FARG'ONA DAVLAT UNIVERSITETI HUZURIDAGI PEDAGOG KADRLARNI QAYTA TAYYORLASH VA ULARNING MALAKASINI OSHIRISH MINTAQAVIY MARKAZI

"TABIIY JARAYONLARNI MATEMATIK MODELLASHTIRISH"

O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI

OLIY TA’LIM, FAN VA INNOVATSIYALAR VAZIRLIGI

FARG‘ONA DAVLAT UNIVERSITETI HUZURIDAGI PEDAGOG KADRLARNI QAYTA TAYYORLASH VA ULARNING MALAKASINI OSHIRISH MINTAQAVIY MARKAZI

“TABIIY JARAYONLARNI MATEMATIK MODELLASHTIRISH”

MODULI BO‘YICHA

O‘QUV-USLUBIY MAJMUA

Matematika va amaliy matematika

Farg’ona – 2025

Modulning ishchi dasturi Oliy ta'lim, fan va innovatsiyalar vazirligining 2024 yil 27-dekabrdagi 485-sonli buyrug'i bilan tasdiqlangan "Matematika va amaliy matematika" yo'nalishi bo'yicha oily ta'lim muassasalari pedagog kadrlarini qayta tayyorlash va malakasini oshirish kursining o'quv dasturi asosida ishlab chiqilgan.

Tuzuvchi: Karimov K. - "Matematik analiz va differensial tenglamalar" kafedrasi dosenti, fizika-matematika fanlari doktori

Taqrizchi: Yusupova A. – "Matematika" kafedrasi dosenti, fizika-matematika fanlari nomzodi

Ishchi o'quv dasturi FarDU Ilmiy Kengashining qarori bilan tasdiqqa tavsiya qilingan
(2024 yil 27 dekabrdagi 5- sonli bayonnoma).

MUNDARIJA

I. ISHCHI DASTUR

Kirish

“Tabiiy jarayonlarni matematik modellashtirish” fani matematikada olingan bilimlarni amaliy masalalarga qo’llash asoslarini, matematik modellashtirish va hisoblash tajribasi imkoniyatlaridan samarali foydalanish imkoniyatlarini o’rganadi. Ushbu kurs chiziqli algebra va uning modellashtirishdagi tadbiqlari, matematik model tushunchasi, jarayonlarni modellashtirishda tabiatning saqlanish qonunlaridan va boshqa usullardan foydalanish, chiziqli dasturlash va demografik modellar, raqobatning ayrim modellari, biologik modellar kabi mavzularni qamrab olgan.

Modulning maqsadi va vazifalari

«**Tabiiy jarayonlarni matematik modellashtirish**» **modulining maqsadi:** pedagog kadrlarning innovatsion yondoshuvlar asosida o‘quv-tarbiyaviy jarayonlarni yuksak ilmiy-metodik darajada loyihalashtirish, sohadagi ilg‘or tajribalar, zamonaviy bilim va malakalarni o‘zlashtirish va amaliyotga joriy etishlari uchun zarur bo‘ladigan kasbiy bilim, ko‘nikma va malakalarini takomillashtirish, shuningdek ularning ijodiy faolligini rivojlantirishdan iborat.

«**Tabiiy jarayonlarni matematik modellashtirish**» **modulining vazifalari:**

“Matematika va amaliy matematika” yo‘nalishida pedagog kadrlarning kasbiy bilim, ko‘nikma, malakalarini takomillashtirish va rivojlantirish;

-pedagog kadrlar tomonidan zamonaviy axborot-kommunikatsiya texnologiyalari, zamonaviy ta'lim va innovatsion texnologiyalar sohasidagi ilg‘or xorijiy tajribalarning o‘zlashtirilishini ta'minlash;

-o‘quv jarayonini tashkil etish va uning sifatini ta'minlash borasidagi ilg‘or xorijiy tajribalar, zamonaviy yondashuvlarni o‘zlashtirish;

“Matematika va amaliy matematika” yo‘nalishida qayta tayyorlash va malaka oshirish jarayonlarini fan va ishlab chiqarishdagi innovatsiyalar bilan o‘zaro integratsiyasini ta'minlash.

Kurs yakunida tinglovchilarning bilim, ko‘nikma va malakalari hamda kompetensiyalariga qo‘yiladigan talablar:

«**Tabiiy jarayonlarni matematik modellashtirish**» moduli bo‘yicha tinglovchilar quyidagi yangi bilim, ko‘nikma, malaka hamda kompetensiyalarga ega bo‘lishlari talab etiladi:

Tinglovchi:

- jarayonlarni modellashtirishda tabiatning saqlanish qonunlaridan va boshqa usullardan foydalanish;

- matematik modellarning nazariy va amaliy tadqiqoti, ulariing adekvatligini baholash;

- matematik modellar va ularning real ob'ekti orasidagi muvofiqlilikni ta’minlash usullarini ***bilishi*** kerak.

Tinglovchi:

- matematika va amaliy matematikaga oid fanlarni o‘qitishda innovatsion ta’lim metodlari va vositalarini amaliyotda qo‘llash;

- talabaning o‘zlashtirish darajasini nazorat qilish va baholashning nazariy asoslari hamda innovatsion yondashuv uslublarini to‘g‘ri qo‘llay olish ***ko‘nikmalariga*** ega bo‘lishi lozim.

Tinglovchi:

- matematika va amaliy matematikaga oid fanlarni o‘qitish innovatsion jarayonini loyihalashtirish va tashkillashtirishning zamonaviy usullarini qo‘llash ***malakalariga*** ega bo‘lishi lozim.

Tinglovchi:

- matematika va amaliy matematika fanlarini o‘qitishda foydalaniladigan zamonaviy (matlab, mathcad, maple, GeoGebra va boshqalar) matematik paketlarini o‘quv jarayoniga tatbiq etish;

- Amaliy matematikaning xorij va respublika miqyosidagi dolzarb muammolari, yechimlari, tendensiyalari asosida o‘quv jarayonini tashkil etish;

- oliy ta’lim tizimida matematika va amaliy matematikaga oid fanlar mazmunining uzviyligi va uzluksizligini tahlil qila olish ***kompetensiyalariga*** ega bo‘lishi lozim.

Modulning o‘quv rejadagi boshqa modullar bilan bog‘liqligi va uzviyligi

«**Tabiiy jarayonlarni matematik modellashtirish**» moduli o‘quv rejadagi boshqa modullar va mutaxassislik fanlarining barcha sohalari bilan uzviy bog‘langan holda pedagoglarning bu soha bo‘yicha kasbiy pedagogik tayyorgarlik darajasini orttirishga xizmat qiladi.

Modulning oliy ta’limdagi o‘rni

Modulni o‘zlashtirish orqali tinglovchilar matematika va amaliy matematika fanlarini o‘qitishda zamonaviy usullar yordamida ta’lim jarayonini tashkil etishda pedagogik yondashuv asoslari va bu boradagi ilg‘or tajribalarni o‘rganadilar, ularni tahlil etish, amalda qo‘llash va baholashga doir kasbiy layoqatga ega bo‘lish, ilmiy-tadqiqotda innovatsion faoliyat va ishlab chiqarish faoliyati olib borish kabi kasbiy kompetentlikka ega bo‘ladilar.

“TABIIY JARAYONLARNI MATEMATIK MODELLASHTIRISH” moduli bo‘yicha soatlar taqsimoti

<table>
<tr><th rowspan="4">№</th><th rowspan="4">Modul mavzulari</th><th colspan="4">Tinglovchining o‘quv yuklamasi, soat</th></tr>
<tr><th rowspan="3">Hammasi</th><th colspan="3">Auditoriya o‘quv yuklamasi</th></tr>
<tr><th rowspan="2">Jami</th><th colspan="2">jumladan</th></tr>
<tr><th>Nazariy</th><th>Amaliy</th></tr>
<tr><td>1.</td><td>Matematik model tushunchasi. Matematik modelga misollar.</td><td>4</td><td>4</td><td>2</td><td>2</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>Jarayonlarni modellashtirishda tabiatning saqlanish qonunlaridan va boshqa usullardan foydalanish.</td><td>6</td><td>6</td><td>2</td><td>4</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>Chiziqli dasturlash masalalari va Demografik modellar.</td><td>4</td><td>4</td><td>2</td><td>2</td></tr>
<tr><td>4.</td><td>Chiziqli dasturlashning umumiy masalasi.</td><td>4</td><td>4</td><td>2</td><td>2</td></tr>
</table>

Jami:	18	18	8	10

NAZARIY MASHG’ULOTLAR MAZMUNI

1-mavzu: Matematik model tushunchasi. Matematik modelga misollar. (2 soat ma’ruza)

Jamiyat fikrining abstraktlanish jarayoni. Model va modellashtirish tushunchalari. Bilish jarayonida va insoniing amaliy faoliyatida modellashtirishning roli. Matematik model tushunchasi. Matematik modelga misollar. Matematik modelni ifodalash shakllari. Matematik modellarga qo‘yiladigan asosiy talablar. Matematik modellarni qurish metodlari. Matematik model va uning real ob’ekti orasidagi muvofiqlilik. Matematik modellarning nazariy va amaliy tadqiqoti, ulariing adekvatligi.

2-mavzu: Jarayonlarni modellashtirishda tabiatning saqlanish qonunlaridan va boshqa usullardan foydalanish. (2 soat ma’ruza)

Jarayonlarni modellashtirishda tabiatning saqlanish qonunlaridan va boshqa usullardan foydalanish. Differensial modellar. Energiyaning saqlanish qonuni. Massa (materiya)ning saqlanish qonuni. Impulsning saqlanish qonuni. Matematik modellashtirishda variatsion prinsipdan foydalanish. Ierarxiya prinsipidai foydalanib, matematik modellar qurish.

3-mavzu: Chiziqli dasturlash masalalari va Demografik modellar. (2 soat ma’ruza)

Chiziqli dasturlash masalalari va Demografik modellar. Chiziqli dasturlashning umumiy masalasi. Transport masalasi. Jamiyat rivojlanishining demografik modeli. Maltus va Fyurxst-Perl modellari. Populyatsiya chiziqsiz modelinint uch turdagi rejimi.

4-mavzu: Chiziqli dasturlashning umumiy masalasi. (2 soat ma’ruza)

Raqobatning ayrim modellari. Biologik modellar. «Yirtqich-o‘lja» sistemasining o‘zaro munosabat modeli. O‘zaro ta’sirlashuvchi populyatsiyalar sonini modellashtirish. Modda va energiya muvozanatining modeli. Epidemiya modeli.

AMALIY MASHG‘ULOTLAR MAZMUNI

1-mavzu: Matematik model tushunchasi. Matematik modelga misollar. (2 soat ma’ruza)

Matematik modelni qurish va ularni tadqiq qilish uslublari. Model va modellashtirish tushunchalari. Bilish jarayonida va insoniing amaliy faoliyatida modellashtirishning roli. Matematik model tushunchasi. Matematik modelga misollar. Matematik modelni ifodalash shakllari. Matematik modellarga qo‘yiladigan asosiy talablar. Matematik modellarni qurish metodlari. Matematik model va uning real ob’ekti orasidagi muvofiqlilik. Matematik modellarning nazariy va amaliy tadqiqoti, ulariing adekvatligi.

2-mavzu: Jarayonlarni modellashtirishda tabiatning saqlanish qonunlaridan va boshqa usullardan foydalanish. (4 soat ma’ruza)

Energiyaning saqlanish qonuni. Massa (materiya)ning saqlanish qonuni. Impulsning saqlanish qonuni. Matematik modellashtirishda variatsion prinsipdan foydalanish. Ierarxiya prinsipidai foydalanib, matematik modellar qurish.

3-mavzu: Chiziqli dasturlash masalalari va Demografik modellar. (2 soat ma’ruza)

Chiziqli dasturlash masalalari va Demografik modellar. Chiziqli dasturlashning umumiy masalasi. Transport masalasi. Jamiyat rivojlanishining demografik modeli. Maltus va Fyurxst-Perl modellari. Populyatsiya chiziqsiz modelinint uch turdagi rejimi.

4-mavzu: Chiziqli dasturlashning umumiy masalasi. (2 soat ma’ruza)

Raqobatning ayrim modellari. Biologik modellar. «Yirtqich-o‘lja» sistemasining o‘zaro munosabat modeli. O‘zaro ta’sirlashuvchi populyatsiyalar sonini modellashtirish. Modda va energiya muvozanatining modeli. Epidemiya modeli.

AMALIY MASHG’ULOTLARNI TASHKIL ETISH MAZMUNI

Amaliy mashg‘ulotlarda tinglovchilar o‘quv modullari doirasidagi ijodiy topshiriqlar, keyslar, o‘quv loyihalari, texnologik jarayonlar bilan bog‘liq vaziyatli masalalar asosida amaliy ishlarni bajaradilar.

Amaliy mashg‘ulotlar zamonaviy ta‘lim uslublari va innovatsion texnologiyalarga asoslangan holda o‘tkaziladi. Bundan tashqari mustaqil holda o‘quv va ilmiy adabiyotlardan, elektron resurslardan, tarqatma materiallardan foydalanish tavsiya etiladi.

II. MODULNI O’QITIShDA FOYDALANILADIGAN INTREFAOL TA’LIM METODLARI

BINAR MA’RUZA. “Binar”s o‘zi lotinchadan olingan bo‘lib, “qo‘sh”, “ikki” degan ma’noda qo‘llaniladi. Bunday mashg‘ulotning olib borilishi ikki vakil:o‘qituvchi va metodist;o‘qituvchi vao‘quvchi; taklif etilgan mutaxassis vao‘qituvchi;o‘qituvchi va tyutor (maslahatchi)o‘rtasidagi interfaol suhbat, bahs-munozara va axborotlar almashinuvini namoyon qiladi. Jarayonni bunday tashkillashtirishdan ko‘zlangan asosiy maqsad yangio‘quv ma’lumotlari va axborotlarini ikki mutaxassis yoki ishtirokchi nuqtayi nazarlarini taqqoslash orqali yoritib berishdan iborat.

TRENING. Trening zamonaviy ta’lim shakllaridan biri hisoblanib, u interfaol mashg‘ulotlarni amalga oshirishningo‘ziga xos ko‘rinishidir. Treninglaro‘rganilishi lozim bo‘lgan nazariy g‘oya va fikrlarni amaliy ish hamda mashqlar davomidao‘zlashtirish imkoniyatini beradi va ta’lim oluvchilarda shaxslararoo‘zaro hamkorlikning samarali ko‘nikmasini shakllantirishga, shuningdek, mutaxassis kasbiy kompetentligining umumiy darajasini oshirishga yo‘naltiriladi.

Har qanday pedagogik treningni tashkil etish quyidagi bosqichlardan tashkil topadi:

1. Tashkiliy bosqich: guruhni yig‘ish yoki shakllantirish.

2. Boshlang‘ich bosqich: guruh me’yorlarini ishlab chiqish, tanishuv va mashg‘ulotdan kutuvlarni aniqlash.

3. Faoliyatli bosqich: trening turi vao‘tkazish metodikasini belgilash.

4. Yakuniy bosqich (refleksiya).

Trening mobaynida talabalar nazariy ma’lumotlarnio‘zlashtirish bilan birga, ularda bilish, emmotsional va xulq-atvor ko‘nikmalari ham rivojlanib boradi.

“SWOT-TAHLIL” METODI. Metodning maqsadi: mavjud nazariy bilim lar va amaliy tajribalarni tahlil qilish, taqqoslash orqali muammoni hal etish yo‘llarni topishga, bilimlarni mustahkamlash, takrorlash, baholashga, mustaqil, tanqidiy fikrlashni, nostandart tafakkurni shakllantirishga xizmat qiladi.

S – (strength) kuchli tomonlari

W – (weakness) zaif, kuchsiz tomonlari

O – (opportunity) imkoniyatlari

T – (threat) to‘siqlar

“KEYS-STADI” METODI. «Keys-stadi» - inglizcha so‘z bo‘lib, («case» – aniq vaziyat, hodisa, «study» – o‘rganmoq, tahlil qilmoq) aniq vaziyatlarni o‘rganish, tahlil qilish asosida o‘qitishni amalga oshirishga qaratilgan metod hisoblanadi. Keysda ochiq axborotlardan yoki aniq voqyea-hodisadan vaziyat sifatida tahlil uchun foydalanish mumkin.

Mazkur metod muammoli ta’lim metodidan farqli ravishda real vaziyatlarni o‘rganish asosida aniq qarorlar qabul qilishga asoslanadi. Agar u o‘quv jarayonida ma’lum bir maqsadga erishish yo‘li sifatida qo‘llanilsa, metod xarakteriga ega bo‘ladi, biror bir jarayonni tadqiq etishda bosqichma-bosqich, ma’lum bir algoritm asosida amalga oshirilsa, texnologik jihatni o‘zida aks ettiradi

“Keys metodi” ni amalga oshirish bosqichlari Ish bosqichlari Faoliyat shakli va mazmuni

1-bosqich: Keys va uning axborot ta’minoti bilan tanishtirish

- yakka tartibdagi audio-vizual ish;

- keys bilan tanishish (matnli, audio yoki media shaklda);

- axborotni umumlashtirish;

- axborot tahlili;

- muammolarni aniqlash

2-bosqich: Keysni aniqlashtirish va o‘quv topshirig’ni belgilash

- individual va guruhda ishlash;
- muammolarni dolzarblik iyerarxiyasini aniqlash;
- asosiy muammoli vaziyatni belgilash

3-bosqich: Keysdagi asosiy muammoni tahlil etish orqali o‘quv topshirig’ining yechimini izlash, hal etish yo‘llarini ishlab chiqish

- individual va guruhda ishlash;
- muqobil yechim yo‘llarini ishlab chiqish;
- har bir yechimning imkoniyatlari va to‘siqlarni tahlil qilish;
- muqobil yechimlarni tanlash

4-bosqich: Keys yechimini shakllantirish va asoslash, taqdimot.

- yakka va guruhda ishlash;
- muqobil variantlarni amalda qo‘llash imkoniyatlarini asoslash;
- ijodiy-loyiha taqdimotini tayyorlash;
- yakuniy xulosa va vaziyat yechimining amaliy aspektlarini yoritish

“Keys-stadi” metodining o‘ziga xos xususiyatlari:

-izlanishga doir faoliyatning mavjud bo‘lishi.

-jamoaviy va guruhlarda o‘qitish.

-individul, guruhli va jamoaviy ish shakllari integrasiyasi.

-xilma-xil o‘quv loyihalarini ishlab chiqish.

-muvaffaqiyatga erishish uchun ta’lim oluvchilarning o‘quv-bilish faoliyatini rag’batlantirish

Keys harakatlari o‘z ichiga quyidagilar savollar bo‘yicha faoliyatni qamrab oladi:

-Kim? (Who?)

-Qachon? (When?)

-Qayerda? (Where?)

-Nima uchun? (Why?)

-Qanday?/ Qanaqa? (How?)

-Nima? (natija) (What?).

Keys. 5-sinf darsligining sizga taqdim etilgan bitta mavzusi materiallari bo‘yicha keys topshirig’ini tuzing, bu keys asosida o‘tiladigan darsni loyihalashtiring, u bo‘yicha taqdimot tayyorlang va uni namoyish eting.

«FSMU» METODI. Metodning maqsadi: Mazkur metod ishtirokchilardagi umumiy fikrlardan xususiy xulosalar chiqarish, taqqoslash, qiyoslash orqali axborotni o‘zlashtirish, xulosalash, shuningdek, mustaqil ijodiy fikrlash ko‘nikmalarini shakllantirishga xizmat qiladi. Mazkur metoddan ma’ruza mashg’ulotlarida, mustahkamlashda, o‘tilgan mavzuni so‘rashda, uyga vazifa berishda hamda amaliy mashg’ulot natijalarini tahlil etishda foydalanish tavsiya etiladi.

Metodni amalga oshirish tartibi:

- qatnashchilarga mavzuga oid bo‘lgan yakuniy xulosa yoki g’oya taklif etiladi;

- har bir ishtirokchiga FSMU metodining bosqichlari yozilgan qog’ozlarni tarqatiladi:

- ishtirokchilarning munosabatlari individual yoki guruhiy tartibda taqdimot qilinadi.

FSMU tahlili qatnashchilarda kasbiy-nazariy bilimlarni amaliy mashqlar va mavjud tajribalar asosida tezroq va muvaffaqiyatli o‘zlashtirilishiga asos bo‘ladi.

Namuna.

Fikr: PISA va TIMSS qiyosiy xalqaro tadqiqotlar natijalari mamlakatimizda matematika fanini o‘qitish tizimini tahlil qilish va takomillashtirishni taqozo etadi.

Topshiriq: Mazkur fikrga nisbatan munosabatingizni FSMU orqali tahlil qiling.

“TUSHUNCHALAR TAHLILI” METODI. Metodning maqsadi: mazkur metod o‘quvchilar yoki qatnashchilarni mavzu buyicha tayanch tushunchalarni o‘zlashtirish darajasini aniqlash, o‘z bilimlarini mustaqil ravishda tekshirish, baholash, shuningdek, yangi mavzu buyicha dastlabki bilimlar darajasini tashxis qilish maqsadida qo‘llaniladi. Metodni amalga oshirish tartibi:

- ishtirokchilar mashg’ulot qoidalari bilan tanishtiriladi;

- o‘quvchilarga mavzuga yoki bobga tegishli bo‘lgan so‘zlar, tushunchalar nomi tushirilgan tarqatmalar beriladi (individual yoki guruhli tartibda);

- o‘quvchilar mazkur tushunchalar qanday ma’no anglatishini, qachon, qanday xolatlarda qo‘llanilishi haqida yozma ma’lumotlar beradilar ;

- Belgilangan vaqt yakuniga yetgacho‘qituvchi berilgan tushunchalarning to‘g`ri va to‘liq izohinio‘qib eshittiradi yoki slayd orqali namoyish etadi;

- Har bir ishtirokchi berilgan to‘g`ri javoblar bilano‘zining ishini taqqoslaydi, farqlarini aniqlaydi vao‘z bilim darajasini tekshirib, baholaydi.

VENN DIAGRAMMASI METODI. Venn diagrammasi - grafik ko‘rinishda bo‘lib, olingan natijalarni umumlashtirib, ulardan bir butun xulosa chiqarishga, ikki va undan ortiq predmetlarni (ko‘rinish, fakt, tushuncha) taqqoslash, tahlil qilish va o‘rganishda qo‘llaniladi. Diagramma ikki va undan ortiq aylanani kesishmasidan hosil bo‘ladi.

Metodning maqsadi: Bu metod grafik tasvir orqali o‘qitishni tashkil etish shakli bo‘lib, u ikkita o‘zaro kesishgan aylana tasviri orqali ifodalanadi. Mazkur metod turli tushunchalar, asoslar, tasavurlarning analiz va sintezini ikki aspekt orqali ko‘rib chiqish, ularning umumiy va farqlovchi jihatlarini aniqlash, taqqoslash imkonini beradi.

Metodni amalga oshirish tartibi:

- ishtirokchilar ikki kishidan iborat juftliklarga birlashtiriladilar va ularga ko‘rib chiqilayotgan tushuncha yoki asosning o‘ziga xos, farqli jihatlarini (yoki aksi) doiralar ichiga yozib chiqish taklif etiladi;

- navbatdagi bosqichda ishtirokchilar to‘rt kishidan iborat kichik guruhlarga birlashtiriladi va har bir juftliko‘z tahlili bilan guruh a’zolarini tanishtiradilar;

- juftliklarning tahlili eshitilgach, ular birgalashib, ko‘rib chiqilayotgan muammo yohud tushunchalarning umumiy jihatlarini (yoki farqini) izlab topadilar, umumlashtiradilar va doirachalarning kesishgan qismiga yozadilar.

Namuna: PISA va TIMSS xalqaro tadqiqotlar natijalarini qiyosiy tahlil qiling.

KICHIK GURUHLARDA ISHLASH METODI. Kichik guruhlarda ishlash orqali o‘rganish - ma’lum muammoning yechimini topishga va o‘quvchilar faolligini oshirishga qaratilgan darsdagi ijodiy hamkorlikdagi ish. Bosqichlari: guruhlarga bo‘lish, muammoni guruhlarda muxokama qilish, muammoning yechimlari taqdimoti, xulosalash.

Kichik guruhlarda hamkorlikda o‘qitish

Bu yondashuvda kichik guruhlar 4 ta o‘quvchidan tashkil topadi. O‘qituvchi avval mavzuni tushuntiradi, so‘ngra o‘quvchilarning mustaqil ishlari tashkil etiladi. O‘quvchilarga berilgan o‘quv topshiriqlari 4 qismga ajratilib, har bir o‘quvchi topshiriqning ma’lum qismini bajaradi. Topshiriq yakunida har bir o‘quvchi o‘zi bajargan qism yuzasidan fikr yuritib, o‘rtoqlarini o‘qitadi, so‘ngra guruh a’zolari tomonidan topshiriq yuzasidan umumiy xulosa chiqariladi. O‘qituvchi har bir kichik guruh axborotini tinglaydi va test savollari yordamida bilimlarni nazorat qilib baholaydi.

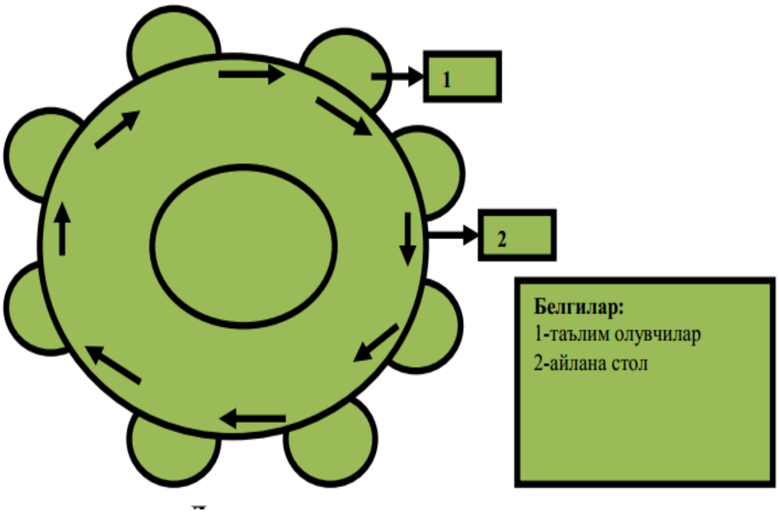
O‘quvchilarning kichik guruhlardagi o‘quv faoliyati o‘yin (turnir, musobaqa) shaklida, individual tarzda ham tashkil etilishi mumkin

Kichik guruhlarda ijodiy izlanishni tashkil etish

Kichik guruhlarda ijodiy izlanishni tashkil etish metodi 1976 yili Tel-Aviv universiteti professori Sh.Sharan tomonidan ishlab chiqilgan. Bu metodda ko‘proqo‘quvchilarning mustaqil va ijodiy ishiga e’tibor qaratiladi.

O‘quvchilar alohida-alohida yoki 6 kishilik kichik guruhlarda ijodiy izlanish olib boradilar. Ijodiy izlanish kichik guruhlarda tashkil etilganda darsda o‘rganish lozim bo‘lgan o‘quv materiali kichik qismlarga ajratiladi. Keyin bu qismlar yuzasidan topshiriqlar har bir o‘quvchiga taqsimlanadi. Shunday qilib, har bir o‘quvchi umumiy topshiriqning bajarilishiga o‘z hissasini qo‘shadi. Kichik guruhlarda topshiriq yuzasidan munozara o‘tkaziladi. Guruh a’zolari birgalikda ma’ruza tayyorlaydi va sinf o‘quvchilari o‘rtasida o‘z ijodiy izlanishlari natijasini e’lon qiladi. Kichik guruhlar o‘rtasida o‘tkazilgan o‘quv bahsi, munozara o‘quvchilar jamoasining hamkorlikda bajargan mustaqil faoliyatining natijasi, yakuni sanaladi. Hamkorlikda ishlash natijasida qo‘lga kiritilgan muvaffaqiyatlar sinf jamoasining har bir o‘quvchining muntazam va faol aqliy mehnat qilishiga, kichik guruhlarni, umuman sinf jamoasini jipslashtirishga, avval o‘zlashtirilgan bilim, ko‘nikma va malakalarni yangi kutilmagan vaziyatlarda qo‘llanib, yangi bilimlarning o‘zlashtirishiga bog’liq bo‘ladi.

“DAVRA SUHBATI” METODI – aylana stol atrofida berilgan muammo yoki savollar yuzasidan ta’lim oluvchilar tomonidano‘z fikr-mulohazalarini bildirish orqali olib boriladigano‘qitish metodidir. “Davra suhbati” metodi qo‘llanilganda stol-stullarni doira shaklida joylashtirish kerak. Bu har bir ta’lim oluvchining bir-biri bilan “ko‘z aloqasi”nio‘rnatib turishiga yordam beradi. Davra suhbatining og‘zaki va yozma shakllari mavjuddir. Og‘zaki davra suhbatida ta’lim beruvchi mavzuni boshlab beradi va ta’lim oluvchilardan ushbu savol bo‘yichao‘z fikr-mulohazalarini bildirishlarini s o‘raydi va aylana bo‘ylab har bir ta’lim oluvchio‘z fikr-mulohazalarini og‘zaki bayon etadilar. S o‘zlayotgan ta’lim oluvchini barcha diqqat bilan tinglaydi, agar muhokama qilish lozim bo‘lsa, barcha fikr-mulohazalar tinglanib bo‘lingandan s o‘ng muhokama qilinadi. Bu esa ta’lim oluvchilarning mustaqil fikrlashiga va nutq madaniyatining rivojlanishiga yordam beradi. Quyida “Davra suhbati” metodining tuzilmasi keltirilgan.



Rasm. Davra stolining tuzilmasi

Yozma davra suhbatida ham stol-stullar aylana shaklida joylashtirilib, har bir ta’lim oluvchiga convert qog‘ozi beriladi. Har bir ta’lim oluvchi convert ustiga ma’lum bir mavzu bo‘yicha o‘z savolini beradi va “Javob varaqasi”ning biriga o‘z javobini yozib, convert ichiga solib qo‘yadi. Shundan s o‘ng konvertni soat yo‘nalishi bo‘yicha yonidagi ta’lim oluvchiga uzatadi. Konvertni olgan ta’lim oluvchio‘z javobini “Javoblar varaqasi”ning biriga yozib, konvert ichiga solib qo‘yadi va yonidagi ta’lim oluvchiga uzatadi. Barcha konvertlar aylana bo‘ylab harakatlanadi. Yakuniy qismda barcha konvertlar yig‘ib olinib, tahlil qilinadi.

“Davra suhbati” metodining bosqichlari quyidagilardan iborat:

1. Mashg‘ulot mavzusi e’lon qilinadi.

2. Ta’lim beruvchi ta’lim oluvchilarni mashg‘ulotnio‘tkazish tartibi bilan tanishtiradi.

3. Har bir ta’lim oluvchiga bittadan konvert va javoblar yozish uchun guruhda necha ta’lim oluvchi bo‘lsa, shunchadan “Javoblar varaqalari”ni tarqatilib, har bir javobni yozish uchun ajratilgan vaqt belgilab qo‘yiladi. Ta’lim oluvchi konvertga va “Javoblar varaqalari”gao‘z ismi-sharifini yozadi.

4. Ta’lim oluvchi konvert ustiga mavzu bo‘yichao‘z savolini yozadi va “Javoblar varaqasi”gao‘z javobini yozib, konvert ichiga solib qo‘yadi.

5. Konvertga savol yozgan ta’lim oluvchi konvertni soat yo‘nalishi

bo‘yicha yonidagi ta’lim oluvchiga uzatadi.

6. Konvertni olgan ta’lim oluvchi konvert ustidagi savolga “Javoblar

varaqalari”dan biriga javob yozadi va konvert ichiga solib qo‘yadi hamda

yonidagi ta’lim oluvchiga uzatadi.

7. Konvert davra stoli bo‘ylab aylanib, yana savol yozgan ta’lim oluvchiningo‘ziga qaytib keladi. Savol yozgan ta’lim oluvchi konvertdagi “Javoblar varaqalari”ni baholaydi.

8. Barcha konvertlar yig‘ib olinadi va tahlil qilinadi.

Ushbu metod orqali ta’lim oluvchilar berilgan mavzu bo‘yichao‘zlarining bilimlarini qisqa va aniq ifoda eta oladilar. Bundan tashqari ushbu metod orqali ta’lim oluvchilarni muayyan mavzu bo‘yicha baholash imkoniyati yaratiladi. Bunda ta’lim oluvchilaro‘zlari bergan savollariga guruhdagi boshqa ta’lim oluvchilar bergan javoblarini baholashlari va ta’lim beruvchi ham ta’lim oluvchilarni obyektiv baholashi mumkin.

MUAMMOLI TA’LIM METODI. Ta’lim jarayonida o‘quvchilarning bilish faoliyatini faollashtirish hamda ularning intellektual imkoniyatlaridan yuqori darajada foydalanish quyidagi umumiy omillarga bog’liq bo‘ladi:

-o‘rganilayotgan mavzu yuzasidan muammoli savollar tizimi tuzish;

-qo‘yilgan muammoli savollar tizimi asosida suhbat metodi orqali tushuntiriladigan mavzu materiallarini o‘rgatish va uning tub mohiyatini ochib berish;

-muammoli savol asosida izlanish xarakteridagi o‘quv vazifalarini qo‘yish.

Yuqoridagi bosqichlar asosida o‘quv materiali tushuntiriladiganda o‘quvchilar o‘zlari darrov tushunib yetmaydigan fakt va tushunchalarga duch keladilar. Natijada o‘rganilayotgan mavzu materiali bilan o‘quvchilar orasida muammoli vaziyat hosil bo‘ladi.

Muammoli vaziyatning roli va ahamiyatini aniqlash o‘quvchilarning aktiv fikrlash faoliyatini psixologik, pedagogik qonuniyatlarini hisobga olish asosida o‘quv jarayonini qayta qurish muammoli ta’limning asosiy g’oyasini belgilab beradi. Muammoli vaziyatlarni hal qilish asosida hosil qilingan dars jarayoni muammoli ta’lim deyiladi.

Muammoli ta’limda o‘qituvchi faoliyati shundan iboratki, u zarur hollarda eng murakkab tushunchalar mazmunni tushuntira boribo‘rganilayotgan mavzu materiali bilan o‘quvchilar orasidagi muntazam ravishda muammoli vaziyatlar vujudga keltiriladi, o‘quvchilarni faktlardan xabardor qiladi, natijada o‘quvchilar bu faktlarni analiz qilish asosida mustaqil ravishda xulosa chiqaradilar va umumlashtiradilar.

EVRISTIK TA’LIM METODI. Evristika degan so‘zning ma’nosi savol javobga asosan “topaman” demakdir. Evristik metod bilan o‘qitish maktablarda asosan XIX asr boshlaridan boshlab qo‘llanila boshladi.

Mashg’ulotlar qiziqarli bo‘lishi uchun, bu mashg’ulotlardagi har bir masala yoki topshiriq so‘zma-so‘z quruq yodlash uchun emas, balki ularning oliy faoliyatlarini ishga soladigan xarakteri bo‘lishi kerak. Amerikalik olim D. Poya evristik ta’lim metodi to‘g’risida shunday degan edi. Evristikani maqsadi yangiliklarga olib boruvchi metod va qoidalarni izlash demakdir. U evristik metod mohiyatini quyidagidek izchillikda tuzilgan reja orqali amalga oshirishni tavsiya qiladi:

-masalaning quyilishini tushunish;

-masalaning yechish rejaini tuzish;

-tuzilgan rejani amalga oshirish;

-orqaga nazar tashlash (hosil qilingan yechimni tekshirish).

Bu rejani amalga oshirish jarayonida o‘qituvchilar quyidagi savollarga javob topadilar:

-Masalada nima noma’lum?

-Masalada nimalar ma’lum?

-Masalaning sharti nimalardan iborat?

-Ilgari shunga o‘xshagan masalalar yechilganmi?

-Agar shunga o‘xshagan masalalar yechilgan bo‘lsa, undan foydalanib qo‘yilayotgan masalani yecha oladimi?

Albatta yuqoridagi reja-sxema o‘quvchilarning ijodiy fikrlash faoliyatilarni shakllantiradi, ammo bu reja-sxema o‘quvchilarning ijodiy qobiliyatlarini shakllantiruvchi birdan bir yo‘l bo‘la olmaydi.

AQLIY HUJUM METODI. Uumumiy muammo bo‘yicha o‘quvchilarni ijodiy ishga, o‘zaro muloqotga chorlash. Bosqichlari: muammoli vaziyatni keltirib chiqarish; uning yechimini topish uchun o‘quvchilarni jalb qilish; turli yechimlar taqdimotini eshitish; yechimlarni solishtirish va tanlash; xulosalash.

MUSTAQIL ISHLASH METODI. Vaqti-vaqti bilan o‘tkazib turiladigan, o‘quvchilarning mustaqil o‘rganish, darslik bilan ishlash va mustaqil amaliy faoliyat bilan shug’ullanish ko‘nikmalarini shakllantiradigan, har bir o‘quvchiga alohida yoki umumiy tarzda tashkil qilinadigan topshiriqni bajartirish; o‘quvchilarning amaliy faoliyatiga aralashmay, tashqaridan teskari aloqa- muloqot yordamida yo‘naltirib boshqarish va nazorat qilish.

JUFTLIKDA ISHLASHMETODI. Biror mavzu bo‘yicha yonma-yon o‘tirgan o‘quvchilarni o‘zaro muloqotga chorlash; o‘zaro fikr almashish va ularni ba’zilarini tinglash.

“BAHS-MUNOZARA” METODI. Metod quyidagi bosqichlarda amalga oshiriladi: o‘qituvchi munozara mavzusini tanlaydi va o‘quvchilarni munozaraga taklif etadi; o‘qituvchi o‘quvchilarga muammo bo‘yicha «aqliy hujum» o‘tkazishga chorlaydi va uni o‘tkazish tartibini belgilaydi; o‘qituvchi «Aqliy hujum» vaqtida bildirilgan turli g’oya va fikrlarni yozib boradi yoki bu ishni bajarish uchun o‘quvchilardan birini kotib etib tayinlaydi hamda bu bosqichda o‘qituvchi o‘quvchilarga o‘z fikrlarini bildirishlariga sharoit yaratib beradi; o‘qituvchi o‘quvchilar bilan birgalikda, ikkinchi bosqichda «aqliy hujum» davomida bildirilgan fikr va g’oyalarni guruhlarga ajratadi, umumlashtiradi va ularni tahlil qiladi. Tahlil natijasida qo‘yilgan muammoning eng maqbul yechimi tanlanadi.

TADQIQOT METODI. Tadqiqot usuli o‘zlashtirish darajasining eng yuqori cho‘qisi hisoblanadi. Bu usul bilan dars o‘tilganda o‘quvchilar olgan bilimlari asosida hali o‘rganilmagan kichik bir masala ustida yakka yoki birgalashib izlanish olib borishadi, masala yechimiga doir keltirilgan taxminni izlab topilgan dalillar asosida to‘g’ri yoki noto‘g’riligini tekshirishadi va isbotlashadi. Bosqichlari: -darsda hammaga qiziqish uyg’otadigan biror obyektning xossasini aniqlash yoki u haqidagi masalani qo‘yish; -uni o‘rganish, tadqiq qilish uchun ma’lumotlar to‘plash; -muammo yoki masalaning yechishga oid taxminlar, bashoratlar qilish; -har bir bashoratning qanchalik to‘g’riligini to‘plangan ma’lumotlar asosida tahlil qilish va isbotlash; -xulosa chiqarish; -sinf oldida taqdimot qilish.

KLASTER METODI. Klaster metodi pedagogik, didaktik strategiyaning muayyan shakli bo‘lib, u ta’lim oluvchilarga ixtiyoriy muammo (mavzu) lar xususida erkin, ochiqo‘ylash va fikrlarni bemalol bayon etish uchun sharoit yaratishga yordam beradi. Mazkur metod turli xil g’oyalar o‘rtasidagi aloqalar fikrlash imkoniyatini beruvchi tuzilmani aniqlashni talab etadi. Ushbu metod muayyan mavzuning ta’lim oluvchilar tomonidan chuqur hamda puxta o‘zlashtirilguniga qadar fikrlash faoliyatining bir maromda bo‘lishini ta’minlashga hizmat qiladi.

«Klaster» metodidan foydalanish tavsifi:

1-bosqich. Nimaniki o‘ylagan bo‘lsangiz, shuni qog’ozga yozing. Fikringizni sifati to‘g’risida o‘ylabo‘tirmay, ularni shunchaki yozib boring.

2-bosqich. Yozuvingizning orfografiyasi yoki boshqa jihatlariga e’tibor bermang.

3-bosqich. Belgilangan vaqt nihoyasiga yetmaguncha, yozishdan to‘xtamang. Agar ma’lum muddat biror-bir g’oyani o‘ylay olmasangiz, u holda qog’ozga biror narsaning rasmini chiza boshlang. Bu harakatni yangi g’oya tug’ilgunga qadar davom ettiring.

4-bosqich. Muayyan tushuncha doirasida imkon qadar ko‘proq yangi g’oyalarni ilgari surish hamda mazkur g’oyalar o‘rtasidagi o‘zaro aloqadorlik va bog’liqlikni ko‘rsatishga harakat qiling. G’oyalar yig’indisining sifati va ular o‘rtasidagi aloqalarni ko‘rsatishni cheklamang.

III. NAZARIY MA’LUMOTLAR

1 – Mavzu. Matematik model tushunchasi. Matematik modelga misollar.

Reja:

1.Jamiyat fikrining abstraktlanish jarayoni. Model va modellashtirish tushunchalari. Bilish jarayonida va insoniing amaliy faoliyatida modellashtirishning roli. Matematik modelga misollar.

2.Matematik modelni ifodalash shakllari. Matematik modellarga qo‘yiladigan asosiy talablar.

3.Matematik modellarni qurish metodlari. Matematik model va uning real ob’ekti orasidagi muvofiqlilik.

4.Matematik modellarning nazariy va amaliy tadqiqoti, ulariing adekvatligi.

Ma’lumki, ilmiy bilimlar tadqiqot ob'ektlari deb ataladigan ob'ektlar, hodisalar va jarayonlarni o‘rganishga qaratilgan. Bunda bizga model va modellashtirish tushunchalari katta ahamiyat kasb etadi.

Modellarni ishlab chiqishda gipotezalar muhim rol o‘ynaydi (hypothesis-asos, taxmin), ya'ni ma'lum miqdordagi eksperimental ma'lumotlar, kuzatishlar, taxminlarga asoslangan hodisalarning sabab-oqibat munosabatlari to‘g‘risida ma'lum bashoratlar, taxminiy qarorlar kabilar. Gipotezalarning to‘g‘riligini tekshirish esa, qoida tariqasida, o‘xshashliklarga asoslanadi.

Analogiya (yunoncha analogiya-muvofiqlik, mutanosiblik)-bu ikkita ob'ektning o‘xshashligidir. Ikki ob'ektning o‘xshashligi yoki farqining ahamiyati shartli va abstraktsiya darajasiga bog‘liq, u tadqiqotning yakuniy natijasi bilan belgilanadi. Abstraktsiya darajasi tadqiqot ob'ektining hisobga olingan parametrlari to‘plamiga bog‘liq.

Biz model atamasida (lat. modulus-o‘lchov, namuna, norma) bilish (o‘rganish) jarayonida asl ob'ektni almashtiradigan, ushbu tadqiqot uchun muhim bo‘lgan ba'zi o‘ziga xos xususiyatlarni saqlaydigan moddiy yoki aqliy tasavvur qilingan ob'ektni tushunamiz. Model bizga turli xil boshqaruv variantlarini sinab ko‘rish orqali ob'ektni qanday qilib to‘g‘ri boshqarishni o‘rganishga imkon beradi. Buning uchun haqiqiy ob'ektdan foydalanish ko‘pincha xavfli yoki shunchaki imkonsizdir. Boshqacha qilib aytganda, model - bu bilish jarayonida asl ob'ektni almashtirib, uning ba'zi muhim xususiyatlarini saqlab turadigan shunday moddiy yoki aqliy tasavvur qilingan ob'ekt.

Model-bu o‘rganilayotgan ob'ekt hodisalarining alohida tomonlarini aks ettiruvchi soddalashtirilgan tizim. O‘rganilgan har bir jarayonni turli xil modellar bilan tavsiflash mumkin, hech qanday model buni to‘liq va har tomonlama bajara olmaydi. Shu bilan birga, o‘rganilayotgan ob'ektning individual xususiyatlarini aks ettiruvchi soddalashtirilgan modeldan foydalanish sabablar va oqibatlar, kirish va chiqishlarning o‘zaro bog‘liqligini aniqroq ko‘rish, kerakli xulosalarni tezroq chiqarish va to‘g‘ri qarorlar qabul qilish imkonini beradi [9].

Shunday qilib, model quyidagilar uchun kerak:

1) muayyan ob'ekt qanday ishlashini tushuntirish: uning tuzilishi, ichki aloqalari, asosiy xususiyatlari, rivojlanish qonunlari, o‘z-o‘zini rivojlantirish va atrof-muhit bilan o‘zaro ta'siri;

2) ob'ekt yoki jarayonni boshqarishni o‘rganish, berilgan maqsadlar va mezonlar bo‘yicha boshqarishning eng yaxshi usullarini aniqlash;

3) ob'ektga ta'sir qilishning berilgan usullari va shakllarini amalga oshirishning bevosita va bilvosita oqibatlarini bashorat qilish.

Namunaviy modellarni ko‘rib chiqamiz. Globus, bu yerning modeli. t vaqt o‘tishi bilan v boshlang‘ich tezlik va a tezlanish bilan harakatlanadigan jismning bosib o‘tgan yo‘lini hisoblash uchun quyidagi tenglamadan foydalanamiz:

$$s = vt + \frac{at^2}{2}$$

Ushbu tenglama - tekis tezlanuvchan jism harakatining matematik modeli.

Asl nusxalari bo‘lmagan modellar mavjud emas. Modellarning asl nusxalari bo‘lishi mumkin:

- Ob'ektlar (raketa, odam, atom, galaktika, sayyora, hayvon, bino, kosmik jism).
- Jarayonlar (iqlim o‘zgarishi, urush, iqtisodiyotning pasayishi, inflyatsiya, epidemiya, muzokaralar, sud jarayoni).
- Tabiiy hodisalar (zilzila, tsunami, shimoliy chiroqlar, qor yog‘ishi, do‘l, vulqon otilishi, chaqmoq, momaqaldiroq).

