 4-jild.– T.: “O‘zbekiston”, 2020. – 400 b.
6. Mirziyoev Sh.M. ―Yangi O’zbekiston demokratik o’zgarishlar, keng imkoniyatlar va amaliy ishlar mamlakatiga aylanmoqda. - Toshkent: O’qituvchi MU MCHJ, 2021. 184 b.
7. Mirziyoev Sh.M. ―Yangi O’zbekiston uchinchi renessans ostonasida. -T: ―Zamin nashr, 2021. 212 b.
8. Mirziyoev Sh.M.―Yangi O’zbekiston taraqqiyot strategiyasi. To’ldirilgan ikkinchi nashri. -Toshkent: ―O’zbekiston nashiryoti, 2023.- 416 bet.
9. Mirziyoev Sh. ―Hozirgi zamon va Yangi O’zbekiston. ―O’zbekiston. T.- – 2024. – 505 b.

II. Normativ-huquqiy hujjatlar

10. O‘zbekiston Respublikasining Konstitutsiyasi. – T.: O‘zbekiston, 2023.
11. O‘zbekiston Respublikasining 2020-yil 23-sentabrda qabul qilingan “Ta’lim to‘g‘risida”gi Qonuni.
12. O‘zbekiston Respublikasining “Korrupsiyaga qarshi kurashish to‘g‘risida”gi Qonuni.
13. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2015-yil 12-iyundagi “Oliy ta’lim muassasalarining rahbar va pedagog kadrlarini qayta tayyorlash va malakasini oshirish tizimini yanada takomillashtirish to‘g‘risida”gi PF-4732-sonli Farmoni.
14. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2019-yil 27-maydagi “O‘zbekiston Respublikasida korrupsiyaga qarshi kurashish tizimini yanada takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi PF-5729-son Farmoni.
15. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2019-yil 27-avgustdagi “Oliy ta’lim muassasalari rahbar va pedagog kadrlarining uzluksiz malakasini oshirish tizimini joriy etish to‘g‘risida”gi PF-5789-sonli Farmoni.
16. O‘zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasining 2019-yil 23-sentabrdagi “Oliy ta’lim muassasalari rahbar va pedagog kadrlarining malakasini oshirish tizimini yanada takomillashtirish bo‘yicha qo‘shimcha chora-tadbirlar to‘g‘risida”gi 797-sonli

Qarori.

17. Oʻzbekiston Respublikasi Prezidentining 2019-yil 8-oktabrdagi “Oʻzbekiston Respublikasi oliy ta’lim tizimini 2030-yilgacha rivojlantirish konsepsiyasini tasdiqlash toʻgʻrisida”gi PF-5847- sonli Farmoni.

18. Oʻzbekiston Respublikasi Prezidentining 2020-yil 29-oktabr “Ilm-fanni 2030 yilgacha rivojlantirish konsepsiyasini tasdiqlash toʻgʻrisida”gi PF-6097-sonli Farmoni.

19. Oʻzbekiston Respublikasi Prezidentining 2021-yil 17-fevraldagi “Sun’iy intellekt texnologiyalarini jadal joriy etish uchun shart-sharoitlar yaratish chora-tadbirlari toʻgʻrisida”gi PQ-4996-son Qarori.

20. Oʻzbekiston Respublikasi Prezidentining 2022-yil 28-yanvardagi “2022-2026 yillarga moʻljallangan Yangi Oʻzbekistonning taraqqiyot strategiyasi toʻgʻrisida”gi PF-60-son Farmoni.

21. Oʻzbekiston Respublikasi Prezidentining 2023-yil 25-yanvardagi “Respublika ijro etuvchi hokimiyat organlari faoliyatini samarali yoʻlga qoʻyishga doir birinchi navbatdagi tashkiliy chora-tadbirlar toʻgʻrisida”gi PF-14-sonli Farmoni.

22. Oʻzbekiston Respublikasi Prezidentining 2023-yil 11-sentabrdagi ““Oʻzbekiston - 2030” strategiyasi toʻgʻrisida”gi PF-158-son Farmoni.

23. Oʻzbekiston Respublikasi Prezidentining 2024-yil 21-iyundagi “Aholi va davlat xizmatchilarining korrupsiyaga qarshi kurashish sohasidagi bilimlarini uzluksiz oshirish tizimini joriy qilish chora-tadbirlari toʻgʻrisida” PQ-228-son Qarori.

III. Maxsus adabiyotlar

1. Oliy ta’limning meyoriy - huquqiy xujjatlari toʻplami. -T., 2013.

2. Oʻrinov V. Oʻzbekiston Respublikasi oliy ta’lim muassasalarida ECTS kredit-modul tizimi: asosiy tushunchalar va qoidalar. Oʻquv qoʻllanma. Nyu Bransvik Universiteti, 2020.