Modellar asl ob'ektning tuzilishi, xususiyatlari, hatti – harakati yoki faoliyati to‘g‘risida ma'lumot olish uchun kerak.

Modellashtirish - bu asl nusxani analog (model) bilan almashtirish jarayoni, so‘ngra asl nusxaning xususiyatlari va hatti-harakatlarini o‘rganish usuli.

Modelni qurish va undan foydalanish jarayoni modellashtirish deb ataladi. Shartli ravishda moddiy va ideal modellashtirishni ajratish mumkin.

Moddiy (jismoniy) modellashtirish deb shunday modellashtirishga aytiladiki, bunda haqiqiy ob'ektga kattalashtirilgan yoki kichraytirilgan nusxa qarama-qarshi bo‘lib, o‘rganilgan xususiyatlar o‘xshashlik nazariyasi yordamida ob'ektga o‘tkaziladi.

Ideal modellashtirish - bu modellashtirish, unda haqiqiy ob'ektga uning so‘zlar ko‘rinishidagi ifodasi, grafika, jadvallar, matematik fbodalar shaklidagi tasvirlanishi qarama – qarshi qo‘yiladi .

Ideal modellashtirishda asosiy bo‘lib matematik modellashtirish hisoblanadi.

Ilm-fanda, muxandislik, tashkiliy, iqtisodiy ob'ektlar va tizimlarni tadqiq qilishda va umuman inson hayotida modellashtirishning roli juda katta. Aytish mumkinki: har qanday ob'ekt, tizim, jarayon, hodisani bilish mohiyatan uning (uning) modelini yaratishga olib keladi.

Matematik modelning talqinini shunday berish mumkin - matematik model-bu modellashtirilgan ob'ekt yoki hodisaning kirish va chiqish ma'lumotlari o‘rtasidagi shakliy bog‘liqlikni aniqlaydigan matematik iboralar to‘plamidir [8].

Haqiqiy tizimning matematik modeli bu tizimni matematik usullar bilan o‘rganishga imkon beradigan rasmiylashtirilgan tavsifidir. Odatda u tizim holatlarining xususiyatlarini uning parametrlariga, kirish signallariga, boshlang‘ich va chegara shartlariga, vaqtga va boshqalarga qarab belgilaydigan munosabatlar to‘plamiga (tenglamalar, tengsizliklar, mantiqiy sharoitlar, formulalar va boshqalar) qarab aniqlash mumkin. Mazmunli tavsif jarayonning nazariy asoslarini, tizimda yuzaga keladigan elementar hodisalarning fizik tabiati va miqdoriy xususiyatlari, ular o‘rtasidagi o‘zaro ta'sir darajasi va tabiati, ma'lum bir hodisaning ahamiyati va boshqalar to‘g‘risida mavjud ma'lumotlarni o‘rganish asosida tuziladi. Mazmunli tavsif haqiqiy tizimning formallashtirilgan sxemasini tuzishni osonlashtiradi, bu uni eng oddiy elementlarga ajratishga imkon beradi. Ushbu elementlarda sodir bo‘ladigan jarayonlar, ular orasidagi munosabatlar kabi, soddalashtirilgan. Bu haqiqiy tizimning matematik modelini yaratishga imkon beradi, buning uchun jadvallar yoki grafikalar ko‘rinishidagi barcha mavjud ma'lumotlar tegishli matematik ifodalar shaklida yoziladi.

1. Modellarni qurish tamoyillariga ko‘ra ular analitik va imitatsion modellarga bo‘linadi.

Analitik - bu haqiqiy ob'ektlar yoki tizimlarning ishlash jarayonlari aniq funktsional bog‘liqliklar shaklida yozilgan matematik modellardir. Biroq, ushbu bog‘liqliklarni (differentsial va integral tenglamalar, tenglamalar tizimlari) faqat nisbatan oddiy tizimlar va hodisalar uchun olish mumkin.

Hodisalar murakkab va xilma-xil bo‘lganda, tadqiqotchi ularni soddalashtirishga o‘tishi kerak. Natijada, analitik matematik model haqiqiy tizim yoki jarayonning taqribiy ko‘rinishiga aylanadi. Agar shunga qaramay, murakkab tizimlar uchun modelni yaratish mumkin bo‘lsa ham, ko‘pincha uni o‘rganish qiyin hal qilinadigan muammoga aylanadi. Shuning uchun bunday hollarda tadqiqotchilar imitatsiya modellarini yaratishga majbur bo‘ladilar.

Imitatsiya - bu ma'lum bir davrda real ob'ektlar, jarayonlar va tizimlarning hatti-harakatlarini taqlid qiladigan matematik modellar va ularning mantiqiy tuzilishi va vaqt o‘tishi ketma-ketligini saqlab qolgan holda jarayon yoki tizimni tashkil etadigan elementar hodisalarni tadqid qilishdir.

Imitatsiya modellari tizimning hatti-harakatlarini oldindan hisoblash yoki bashorat qilishga imkon bermaydi, balki berilgan dastlabki ma'lumotlar asosida matematik modelda hisoblash tajribasini o‘tkazishga imkon beradi. Shuning uchun informatika fanida bunday ta'rif ham mavjud:

imitatsiya modellari-bu ma'lum bir davrda real ob'ektlar, jarayonlar yoki tizimlarning hatti-harakatlarini tadqid qiluvchi matematik modellar bilan kompyuterda o‘tkaziladigan hisoblash tajribalari.

2. Modellashtirish maqsadlariga ko‘ra matematik modellar tavsiflovchi, optimallashtirish, ko‘p mezonli va o‘yin modellariga bo‘linadi. Deskriptiv (tavsiflovchi) - bu faqat ob'ektlar va hodisalarni tasvirlaydigan va ular haqidagi ma'lumotlarni yozib oladigan modellar. Masalan, quyosh tizimining modeli undagi sayyoralarning joylashishini va ularning orbitasini, quyosh tizimiga kirib kelgan kometaning harakat modelini aniqlaydi, uning parvoz yo‘lini, yerdan qancha masofani bosib o‘tishini va hokazolarni taxmin qilishga imkon beradi.

Optimallashtiruvchi modellar deb shunday modellarga aytiladiki, ularning parametrlari o‘zgarishi modellashtirish natijasiga ta’sir qiladi. Bu modellar muayyan shartlarga rioya qilgan holda muammoning maqbul (har qanday ma'noda eng yaxshi) echimini topishga xizmat qiladi. Masalan, ishlab chiqaruvchilardan iste'molchilarga mahsulotlarni tashish modeli ularning narxi minimal bo‘lishi uchun transport yo‘nalishini tanlashga (optimallashtirishga) imkon beradi.

Jarayonni bir vaqtning o‘zida bir nechta parametrlar bo‘yicha optimallashtirishga imkon beradigan modellar ko‘p kriteriyali modellar deb ataladi, bunday modellarda optimallashtirish maqsadlari bir-biriga ziddiyatli bo‘lishi ham mumkin, masalan, oilaning ovqatlanish modeli foydali, kaloriya miqdori va uni sotib olish xarajatlarining minimalligi kabi mezonlarga javob berishi kerak;

O‘yin modellari deb matematik nazariyasida o‘yin deb ataladigan ziddiyatli vaziyatda raqiblarning strategiyasini belgilaydigan modellarga aytiladi. Karta, sport o‘yinlari, harbiy janglar modellari o‘yin modellariga tegishli. Ular o‘yinchilarning taktikasi va strategiyasini modellashtirishga imkon beradi.

Analitik modellar - bu ob'ekt o‘zgaruvchilari o‘rtasidagi munosabatlarni differentsial, algebraik yoki boshqa har qanday matematik tenglamalar tizimi sifatida tasniflash vositasidir. Bunday modellar odatda fizik qonunlar asosida olinadi. Analitik modellardan foydalanish ko‘pincha kompyuterdan foydalanmasdan turib ham ob'ektning asosiy xususiyatlarini o‘rganishga imkon beradi.

Strukturaviy model tizimdagi qismlarning shakli, joylashuvi, ularning o‘zaro bog‘liqligi to‘g‘risida umumiy fikr beradigan blok-diagrramalar, tizim va atrof-muhit o‘rtasida aloqalar to‘plami kabidir.

Eng oddiy holatda, strukturaviy matematik model yordamida o‘rganilayotgan ob'ektning hatti-harakatlarini tavsiflovchi tenglamalar tuzilishi beriladi.

Strukturaviy modellarning variantlari sifatida grafiklar, tarkibiy va funktsional sxemalar, diagrammalar va boshqalarni ko‘rsatish mumkin. AHM (analog hisoblash mashinalari)strukturaviy matematik modellashtirish tamoyillari asosida ishlaydi.

Algoritmik modellar o‘rganilayotgan ob'ektning matematik modelini ifodalovchi tenglamalarni sonli yechishning bosqichma-bosqich jarayonini takrorlaydi va odatda kompyuter dasturi shaklida amalga oshiriladi. Algoritmik modellardagi tadqiqot natijalari har doim taqribiy hisoblanadi. Kompyuterlardan foydalanish algoritmik modellarni ko‘p qirrali bo‘lishiga olib keladi. Ularning yordami bilan boshqa har qanday matematik modellarni kompyuterda bajarishga olib kelish mumkin.

Deterministik modellar ba'zi tenglamalar bilan tavsiflanadi. Matematik fizika tenglamalarini boshlang‘ich va chegaraviy shartlar asosida ko‘rib chiqish deterministik modellarga misol bo‘la oladi.

Stoxastik modellar ba'zi ehtimollik qonunlari bilan tavsiflanadi.

Imitatsiya modellari ob'ektni biror-bir belgisiga qarab imitatsiya qiladi (takrorlaydi). Imitatio so‘zi lotinchadan taqlid so‘ziga mos keladi. Masalan, uni almashtirish kerak bo‘lgan joyda odamning harakatlarini qaytaradigan (taqlid qiladigan) robot. Biroq, modelni tavsiflash formalari modellashtiriladigan ob'ektdan uzoq bo‘lishi mumkin. Bunday modellarga jarayonlar yoki ob'ektlarning matematik modellari misol bo‘la oladi. Matematik modellarni taqdim etish shakli har xil formulalar, tenglamalar yoki tenglamalar tizimidir (algebraik, differentsial, integral va boshqalar), bu jarayon fizikasini, boshlang‘ich va chegara shartlarini hisobga oladi. Bir xil tenglamalar tizimi turli xil jarayonlarni tasvirlashi mumkin.

Bu matematik modellarning boshqa taqdim etish shakllariga nisbatan katta afzalligi. Matematik modelni uni qurish mumkin bo‘lgan barcha masalalarga qo‘llash mumkin.

Analog modellar - bu o‘rganilayotgan jarayonlarni boshqa fizik tabiatga ega bo‘lgan jarayonlar bilan almashtiradigan model. Ularning barchasi bir xil matematik modelga ega.

Oddiy misol - ikkita tizim, birinchisi mexanik xususiyatga ega bo‘lib, maxovik bilan bog‘langan, qovushoq tormozlovchi suyuqlikka botirilgan, aylanishni prujina va maxovik orqali uzatadigan, mexanik qurilma. Ikkinchisi tizim – bu induktiv katushka kondensator, elektr energiyasi hisoblagichi bilan bo‘g‘langan elektrik qurilma. Agar biz induktivlik, sig‘im, va qarshilikni prujina egiluvchanligi, maxovik inersiyasi va suyuqlik ishqalanishiga mos qo‘ya olsak, u holda bu tizimlar struktiraviy va funksional o‘xshash bo‘ladi, ularni differensial tenglamalar bilan tavsiflash mumkin.

Mantiqiy model - bu mantiqiy xulosalar va shartlarni tahlil qilish asosida amalga oshiriladigan amallarni tanlashning turli xil variantlarini taqdim etadigan model.

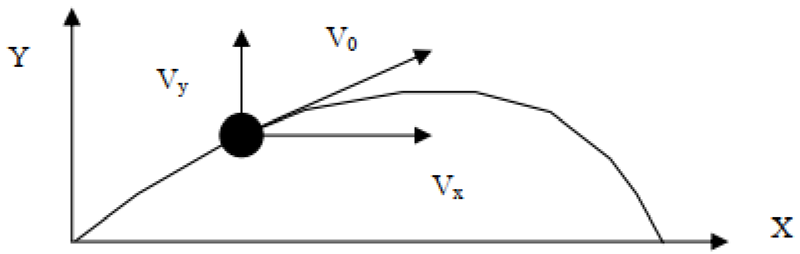
Bilimlarni taqdim etishning mantiqiy modeli predikatlar mantig‘ining xususiyatlaridan foydalangan holda yaratiladi. Predikat-bu faqat ikkita qiymatni qabul qiladigan funktsiya: chin va yolg‘on belgilari orqali ob'ektlarning xususiyatlarini yoki ular orasidagi aloqalarni ifodalash uchun mo‘ljallangan. Mantiqiy predikatlarda mulohaza atamasi qo‘llaniladi. Mulohaza-ob'ektda biron bir xususiyat mavjudligini tasdiqlaydigan yoki rad etadigan iborat.

Gorizontga qiya otilgan jism harakatining matematik modeli.

Quyidagicha mexanika muammosini ko‘rib chiqamiz (1.4-rasm). Jism biror burchak ostida dastlabki V_0 tezlik bilan otilgan bo‘lsin. Jismning harakat traektoriyasini topish va uning borib tushgan joyigacha bo‘lgan masofani hisoblash kerak.

Ushbu matematik modelni tuzish uchun quyidagicha cheklanishlar qilamiz:

- Yer bu sanoq boshi;
- erkin tushish tezlanishi g doimiy;
- Yerning egriligini e'tiborga olmaymiz;
- harakatlanayotgan jismga havo ta'sirini e'tiborga olmaymiz.



1.4-rasm. Jismning harakat trayektoriyasi.

Koordinatalar sistemasini kiritamiz. Jism otilish nuqtasini koordinatalar boshiga joylashtiramiz, x o‘qini jism otilish yo‘nalishiga, y o‘qini vertikal yuqoriga yo‘naltiramiz.

Qabul qilingan cheklanishlar fonida jism boshlang‘ich tezligining x o‘qiga proektsiyasi $V_x = V_0 \cos\alpha$ bilan, jism boshlang‘ich tezligining y o‘qiga proektsiyasi $V_y = V_0 \sin\alpha$ va jism harakatining y o‘qiga proyeksiyasi y=-g tezlanish bilan mos ravishda jismning harakat trayektoriyasi quyidagilar bilan xarakterlanadi:

$$\begin{Bmatrix} X = tV_x = tV_0 \cos\alpha \\ Y = tV_y - \dfrac{gt^2}{2} = tV_0 \sin\alpha - \dfrac{gt^2}{2} \end{Bmatrix} \qquad (1.1)$$

(1.1)ning birinchi tenglamasidan X(t) kordinata orqali t vaqtni belgilaymiz:

$$t = \frac{X}{V_0 \cos\alpha}$$

Y(t) tenglama :

$$Y=\frac{XV_0\sin\alpha}{V_0\cos\alpha}-\frac{g}{2}\left(\frac{X}{V_o\cos\alpha}\right)^2=Xtg\alpha-\frac{g}{2}\left(\frac{X}{V_o\cos\alpha}\right)^2 \qquad (1.2)$$

1.1 sistemaning ikkinchi tenglamasiga y=0 ni qo‘yganda, jismning yerga tushish vaqtini aniqlaymiz:

$$y=x\cdot tg\alpha-\frac{g}{2}\left(\frac{x}{\vartheta_o\cos\alpha}\right)^2$$

$$V_0\cdot t\cdot\sin\alpha-\frac{gt^2}{2}=0 \Leftrightarrow t\left(V_0\cdot\sin\alpha-\frac{gt}{2}\right)=0,$$

bu yerdan

$$t=\frac{2\cdot V_0\cdot\sin\alpha}{g} \qquad (1.3)$$

(1.3) formula harakat davomiyligini belgilaydi. (1.3) formulada belgilangan *t* ni sistemaning 1-tenglamasiga (1.1) qo‘yib olamiz:

$$S=V_0\cdot\cos\alpha\cdot\frac{2V_0\cdot\sin\alpha}{g}=\frac{2V_0^2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{g},$$

bu yerda almashtirishlar bajarsak

$$S=\frac{V_0^2\sin 2\alpha}{g} \qquad (1.4)$$

(1.4) formula jismning otilgandan keyin kelib tushgan nuqtasini, ya'ni jismning gorizontal ravishda uchadigan masofasini belgilaydi.

Jismning maksimal yuqori ko‘tarilish balandligini aniqlash uchun (1.1) tizimning ikkinchi tenglamasidan hosila olamiz:

$$V_0\cdot\sin\alpha-gt=0 \Rightarrow t=\frac{V_0\cdot\sin\alpha}{g} \qquad (1.5)$$

Bu vaqtda tosh eng yuqori balandlikka ko‘tariladi.

Matematik modellashtirish metodologiya bo‘lib, matematika, fizika va biologiya kabi ilmiy fanlarda vosita sifatida ishlatiladi va ular bilan raqobatlashmaydi. Ijodiy faoliyatning deyarli barcha sohalarida tadqiqotchilardan tortib harbiy sohalarga qadar modellashtirish qo‘llaniladi. Matematik modellashtirish quyidagi talablarning bajarilishi bilan ta'minlanishi kerak: tajribaga asoslangan asosiy tushunchalar va taxminlarni aniq shakllantirish (апостериорный), qo‘llanilgan modellarning adekvatligini tahlil qilish, hisoblash algoritmlarining kafolatlangan aniqligi va boshqalar. Rasmiylashtirilishi qiyin bo‘lgan ob'ektlarni modellashtirishda matematik va matematik bo‘lmagan atamalarning farqlanishini, shuningdek ob'ektlarni o‘rganishda mavjud matematik apparatlardan foydalanish xususiyatlarini qo‘shimcha ravishda hisobga olish kerak.

1.5-rasm. Modellarning xususiyatlari.

Matematik modellarga qo‘yiladigan asosiy talablar adekvatlik, universallik va samaradorlik talablaridir (1.5-rasm).

Adekvatlik. Agar model berilgan xususiyatlarni maqbul aniqlik bilan aks ettirsa, bunday model adekvat deb hisoblanadi. Adekvatlik model va ob'ektning chiqish parametrlari qiymatlarining mos kelish darajasi sifatida aniqlanadi. Modelning aniqligi ob'ekt ishlashining turli sharoitlarida farq qiladi. Ushbu shartlar tashqi parametrlar bilan tavsiflanadi. Tashqi parametrlar fazosida oldindan berilgan mumkin bo‘lgan xatolikdan oshmaydigan modelning adekvatligi sohasini ajratish mumkin. Modellarning adekvatligi sohasini aniqlash murakkab protsedura bo‘lib, u tashqi parametrlar fazosi o‘lchovi oshishi bilan oshib boradi.

Universallik. Matematik model nafaqat alohida olingan hodisa yoki ob’yektlar, shuning bilan yetarlicha keng miqyosdagi masalalarni ham yechishga qodir bo‘lishi kerak.

Iqtisodiy samaradorlik. Model uni amalga oshirish uchun hisoblash resurslari xarajatlari — mashina vaqti va xotira hajmi bilan tavsiflanadi.

Oddiylik. Hisoblashda kamroq omillarni hisobga olgan holda, shuning bilan birga kerakli aniqlikda natijaga erishish.

Potensiallik (bashorat qilish). Modelni qo‘llash orqali o‘rganilayotgan ob'ekt haqida yangi bilimlarni olish imkoniyati. Muammoni hal qilish natijalarining yetarlicha aniqligi, modelning ishonchliligi. Modelni tubdan o‘zgartirmasdan takomillashtirish qobiliyati. Hisoblash topshirig‘ini bajarishda dastlabki ma'lumotlar shakllarining soddaligi va ularni to‘ldirish. Ishlab chiqilayotgan model yordamida keng ko‘lamli vazifalarning hal qilinishi.

Matematik modellarni qurish usullari.

Modellarni qurishda ikki xil yondashuv qo‘llaniladi:

- deduktiv (umumiydan xususiyga);

- induktiv (xususiydan umumiyga).

Birinchi yondashuvda ma’lum fundamental modelning xususiy holi ko‘rib chiqiladi. Bunda, jarayonga bo‘lgan yondashuvlar asosida, ma’lum model modellashtirilayotgan ob'ekt sharoitlariga moslashtiriladi. Masalan, Nyutonning ma'lum qonuni asosida jismning erkin tushish modelini qurish va kichik vaqt oralig‘ida tekis tezlanuvchan harakat modelini qabul qilish mumkin.

Ikkinchi usul gipotezani oldinga surgan holda murakkab ob’ekt dekompozitsiyasi, tahlil qilish, so‘ngra sintezni o‘z ichiga oladi. Bu yerda sistemani o‘zini tutishi haqidagi qarashlar asosida modellashtirishda keng qo‘llaniladigan o‘xshashlik tushunchasi keng qo‘llaniladi. Masalan, shu usul bilan atom tuzilishini modellashtirish amalga oshirilgan. Bunda Tomson, Rezerford, Bor modellarini eslash kifoya.

Matematik modellarni ishlab chiqishda quyidagi asosiy yondashuvlar mavjud :

1. **Tabiatning asosiy qonunlari.** Ushbu tamoyil eng keng tarqalgan bo‘lib, muayyan vaziyatga nisbatan tabiatning asosiy qonunlaridan foydalanishdan iborat. Qoida tariqasida, bunday qonunlar tan olingan, tajriba bilan tasdiqlangan va ilmiy va texnik yutuqlarning asosidir. Shu munosabat bilan ularning qo‘shimcha asoslanishiga hojat yo‘q. Natijada, endi eng muhimi ma'lum bir muammoni hal qilish uchun qaysi bir qonunni tanlashda bo‘lib qoladi.

2. **Variatsion tamoyillar(prinsiplar).** Ushbu yndashuv qamrovligi va universalligi bo‘yicha birinchi yondashuv kabi ahamiyatga ega va o‘rganilayotgan ob'ekt uchun variatsion printsiplarni qo‘llashdan iborat. Bunday holda, optimallik variantlarini tanlash ma'lum shartlar asosida amalga oshiriladi. Ma’lum sinf hodisalari uchun olingan variatsion tamoyillar mos matematik modellarni yaratishga imkon beradi. Ushbu yondashuv jarayonning konkret tabiatini hisobga olmaslikka imkon beradi.

3. **Modellarni qurishda analogiyalardan foydalanish.** Analogiya usuli jarayon uchun asosiy qonunlar yoki variatsion tamoyillarni qo‘llash mumkin bo‘lmaganda qo‘llaniladi. Buning sababi shundaki, bugungi kunda bunday jarayonlar uchun qonunlar mavjud bo‘lmasligi mumkin va shuning uchun ularni matematik jihatdan tavsiflash mumkin emas. Masalan, populyatsiyalar dinamikasi uchun eng oddiy model (Maltus modeli), bu orqali radioaktiv parchalanish hodisasini tushuntirish mumkin.

4. **Modellarni olish uchun ierarxik yondashuv**. Barcha muhim omillarni hisobga olgan holda matematik modellarni qurish har doim ham qulay va o‘zini oqlamasligi mumkin. Bu holda "oddiydan murakkabgacha" yondashuvidan foydalanish afzalroqdir. Ushbu yondashuv bilan avvalgi modellarni xususiy holatlar sifatida umumlashtiradigan to‘liq modellar ierarxiyasi yaratiladi. Pastki darajadagi matematik modellar juda oddiy, tipik, birlashtirish imkoni bo‘lishi mumkin, bunday modellar to‘plamidan foydalanish foydadan xoli emas. Murakkab tizimning umumiy modelini ierarxik ravishda tuzishda butun tizimni optimallashtirish masalasi ushbu modelni bir qator har xil darajadagi optimallashtirish masalalariga bo‘linadi. Bunday holda, optimallashtirishning umumiy mezoni har bir daraja mezonlariga bo‘linadi. Shunday qilib, katta o‘lchamli vazifani bir qator kichik o‘lchamli vazifalarga olib kelish mumkin. Bunda elementlar va darajalarning o‘zaro ta'sirini hisobga olish kerak bo‘ladi.

5. **Blokli printsip**. Matematik modellarni qurishda blokli printsipi keng qo‘llaniladi. Model ko‘rib chiqilayotgan jarayonning u yoki bu tomonini aks ettiruvchi alohida mantiqiy tugallangan bloklardan quriladi. Modellarni qurishning blokli printsipi quyidagilarga imkon beradi: matematik modelni qurishning umumiy masalasini alohida kichik masalalarga ajratish va shu bilan uni yechimini olishni soddalashtirish, shuningdek ishlab chiqilgan bloklarni boshqa modellarda ishlatish, individual bloklarni modernizatsiya qilish va ularni yangilariga almashtirish. Modelning umumiy matematik tavsifi-bu alohida bloklarning matematik tavsiflari to‘plami. Matematik modellarni qurishning blokli printsipini qo‘llash ko‘p hollarda jarayonlarni masshtablash muammosini hal qilishga imkon beradi.

Asosan, matematik modelning har bir bloki matematik tavsifning turli darajadagi tafsilotlariga ega bo‘lishi mumkin. Modelning barcha bloklarining kirish va chiqish o‘zgaruvchilari o‘zaro muvofiq bo‘lishi juda muhim, bu butun jarayonning matematik modeli tenglamalarining yopiq tizimini olishni ta'minlaydi. Ideal holda, har bir blokning matematik tavsifi parametrlari faqat moddalarning fizik-kimyoviy xossalari bo‘lgan tenglamalarni o‘z ichiga olishi kerak. Har bir blokning matematik tavsifida blokli printsipidan amaliy foydalanishda uning tafsilotlarining u yoki bu darajasida empirik munosabatlarni qo‘llash kerak.

Matematik modellarni qurish bosqichlari.

Matematik modellarni qurish juda qiyin jarayon bo‘lib, u moddiy va vaqt resurslarining katta xarajatlarini o‘z ichiga oladi, shuningdek, fan sohasida ham, amaliy matematika, raqamli usullar, dasturlash, zamonaviy hisoblash tizimlari kabi sohalarda ham yuqori darajadagi mutaxassislarga ehtiyoj borligini anglatadi.

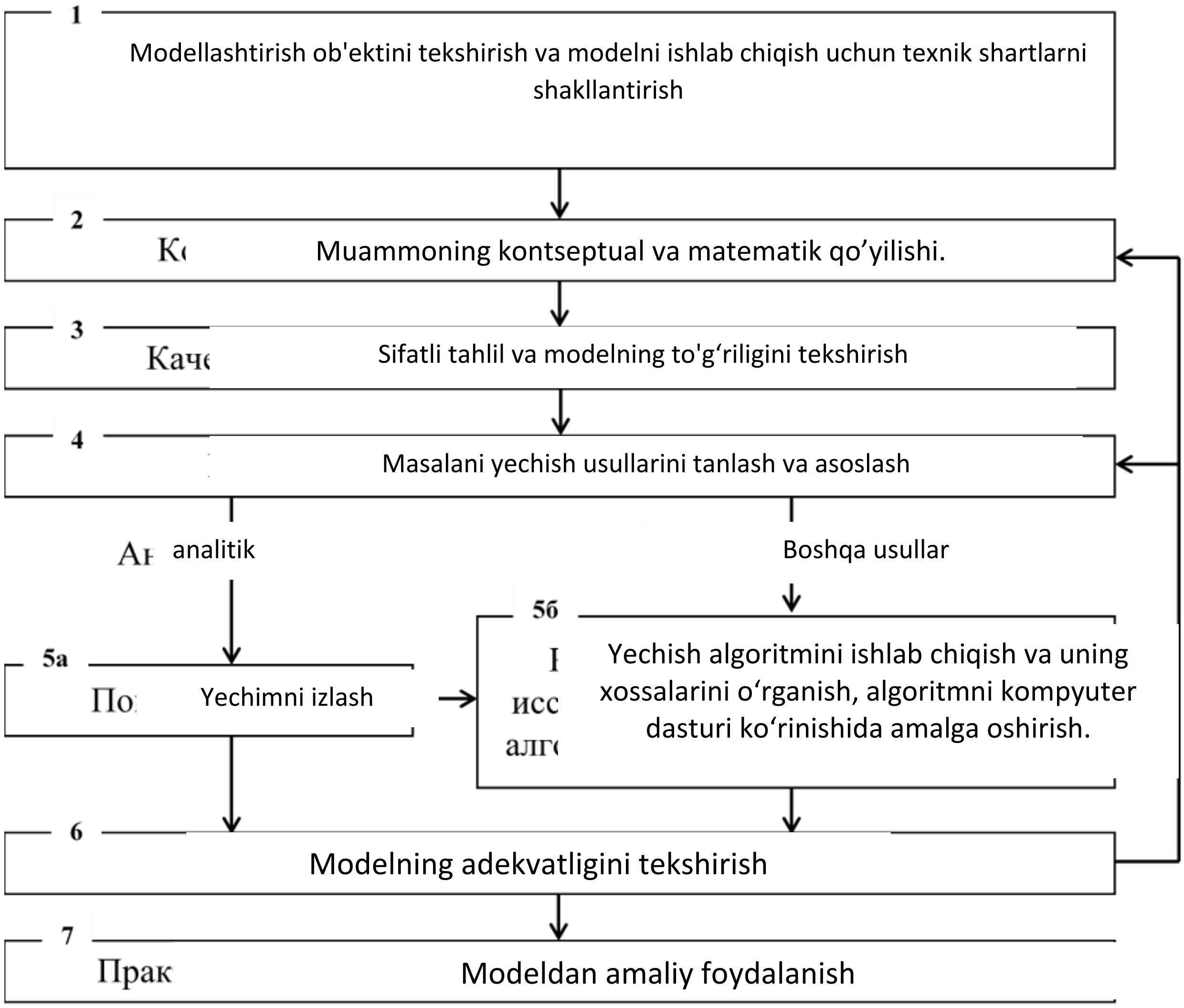
Modellarni qurish jarayonining bosqichlari orasida quyidagilarni ajratish mumkin:

1. Modellashtirish ob'ektini tekshirish va modelni ishlab chiqish uchun texnik shartlarni shakllantirish. Modelni loyihalash ob'ekt yoki hodisaning og‘zaki-semantik tavsifidan boshlanadi. Ushbu bosqich ob'ektning tabiati, uni o‘rganish maqsadlari to‘g‘risidagi ma'lumotlar va ba'zi mulohazalar haqida umumiy ma'lumotlardan iborat bo‘ladi. Ushbu bosqichni predmetli modelining formulirovkasi deb ham atash mumkin. Bosqichning maqsadi modellashtirish muammosining mazmunli qo‘yilishini ta’minlash, ya'ni og‘zaki shaklda bayon etilgan modellashtirish ob'ekti haqidagi vazifalar to‘plamini yaratish.

2.**Muammoning kontseptual va matematik qo‘yilishi.** Ushbu bosqichda ob'ektni idealizatsiya qilish tugallanadi, muhim omillar va ta'sirlar aniqlanadi. Muammoning kontseptual qo‘yilishining maqsadi modellashtirish ob’yekti o‘zini tutishidan kelib chiqib asosiy masalalarni va gipotezalarni shakllantirishdan iborat. Natijada, shakllantirilgan asosiy masalalar va gipotezalar ularning hal etilishini miqdoriy tahlil qilish uchun matematik tarzda tavsiflanadi. Matematik tavsifni tuzish bosqichida ob'ektdagi asosiy hodisalar va elementlar oldindan ajratiladi va keyin ular o‘rtasida aloqalar o‘rnatiladi. Bundan tashqari, har bir tanlangan element va hodisa uchun uning ishlashini aks ettiruvchi tenglama yoziladi. Bundan tashqari, matematik tavsifda turli xil hodisalar orasidagi bog‘lanish tenglamalari qo‘shiladi. Jarayonga qarab, matematik tavsif algebraik, differentsial tenglamalar tizimi sifatida ifodalanishi mumkin. Modellashtirish ob'ektini bir ma’noda tavsiflovchi matematik tenglamalar to‘plamini olish jarayoni modellashtirish masalasining matematik qo‘yilishi deb ataladi.

*3. **Sifatli tahlil va modelning to‘g‘riligini tekshirish***. Olingan matematik munosabatlar tizimining to‘g‘riligini nazorat qilish uchun bir qator majburiy tekshiruvlar talab qilinadi:

- o‘lchov nazorati;
- buyurtmalarni boshqarish;
- bog‘lanish xususiyatini tekshirish;
- ekstremal vaziyatlarni boshqarish;
- chegara shartlarini nazorat qilish;
- fizik ma'noni saqlanishini nazorat qilish;
- matematik bog‘lanishlarni nazorat qilish.



1.6-rasm. Matematik modelni qurish bosqichlari.

"Modelning korrektligi" tushunchasi juda muhim, ayniqsa amaliy matematikada, chunki korrekt qo‘yilmagan masalalarga sonli usullarni qo‘llash mumkin emas. Matematik masalaning korrektligini aniqlash qiyin vazifadir. Matematik modelning korrektligini ta'minlash uchun barcha nazorat tekshiruvlari o‘tkazilishi kerak. Bu yerda matematik modelni yaratish bosqichi tugaydi va undan keyin "hisoblash tajribasi"ga o‘tiladi .

*4. **Masalani yechish usullarini tanlash va asoslash***. Yaratilgan model mumkin bo‘lgan har qanday usul bilan, shu jumladan o‘zaro tekshirish bilan o‘rganiladi. Hamma modellar ham nazariy yechimga ega bo‘lmaganligi sababli, so‘nggi paytlarda hisoblash usullari keng qo‘llanilmoqda. Ushbu holat ayniqsa chiziqli bo‘lmagan ob'ektlarni tahlil qilishda muhimdir, chunki bunday ob'ektlarning jarayonda o‘zini tutishi noma'lum. Masalani yechish usuliga qarab, barcha usullar quyidagilarga bo‘linadi:

- ***analitik.*** Ushbu usullar natijalarni tahlil qilish uchun qulay hisoblanadi, ammo ularni faqat nisbatan oddiy modellarga qo‘llash mumkin. Muammoning analitik echimi mavjud bo‘lganda, sonli echim deyarli qo‘llanilmaydi;

- ***algoritmik.*** Algoritmik usullar uchun kompyuter yordamida hisoblash tajribasi amalga oshiriladi. Yechish usulini tanlash va modellashtirish dasturini ishlab chiqish bosqichi mavjud usullardan eng samarali (yechimni olish tezligi va uning eng aniqligi bo‘yicha) yechish usulini tanlashni, uni yechim algoritmi shaklida amalga oshirishni nazarda tutadi.

5. **Kompyuter dasturlari shaklida yechim topish yoki algoritmni amalga oshirish.**

Turli xil tadqiqot, loyiha-konstruktorlik masalalarini yechish uchun ishlatiladigan turli xil dasturiy ta'minot tizimlarini yaratishda, asosan, odatda matematik modellar asos bo‘lib xizmat qiladi. Shu munosabat bilan modelni kompyuter dasturi shaklida amalga oshirish zarurati tug‘iladi. Ishonchli va samarali dasturiy ta'minotni ishlab chiqish jarayoni murakkabligi bo‘yicha matematik modelni yaratishning barcha oldingi bosqichlaridan kam emas. Ushbu muammoni muvaffaqiyatli hal qilish faqat zamonaviy algoritmik tillar va dasturlash texnologiyalarini yaxshi bilish, kompyuter texnologiyalari imkoniyatlari bilan tanish bo‘lish, mavjud dasturiy ta'minot, hisoblash matematikasi usullarini bilish bilan mumkin bo‘ladi.

6. **Modelning adekvatligini tekshirish**. Ushbu bosqichda modelning ob'ektga va shakllangan muammolarga muvofiqligi aniqlanadi. Bunda, maqsadga erishish uchun modelni o‘rganish har qanday usul bilan amalga oshiriladi, masalan, tajriba natijalari bilan taqqoslash yoki boshqa yondashuvlar bilan. Agar ularning yordami bilan olingan natija va tajriba natijalari haqiqatdan sezilarli darajada farq qiladigan bo‘lsa, model bekor qilinishi yoki o‘zgartirilishi kerak. Modelning

ob'ektga muvofiqligi darajasini aniqlash bosqichi yakuniy hisoblanadi. Matematik modelning haqiqiy jarayonga muvofiqligini tekshirish uchun jarayon davomida ob'ektdagi tajriba o‘lchov natijalari bir xil sharoitlarda olingan bo‘lishi kerak.

7. **Modeldan amaliy foydalanish**. Yaratilgan modelning qaysi sohada qo‘llanilishidan qat'iy nazar, modellashtirish natijalarini sifatli va miqdoriy tahlil qilish kerak, bu bizga quyidagicha imkoniyatlar beradi:

- ko‘rib chiqilayotgan ob'ektni doimiy o‘rganib borish, uning optimal xususiyatlarini aniqlab turish;
- modelning qo‘llanish sohasini belgilab turish;
- Masalani matematik ishlab chiqish bosqichida qabul qilingan farazlarning to‘g‘riligini tekshirish, kerakli aniqlikni saqlagan holda, uning aniqligini saqlagan holda effektivligini oshirish maqsadida uni soddalashtirish imkoniyatini baholash;
- kelajakda modelni qaysi yo‘nalishda rivojlantirish kerakligini aniqlab borish.

Matematik modelning o‘rganilayotgan ob'ektga muvofiqligi

Matematik modelning adekvatligi deganda ishlab chiqilgan model bo‘yicha olingan natijalarning tajriba yoki test-sinov natijalari ma'lumotlariga muvofiqligi darajasi tushuniladi. Modelning adekvatligini tekshirishga o‘tishdan oldin, modelning barcha algoritmlari va dasturlarining to‘g‘ri kompleks ishlashiga ishonch hosil qilish, barcha individual algoritmlarni mustaqil sinovdan o‘tkazish kerak (masalan, ishlatilgan sonli usulni amalga oshiradigan dasturiy ta'minot modullarining ishlash sifatini baholash).

Modelning adekvatligini tekshirish ikkita maqsadni ko‘zlaydi:

1) kontseptual va matematik ishlab chiqish bosqichlarida shakllangan farazlar to‘plamining korrektligiga ishonch hosil qilish. Gipotezani tekshirishga o‘tish faqat ishlatilgan echim usullarini tekshirgandan so‘ng, kompleks otladka va dasturiy ta'minot bilan bog‘liq barcha xatolar va nizolarni bartaraf etgandan so‘ng amalga oshirilishi kerak;

2) olingan natijalarning aniqligi texnik topshiriqda ko‘rsatilgan aniqlikka mos kelishini aniqlash kerak.

Ishlab chiqilgan matematik modelni tekshirish haqiqiy ob'ekt haqidagi mavjud tajribaviy ma'lumotlar yoki ilgari yaratilgan va yaxshi tasdiqlangan boshqa modellarning natijalari bilan taqqoslash orqali amalga oshiriladi. Birinchi holda, ular tajriba bilan taqqoslash orqali tekshirish haqida, ikkinchisida — test-sinov masalasini yechish natijalari bilan taqqoslash haqida amalga oshiriladi.

Modellashtirishning aniqligi masalasini hal qilish modelga qo‘yiladigan talablarga va uning maqsadiga bog‘liq. Bunday holda, tajribaviy natijalarni olishning aniqligi yoki test vazifalarini belgilashning o‘ziga xos xususiyatlari hisobga olinishi kerak. Baholash va test hisob-kitoblarni amalga oshirish uchun mo‘ljallangan modellarda 10-15% aniqlik qoniqarli deb hisoblanadi. Boshqarish va tekshirish tizimlarida ishlatiladigan modellarda talab qilinadigan aniqlik 1-2% yoki undan ham ko‘proq bo‘lishi mumkin.

Qoida tariqasida taqqoslash natijalarining sifat va miqdoriy mosligi farqlanadi. Sifatli taqqoslashda o‘rganilayotgan parametrlarni taqsimlashda faqat ba'zi xarakterli xususiyatlarning mos kelishi talab qilinadi (masalan, ekstremal nuqtalarning mavjudligi, parametrning ijobiy yoki salbiy qiymati, uning ko‘payishi yoki kamayishi va boshqalar). Aslida, sifatli taqqoslash bilan parametrlarni taqsimlash funktsiyasining faqat bir turi (pasayish yoki o‘sish, bitta ekstremal yoki bir nechta) mos kelishi baholanadi. Miqdoriy taqqoslash masalasi natijalarning sifat jihatidan muvofiqligi haqidagi savolga qoniqarli javob berilgandan keyingina qo‘yilishi mumkin. Miqdoriy taqqoslashda animatsiya uchun dastlabki ma'lumotlarning aniqligi va taqqoslanadigan parametrlarning tegishli qiymatlari katta ahamiyatga ega bo‘lishi kerak.

Matematik model hech qachon ko‘rib chiqilayotgan ob'ekt bilan bir xil emas, uning barcha xususiyatlari va xususiyatlarini bera olmaydi. Bu ob'ektning taqribiy tavsifi va har doim taqribiy xarakterga ega. Muvofiqlik aniqligi muvofiqlik darajasi, model va ob'ektning adekvatligi bilan belgilanadi.

NAZORAT SAVOLLARI

1. Matematik modelning adekvatligi nimani anglatadi?
2. Matematik modelning ko‘p qirraliligi nimani anglatadi?
3. Matematik modelni qurishning deduktiv va induktiv usullari o‘rtasidagi farqlar qanday?
4. Matematik modellarni yaratishda qanday yondashuvlar mavjud?
5. Matematik modellarni yaratishning asosiy bosqichlarini sanab o‘ting.

2-Mavzu: JARAYONLARNI MODELLASHTIRISHDA TABIATNING SAQLANISH QONUNLARIDAN FOYDALANISH.

Reja

1. Populyasiya soni dinamikasi.
2. Reklama samaradorligi.
3. Fan rivojlanishi.
4. SHakar inverciyasi.
5. Issiqlik tarqalishi.
6. Vertikal tashlangan jismning harakati.
7. Biosintez modeli.

Hozirgi zamon fani va texnikasida ko‘pincha vaqt mobaynida o‘tayotgan jarayonlarni tadqiqot qilishga to‘g‘ri keladi. Bu jarayonlar turli xarakterga ega bo‘lishi mumkin: fizik (jism, suyuklik, gaz xarakati, temperatura, bosim o‘zgarishi va boshqalar), kimyoviy (reaksiya vaqtida biror modda miqdorining o‘zgarishi), biologik (raqobatdagi populyasiyalar sonining o‘zgarishi va boshqalar kabi). Bunday jarayonlarni o‘rganishda u yoki bu evolyusion jarayonni tavsiflovchi miqdorlar orasidagi bog‘lanishni bevosita o‘rnatish har vaqt ham mumkin bo‘lavermaydi. Lekin ko‘p hollarda miqdorlar (funksiyalar) va ularning boshqa (erkli) o‘zgaruvchi miqdorlarga nisbatan o‘zgarishi tezliklari orasidagi bog‘lanishni o‘rnatish, ya’ni noma’lum funksiyalar hosila belgisi ostida qatnashuvchi tenglamalarnn topish mumkin bo‘ladi. Bunday tenglamalarni differensial tenglamalar deyiladi. Bunday jarayonlarni tadqikot qilishning birinchi bosqichi ko‘pincha jarayonni tavsiflovchi differensial tenglamani tuzishdan iborat, ikkinchi bosqichi esa bu tenglamaning echimini izlashdan iborat.

Differensial tenglamalarni tuzish uchun to‘la-to‘kis qoidalar yo‘k. Ko‘p hollarda oddiy differensial tenglamalar nazariyasini ko‘llab masalalarni echish usuli quyidagi amallarni bajarishga keltiriladi:

1. Masala shartlarini batafsil tahlil qilish va uning moxiyatini izohlovchi chizmani tuzish.

2. Tekshirilayotgan jarayonning differensial tenglamasini tuzish.

3. Tuzilgan differensial tenglamani integrallash va bu tenglamaning umumiy echimini aniqlash.

4. Berilgan boshlang‘ich shartlar asosida masalaning xususiy echimini aniqlash.

5. Zarurat bo‘lishiga qarab, masalaning qo‘shimcha shartlaridan foydalanib, yordamchi parametrlarni (masalan: proporsionallik koeffitsienti va boshqalarni) aniqlash.

6. Qaralayotgan jarayonning umumiy qonunini keltirib chiqarish va izlanayotgan miqdorlarni sonli aniqlash.

7. Javobni tahlil qilish va masalaning dastlabki holatini tekshirish.

Masala xarakteriga bog‘liq holda bu tavsiyalardan ba’zilari qatnashmasligi ham mumkin.

Quyida biz oddiy differensial tenglamalarga keltiriladigan masalalardan ba’zilarini ko‘rib chiqamiz.

1. Populyasiya soni dinamikasi. Biologiyada (populyasiyalar ekologiyasida) agar populyasiya ajratilgan, ozuqa resurslari chegaralanmagan, ko‘payish tezligi balog‘atdagi jonzodlar miqdoriga proporsional deb hisoblansa, u holda populyasiya soni dinamikasi

$$\frac{dx}{dt} = kx \qquad (1)$$

differensial tenglama bilan tavsiflanadi, bu erda $x=x(t)$ vaqtning t momentidagi populyasiya soni, k – doimiy son. (1) tenglamaning echimi $x(t) = x(t_0)e^{k(t-t_0)}$ bo‘ladi. (1) tenglamani 1802-yil Maltus birinchi bo‘lib oldi. Bunda Maltusning adashishi shundan iboratki, bu tenglama populyasiyalarning juda tor sinfi uchun o‘rinli bo‘ladi. Maltus esa uni butun tabiat uchun universal: hatto odamlar jamiyati uchun ham universal qonun deb hisobladi. (1) tenglama qattiq modelga misol bo‘ladi.

Ekologiya tirik organizmlarning tashqi muhit bilan o‘zaro munosabatini o‘rganadi. Ko‘payish yoki turli sabablarga ko‘ra nobud bo‘lish bilan bog‘lik bo‘lgan populyasiyalarning ba’zi differensial modellarini keltiramiz.

$x(t)$ vaqtning t momentidagi populyasiya soni bo‘lsin, u holda agar vaqtning bir birligida populyasiyada tug‘iladigan jonzodlar sonini A, nobud bo‘ladiganlarining sonini V desak, etarli asos bilan x ning vaqtga bog‘liq o‘zgarish tezligini

$$\frac{dx}{dt} = A - B \qquad (2)$$

formula bilan berish mumkin. Endi masala A va V ning x ga bog‘liqligini tavsiflashdan iborat.

a) eng sodda hol $A=ax$, $V=bx$ (3) dan iborat, bu erda a va b - vaqtning bir birligida tug‘ilish va nobud bo‘lish koeffitsientlari. (3) ni hisobga olinsa, (2) ni

$$\frac{dx}{dt} = (a-b)x \qquad (4)$$

ko‘rinishda yozish mumkin. $x(t_0)=x_0$ bo‘lsa, echim

$$x(t) = x_0 e^{(a-b)(t-t_0)}$$

dan iborat bo‘ladi;

b) $A=ax$, $B=bx^2$ hol ham uchraydi. Bunda

$$\frac{dx}{dt} = ax - bx^2 \tag{5}$$

tenglama hosil bo‘lib, agar $x(t_0)=x_0$ bo‘lsa, echim

$$x(t) = \frac{x_0 \frac{a}{b}}{x_0 + \left(\frac{a}{b} - x_0\right) e^{-a(t-t_0)}}$$

dan iborat bo‘ladi. (5) tenglama 1845-yilda olingan Ferxyulst-Perl tenglamasidan iborat bo‘lib, unda populyasiyadagi ichki kurash hisobga olinadi. Bu Maltusning (1) tenglamasiga nisbatan populyasiyaning rivojlanishini aniqroq tavsiflaydi. (5) model’, odatda, logistik model, uning echimini logistik egri chiziq tenglamasi deb yuritiladi.

Logistik model’ boshqa jarayonlarni ham yaxshi tavsiflaydi.

2. Reklama samaradorligi. Reklama samaradorligini o‘rganish masalasida vaqtning t momentidagi sotilayotgan mahsulot haqida xabardor bo‘lgan potensial xaridorlar soni $x(t)$ uchun

$$\frac{dx}{dt} = kx(N - x)$$

differensial tenglama hosil bo‘ladi, bu erda N - barcha potensial xaridorlar, x - xabardorlar soni, N-x - bexabarlar soni.

$\frac{dx}{dt}$ xabardorlar soni o‘zgarishi tezligi, bu x ga va N-x ga katta ishonch bilan proporsional deb hisoblanadi, k>0 proporsionallik koeffitsienti.

3. Fan rivojlanishi. Fan rivojlanishining ikki modelini keltiraylik.

a) eng sodda modelda chop etilish sonining o‘sishi tezligi chop etilganlar soniga proporsional deb faraz qilamiz:

$$\frac{dy}{dt} = ky, \ y = y(t),$$

bu erda y – t momentdagi chop etilgan asarlar soni. Umumiy echimi

$y = Ce^{kt}$ dan iborat.

Boshlang‘ich momentdagi chop etilishi sonini $y(t_0)$ desak, echim $y(t)=y(t_0)e^{k(t-t_0)}$ bo‘ladi. $k>0$ da $t\to\infty$ da $y\to\infty$ bo‘ladi.

Bu qattiq model’, masalan, 1700-1950-yillardagi fan rivojlanishiga (ilmiy maqolalar soni bilan o‘lchanganda) qo‘llanilishi mumkin. Fanning bunday eksponensial o‘sishining navbatdagi asrdagi davomi olimlar sonining dunyo aholisining yarmigacha etib qolishiga tez olib kelar edi [2];

b) har qanday ilmiy yo‘nalish uchun to‘yinish (mazmunga boylik, tormozlanish) bosqichi keladi. Bu holda

$$\frac{dy}{dt}=ky(b-y)$$

tenglamani olish mumkin, bu erda *k*, *b* o‘zgarmaslar. $y\to b$ bo‘lsa, $b-y\to 0$ bo‘ladi va demak, $\frac{dy}{dt}\to 0$, ya’ni *u* ning o‘sishi to‘xtaydi.

4. SHakar inverciyasi. Eritmadagi shakarning dastlabki miqdori *a*, *t* vaqt ichida inversiyalangan (almashilgan) shakar miqdori *x*, ya’ni vaqtning *t* momentida eritmada *a*-*x* miqdorda shakar qolgan bo‘lsin. *x* ning *t* ga funksional bog‘lanishini topish talab qilingan bo‘lsin. Bu jarayonga kimyoviy reaksiyalar nazariyasining asosiy qonunlaridan biri bo‘lgan massalar ta’siri qonunini tatbiq qilamiz. Bu qonunga muvofiq doimiy temperaturada vaqtning bir birligida inversiyalangan shakar miqdori (shakar inversiyasi tezligi) eritmadagi shakar miqdoriga to‘g‘ri proporsional bo‘ladi, ya’ni $\frac{dx}{dt}$ tezlik *a*-*x* miqdorga to‘g‘ri proporsional bo‘ladi. Bundan

$$\frac{dx}{dt}=k(a-x) \tag{1}$$

tenglama hosil bo‘ladi. Kimyoviy qonun matematik model ko‘rinishini oldi. (1) ni echib, $x=a-ce^{-kt}$ umumiy echimni topamiz. Bundagi *c* ni *x*(0)=0 ko‘rinishidagi shartdan topamiz. Demak, t=0 da x=0 ekanidan $c=a$ kelib chiqadi. Natijada $x = a - ae^{-kt}$ izlangan funksional bog'lanishni olamiz. SHakar inversiyasi tezligi

$$v = \frac{dx}{dt} ake^{-kt} \qquad (2)$$

ko'rinishida topamiz. Reaksiya tezligi v uchun (1) dan $v = k(a-x)$ (3) ifodani olamiz. Reaksiya tezligi v (2) da jarayon davom etishi vaqti t orqali, (3) da esa inversiyalangan modda miqdori x orqali ifodalanmoqda.

5. Issiqlik tarqalishi. Dastlabki momentdagi temperaturasi $x(0) = x_0$ bo'lgan jism temperaturasi davomiy a ga teng muhitga joylandi.

Jismning vaqtning t momentidagi temperaturasi $x(t)$ uchun ifoda topish talab qilinadi. Masalani echish uchun issiqlik tarqalishi qonunini tatbiq etamiz. Bu qonunga binoan jism temperaturasi o'zgarishi tezligi jism temperaturasi va muhit temperaturasi orasidagi ayirmaga proporsional bo'ladi, ya'ni

$$\frac{dx}{dt} = -k(x-a)$$

bu erda $x = x(t)$, k – musbat proporsionallik koeffitsienti. Bu o'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamani integrallab,

$$x = a - ce^{-kt}$$

topiladi. $x(0) = x_0$ shartdan $x_0 = a - c$ yoki $c = a - x_0$ va

$$x = a - (a - x_0)e^{-kt}$$

kelib chiqadi. Agar $x_0 < a$ bo'lsa, u holda $x(t)$ o'sadi, jism isiydi. Agar $x_0 > a$ bo'lsa, $x(t)$ kamayadi, jism soviydi. Ikkala holda ham t o'sishi bilan $x(t)$ miqdor a ga intiladi.

6. Vertikal tashlangan jismning harakati. m massaga ega bo'lgan jism biror balandlikdan pastga vertikal holda tashdanadi. Jismga og'irlik kuchi va tezlikka proporsional bo'lgan havo qarshiligining tormozlovchi kuchi ta'sir qiladi. Tezlikning t vaqtga bog'liq holda o'zgarish qonunini aniqlash talab qilinadi.

Jismning t momentdagi tezligini $v(t)$, og‘irlik kuchini F_1, havo qarshiligi kuchini F_2, jismga harakat yo‘nalishida ta’sir qiluvchi kuchni F bilan belgilaymiz. U holda $F = F_1 + F_2$ bo‘ladi. Ma’lumki, $F_1 = mg$, shartga ko‘ra $F_2 = -kv$ (k – proporsionallik koeffitsienti), Nyutonning 2-qonunidan

$$F = m\frac{dv}{dt}.$$

Bu erda $\frac{dv}{dt}$ – harakatdagi jismning tezlanishi. Demak

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv$$

differensial tenglamaga ega bo‘lamiz. Oxirgi tenglamani

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m}v + g$$

ko‘rinishda yozib, uning

$$v = \frac{mg}{k} + ce^{-\frac{k}{m}t}$$

echimini topish mumkin.

Agar jism harakatni nolga teng tezlik bilan boshlasa, ya’ni $v\left(0\right) = 0$ bo‘lsa, u holda $c = \frac{mg}{k}$ va $v = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$

izlangan qonun kelib chiqadi.

7. Biosintez modeli. Biosintez tirik organizmlarda yoki ulardan tashqarida biokatalizatorlar – fermentlar ta’siri bilan birmuncha oddiy birikmalardan organik moddalar hosil bo‘lishi; o‘simliklar, hayvonlar va mikroorganizmlarda tinmay bo‘lib turadigan moddalar almashinuvi protsessining bir qismi. Bir hujayrali organizm ham, ko‘p hujayrali organizmlarning har bir hujayrasi ham o‘ziga kerakli moddalarni sintez qiladi. Biologik nuqtai nazardan muhim moddalarni – vitaminlar, ba’zi gormonlar, antibiotiklar, aminokislotalarni, shuningdek oqsillar va boshqa birikmalarni sanoat yo‘li bilan tayyorlashda organizmlardan tashqaridagi biosintez keng qo‘llaniladi.

1-misol. I.A.Poletaev quyidagi farazlarga (gipotezalarga) asoslangan holda taklif etgan modelni keltiramiz.

1. Etilgan o‘simlik o‘sishi jarayonida geometrik o‘xshashlikni saqlaydi. Bu etilgan o‘simlikda o‘sish bilan geometrik o‘lchovlari nisbatlari (masalan, balandligining diametriga nisbati) o‘zgarmasligini bildiradi.

2. Erkin energiyani (yoki faol moddani) o‘simlik faqat fotosintez yo‘li bilan oladi.

3. Erkin energiya fotosintezga, tirik to‘qimani qurishga (o‘sishga), tuproqdan ozuqa eritmasini olishga sarflanadi.

4. O‘rta xisobda vaqtning katta oraliqlarida o‘simlik sirt birligiga o‘zgarmas miqdorda yorug‘lik oladi va chegaralanmagan zaxiradagi zarur moddalarni yutishi mumkin .

Energiya muvozanati tenglamasini tuzamiz. O‘simlik chiziqli o‘lchovini (masalan bo‘yini) x miqdor bilan ifodalaymiz. Barglari sirti yuzasini x^2 miqdor bilan ifodalaymiz. O‘simlik hajmini x^3 miqdor bilan ifodalaymiz. Ravshanki, $x=x(t)$, bu erda t – vaqt. Muvozanat tenglamasiga kiradigan hamma miqdorlarni x orqali ifodalashga harakat qilamiz. Avvalo kelib tushadigan erkin energiya E ni x^2 ga proporsional deyish mumkin: $E = \alpha x^2$, bu erda α - proporsionallik koeffitsienti.

Endi sarflanadigan energiya uchun ifoda tuzamiz.

1^0. Fotosintezning o‘ziga sarf bo‘ladigan energiya x^2 ga proporsional bo‘ladi, bu sarfni βx^2 ko‘rinishda yozish mumkin, bu erda β - proporsionallik koeffitsienti ($\beta < \alpha$).

2^0. Ozuqani ko‘tarishga sarf hajm x^3 ga va balandlik x ga proporsional bo‘ladi. Demak, x^3 x ga ko‘paytmaga ham proporsional deb hisoblashimiz mumkin, ya’ni uni γx^4 ga teng deyishimiz mumkin, bu erda γ - proporsionallik koeffitsienti.

3^0. O‘sishga (massasining ortishiga) sarf o‘sish tezligiga proporsional bo‘ladi, o‘sish tezligi m massadan t vaqt bo‘yicha olingan hosilaga teng: $\frac{dm}{dt}$, massa esa $m=\rho x^3$, demak, o‘sishga sarfni $\delta\frac{d}{dt}\left(\rho x^3\right)$ ga teng deyish mumkin, bu erda ρ - o‘simlikning o‘rtacha zichligi.

Energiyaning saqlanish qonuniga (va bizning farazlarimizga) binoan sarflangan energiya to‘plangan energiyaga teng bo‘lishi kerak. Bundan

$$\alpha x^2=\beta x^2+3\rho\delta x^2\frac{dx}{dt}+\gamma x^4.$$

tenglamani olamiz.

Bu tenglama izlangan muvozanat tenglamasidan iborat. Bundan

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\alpha-\beta}{3\rho\delta}-\frac{\gamma}{3\rho\delta}x^2,$$

kelib chiqadi. Bu erda

$$a=\frac{\alpha-\beta}{3\rho\delta},b=\frac{\gamma}{3\rho\delta}$$

belgilash kiritsak, u holda

$$\frac{dx}{dt}=a-bx^2,\ \ a>0,\ \ b>0 \tag{1}$$

tenglama hosil bo‘ladi. O‘simlik o‘sganligidan $\frac{dx}{dt}>0$, bundan esa $x^2<\frac{a}{b}$.

(1) tenglamani echamiz,

$$\frac{dx}{a-bx^2}=dt.$$

Bu tenglamaning umumiy echimi

$$x\left(t\right)=\sqrt{\frac{a}{b}}\cdot\frac{1-e^{-2\sqrt{ab}\left(t-c\right)}}{1+e^{-2\sqrt{ab}\left(t-c\right)}}$$

ni topib, $x(t_0)=0$ boshlang‘ich shartdan $c=t_0$ va

$$x(t)=\sqrt{\frac{a}{b}}\cdot\frac{1-e^{-2\sqrt{ab}(t-t_0)}}{1+e^{-2\sqrt{ab}(t-t_0)}} \qquad (2)$$

xususiy echimni topamiz. (2) o‘simlik o‘sish chizig‘ini beradi. Buni tahlil qilsak, quyidagi xulosalarni olamiz:

1) $t\to\infty$ da $x(t)\to\sqrt{\frac{a}{b}}$;

2) $\frac{dx}{dt}>0$ endi, $\frac{d^2x}{dt^2}=-2bx<0$. Demak, chiziq o‘suvchi, qavariq bo‘ladi;

3) $x(t)\equiv\sqrt{\frac{a}{b}}$ da $\frac{dx}{dt}\equiv 0$ bo‘ladi. Bu esa keladigan barcha energiya fotosintez va ozuqani ko‘tarishga (tashishga) sarflanish holiga mos keladi. Bunda o‘simlikning o‘sishi chegaralanib barqarorlashadi, o‘smaydi.

8. Radioaktiv modda parchalanishi. Biror materialning qalin qatlami bilan o‘ralgan ma’lum bir miqdordagi radioaktiv moddaga ega bo‘laylik. Parchalanishning barcha mahsuli moddaning atomlari bilan to‘qnashuvlarga uchramasdan I sohani bemalol tark etadi; II sohaga o‘tadi, ikki qism moddalar massalari yig‘indisi vaqt o‘tishi bilan o‘zgarmaydi va soha biri ikkinchisining qismi bo‘lgan ikki sohaga ajratilgan (I soha II sohaning qismi) deb faraz qilamiz. Bu fakt qo‘yilgan vaziyatga tatbiq qilinayotgan modda massasining saqlanish qonunidan iborat. I va II sohalardagi parchalanish mahsulining bosgan yo‘llari λ_1 va λ_2, sohalardagi materiallarning xarakterli o‘lchovlarini L_1 va L_2 desak, ular uchun

$$\lambda_1 \gg L_1 \text{ va } \lambda_2 \ll L_2 \qquad (1)$$

shartlar qo‘yiladi.

Agar vaqtning boshlang‘ich momenti t=0 da moddalar massalari $M_1(0)$ va $M_2(0)$ bo‘lsa, u holda vaqtning ixtiyoriy t momentida

$$M_1(0)+M_2(0)=M_1(t)+M_2(t) \qquad (2)$$

bo‘ladi.

$M_1(t)$ va $M_2(t)$ massalarni aniqlash uchun (2) tenglama etarli emas. Parchalanish tezligi radioaktiv modda atomlari umumiy soniga proporsionalligidan foydalanamiz:

$$\frac{dN_1(t)}{dt} = -\lambda N_1(t)$$

bu erda α>0 proporsionallik koeffitsienti (modda kamayuvchi).

$M_1(t) = \mu_1 N_1(t)$ tenglamani hisobga olamiz, bu erda μ_1 — I moddaning atom og‘irligi. Natijada,

$$\frac{dM_1(t)}{dt} = -\alpha M_1(t), \tag{3}$$

ga ega bo‘lamiz.

(2), (3) tenglamalar (1) shartlar va α, $M_1(0)$, $M_2(0)$ miqdorlar bilan birga qaralayotgan ob’ektning matematik modelini tashkil qiladi.

(3) tenglamani integrallab,

$$M_1(t) = M_1(0)e^{-\alpha t}, \tag{4}$$

echimni topamiz. $t \to \infty$ da I-sohada modda batamom yo‘qoladi. (2) dan foydalanib, (4) ni hisobga olsak,

$$M_2(t) = M_1(0) + M_2(0) - M_1(0)e^{-\alpha t} = M_2(0) - M_1(0)\left(1 - e^{-\alpha t}\right)$$

hosil bo‘ladi. $t \to \infty$ da parchalanish mahsuli I sohadan II sohaga to‘liq o‘tadi.

9. Reaktiv harakat. Havo qarshiligi, gravitatsiya va boshqa tashqi kuchlar e’tiborga olinmaganda raketa harakatining eng sodda matematik modeli impulsning saqlanish qonunidan kelib chiqadi.

Raketa yoqilg‘isining yonish mahsuloti (zarralar) raketa quyrug‘idagi chiqaradigan konus naycha (soplo) dan u ga teng tezlik bilan chiqib ketadigan va vaqtning t va $t + dt$ momentlari orasidagi kichik vaqt oraligida yoqilg‘ining bir qismi yonib bo‘lib, raketa massasi dm miqdorga o‘zgargan bo‘lsin. Bunda raketa impulsi ham o‘zgaradi, lekin sistema (raketa hamda yonish mahsuloti)ning jamlangan impulsi o‘zgarmaydi, ya’ni t momentdagiday qoladi:

$$m(t)\upsilon(t) = m(t+\Delta t)\upsilon(t+\Delta t) - dm\left[\upsilon(t+\xi dt) - u\right],$$

bu erda $\upsilon(t)$ — raketa tezligi, $\upsilon(t+\xi dt)-u$ $(0<\xi<1)$ — soplodan chiqqan gazlarning dt oraliqdagi o‘rtacha tezligi. Bu tenglik o‘ng tomonidagi birinchi had raketaning $t+\Delta t$ momentidagi impulsidan, ikkinchi had esa chiqarilgan gaz dt vaqt davomida bergan impulsdan iborat.

$$m(t+\Delta t) - m(t) + \frac{dm}{dt}dt + O\left(dt^2\right)$$

ni hisobga olib, impulsning saqlanish qonunini

$$m\frac{d\upsilon}{dt} = -\frac{dm}{dt}u$$

differensial tenglama ko‘rinishida yozish mumkin, bu tenglamani

$$\frac{d\upsilon}{dt} = -u\frac{d(\ln m)}{dt}$$

ko‘rinishga keltirishimiz mumkin. Uni integrallab,

$$\upsilon(t) = \upsilon_0 + u\ln\left(\frac{m_0}{m(t)}\right)$$

echimni topish mumkin, bu erda $\upsilon_0 = \upsilon(0)$, $m_0 = m(0)$.

Agar $\upsilon_0 = 0$ bo‘lsa, u holda raketaning yoqilg‘i to‘la yonib bo‘lganda erishiladigan maksimal tezligi

$$\upsilon = u\ln\left(\frac{m_0}{m_p + m_s}\right) \tag{1}$$

ga teng bo‘ladi, bu erda m_p - foydali massa (yo‘ldosh massasi), m_s - strukturali massa (raketa tuzilishiga oid massa – yoqilg‘i baklari, dvigatellari, boshqarish sistemalari va boshqalar)

Siolkovskiyning sodda formulasi (1) kosmik uchishlar uchun raketa tuzilishi haqida asosiy xulosa chiqarishga olib keladi.

$$\lambda = \frac{m_s}{m_0 + m_p}$$

miqdorni kiritamiz, bu $m_p = 0$ da $\frac{m_s}{m_0}$ ni xarakterlaydi, u holda λ=0,1 va *u*=3 *km/s* uchun $m_p = 0$ da

$$\upsilon = u \ln(\frac{1}{\lambda}) = 7\, \hat{e}\grave{i}\ \ / \tilde{n}$$

ni beradi.

Bu erdan eng ideal vaziyatda – foydali massa 0 ga teng, gravitatsiya va havo qarshiligi hisobga olinmaganda qaralayotgan raketa birinchi kosmik tezlikka etishga qodir emasligi kelib chiqadi. SHuning uchun ko‘p bosqichli raketalardan foydalanish zarur degan xulosaga kelinadi.

10. Modellar tuzishda o‘xshashliklar. Avval o‘rganilgan hodisalarga o‘xshashliklardan foydalanib matematik model tuzish usuli samarali yo‘llardan biri bo‘lib hisoblanadi. YUqorida o‘rganilgan 1-masalada keltirilgan modellarga e’tibor bersak, umumiy ko‘rinishdagi

$$\frac{dx}{dt} = (\alpha - \beta)x \tag{1}$$

tenglamani yozishimiz mumkin, bu erda

$$x = x(t), \quad \alpha = \alpha(t) \geq 0, \quad \beta = \beta(t) \geq 0.$$

1-masalada $a \geq 0$ va $b \geq 0$ doimiy sonlar edi. (1) da $\alpha = a$, $\beta = b$ olsak, (1) dan 1-masaladagi (4) tenglama, agar $\alpha = a$, $\beta = bx$ olsak, (1) dan 1-masaladagi (5) tenglama hosil bo‘ladi. (1) tenglama 8-masaladagi (3) tenglamaga juda o‘xshash bo‘lib, (1) tenglama α va β doimiy sonlar bo‘lib, $\alpha < \beta$ bo‘lganda 8-masaladagi (3) tenglama bilan bir xil bo‘ladi. Bu tabiiy hol, chunki ularni keltirib chiqarishda bir xil mulohazalardan foydalanilgan. (1) ni integrallasak,

$$x(t) = x(t_0)\exp(\int_{t_0}^{t} [\alpha(t) - \beta(t)]dt)$$

kelib chiqadi.

11. Modellar tuzishda zanjir prinsipi. Matematik model tuzishda uncha murakkab bo‘lmagan modelni batafsil o‘rganib bo‘lingach navbatdagi qadamga o‘tishda «soddadan murakkabga» prinsipini amalga oshiruvchi yo‘l tabiiy bo‘lib hisoblanadi. Bunda har bir model avvalgilarini xususiy hol sifatida o‘z ichiga olib, umumlashtiruvchi yanada to‘la modellarning zanjiri (ierarxiya) hosil bo‘ladi.

Ko‘p bosqichli raketa modeli misolida ierarxiya zanjirini tuzamiz. 9-masalada bir bosqichli raketa birinchi kosmik tezlikka etishga qodir emasligi, shuning uchun ko‘p bosqishli raketalardan foydalanish zarurligi ko‘rsatilgan edi. Ko‘p bosqichli raketa bir qancha bosqichlardan tuzilgan bo‘lishi va ular foydalanilgan sari chiqarib tashlanishi kerak. m_i – *i*-bosqichning umumiy massasi, λm_i–mos strukturali massa (bunda yoqilg‘i massasi $(1-\lambda)m_i$ miqdorga teng), m_p – foydali yuklamaning massasi, λ miqdor va gazlarning chiqarilish tezligi *u* barcha bosqichlar uchun bir xil. Uch bosqichli raketani o‘rganaylik. Bunday raketaning boshlang‘ich massasi

$$m_0 = m_p + m_1 + m_2 + m_3$$

ga teng, 1-bosqichning hamma yoqilg‘isi sarflab bo‘lingan vaqtni olamiz va raketa massasi

$$m_p + \lambda m_1 + m_2 + m_3$$

ga teng. U holda 9-masaladagi dastlabki modelning (1) formulasi bo‘yicha raketa tezligi

$$\upsilon_1 = u\ln\left(\frac{m_0}{m_p + \lambda m_1 + m_2 + m_3}\right)$$

ga teng. υ_1 tezlikka erishgandan keyin strukturali massa λm_1 tashlab yuboriladi va ikkinchi bosqich ulanadi. Bu paytda raketa massasi

$$m_p + m_2 + m_3$$

ga teng bo‘ladi. Bu paytdan boshlab to ikkinchi bosqich yoqilg‘isi to‘la yonib bo‘ladigan momentgacha to‘plangan impulsning saqlanish qonunidan foydalanib tuzilgan modeldan foydalanish mumkin, barcha mulohazalar o‘z kuchida qoladi, boshlang‘ich tezlik esa υ_1 ga teng bo‘lib qolgan. U holda yana 9-masaladagi (1) formula bo‘yicha ikkinchi bosqich yoqilg‘isi to‘la yonib bo‘lgach raketa tezligi

$$\upsilon_2 = \upsilon_1 + u\ln(\frac{m_p + m_2 + m_3}{m_p + \lambda m_2 + m_3})$$

ga etadi. Xuddi shunday muhokamalar raketaning uchinchi bosqichiga ham qo‘llaniladi. Uning dvigatellari o‘chirilgach raketa tezligi

$$\upsilon_3 = \upsilon_2 + u\ln(\frac{m_p + m_3}{m_p + \lambda m_3})$$

ga teng bo‘ladi. Yakuniy tezlik

$$\upsilon_3 = u\ln\left\{(\frac{m_0}{m_p + \lambda m_1 + m_2 + m_3})(\frac{m_p + m_2 + m_3}{m_p + \lambda m_2 + m_3})(\frac{m_p + m_3}{m_p + \lambda m_3})\right\}$$

hosil bo‘ladi.

12. Ishlab chiqarishning tabiiy o‘sishi. Biror mahsulot tayin narx *c* bo‘yicha sotiladigan bo‘lsin. Vaqtning *t* momentiga sotilgan mahsulot miqdorini $x(t)$ bilan belgilaylik. U holda vaqtning shu momentida $cx(t)$ ga teng kirim hosil bo‘ladi. Bu kirimning bir qismi investitsiyaga sarflanadigan bo‘lsin:

$$I = \alpha cx(t),$$

bu erda α - investitsiya normasi (doimiy son), $0 < \alpha < 1$, $I=I(t)$.

Agar bozorda ishlab chiqarilgan mahsulot to‘la sotilib bo‘ladigan shartda (bozorning to‘yinmaganligi shartida) ishlab chiqarishni kengaytirish natijasida kirimning orta borishi kuzatiladi. Bu ortishning bir qismidan yana mahsulot ishlab chiqarishni kengaytirish uchun foydalaniladi. Bu ishlab chiqarish tezligining o‘sishiga (akseleratsiyaga) olib keladi, shu bilan birga ishlab chiqarish tezligi investitsiyaning ko‘payishiga proporsional bo‘ladi:

$$x'(t) = \beta I$$

bu erda $\frac{1}{\beta}$ akseleratsiya normasi. Oxirgi ikki formuladan

$$x'(t) = \beta\alpha c x(t)$$

yoki

$$x' = kx$$

birinchi tartibli o‘zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglama hosil bo‘ladi, bu erda $k = \beta\alpha c.$ Bu tenglamaning umumiy echimi

$$x = Ce^{kt}$$

ko‘rinishida bo‘ladi, bu erda S — ixtiyoriy doimiy son. $x_0 = x(t_0)$ boshlang‘ich shart berilgan bo‘lsa, u holda

$$C = x_0 e^{-kt_0}$$

kelib chiqadi. Bundan

$$x = x_0 e^{k(t-t_0)}$$

xususiy echimni olamiz. Bu ishlab chiqarishning tabiiy o‘sishi modeli deb aytiladi.

Bu model matematik modellarning universallik xossasini eslatadi. YUqorida ko‘rib o‘tilgan populyasiya ko‘payishi jarayonining eng sodda holi, fan rivojlanishi jarayonining sodda holi, radiaktiv parchalanish jarayoni ham oxirgi formula bilan berilgan qonuniyatga bo‘ysunadi.

13. Ishlab chiqarishning raqobat shartlarida o‘sishi. Bu masala bozorning to‘yinganlik shartida ko‘riladi. Bozorda mahsulot hajmi x o‘sishi bilan uning narxi c tushadigan bo‘lsin, ya’ni $c=c(x)$ bo‘lib, bu funksiya kamayuvchi funksiya: $\frac{dc}{dx} < 0$ bo‘lsin deb faraz qilamiz. Endi avvalgi bandda olingan $x' = kx$ qattiq model o‘rniga xuddi o‘sha yo‘l bilan

$$x' = \gamma c(x) x$$

yumshoq modelga ega bo‘lamiz, bu erda $\gamma = \beta\alpha.$

Soddalik uchun $c(x)$ funksiyani $c(x)=a-bx$ ko‘rinishida olamiz, bu erda $a>0$, $b>0$ doimiy sonlar. U holda

$$x' = \gamma\left(a - bx\right)x$$

yoki

$$x' = Ax - Bx^2$$

logistik modelga ega bo‘lamiz, bu erda $A = \gamma a,\ B = \gamma b.$

Bu model ham yuqorida keltirilgan Ferxyul’st–Perl, reklama samaradorligi, fan rivojlanishining ikkinchi modeli, Beylining sodda epidemiya modelidagi jarayonlar bo‘ysunadigan qonuniyatni ifodalab, matematik modellarning universalligini ko‘rsatadi.

14. Bashoratlanadigan narxlarga bog‘liq bozor modeli. Biror etarlicha uzoq vaqt davomida bozorda savdogar ma’lum bir mahsulotni sotadigan bo‘lsin. Bunda, mahsulot haftalik tanaffuslar bilan sotiladigan bo‘lsin. U holda mahsulotning mavjud qo‘rida haftalik taklif kelgusi haftadagi kutilayotgan narxga va keyingi haftalarda narxning mo‘ljallanayotgan o‘zgarishiga bog‘liq bo‘ladi.

Agar kelayotgan haftada narxning pasayishi va keyingi haftalarda esa narxning ortishi nazarda nazarda tutilsa, u holda mahsulotni saqlashga ketadigan sarfdan narxning kutilayotgan ortishining oshib ketishi shartida taklif to‘xtatib turiladi. Bunda kelayotgan haftaga taklif, kelajakdagi narxning ortishi mo‘ljali qancha katta bo‘lsa, shuncha kichik bo‘ladi va aksincha, agar kelayotgan haftada narx yuqori bo‘lib, keyingi haftalarda narxning tushib ketishi kutilayotgan bo‘lsa, u holda kelayotgan haftaga taklif, keyingi haftalardagi mo‘ljallanayotgan narxning tushishi qancha katta bo‘lsa, shuncha katta bo‘ladi.

Navbatdagi haftadagi mahsulotning narxini p bilan belgilaylik, bunda p vaqt t ning uzluksiz va differetsiallanuvchi funksiyasi bo‘lsin. p' narxning shakllanishi tendensiyasi (narxning vaqt bo‘yicha hosilasi) dan iborat. U holda talab ham, taklif ham p va p' miqdorlarning funksiyalari bo‘ladi. Bunda amaliyot shuni ko‘rsatadiki, turli omillarga bog‘liq holda talab va taklif p va p' larning turlicha funksiyalari bo‘ladi.

Xususan, bunday funksiyalardan biri chiziqli bog‘lanish bilan beriladi:

$$y = ap' + bp + c,$$

bu erda a, b, c – biror haqiqiy o‘zgarmaslar. Masalan, ko‘rilayotgan masalada mahsulot narxi avval bir birligiga 1 so‘m t – haftadan keyin esa u bir birligiga $p(t)$ – so‘m, talab q va taklif s mos ravishda $q = 4p' - 2p + 39,$ $s = 44p' + 2p - 1$ munosabatlar bilan aniqlanadigan bo‘lsa, u holda taklifning talabga mos kelishi uchun $4p' - 2p + 39 = 44p' + 2p - 1$ tenglikning bajarilishi zarurdir.

Bu erdan $\dfrac{dp}{p-10} = -0{,}1dt$ differensial tenglamaga kelamiz, buni integrallab, $p = c \cdot e^{-0,1t} + 10$ ni topamiz.

Agar $p(0) = 1$ boshlang‘ich shartni hisobga olsak, $p = -9e^{-0,1t} + 10$ xususiy echimni topamiz.

SHunday qilib, talab va taklif orasida har vaqt muvozanat saqlanishini talab qilinsa, u holda narx oxirgi formula bo‘yicha o‘zgarishi zarur bo‘ladi.

15. Iqtisodiyot o‘sishi makromodeli. Milliy daromadni (ishlab chiqarish hajmini) Y, kapitalni (ishlab chiqarish mablag‘lari hajmini) K, mehnatni (mehnat sarflari hajmini) L bilan belgilaylik. Ishlab chiqarish funksiyasi $Y = F(K, L)$ $F(K, L) = LF\left(\dfrac{K}{L}, 1\right)$ shartni qanoatlantiradigan ($F(K, L)$ funksiya birinchi tartibli birjinsli) bo‘lsin. $x = \dfrac{K}{L}$ (1) miqdorni (mablag‘ bilan ta’minlanganlik miqdorini) kiritamiz. U holda mehnat unumdorligi

$$f(x) = \frac{1}{L} F(K, L) = F(x, 1) \qquad (2)$$

formula bilan ifodalanadi.

x miqdorning t vaqtga bog‘lanishi ifodasini topish talab qilinadi. Quyidagi shartlarni kiritamiz:

1. $\dfrac{Y - c}{Y} = s = const.$

2. $K' = Y - c.$

3. $\dfrac{L'}{L} = n = const.$

Bu erda c – iste’mol miqdori.

(1) dan $\ln x = \ln K - \ln L$ tenglikni olamiz. Buni t bo‘yicha differensiallasak,

$$\frac{x'}{x} = \frac{K'}{K} - \frac{L'}{L}$$

yoki

$$x' = \frac{K'}{K}x - \frac{L'}{L}x \qquad (3)$$

hosil bo‘ladi. Bunda

$$\frac{K'}{K}x = sf(x)$$

bo‘ladi, chunki 2-shart, (1) va (2) dan

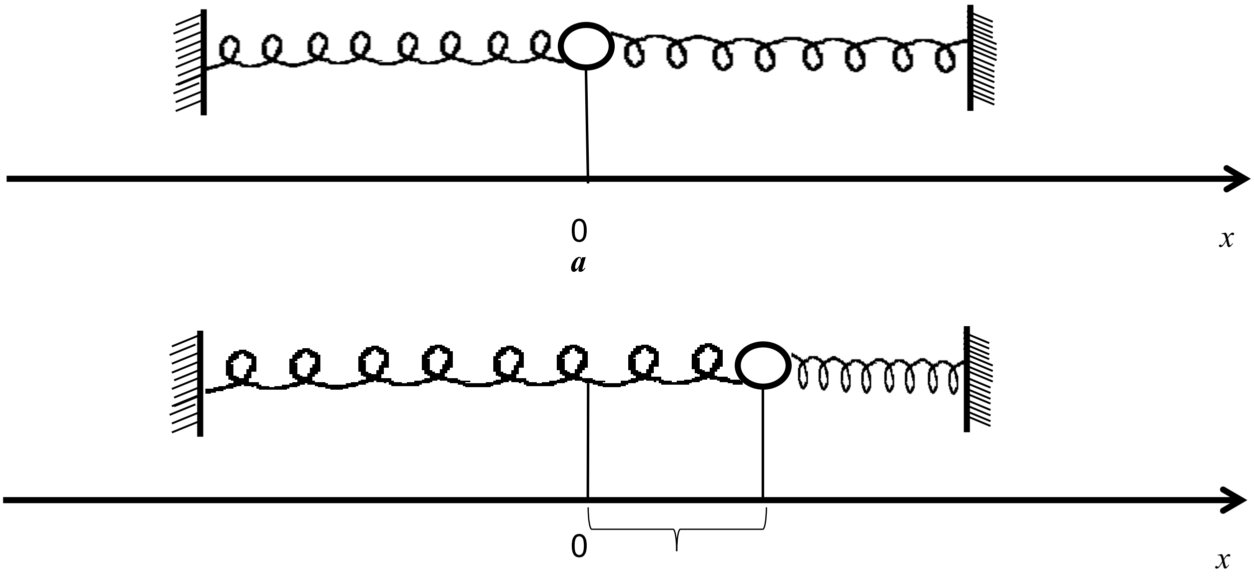
$$x\frac{K'}{K} = x\frac{Y-c}{K} = \frac{K}{L}\cdot\frac{Y-c}{K} = \frac{Y-c}{L} = \frac{Y-c}{Y}\cdot\frac{Y}{L} = sf(x).$$

(3) dagi $\dfrac{L'}{L}x$ esa 3-shartga ko‘ra nx ni beradi. Demak, (3) dan $x' = sf(x) - nx$ (4)

kelib chiqadi. (4) ni o‘sishning makromodeli deyiladi.

16. Tebranma harakatlar. Fizikaviy va biologik sistemalarni o‘rganishda tebranma harakatlar masalalarini echishda chiziqli differensial tenglamalar kuchli vosita bo‘lib hisoblanadi.

A. t massaga ega bo‘lgan moddiy nuqta (sharcha) ikkita prujina bilan 1,a-rasmdagidek joylashtirilgan bo‘lsin.



1-расм

Muvozanat vaziyatida moddiy nuqta (sharchaning markazi) koordinatasi nolga teng, Nuqtani *Ox* o‘qi yo‘nalishida siljitamiz (1,*b*-rasm). U holda Guk qonuniga muvofiq, nuqtaga *x* siljishga proporsional kuch ta’sir qiladi:

$$F=-kx. \tag{1}$$

Bu erda $k>0$, minus belgi kuchning yo‘nalishi prujina siqilishi yo‘nalishiga qarama-qarshiligini bildiradi.

Nyutonning 2-qonuni bo‘yicha

$$F=ma \tag{2}$$

ni olamiz. (1) va (2) tengliklardan

$$ma=-kx \tag{3}$$

kelib chiqadi. To‘g‘ri chiziqli harakatda tezlik koordinata *x* ning *t* vaqt bo‘yicha birinchi tartibli hosilasi

$$\upsilon=\frac{dx}{dt}$$

dan, tezlanish

$$a=\frac{d\upsilon}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}$$

dan iborat. Bundan (3) ni

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx$$

yoki

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0 \qquad (4)$$

ko‘rinishda yozish mumkin, bu erda $\omega=\frac{k}{m}$.

Agar fizik kattalik vaqtga bog‘liq (4) tenglamaga mos holda o‘zgarsa, u holda *u* garmonik tebranishga harakat qilmoqda deyiladi. (4) tenglamani garmonik tebranishlar yoki nuqtaning erkin tebranma harakati differensial tenglamasi deyiladi. (4) ni echamiz. Buning uchun

$$\lambda^2+\omega^2=0$$

xarakteristik tenglama tuzib, uning $\lambda_1=\omega i$ va $\lambda_2=-\omega i$ ildizlarini topamiz. (4) ning umumiy echimi

$$x=C_1Cos\omega t+C_2Sin\omega t \qquad (5)$$

funksiyadan iborat bo‘ladi, bu erda C_1 va C_2 ixtiyoriy o‘zgarmaslar. (5) dan *t* vaqt bo‘yicha hosila olib, nuqtaning tezligini ifodalovchi

$$x'=-C_1\omega\sin\omega t+C_2\omega\cos\omega t \qquad (6)$$

munosabatni topamiz.

C_1 va C_2 lar, masalan, $t=0$ da $x(0)=x_0$ va $x'(0)=\upsilon_0$ boshlang‘ich shartlardan topiladi. Boshlang‘ich shartlarni (6) ga qo‘ysak,

$$C_1=x_0,\ C_2=\frac{\upsilon_0}{\omega}$$

lar kelib chiqadi.

C_1 va C_2 lar bilan

$$C_1=ASin\varphi,\quad C_2=ACos\varphi \qquad (7)$$

munosabatlar orqali bog‘langan yangi ixtiyoriy A va φ o‘zgarmaslarni kiritamiz. U holda (5)

$$x = ASin(\omega t + \varphi) \tag{8}$$

ko‘rinishga keladi. (8) tenglama nuqtaning garmonik tabranma harakatini ifodalaydi. SHunday qilib, nuqtaning chiziqli qaytaruvchi kuch ta’siridagi erkin tebranma harakati garmonik tebranma harakatdan iborat bo‘ladi. A miqdor nuqtaning muvozanat vaziyatidan eng katta og‘ishini ifodalaydi va tebranish amplitudasi deyiladi.

(7) dan

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$$

kelib chiqadi. $\sin u$ funksiyaning eng kichik davri 2π ekanligidan garmonik tebranishning eng kichik davri T ni (8) ga qarab

$$\omega(t + T) + \varphi = \omega t + \varphi + 2\pi$$

tenglikdan topamiz:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

$\omega = \frac{2\pi}{T}$ miqdorni tebranish chastotasi, (7) dan topiladigan $\omega t + \varphi$ miqdorni tebranish fazasi, $t = 0$ paytdagi faza φ ni tebranishlarning boshlang‘ich fazasi deyiladi.

Boshlang‘ich moment $t = 0$ da $x = ASin\varphi$. Agar boshlang‘ich momentda nuqta koordinatalar boshida bo‘lsa, u holda $\varphi = 0$. Bu holda (8) tenglama

$$x = ASin\frac{2\pi t}{T}$$

ko‘rinishni oladi.

B. Endi yuqorida qo‘yilgan masala shartlarida harakat qilayotgan nuqtaga muhitning harakat tezligiga proporsional bo‘lgan qarshilik kuchi ta’sir qiladigan va shu bilan birga muhit qarshilik kuchi tortish kuchiga nisbatan kam bo‘lgan holni o‘rganaylik. Bu holda nuqta harakati tenglamasi

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - l\frac{dx}{dt}$$

ko‘rinishda bo‘ladi. $\frac{l}{2m} = \beta > 0$ va $\frac{k}{m} = \alpha^2$ belgilashlar kiritsak, tenglama

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \alpha^2 x = 0$$

ko‘rinishga keladi.

Muhit qarshiligi kam bo‘lganligi uchun $\beta^2 < \alpha^2$ bo‘ladi, shuning uchun xarakteristik tenglamaning ildizlari mavhum bo‘ladi. $\alpha^2 - \beta^2 = \gamma^2$ belgilash kiritib,

$$x = e^{-\beta t}(C_1 Cos\gamma t + C_2 Sin\gamma t)$$

umumiy echimga ega bo‘lamiz. $C_1 = ASin\varphi$ va $C_2 = ACos\varphi$ deb olib,

$$x = Ae^{-\beta t} Sin(\gamma t + \varphi)$$

tenglamani olamiz. Bunda harakat so‘nuvchi tebranma bo‘ladi, amplituda $Ae^{-\beta t}$ vaqt o‘tishi bilan kamayuvchi bo‘ladi.

S. A banddagi masala shartlari qatoriga muhit qarshiligi sharti kiritilmay, balki davriy to‘lqinlatuvchi

$$F(t) = BSinwt$$

kuch kiritilgan holda nuqtaning tebranma harakati differensial tenglamasi

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = BSinwt \qquad (9)$$

ko‘rinishda bo‘ladi, bu erda V — to‘lqinlatuvchi kuchning amplitudasi , *w* — uning chastotasi .

Mos bir jinsli tenglamaning umumiy echimi **A** band (8) formuladan

$$Z = ASin(\omega t + \varphi)$$

funksiya A amplitudaga va ω chastotaga ega bo‘lgan erkin garmonik tebranishni ifodalaydi. Bu tebranish nuqtaning xos tebranishidir.

1. Agar $w \neq \omega$ bo‘lsa, u holda (1) ning xususiy echimini

$$y = cCoswt + dSinwt$$

ko‘rinishida izlaymiz. Natijada

$$y = \frac{B}{\omega^2 - w^2} Sinwt$$

ga ega bo‘lamiz. Bu chastotasi to‘lqinlantiruvchi kuchning chastotasiga teng va amplitudasi kuchning amplitudasiga proporsional bo‘lgan majburiy tebranishdan iborat.

Nuqtaning harakati tenglamasi

$$x = ASin(\omega t + \varphi) + \frac{B}{\omega^2 - w^2} Sinwt$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

2. Agar $w = \omega$ bo‘lsa, ya’ni to‘lqinlantiruvchi kuch chastotasi xos tebranish chastotasiga teng bo‘lsa, u holda bunday hodisa rezonans deb ataladi. Bu holda xususiy echimni

$$y = t\left(c\cos\omega t + d\sin\omega t\right)$$

ko‘rinishda izlaymiz.

$$y = -\frac{B}{2\omega} t\cos\omega t$$

echimni olamiz. Nuqta harakati tenglamasi

$$x = A\sin\left(\omega t + \varphi\right) - \frac{B}{2\omega} t\cos\omega t$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Ikkinchi qo‘shiluvchidan ko‘rinadiki, tebranish amplitudasi vaqtning o‘tishi bilan cheksiz o‘sib boradi.

17. Mavsumiy o‘sish modeli. Birinchi tartibli oddiy

$$\frac{dx}{dt} = rxCost$$

ko‘rishdagi differensial tenglamani mavsumiy o‘sishning oddiy modeli sifatida qarash mumkin, bu erda *r* musbat doimiy son. $x(t)$ populyasiya o‘sishining tezligi $\frac{dx}{dt}$ navbat bilan goh musbat, goh manfiy bo‘ladi va populyasiya ham navbat bilan goh o‘sadi, goh kamayadi. Bunga mavsumiy, masalan, ozuqaning etarliligi kabi omillar sabab bo‘lishi mumkin. Tenglamani echamiz, uni

$$\frac{dx}{x} = rCostdt$$

ko‘rinishda yozib, integrallaymiz.

$$\int \frac{dx}{x} = r\int Costdt.$$

Bundan $\ln x = r\sin t + \ln c$, $\ln\frac{x}{c} = r\sin t$, $x = ce^{r\sin t}$ umumiy echimni olamiz. $t = 0$ olib, $c = x(0)$ ni topamiz. Demak vaqtning *t* momentidagi populyasiya miqdori

$$x(t) = x(0)e^{r\sin t}$$

ga teng bo‘ladi. Populyasiya maksimal miqdori $e^r x(0)$ ga teng bo‘lib, unga $\sin t = 1$ bo‘lganda, ya’ni *t* ning $\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, \ldots$ ga teng qiymatlarida, minimal miqdori $e^{-r}x(0)$ ga teng bo‘lib, unga $\sin t = -1$ bo‘lganda ya’ni *t* ning $\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}$, $\frac{11\pi}{2}, \ldots$ ga teng qiymatlarida erishadi.