3. The European Higher Education Area. - Joint Declaration of the Ministers of Education. - Bologna, 1999, 19 June.

4. Shaping our Own Future in the European Higher Education Area // Convention of European Higher Education Institutions. - Salamanca, 2001, 29-30 march.

5. Virtualnaya realnost kak novaya issledovatelskaya i obrazovatelnaya sreda. Serfuz D.n. i dr. // JURNAL Nauchno-analiticheskiy jurnal «Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta Gosudarstvennoy protivopojarnoy slujbi MCHS Rossii», 2015. – s.185-197.

6. Ibraymov A.YE. Masofaviy oʻqitishning didaktik tizimi. Metodik qoʻllanma. – T.: “Lesson press”, 2020. -112 b.

7. Ignatova N. Y. Obrazovaniye v sifrovuyu epoxu: monografiya. M-vo obrazovaniya i nauki RF. – Nijniy Tagil: NTI (filial) UrFU, 2017. – 128 s.

http://elar.urfu.ru/bitstream/10995/54216/1/978-5-9544-0083-0_2017.pdf
8. Kiryakova A.V, Olxovaya T.A., Mixaylova N.V., Zaporojko V.V. Internet-texnologii na baze LMS Moodle v kompetentnostno-oriyentirovannom obrazovanii: uchebno-metodicheskoye posobiye / A.V. Kiryakova, T.A. Olxovaya, N.V. Mixaylova, V.V. Zaporojko; Orenburgskiy gos. un-t. – Orenburg: OGU, 2011. – 116 s. http://www.osu.ru/docs/fpkp/kiryakova_internet_technologies.pdf
9. Kononyuk A.YE. Oblachniye vichisleniya. – Kiyev, 2018. – 621 s.
10. Oliy ta'lim tizimini raqamli avlodga moslashtirish konsepsiyasi. Yevropa Ittifoqi Erasmus+ dasturining ko'magida. https://hiedtec.ecs.uni-ruse.bg/pimages/34/3._UZBEKISTAN-CONCEPT-UZ.pdf
11. Emelyanova O. A. Ta'limda bulutli texnologiyalardan foydalanish // Yosh olim. - 2014. - № 3. - S. 907-909.
12. Moodle LMS tizimida masofaviy kurslar yaratish. O'quv-uslubiy qo'llanma. – T.: Toshkent farmatsevtika instituti, 2017.
13. Tendensi i razvitiya visshego obrazovaniya v mire i v Rosii. Analiticheskiy doklad-daydjest. - M., 2021.- 198 s.
14. A.S. Zikriyoyev. Dunyo universitetlari reytingidagi tadqiqotchi olimlar orasida o'zingizni kashf qiling. -T.: Navro'z,2020. ISBN.9789943659285
15. Sherzod Mustafakulov, Aziz Zikriyoev, Dilnoza Allanazarova, Tokhir Khasanov, Sokhibmalik Khomidov. Explore Yourself Among World – Class Researchers. Grand OLEditor, Tashkent 2019, ISBN: 8175 25766-0.
16. Ackoff, Russell L., Scientific Method, New York: John Wiley & Sons, 1962.
17. Barzun, Jacques & Graff. F. (1990). The Modern Researcher, Harcourt, Brace Publication: New York.
18. Muslimov N.A va boshqalar. Innovatsion ta'lim texnologiyalari. O'quv-metodik qo'llanma. – T.: "Sano-standart", 2015. – 208 b.
19. Muslimov N.A va boshqalar. Pedagogik kompetentlik va kreativ asoslari. O'quv-metodik qo'llanma. – T.: "Sano-standart", 2015. – 120 b.
20. Pecherkina, A. A. Razvitiye professionalnoy kompetentnosti pedagoga: teoriya i praktika [Tekst] : monografiya / A. A. Pecherkina, E. E. Simanyuk, YE. L. Umnikova : Ural. gos. ped. un-t. – Yekaterinburg : [b.i.], 2011. – 233 s.
21. O.S. Frolova. Formirovaniye innovatsionnoy kompetensii pedagoga v protsesse vnutrishkolnogo povisheniya kvalifikatsii. Diss.k.p.n. Voronej 2018.
22. Kompetensii pedagoga XXI veka [Elektronniy resurs]: sb. materialov resp. konferensii (Minsk, 25 noyab. 2021 g.) / M-vo obrazovaniya Resp. Belarus, GUO «Akad. poslediplom. obrazovaniya», OO «Belorus. ped. o-vo». – Minsk: APO, 2021.
23. Ishmuhamedov R.J., M.Mirsoliyeva. O'quv jarayonida innovatsion ta'lim texnologiyalari. – T.: «Fan va texnologiya», 2017, 60 b.