Bu modelda populyasiya miqdori $e^r x(0)$ dan $e^{-r}x(0)$ gacha 2π ga teng davr bilan tebranadi. Vaqtning $t = 0$, 2π, 4π, … momentlarini ozuqani topish imkoniyati eng katta bo‘lgan mavsumlar (yoz mavsumlari) ning o‘rtalari, vaqtning $t = \pi$, 3π, 5π, … momentlarini ozuqani topish imkoniyati eng kichik bo‘lgan mavsumlar (qish mavsumlari)ning o‘rtalariga mos keladi deyish mumkin.

18. Avtomodellik. Argumentlari *x* va vaqt *t* dan iborat $u(x,t)$ funksiya

$$u(x,t)=t^{\alpha}h\left(t^{\beta}x\right) \tag{1}$$

ko‘rinishga ega bo‘lsa, uni avtomodel’ deyiladi, bu erda α,β – biror o‘zgarmas sonlar, *h* – bir argumentli funksiya. Argumentlaridan biri vaqtdan iborat bo‘lgan ixtiyoriy sondagi argumentlarning funksiyasining avtomodellikligi ta’rifi ham shunga o‘xshash beriladi.

Misol sifatida

$$u(x,t)=cx-dt^2x^5 \tag{2}$$

funksiyaning avtomodellikligini tekshiramiz, bu erda *c* va *d* o‘zgarmas sonlar. (2) ni

$$u(x,t)=t^{\alpha}\left(ct^{-\alpha}x-dt^{-\alpha+2}x^5\right)$$

ko‘rinishda ifodalaymiz, bu erda α ni

$$t^{-\alpha+2}x^5=\left(t^{-\alpha}x\right)^5$$

shart bajariladigan qilib tanlaymiz. Bundan $\alpha=-\frac{1}{2}$, ya’ni

$$u(x,t)=t^{-\frac{1}{2}}\left(ct^{\frac{1}{2}}x+dt^{\frac{5}{2}}x^5\right)=t^{-\frac{1}{2}}h\left(t^{\frac{1}{2}}x\right),$$

bu erda

$$h(z)=cz+dz^5.$$

Demak, avtomodellik sharti (1) $\alpha=-\frac{1}{2}$ va $\beta=\frac{1}{2}$ da bajarilmoqda. Funksiyaning avtomodellik xossasining o‘rnatilishi hisoblashlarni soddalashtirishga olib keladi.

Differensial tenglamada echimning avtomodelligi haqidagi faraz differensial tenglamada erkli o‘zgaruvchilar sonini bittaga kamaytirishga, bu bilan esa ba’zan murakkab chiziqsiz masalalar holida echimni qurishga imkoniyat tug‘diradi. Xususiy hosilali differensial tenglamaga (1) ni qo‘yib, oddiy differensial tenglamani olamiz. Buni integrallash boshlang‘ich-chegaraviy masalaning echimini topishga nisbatan ancha sodda bo‘ladi.

19. Cheksiz tor tebranishi tenglamasini Dalamber usuli bilan echish.

$$u''_{tt} - a^2 u''_{xx} = 0 \qquad (1)$$

tenglamani

$$u(x,0) = f(x),\ u_t'(x,0) = F(x) \qquad (2)$$

boshlang‘ich shartlarda Dalamber usuli bilan yozamiz, bu erda $f(x)$ va $F(x)$ funksiyalar butun sonlar o‘qida berilgan.

Agar $\varphi(p)$ va $\psi(q)$ har qanday ikki marta differensiallanuvchi funksiyalar bo‘lsa, u holda

$$u(x,t) = \varphi(x - at) + \psi(x + at) \qquad (3)$$

funksiya (1) tenglamaning echimi bo‘ladi, bu erda p va q ixtiyoriy erkli o‘zgaruvchilar.

Haqiqatan ham,

$$\begin{aligned} u_x' &= \varphi'(x - at) + \psi'(x + at), \\ u_{xx}'' &= \varphi''(x - at) + \psi''(x + at), \\ u_t' &= -a\varphi'(x - at) + a\psi'(x + at), \\ u_{tt}'' &= a^2\varphi''(x - at) + a^2\psi''(x + at) \end{aligned} \qquad (4)$$

larni topsak, (1) kelib chiqadi. (3) funksiya (1) tenglamaning umumiy echimi bo‘ladi. (3) boshlang‘ich shartlardan foydalanib φ va ψ funksiyalarni aniqlaymiz. (3) va (4) lardan $t = 0$ da

$$\varphi(x) + \psi(x) = f(x), \quad -a\varphi'(x) + a\psi'(x) = F(x) \qquad (5)$$

hosil bo‘ladi. (5) dagi ikkinchi tenglikni $[0; x]$ kesmada integrallab,

$$-a(\varphi(x) - \psi(0)) + a(\varphi(x) - \psi(0)) = \int_0^x F(z)dz$$

yoki

$$-\varphi(x)+\psi(x)=\frac{1}{a}\int_0^x F(z)dz+c \tag{6}$$

tenglikka ega bo‘lamiz, bu erda $c=\psi(0)-\varphi(0)$. (5) dagi birinchi tenglik va (6) tenglikdan izlangan

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}f(x)-\frac{1}{2a}\int_0^x F(z)dz-\frac{c}{2},$$
$$\psi(x)=\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2a}\int_0^x F(z)dz+\frac{c}{2}$$

funksiyalarni topamiz. Oxirgi formulalarda x ni mos ravishda $x-at$ va $x+at$ ga almashtirib, olingan ifodalarni (3) ga qo‘yib,

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left(f(x-at)+f(x+at)+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}F(z)dz\right)$$

echimni topamiz.

Topilgan $u(x,t)$ echim avtomodel echimlar sinfiga tegishli.

20. Diffuziya tenglamasini Fure usuli bilan echish.

$$u_t'-a^2u_{xx}''=0 \quad (0<x<l) \tag{1}$$

diffuziya tenglamasini

$$u(x,0)=f(x) \quad (0\le x\le l) \tag{2}$$

boshlang‘ich shart va ixtiyoriy $t\ge 0$ da

$$u(0,t)=0, \quad u(l,t)=0 \tag{3}$$

chegaraviy shartlarda Fure – o‘zgaruvchilarni ajratish usuli bilan echamiz.

(1) tenglama uchun avval aynan nolga teng bo‘lmagan echimni

$$u=X(x)T(t) \tag{4}$$

ko‘rinishda izlaymiz.

$$u_t'=XT', \quad u_{xx}''=X''T$$

larni (1) ga qo‘yib,

$$XT' = a^2 X'' T$$

yoki

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{a^2 T} \tag{5}$$

ga ega bo‘lamiz. Bu tenglik chap va o‘ng tomonlari o‘zgarmas songa teng bo‘lgandagina o‘rinli bo‘ladi. O‘sha sonni $-\lambda^2$ bilan belgilab,

$$\frac{X''}{X} = -\lambda^2, \quad \frac{T'}{a^2 T} = -\lambda^2 \tag{6}$$

ni olamiz. Bu erdan

$$X'' + \lambda^2 X = 0, \quad T' + a^2\lambda^2 T = 0 \tag{7}$$

tenglamalar hosil bo‘ladi. Bulardan birinchining xarakteristik tenglamasi $k^2 + \lambda^2 = 0$ ning ildizlari $k_{1,2} = \pm\lambda i$ bo‘ladi. Bu erdan

$$X(x) = A\sin\lambda x + B\cos\lambda x \tag{8}$$

umumiy echimni topamiz, bu erda A va B har qanday o‘zgarmas sonlar. (7) dagi ikkinchi tenglama o‘zgaruvchilarni ajratib echilganda

$$T(t) = Ce^{-a^2\lambda^2 t} \tag{9}$$

echim kelib chiqadi, bu erda C – har qanday o‘zgarmas son. (4),(8),(9) dan

$$u = e^{-a^2\lambda^2 t}\left(A\sin\lambda x + B\cos\lambda x\right) \tag{10}$$

ni olamiz, bu erda AC ni A ga va BC ni B ga almashtirib $C = 1$ olindi. (10) echimning (3) shartlarni qanoatlantirishini talab qilamiz. $x = 0$ desak,

$$Be^{-a^2\lambda^2 t} = 0$$

dan $B = 0$ va demak

$$u = Ae^{-a^2\lambda^2 t}\sin\lambda x \tag{10'}$$

hosil bo‘ladi.

$x = l$ da (3) ga ko‘ra

$$0 = Ae^{-a^2\lambda^2 t}\sin\lambda l \tag{11}$$

bo‘ladi. Bunda $A \neq 0$, chunki aks holda $u \equiv 0$ echim olgan bo‘lar edik. SHuning uchun

$$\sin \lambda l = 0 \tag{12}$$

va

$$\lambda l = n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{13}$$

bo‘ladi.

Bu erdan

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{l} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{14}$$

har bir λ_n ga

$$u_n = A_n e^{-b^2 n^2 t} \sin \frac{n\pi x}{l} \tag{15}$$

hususiy echim mos keladi, bu erda $b = \frac{a\pi}{l}$.

n ning faqat butun musbat qiymatlarini olish kifoya, chunki $n = 0$ da $u \equiv 0$ bo‘ladi, bu esa shartimizga muvofiq emas. $n < 0$ da esa $n' = -n > 0$ ga mos o‘sha tabiatdagi echimlarni olamiz.

SHunday qilib, (15) formula (1) tenglamaning (3) chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi (4) ko‘rinishidagi chiziqli erkli hususiy echimlarining to‘la to‘plamini beradi.

Endi (2) boshlang‘ich shartning qanoatlantirilishini ta’minlaymiz. (1) tenglama chiziqli va bir jinsli bo‘lganligi uchun uning ixtiyoriy sondagi echimlarining yig‘indisi ham yana o‘zining echimi bo‘lishligidan

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-b^2 n^2 t} \sin \frac{n\pi x}{l} \tag{16}$$

ga ega bo‘lamiz. Agar (16) qator yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda ma’lum shartlarda (16) funksiya (1) tenglamaning echimi bo‘ladi. (16) formulada $t = 0$ deb (2) boshlang‘ich shartga ko‘ra

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{l} \tag{17}$$

ni hosil qilamiz. YOyilmaning koeffitsientlari uchun

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx \quad (n = 1,2,3,...) \tag{18}$$

formulalar o‘rinli.

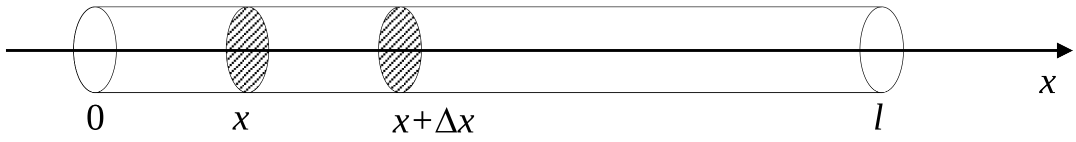
Shunday qilib, masalaning echimi (16) qator bilan beriladi, uning koeffitsientlari (18) formula bilan aniqlanadi. Amaliyotda bu qatorning bir qancha hadlarini olish etarli.

21. Mikroorganizmlarning diffuziyasi modeli. Avvalgi mavzularda populyasiya sonining yashash joyining o‘zida o‘zgarishi bilan qiziqdik. Biz populyasiyaning fazoda ko‘chishi bilan, joyning turli qismlarida zichligining o‘zgarishi bilan qiziqmadik. Bunday qarash joy kichik bo‘lsa, yoki joy fizik xususiyatlari bo‘yicha bir jinsli bo‘lsa, o‘rinli bo‘ladi.

Aks holda vaqtga bog‘liq o‘zgarishlarnigina emas balki fazoviy o‘zgarishlarni ham o‘rganish zaruriyati paydo bo‘ladi, chunki bir jinsli bo‘lmagan fazoning turli sohalarida populyasiya har xil rivojlanishi mumkin.

Bu mavzuda biz shunga o‘xshash masalalarning ba’zilarining qo‘yilishi bilan tanishamiz. G‘ovakli modda bilan to‘ldirilgan va yon sirtlari bo‘yicha ajratilgan (izolyasiyalangan) naycha (trubka) ni olaylik. Agar naychada biror gaz bo‘lib, uning konsentratsiyasi ba’zi bir joylarida boshqa joylaridagiga nisbatan ortiq bo‘lsa, u holda fizikadan ma’lumki vaqt o‘tishi bilan gaz konsentratsiyasi ko‘p bo‘lgan joylardan konsentratsiyasi oz bo‘lgan joylarga oqib o‘tadi. Bu hodisani diffuziya deyiladi. Diffuziyani suyuq muhitda ham kuzatish mumkin. Mikroorganizmlar ham, agar ularning harakatiga ta’sir qiluvchi omillar (ozuqa, zaharli modda, pasaygan yoki ko‘tarilgan harorat va b.) yo‘q bo‘lsa, o‘zlarini shu tarzda tutadilar.

Ichida gaz bo‘lgan naycha haqidagi masalada vaqtning t momentida qiymatlari gazning berilgan nuqtadagi konsentratsiyasiga teng bo‘lgan funksiyani topishga yordam beruvchi matematik modelni keltiramiz. Naychani Ox o‘qi bo‘ylab shunday joylashtiraylikki, uning chap cheti koordinatalar o‘qi boshi bilan, o‘ng cheti esa l nuqta bilan ustma-ust tushadigan bo‘lsin, bu erda l naycha uzunligi.



Vaqtning tayin momentida $x \in [0, l]$ nuqtadan o‘tuvchi kesimning barcha nuqtalarida konsentratsiyalar teng deb faraz qilamiz. Bu faraz, masalan, diametri etarlicha kichik bo‘lgan naychalar uchun o‘rinli bo‘ladi.

Vaqtning t momentida $x \in [0, l]$ nuqtadan o‘tuvchi kesimda gazning konsentratsiyasini $u(t,x)$ bilan belgilasak, u funksiya $0 < t < T,\ 0 < x < l$ to‘g‘ri to‘rtburchakda barcha t va x uchun

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

tenglamani qanoatlantiradi, ya’ni (1) tenglamaning echimi bo‘ladi. Bu erda $a^2 = \frac{D}{c} > 0$, D-diffuziya koeffitsienti, u qiymati diffuziyalanayotgan modda (bu holda gaz) va muhit xossalari bilan aniqlanadi, c–g‘ovaklilik koeffitsienti; u kovakchalar hajmining naychaning qaralayotgan qismining umumiy hajmiga nisbatiga teng. (1) tenglamani diffuziya tenglamasi deyiladi.

Agar diffuziyani naychada emas, balki etarlicha yupqa plastinkada o‘rganilsa, u holda $u(t, x, y)$ konsentratsiya

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \tag{2}$$

tenglamani qanoatlantiradi. Uch o‘lchovli fazoda diffuziya

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \tag{3}$$

tenglama bilan ifodalanadi.

SHunday qilib naychada diffuziyalanayotgan moddaning konsentratsiyasi xususiy hosilali ikkinchi tartibli (1) differensial tenglamaning echimlarining biridan iborat. Bunday echimlar cheksiz ko‘p. Haqiqatan ham, masalan, t bo‘yicha doimiy va x bo‘yicha chiziqli bo‘lgan har qanday funksiya, ya’ni $u(t,x)=Ax+B$ (1) ning echimi bo‘ladi, yana

$$u(t,x)=e^{-a^2t}(A\cos x+B\sin x)$$

funksiya ham echim bo‘ladi, bu erda A va B – ixtiyoriy o‘zgarmaslar. Konsentratsiya sifatida qaysi echimni olish kerak degan savolga javob berish uchun, odatda tajribadan izlanayotgan konsentratsiya haqida ba’zi ma’lumotlar ma’lum bo‘lishini hisobga olamiz. Masalan t=0 da $u(0,x)$ konsentratsiya ma’lum bo‘lishi mumkin. Undan tashqari vaqtning hamma momentlari uchun naycha uchlaridagi konsentratsiya ma’lum bo‘lishi mumkin. SHunday qilib, (1) tenglamaning mumkin bo‘lgan barcha echimlaridan bizni $0\le t\le T,\ 0\le x\le l$ to‘g‘ri to‘rtburchakda uzluksiz va qo‘shimcha

$$u(0,x)=\varphi(x) \tag{4}$$

$$\left.\begin{aligned} u(t,0)&=\varphi_1(t)\\ u(t,l)&=\varphi_2(t)\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

shartlarga buysunadigan echimlar qanoatlantiradi, bu erda φ, φ_1, φ_2 – berilgan funksiyalar. (4) tenglikni boshlang‘ich shart, (5) tengliklar chegaraviy shartlar deyiladi.

Misol sifatida quyidagi hodisani ko‘rib chiqamiz. Faraz qilaylik, idishda bir jinsli suyuq muhitda qandaydir mikroorganizmlar muallaq suzib yurishgan bo‘lsin. Muhit bir jinsli bo‘lganligi uchun mikroorganizmlar kotsentratsiyasi vaqt bo‘yicha ham, koordinatalar bo‘yicha ham doimiy. Vaqtning biror momentida suyuqlik sirtiga (sirt bo‘yicha tekis) yoqimli ozuqa joylashtiriladi. U holda vaqt o‘tishi bilan (etarlicha tez) sirtga yaqin konsentratsiya o‘sadi va tubga yaqin esa nolgacha kamayadi. Bu hodisani quyidagicha tushuntirish mumkin.

Ozuqani faqat ozuqaga yaqin bo‘lgan eng yuqori qatlamdagi mikroorganizmlar sezadilar va ozuqaga intiladilar. Qolganlari erkin diffuziyalanadilar. Ammo eng yuqori qatlam ozuqaga intilib ketganlar hisobiga bo‘shab qoladi, bu joyga diffuziya qonunlari bo‘yicha pastroqdagi qo‘shni qatlamdagi mikroorganizmlar itarilib o‘tadilar. Bularning konsentratsiya kamayib qolgan o‘rnilariga o‘z navbatida yanada pastroq qatlamdagi mikroorganizmlar o‘tadilar va hokazo idish tubigacha bu jarayon davom etadi.

Agar idish ichida mikroorganizmlar harakati faqat diffuziya qonuniga bo‘ysunsa, u holda konsentratsiya diffuziya tenglamasini qanoatlantirishi kerak. *Ox* o‘qini yuqoriga yo‘naltirib, biz (1) tenglamadan foydalanishimiz mumkin.

Endi biz boshlang‘ich va chegaraviy shartlarni o‘rnatishimiz kerak. Idish balandligi *l* bo‘lsin, $\left[0,l\right]$ oraliqni ikkita $\left[0,l_1\right]$ va $\left[l_1,l\right]$ oraliqlarga bo‘lamiz. Eng yuqori qatlamga mos keluvchi $\left[l_1,l\right]$oraliq etarlicha kichik bo‘lib, unda diffuziya qonuni amal qilmaydi. Mikroorganizmlar bu qatlamda sirtdagi ozuqani sezib unga intiladilar. SHuning uchun ularning konsentratsiyasi l_1 sathda (ozuqa haqida hozircha bilmaydiganlar sohasi bo‘lmish) $\left[0,l_1\right]$ qatlamdagiga nisbatan har vaqt kam bo‘ladi (l_1 sathdan organizmlar sirtga ketadilar, l_1 da konsentratsiya o‘cmaydi, balki kamayadi, $\left[0,l_1\right]$ qatlamdagi organizmlar ozuqa haqida bilmaydilar). Bu esa $x=l_1$ da $u_x^{'}=\left(t,l_1\right)$ hosila ixtiyoriy *t* da manfiyligini bildiradi. $u_x^{'}=\left(t,l_1\right)$ hosila l_1 sathdan vaqtning bir birligida organizmlarning kamayish miqdorini xarakterlaydi. Bu miqdor l_1 sathda konsentratsiya qancha katta bo‘lsa, shuncha katta bo‘ladi, chunki shuncha katta sondagi organizmlar ozuqa xaqida biladi va ozuqaga intiladi, ya’ni l_1 dan kamayish shuncha katta bo‘ladi. SHunday qilib biz

$$u_x^{'}\left(t,l_1\right)=-ku\left(t,l_1\right) \qquad (5')$$

deb hisoblashimiz mumkin. Bu erda $k>0$ proporsionallik koeffitsienti.

Bu tenglik chegaraviy shartlardan biri bo‘ladi. Boshqa shart juda sodda: tubda, ya’ni $x=0$ da mikroorganizmlar ularga uzoq bo‘lgan sirtdagi ozuqani sezmaydi, undan ta’sirlanmaydi va idish ichiga intilmaydi. Ular idishdan tub orqali chiqib ham keta olmaydi. Bu esa

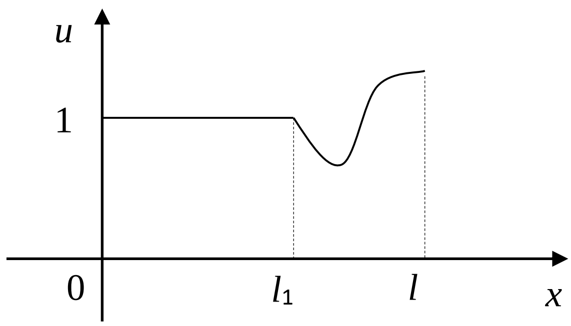
$$u_x' = (t, 0) = 0 \qquad (5'')$$

ekanligini bildiradi.

Bu chegaraviy shartlarga boshlang‘ich shartni, ya’ni vaqtning boshlang‘ich momenti t=0 dagi konsentratsiya qiymatini qo‘shimcha qilamiz. Ozuqa paydo bo‘lgunga qadar konsentratsiya hamma erda doimiy, masalan 1 ga teng. Ozuqa paydo bo‘lishi bilan (bu boshlang‘ich momentning o‘zginasi) sirtning o‘zida konsentratsiya ko‘payadi, l_1 nuqtadan yuqoriroqda kamayadi, sirtdan uzoq bo‘lgan nuqtalarda esa o‘zgarmaydi. SHunday qilib, boshlang‘ich momentda konsentratsiya qiymati

$$u(0, x) = \varphi(x) \qquad (6)$$

olinadi, bu erda $\varphi(x)$ berilgan funksiya, uning taxminiy grafigi shaklda ko‘rsatilgan



Masala (1) tenglamaning $0 < t < T$, $0 < x < l_1$ to‘g‘ri to‘rtburchakda aniqlangan (5'), (5'') va (6) shartlarni qanoatlantiradigan $u(t, x)$ echimini topishdan iborat.

22. Birinchi tartibli differensial tenglamalar sistemalariga keltiriladigan eng sodda masalalar. Ba’zi jarayonlarni o‘rganish masalasi differensial tenglamalar sistemasiga keltiriladi. Bir qancha turdagi populyasiyalarning o‘zaro ta’sirini ifodalash masalalarini ham o‘rganish mumkin.

Faraz qilaylik, bir muhitda ikki turdagi populyasiya mavjud bo‘lib, ular umumiy resurslar uchun raqobatda bo‘lsin. U holda populyasiyaning o‘sishini ifodalashda raqib turning ishtiroki ta’sirini hisobga olish zarur.

Populyasiyaning o‘sish tezligi shu populyasiyaning o‘zining sonigagina bog‘liq bo‘lmaydi, balki boshqa tur soniga ham bog‘liq deb aytish mumkin. O‘zaro ta’sirning bunday turini ifodalash uchun bitta differensial tenglama etarli bo‘lmaydi.

Berilgan muhitda ishtirok etuvchi ikki turning *t* momentdagi miqdorlari mos holda $x(t)$, $y(t)$ bo‘lsin.

Bir turning o‘sishiga shu turning va boshqa turning ishtiroki ta’siri har xil bo‘lishi mumkin.

1. 1-turning o‘sishiga 2-turning o‘sishi salbiy, 1-turning o‘sishi ijobiy, 2-turning o‘sishiga 1-turning o‘sishi salbiy, 2-turning o‘sishi ijobiy ta’sir qilishi mumkin. Buni turlararo raqobat modeli deyiladi.
2. 1-turning o‘sishiga 2-turning o‘sishi ijobiy, 1-turning o‘sishi ijobiy, 2-turning o‘sishiga 1-turning o‘sishi salbiy, 2-turning o‘sishi ijobiy ta’sir qilishi mumkin. Buni yirtqich-o‘lja modeli deyiladi.
3. 1-turning o‘sishiga 2-turning o‘sishi ijobiy, 1-turning o‘sishi salbiy, 2-turning o‘sishiga 1-turning o‘sishi ijobiy, 2-turning o‘sishi salbiy ta’sir qilishi mumkin. Buni turlar birgaligi modeli deyiladi.

Turlarning o‘zaro ta’sirining ba’zi sodda modellarini keltiramiz.

$$\begin{cases} x' = ax + by, \\ y' = cx + dy \end{cases} \tag{1}$$

ko‘rinishdagi ikkita birinchi tartibli chiziqli oddiy differensial tenglamalar sistemasini o‘rganamiz, bu erda *a,b,c,d* – doimiy sonlar.

(1) sistemani turlarning o‘zaro ta’sirining sodda modeli sifatida qarash mumkin. (1) sistema $x(t)$ va $y(t)$ uzluksiz, differensiallanuvchi hol uchun ham turli ma’nodagi modellarni beradi.

1. $a > 0,\ b < 0,\ c < 0,\ d > 0$ holda turlararo raqobat modelini beradi.

2. $a>0,\ b>0,\ c<0,\ d>0$ holda yirtqich-o‘lja modelini beradi.

3. $a<0,\ b>0,\ c>0,\ d<0$ holda turlar birgaligi modelini beradi.

(1) sistemani echish uchun birinchi tenglamani differensiallab,

$$x''=ax'+by'$$

ni olamiz. Bunga ikkinchi tenglamadan y' uchun ifodani olib kelib qo‘yamiz. Natijada

$$x''=ax'+b\left(cx+dy\right)=ax'+bcx+bdy$$

hosil bo‘ladi. Bunga birinchi tenglamadan *by* uchun ifodani olib kelib qo‘yamiz,

$$x''=ax'+bcx+d\left(x'-ax\right)$$

yoki

$$x''-\left(a-d\right)x'+\left(ad-bc\right)x=0$$

o‘zgarmas koeffitsientli ikkinchi tartibli birjinsli oddiy differensial tenglamaga ega bo‘lamiz. Buni echib $x(t)$ uchun echimni olamiz, keyin (1) sistemadan $y(t)$ ni topish mumkin.

Misol. Yirtqich-o‘lja modeli. Faraz qilaylik, *t* momentdagi yirtqich turining soni $x(t)$, o‘lja turining soni $y(t)$, ular populyasiyalarining o‘sish tezliklari bir jinsli chiziqli sistema

$$\begin{cases} x'(t)=x(t)+y(t), \\ y'(t)=-x(t)+y(t) \end{cases}$$

bilan ifodalangan bo‘lsin. *t*=0 da $x(0)=y(0)=1000$ bo‘lganda $x(t),\ y(t)$ topilsin.

Echish. YUqoridagi tavsiya bilan $x''-2x'+2x=0$ ni olamiz $k^2-2k+2=0$ dan $k_{1,2}=1\pm i,\ \alpha=1,\ \beta=1$ bo‘ladi. Umumiy echim $x(t)=e^t\left(c_1\cos t+c_2\sin t\right)$ kelib chiqadi. Sistema 1-tenglamasidan

$y = x' - x = e^t\left(c_2\cos t - c_1\sin t\right)$, $x(0) = y(0) = 1000$ dan $c_1 = c_2 = 1000$ hosil bo‘ladi. SHuning uchun izlangan echim

$$x(t) = 1000e^t\left(\cos t + \sin t\right),$$
$$y(t) = 1000e^t\left(\cos t - \sin t\right)$$

ni olamiz. O‘lja turi qirilib ketishi uchun $\cos t - \sin t = 0$ bo‘lishi kerak, bundan $t = \frac{\pi}{4}$ vaqt birligi kelib chiqadi.

Yirtqichlar populyasiyasining muhitning boshqa resurslari hisobiga o‘sishi davom etadi va $x'(t) = x(t)$ tenglama bilan ifodalanadi.

Buni echsak, $\frac{dx}{dt} = x,\ \frac{dx}{x} = dt$, $\ln x = t + \ln c,\ x = ce^t$ hosil bo‘ladi.

23. Volterra modeli. Bu erda biz yirtqich-o‘lja modelining boshqa bir ko‘rinishini keltiramiz.

Vaqtning *t* momentidagi o‘lja populyasiyasi sonini *x* bilan, yirtqich populyasiyasi sonini esa *u* bilan belgilaylik.

Yirtqich mavjud bo‘lmaganda o‘lja

$$x' = \alpha x,\ \alpha > 0$$

tenglama bo‘yicha ko‘payadi, o‘lja bo‘lmaganda yirtqich

$$y' = -\beta y,\ \beta > 0$$

tenglama bo‘yicha kamayadi.

Yirtqich o‘ljani o‘lja qancha ko‘p bo‘lsa va yirtqichning o‘zi ham qancha ko‘p bo‘lsa, shuncha ko‘p eydi. SHuning uchun yirtqich mavjud bo‘lganda o‘lja soni

$$x' = \alpha x - \gamma xy,\ \gamma > 0$$

qonun bo‘yicha o‘zgaradi.

O‘ljaning eyilgan soni yirtqichning ko‘payishiga sabab bo‘ladi, buni

$$y' = -\beta y + \delta xy,\ \delta > 0$$

ko‘rinishida yozish mumkin.

SHunday qilib, biz

$$\begin{cases} x' = \alpha x - \gamma xy, \\ y' = -\beta y + \delta xy \end{cases} \qquad (1)$$

tenglamalar sistemasini olamiz,

$$x \ge 0, y \ge 0.$$

(1) ni yirtqich-o‘lja modeli deyiladi.

Bizni

$$\begin{cases} x' = 0 \\ y' = 0 \end{cases}$$

sistemaning echimidan iborat $M\left(x^*, y^*\right)$ muvozanat nuqtasi qiziqtiradi, bunda x^*, y^* kordinatalarni

$$\begin{cases} \alpha - \gamma y = 0, \\ -\beta + \delta x = 0 \end{cases}$$

sistemadan aniqlaymiz:

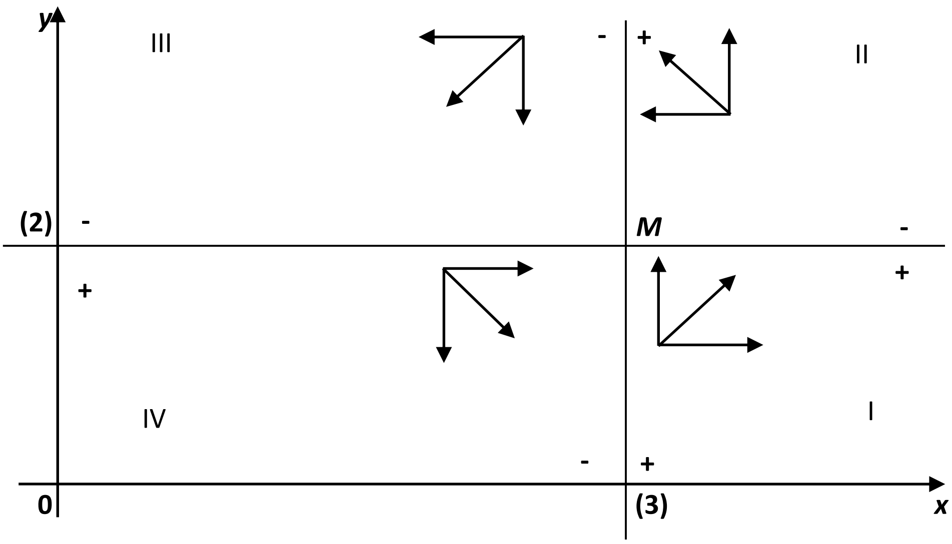
$$x^* = \frac{\beta}{\delta}, \quad y^* = \frac{\alpha}{\gamma}$$

Bizni $x > 0, y > 0$ hol qiziqtirganligidan va M nuqta

$$\alpha - \gamma y = 0, \qquad (2)$$

$$-\beta + \delta x = 0 \qquad (3)$$

to‘g‘ri chiziqlarning kesishish nuqtasidan iborat ekanligidan koordinatalar tekisligida birinchi chorak to‘rt sohaga ajraladi. Bu sohalarni I-(+,+), II-(-,+), III-(-,-), IV-(+,-) ko‘rinishda belgilash qulay.



Faraz qilaylik boshlang‘ich holat $Q(x_0, y_0)$ IV sohada bo‘lsin. U holda

$$\alpha - \gamma y > 0,$$

$$-\beta + \delta x < 0$$

tengsizliklar bajariladi. Bundan Q nuqtada x' va y' tezliklar turli ishorali bo‘lganligi kelib chiqadi:

$$x' > 0, \quad y' < 0$$

Demak *x* miqdor o‘sadi, *u* miqdor esa kamayadi.

SHunga o‘xshash *x* va *u* larning o‘zgarishlarini II, III va IV sohalarda tahlil qilamiz. SHakldа tasvirlangan ko‘rinishni olamiz.

Bu bilan boshlang‘ich holat *Q* o‘lja va yirtqich sonining davriy tebranishiga olib keladi, shuning uchun biror vaqt o‘tgandan keyin sistema yana *Q* holatga qaytadi.

24. Ikki davlat orasida munosabat. Mojaro modeli. Ikki qo‘shni davlatlarni *X* va *Y* bilan belgilaylik. Ular mojaroli vaziyatga uchrab qolgan holatni ko‘rib chiqaylik.

X va *Y* davlatlarning $t(t \geq 0)$ momentdagi qurollanishga xarajatlarini mos holda *x*=*x*(*t*) va *y*=*y*(*t*) bilan belgilaylik. Bular differensiallanuvchi funksiyalar deb qaraladi.

1-faraz. X davlat unga Y davlat tomonidan qilinadigan potensial urush xavfidan xavfsirab qurollanadi, o‘z navbatida Y davlat ham, X davlatning qurollanishga harajatlarining o‘sishini bilib, o‘zining qurollanishga xarajatlarini ko‘paytiradi. Har bir davlat qurollanishning o‘sishi (yoki kamayishi) tezligini boshqasining xarajatiga proporsional holda o‘zgartiradi. Eng sodda holda buni

$$\begin{cases} x' = \alpha y, \\ y' = \beta x \end{cases} \tag{1}$$

ko‘rinishda ifodalash mumkin, bu erda α va β – musbat doimiy sonlar.

Ammo yozilgan tenglamalar qurollanish darajasi hech bir narsa bilan limitlanmayotganligi (cheklanmayotganligi) dan iborat kamchilikka ega. SHuning uchun bu tenglamalarning o‘ng tomonlari tabiiy tuzatilishga muhtoj.

2-faraz. Davlatning mudofaaga harajatlari oqim darajasi qancha katta bo‘lsa, uning o‘sishi tezligi shuncha kichik bo‘ladi. Bu (1) sistemaga quyidagi o‘zgartishlarni kiritishga imkon beradi:

$$\begin{cases} x' = \alpha y - \gamma x, \\ y' = \beta x - \delta y \end{cases} \tag{2}$$

bu erda γ, δ – musbat doimiy sonlar.

3-faraz. Har bir davlat o‘zini qudratli deb davo qilishi va qo‘shni davlatga, hatto u buning mavjudligiga xavf tug‘dirmasa ham, dushmanligiga tayanib, qurollanishni kuchaytiradi. Mos da’volarni a va b bilan belgilaylik.

Bu erda a va b musbat doimiy sonlar. a va b manfiy sonlar bo‘lgan holda ularni yaxshi niyat koeffitsientlari deb atash mumkin.

Uchala farazlarga asoslanib, natijada

$$\begin{cases} x' = \alpha y - \gamma x + a, \\ y' = \beta x - \delta y + b \end{cases} \tag{3}$$

sistemani olamiz.

(3) ni qurollanish poygasi modeli deyiladi. Olingan sistemaning echimi boshlang‘ich shartlar $x_0 \geq 0$ va $y_0 \geq 0$ (qurollanish poygasining boshlang‘ich holati) uchun aniqlanadigan $x(t)$ va $y(t)$ funksiyalar bo‘ladi.

$\alpha, \beta, \gamma, \delta, a, b$ sonlar vaqtga bog‘liq bo‘lmagan (doimiy bo‘lgan) farazda olingan (3) sistemani tahlil qilamiz.

(3) sistema

$$x' = 0$$
$$y' = 0$$

muvozanat holatiga ega va muvozanatdagi x^0, u^0 qiymatlar

$$\begin{cases} \alpha y - \gamma x + a = 0, \\ \beta x - \delta y + b = 0 \end{cases}$$

sistemadan topiladi va ular

$$x^0 = \frac{\delta a + \alpha b}{\gamma\delta - \alpha\beta}, \quad y^0 = \frac{\gamma b + \beta a}{\gamma\delta - \alpha\beta}$$

ga teng.

Bu erdan $x^0 > 0,\ y^0 > 0$ da muvozanat mavjud bo‘lishi uchun

$$\gamma\delta > \alpha\beta \tag{4}$$

shart bajarilishi kerak.

Agar α, γ, δ o‘zgarmasdan β ortsa, bu x davlatning qurollanish sohasida o‘z strategiyasini o‘zgartmasligini, u davlat esa qurolning eskirish (sur’ati) o‘zgarmas bo‘lganda qurollanishni kuchaytirishini bildiradi.

U holda β ning etarlicha katta qiymatida muvozanat albatta mumkin bo‘lmay qoladi, (4) tengsizlik esa albatta buziladi.

Agar a va b nolga teng bo‘lsa, muvozanat holatga ikkala davlatda qurollanishning yo‘qligi javob beradi. t o‘sganda (4) shart bajarilganda x va u funksiyalar mos holda muvozanatdagi x^0, u^0 qiymatlarga intiladi.

25. Beylining epidemiya modeli. Immunitetli epidemiya modeli. O‘rganilayotgan kasallik uzoqqa cho‘ziladigan xarakterga ega deb faraz qilamiz, shuning uchun infeksiyaning berilish jarayoni kasallikning o‘zining borishiga nisbatan ancha tez boradi. SHu bilan birga kasallik yuqqan bemor (jonivor) to‘dadan chetlashmaydi va kasallik yuqmagan jonzodlarga uchrashuvlar (muloqotlar)da infeksiya yuqtiradi deb faraz qilamiz.

Faraz qilaylik, α va n mos holda boshlang‘ich momentdagi kasallik yuqqan va yuqmaganlar soni, $x(t)$ vaqtning t momentidagi kasallik yuqmaganlar soni, $y(t)$ esa t momentdagi kasallik yuqqanlar soni bo‘lsin.

Uncha katta bo‘lmagan $[0;T]$ oraliqqa tegishli t larning barchasi uchun

$$x + y = n + \alpha \tag{1}$$

tenglik o‘rinli (T bitta avlod umri uzunligidan kichik bo‘lishi kerak, shunda biz tenglamalarimizda jonzodlarning tabiiy o‘limini hisobga olmasligimiz mumkin bo‘ladi).

Infeksiya kasallik yuqqanlar bilan yuqmaganlar uchrashuvlarida o‘tadi. SHuning uchun kasallik yuqmaganlar soni vaqt o‘tishi bilan ular va boshqalar orasida uchrashuvlar soniga proporsional kamayadi, ya’ni kasallik yuqmaganlar sonining kamayishi tezligi xy ga proporsional bo‘ladi. Bundan

$$\frac{dx}{dt} = -\beta xy \tag{2}$$

tenglama hosil bo‘ladi, bu erda $\beta > 0$ infeksiya berilishi koeffitsienti.

(1) dan $y = n + \alpha - x$. Buni (2) ga qo‘yib, x ga nisbatan

$$\frac{dx}{dt} = -\beta x(n + \alpha - x)$$

tenglamani olamiz. Bu tenglama oson integrallanadi. Haqiqatan ham

$$\frac{dx}{x(n + \alpha - x)} = -\beta dt$$

yoki

$$\frac{1}{n+\alpha}\left(\frac{dx}{x} + \frac{dx}{n - x + \alpha}\right) = -\beta dt\,.$$

Bu erdan integrallab,

$$\frac{1}{n+\alpha}\left(\ln x-\ln(n-x+\alpha)\right)=-\beta t+C_1,$$

yoki

$$\ln\frac{x}{n-x+\alpha}=-\beta(n+\alpha)t+\ln c$$

ni hosil qilamiz. Potensirlab

$$\frac{x}{n-x+\alpha}=ce^{-\beta(n+\alpha)t}$$

ni olamiz. $x(0)=n$ dan foydalansak, $c=\frac{n}{\alpha}$ ni aniqlaymiz.

SHunday qilib

$$\frac{x}{n-x+\alpha}=\frac{n}{\alpha}e^{-\beta(n+\alpha)t},$$

bundan

$$x=\frac{n(n+\alpha)}{n+\alpha e^{+\beta(n+\alpha)t}}$$

kelib chiqadi. *u* (1) dan topiladi.

Endi kasallik unchalik uzoqqa cho‘zilmaydigan va davolanganlar immunitet oladigan bo‘lsin deb faraz qilamiz. Bu holda $n,\alpha,x(t),y(t)$ larni yuqoridagidek deb qaraymiz. $z(t)$ – vaqtning t momentidagi sog‘ayganlar soni deylik. U holda $[0,T]$ oraliqdagi barcha t lar uchun

$$x+y+z=n+\alpha \tag{3}$$

o‘rinli. SHu bilan birga $x(t)$, $y(t)$, va $z(t)$ funksiyalar uchun

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-\beta xy,\\ \dfrac{dy}{dt}=\beta xy-\gamma y,\\ \dfrac{dz}{dt}=\gamma y\end{cases} \tag{4}$$

sistemani yozishimiz mumkin, bu erda γ-davo topish koeffitsienti.

(4) sistemada 1-tenglamaning (2) dan farqi yo‘q, 2-tenglama $y(t)$ ning o‘zgarishini xarakterlaydi. Bu o‘zgarish tezligi βxy ortish va $-\gamma y$ kamayishdan tuziladi. $-\gamma y$ miqdor kasallarning bir qismi sog‘ayib, immunitet olishlaridan hosil bo‘ladi, 3-tenglama sog‘ayganlar sonining o‘sishi tezligini ifodalaydi.

Bizning farazlarimizdan $x(0)=n$, $y(0)=\alpha$, $z(0)=0$ (5) boshlang‘ich shartlar kelib chiqadi. (4) sistema (5) shartlar bilan $[0,T]$ da aniqlangan yagona echimga ega bo‘ladi. Bu echimni qo‘yidagi yo‘l bilan topish mumkin.

2-tenglamani 1-tenglamaga bo‘lib yuborib,

$$\frac{dy}{dx} = -1 + \frac{\gamma}{\beta x}$$

ni olamiz. Bu erdan integrallab va boshlang‘ich berilganlardan foydalanib, sistemaning birinchi integralini olamiz:

$$y + x - \frac{\gamma}{\beta}\ln x = \alpha + n - \frac{\gamma}{\beta}\ln n \tag{6}$$

(3) dan $y + x - n = \alpha - z$, buni (6) ga qo‘yamiz:

$$\alpha - z - \frac{\gamma}{\beta}\ln x = \alpha - \frac{\gamma}{\beta}\ln n, \quad -z = \frac{\gamma}{\beta}\ln\frac{x}{n}, \quad \ln\frac{x}{n} = -\frac{\beta}{\gamma}z, \quad \frac{x}{n} = e^{-\frac{\beta}{\gamma}z},$$

$$x = ne^{-\frac{\beta}{\gamma}z} \tag{7}$$

(3) dan $y = n + \alpha - x - z$. Bunga (7) ni qo‘ysak

$$y = n + \alpha - z - ne^{-\frac{\beta}{\gamma}z}$$

Buni (4) dagi uchinchi tenglamaga qo‘yamiz, natijada

$$\frac{dz}{dt} = \gamma\left[n + \alpha - z - ne^{-\frac{\beta}{\gamma}z}\right].$$

(4) sistemani birinchi tartibli bitta tenglamaga keltirgan bo‘lamiz. Bu erdan (aqalli taqribiy bo‘lsa ham) noma’lum funksiya $z(t)$ ni topib, keyin (3) va (6) dan (4) sistema echimining qolgan ikkita tashkil etuvchilari $x(t)$, $u(t)$ larni topamiz.

Nazorat savollari.

1. Kinetik energiyaga ta'rif bering.
2. Potensial energiyaga ta'rif bering.
3. "O‘q-yuk" kinetik energiyasining o‘zgarishini yozing.
4. O‘q-yuk tizimining kinetik energiyasi qachon potentsial energiyaga aylanadi?
5. Differentsial tenglamaning echimini toping $\frac{dl}{dt} = \frac{W}{hS\rho}$
6. Mathcadda burg‘ulash uzunligining massa birligini bug‘lash uchun zarur bo‘lgan energiyaga bog‘liqlik grafigini chizing.
7. Impuls deganda nimani tushunasiz?
8. Birinchi kosmik tezlikning qiymati qanday?
9. Impulsni saqlanish qonunining differentsial shaklini yozing.
10. Differentsial shakldа yozilgan impulsni saqlash qonuni tenglamasini ko‘rsating.
11. Nima uchun kosmik raketalar ko‘p bosqichli qilib yaratiladi?
12. Arximed qonunini ta'riflang.
13. Nyutonning ikkinchi qonuni nimani tavsiflaydi?
14. Suv osti kemasinins suv yuziga chiqish trayektoriyasi formulasi qanday?

3 – Mavzu: Chiziqli dasturlash va demografik modellar.

Reja:

1. Chiziqli dasturlash masalasining umumiy qo'yilishi.
2. Optimal rejani topishning simpleks usuli.
3. Transport masalasi.
4. Demografik modellar.

Faraz qilaylik, korxonada ***m*** xil mahsulot ishlab chiqarilsin; ulardan ixtiyoriy birini ***i (i=1,…,m)*** bilan belgilaymiz. Bu mahsulotlarni ishlab chiqarish uchun ***n*** xil ishlab chiqarish faktorlari zarur bo'lsin. Ulardan ixtiyoriy birini ***j (j=1,…,n)*** bilan belgilaymiz.

Har bir ishlab chiqarish faktorining umumiy miqdori va bir birlik mahsulotni ishlab chiqarish uchun sarf qilinadigan normasi quyidagi jadvalda berilgan

i/ch faktorlari i/ch mahsulot Turlari	1	2	3	..	n	Daro- mad
1	a_{11}	a_{12}	A_{13}	..	a_{1n}	C_1
2	a_{21}	a_{22}	A_{23}	..	a_{2n}	C_2
…	…	…	…	..	…	…
M	a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}	..	a_{mn}	C_m
i/ch faktorining zahirasi	b_1	B_2	B_3	..	b_n	

Jadvaldagi har bir b_j – ***j***-ishlab chiqarish faktorining umumiy miqdori (zahirasi)ni; a_{ij} – ***i***-mahsulotning bir birligini ishlab chiqarish uchun sarf qilinadigan ***j***-faktorning miqdori; c_i–korxonaning ***i***-mahsulotning bir birligini realizatciya qilishdan oladigan daromadi.

Masalaning iqtisodiy ma`nosi: korxonaning ishini shunday rejalashtirish kerakki: a) hamma mahsulotlarni ishlab chiqarish uchun sarf qilinadigan har bir ishlab chiqarish faktorining miqdori ularning umumiy miqdoridan oshmasin; b) mahsulotlarni realizatciya qilishdan korxonaning oladigan daromadi maksimal bo’lsin.

Rejalashtirilgan davr ichida ishlab chiqariladigan ***i***-mahsulotining miqdorini $\boldsymbol{x_i}$ bilan belgilaymiz. U holda masaladagi a) shart quyidagi tengsizliklar sistemasi orqali ifodalanadi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{m1}x_m \le b_1 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{m2}x_m \le b_2 \\ ------------------ \\ a_{1m}x_1 + a_{2m}x_2 + \cdots + a_{mn}x_m \le b_n \end{cases} \qquad (1)$$

(1)

Masalaning iqtisodiy ma`nosiga ko’ra hamma noma`lumlar manfiy bo’lmasligi kerak, ya`ni:

$$x_i \ge 0 \qquad (i=1,2,\ldots m) \qquad (2)$$

Masaladagi b) shart uning maqsadini aniqlaydi. Demak masalaning maqsadi mahsulotlarni realizatciya qilishdan korxonaning oladigan umumiy daromadini maksimallashtirishdan iborat va uni

$$y = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_mx_m \qquad (3)$$

chiziqli funksiya orqali ifodalash mumkin. Shartga ko’ra $\boldsymbol{y \to max}$. Bu shartni $\boldsymbol{Y_{max}}$ ko’rinishda belgilaymiz.

Chiziqli dasturlash masalasi umumiy holda 1-3 kabi ifodalanadi

(1) va (2) shartlarni qanoatlantiruvchi noma`lumlarning shunday qiymatlarini topish kerakki, ular (3) chiziqli funksiyaga minimal (maksimal) qiymat bersin. Masalaning (1) va (2) shartlari uning chegaraviy shartlari deb, (3) chiziqli funksiya esa masalaning maqsadi yoki maqsad funksiyasi deb ataladi.

Masaladagi barcha chegaralovchi shartlar va maqsad funksiya chiziqli ekanligi ko'rinib turibdi. Shuning uchun ham (1)–(3) masala chiziqli dasturlash masalasi deb ataladi.

Konkret masalalarda (1) shart tenglamalar sistemasidan, «≥» yoki «≤» ko'rinishdagi tengsizliklar sistemasidan yoki aralash sistemadan iborat bo'lishi mumkin. Lekin ko'rsatish mumkinki, (1)–(3) ko'rinishdagi masalani osonlik bilan quyidagi ko'rinishga keltirish mumkin.

$$\begin{cases} \mathbf{a}_{11}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{12}\mathbf{x}_2 + \cdots + \mathbf{a}_{1n}\mathbf{x}_n = \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{a}_{21}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{22}\mathbf{x}_2 + \cdots + \mathbf{a}_{2n}\mathbf{x}_n = \mathbf{b}_2 \\ ------------------ \\ \mathbf{a}_{m1}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{m2}\mathbf{x}_2 + \cdots + \mathbf{a}_{mn}\mathbf{x}_n = \mathbf{b}_m \end{cases} \qquad (4)$$

$$\mathbf{x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \ldots,\ x_n \geq 0,} \qquad (5)$$

$$Y_{min} = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \qquad \mathbf{(6)}$$

(4)-(6) ko'rinish chiziqli dasturlash masalasining kanonik ko'rinishi deb ataladi. (4)–(6) masala vektorlar yordamida quyidagicha ifodalash mumkin:

$$\mathbf{P_1x_1 + P_2x_2 + \ldots + P_nx_n = P_0} \qquad (7)$$

$$\mathbf{X \geq 0} \qquad (8)$$

$$\mathbf{Y_{min} = CX} \qquad (9)$$

bu erda

$$\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{11} \\ \mathbf{a}_{21} \\ \dots \\ \mathbf{a}_{\mathbf{m}1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{12} \\ \mathbf{a}_{22} \\ \dots \\ \mathbf{a}_{\mathbf{m}2} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \mathbf{p_n} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{1\mathbf{n}} \\ \mathbf{a}_{2\mathbf{n}} \\ \dots \\ \mathbf{a_{mn}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \dots \\ \mathbf{b_m} \end{pmatrix},$$

$\mathbf{S = (C_1, C_2, \dots, C_n)}$ **–** vektor–qator**.**

$\mathbf{X = (X_1, X_2, \dots, X_n)}$ **–** vektor**–**ustun.

(4)-(6) masalaning matritca ko'rinishdagi ifodasi quyidagicha yoziladi:

$$\mathbf{AX = P_0}, \qquad (10)$$

$$\mathbf{X \geq 0}, \qquad (11)$$

$$\mathbf{Y_{min} = CX}, \qquad (12)$$

bu erda $\boldsymbol{S = (C_1, C_2, \dots, C_n)}$ **–** qator vektor, $\boldsymbol{A = (a_{ij})}$ – (4) sistema koeffitcientlaridan tashkil topgan matritca; $\boldsymbol{X = (X_1, X_2, \dots, X_n)}$ va $\boldsymbol{P_0 = (b_1, b_2, \dots, b_n)}$ **–** ustun vektorlar.

(4)-(6) masalani yig'indilar yordamida ham ifodalash mumkin:

$$\sum_{\mathbf{j}=1}^{\mathbf{n}} \mathbf{a_{ij} x_j} = \mathbf{b_i}, \quad (\mathbf{i} = 1, \dots, \mathbf{m}) \qquad (13)$$

$$\mathbf{x_j} \geq 0, \quad (\mathbf{j} = 1, \dots, \mathbf{n}) \qquad (14)$$

$$\mathbf{Y}_{\min} = \sum_{\mathbf{j}=1}^{\mathbf{n}} \mathbf{C_j X_j} \qquad (15)$$

1-ta`rif. Berilgan (4)–(6) masalaning mumkin bo'lgan yechimi yoki rejasi deb, uning (4) va (5) shartlarni qanoatlantiruvchi $\boldsymbol{X = (x_1, x_2, \dots, x_n)}$ vektorga aytiladi.

2-ta`rif. Agar (7) yoyilmadagi musbat x_i koeffitcientli P_i ($i=1,\dots,m$) vektorlar o'zaro chiziqli bog'liq bo'lmasa, u holda $X=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ reja tayanch reja deb ataladi.

3-ta`rif. Agar $X=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ tayanch rejadagi musbat komponentalar soni m ga teng bo'lsa, u holda bu reja aynimagan tayanch reja, aks holda aynigan tayanch reja deyiladi.

4-ta`rif. Chiziqli funksiya (6) ga eng kichik qiymat beruvchi $X=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ tayanch reja masalaning optimal rejasi yoki optimal yechimi deyiladi.

Yuqorida keltirilgan teoremalardan quyidagi xulosalarni chiqarish mumkin.

1-xulosa. K to'plamning har bir chetki nuqtasiga $P_1,P_2,\dots P_n$ vektorlar sistemasiga m ta o'zaro chiziqli bog'liq bo'lmagan vektorlar sistemasi mos keladi.

2-xulosa. $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ K to'plamning chetki nuqtasi bo'lishi uchun musbat x_i komponentalar

$$\mathbf{P_1x_1 + P_2x_2 + \dots + P_nx_n = P_0}$$

yoyilmada o'zaro chiziqli bog'liq bo'lmagan P_i vektorlarning koeffitcientlaridan iborat bo'lishi zarur va etarli.

3-xulosa. Chiziqli dasturlash masalasi tayanch yechimlaridan tashkil topgan to'plam K qavariq to'plamning chetki nuqtalar to'plamiga mos keladi va aksincha, har bir tayanch yechim K to'plamning biror chetki nuqtasiga mos keladi.

4-xulosa. Chiziqli dasturlash masalasining optimal yechimini K to'plamning chetki nuqtalari orasidan qidirish kerak.

Chiziqli dasturlash masalalarini yechishni simpleks usuli bir tayanch rejasidan boshqa tayanch rejasiga o'tishga asoslangan bo'lib, qaysikim bu yerda maqsad funksiyasini qiymati oshib boradi. Simpleks usulining mohiyati shundan iboratki, dastavval CHDMdagi barcha shartlarni qanoatlantiruvchi ***mumkin bo'lgan tayanch reja*** topiladi.

🗁**Boshlang'ich tayanch reja**

Boshlang'ich tayanch reja chekli sondagi etap (simpleks)dan keyin optimal rejani hosil qilish yo'lini ko'rsatadi va har bir navbatdagi simpleks oldingisiga nisbatan optimal rejaga yaqinroq rejani beradi. Masalani yechish jarayoni optimal yechim topilguncha yoki masalaning maqsad funksiyasi chekli maksimum (minimum)ga ega emasligi aniqlanguncha davom ettiriladi.

Demak, CHDM simpleks usuli bilan yechilganda, berilgan masalaning barcha shartlarini qanoatlantiruvchi boshlang'ich tayanch reja topiladi. Bu boshlang'ich tayanch rejaga asoslanib chekli sondagi simplekslar (bir simpleks jadvalidan, navbatdagi simpleks jadvaliga o'tish) bilan navbatdagi yangi tayanch rejlarni topish va ularning optimalligini tekshirib borish, masalaning optimal yechimga ega ekanligi aniqlanguncha davom ettiriladi.

🗁**Simpleks usuli CHDMning quyidagi xossalariga asoslangan:**

① Agar masala ekstremumga ega bo'lsa u yagona bo'ladi, ya'ni maksimum yoki minimumlardan biri bo'ladi.

② CHDM ning hamma rejalari (yechimlari) to'plami qavariqdir.

③ Maqsad funksiyasi o'zining maksimal yoki minimal qiymatiga qavariq ko'p yoqlining qirralarining birida erishadi.

④ Qavariq ko'p yoqlining har bir qirrasi CHDMning tayanch rejasi bo'ladi.

🗁🗁 CHDMni MAKSIMUMINI TOPISh

🗁Bizga quyidagi CHDM berilgan bo'lsin:

$$Z_{max} = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \qquad (1)$$

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &\le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &\le b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \ldots + a_{3n}x_n &\le b_3, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad &\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &\le b_m. \end{aligned} \qquad (2)$$

$$x_{1,2,\ldots,n} \ge 0 \qquad (3)$$

Bu CHDM quyidagi mazmunni beradi: (2) tengsizliklar sistemasidagi asosiy noma’lumlar ($x_1,x_2,x_3,...,x_n$) ning shunday qiymatlarini topish talab qilinadiki, topilgan qiymatlar musbat yoki nolga teng bo’lib, maqsad funksiyasi deb ataluvchi

$$Z_{max} = c_1x_1+c_2x_2+...+ c_nx_n$$

funkstionalga maksimal qiymat bersin.

Qaralayotgan CHDMdagi tenglamalar sistemasida n noma’lumlar soni, m esa tenglamalar sonini ifodalaydi. Amaliyotda: ***a***) noma’lumlar soni tenglamalar sonidan katta ($n > m$); ***b***) noma’lumlar soni tenglamalar soniga teng ($n = m$); ***c***) noma’lumlar soni tenglamalar sonidan kichik ($n < m$) bo’lishi mumkin.

I. Boshlang’ich tayanch rejani topish

🗁 CHDMni yechish uchun **birinchi bajaradigan ishimiz** (2) tengsizliklar sistemasini ***kanonik*** ko’rinishga, ya’ni tenglamalar sistemasi ko’rinishiga keltirish va ***tayanch rejani*** topishdir.

(2) sistemada berilgan $x_1, x_2, ..., x_n$ noma’lumlar (o’zgaruvchilar) ***asosiy noma’lumlar*** deb nomlanadi.

Demak, birinchi navbatda ***tayanch yechim (reja)*** topiladi.

(2) tengsizliklar sistemasini tenglamalar sistemasiga keltirish uchun, tengsizliklarning har biriga mos ravishda ***qo’shimcha noma’lumlar*** deb ataluvchi musbat yoki nolga teng bo’lgan ushbu $y_1, y_2, ..., y_m \geq 0$ o’zgaruvchilarni qo’shamiz. CHDMni iqtisodiy mazmuniga ko’ra qo’shimcha noma’lumlar (2) sistemaga **musbat ishora** bilan qo’shiladi. Biz noma’lumlar soni tenglamalar sonidan katta ($n > m$) bo’lgan holni qaraylik.

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + y_1 = b_1, \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n + y_2 = b_2, \\ &... \quad ... \quad ... \quad ... \quad .... \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ...+ a_{mn}x_n + y_m = b_m. \end{aligned} \tag{4}$$

Demak, CHDMda berilgan noma’lumlar ***asosiy noma’lumlar***, tengsizliklar sistemasini tenglamalar sistemasiga aylantirish uchun qo’shiladigan noma’lumlar qo'shimcha noma'lumlar deb ataladi. Qo'shimcha noma'lumlar «≤» ko'rinishdagi tengsizliklarga **musbat**, «≥» ko'rinishdagi tengsizliklarga esa **manfiy ishora** bilan qo'shiladi.

Chiziqli dasturlash masalasidagi tengsizliklar sistemasini tenglamalar sistemasi ko'rinishiga keltirish uchun qo'shiladigan qo'shimcha noma'lumlar maqsad funksiyasiga nol ***koeffistient*** bilan qo'shiladi, ya'ni:

$$\mathbf{Z_{max}} = c_1x_1+c_2x_2+...+c_nx_n+c_{n+1}y_1+c_{n+2}y_2+...+c_m y_m =$$

$$=c_1x_1+c_2x_2+...+c_nx_n+0y_1+0y_2+...+0y_m.$$

Standart formadagi $x_1, x_2, ..., x_n$ o'zgaruvchilar bazis noma'lumlar, qo'shimcha kiritilgan $y_1, y_2, ..., y_m \geq 0$ o'zgaruvchilar **bazis bo'lmagan noma'lumlar** deyiladi.

🗁**CHDMda boshlang'ich tayanch rejani topish** uchun, masaladagi (2) tengsizliklar sistemasi qo'shimcha noma'lumlarni qo'shish natijasida tenglamalar sistemasi (4) ga aylantirilgach, bu sistema qo'shimcha noma'lumlarga nisbatan yechib olinadi, ya'ni:

$$\begin{aligned}
&y_1 = b_1 - (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n),\\
&y_2 = b_2 - (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n),\\
&y_3 = b - (a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + ... + a_{3n}x_n), \qquad (5)\\
&... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ...\\
&y_m = b_m - (a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n).
\end{aligned}$$

Maqsad funksiyasini quyidagicha ifodalab olamiz:

$$\mathbf{Z_{max}} = 0-(-c_1x_1-c_2x_2-...-c_nx_n)+0y_1+0y_2+0y_3+...+0y_m. \qquad (6)$$

Topilgan (5) sistemadan qoidaga ko'ra asosiy noma'lumlar nolga tenglashtirib olinadi, ya'ni:

$$x_1 = x_2 = ... = x_n = 0.$$

Natijada quyidagi boshlang'ich tayanch rejaga ega bo'lamiz (bu yerda masalaning berilishidagi ozod hadlar musbat deb qaralmoqda):

$$y_1 = b_1,\ y_2 = b_2,\ y_3 = b_3,\ ...,y_m = b_m, \qquad \mathbf{Z_{max}} = 0. \qquad (7)$$

CHDMda (7) ni (boshlang'ich tayanch rejani) umumiy holda quyidagicha yozish qabul qilingan:

$$\mathbf{X^*} = (x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m) = (0, 0, \ldots, 0, b_1, b_2, \ldots, b_m).$$

Topilgan tayanch rejaning yechimlari (qiymatlari) musbat bo'lsa berilgan CHDMni simpleks usul bilan yechish mumkin bo'ladi.

Quyidagilarga e'tibor berishimiz lozim:

Agar chegaraviy shartlardagi b_i ozod xadlar manfiy ishorali bo'lsa, u holda ularni har doim (-1) ga ko'paytirib, musbat holatga keltirish kerak.

II. Boshlang'ich simpleks jadvalini tuzish

Endi (5) va (6) da berilganlarni quyidagi ko'rinishdagi jadvalga joylashtiramiz va uni boshlang'ich simpleks jadval deb nomlaymiz.

CHDMni maksimumini topish uchun tuzilgan boshlang'ich simpleks jadvali

Bazis o'zgaruv-Chilar	C_j	B_i	x_1	x_2	…	x_n	y_1	y_2	…	y_m	$\frac{b_i}{a_{ij}}$
			s_1	s_2	…	s_n	$s_{n+1} = 0$	$s_{n+2} = 0$	…	$s_m = 0$	
y_1	s_{n+1}	b_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	1	0	…	0	
y_2	s_{n+2}	b_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	0	1	…	0	
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
y_m	s_m	b_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	0	0	…	1	
$Z_j - C_j$		0	$-s_1$	$-s_2$	…	$-s_n$	0	0	…	0	

☞ Bazis bo'lmagan $y_1, y_2, \ldots, y_m \geq 0$ noma'lumlar «Bazis o'zgaruvchilar» ustuniga yoziladi.

☞Bazismas noma'lumlarning $s_{n+1}, s_{n+2}, \ldots, s_m$ koeffistientlari «S_i» ustuniga yoziladi.

☞ $b_1, b_2, \ldots, b_m$ ozod hadlar «B_i» ustuniga yoziladi.

☞$Z_{max} = c_1x_1+c_2x_2+...+c_nx_n+0y_1+0y_2+...+0y_m$ maqsad funksiyaning koeffistientlari **Z_j - C_j** qatorga **qarma - qarshi ishora** bilan yoziladi. Bu qator **indeks qator** deb yuritiladi.

III. Optimal rejani topish algoritmi

🗁 CHDM ning simpleks jadvalida **Z_j - C_j** indeks qatoridagi hamma noma'lumlarning koeffistientlari musbat bo'lsa masala optimal yechimga ega bo'ladi. Simpleks usuli bilan CHDMni optimal yechimini topishda **Z_j - C_j** indeks qatoridagi hamma noma'lumlarning koeffistientlari musbat ishoraga keltirish maqsad qilib qo'yiladi.

Simpleks jadvalida **Z_j - C_j** indeks qatoridagi noma'lumlarining koeffistientlaridan bittasi yoki bir nechtasi manfiy bo'lganida hal qiluvchi elementni tanlashda quyidagi munosabatlar amalga oshishi mumkin.

① **Simpleks jadvalida hal qiluvchi ustunni (**HQU**) tanlash**

☞ Agar **Z_j - C_j** indeks qatoridagi $x_1, x_2, ... , x_n$ noma'lumlarning $s_1, s_2, ..., s_n$ koeffistientlardan birortasi ***manfiy*** ishorali son bo'lsa, shu ***manfiy*** ishorali son to'rgan ustun HQU bo'ladi.

☞ Agar **Z_j - C_j** indeks qatorida bunday manfiy sonlar bir nechta bo'lsa, u vaqtda HQUni tanlash uchun shu ***manfiy*** sonlarning absolyut qiymatlari bo'yicha eng kattasi olinadi. Bu sonlar ichida, ulardan bir nechtasi bir - biriga teng bo'lsa, u holda ulardan hohlagan birini olib bosh ustun uchun tanlanadi.

② **Simpleks jadvalida hal qiluvchi satrni (HQS) tanlash**

☞Simpleks jadvalida **HQS**ni tanlash uchun **B_i** ozod hadlar ustunidagi hamma sonlarni (agar ularning ishorasi bir xil bo'lsa) **HQU**dagi mos kelgan sonlarga bo'lib, ulardan eng kichigi tanlanadi. Bu qiymat simpleks jadvadagi $\frac{b_i}{a_{ij}}$ ustunga yoziladi. Bunday kichik sonlar bir nechta bo'lsa, ulardan xohlagan birini **HQS** qilib tanlash mumkin.

③ **Simpleks jadvalini hal qiluvchi elementi (HQE)**

☞Simpleks jadvalidagi **HQU** va **HQS** ning kesishgan kattagidagi son hal qiluvchi element **(HQE)** bo'ladi.

④ Yangi simpleks jadvaliga o'tish

Hal qiluvchi ustun, hal qiluvchi satr va hal qiluvchi element topilgach yangi simpleks jadvalidagi hamma sonlar Jordan chiqarish usuli yordamida topiladi, ya'ni:

☞ Hal qiluvchi satrdagi hamma elementlar hal qiluvchi elementga bo'linadi va ishorasi o'zgartirilmasdan yoziladi;

☞ Hal qiluvchi ustundagi qolgan hamma elementlar o'rniga nol yoziladi.

☞ Qolgan hamma elementlar quyidagi to'g'ri to'rtburchak formulasi yordamida topiladi:

$$b_{rk} = a_{rk} - \frac{a_{rj} * a_{ik}}{a_{ij}} \text{ yoki } b_{rk} = \frac{a_{rk} * a_{ij} - a_{rj} * a_{ik}}{a_{ij}}. \text{ (Bu yerda } i \neq r, j \neq k)$$

a_{rk} element o'rnida hosil qilinadigan b_{rk} elementni to'g'ri to'rtburchak formulasi bilan topish uchun:Jordan jadvalidan fragment

…	**…**	**j- hal qiluvchi ustun**	**…**	**k-ustun**	**…**
…	**…**	**…**	**…**	**…**	**…**
i– hal qiluvchi satr	**…**	**[a_{ij}] hal qiluvchi element**	**…**	**a_{ik} (i -satr va k –ustunda joylashgan element)**	**…**
…	**…**	**…**	**…**	**…**	**…**
r – satr	**…**	**a_{rj} r-satr va j – ustunda joylashgan element**	**…**	**a_{rk} r-satr va k – ustunda joylashgan element**	**…**
…	**…**	**…**	**…**	**…**	**…**

🗁 Bu jarayon **Z_j-C_j** indeks qatoridagi hamma noma'lumlarning koeffistientlari musbat bo'lguncha davom ettiriladi.

Z_j - C_j indeks qatoridagi hamma noma'lumlarning koeffistientlari musbat bo'lsa, berilgan CHDM optimal yechimga ega bo'ladi.

Agar $x_{1,\,2,\,...,\,n} \geq 0$ sharti (2) sistemani qanoatlantirsa, u masalaning **mumkin bo'lgan yechimlari** deb ataladi.

Masalaning **mumkin bo'lgan yechimlari** $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$ maqsad funksiyasining minimum yoki maksimum qiymatini ifodalovchi optimal yechimlari deyiladi.

🗁 CHDMni simpleks usuli bilan yechishdan avval (2) s**istemaning yechimi mavjud emaslik shartlari**ning bajarilishi tekshiriladi, ya'ni:

a) Agar birorta tenglama tenglama $0x_1 + 0x_2 + ... + 0x_n = b$, ($b_1 \neq 0$)

ko'rinishda bo'lsa, u holda (2) sistema birlashmagan bo'ladi va u umumiy yechimga ega bo'lmaydi.

b) Agar (2) sistemada biror tenglama $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$ ko'rinishda bo'lib, $a_1, a_2, ... , a_n$ koeffistientlar bir xil ishorali bo'lib b ning ishorasiga teskari (qarama – qarshi) bo'lsa, sistema musbat yechimga ega bo'lmaydi.

Agar *a*) va *b*) shartlardan birortasi bajarilsa CHDM yechimga ega bo'lmaydi. Demak bu shartlarning ikkalasi ham bajarilmasa, qaralayotgan masalani simpleks usulda yechish mumkin bo'ladi.

🗁**Xulosa.** Demak, simpleks usuli bilan optimal yechimni topish quyidagi etaplarni o'z ichiga oladi:

① Tayanch reja topiladi. ② Simpleks jadval tuziladi.

③ Simpleks jadvalining **Z_j - C_j** indeks qatorida **manfiy son** borligi tekshiriladi. Agar manfiy son bo'lmasa masalaning optimal yechimi topilgan bo'ladi. Aks holda masalaning yangi tayanch rejasini topish davom ettiriladi.

Transport masalasi

Transport masalasi – chiziqli dasturlashning aloxida xususiyatli masalasi bo'lib bir jinsli yuk tashishning eng tejamli rejasini tuzish masalasidir. Bu masala xususiyligiga qaramay qo'llanish sohasi juda kengdir.Masalaning qo'yilishi va uning matematik modeli

m-ta A_i (i = 1,2,…, m) ta`minotchilarda yig'ilib qolgan bir jinsli $a_i$ miqdordagi mahsulotni **n**-ta $\boldsymbol{B_j}$ iste`molchilarga mos ravishda $\boldsymbol{b_j}$ **(j=1,2,…,n)** miqdorda etkazib berish talab qilinadi.

Har bir i-ta`minotchidan har bir j-iste`molchiga bir birlik yuk tashish yo'l harajati ma`lum va u $\boldsymbol{c_{ij}}$ – so'mni tashkil qiladi.

Yuk tashishning shunday rejasini tuzish kerakki, ta`minotchilardagi barcha yuklar olib chiqib ketilsin, iste`molchilarning barcha talablari qondirilsin va shu bilan birga yo'l harajatlarining umumiy qiymati eng kichik bo'lsin.

Masalaning matematik modelini tuzish uchun i-ta`minotchidan j-iste`molchiga etkazib berish uchun rejalashtirilgan yuk miqdorini x_{ij} orqali belgilaymiz, u holda masalaning shartlarini quyidagi jadval ko'rinishda yozish mumkin:

Ta`minotchilar	Iste`molchilar				Zaxiralar
	B_1	B_2	…	B_n	
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	C_{1n} X_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	C_{2n} X_{2n}	a_2
…	…	…	…	…	…
A_m	c_{n1} x_{n1}	c_{n2} x_{n2}	…	C_{nm} x_{nm}	a_m
Talablar	b_1	b_1	…	b_1	$\Sigma a_i = \Sigma b_j$

Jadvaldan ko'rinadiki, i-ta`minotchidan j-iste`molchiga rejadagi x_{ij} – birlik yuk etkazib berish yo'l harajati $c_{ij}\,x_{ij}$ – so'mni tashkil qiladi. Rejaning umumiy qiymati esa,

$$\mathbf{Z} = \sum_{\mathbf{i}=1}^{\mathbf{m}} \sum_{\mathbf{j}=1}^{\mathbf{n}} \mathbf{c}_{\mathbf{ij}}\mathbf{x}_{\mathbf{ij}}$$

ga teng bo'ladi.

Masalaning birinchi shartiga ko'ra, ya`ni barcha yuklar olib chiqib ketilishi sharti uchun

$$\sum_{\mathbf{j}=1}^{\mathbf{n}} \mathbf{x}_{\mathbf{ij}} = \mathbf{a}_{\mathbf{i}} \qquad (\mathbf{i} = \overline{1,\mathbf{m}})$$

tengliklarga ega bo'lamiz;

ikkinchi shartga ko'ra, ya`ni barcha talablar to'la qondirilishi uchun

$$\sum_{\mathbf{i}=1}^{\mathbf{m}} \mathbf{x}_{\mathbf{ij}} = \mathbf{b}_{\mathbf{j}} \qquad (\mathbf{j} = \overline{1,\mathbf{n}})$$

tengliklarga ega bo'lamiz;

Shunday qilib masalaning matematik modeli quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\begin{array}{l} (1) \\ \\ (2) \end{array} \begin{cases} \sum_{\mathbf{j}=1}^{\mathbf{n}} \mathbf{x}_{\mathbf{ij}} = \mathbf{a}_{\mathbf{i}},\ \mathbf{i} = 1,2,...,\mathbf{m} \\ \sum_{\mathbf{i}=1}^{\mathbf{m}} \mathbf{x}_{\mathbf{ij}} = \mathbf{b}_{\mathbf{j}},\ \mathbf{j} = 1,2,...,\mathbf{n} \end{cases}$$

chiziqli tenglamalar sistemasining

(3) $\mathbf{x_{ij}}$ **? 0,** **i=1,2,…,m; j=1,2,…,n**

shartlarni qanoatlantiruvchi shunday echimini topish kerakki, bu echim (3)

$$Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} \cdot X_{ij}$$

chiziqli funktciyaga eng kichik qiymat bersin.

Bu modelda

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \qquad (5)$$

tenglik o'rinli deb faraz qilinadi. Bunday masalalar «yopiq modelli transport masalasi» deyiladi.

Teorema. Talablar hajmi zaxiralar hajmiga teng bo'lgan istalgan transport masalasining optimal echimi mavjud bo'ladi.

Boshlang'ich tayanch echimni qurish.

Ma`lumki, ixtiyoriy chiziqli dasturlash masalasining optimal echimini topish jarayoni boshlang'ich tayanch echimini kurishdan boshlanadi.

Masalaning (1) va (2) sistemalari birgalikda **mn** – ta noma`lumli **m+n** – ta tenglamalarda iborat. Agar (1) sistemaning tenglamalarini hadma-had qo'shsak, va aloxida (2) sistemaning tenglamalarini hadma-had qo'shsak, ikkita bir xil tenglama hosil bo'ladi. Bu esa (1) va (2) dan iborat sistemada bitta chiziqli bog'lik tenglama borligini ko'rsatadi. Bu tenglama umumiy sistemadan chiqarib tashlansa, masala **m+n-1** ta chiziqli bog'liq bo'lmagan tenglamalar sistemasidan iborat bo'lib qoladi. Demak, masalaning buzilmaydigan tayanch echimi **m+n-1** ta musbat komponentalardan iborat bo'ladi.

Shunday qilib, transport masalasining boshlang'ich tayanch echimi biror usul bilan topilgan bo'lsa, (x_{ij}) – matritcaning **m+n-1** ta komponentalari musbat bo'lib, qolganlari nolga teng bo'ladi. Agar transport masalasining shartlari va uning tayanch echimi yuqoridagi jadval ko'rinishda berilgan bo'lsa, noldan farqli x_{ij} – lar joylashgan kataklar «band kataklar», qolganlari «bo'sh kataklar» deyiladi.

Agar band kataklarni vertikal yoki gorizontal kesmalar bilan tutashtirilganda yopiq ko'pburchak hosil bo'lsa, bunday xol tcikllanish deyiladi va echim tayanch echim bo'lmaydi. Demak, birorta echim tayanch echim bo'lishi uchun band kataklar soni **m+n-1** ta bo'lib tcikllanish ro'y bermasligi kerak.

Shimoliy-g'arb usuli.

Transport masalasi jadval ko'rinishida berilgan bo'lsin. Yo'l harajatlarini xisobga olmay $\mathbf{B_1}$ iste`molchining talabini $\mathbf{A_1}$ ta`minotchi xisobiga qondirishga kirishamiz. Buning uchun $\mathbf{a_1}$ va $\mathbf{b_1}$ yuk birliklaridan kichigini $\mathbf{A_1B_1}$ katakning chap pastki burchagiga yozamiz. Agar $\mathbf{a_1< b_1}$ bo'lsa, $\mathbf{B_1}$ ning extiyojini to'la qondirish uchun $\mathbf{A_2B_1}$ katakka etishmaydigan yuk birligini $\mathbf{A_2}$ dan olib yozamiz va h.q. Bu jarayonni $\mathbf{A_mB_n}$ katakka etguncha davom etdiramiz. Agar (5) shart o'rinli bo'lsa, bu usulda tuzilgan echim albatta tayanch echim bo'ladi.

1."Shimoliy - g'arbiy burchak" usuli.

Bunda, dastlab, birinchi iste'molchining ehtiyoji birinchi ishlab chiqaruvchi mahsuloti hisobidan qanoatlantirish orqali boshlanadi. Agar 1 - iste'molchi talabi qanoatlantirilgan va 1 - ishlab chiqaruvchida mahsulot yana ortib qolgan bo'lsa, shu satrda 2 - iste'molchi katagiga o'tiladi, agar 1 - iste'molchining talabi qondirilmagan bo'lsa, shu ustundagi qo'yi satrga, ya'ni 2 - ishlab chiqaruvchi katagiga o'tiladida, yetishmagan mahsulot 2 - ishlab chiqaruvchidan olib beriladi. Har bir iste'molchining talabi u, yoki bu ishlab chiqaruvchilar hisobidan tartib bilan qondirilmaguncha, keyingi iste'molchi talabini qondirishga o'tilmaydi. Navbat bilan hamma iste'molchilarning talablari qondirilmaguncha ish shunday tarzda davom ettiriladi.

1-misol. Transport masalasining boshlang'ich echimini toping.

Ta`minotchilar	Iste`molchilar					Zaxira xajmi
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	10 100	7	4	1	4	100
A_2	2 100	7 150	10	6	11	250
A_3	8	5 50	3 100	2 50	2	200
A_4	11	8	12	16 50	13 250	300
Talab xajmi	200	200	100	100	250	

Minimal qiymat usuli.

Bu usulda boshlang'ich echim qurish uchun avval yo'l harajati eng kichik bo'lgan katakka $\boldsymbol{a_i}$ va $\boldsymbol{b_j}$ lardan kichigi yoziladi va keyingi eng kichik qiymatli katakka o'tiladi va h.q. Bu usulda tuzilgan boshlang'ich echimni buzilmaslik va tcikllanishga tekshirish shart.

2-Misol. Minimal qiymat usuli bilan boshlang'ich echimini toping.

Ta`minotchilar	Iste`molchilar					Zaxira xajmi
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	10	7	4	1 100	4	100
A_2	2 200	7 50	10	6	11	250
A_3	8	5	3	2	2 200	200
A_4	11	8 150	12 100	16	13 50	300
Talab xajmi	200	200	100	100	250	

Jamiyat rivojlanishining demografik modeli.

"Demografiya" atamasi ikki yunoncha so‘zdan kelib chiqqan: "demos" — odamlar va "grafo" (grafiya) — men yozaman, tavsif. Demografiya - bu ma'lum bir hududda (dunyo, qit'alar, mamlakatlar guruhi, mamlakat, mamlakat qismlari va boshqalar) yashaydigan odamlarning yashash faoliyatidagi to‘plami sifatida olingan aholi (aholi) haqidagi fan.

"Demografiya" atamasi 1855 yilda paydo bo‘lgan, uni frantsuz olimi, statistik, demograf, tabiatshunos, Parij statistika jamiyatining asoschilaridan biri A. Gilyard (1799-1876) "inson statistikasi elementlari yoki qiyosiy demografiya" kitobida taklif qilgan va ilmiy muomalaga kiritgan. 1872 yilda E. N. Anuchin (1831-1905) "statistikaning fan sifatida ahamiyati va xalqaro statistika Kongressi" asarida "demografiya" atamasini rus adabiyotiga kiritgan. Ushbu atama Sankt-Peterburgdagi xalqaro statistika Kongressining 8-sessiyasi ishlari bilan bog‘liq holda paydo bo‘ldi. "Demografiya" atamasi 1882 yilda Jeneva sessiyasida xalqaro gigiena va demografiya Kongressi nomidan rasmiy xalqaro e'tirofga sazovor bo‘ldi.

Demografiya — bu ilmiy bilimlarning **ob'ekti** odamlar, aholi va **predmeti** aholining ko‘payish qonunlari bo‘lgan fan. Aholining tor talqinda ko‘payishi faqat aholining tabiiy harakat jarayonlarini o‘z ichiga oladi, ya'ni faqat tug‘ilish, o‘lim va ular bilan bog‘liq nikoh va ajralishni o‘z ichiga oladi. Aholining ko‘payishi keng ma'noda migratsiya masalalarini ham o‘z ichiga oladi - bu aholi soni va tarkibini o‘zgartiradigan jarayon. Shunga ko‘ra, demografiya haqida keng va tor tushuncha paydo bo‘ldi.

Demografiyaning asosiy yo‘nalishi aholining ko‘payish jarayonlari, shu jumladan ularning ijtimoiy sharoitidagi tug‘ilish va o‘lish jarayonlari, nikoh va nikohni tugatish jarayonlari, shuningdek oilaning demografik funktsiyalari, nikoh, oila va aholining boshqa demografik tuzilmalarini tashkil qilish jarayonlari, aholining soni va tarkibidagi o‘zgarish tendentsiyalarini aniqlash, demografik jarayonlarning o‘zaro bog‘liqligini aniqlash va demografik prognozlarni tuzish kabilardan iborat. Shu bilan birga, aholining tabiiy harakati qonuniyatlarini aniqlash demografik tadqiqotlarning asosiy vazifasidir.

Demografiya - bu jarayonning ijtimoiy-tarixiy shartlarida aholining ko‘payish qonuniyatlari haqidagi fan.

Demografiyada turli xil tadqiqot usullari qo‘llaniladi, ular orasida tavsiflovchi usul, statistik va matematik tahlil usullari, mavhum analitik usul, qiyosiy usul, tahlil va sintez, umumlashtirish, induksiya va deduksiya usullari, farazlarni ilgari surish va ularni tekshirish usuli, ekstrapolyatsiya va modellashtirish, demografik xulq-atvorni o‘rganishning sotsiologik usullari, kartografik usullar va boshqalarni e’tirof etish mumkin. Demografiyada asosiy o‘rinni statistik va matematik tahlil usullari egallaydi.

Demografik ilmiy va amaliy ishlarda eng ko‘p ishlatiladigan demografik usullar orasida kogort usuli, bo‘ylama va ko‘ndalang demografik tahlil, potentsial demografiya usuli, demografik koeffitsientlarni standartlashtirish usullari va boshqalar mavjud. Demografik modellar ilmiy va amaliy ishlarda keng qo‘llaniladi; demografik prognoz (ayniqsa, ko‘pincha yoshga qarab ajratish usuli bilan amalga oshiriladi) odatda demografik mavzularda ko‘p qo‘llaniladi.

Maltus va Ferxyulst-Perl modellari.

Maltus modeli.

Populyatsiya sonining dinamikasi, shuningdek, jamiyat dinamikasi, ya'ni t vaqt o‘tishi bilan tirik mavjudot umumiy soni N(t)ning o‘zgarishi populyatsiyalar rivojlanishining eng muhim masalalaridan biridir. 1798 yilda nashr etilgan populyatsiya dinamikasining birinchi modelini avstriyalik demograf va iqtisodchi Tomas Maltus (1766-1834) taklif qilgan. Maltus aholi sonining o‘sishi va ishlov beriladigan maydonlar to‘g‘risidagi mavjud ma'lumotlardan foydalangan holda, birinchi bo‘lib insoniyat sonining eksponent bo‘yicha (eksponent ravishda) o‘sib borishiga, oziq-ovqat ishlab chiqarish vaqt o‘tishi bilan chiziqli ravishda (arifmetik progressiyada) o‘sib borishiga e'tibor qaratdi, shundan u ertami-kechmi eksponenta chiziqli funktsiyani "bosib o‘tadi" va ochlik paydo bo‘ladi degan xulosaga keldi. Ushbu xulosalar asosida Maltus, ayniqsa, jamiyatning eng kambag‘al qatlamlari uchun tug‘ilish darajasiga cheklovlar qo‘yish zarurligi haqida yozgan.

Alohida olingan populyatsiyaning eng sodda "fizik"(ushbu holda biologik) modeli bu Maltus modeli bo‘lib, u quyidagi cheklanishlarga asoslanadi: populyatsiya sohasi chegaralangan, uning uchun oziq-ovqat resurslari cheklanmagan va aholi sonining o‘sishi ma'lum bir vaqtda mavjud bo‘lgan aholi soniga proporsionaldir.

Shunday qilib, $N(t)$ $N(t+\Delta t)-t$ $и$ $t+\Delta t$ bir-biriga yaqin vaqtlardagi aholi soni, shunga ko‘ra, $N(t+\Delta t)-N(t)=rN(t)\Delta t$, bu yerda $r=\alpha-\beta, \alpha > 0 - tug‘ilish\ darajasi, \beta > 0 - o‘lim\ darajasi$. Aholining rivojlanishiga hech narsa to‘sqinlik qilmaydi degan qabul qilingan taxmin bilan tug‘ilish darajasi o‘limdan past bo‘lmaydi, shuning uchun quyidagilarni hisoblash mumkin, $r \geq 0$, bu yerda r qiymati populyatsiyaning tabiiy o‘sishining tezligi deb ataladi.

Masalan, $\alpha = const$, *β=const* deb hisoblash mumkin. Ushbu bosqich masalaning qo‘yilishi bilan yakunlanadi: agar t =0 vaqtning dastlabki momentida populyatsiya soni ma'lum bo‘lsa, $t > 0$ vaqtning ixtiyoriy momentida populyatsiya sonini hisoblash kerak.

Keyinchalik, tanlangan fizik modelga mos keladigan matematik model quriladi. Albatta, N(t) populyatsiyasining soni vaqtning butun sonli uzlukli funktsiyasidir. Ammo, agar populyatsiya ko’p sonli deb hisoblasak, unda N(t) uzlukli funktsiyasi o‘rniga uzluksiz x(t) funktsiyasidan foydalanish mumkin, bunda [x(t)]qiymatining butun qismi vaqtning har bir nuqtasida populyatsiya sonining N(t) qiymatiga to‘g‘ri keladi. U holda biz quyidagi tenglikni yozishimiz mumkin

$$\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t} = rx(t),$$

x(t) funktsiyasi nafaqat uzluksiz, balki differensiallanadigan ham degan qo‘shimcha taxmin bilan noma'lum x(t) funktsiyasiga nisbatan oddiy differentsial tenglamaga o‘tishimiz mumkin:

$$\frac{dx}{dt} = rx, \quad t > 0 \tag{3.1}$$

Natijada yuqorida qurilgan eng oddiy fizik modelga mos keladigan Maltusning quyidagi matematik modeli olinadi: boshlang‘ich

$$x(0) = x_0, \tag{3.2}$$

shartni qondiradigan (3.1) tenglamaning echimini topish talab qilinadi.

Bu yerda x_0- populyatsiyaning boshlang‘ich soni.

(3.1) Koshi masalasining (3.2) boshlang‘ich shartni qanoatlantiradigan yechimi quyidagi ko‘rinishga ega:

$$x(t) = x_0 e^{rt} \tag{3.3}$$

Ushbu formuladan ko‘rinib turibdiki, $\alpha = \beta$ bo‘lganda aholi soni doimiy bo‘lib qoladi: $x(t) \equiv x_0$ barcha $t \geq 0$ lar uchun. Biroq, r koeffitsientining kichik o‘zgarishi ham, vaqt o‘tishi bilan $t \to \infty$ da x(t) funktsiyasining x_0 boshlang‘ich qiymatidan aholi soni eksponensial ravishda cheksiz o‘sib boradi. Bu holat Maltusning yer aholisining ko‘payishi va undan kelib chiqadigan barcha oqibatlar haqida qo‘rquviga asos bo‘ldi.

Maltus modeli ekologiyada yashashning cheksiz resurslariga ega bo‘lgan populyatsiyalarning hatti-harakatlarini tavsiflovchi birinchi modellardan biridir. Ushbu model $r > 0$ da populyatsiyaning cheksiz o‘sishini, r<0 da uning cheksiz kamayishini va $r = 0$ da populyatsiya muvozanat holatida bo‘lishini ko‘rsatadi.

Ushbu model, o‘zining soddaligiga qaramay, amaliy qiziqish uyg‘otadi, chunki u ma'lum mikroorganizmlar populyatsiyasining cheklangan vaqt oralig‘idagi o‘zgarishini ko‘rsata oladi. O‘simlik va hayvonot dunyosi populyatsiyalari sonining o‘zgarishini Maltusning oddiy qonuni bilan tasvirlab bo‘lmaydi, o‘sish dinamikasiga ko‘plab o‘zaro bog‘liq sabablar ta'sir qiladi - xususan, har bir turning ko‘payishi o‘z-o‘zini tartibga soladi va o‘zgartiriladi, ana shuning hisobiga bu tur evolyutsiya jarayonida saqlanib qoladi.

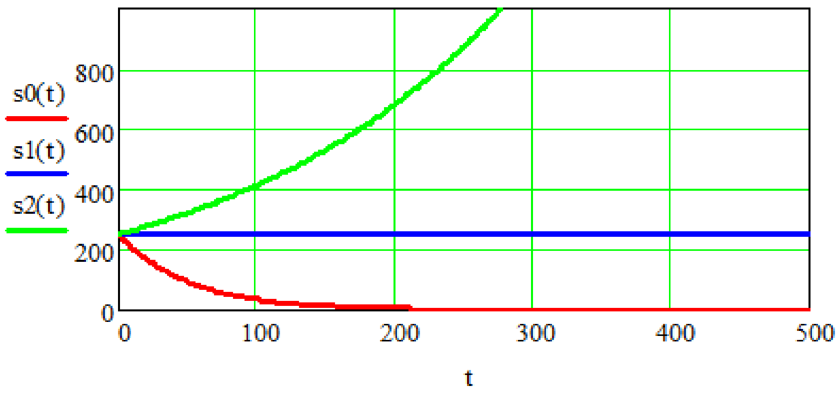
Maltus nazariyasining zamonaviy nuqtai nazardan asosiy kamchiligi bu insoniyat sonini o‘z-o‘zini tartibga solish mexanizmining yo‘qligi bo‘lib, uni demografik o‘tishga olib keladi. Demografik o‘tish - tug‘ilish va o‘limning birgalikdagi pasayishi, natijada aholining ko‘payishi avlodlarning oddiy almashishiga olib keladi. Bu jarayon yuqori tug‘ilish va yuqori o‘lim bilan ajralib turadigan an'anaviy jamiyatdan sanoatga o‘tishning bir qismidir. Maltus davrida bu hodisa faqat ozchilik aholisi bo‘lgan yirik shaharlarda kuzatilgan bo‘lsa, hozirda u butun qit'alarni, shu jumladan istisnosiz barcha rivojlangan mamlakatlarni qamrab olgan.