24. Ishmuhamedov R, Mirsoliyeva M, Akramov A. Rahbarning innovatsion faoliyati. – T.: “Fan va texnologiyalar”, 2019.- 68 b.
25. Kodjaspirova G.M. Pedagogika v sxemax, tablitsax i opornix konspektax./ -M.:Ayris-press, 2016.
26. Natanzon E. Sh. Priyemi pedagogicheskogo vozdeystviya. - M, 2012. - 202 s.
27. Sergeyev I.S. Osnovi pedagogicheskoy deyatelnosti: Uchebnoye posobiye. – SPb.: Piter, 2014.
28. Margaret L. Lial, Thomas W. Hungerford, John P. Holcomb, Bernadette Mullins, Mathematics with Applications In the Management, Natural and Social Sciences (11th Edition), Pearsonb 2018.
29. Massey B., Ward-Smith J. Mechanics of Fluids. Solutions Manual Eighth edition. - Taylor &. Francis, 2016.
30. N.A.Korshunova and D.M.Azimov. Analytical Solutions for Thrust Arcs in a Field of Two Fixed Centers // «Journal of Guidance, Control, and Dynamics», (AIAA, USA), 2014, V.37, №5, P.1716-1719
31. Rao, M. M. Random and Vector Measures, Series on Multivariate Analysis, 9, World Scientific, 2012.
32. Robert D. Zucker, Oscar Biblarz Fundamentals of Gas Dynamics, Wiley, 2002. 512r.
33. Steve Taylor “Destination” Vocabulary and grammar”, Macmillan 2010.
34. Tao, Terence. An Introduction to Measure Theory. Providence, R.I.: American Mathematical Society, 2019.
35. Weaver, Nik Measure Theory and Functional Analysis. World Scientific, 2013, 423 p.
36. Avilova L.V., Bolotyuk V.A., Bolotyuk L.A. Analiticheskaya geometriya i lineynaya algebra// 2013. Izdaniye: 1-ye izd. 421 s.
37. Azimov D.M., Korshunova N.A Harakatning ustuvorlik nazariyasi bo‘yicha tanlangan ma’ruzalar. - Uchebnoye posobiye. - Tashkent, Universitet, 2005.
38. Belogurov A.Y. Modernizatsiya protsessa podgotovki pedagoga v kontekste innovatsionnogo razvitiya obshestva: Monografiya. — M.: MAKS Press, 2016. — 116 s. ISBN 978-5-317-05412-0.
39. Gulobod Qudratulloh qizi, R.Ishmuhamedov, M.Normuhammedova. An’anaviy va noan’anaviy ta’lim. – Samarqand: “Imom Buxoriy xalqaro ilmiy-tadqiqot markazi” nashriyoti, 2019. 312 b.
40. Ibraymov A.YE. Masofaviy o‘qitishning didaktik tizimi. metodik qo‘llanma/ tuzuvchi. A.YE. Ibraymov. – Toshkent: “Lesson press”, 2020. 112 bet.
41. Ishmuhamedov R.J., M.Mirsoliyeva. O‘quv jarayonida innovatsion ta’lim texnologiyalari. – T.: «Fan va texnologiya», 2014. 60 b.

42. Kiryanov D. Mathcad 15/Mathcad Prime 1.0. - SPb.: BXV-Peterburg, 2012. — 432 s.

43. Muslimov N.A va boshqalar. Innovatsion ta’lim texnologiyalari. O‘quv-metodik qo‘llanma. – T.: “Sano-standart”, 2015. – 208 b.

44. Ignatova N. Y. Obrazovaniye v sifrovuyu epoxu: monografiya. M-vo obrazovaniya i nauki RF. – Nijniy Tagil: NTI (filial) UrFU, 2017. – 128 s. http://elar.urfu.ru/bitstream/10995/54216/1/978-5-9544-0083-0_2017.pdf

45. Oliy ta’lim tizimini raqamli avlodga moslashtirish konsepsiyasi. Yevropa Ittifoqi Erasmus+ dasturining ko‘magida. https://hiedtec.ecs.uni-ruse.bg/pimages/34/3._UZBEKISTAN-CONCEPT-UZ.pdf

46. O.K. Asekretov, B.A. Borisov, N.Y. Bu-gakova i dr. M – Kniga 16 / Sovremenniye obrazovatelniye texnologii: pedagogika i psixologiya: Novosibirsk: Izdatelstvo SRNS, 2015. – 318 s. http://science.vvsu.ru/files/5040BC65-273B-44BB-98C4-CB5092BE4460.pdf

47. Turayev X. Harakatning turg‘unlik nazariyasi. - SamGU, 2004.

48. Usmonov B.SH., Habibullayev R.A. Oliy o‘quv yurtlarida o‘quv jarayonini kredit-modul tizimida tashkil qilish. O‘quv qo‘llanma. T.: “Tafakkur” nashriyoti, 2020 y. 120 bet.

IV. Elektron ta’lim resurslari

1. www.edu.uz.
2. www.aci.uz.
3. www.ictcouncil.gov.uz.
4. www.lib.bimm.uz
5. www. Ziyonet. Uz
6. www.sciencedirect.com
7. www.acs.org
8. www.nature.com
9. http://www.kornienko-ev.ru/BCYD/index.html.