Shu bilan birga, Maltus nazariyasi sanoatdan oldingi jamiyatlarning iqtisodiy va demografik dinamikasi qonuniyatlarini to‘g‘ri tavsiflaydi. Maltusning g‘oyalari biologiyaning rivojlanishiga kuchli ijobiy ta'sir ko‘rsatdi, birinchidan, ularning Darvinga ta'siri orqali, ikkinchidan, Gompertz va Ferxulstning logistika modelidan boshlab populyatsiya biologiyasining yanada rivojlangan matematik modellari paydo bo‘ldi.

Populyatsiyaning tug‘ilish va o‘lish koeffisientlari ayirmasi r noldan kichik, nolga teng va noldan katta qiymatlarni qabul qilganda Maltus modeli bo‘yicha hisoblash misolini ko‘rib chiqamiz. Populyatsiyaning bo‘shlang‘ich qiymati, koeffisientlar qiymatlarini MathCAD tizimida kiritib turib, uchta funksiya yordamida populyatsiya o‘zgarishini hisoblaymiz va grafigini chizamiz.

$$n0 := 250 \qquad k0 := -0.02 \qquad k1 := 0 \qquad k2 := 0.005 \qquad t := 0..500$$

$$s0(t) := n0 \cdot e^{k0 \cdot t} \qquad s1(t) := n0 \cdot e^{k1 \cdot t} \qquad s2(t) := n0 \cdot e^{k2 \cdot t}$$



3.1-rasm. Mathcadda Maltus modelidan foydalangan holda grafikalar.

Shubhasiz, ko‘rib chiqilgan matematik model haqiqatga mos kelmaydi, chunki mavjud bo‘lgan barcha populyatsiyalarda ularning sonining cheksiz o‘sishi kuzatilmaydi. Shuning uchun yuqoridagi fizik model haqiqiy shartlar bilan o‘zgartirilishi kerak.

Ferxulst-Perl Modeli. Populyatsiya rivojlanishining haqiqatga yaqinroq tavsifi Ferxulst-Perl modelini beradi, unda joy, oziq-ovqat va boshqalar uchun turlararo raqobat tufayli izolyatsiya qilingan populyatsiyaning o‘sish tezligi pasayishi hisobga olinadi. Ichki turlar orasida kurash qanchalik ko‘p bo‘lsa, jonzotlar o‘rtasidagi uchrashuvlar soni shunchalik ko‘p bo‘ladi va uchrashuvlar soni xx ya'ni x^2 ko‘paytmasiga proporsional bo‘ladi va populyatsiya sonining dinamikasi tenglamasi quyidagicha yoziladi

$$\frac{dx}{dt} = rx - bx^2 \qquad (3.4)$$

bu yerda $r = const > 0 -$ populyatsiyaning tug‘ma o‘sish tezligi va $b = const > 0$ - kattaligi tur ichidagi raqobat koeffitsienti deb ataladi.

(3.4) tenglamani quyidagi ko‘rinishad yozish mumik:

$$\frac{dx}{dt} = r \cdot x\left(1 - \frac{x}{K}\right) \qquad (3.5)$$

Bu holda $K = r/b$ qiymati ushbu sharoitda mumkin bo‘lgan maksimal populyatsiya soniga ega bo‘lgan barqaror statsionar holatga mos keladi va "**atrof-muhit sig‘imi**"deb nomlanadi. (3.5) differensial tenglamaning yechimi quyidagicha funksiya ko‘rinishida bo‘ladi:

$$x(t) = \frac{K \cdot x_0 e^{rt}}{K - x_0 + x_0 e^{rt}} = \frac{K \cdot x_0 e^{rt}}{K + x_0(e^{rt} - 1)} \qquad (3.6)$$

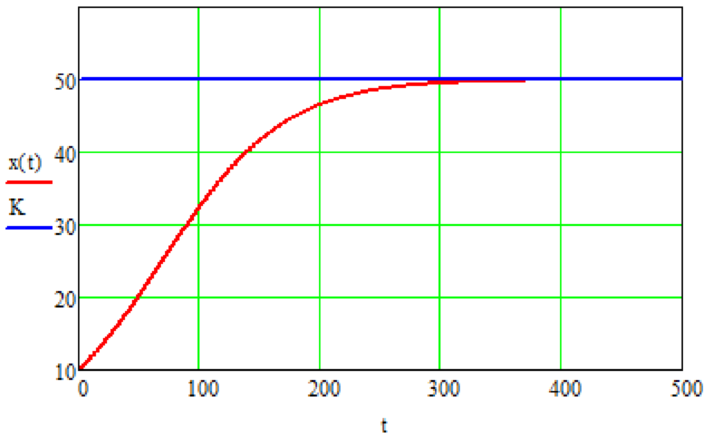
bu yerda $x_0 -$ populyatsiyaning boshlang‘ich soni.

Logistika egri chizig‘ining tabiati r va K parametrlarining kattaligiga, shuningdek x_0 ning boshlang‘ich soniga bog‘liq.

(3.6) dan qiziqarli xulosalar chiqarish mumkin. Agar populyatsiya soni juda kichik bo‘lsa, unda raqobat populyatsiyaning o‘ziga xos o‘sish tezligiga ta'sir qilmaydi. Agar populyatsiya soni ko‘payib, ma'lum bir K chegara qiymatiga yaqinlashganda, o‘ziga xos o‘sish tezligi nolga tushadi. K ning chegara qiymati populyatsiyaning ekologik joy sig‘imi deb ataladi. K kattaligi populyatsiyaning shunday soniga to‘g‘ri keladiki, bunda raqobat natijasida ko‘payishning haqiqiy darajasi shunchalik pasayganki, umuman populyatsiya har bir avlodda faqat o‘zining avvalgi sonini tiklay oladi. Bu vaqtda tug‘ilgan jonzotlar soni o‘lganlar soni bilan muvozanatlanadi.

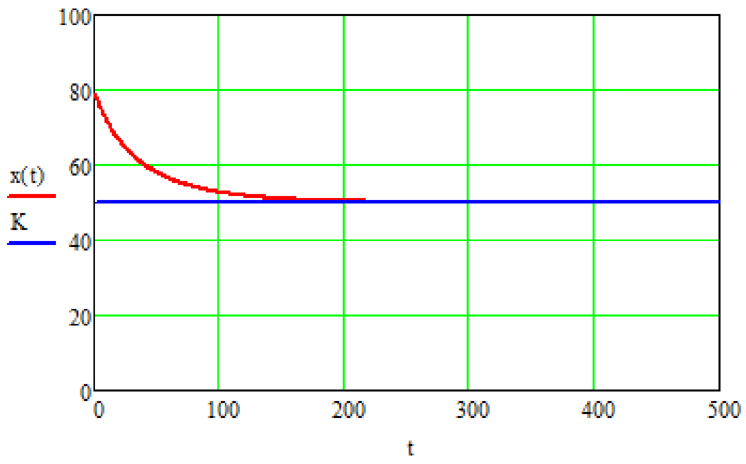
Shunday qilib, (4.6) formuladan kelib chiqadiki, $x(0) = K$ da populyatsiya soni o‘zgarmaydi: $x(t) \equiv x(0)$. Agar $x(0) < K$ bo‘lsa, unda populyatsiya soni ko‘payadi, t→∞ da K qiymatiga yaqinlashadi, lekin hech qachon unga etib bormaydi, ya'ni aholi soni Maltus modelidagi kabi cheksiz ravishda ko‘paymaydi, ya’ni yuqoridan cheklangan. Shuning uchun k qiymati ma'lum bir yashash sharoitida mumkin bo‘lgan maksimal populyatsiya soni deb ataladi.

Quyidagi misolni ko‘rib chiqamiz. $x(0) = 10\ va\ K = 50, r = 0{,}02$ bo‘lsin. Ushbu qiymatlarni (3.6) formulaga qo‘yib hisoblash 3.2- rasmda ko‘rsatilgan grafikni beradi.



3.2-rasm. Ferxulst formulasi bo‘yicha aholi sonini hisoblash, bunda $x(0) < K$, ya’ni $x0 = 10, K = 50, r = 0{,}02.$

$x(0) > K$ holatida populyatsiya soni kamayadi, K qiymatiga monoton ravishda yaqinlashadi. Misol uchun $x0 = 80, K = 50, r = 0{,}02$ bo‘lsin. (3.6) formula bo‘yicha hisoblash 3.3-rasmda ko‘rsatilgan grafikni beradi.



3.3-rasm. Ferxulst formulasi bo‘yicha aholi sonini hisoblash, bu yerda

$$x(0) > K, x0 = 80, K = 50, r = 0{,}02.$$

Chiziqli bo‘lmagan populyatsiya modelining uch turdagi rejimi

Yuqorida muhokama qilingan modellarning soddaligi asosan ularning chiziqliligi bilan bog‘liq. Matematik nuqtai nazardan, bu muhim tushuncha superpozitsiya printsipi adolatli ekanligini anglatadi, ya'ni yechimlarning har qanday chiziqli birikmasi (masalan, ularning yig‘indisi) ham masalaning echimidir. Superpozitsiya printsipidan foydalanib, har qanday alohida holatda echim topib, umumiy vaziyatda echim topish qiyin emas. Shuning uchun umumiy ishning sifat xossalarini xususiy ishning xossalari bilan baholash mumkin — ikkita echim o‘rtasidagi farq faqat miqdoriy xarakterda farq qilishi mumkin. Masalan, raketa yoqilg‘isining chiqish tezligining ikki baravar ko‘payishi, raketa tezligining ikki baravar oshishiga olib keladi, yorug‘lik nurining aks ettiruvchi yuzaga tushish burchagining pasayishi aks ettirish burchagining bir xil o‘zgarishini anglatadi va hokazo. Boshqacha qilib aytganda, chiziqli modellarda ob'ektning ba'zi o‘zgarishlariga munosabati ushbu o‘zgarish miqdoriga proporsionalagidir.

Matematik modellari superpozitsiya printsipiga mos kelmaydigan chiziqli bo‘lmagan hodisalar uchun ob'ektning bir qismining hatti-harakati haqidagi bilim hali butun ob'ektning xatti-harakatlarini bilishni kafolatlamaydi va uning sharoit o‘zgarishiga munosabati sifat jihatidan ushbu o‘zgarish miqdoriga bog‘liq bo‘lishi mumkin.

Haqiqiy jarayonlarning aksariyati va ularga mos keladigan matematik modellar chiziqli emas. Chiziqli modellar xususiy holatlardagina javob beradi va, qoida tariqasida, jarayonni o‘rganishda faqat birinchi yaqinlashish bo‘lib xizmat qiladi.

Chizisiqsizlikning ko‘plab sabablari bo‘lishi mumkin. Tabiatning fundamental qonunlari - tortishish qonuni va Kulon qonuni - chiziqli emas qonunlar hisoblanadi (massalar yoki zaryadlar o‘rtasidagi o‘zaro ta'sir kuchining kvadratik bog‘liqligi) va shuning uchun ularga asoslangan modellar, umuman aytganda, chiziqli emas. Hodisalarning yanada murakkab geometriyasi, turli xil tashqi ta'sirlar va, albatta, uning holati o‘zgarganda ob'ektning o‘zida o‘zaro ta'sir tabiatining o‘zgarishi (populyatsiya modellarida to‘yinganlik ta'siri, prujinaning o‘zgaruvchan qattiqligi) modellarning nochiziqliligiga sabab bo‘ladi.

Aslida, haqiqiy hodisalarni faqat chiziqli bo‘lmagan modellar bilan tasvirlash mumkin va chiziqli hodisalar faqat ob'ektni tavsiflovchi qiymatlarning katta bo‘lmagan o‘zgarishini tavsiflashda amal qiladi.

Maltus modelidan farqli o‘laroq, tug‘ilish koeffitsientini aholi soni N(t)ga bog‘liq deb hisoblaylik, ya'ni $\alpha = \alpha(N)$. O‘lim darajasi β ham N(t) ga bog‘liq deb olganda populyatsiya dinamikasi tenglamasi quyidagi ko‘rinishni oladi

$$\frac{dN}{dt} = (\alpha(N) - \beta(N))N \tag{3.7}$$

Ushbu tenglama uning holati o‘zgarganda populyatsiya ichidagi o‘zaro ta'sir xususiyatlarining o‘zgarishi tufayli chiziqli emas.

Aniqlik uchun $\beta(N) = \beta_0 = const$, $\alpha(N) = \alpha_0 N$ deb olaylik. Ya’ni tug‘ilish darajasi aholi soniga proporsional (masalan, populyatsiya a'zolari uning o‘sishidan manfaatdor bo‘lganda). U holda (3.7) tenglama quyidagi kvadratik nochiziqlik shakliga keladi(ba’zi kimyoviy reaksiyalarga xos)

$$\frac{dN}{dt} = \alpha_0 N^2 - \beta_0 N \tag{3.8}$$

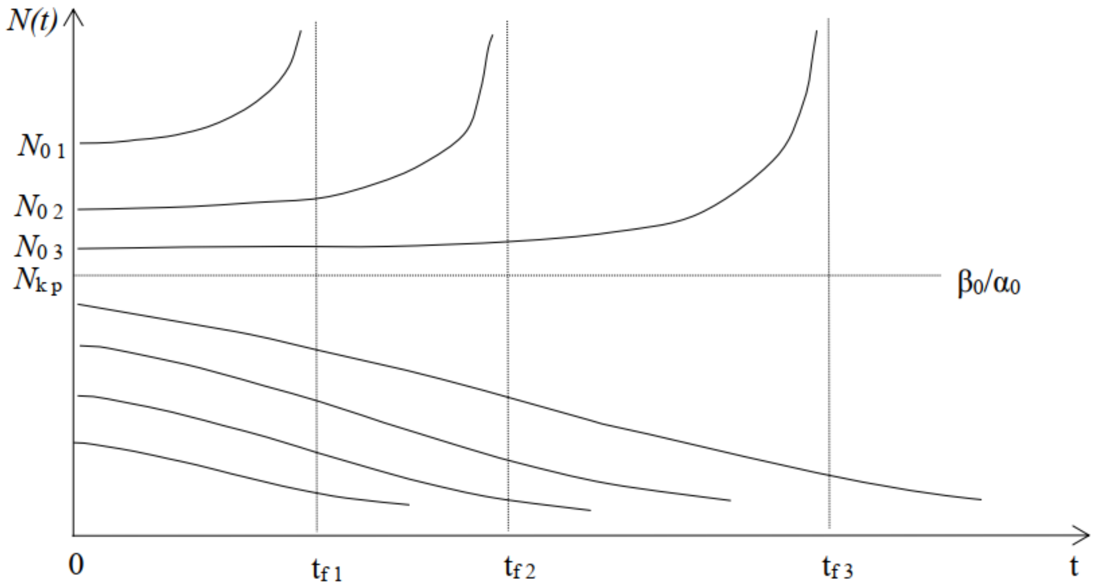
N(t) funktsiyasining turli xil $N(0) = N_0$ boshlang‘ich qiymatlardagi hatti-harakatlarini ko‘rib chiqamiz (3.3 - rasm).

a) agar $N_0 < N_{кр} = \beta_0 / \alpha_0$ bo‘lsa, aholi soni vaqt o‘tishi bilan monoton ravishda kamayib, $t \to \infty$ da nolga intiladi.

b) $N_0 = N_{кр}$, ya’ni boshlang‘ich aholi soni kritik qiymatga teng bo‘lganda aholi sonining o‘zgarishi vaqtga bog‘liq emas, o‘zgarmas bo‘lib qiladi.

c) $N_0 > N_{кр}$ bo‘lganda yechim xarakteri a) и б) ga nisbatan o‘zgaradi: aholi soni vaqt o‘zgarishi bilan shunday tezlikda oshadiki, qandaydir $t = t_f$ da cheksizlikka intiladi. N_0 qiymati qancha katta bo‘lsa, t_f qiymati shuncha kichik bo‘ladi.

(2) tenglamaning chiziqli emasligi, hatto eng oddiy modelda ham mavjud bo‘lgan turli xil effektlarni keltirib chiqaradi: vaqt o‘tishi bilan populyatsiya sonining o‘zgarishi uchun uchta mumkin bo‘lgan rejim; rejimning turg‘un emasligi b) – populyatsiya o‘zgarish sohasidagi kichik og‘ishlarda a) yoki c)da echim $N_{кр} = \beta_0 / \alpha_0$ chiziqdan uzoqlashishi; N(t) funktsiyasining dastlabki N_0 qiymatiga kuchli sezgirligi va nihoyat, $N_0 > N_{кр}$ aholi sonining qisqa vaqtda keskin o‘sishi.



3.3-rasm. N(t) ning turli xil boshlang‘ich qiymatlarda o‘zini tutishi.

Shunga e’tibor berish kerakki, oxirgi model xususiy natija emas, balki quyidagi ko‘rinishdagi har qanday turdagi modellar uchun o‘rinli

$$\frac{dN}{dt} = F(N), t > 0, N(0) > 0, F(N) > 0,$$

agar N ning katta qiymatlarida $F(N)$ funktsiyasi N ning birinchi darajali qiymatlariga qaraganda tezroq o‘ssa, aniqrog‘i, agar f (N) uchun yuqoridagi tenglamaning to‘g‘ridan-to‘g‘ri integrallash natijasida hosil bo‘luvchi ushbu mezon to‘g‘ri bo‘lsa

$$\int_{N_0}^{\infty} \frac{dN}{F(N)} < \infty$$

Nazorat savollari:

2 Simpleks usulning g’oyasi nimadan iborat?
3 Boshlangich tayanch reja deganda nimani tushunasiz?
4 Boshlangich tayanch rejani topish kanday amalga oshiriladi?
5 Boshlangich simpleks jadvalni tuzishni kursating.
6 Transport masalasining qo’yilishi?
7 Transport masalasining iktisodiy-matematik modeli?
8 «Epik model » kanday model?
9 Boshlangich tayanch echim kanday kuriladi?
10 «Shimoliy-garbiy» usulning mohiyati nimada?
11 Minimal qiymat usulining mohiyati nimada?
12 Demografiya atamasi nimani anglatadi?
13 Maltus modeli qanday ko‘rinishga ega?
14 Maltus modelining afzalliklari nimada?
15 Maltus nazariyasining qanday kamchiliklari bor?
16 Ferxyulst-Perl modelini tushuntirib bering.
17 Ferxyulst-Perl modeliga misol keltiring.
18 Chiziqli bo‘lmagan populyatsiya modelining uchta rejimi haqida ma’lumot bering.

4 – MAVZU: CHIZIQLI DASTURLASHNING UMUMIY MASALASI.

Yirtqich-o‘lja tizimi — yirtqich va o‘lja turlari o‘rtasida uzoq muddatli munosabatlar asosida amalga oshiriladigan murakkab ekotizim. Yirtqichlar va ularning o‘ljalari o‘rtasidagi munosabatlar neytral muvozanatning tasviri sifatida davriy ravishda rivojlanadi.

O‘ljalar tomonidan yirtqichlarga qarshi kurashish uchun ishlab chiqarilgan moslashuvlar yirtqichlarda ushbu moslashuvlarni yengish mexanizmlarini topishni talab qiladi. Yirtqichlar va o‘ljalarning uzoq muddatli birgalikdagi mavjudligi o‘zaro ta'sir tizimining shakllanishiga olib keladi, bunda ikkala guruh ham o‘rganilayotgan hududda barqaror saqlanadi. Bunday tizimning buzilishi ko‘pincha salbiy ekologik oqibatlarga olib keladi.

Yirtqichlar va o‘ljalar, masalan, quyonlar va bo‘rilar ma'lum bir izolyatsiya qilingan hududda yashasin. Quyonlar har doim yetarli miqdorda mavjud bo‘lgan o‘simlik ovqatlarini iste'mol qiladilar. Bo‘rilar faqat quyonlar bilan ovqatlanishi mumkin. Matematik modelni tuzish uchun quyonlar (o‘lja) sonini x orqali, bo‘rilar (yirtqichlar) sonini y orqali belgilaylik. Quyonlarda oziq –ovqat miqdori cheksizligi sababli, ular soniga mutanosib tezlikda ko‘payadi deb taxmin qilishimiz mumkin, ya’ni Maltus modeliga mutanosib ravishda ax kabi qabul qilishimiz mumkin. Agar quyonlarning tug‘ilish darajasi ularning o‘limidan katta bo‘lsa, u holda $a> 0$.

Quyonlarning kamayishi quyonning bo‘ri bilan uchrashish ehtimoliga mutanosib bo‘lsin, ya'ni xy sonining ko‘paytmasiga mutanosib cxy ga teng. Bo‘rilar soni tezroq o‘sib boradi, deb taxmin qilish mumkin, chunki ular quyonlar bilan tez-tez uchrashadilar, ya'ni dxy bilan mutanosib. Bundan tashqari, bo‘rilarning tabiiy o‘lim jarayoni sodir bo‘ladi va o‘lim darajasi ularning soniga mutanosib va βy ga teng deb hisoblaylik.

Ushbu eng sodda, ya'ni "yirtqich-o‘lja" ikki tomonlama tizimining matematik modeli quyidagi taxminlarga asoslanadi:

1) o‘lja va yirtqichlar populyatsiyalari soni x va y faqat vaqtga bog‘liq;

2) o‘zaro ta'sir bo‘lmasa, turlarning soni Maltus modeliga ko‘ra o‘zgaradi: bu holda o‘ljalar soni ko‘payadi va yirtqichlar soni kamayadi, chunki bu holda(biz bo‘rilar uchun boshqa yemish yo‘q deb olgan edik) yirtqichlar hech narsa bilan ovqatlanmaydilar:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x, \qquad \frac{dy}{dt} = -\beta y, \qquad \alpha > 0, \beta > 0;$$

3) ikkala populyatsiyaning o‘zgarishiga tabiiy o‘lim hisobga olinmaydi;

4) ikkala populyatsiya sonining to‘yinganligi ta'siri hisobga olinmaydi;

5) o‘lja sonining o‘sish sur'ati yirtqichlar soniga mutanosib, ya'ni kattaligi *cxy* ga teng ravishda kamayadi, bunda c>0 va yirtqichlarning o‘sish sur'ati o‘lja soniga mutanosib, ya'ni kattaligi *δxy, δ*>0 ravishda oshadi.

(1)-(5) taxminlarni birlashtirib, biz Lotka-Volterra tenglamalar sistemasiga asoslangan matematik modelga kelamiz.

Ya’ni, ushbu mulohazalar o‘lja(quyonlar)ning x va yirtqich(bo‘rilar)ning y sonlari o‘zgarishi uchun quyidagi tenglamalar sistemasiga olib keladi:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha x - cxy, & \alpha > 0, c \geq 0, \\ \frac{dy}{dt} = -\beta y + \delta xy, & \beta > 0, \delta \geq 0. \end{cases} \tag{4.1}$$

Ushbu tenglamalar sistemasidan *x(0)=x(t=0), y(0)=y(t=0)* boshlang‘ich shartlari va a, c, *β*, *δ* koeffisientlarining berilgan qiymatlari bo‘yicha istalgan *t* >0 vaqtda populyatsiya sonini aniqlash mumkin.

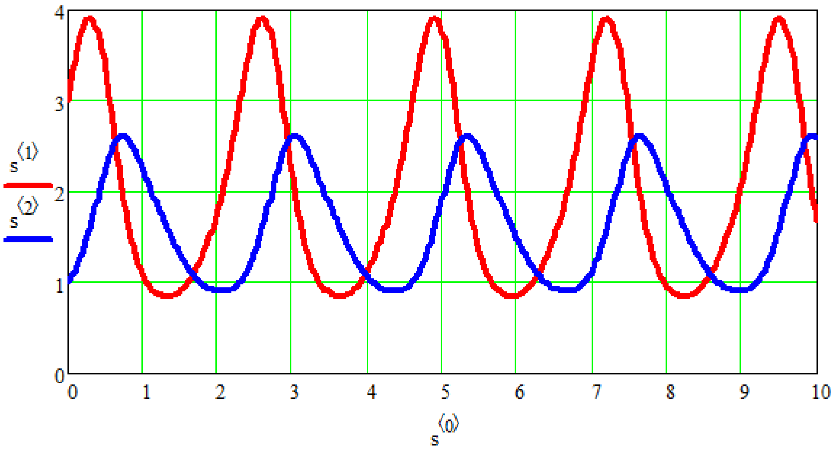
Mathcad matematik tizimida (5.1) modeli asosida koeffisientlarning *a*=4, *c*= 2.5, *β*=2, *δ*=1 qiymatlarilari va *x(0)*=3, *y(0)*=1 boshlang‘ich shartlarida yirtqich va o‘ljaning vaqt bo‘yicha o‘zgarishi 5.1-rasmda, fazoviy ko‘rinishi 5.2-rasmda ko‘rsatilgan.

Ko‘rinib turibdiki, jarayon davriy tebranish xususiyatiga ega. Ikkala turlar soni uchun boshlang‘ich berilgan boshlang‘ich nisbati 3:1 bo‘lsa, ikkala populyatsiya ham boshida o‘sadi. Yirtqichlar soni b=2 ga yetganda, o‘ljalar soni tiklanishi uchun vaqt yetmay qoladi va ular soni kamayishni boshlaydi. Bir muncha vaqt o‘tgach, oziq-ovqat miqdorining kamayishi yirtqichlar populyatsiyasiga ham ta'sir qila boshlaydi va o‘ljalar soni $x = \frac{c}{d}$ =2 ga yetganda, yirtqichlar soni ham kamayishni boshlaydi, ularga mos o‘ljalar soni ham kamayadi.

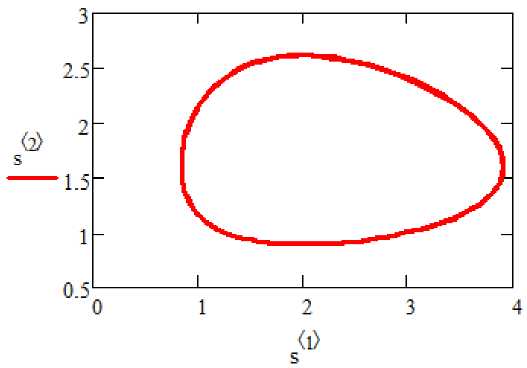
$$a := 4 \qquad b := 2.5 \qquad c := 2 \qquad d := 1$$

$$v := \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad d(t,v) := \begin{bmatrix} \left(4 - 2.5 \cdot v_1\right) \cdot v_0 \\ \left(-2 + 1 \cdot v_0\right) \cdot v_1 \end{bmatrix}$$

$$s := \mathrm{rkfixed}(v, 0, 10, 400, d)$$



5.1-rasm. Vaqt bo‘yicha qurbonlar(qizil) va yirtqichlar(ko‘k) soni



5.2-rasm. Yirtqich-o‘lja hatti-harakatlarining fazaviy trayektoriyasi.

Populyatsiyaning kamayishi yirtqichlar soni a/b=1,6 ga yetguncha sodir bo‘ladi, bu nuqtada x=0. Shu paytdan boshlab o‘ljalar soni ko‘paya boshlaydi; bir muncha vaqt o‘tgach, yirtqichlarning ko‘payishini ta'minlash uchun oziq-ovqat yetarli bo‘ladi, ikkala populyatsiya ham o‘sadi va jarayon qayta-qayta takrorlanadi.

Grafikda jarayonning davriy tabiati aniq ko‘rsatilgan. Yirtqichlar va o‘ljalar soni mos ravishda $x=2$, $y=1.6$ qiymatlari yaqinida o‘zgarib turadi. Bu yerda kasr sonlar "bo‘rining yarmi" degani emas: bu miqdorlar yuzlab, minglab va hokazolarda o‘zgarishi mumkin.

Jarayonning davriyligi faza tekisligida aniq ko‘rinadi: faza egri chizig‘i ($x(t)$, $y(t)$) yopiq chiziq. Ushbu egri chiziqning eng chap nuqtasi, $y=a/b=1.6$-o‘ljalar soni eng kichik qiymatga yetadigan nuqta. Eng o‘ng nuqta, $x=4$, $y=1.6$ – o‘ljalar sonining eng yuqori nuqtasi. Ushbu nuqtalar orasida yirtqichlar soni avval faza egri chizig‘ining pastki nuqtasiga, $x=c/d=2$ ga kamayadi, u yerda u eng kichik qiymatga yetadi va keyin faza egri chizig‘ining yuqori nuqtasiga ko‘tariladi ($x=2$, $y=2.5$). Faza egri chizig‘i $x=2$, $y=1.6$ nuqtani qamrab oladi. Differensial tenglamalar tilida bu tizimning statsionar holatiga ega ekanligini anglatadi ($x=0$, $y=0$), bu $x=2$, $y=1.6$ nuqtada erishiladi.

Ikki mamlakat o‘rtasidagi qurollanish poygasi modeli

Bugungi kunda qurolli to‘qnashuvlarning paydo bo‘lishini bashorat qilishning ko‘plab usullari mavjud. Ularning ko‘pligi zamonaviy dunyodagi urushlardan oldin har xil holatlar to‘plami bo‘lishi mumkinligi bilan izohlanadi, ularni biron bir model bilan ifodalash qiyin. Urushlarni bashorat qilishning birinchi bo‘lib ingliz meteorologi Lyuis F. Richardson tomonidan amalga oshirilgan, ya’ni, agar ba'zi qarama-qarshi davlatlar o‘rtasida qurollanish poygasi paydo bo‘lgan yoki mavjud bo‘lsa, o‘zining bashorat qilish funksiyasini muvaffaqiyatli bajara oladigan matematik modelni yaratgan edi. Ushbu model yordamida qurollanish poygasining mohiyatini tahlil qilib, vaziyatni yanada rivojlantirish uchun juda aniq bashorat qilish mumkin edi. Richardson katta hajmdagi matematik bilimlar bilan urush hodisasini o‘rganishda qo‘llashga qaror qiladi. Richardson haqli ravishda zamonaviy urushlardan (shu jumladan birinchi jahon urushidan) oldin qurollanish poygasi bo‘lgan deb taxmin qiladi, shuning uchun u qanday va qanaqa qurollanish poygasi urushning paydo bo‘lishiga olib kelishini tushunish uchun ushbu hodisani ko‘rib chiqadi. Richardson modeli – harbiy qarama-qarshilik modelidir. Muallif ikki qarama-qarshi tomonni o‘rganib chiqadi. Ularning har biri qurollanish darajasini ko‘rsatadigan faqat bitta o‘zgaruvchiga tegishli. Richardson modeli dinamik model hisoblanadi. Bu bizga fazaviy holatlarning barqarorligi va beqarorligi masalalarini batafsil ko‘rib chiqishga, vaqt o‘tishi bilan tomonlarning kuchlari muvozanatini o‘rnatilishiga yoki buzilishiga olib keladigan yo‘llarni o‘rganishga imkon beradi.

Richardsonning qurollanish poygasi modelini qarab chiqamiz. Modelni tahlil qilish natijalari *x(t), y(t)* grafikalarini tuzish orqali raqamli hisob-kitoblar bilan tasdiqlanadi. Faza fazosi uchun tegishli dastlabki shartlarni belgilab, model ko‘rinishini yaratishga o‘tish mumkin.

Ikki urushayotgan davlat bo‘lishi mumkin bo‘lgan quyidagi vaziyatni ko‘rib chiqamiz. Birinchi mamlakat ("sariq") qo‘shni dushman mamlakat ("yashil") bilan urush xavfi paydo bo‘lishidan qo‘rqib qurollanadi. O‘z navbatida,"Yashillar" sariqlar uchun qurol-yarog‘ narxining oshishini bilib, qurol-yarog‘ xarajatlarini ham oshiradi. Aytaylik, har bir mamlakat qurollarning o‘sish (qisqarish) tezligini boshqasining xarajatlar darajasiga mutanosib ravishda o‘zgartiradi. Matematik jihatdan bu holatni quyidagicha modellashtirish mumkin. *X(t)* - $t \geq 0$ momentiga qadar "sariq"larning qurollanish xarajatlari, *y(t)* xuddi shunday, ammo "yashil"lar uchun qurollanish xarajatlari bo‘lsin. U holda qurollanish poygasining eng oddiy modelini o‘zgarmas koeffitsiyentli ikkita chiziqli differensial tenglamalar ko‘rinishida shakllantirish mumkin:

$$\begin{cases} dx/dt = ay, \\ dy/dt = bx \end{cases} \tag{4.3}$$

Bu yerda a va b musbat doimiylardir. Ushbu tenglamalar bir-biriga teskari bo‘lgan aloqani tavsiflaydi. (5.3) model quyidagi kamchilikka ega: qurol-yarog‘ narxining oshishi hech narsa bilan cheklanmagan. Shuning uchun mudofaa xarajatlarining hozirgi darajasi qanchalik katta bo‘lsa, uning o‘sish sur'ati shunchalik past bo‘ladi (salbiy teskari aloqa) degan fikr haqoqatga yaqin. Bundan quyidagi tenglamalar sistemasini olamiz:

$$\begin{cases} dx/dt = ay - mx, \\ dy/dt = bx - ny, \end{cases} \tag{4.4}$$

Bu yerda $a,b,m,$ n - musbat o‘zgarmaslar. L. Richardson tomonidan modelga kiritilgan uchinchi postulatni ko‘rib chiqamiz: davlat boshqa davlatlar ushbu davlatning mavjudligiga tahdid solmasa ham, o‘zining davlat da'volari va boshqa davlatlarga dushmanligi asosida qurol-yarog‘larni ko‘paytirayotgan bo‘lsin. r va s *(*$r>0$ *va* $s>0$*)* orqali tegishli da'vo koeffitsiyentlarini belgilaymiz. Bundan quyidagi tenglamalar sistemasini olamiz:

$$\begin{cases} dx/dt = ay - mx + r, \\ dy/dt = bx - ny + s, \end{cases} \tag{4.5}$$

Ushbu sistemaning yechimi $x(t)$ va $y(t)$ funksiyalari bo‘lib, ular x_0, y_0 (qurollanish poygasining dastlabki holati) boshlang‘ich shartlari bilan aniqlanadi. Modelning elementar tahlilini o‘tkazamiz. Qurollanish poygasidan "oqilona" talab qilinadigan eng muhim xususiyatlardan biri bu barqarorlikdir. Ushbu talabni quyidagicha rasmiylashtiraylik: qurollanish xarajatlari darajasi doimiy bo‘lishi va vaqtga bog‘liq bo‘lmasligi kerak:

$$dx/dt = dy/dt = 0, \tag{4.6}$$

ya'ni, tizim muvozanat holatida bo‘lishi maqsadga muvofiqdir. (5.6)dan kelib chiqib (5.5) tizim uchun muvozanat shartlari quyidagi shaklda yoziladi:

$$ay - mx + r = 0, \tag{4.7}$$

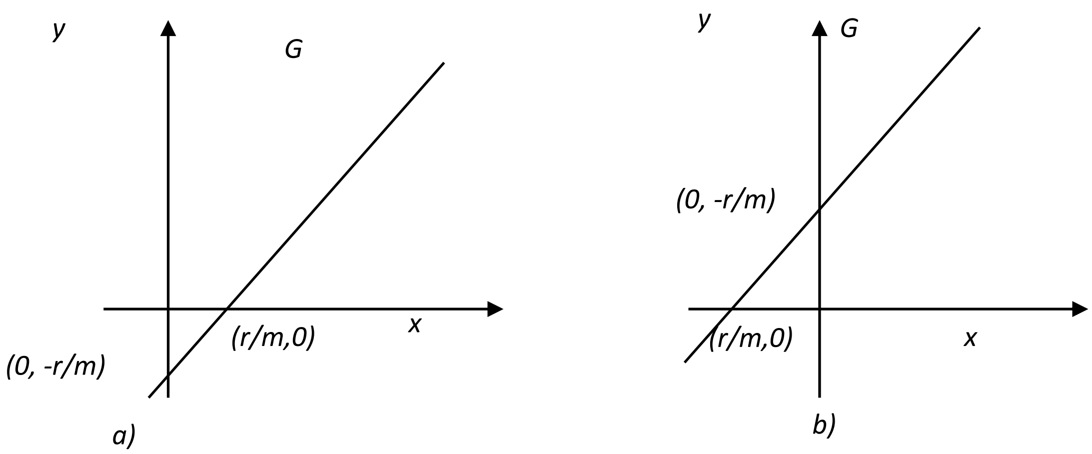
$$bx - ny + s = 0, \tag{4.8}$$

(5.7) va (5.8) dan biz quyidagini aniqlaymiz:

$$y = (m/a)x - r/a \tag{4.9}$$

$$y = (b/n)x + s/n \tag{4.10}$$

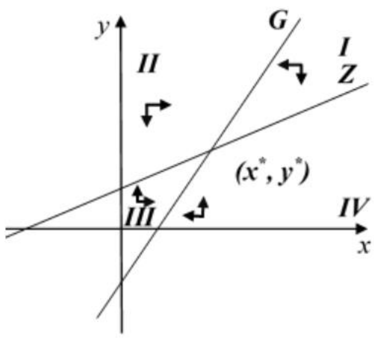
Endi (5.9) chiziqli tenglamaning geometrik talqinini *(x,y)* koordinatalar tekisligida ko‘rib chiqaylik (5.3-rasm).

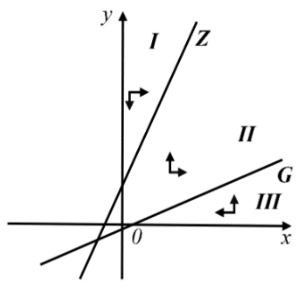


5.3–rasm. (5.9) tenglamaning geometrik talqini: a – r>0 da; b-r<0 da

G chizig‘idagi barcha nuqtalar uchun bizda $dx/dt=0$ yuqoridan ma’lum. Aytishimiz mumkinki, (5.5) sistemaning birinchi tenglamasi faza tekisligidagi nuqtaning harakat tezligining gorizontal komponentini, ikkinchi tenglama esa vertikalni belgilaydi. Agar faza tekisligining ma'lum bir nuqtasida $dx/dt>0$ bo‘lsa, u holda $x(t)$ ortadi va tizimning yechimi shu nuqtadan o‘ngga, agar $dx/dt<0$ bo‘lsa, u holda chapga siljiydi. Xuddi shunday, agar $dx/dt>0$ bo‘lsa, u holda nuqta yuqoriga (pastga) siljiydi.

Algebra kursidan ma'lumki, *g* to‘g‘ri chiziq tekislikni *(x, y)* ikkita yarim tekisliklarga ajratadi.





5.5-rasm. Uchinchi kvadrantdagi muvozanat nuqtasi

5.4-rasm. Birinchi chorakdagi muvozanat nuqtasi.

Birinchi yarim tekislikning barcha nuqtalari uchun $dx/dt>0$, ikkinchi yarim tekislik uchun esa $dx/dt<0$. Shu tartibda, ushbu sistemaning ikkinchi tenglamasi *Z* to‘g‘ri chiziq uchun to‘g‘ri keladi (vertikal tortishish) (5.4-rasm). G va Z to‘g‘ri chiziqlari birinchi chorakni I, II, III, IV Rim raqamlari bilan belgilangan to‘rtta sohaga ajratadi.

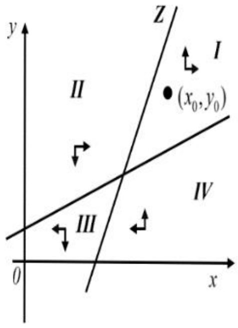
Richardson modelining hatti-harakatlarini t→∞ bo‘lganda tahlil qilamiz. Bunda uchta holat bo‘lishi mumkin:

1. Cheksiz qurollanish poygasi: $x\to\infty$ va $y\to\infty$.
2. O‘zaro qurolsizlanish: $x\to 0$ va $y\to 0$.
3. Qurol muvozanati: $x\to x^*$, $y\to y^*$, bu yerda $x^*, y^* > 0$.

Muvozanat nuqtasi (x^*, y^*) G [(5.7) tenglama] va Z [(5.8) tenglama] chiziqlarining kesishmasida joylashgan (5.4 - rasm). Agar $r>0$ va $s>0$ bo‘lsa, unda G va Z kesishish nuqtasi birinchi(5.4 rasmga qarang) yoki uchinchi(5.5 rasm) kvadrantda joylashganligini ko‘rsatish oson.

5.4-rasmdagi yo‘nalishlar faza tekisligining ma'lum bir choragida joylashgan nuqta harakatining gorizontal va vertikal tashkil etuvchilarini ko‘rsatadi. 5.4-rasmda ko‘rsatilgan chizmada, har qanday boshlang‘ich nuqtadan boshlab, yechim vaqt o‘tishi bilan muvozanat nuqtasiga keladi, qurollanishning boshlang‘ich darajasidan qat'iy nazar, "kuchlar muvozanati" ga erishiladi. 5.5 - rasmdan ko‘rinadiki, agar boshlang‘ich nuqta II sohaga tushgan bo‘lsa, u holda $x\to\infty$ va $y\to\infty$.

r, s koeffitsiyentlaridan kamida bittasi $r, s<0$ bo‘lgan vaziyatni ko‘rib chiqamiz (5.6-rasm). Agar boshlang‘ich xarajatlar darajasi, ya'ni (x_0, y_0) nuqta I sohada bo‘lsa, unda qurollanish poygasi cheksiz bo‘ladi. Agar boshlang‘ich nuqta III mintaqada bo‘lsa, u holda (5.4) tizimning yechimi ham (x^*, y^*) muvozanatdan "chiqib ketadi", lekin u $(0, 0)$ nuqtaga intiladi (o‘zaro qurolsizlanish).



5.6-rasm. *R<0* yoki (va) *s<0* da

tizimning o’zini turishi.

Shunday qilib, bir yoki hatto ikkala davlatda ham "yaxshi niyat" ning mavjudligi r, $s<0$ qurollanish poygasining qoniqarli natijasini kafolatlamaydi. Bularning barchasi tizimning dastlabki holatiga bog‘liq. Shubhasiz, Richardson modelining hatti-harakati a,b,m, n koeffitsiyentlari va r, s qiymatlarning ishorasiga bog‘liq:, bunda quyidagi 4 ta holatdan biri bo‘lishi mumkin:

Agar $mn\text{-}ab>0$, $r>0$, $s>0$ bo‘lsa, unda muvozanat nuqtasi mavjud.

Agar $mn\text{-}ab<0$, $r>0$, $s>0$ bo‘lsa, unda modeldan mantiqan qurollanish poygasining cheksiz kuchayishi kelib chiqadi.

Agar $mn\text{-}ab>0$, $r<0$, $s<0$ bo‘lsa, unda to‘liq o‘zaro qurolsizlanish kafolatlanadi.

Agar $mn\text{-}ab<0$, $r>0$, $s>0$ bo‘lsa, unda bashoratning pessimistligi yoki optimizmi dastlabki holatga bog‘liq.

Ushbu model urushlarni faqat qurollanish poygasi oldidan bashorat qilishi mumkin, ammo, davlatlar o‘rtasida yadroviy urush paydo bo‘lishi uchun qurollanish poygasi umuman talab qilinmaydi: yadro quroliga ega davlatlarda yadroviy kallakli raketalar allaqachon mavjud va ularning kuchi butun yer aholisini yo‘q qilish uchun yetarli. Ushbu urushlarni bashorat qilish uchun yanada murakkab matematik vositalar bilan ishlaydigan boshqa modellar kerak bo‘ladi.

Ikki armiyaning jangovar harakati modeli.

Harbiy va jangovar harakatlarni modellashtirish qo‘mondonlikka qaror qabul qilish uchun haqoqatga yaqin asoslarni taqdim etishga qaratilgan eng muhim ilmiy va amaliy vazifadir.

Ikki tomon o‘zaro jangovar harakatlarda ishtirok etayotgan bo‘lsin. $N1(t)$, $N2(t)$ orqali $t>0$ vaqtidagi birinchi va ikkinchi tomonlarning qo‘shinlari sonini, boshlang‘ich vaqtdagi sonini mos ravishda $N1(0)$, $N2(0)$ kabi belgilaymiz.

Ko‘rib chiqilayotgan modellardagi raqiblarning asosiy xarakteristikasi $N1(t)\geq0$ va $N2(t)\geq0$ bo‘lib hisoblanadi. Agar biror bir vaqtda raqamlardan biri nolga aylansa, u holda bu tomon mag‘lubiyatga uchragan deb hisoblanadi (bu vaqtda boshqa tomondagi qo‘shinlar soni noldan katta bo‘lishi kerak).

Muntazam qismlar orasidagi harakatlar bo‘layotgan paytda ularning soni dinamikasi uchta omil bilan belgilanadi:

1)jangovar harakatlar bilan bevosita bog‘liq bo‘lmagan sabablar (kasalliklar, jarohatlar, qochish) tufayli tarkibni kamaytirishi;

2) qarama-qarshi tomonning jangovar harakatlari tufayli yo‘qotishlar tezligi (bu o‘z navbatida uning strategiyasi va taktikasining sifati, jangchilarning ma'naviy holati va professionalligi, qurol-yarog‘ va boshqalar bilan belgilanadi);

3) Vaqtning ma'lum bir funksiyasi deb qaraladigan qo‘shinlarning to‘ldirilib borish tezligi.

Yuqoridagilarni hisobga olgan holda *N1(t), N2(t)* uchun quyidagi tenglamalar sistemasini olamiz

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = -\alpha_1(t)N_1 - \beta_2(t)N_2 + \gamma_1(t) \\ \frac{dN_2}{dt} = -\alpha_2(t)N_2 - \beta_1(t)N_1 + \gamma_2(t) \end{cases} \tag{4.11}$$

ai, βi,γi, i - 1,2 berilgan funksiyalar va $N_1(0)$, $N_2(0)$ boshlang‘ich qiymatlar uchun har qanday $t>0$ vaqtda (4.11) yechimga ega bo‘ladi. (5.11)da *a1,2(t)*≥0 koeffitsiyentlar odatdagi (jangovar bo‘lmagan) sabablarga ko‘ra yo‘qotish tezligini tavsiflaydi, *β1,2(t)*≥0 — raqibning harakatlari tufayli yo‘qotish tezligi, *γ1,2(t)*≥0- zahirani mustahkamlash tezligi.

Muntazam va partizan bo‘linmalari o‘rtasidagi jangovar harakatlar boshqa model bilan tavsiflanadi. Asosiy farq shundaki, tartibsiz qo‘shinlar armiya bilan taqqoslaganda himoyasiz, chunki ular yashirin harakat qilishadi, ko‘pincha partizanlar raqibga ko‘rinmas bo‘ishga harakat qilib turib maydonlarni tanlashga majbur bo‘ladilar. Shu sababli, ma'lum bir hududda turli joylarda o‘z operatsiyalarini amalga oshiradigan partizanlarning yo‘qotish darajasi nafaqat armiya qo‘shinlari soni *N1(t)*, balki partizanlarning o‘zlari soni *N2(t)* bilan ham mutanosib deb hisoblanadi, ya'ni $\beta(t) \cdot N_1 \cdot N_2$ kabi had bilan aniqlanadi. Natijada, model chiziqli bo‘lmagan ko‘rinish oladi:

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = -\alpha_1(t)N_1 - \beta_2(t)N_2 + \gamma_1(t) \\ \frac{dN_2}{dt} = -\alpha_2(t)N_2 - \beta_1(t)N_1N_2 + \gamma_2(t) \end{cases} \tag{4.12}$$

(4.12) da barcha miqdorlar (4.11) bilan bir xil ma'noga ega. Biz (4.12) (Lanchester modeli) modelini quyidagi xususiy holatda o‘rganamiz: *γ1=γ2=*0 (tomonlar qo‘shimcha kuchlar olmaydi va o‘z holatida qoladi); $\alpha_1 = const, \alpha_2 = const, \beta_1 = const, \beta_2 = const,$ (bu shartlar quyidagini anglatadi: raqiblarda har doim jangchilar tomonidan xizmatga yaroqli ishlatilishi mumkin bo‘lgan qurollar soni yetarli bo‘ladi).

Ushbu shartlarni hisobga olganda (5.11) model quyidagi shaklni oladi:

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = -\alpha_1 N_1 - \beta_2 N_2 \\ \frac{dN_2}{dt} = -\alpha_2 N_2 - \beta_1 N_1 \end{cases} \tag{4.13}$$

(4.13) tenglamalardan ko‘rinib turibdiki, bu holda tomonlar soni vaqt o‘tishi bilan faqat kamayishi mumkin. Ushbu jarayonning vaqtinchalik tabiati nima ekanligini bilish uchun biz yana bir soddalashtirishni joriy qilamiz (qisqa muddatli to‘qnashuvlar uchun to‘liq asosli): $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ deb hisoblaymiz(ya’ni jangovar bo‘lmagan holatda yo‘qotislar yo‘q). Boshqacha qilib aytganda, tomonlarning yo‘qotishlari faqat dushmanning harakatlari bilan belgilanadi. Buni hisobga olib (4.13) sistemani soddalashtirilganda quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = -\beta_2(t)N_2 \\ \frac{dN_2}{dt} = -\beta_1(t)N_1 \end{cases} \tag{4.14}$$

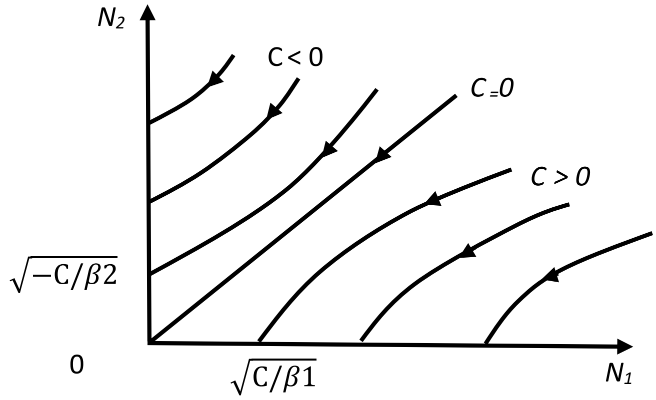
Tomonlar soni, avvalgidek, vaqt o‘tishi bilan kamayadi. (4.14) sistemani birinchi tenglamasini $\beta_1 N_1$ ga, ikkinchisini $\beta_2 N_2$ ga ko‘paytiramiz va hosil bo‘lgan ikkinchi tenglamani birinchisidan ayiramiz. Natijada biz quyidagi tenglamaga ega bo‘lamiz

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\beta_1}{2}N_1^2(t)-\frac{\beta_2}{2}N_2^2(t)\right]=0$$

va uni integrallaganiizda quyidagi ko‘rinishni oladi

$$\beta_1 N_1^2(t)-\beta_2 N_2^2(t)=\beta_1 N_1^2(0)-\beta_2 N_2^2(0)=\mathrm{C} \qquad (4.15)$$

(4.15) integral yordamida (4.14) sistemaning fazaviy trayektoriyalarini o‘rganish orqali quyidagi xulosalar chiqarish mumkin (4.7-rasm).



4.7-rasm. (4.15) sistemaning fazali traektoriyalari.

Agar C>0 bo‘lsa, birinchi armiya g‘alaba qozonadi, C<0 bo‘lganda ikkinchisi, C=0 bo‘lganda holatda tomonlar bir vaqtning o‘zida bir-birlarini yo‘q qilishadi va g‘olib bo‘lmaydi. Ushbu natijalarning ma'nosi (4.15) tenglamaning koeffitsiyentlaridan aniq ko‘rinadi. G‘alaba qozonish uchun nafaqat jangovar harakatlar boshida tomonlarning soni ($N_1(0)$, $N_2(0)$) balki ularning tayyorgarligi (β_1, β_2), qurollarining sifati va boshqalar ham muhimdir. Shunday qilib, Agar C>0 bo‘lsa, unda (5.15) dan

$$\beta_1 N_1^2(0) > \beta_2 N_2^2(0)$$

va g‘alabaga erishish uchun ikkinchi tomon bir vaqtning o‘zida qo‘shinning boshlang‘ich sonini ko‘paytirishi yoki jangovar harakatlar sifatini yaxshilashi kerak bo‘ladi. Ko‘rinib turibdiki, β_2 koeffitsiyentini oshirishning ta'siri $N_2(0)$ sonining ikkinchi darajali qiymatiga (jangovar harakatlarning kvadratik qonuni deb ataladigan) teng o‘sishiga qaraganda kamroq bo‘ladi.

(4.14) dagi tenglamalarning birinchisini differensiallab va ikkinchisini hisobga olib biz N_1 (t) uchun quyidagi tenglamani olamiz:

$$\frac{d^2N_1}{dt^2} = \beta_1\beta_2 N_1 \tag{4.16}$$

(4.16) dan $N_1(t=0) = N_1(0)$ va $dN_1/dt(t=0) = -\beta_2 N_2(0)$ boshlang‘ich shartlarini hisobga olgan holda birinchi armiya qo‘shinlarining vaqt funksiyasi ko‘rinishidagi sonini topamiz:

$$N_1(t) = N_1(0)ch\sqrt{\beta_1\beta_2}t - N_2(0)\sqrt{\beta_2/\beta_1}sh\sqrt{\beta_1\beta_2}t \tag{4.17}$$

$N_1(t)$ ni bilgan holda $N_2(t)$ ni topish qiyin bo‘lmaydi.

Muntazam armiyaning partizanlarga qarshi harakatlarini yuqorida keltirilgan shartlarda bo‘lgani kabi soddalashtiruvchi variantlarda(ya’ni jangovar bo‘lmagan holatda yo‘qotislar yo‘q) ko‘rib chiqaylik. Bunda (4.12) model quyidagi shaklga ega bo‘ladi:

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = -\beta_2 N_2 \\ \frac{dN_2}{dt} = -\beta_1 N_1 N_2 \end{cases} \tag{4.18}$$

Tomonlar soni, avvalgidek, vaqt o‘tishi bilan kamayadi, ammo boshqa qonunga ko‘ra. (4.18) sistemaninig birinchi tenglamasini $\beta_1 N_1$ ga, ikkinchisini β_2 ga ko‘paytiramiz va hosil bo‘lgan ikkinchi tenglamani birinchisidan ayiramiz. Natijada biz quyidagi tenglamaga kelamiz:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\beta_1}{2}N_1^2(t) - \beta_2 N_2(t)\right] = 0,$$

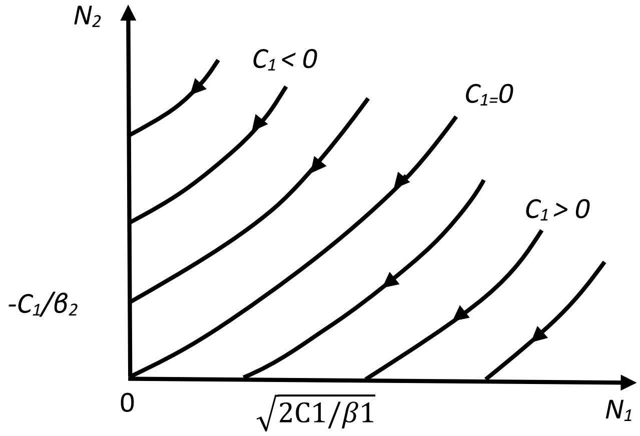
ushbu tenglamani integrallaymiz:

$$\frac{\beta_1}{2}N_1^2(t) - \beta_2 N_2(t) = \frac{\beta_1}{2}N_1^2(0) - \beta_2 N_2(0) = \mathrm{C}_1 \tag{4.19}$$

(4.19) yordamida (4.18) sistemaning fazaviy traektoriyalarini o‘rganamiz. 4.8-rasmdan ko‘rinib turibdiki, $\mathrm{C}_1 > 0$ bo‘lganda armiya g‘alaba qozonadi, $\mathrm{C}_1 < 0$

bo‘lganda-partizanlar, $C_1 = 0$ bo‘lganda esa g‘olib bo‘lmaydi. Muntazam qismlar harakatida bo‘lgani kabi, g‘alaba nafaqat boshlang‘ich armiya soni, balki jangovar tayyorgarlik va qurol sifati bilan ham ta'minlanadi. Masalan, $C_1 > 0$ bo‘lsin, ya'ni

$$\frac{\beta_1}{2} N_1^2(0) > \beta_2 N_2(0) \tag{4.20}$$



4.8-rasm. (4.8) - sistemaning fazali trayektoriyalari.

Endi partizanlar β_2 koeffitsiyentini oshirishni ta'minlashlari va $N_2(0)$ boshlang‘ich sonini tegishli miqdorga oshirishlari kerak, aks holda ular mag‘lubiyatga uchraydi. Bundan tashqari, $N_1(0)$ qiymatining o‘sishi bilan bu o‘sish chiziqli bo‘lmaydi, balki $N_1(0)$ ning ikkinchi darajasiga mutanosib ravishda o‘sishi kerak (harbiy harakatlarning parabolik qonuni). Aytishimiz mumkinki, qaysidir ma'noda muntazam qo‘shinlar yanada qulayroq holatda, chunki ular uchun (4.20) tengsizlikda $N_1(0)$ kvadratda turibdi, shuning uchun ham (4.20) tengsizlik muntazam armiya boshlang‘ich sonining kamroq qiymatida ham bajarilishi mumkin.

N_1(t), N_2(t) funksiyalarining o‘zini tutishi (4.18) dan (4.19) integraldan foydalangan holda topiladi. Shunday qilib, N_1(t) uchun quyidagini olamiz:

$$\frac{dN_1}{dt} = C_1 - \frac{\beta_1}{2} N_1^2,$$

Ushbu tenglama quyidagiga ekvivalent:

$$\frac{dN_1}{C_1 - \beta_1 N_1^2/2} = dt \qquad (4.21))$$

(4.21) ni integrallab $\boldsymbol{N_1}$(t) va undan keyin $\boldsymbol{N_2}$(t) ni vaqtning oshkormas funksiyalari sifatida topish mumkin.

Xulosa qilib shuni ta'kidlash mumkinki, bu yerda ko‘rib chiqilgan eng oddiy raqobat modellari ko‘plab tabiiy fanlar jarayonlarini tavsiflashda keng tarqalgan ikkinchi darajali oddiy differensial tenglamalar sistemalariga (umuman olganda chiziqli bo‘lmaganda) mos keladi. Bu tabiiydir, chunki armiya shakllanishida ishlatiladigan yondashuvlar (to‘yinganlik, qiymatning o‘sish sur'atlari, mutanosibligi va boshqalar) mexanika, fizika, kimyoda qo‘llaniladigan yondashuvlarga o‘xshashdir.

Nazorat savollari:

1. Demografiya atamasi nimani anglatadi?
2. Maltus modeli qanday ko‘rinishga ega?
3. Maltus modelining afzalliklari nimada?
4. Maltus nazariyasining kamchiliklarini keltiring?
5. Ferxulst-Pirl modelini tasvirlab bering.
6. Ferxulst-Pirl modeliga misol keltiring.
7. Chiziqli bo‘lmagan populyatsiya modellarining uchta rejimi haqida ma’lumot bering.
8. Qurolli mojaroning paydo bo‘lishini bashorat qilishning qanday usullari mavjud?
9. L. F. Richardsonning qarama-qarshilik modeli haqida gapiring.
10. O‘zgarmas koeffitsiyentli ikkita differentsial tenglamalar sistemasi uchun modelning kamchiliklari nimada?
11. Richardson modelining t→∞ dagi hatti-harakati(o‘zini tutishi) qanday?
12. Ikki armiyaning jangovar modellarida raqiblarning asosiy xususiyatlari qanday?
13. Muntazam qismlar sonining dinamikasi qanday omillarga ega?
14. Ikki armiyaning jangovar harakatlar modeli qanday tavsiflanadi?
15. Ikki armiyaning umumiy jangovar modelida qanday alohida holatlar mavjud?

IV. AMALIY MASHG’ULOTLAR

1 – AMALIYOT. MODEL VA MATEMATIK MODELLASHTIRISH. MATEMATIK MODELLARNI QURISH VA ULARNI TADBIQ QILISH USULLARI.

Biz model atamasida (lat. modulus-o‘lchov, namuna, norma) bilish (o‘rganish) jarayonida asl ob'ektni almashtiradigan, ushbu tadqiqot uchun muhim bo‘lgan ba'zi o‘ziga xos xususiyatlarni saqlaydigan moddiy yoki aqliy tasavvur qilingan ob'ektni tushunamiz. Model bizga turli xil boshqaruv variantlarini sinab ko‘rish orqali ob'ektni qanday qilib to‘g‘ri boshqarishni o‘rganishga imkon beradi. Buning uchun haqiqiy ob'ektdan foydalanish ko‘pincha xavfli yoki shunchaki imkonsizdir. Boshqacha qilib aytganda, model - bu bilish jarayonida asl ob'ektni almashtirib, uning ba'zi muhim xususiyatlarini saqlab turadigan shunday moddiy yoki aqliy tasavvur qilingan ob'ekt.

Matematik modellarni qurish usullari.

Modellarni qurishda ikki xil yondashuv qo‘llaniladi:

- deduktiv (umumiydan xususiyga);

- induktiv (xususiydan umumiyga).

Birinchi yondashuvda ma’lum fundamental modelning xususiy holi ko‘rib chiqiladi. Bunda, jarayonga bo‘lgan yondashuvlar asosida, ma’lum model modellashtirilayotgan ob'ekt sharoitlariga moslashtiriladi. Masalan, Nyutonning ma'lum qonuni asosida jismning erkin tushish modelini qurish va kichik vaqt oralig‘ida tekis tezlanuvchan harakat modelini qabul qilish mumkin.

Ikkinchi usul gipotezani oldinga surgan holda murakkab ob’ekt dekompozitsiyasi, tahlil qilish, so‘ngra sintezni o‘z ichiga oladi. Bu yerda sistemani o‘zini tutishi haqidagi qarashlar asosida modellashtirishda keng qo‘llaniladigan o‘xshashlik tushunchasi keng qo‘llaniladi. Masalan, shu usul bilan atom tuzilishini modellashtirish amalga oshirilgan. Bunda Tomson, Rezerford, Bor modellarini eslash kifoya.

1.1-rasm. Modellarning xususiyatlari.

Matematik modellarga qo‘yiladigan asosiy talablar adekvatlik, universallik va samaradorlik talablaridir (1.1-rasm).

Adekvatlik. Agar model berilgan xususiyatlarni maqbul aniqlik bilan aks ettirsa, bunday model adekvat deb hisoblanadi. Adekvatlik model va ob'ektning chiqish parametrlari qiymatlarining mos kelish darajasi sifatida aniqlanadi. Modelning aniqligi ob'ekt ishlashining turli sharoitlarida farq qiladi. Ushbu shartlar tashqi parametrlar bilan tavsiflanadi. Tashqi parametrlar fazosida oldindan berilgan mumkin bo‘lgan xatolikdan oshmaydigan modelning adekvatligi sohasini ajratish mumkin. Modellarning adekvatligi sohasini aniqlash murakkab protsedura bo‘lib, u tashqi parametrlar fazosi o‘lchovi oshishi bilan oshib boradi.

Universallik. Matematik model nafaqat alohida olingan hodisa yoki ob’yektlar, shuning bilan yetarlicha keng miqyosdagi masalalarni ham yechishga qodir bo‘lishi kerak.

Iqtisodiy samaradorlik. Model uni amalga oshirish uchun hisoblash resurslari xarajatlari — mashina vaqti va xotira hajmi bilan tavsiflanadi.

Oddiylik. Hisoblashda kamroq omillarni hisobga olgan holda, shuning bilan birga kerakli aniqlikda natijaga erishish.

Potensiallik (bashorat qilish). Modelni qo‘llash orqali o‘rganilayotgan ob'ekt haqida yangi bilimlarni olish imkoniyati. Muammoni hal qilish natijalarining yetarlicha aniqligi, modelning ishonchliligi. Modelni tubdan o‘zgartirmasdan takomillashtirish qobiliyati.

1. Modellarni qurish tamoyillariga ko‘ra ular analitik va imitatsion modellarga bo‘linadi.

Analitik - bu haqiqiy ob'ektlar yoki tizimlarning ishlash jarayonlari aniq funktsional bog‘liqliklar shaklida yozilgan matematik modellardir. Biroq, ushbu bog‘liqliklarni (differentsial va integral tenglamalar, tenglamalar tizimlari) faqat nisbatan oddiy tizimlar va hodisalar uchun olish mumkin.

Hodisalar murakkab va xilma-xil bo‘lganda, tadqiqotchi ularni soddalashtirishga o‘tishi kerak. Natijada, analitik matematik model haqiqiy tizim yoki jarayonning taqribiy ko‘rinishiga aylanadi. Agar shunga qaramay, murakkab tizimlar uchun modelni yaratish mumkin bo‘lsa ham, ko‘pincha uni o‘rganish qiyin hal qilinadigan muammoga aylanadi. Shuning uchun bunday hollarda tadqiqotchilar imitatsiya modellarini yaratishga majbur bo‘ladilar.

Imitatsiya - bu ma'lum bir davrda real ob'ektlar, jarayonlar va tizimlarning hatti-harakatlarini taqlid qiladigan matematik modellar va ularning mantiqiy tuzilishi va vaqt o‘tishi ketma-ketligini saqlab qolgan holda jarayon yoki tizimni tashkil etadigan elementar hodisalarni tadqid qilishdir.

Imitatsiya modellari tizimning hatti-harakatlarini oldindan hisoblash yoki bashorat qilishga imkon bermaydi, balki berilgan dastlabki ma'lumotlar asosida matematik modelda hisoblash tajribasini o‘tkazishga imkon beradi. Shuning uchun informatika fanida bunday ta'rif ham mavjud:

imitatsiya modellari-bu ma'lum bir davrda real ob'ektlar, jarayonlar yoki tizimlarning hatti-harakatlarini tadqid qiluvchi matematik modellar bilan kompyuterda o‘tkaziladigan hisoblash tajribalari.

2. Modellashtirish maqsadlariga ko‘ra matematik modellar tavsiflovchi, optimallashtirish, ko‘p mezonli va o‘yin modellariga bo‘linadi. Deskriptiv (tavsiflovchi) - bu faqat ob'ektlar va hodisalarni tasvirlaydigan va ular haqidagi ma'lumotlarni yozib oladigan modellar. Masalan, quyosh tizimining modeli undagi sayyoralarning joylashishini va ularning orbitasini, quyosh tizimiga kirib kelgan kometaning harakat modelini aniqlaydi, uning parvoz yo‘lini, yerdan qancha masofani bosib o‘tishini va hokazolarni taxmin qilishga imkon beradi.

Optimallashtiruvchi modellar deb shunday modellarga aytiladiki, ularning parametrlari o‘zgarishi modellashtirish natijasiga ta’sir qiladi. Bu modellar muayyan shartlarga rioya qilgan holda muammoning maqbul (har qanday ma'noda eng yaxshi) echimini topishga xizmat qiladi. Masalan, ishlab chiqaruvchilardan iste'molchilarga mahsulotlarni tashish modeli ularning narxi minimal bo‘lishi uchun transport yo‘nalishini tanlashga (optimallashtirishga) imkon beradi.

Jarayonni bir vaqtning o‘zida bir nechta parametrlar bo‘yicha optimallashtirishga imkon beradigan modellar ko‘p kriteriyali modellar deb ataladi, bunday modellarda optimallashtirish maqsadlari bir-biriga ziddiyatli bo‘lishi ham mumkin, masalan, oilaning ovqatlanish modeli foydali, kaloriya miqdori va uni sotib olish xarajatlarining minimalligi kabi mezonlarga javob berishi kerak;

O‘yin modellari deb matematik nazariyasida o‘yin deb ataladigan ziddiyatli vaziyatda raqiblarning strategiyasini belgilaydigan modellarga aytiladi. Karta, sport o‘yinlari, harbiy janglar modellari o‘yin modellariga tegishli. Ular o‘yinchilarning taktikasi va strategiyasini modellashtirishga imkon beradi.

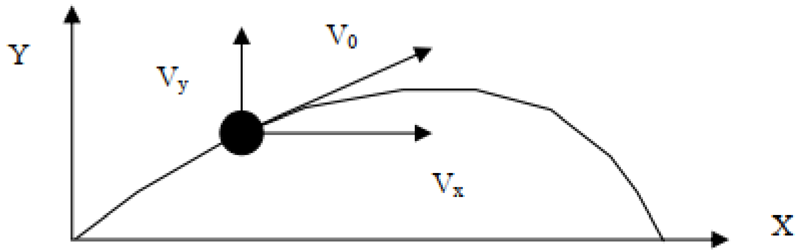
Gorizontga qiya otilgan jism harakatining matematik modeli.

Quyidagicha mexanika muammosini ko‘rib chiqamiz (1.4-rasm). Jism biror burchak ostida dastlabki V_0 tezlik bilan otilgan bo‘lsin. Jismning harakat traektoriyasini topish va uning borib tushgan joyigacha bo‘lgan masofani hisoblash kerak.

Ushbu matematik modelni tuzish uchun quyidagicha cheklanishlar qilamiz:

- Yer bu sanoq boshi;
- erkin tushish tezlanishi g doimiy;

- Yerning egriligini e'tiborga olmaymiz;
- harakatlanayotgan jismga havo ta'sirini e'tiborga olmaymiz.



1.4-rasm. Jismning harakat trayektoriyasi.

Koordinatalar sistemasini kiritamiz. Jism otilish nuqtasini koordinatalar boshiga joylashtiramiz, x o‘qini jism otilish yo‘nalishiga, y o‘qini vertikal yuqoriga yo‘naltiramiz.

Qabul qilingan cheklanishlar fonida jism boshlang‘ich tezligining x o‘qiga proektsiyasi $V_x = V_0 \cos\alpha$ bilan, jism boshlang‘ich tezligining y o‘qiga proektsiyasi $V_y = V_0 \sin\alpha$ va jism harakatining y o‘qiga proyeksiyasi y=-g tezlanish bilan mos ravishda jismning harakat trayektoriyasi quyidagilar bilan xarakterlanadi:

$$\left\{ \begin{aligned} X &= tV_x = tV_0 \cos\alpha \\ Y &= tV_y - \frac{gt^2}{2} = tV_0 \sin\alpha - \frac{gt^2}{2} \end{aligned} \right\} \tag{1.1}$$

(1.1)ning birinchi tenglamasidan X(t) kordinata orqali t vaqtni belgilaymiz:

$$t = \frac{X}{V_0 \cos\alpha}$$

Y(t) tenglama :

$$Y = \frac{XV_0 \sin\alpha}{V_0 \cos\alpha} - \frac{g}{2}\left(\frac{X}{V_o \cos\alpha}\right)^2 = Xtg\alpha - \frac{g}{2}\left(\frac{X}{V_o \cos\alpha}\right)^2 \tag{1.2}$$

18.1 sistemaning ikkinchi tenglamasiga y=0 ni qo‘yganda, jismning yerga tushish vaqtini aniqlaymiz:

$$V_0 \cdot t \cdot \sin\alpha - \frac{gt^2}{2} = 0 \Leftrightarrow t\left(V_0 \cdot \sin\alpha - \frac{gt}{2}\right) = 0,$$

bu yerdan

$$t = \frac{2 \cdot V_0 \cdot \sin\alpha}{g} \qquad (1.3)$$

(1.3) formula harakat davomiyligini belgilaydi. (1.3) formulada belgilangan *t* ni sistemaning 1-tenglamasiga (1.1) qo‘yib olamiz:

$$S = V_0 \cdot \cos\alpha \cdot \frac{2V_0 \cdot \sin\alpha}{g} = \frac{2V_0^2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{g},$$

bu yerda almashtirishlar bajarsak

$$S = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g} \qquad (1.4)$$

(1.4) formula jismning otilgandan keyin kelib tushgan nuqtasini, ya'ni jismning gorizontal ravishda uchadigan masofasini belgilaydi.

Jismning maksimal yuqori ko‘tarilish balandligini aniqlash uchun (1.1) tizimning ikkinchi tenglamasidan hosila olamiz:

$$V_0 \cdot \sin\alpha - gt = 0 \;\Rightarrow\; t = \frac{V_0 \cdot \sin\alpha}{g} \qquad (1.5)$$

Bu vaqtda tosh eng yuqori balandlikka ko‘tariladi.

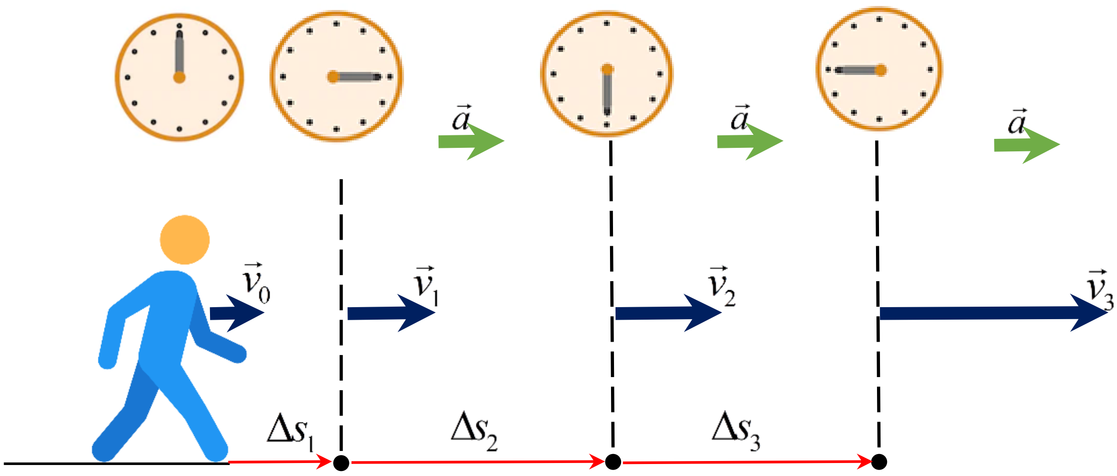
Tekis tezlanuvchan jism harakatining matematik modeli.

V0 boshlang‘ich tezligiga ega bo‘lgan jism a tekis tezlanuvchan tezlik bilan harakat qilsin. T vaqt ichida jismning bosib o‘tadigan S yo‘lini aniqlash masalasini ko‘raylik.

Tekis tezlanuvchan harakatning matematik modelini tuzamiz, bunda V0, a, T - harakat jarayonining boshlang‘ich ma'lumotlari, S - natija.

Modellashtirishning maqsadi – boshlang‘ich ma'lumotlar va natijani bog‘laydigan matematik munosabatni olish. Ushbu munosabat jismning tekis tezlanuvchan harakati ko‘rinishidagi jarayonining matematik modeli bo‘ladi.

Biz jismning butun T harakat vaqtlini n ta teng qismlarga shunday ajratamizki, har bir qismda jism doimiy tezlikda tekis harakat qiladi deb hisoblaymiz va oraliq oxirida tezlik sakrash bilan o‘zgarsin deb hisoblaymiz (bu taxmin matematik, ya'ni mavhum harakat modelini yaratish uchun qilingan, tezlikning bunday o‘zgarishi fizikada sodir bo‘lmaydi). 1.5-rasmda bunday harakatning modeli chizma shaklida taqdim etilgan, harakatlanuvchi jism inson shaklida tasvirlangan [8].



1.5-rasm. Tekis harakatning grafik modeli.

Oraliq intervallarni $t = \dfrac{T}{n}$ kabi belgilaymiz, har bir $[t_i, t_{i+1}]$, $i = 1, 2, .., n-1$ intervalda tezlik qiymatini quyidagicha hisoblash mumkin:

$[t_1, t_2]$ oraliqda $V_1 = V_0$ m/sek;

$[t_2, t_3]$ oraliqda $V_2 = (V_1 + a \cdot t)$ m/sek;

$[t_3, t_4]$ oraliqda $V_3 = (V_2 + a \cdot t)$ m/sek;

....

$[t_{k-i}, t_k]$ oraliqda $V_k = (V_{k-i} + a \cdot t)$ m/sek;

Har bir intervaldagi harakat tekis ekanligini hisobga olsak, jism bosib o‘tgan yo‘lning uzunligi quyidagicha hisoblanadi:

$$S = V_1 t + V_2 t + \ldots + V_n t = (V_1 + V_2 + V_3 + \ldots V_n)t \qquad (1.6)$$

Tezliklar ketma-ketligi $V_1 V_2, V_3, .., V_N$ boshlang‘ich qiymati *V1* va ayirmasi *d= at* bo‘lgan arifmetik progressiyadir. Algebra kursidan ma'lumki, bunday arifmetik progressiyaning birinchi n ta hadi yig‘indisi quyidagi formula bo‘yicha hisoblanadi:

$$S_n = \frac{2V_1 + d(n-1)}{2},$$

shunday qilib, (1.6) formuladagi tezliklar yig‘indisi quyidagicha ifodalanishi mumkin:

$$V_1 + V_2 + V_3 + ... + V_n = \frac{2V_0 + at(n-1)}{2} n \qquad (1.7)$$

(1.7) ifodani (1.6) formulaga almashtirib, biz bir qator o‘zgarishlarni amalga oshiramiz

$$S = \frac{2V_0 + at(n-1)}{2} nt = \frac{2V_0 + at(n-1)}{2} n \frac{T}{n} =$$

$$= \frac{2V_0T + atT(n-a)}{2} = \frac{2V_0T + a\frac{T}{n}T(n-1)}{2} =$$

$$= \frac{2V_0Tn + aTT(n-1)}{2n} = V_0T + \frac{aT^2}{2} - \frac{aT^2}{2n}$$

va biz jismning bosib o‘tgan yo‘lini olamiz:

$$S = V_0T + \frac{aT^2}{2} - \frac{aT^2}{2n}$$

Oxirgi formula-tekis tezlanuvchan jism harakatining matematik modeli. Agar biz oraliqlar soni n ni yetarlicha katta olsak, unda oxirgi qo‘shiluvchi cheksiz kichik miqdor bo‘ladi va uni e'tiborga olmaslik mumkin, u holda

$$\boxed{S = V_0T + \frac{aT^2}{2}} \qquad (1.8)$$

(1.8) formula - **bu tekis tezlanuvchan jism harakatining matematik modeli.** Bu bizga boshlang‘ich tezligi **V0** va doimiy **a** tezlanishga ega bo‘lgan jismning t vaqt ichida o‘tadigan **S** yo‘lini aniqlashga imkon beradi. Ushbu model qurish printsiplariga ko‘ra analitik hisoblanadi, chunki u jarayonning kirish va chiqish parametrlarini aniq bog‘laydi, modellashtirish maqsadlariga ko‘ra deskriptiv hisoblanadi, chunki u berilgan boshlang‘ich ma’lumotlar asosidagi harakat jarayonini tavsiflaydi.

Shunday qilib belgilangan maqsadga erishildi - tekis harakat jarayonining kirish va chiqish parametrlarini bog‘laydigan model-formula olindi

Jismni erkin tushishining matematik modeli

Erkin tushish-bu tortishish kuchi bilan sodir bo‘ladigan tekis tezlanuvchan harakat, bu yerda jismga ta'sir qiluvchi boshqa kuchlar yo‘q yoki ahamiyatsiz deb hisoblanadi [8].

Masalan, parashyut ochilishidan oldingi birinchi soniyalarda parashyutchining tushishi erkin tushishga misol bo‘ladi (rasm. 1.6).

1.6-rasm. Parashyutchining erkin tushishi

Masalaning qo‘yilishi. Massasi m bo‘lgan jism massa M_3 va radiusi R_3 bo‘lgan yerga biror H balandlikdan qarshiliksiz muhitda tushayotgan bo‘lsin. Jismning tushish tezlanishi a ni topish masalasi qo‘yilgan bo‘lsin.

Ushbu masalaga javob berish uchun biz jism erkin tushishining matematik modelini quramiz.

Modellashtirishning maqsadi-dastlabki ma'lumotlar va natijani bog‘laydigan matematik munosabatni olish. Bu munosabat jismning erkin tushishi kabi jismoniy hodisaning matematik modeli bo‘ladi.

Ushbu masalada, H, m, M_3, R_3-kirish, a- natijaviy ma’lumotlari.

Gravitatsiya qonunidan kelib chiqadiki, agar jism yerdan nisbatan past bo‘lgan biror H balandlikda bo‘lsa, uni yer quyidagi kuch bilan tortadi

$$F = G\frac{mM_3}{R_3^2}$$

Bu yerda G-tortishish doimiysi. Nyutonning ikkinchi qonunidan harakatlanuvchi jismga ta'sir qiluvchi kuch quyidagi formula bilan belgilanadi

$$F = ma,$$

Bu yerda a-jismning tezlanishi.

Yerga tushayotgan jismga faqat bitta kuch – tortishish kuchi ta’sir qilishini hisobga olsak, yuqoridagi ikki formulaning o‘ng tomonidagi ifodalarni o‘zaro tenglashtirib, quyidagini olamiz:

$$G\frac{mM_3}{R_3^2} = ma$$

Oxirgi formuladan jismning yerga tushadigan tezlanishini olamiz

$$a = G\frac{M_3}{R_3^2} \qquad (1.9)$$

Ushbu formula jismning erkin tushishining matematik modelidir. Ushbu model, qurish printsiplariga ko‘ra , analitik hisoblanadi, chunki u kirishdagi M_3, R_3 parametrlarni natijaviy parametr a bilan aniq bog‘laydi, modellashtirish maqsadlariga ko‘ra, bunday modellar deskriptiv(tavsiflovchi) modellar deyiladi.

Biz ushbu modelni nazariy jihatdan mantiqiy fikrlash va matematik hisob-kitoblar orqali o‘rganamiz.

1) modelning o‘zidan kelib chiqadiki, jismning erkin tushishi tekis tezlanuvchan harakatdir, chunki uning tezlanishi doimiy qiymatdir.

2) (1.9) modelda jism massasi m, shuningdek H balandlik ishtirok etmayapti, bundan kelib chiqadiki, barcha jismlar yerga bir xil tezlanish bilan tushadi. Ushbu tezlanishni erkin tushish tezlanishi deb ataladi va g bilan belgilanadi, uning kattaligi tajribalar asosida hisoblanadi [8].

3) vaqtning har bir daqiqasida t tushish tezlanishining qiymati $g \approx 9{,}8 m / sek^2$.

4) t vaqtdagi jism joylashgan h(t) balandlik quyidagicha aniqlanishi mumkin [8]:

$$h(t) = H - S(t) = H - (V_0 t + \frac{gt^2}{2})$$

ammo, vaqtning dastlabki daqiqasida jism tezligi V0 = 0 deb qabul qilganimiz uchun

$$h(t) = H - \frac{g \cdot t^2}{2}$$

5) jism yerga tushganda $h(t) = 0$ bo‘ladi, shuning uchun oxirgi formuladan biz jismning tushish vaqtini hisoblash uchun quyidagi formulani olamiz.

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot H}{g}}$$

2-amaliy mashg’ulot:

Jarayonlarni modellashtirishda tabiatning saqlanish qonunlaridan foydalanish.

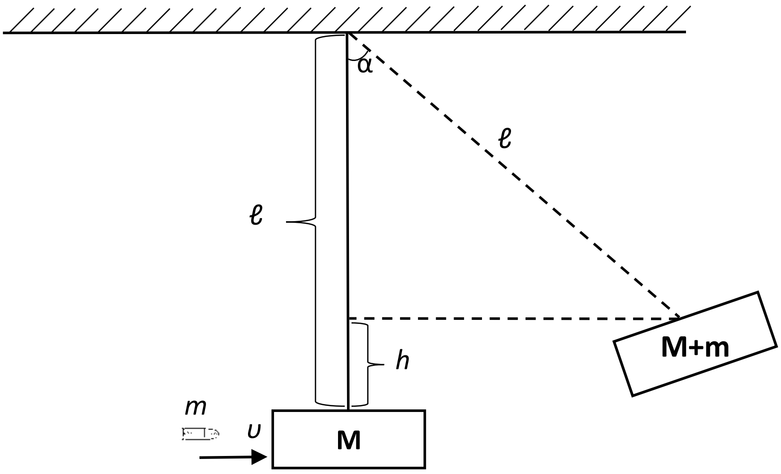
Revolver o‘qining tezligini aniqlash.

Revolver o‘qining tezligini tezda aniqlamoqchi bo‘lgan va yaqin atrofda maxsus laboratoriyaga ega bo‘lmagan ballistik mutaxassis yengil qattiq va erkin aylanadigan tayoqqa osilgan mayatnik – yuk kabi nisbatan oddiy qurilmadan foydalanishi mumkin (3.1- rasm). Mayatnik-yukga yo‘naltirilgan o‘q o‘q-yuk tizimiga kinetik energiyasini beradi va bu o‘zgarishni quyidagicha ta'riflash mumkin:

$$\frac{mv^2}{2} = (M + m)\frac{V^2}{2} \tag{2.1}$$

Bu yerda $mv^2 / 2$ - v tezlikka ega bo‘lgan m massa o‘qning kinetik energiyasi, M - yukning massasi, V -to‘qnashuvdan so‘ng o‘q-yuk tizimining olgan tezligi.

O‘q-yuk tizimining bu kinetik energiyasi ipning vertikaldan eng katta burilish nuqtasida tizimning potentsial energiyasiga to‘liq o‘tadi:



2.1-rasm. O‘q-yuk tizimining o‘zaro ta'siri.

$$(M+m)\frac{v^2}{2}=(M+m)gh \qquad (2.2)$$

Bu yerda g-tortishish tezlashishi, h - to‘qnashuvdan keyin o‘q-yuk tizimining balandligi (2.1-rasm).

Yukning asl holatidan α burchakka og‘ishidan kelib chiqqan holda (2.1-rasm), noma'lum h balandlikni aniqlaymiz . Agar l-yuk osilgan ip uzunligi bo‘lsa, hosil bo‘lgan uchburchakdan $\cos\alpha=\frac{l-h}{l}$. Bu yerdan h ni topamiz

$$h=l(1-\cos\alpha) \qquad (2.3)$$

(2.3) ni (2.2) tenglamaga qo‘yish orqali biz quyidagini olamiz

$$m\frac{v^2}{2}=(M+m)gl(1-\cos\alpha) \qquad (2.4)$$

(2.4) dan biz o‘q tezligi v ni topamiz :

$$v=\sqrt{\frac{2(M+m)gl(1-\cos\alpha)}{m}} \qquad (2.5)$$

(2.5) agar o‘q va yukni isitish, havo qarshiligini yengish, ipning tezlanish olishi va boshqalar uchun energiya yo‘qotishlar hisobga olinmasa, formula aniq natija beradi. Shunday qilib, biz soddalashtirilgan jarayon modelini ko‘rib chiqdik, bu modelning aniqligini oshirish uchun keltirilgan energiya yo‘qotishlarni ham hisobga olishni talab qilinadi.

Misol tariqasida muayyan parametrlarda (2.5) ifodani hisoblashni ko‘rib chiqamiz. O‘qning massasi $m = 0{,}002\ kg$ bo‘lsin, yukning massasi $0{,}5\ kg$, ipning uzunligi $l = 1\ m$ bo‘lsin, to‘qnashuvdan keyin yukning burilish burchagi $\alpha = 60^0 C$. Ushbu kattaliklarni (3.5) formulaga qo‘yib turib quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$v = \sqrt{\frac{2(M+m)gl(1-\cos\alpha)}{m}} = \sqrt{\frac{2(0,5+0,002)9,8\cdot 1(1-\cos 60^0 C)}{0,002}} = 156\ м/с$$

MathCADda dastur

$M := 50$ $\quad g := 9.8$

$V := 2$ $\quad 1 := 70$

$al := 1.2$ $\quad m := 0.6$

$$v := \sqrt{\frac{2\cdot(M+m)\cdot g\cdot 1\cdot(1-\cos(al))}{m}}$$

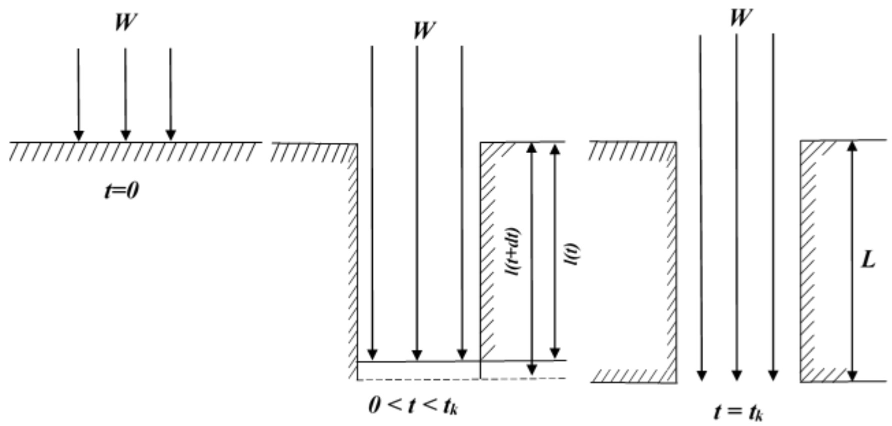
$\boxed{v = 271.622}$

Topshiriq:

Osib qo’yilgan yuk massasi 20 dan 100 gacha o’zgarganda o’q tezligi qanday o’zgarishini ko’rsatuvchi grafik tuzing.

Metall qatlamni burg‘ulash jarayonini modellashtirish.

Qalinligi L bo‘lgan metallni W lazer bilan burg‘ulash masalasini ko‘rib chiqamiz, uning nurlanishi material yuzasiga perpendikulyar(rasm.2.2).



2.2. rasm- L qalinlikdagi metallni lazer nuri bilan burg‘ulashning dastlabki, oraliq va yakuniy bosqichlari.

Agar lazer energiyasi butunlay $LS\rho$ metall ustunining burg‘ulanishiga to‘g‘ri kelsa (L-nurlangan maydon, S -ustun hajmi, ρ- moddaning zichligi), u holda energiyaning saqlanish qonuni quyidagi tenglik bilan ifodalanadi

$$E_0 = Wt_k = hLS\rho \tag{2.6}$$

Bu yerda h – birlikdagi massani burg‘ulanish uchun zarur bo‘lgan energiya. h qiymati quyidagi kompozitsion tuzilishga ega: $h = (T_{пл} - T)h_1 + h_2 + h_3$, chunki material ketma-ket $T_{пл}$ erish nuqtasiga qadar qizdirilishi kerak va keyin eritib, bug‘ga aylantirish kerak (t - boshlang‘ich harorat, h_1- issiqlik si’g‘imi, h_2 va h_3-mos ravishda erish va bug‘lanishning o‘ziga xos issiqligi).

Vaqt o‘tishi bilan l(t) chuqurligining o‘zgarishi t dan $t + \Delta t$ gacha bo‘lgan vaqt oralig‘ida energiyaning batafsil muvozanatidan aniqlanadi. Bu vaqt ichida bug‘langan massa

$$[l(t + \Delta t) - l(t)]S\rho = dlS\rho$$

uchun energiya sarfi $dlS\rho$, undagi energiya Wdt, moddaga lazer tomonidan berilgan energiya:

$$dl\,hS\rho = Wdt,$$

bundan quyidagi differensial tenglama hosil bo‘ladi:

$$\frac{dl}{dt} = \frac{W}{hS\rho}$$

Oxirgi tenglamani integratsiyalash orqali (qazishning dastlabki chuqurligi nolga tengligini hisobga olgan holda) quyidagini olamiz:

$$l(t) = \frac{w}{hs\rho}t = \frac{E(t)}{hS\rho} \tag{2.7}$$

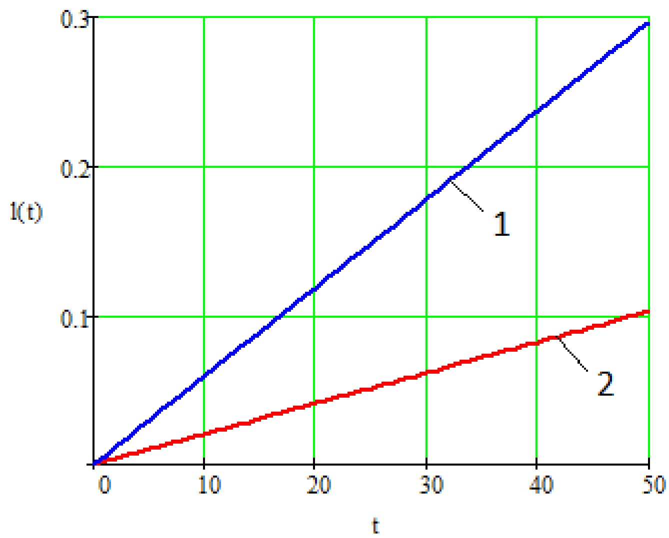
Lazer tomonidan t vaqtga ajratilgan barcha energiya $E(t)$. Shuni hisobga olgan holda qazish chuqurligi sarflangan energiyaga mutanosibdir (bundan tashqari, $t_{k,}$ qiymati, $l(t_k) = L$ bo‘lganda (2.6) formula bo‘yicha hisoblanganga to‘g‘ri keladi.

Aslida, burg‘ulash jarayoni ko‘rib chiqilgan sxemaga qaraganda ancha murakkab-energiya moddani isitish, tartibsiz shaklga ega bo‘lishi mumkin bo‘lgan chuqurchadan bug‘larni olib tashlash va hokazolarga sarflanadi. Ob'ekt va uning modelining muvofiqligi masalasi matematik modellashtirishda markaziy masalalardan biridir.

Muayyan misol yordamida metall va alyuminiy burg‘ulashni modellashtirishni ko‘rib chiqamiz. Metall va alyuminiydan $\rho_M = 7800\ kg/m^3$ va $\rho_a = 2700\ kg/m^3$ zichlikka ega bo‘lgan moddalarni burg‘ulash kerak bo‘lsin. Shuningdek, uskunaning kuchi $W = 400\ j/s$, sarflangan energiya $h = 500\ j$. Burg‘ulash maydoni $s = 0{,}05 м^2$. (3.6) formulani qo‘llaymiz

$$l(t) = \frac{W}{hS\rho}t$$

Ushbu formulani metall va alyuminiy uchun MathCADda amalga oshirish quyidagi natijani beradi:



2.3-rasm. Burg‘ulash uzunligining vaqtga bog‘liqligi. 1-alyuminiyni burg‘ilashda, 2-metallni burg‘ilashda.

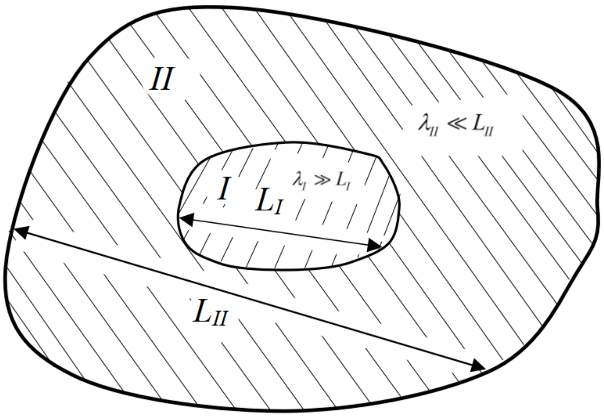
2.3-rasmdagi grafikdan ko‘rinib turibdiki, alyuminiydan bo‘lgan materiallarni burg‘ulash metallga qaraganda osonroq.

Massa(materiya)ning saqlanish qonunidan foydalanib matematik model qurish.

Oz miqdordagi radioaktiv modda (uran) qo‘rg‘oshin materialining qalin qatlami bilan o‘ralgan bo‘lsin — bu bo‘linadigan(parchalanadigan) materiallarni saqlashda yoki ularni energetikada ishlatishda odatiy holat bo‘lib hisoblanadi(2.7-rasm).

"Oz miqdordagi" so‘zi soddalashtirilgan holatni anglatadi, ya'ni barcha parchalanish mahsulotlari moddaning atomlari bilan to‘qnashmasdan I sohani erkin tark etadi.

Boshqacha qilib aytganda , birinchi moddadagi parchalanish mahsulotlarining erkin yugurish uzunligi λ_I materialning o‘ziga xos o‘lchamlaridan L_I ancha katta, ya'ni $\lambda_I \gg L_I$. "Qalin qatlam" iborasi saqlash maqsadlariga muvofiq bo‘linish mahsulotlari II sohada to‘liq so‘rilishini anglatadi. Bu qarama — qarshi shart bajarilganda $\lambda_{II} \ll L_{II}$ kafolatlanadi, bu yerda λ_{II} ikkinchi moddada parchalanish mahsulotlarining yugurish uzunligi, L_{II} uning o‘ziga xos o‘lchamidir.



2.7-rasm. Uran joylashuvining sxematik tasviri.

Shunday qilib, I sohadan chiqadigan har qanday narsa II sohada so‘riladi va ikkala moddaning umumiy massasi vaqt o‘tishi bilan o‘zgarmaydi. Bu ushbu vaziyatga nisbatan qo‘llaniladigan materiyaning saqlanish qonunidir.

Agar vaqtning dastlabki *t=0* momentida moddalar massasi $M_I(0)$ va $M_{II}(0)$ ga teng bo‘lsa har qanday vaqtda quyidagi muvozanat o‘rinli

$$M_I(0) + M_{II}(0) = M_I(t) + M_{II}(t) \tag{2.20}$$

$M_I(t)$ va $M_{II}(t)$ ikkita massaning joriy qiymatlarini aniqlash uchun bitta (2.20) tenglama yetarli emas. Bunday tenglamani topish uchun parchalanish tabiati haqida qo‘shimcha fikrlarni jalb qilish kerak. Unda parchalanish tezligi (vaqt birligida parchalanadigan atomlar soni) radioaktiv modda atomlarining umumiy soniga proporsional ekanligi aytiladi. Kichik dt vaqt orasida t va $t+dt$ vaqtlar orasidagi qisqa vaqt ichida parchalanadigan atomlar soni

$$N_I(t+dt)-N_I(t)=-\alpha N_I(t+\xi dt),\ \ \alpha>0, 0<\xi<1$$

Bu yerda moddaning saqlanish qonuni ikkinchi marta ishlatilgan, ammo butun jarayonga emas, balki dt vaqt oralig‘iga nisbatan. Atomlar muvozanatini tavsiflovchi ushbu tenglamada o‘ng tomonda minus belgisi mavjud (modda kamayadi) va $N_I(t+\xi dt)$ qiymat ko‘rib chiqilayotgan vaqt uchun atomlar sonining ma'lum bir o‘rtacha qiymatiga mos keladi. Biz bu munosabatni differentsial shaklda qayta yozamiz:

$$\frac{dN_I(t)}{dt}=-\alpha N_I(t)$$

$M_I(t)=\mu_I N_I(t)$ ekanini hisobga olgan holda bu yerda μ_I - I moddaning atom og‘irligi, biz quyidagini olamiz

$$\frac{dM_I(t)}{dt}=-\alpha M_I(t) \tag{2.21}$$

Mustaqil ravishda sodir bo‘ladigan radioaktivlik holatida har qanday atom atrofdagi moddaning holatiga bog‘liq bo‘lmagan parchalanish ehtimoliga mavjud. Shuning uchun radioaktiv moddaning o‘zi qancha ko‘p (kamroq) bo‘lsa, vaqt birligida parchalanish mahsulotlari shunchalik ko‘p (kamroq) chiqariladi. Proportsionallik koeffitsienti α *>0* (parchalanish doimiysi) ko‘rilayotgan modda xossasi bilan belgilanadi.

(2.20), (2.21) tenglamalar $\lambda_I \square\ L_I, \lambda_{II} \square\ L_{II}$ shartlar, shuningdek α, $M_I(0), M_{II}(0)$ miqdorlar bilan birgalikda ko‘rib chiqilayotgan ob'ektning matematik modelini tashkil qiladi.

(2.21)ni integrallab, biz bo‘linadigan materialning massasi eksponensial qonunga muvofiq kamayishini aniqlaymiz:

$$M_I(t)=M_I(0)e^{-\alpha t} \tag{2.22}$$

(2.22)dan ko‘rinadiki, $t\to\infty$ da I sohadagi modda butunlay yo‘qoladi.

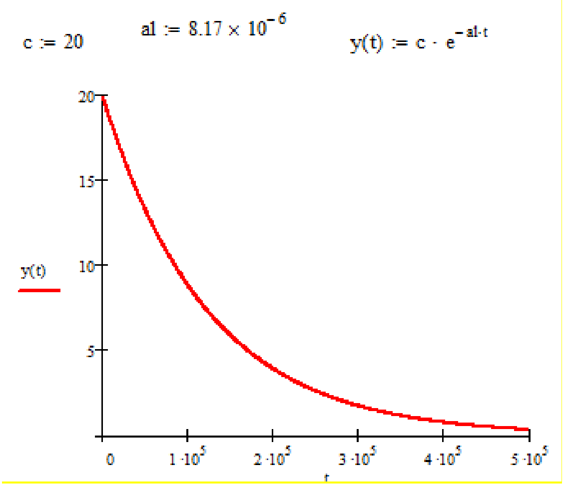
(2.20) ga muvofiq umumiy massa doimiy bo‘lib qolganligi sababli, II sohada modda miqdori ortadi:

$$M_{II}(t) = M_{II}(0) + M_I(0) - M_I(0)e^{-\alpha t} = M_{II}(0) + M_I(0)(1 - e^{-\alpha t})$$

va $t \to \infty$ da parchalanish mahsulotlari butunlay I sohadan II sohaga o‘tadi.

Radioaktiv moddaning parchalanishi modelini aniq bir misolda ko‘rib chiqamiz. Radioaktiv moddaning parchalanish doimiysi $\alpha = 8.17 \cdot 10^{-6}$ ga teng bo‘lsin. Parchalanish moddasi massasi $M_I(0) = 20\kappa г$ bo‘lsin.

Ushbu kattaliklardan foydalangan holda (2.22) dan va, MatCAD imkoniyatlaridan foydalanib quyidagi grafikni olamiz



2.8-rasm. Radioaktiv moddaning parchalanish grafigi.

3-amaliy mashg'ulot. Chiziqli dasturlash

🗁Bizga quyidagi CHDM berilgan bo'lsin:

$$Z_{max} = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \qquad (1)$$

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1, \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2, \\ &a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + ... + a_{3n}x_n \le b_3, \\ &... \quad ... \quad ... \quad ... \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m. \end{aligned} \qquad (2)$$

$$x_{1,2,...,n} \ge 0 \qquad (3)$$

Bu CHDM quyidagi mazmunni beradi: (2) tengsizliklar sistemasidagi asosiy noma'lumlar ($x_1, x_2, x_3, ..., x_n$) ning shunday qiymatlarini topish talab qilinadiki, topilgan qiymatlar musbat yoki nolga teng bo'lib, maqsad funksiyasi deb ataluvchi

$$Z_{max} = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$$

funkstionalga maksimal qiymat bersin.

Qaralayotgan CHDMdagi tenglamalar sistemasida n noma'lumlar soni, m esa tenglamalar sonini ifodalaydi. Amaliyotda: ***a***) noma'lumlar soni tenglamalar sonidan katta ($n > m$); ***b***) noma'lumlar soni tenglamalar soniga teng ($n = m$); ***c***) noma'lumlar soni tenglamalar sonidan kichik ($n < m$) bo'lishi mumkin.

I. Boshlang'ich tayanch rejani topish

🗁 CHDMni yechish uchun **birinchi bajaradigan ishimiz** (2) tengsizliklar sistemasini ***kanonik*** ko'rinishga, ya'ni tenglamalar sistemasi ko'rinishiga keltirish va ***tayanch rejani*** topishdir.

(2) sistemada berilgan $x_1, x_2, ..., x_n$ noma'lumlar (o'zgaruvchilar) ***asosiy noma'lumlar*** deb nomlanadi.

Demak, birinchi navbatda ***tayanch yechim (reja)*** topiladi.

(2) tengsizliklar sistemasini tenglamalar sistemasiga keltirish uchun, tengsizliklarning har biriga mos ravishda ***qo'shimcha noma'lumlar*** deb ataluvchi musbat yoki nolga teng bo'lgan ushbu $y_1, y_2, ..., y_m \ge 0$ o'zgaruvchilarni qo'shamiz. CHDMni iqtisodiy mazmuniga ko'ra qo'shimcha noma'lumlar (2) sistemaga

musbat ishora bilan qo'shiladi. Biz noma'lumlar soni tenglamalar sonidan katta ($n > m$) bo'lgan holni qaraylik.

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + y_1 = b_1, \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n + y_2 = b_2, \\ &... \quad ... \quad ... \quad ... \quad .... \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n + y_m = b_m. \end{aligned} \qquad (4)$$

Demak, CHDMda berilgan noma'lumlar ***asosiy noma'lumlar***, tengsizliklar sistemasini tenglamalar sistemasiga aylantirish uchun qo'shiladigan noma'lumlar qo'shimcha noma'lumlar deb ataladi. Qo'shimcha noma'lumlar «≤» ko'rinishdagi tengsizliklarga **musbat**, «≥» ko'rinishdagi tengsizliklarga esa **manfiy ishora** bilan qo'shiladi.

Chiziqli dasturlash masalasidagi tengsizliklar sistemasini tenglamalar sistemasi ko'rinishiga keltirish uchun qo'shiladigan qo'shimcha noma'lumlar maqsad funksiyasiga nol ***koeffistient*** bilan qo'shiladi, ya'ni:

$$\begin{aligned} Z_{max} &= c_1x_1+c_2x_2+...+ c_nx_n+c_{n+1}y_1+c_{n+2}y_2+...+ c_m y_m = \\ &= c_1x_1+c_2x_2+...+ c_nx_n+0y_1+0y_2+...+0y_m. \end{aligned}$$

Standart formadagi $x_1, x_2, ..., x_n$ o'zgaruvchilar bazis noma'lumlar, qo'shimcha kiritilgan $y_1, y_2, ..., y_m \geq 0$ o'zgaruvchilar **bazis bo'lmagan noma'lumlar** deyiladi.

🗁**CHDMda boshlang'ich tayanch rejani topish** uchun, masaladagi (2) tengsizliklar sistemasi qo'shimcha noma'lumlarni qo'shish natijasida tenglamalar sistemasi (4) ga aylantirilgach, bu sistema qo'shimcha noma'lumlarga nisbatan yechib olinadi, ya'ni:

$$\begin{aligned} &y_1 = b_1 - (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n), \\ &y_2 = b_2 - (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n), \\ &y_3 = b - (a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + ... + a_{3n}x_n), \\ &... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \\ &y_m = b_m - (a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n). \end{aligned} \qquad (5)$$

Maqsad funksiyasini quyidagicha ifodalab olamiz:

$$Z_{max} = 0-(- c_1x_1-c_2x_2-...- c_nx_n) +0y_1+0y_2+0y_3+...+0y_m. \qquad (6)$$

Topilgan (5) sistemadan qoidaga ko'ra asosiy noma'lumlar nolga tenglashtirib olinadi, ya'ni:

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0.$$

Natijada quyidagi boshlang'ich tayanch rejaga ega bo'lamiz (bu yerda masalaning berilishidagi ozod hadlar musbat deb qaralmoqda):

$$y_1 = b_1,\ y_2 = b_2,\ y_3 = b_3,\ \ldots, y_m = b_m, \qquad Z_{max} = 0. \qquad (7)$$

CHDMda (7) ni (boshlang'ich tayanch rejani) umumiy holda quyidagicha yozish qabul qilingan:

$$X^* = (x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m) = (0, 0, \ldots, 0, b_1, b_2, \ldots, b_m).$$

Topilgan tayanch rejaning yechimlari (qiymatlari) musbat bo'lsa berilgan CHDMni simpleks usul bilan yechish mumkin bo'ladi.

Quyidagilarga e'tibor berishimiz lozim:

Agar chegaraviy shartlardagi b_i ozod xadlar manfiy ishorali bo'lsa, u holda ularni har doim (-1) ga ko'paytirib, musbat holatga keltirish kerak.

II. Boshlang'ich simpleks jadvalini tuzish

Endi (5) va (6) da berilganlarni quyidagi ko'rinishdagi jadvalga joylashtiramiz va uni boshlang'ich simpleks jadval deb nomlaymiz.

CHDMni maksimumini topish uchun tuzilgan boshlang'ich simpleks jadvali

Bazis o'zgaruv-Chilar	C_i	B_i	x_1 s_1	x_2 s_2	…	x_n s_n	y_1 $s_{n+1}=0$	y_2 $s_{n+2}=0$	…	y_m $s_m=0$	$\frac{b_i}{a_{ij}}$
y_1	s_{n+1}	b_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	1	0	…	0	
y_2	s_{n+2}	b_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	0	1	…	0	
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
y_m	s_m	b_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	0	0	…	1	
$Z_j - C_j$		0	$-s_1$	$-s_2$	…	$-s_n$	0	0	…	0	

☞ Bazis bo'lmagan $y_1, y_2, \ldots, y_m \geq 0$ noma'lumlar «Bazis o'zgaruvchilar» ustuniga yoziladi.

☞Bazismas noma'lumlarning $s_{n+1}, s_{n+2}, \ldots, s_m$ koeffistientlari «S_i» ustuniga yoziladi.

☞ $b_1, b_2, \ldots, b_m$ ozod hadlar «B_i» ustuniga yoziladi.

☞$Z_{max} = c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n+0y_1+0y_2+\ldots+0y_m$ maqsad funksiyaning koeffistientlari Z_j - C_j qatorga **qarma - qarshi ishora** bilan yoziladi. Bu qator **indeks qator** deb yuritiladi.

III. Optimal rejani topish algoritmi

🗁 CHDM ning simpleks jadvalida Z_j - C_j indeks qatoridagi hamma noma'lumlarning koeffistientlari musbat bo'lsa masala optimal yechimga ega bo'ladi. Simpleks usuli bilan CHDMni optimal yechimini topishda Z_j - C_j indeks qatoridagi hamma noma'lumlarning koeffistientlari musbat ishoraga keltirish maqsad qilib qo'yiladi.

Simpleks jadvalida Z_j - C_j indeks qatoridagi noma'lumlarining koeffistientlaridan bittasi yoki bir nechtasi manfiy bo'lganida hal qiluvchi elementni tanlashda quyidagi munosabatlar amalga oshishi mumkin.

① **Simpleks jadvalida hal qiluvchi ustunni (**HQU) **tanlash**

☞ Agar Z_j - C_j indeks qatoridagi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ noma'lumlarning $s_1, s_2, \ldots, s_n$ koeffistientlardan birortasi ***manfiy*** ishorali son bo'lsa, shu ***manfiy*** ishorali son to'rgan ustun HQU bo'ladi.

☞ Agar Z_j - C_j indeks qatorida bunday manfiy sonlar bir nechta bo'lsa, u vaqtda HQUni tanlash uchun shu ***manfiy*** sonlarning absolyut qiymatlari bo'yicha eng kattasi olinadi. Bu sonlar ichida, ulardan bir nechtasi bir - biriga teng bo'lsa, u holda ulardan hohlagan birini olib bosh ustun uchun tanlanadi.

② **Simpleks jadvalida hal qiluvchi satrni (HQS) tanlash**

☞Simpleks jadvalida **HQS**ni tanlash uchun B_i ozod hadlar ustunidagi hamma sonlarni (agar ularning ishorasi bir xil bo'lsa) **HQU**dagi mos kelgan sonlarga bo'lib, ulardan eng kichigi tanlanadi. Bu qiymat simpleks jadvadagi $\frac{b_i}{a_{ij}}$ ustunga yoziladi. Bunday kichik sonlar bir nechta bo'lsa, ulardan xohlagan birini **HQS** qilib tanlash mumkin.

③ **Simpleks jadvalini hal qiluvchi elementi (HQE)**

☞Simpleks jadvalidagi **HQU** va **HQS** ning kesishgan kattagidagi son hal qiluvchi element **(HQE)** bo'ladi.

④ Yangi simpleks jadvaliga o'tish

Hal qiluvchi ustun, hal qiluvchi satr va hal qiluvchi element topilgach yangi simpleks jadvalidagi hamma sonlar Jordan chiqarish usuli yordamida topiladi, ya'ni:

☞ Hal qiluvchi satrdagi hamma elementlar hal qiluvchi elementga bo'linadi va ishorasi o'zgartirilmasdan yoziladi;

☞ Hal qiluvchi ustundagi qolgan hamma elementlar o'rniga nol yoziladi.

☞ Qolgan hamma elementlar quyidagi to'g'ri to'rtburchak formulasi yordamida topiladi:

$$b_{rk} = a_{rk} - \frac{a_{rj} * a_{ik}}{a_{ij}} \text{ yoki } b_{rk} = \frac{a_{rk} * a_{ij} - a_{rj} * a_{ik}}{a_{ij}}. \text{ (Bu yerda } i \neq r, j \neq k)$$

a_{rk} element o'rnida hosil qilinadigan b_{rk} elementni to'g'ri to'rtburchak formulasi bilan topish uchun:Jordan jadvalidan fragment

…	**…**	**j- hal qiluvchi ustun**	**…**	**k-ustun**	**…**
…	**…**	**…**	**…**	**…**	**…**
i– hal qiluvchi satr	**…**	**[a_{ij}] hal qiluvchi element**	**…**	**a_{ik} (i -satr va k –ustunda joylashgan element)**	**…**
…	**…**	**…**	**…**	**…**	**…**
r – satr	**…**	**a_{rj} r-satr va j – ustunda joylashgan element**	**…**	**a_{rk} r-satr va k – ustunda joylashgan element**	**…**
…	**…**	**…**	**…**	**…**	**…**

🗁 Bu jarayon **Z_j-C_j** indeks qatoridagi hamma noma'lumlarning koeffistientlari musbat bo'lguncha davom ettiriladi.

$\mathbf{Z_j}$ **-** $\mathbf{C_j}$ indeks qatoridagi hamma noma'lumlarning koeffistientlari musbat bo'lsa, berilgan CHDM optimal yechimga ega bo'ladi.

Agar $x_{1,\,2,\,\dots,\,n} \geq 0$ sharti (2) sistemani qanoatlantirsa, u masalaning **mumkin bo'lgan yechimlari** deb ataladi.

Masalaning **mumkin bo'lgan yechimlari** $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$ maqsad funksiyasining minimum yoki maksimum qiymatini ifodalovchi optimal yechimlari deyiladi.

🗁 CHDMni simpleks usuli bilan yechishdan avval (2) s**istemaning yechimi mavjud emaslik shartlari**ning bajarilishi tekshiriladi, ya'ni:

a) Agar birorta tenglama tenglama $0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n = b$, ($b_1 \neq 0$)

ko'rinishda bo'lsa, u holda (2) sistema birlashmagan bo'ladi va u umumiy yechimga ega bo'lmaydi.

b) Agar (2) sistemada biror tenglama $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$ ko'rinishda bo'lib, $a_1, a_2, \dots, a_n$ koeffistientlar bir xil ishorali bo'lib b ning ishorasiga teskari (qarama – qarshi) bo'lsa, sistema musbat yechimga ega bo'lmaydi.

Agar *a*) va *b*) shartlardan birortasi bajarilsa CHDM yechimga ega bo'lmaydi. Demak bu shartlarning ikkalasi ham bajarilmasa, qaralayotgan masalani simpleks usulda yechish mumkin bo'ladi.

🗁**Xulosa.** Demak, simpleks usuli bilan optimal yechimni topish quyidagi etaplarni o'z ichiga oladi:

① Tayanch reja topiladi. ② Simpleks jadval tuziladi.

③ Simpleks jadvalining $\mathbf{Z_j}$ **-** $\mathbf{C_j}$ indeks qatorida **manfiy son** borligi tekshiriladi. Agar manfiy son bo'lmasa masalaning optimal yechimi topilgan bo'ladi. Aks holda masalaning yangi tayanch rejasini topish davom ettiriladi.

2.Chiziqli programmalash masalalarini geometrik tasvirlash va ularni grafik usul bilan yechish.

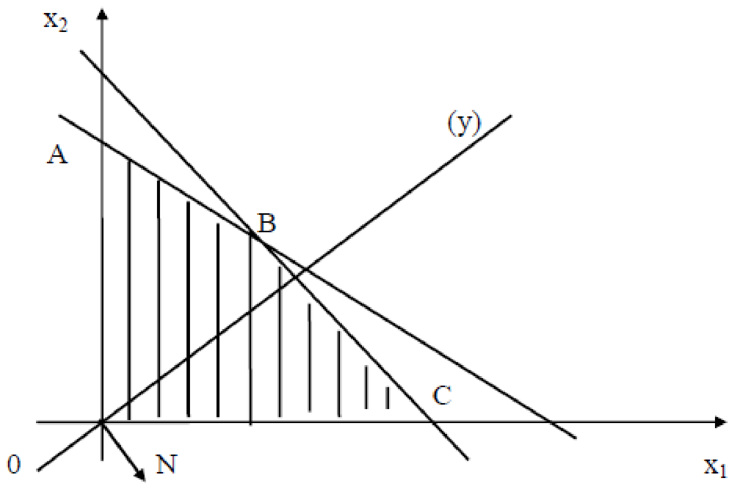
1-misol. Masalani grafik usulda yeching.

$$4x_1 + 3x_2 \leq 12\ ,$$
$$3x_1 + 4x_2 \leq 12\ ,$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0,$$
$$Y = 2x_1 - 5x_2 \to max.$$

Yechish. Yechimlardan tashkil topgan qavariq ko'pburchak yasash uchun koordinatalar sistemasida

$$4x_1 + 3x_2 = 12 \quad (L_1),$$
$$3x_1 + 4x_2 = 12 \quad (L_2),,$$
$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0$$

chiziqlar yasaymiz (1.6-shakl).



1.6 - шакл

Berilgan tengsizliklarni qanoatlantiruvchi yechim shtrixlangan OABC to'rtburchakni tashkil qiladi. Endi koordinatalar boshidan $\bar{N} = (2,5)$ vektorni yasaymiz va unga perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziq o'tkazamiz. Bu to'g'ri chiziq

$$2x_1 - 5x_2 = const$$

tenlama orqali ifodalanadi. Uni $\bar{N}$ vektor yo'nalishida o'ziga parallel siljitib boramiz. Natijada chiziqli funktsiyaga maksimal qiymat beruvchi $C(3;0)$ nuqtani topamiz. Bu nuqtaning koordinatalari $x_1=3$, $x_2=0$ masalaning optimal yechimi bo'ladi va Y_{max} $=2\cdot3-5\cdot0=6$ bo'ladi.

Chiziqli dasturlash masalalari. Simpleks usul.

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 14,$$
$$2x_1 + 2x_2 + 5x_3 \le 21,$$
$$x_1 + x_2 + 2x_3 \le 22,$$
$$Z_{max} = x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

Boshlang'ich simpleks jadvalini tuzish

Базис	C_i	B_i	x_1	x_2	x_3	$\frac{b_i}{a_{ij}}$
			1	2	3	
y_1	0	14	1	2	3	
y_2	0	21	2	2	5	
y_3	0	22	1	1	2	
$Z_j - C_j$		0	-1	-2	-3	

- Энди ҳал қилувчи устун, ҳал қилувчи сатр ва ҳал қилувчи элементларни аниқлашга ўтамиз. Бунинг учун:
- ① жадвалдаги индекс қаторида келтирилган **[-1, -2, -3]** сонлардан абсолют қиймати бўйича энг каттаси 3 га тенг. Демак, [x_3] устун ҳал қилувчи устун бўлади.
- ② озод ҳадлар устунида келтирилган [14, 21, 22] сонларни x_3 ҳал қилувчи устунинг [**3, 5, 2]** мос мусбат сонларига бўлиб, минимал қийматини аниқлаймиз, я'ни:
- **min[b_i/a_{ij}]=min[14/3, 21/5, 22/2]= 21/5** .
- Демак, y_2 сатр ҳал қилувчи сатр бўлади. Ushbu ustun va satrlarni bo'yab qo'yamiz.
-

Базис	C_i	B_i	x_1	x_2	y_2	$\frac{b_i}{a_{ij}}$
			1	2	3	
y_1	0	14	1	2	3	14/3
x_3	0	21	2	2	[5]	21/5
y_3	0	10	1	1	2	10/2
$Z_j - C_j$		0	-1	-2	-3	

- иккинчи симплекс жадвал
- y_2 қўшимча нома'лум базисдан чиқарилиб ўрнига x_3 асосий базисга киритилади. $\mathbf{C_j}$ устунга эса y_2 қўшимча нома'лумнинг $\mathbf{c_5=0}$ коэффициенти ўрнига x_3 асосий нома'лумнинг коэффициенти $\mathbf{c_3 = 3}$ ни ёзамиз.
- Ko'k rangga bo'yalgan kataklarni yangi jadvalda quyidagi formula orqali hisoblaymiz

$$b_{rk} = \frac{a_{rk} \cdot a_{ij} - a_{rj} \cdot a_{ik}}{a_{ij}}.$$

Masalan $b_{11} = \frac{a_{11} \cdot a_{24} - a_{14} \cdot a_{21}}{a_{24}} = \frac{14 \cdot 5 - 3 \cdot 21}{5} = 7/5$ $\quad i = 2, j = 4 \;\; hal\ qiluvchi\ element\ a_{24} = 5$

Базис	C_i	B_i	x_1	x_2	y_2	$\frac{b_i}{a_{ij}}$
			1	2	3	
y_1	0	7/5	-1/5	4/5	3	14/3
x_3	3	21	2	2	[5]	21/5
y_3	0	8/5	1/5	1/5	2	10/2
$Z_j - C_j$		63/5	1/5	-4/5	-3	

Hal qiluvchi satrning bo'yalgan qismidagi qiymatlarni hal qiluvchi elementga bo'lib chiqamiz. Hal qiluvchi ustundagi bo'yalgan kataklarni 0 bilan almashtirib chiqamiz. Bu ustun keyingi amallarda qatnashmaidi.

Базис	C_i	B_i	x_1	x_2	y_2	$\frac{b_i}{a_{ij}}$
			1	2	3	
y_1	0	7/5	-1/5	4/5	0	
x_3	3	21/5	2/5	2/5	1	
y_3	0	8/5	1/5	1/5	0	
$Z_j - C_j$		63/5	1/5	-4/5	0	

3-simpleks jadval. Indeks satrida bitta manfiy qiymat mavjud. Shuning uchun simpleks jadvalda oldingi amallarni yana takrorlaymiz. Indeks satridagi manfiy son turgan ustun hal qiluvchu ustun(HQU) bo'ladi. B ustundagi qiymatlarni HQUdagi mos qiymatlarga bo'lib chiqamiz. Masalan $\frac{7}{5} : \frac{4}{5} = \frac{7}{4}$

Базис	C_i	B_i	x_1	x_2	y_2	$\frac{b_i}{a_{ij}}$
			1	2	3	
y_1	0	7/5	-1/5	4/5	0	7/4
x_3	3	21/5	2/5	2/5	1	21/2
y_3	0	8/5	1/5	1/5	0	8
$Z_j - C_j$		63/5	1/5	-4/5	0	

Oxirsi ustunda eng kichigi 7/4, shu satr hal qiluvchi satr bo'ladi.

Базис	C_i	B_i	x_1	y_1	y_2	$\frac{b_i}{a_{ij}}$
			1	2	3	
x_2	2	7/5	-1/5	4/5	0	7/4
x_3	3	21/5	2/5	2/5	1	21/2
y_3	0	8/5	1/5	1/5	0	8
$Z_j - C_j$		63/5	1/5	-4/5	0	

Ko'k ranglangan kataklarni $b_{rk} = \frac{a_{rk} \cdot a_{ij} - a_{rj} \cdot a_{ik}}{a_{ij}}.$ Formulada qayta hisoblaymiz. Bu yerda $i = 1,\ \ j = 3$ Masalan

Базис	C_i	B_i	x_1	y_1	y_2	$\frac{b_i}{a_{ij}}$
			1	2	3	
x_2	2	7/5	-1/5	4/5	0	7/4
x_3	3	7/2	½	2/5	1	21/2
y_3	0	5/4	¼	11/5	0	8
$Z_j - C_j$		14	0	-4/5	0	

$$b_{21}=a_{21}-\frac{a_{23}}{a_{13}}=\frac{21}{5}-\frac{\frac{2}{5}\frac{7}{5}}{\frac{4}{5}}=\frac{7}{2}$$

Hal qiluvchi satr elementlarini hal qiluvchi elementga bo'lib chiqamiz. Hal qiluvchi ustun elementlarini 0 bilan to'ldiramiz.

Базис	C_i	B_i	x_1	y_1	y_2	$\frac{b_i}{a_{ij}}$
			1	2	3	
x_2	2	7/4	-1/4	1	0	7/4
x_3	3	7/2	½	0	1	21/2
y_3	0	5/4	¼	0	0	8
$Z_j - C_j$		14	0	0	0	

Indeks satrida manfiy element qolmadi. Optimal yechim topildi. Demak, 2-chi mahsulotdan 7/4 ta, 3-chi mahsulotdan 7/2 ta ishlab chiqarish kerak ekan.

O'shanda maqsad funksiya

$$2\cdot\frac{7}{4}+3\cdot\frac{7}{2}=14$$

Vazifa $$Z_{max}=x_1+2x_2+3x_3$$

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3\le b_1\\ 2x_1+2x_2+5x_3\le b_2\\ x_1+x_2+2x_3\le b_3\end{cases}$$

Mustaqil ish topshiriqlari

№	b_1	b_2	b_3	№	b_1	b_2	b_3
1	16	21	12	15	16	21	12
2	18	23	14	16	18	23	14
3	17	22	12	17	17	22	12
4	15	22	14	18	15	22	14
5	14	21	11	19	14	21	11
6	13	22	14	20	13	22	14
7	15	22	12	21	15	22	12
8	16	23	11	22	16	23	11
9	17	22	13	23	17	22	13
10	18	24	15	24	18	24	15
11	19	23	14	25	19	23	14

12	16	24	14	26	16	24	14
13	14	22	13	27	14	22	13
14	17	23	13	28	17	23	13

4 – amaliy mashg'ulot

DEMOGRAFIK MODELLAR

Maltus modeli quyidagi differenstial tenglama bilan ifodalanadi:

$$\frac{dN}{dt} = (\alpha - \beta)N.$$

Bu tenglama quyidagi umumiy echimga ega:

$$N = N_0 e^{(\alpha - \beta)t}.$$

Keltirilgan differenstial tenglama tezligi (tenglamaning chap qismi) joriy vaqt momentdagi miqdorga proporstional bo'lgan jarayonni ifodalaydi. Bizning masalamizga nisbatan u $k=\alpha-\beta$ koeffistientni kiritish bilan qayta bayon etilishi mumkin. Jumladan, masalaning shartiga ko'ra, k =2 ekanligi kelib chiqadi, chunki bir sekund ichida bakteriyalar soni ikki marta ko'payadi. Va biz masalaning xususiy holiga ega bo'lamiz:

$$\frac{dN}{dt} = 2N$$

va uning echimi:

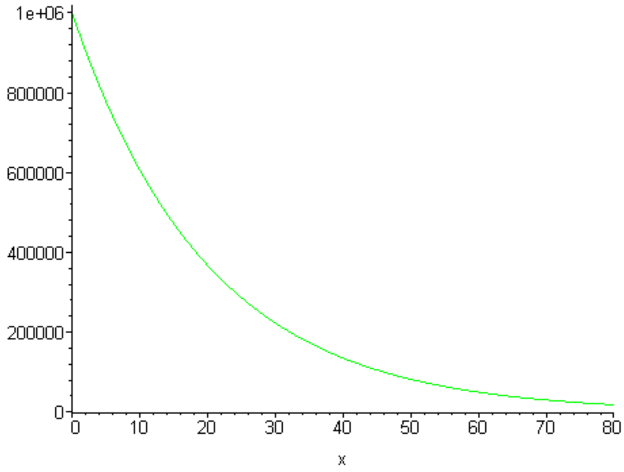
$$N = N_0 e^{2t}$$

bo'ladi.

Bu echimdan ixtiyoriy vaqt momentidagi bakteriyalar sonini hosil qilib olish mumkin.

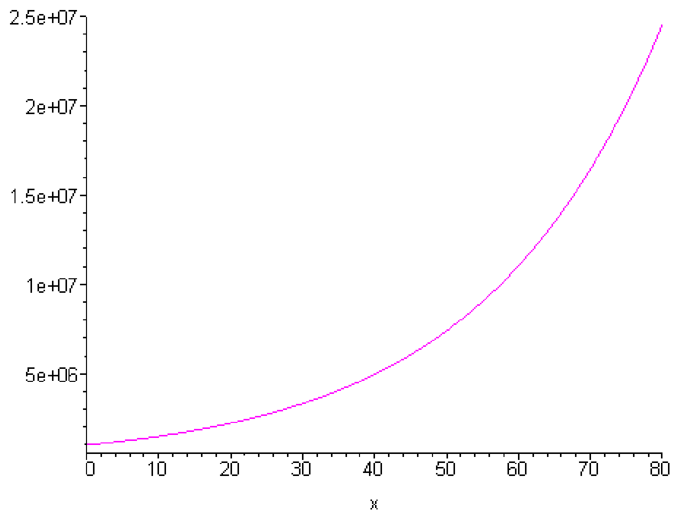
Bu modelning tadbiq etilish doirasining chegaralarini aniqlash uchun, uning α va β parametrlarning har xil qiymatlaridagi hatti-xarakatini o'rganib chiqamiz.

Maltus modeli ideal holda aholi sonini modellashtirish uchun tadbiq etilishi mumkin, bunda α va β parametrlar mos ravishda tug'ilish va o'lish koeffistientlarini ifodalaydi. Mazkur modelning har xil qiymatli koeffistientlardagi tabiatini o'rganib chiqamiz (4.2-4.3-rasmlar).



4.2-rasm. Maltus modeli. α=0,43; β=0,48; N_0=1000000
(absstissa o'qi bo'yicha vaqt, ordinata o'qi bo'yicha aholi soni joylashgan).

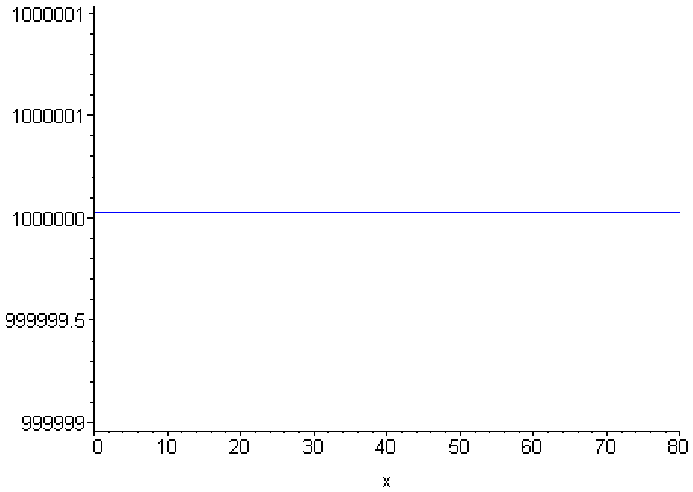
Ko'rinib turibdiki, agar o'limlar soni tug'ilishlarga qaraganda ko'proq bo'lsa, u holda Maltus modeli aholi sonining eksponenstial ravishda kamayishiga ishora qiladi (4.2-rasm).



4.3-rasm. Maltus modeli α=0,05; β=0,01; N_0=1000000
(absstissa o'qi bo'yicha vaqt, ordinata o'qi bo'yicha aholi soni joylashgan).

Endilikda, agar tug'ilishlar soni o'limlar soniga nisbatan ko'p bo'lsa, u holda Maltus modeli aholi sonining eksponenstial ravishda o'sishiga ishora qiladi (7.3-rasm).

4.4-rasmda tug’ilishlar va o’limlar soni o’zaro teng bo’lib, Maltus modelining ko’rsatishicha, sistema muvozanat holda bo’ladi: aholi soni butun vaqt oralig’ida o’zgarmasdan qoladi.



4.4-rasm. Maltus modeli. α=0,1; β=0,1; N_0=1000000
(absstissa o’qi bo’yicha vaqt, ordinata o’qi bo’yicha aholi soni joylashgan).

Topshiriq. O’zbekiston aholisi 2019 yilda 34000000 bo’lsa, tug’ilish va olish ko’rsatkichini hisobga olgan holda 2030 yil uchun prognozni hisoblang. . α=0,01; β=0,0;

Ferxulst-Perl Modeli. Populyatsiya rivojlanishining haqiqatga yaqinroq tavsifi Ferxulst-Perl modelini beradi, unda joy, oziq-ovqat va boshqalar uchun turlararo raqobat tufayli izolyatsiya qilingan populyatsiyaning o‘sish tezligi pasayishi hisobga olinadi. Ichki turlar orasida kurash qanchalik ko‘p bo‘lsa, jonzotlar o‘rtasidagi uchrashuvlar soni shunchalik ko‘p bo‘ladi va uchrashuvlar soni xx ya'ni x^2 ko‘paytmasiga proporsional bo‘ladi va populyatsiya sonining dinamikasi tenglamasi quyidagicha yoziladi

$$\frac{dx}{dt} = rx - bx^2 \tag{4.4}$$

bu yerda $r = const > 0 -$ populyatsiyaning tug‘ma o‘sish tezligi va $b = const > 0$ - kattaligi tur ichidagi raqobat koeffitsienti deb ataladi.

(4.4) tenglamani quyidagi ko‘rinishad yozish mumik:

$$\frac{dx}{dt} = r \cdot x\left(1 - \frac{x}{K}\right) \tag{4.5}$$

Bu holda $K = r/b$ qiymati ushbu sharoitda mumkin bo‘lgan maksimal populyatsiya soniga ega bo‘lgan barqaror statsionar holatga mos keladi va "**atrof-muhit sig‘imi**"deb nomlanadi. (4.5) differensial tenglamaning yechimi quyidagicha funksiya ko‘rinishida bo‘ladi:

$$x(t) = \frac{K \cdot x_0 e^{rt}}{K - x_0 + x_0 e^{rt}} = \frac{K \cdot x_0 e^{rt}}{K + x_0(e^{rt} - 1)} \qquad (4.6)$$

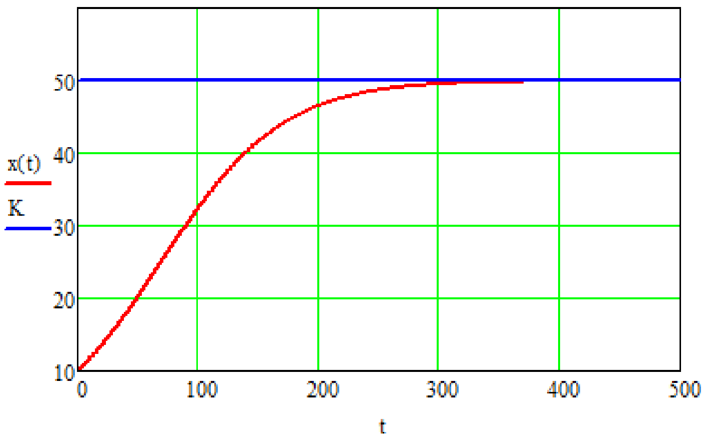
bu yerda $x_0 -$ populyatsiyaning boshlang‘ich soni.

Logistika egri chizig‘ining tabiati r va K parametrlarining kattaligiga, shuningdek x_0 ning boshlang‘ich soniga bog‘liq.

(4.6) dan qiziqarli xulosalar chiqarish mumkin. Agar populyatsiya soni juda kichik bo‘lsa, unda raqobat populyatsiyaning o‘ziga xos o‘sish tezligiga ta'sir qilmaydi. Agar populyatsiya soni ko‘payib, ma'lum bir K chegara qiymatiga yaqinlashganda, o‘ziga xos o‘sish tezligi nolga tushadi. K ning chegara qiymati populyatsiyaning ekologik joy sig‘imi deb ataladi. K kattaligi populyatsiyaning shunday soniga to‘g‘ri keladiki, bunda raqobat natijasida ko‘payishning haqiqiy darajasi shunchalik pasayganki, umuman populyatsiya har bir avlodda faqat o‘zining avvalgi sonini tiklay oladi. Bu vaqtda tug‘ilgan jonzotlar soni o‘lganlar soni bilan muvozanatlanadi.

Shunday qilib, (4.6) formuladan kelib chiqadiki, $x(0) = K$ da populyatsiya soni o‘zgarmaydi: $x(t) \equiv x(0)$. Agar $x(0) < K$ bo‘lsa, unda populyatsiya soni ko‘payadi, t→∞ da K qiymatiga yaqinlashadi, lekin hech qachon unga etib bormaydi, ya'ni aholi soni Maltus modelidagi kabi cheksiz ravishda ko‘paymaydi, ya’ni yuqoridan cheklangan. Shuning uchun k qiymati ma'lum bir yashash sharoitida mumkin bo‘lgan maksimal populyatsiya soni deb ataladi.

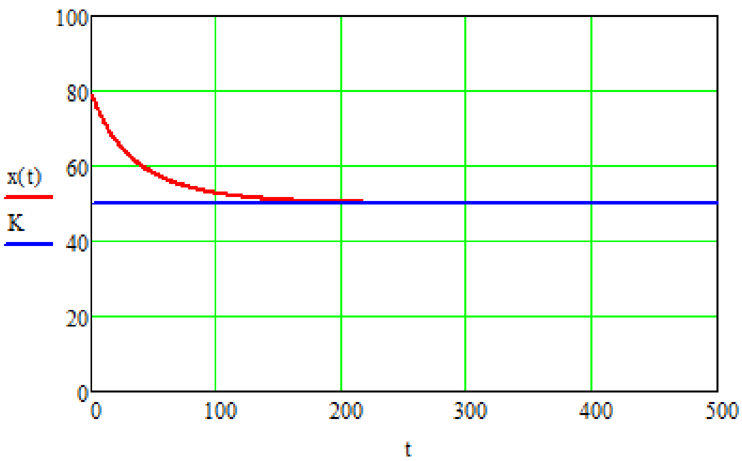
Quyidagi misolni ko‘rib chiqamiz. $x(0) = 10\ va\ K = 50, r = 0{,}02$ bo‘lsin. Ushbu qiymatlarni (4.6) formulaga qo‘yib hisoblash 4.2- rasmda ko‘rsatilgan grafikni beradi.



4.5-rasm. Ferxulst formulasi bo‘yicha aholi sonini hisoblash, bunda

$x(0) < K$, ya’ni $x0 = 10, K = 50, r = 0{,}02$.

$x(0) > K$ holatida populyatsiya soni kamayadi, K qiymatiga monoton ravishda yaqinlashadi. Misol uchun $x0 = 80, K = 50, r = 0{,}02$ bo‘lsin. (4.6) formula bo‘yicha hisoblash 4.6-rasmda ko‘rsatilgan grafikni beradi.



4.6-rasm. Ferxulst formulasi bo‘yicha aholi sonini hisoblash, bu yerda

$x(0) > K, x0 = 80, K = 50, r = 0{,}02$.

5 – amaliy mashg’ulot

Raqobatning ayrim modellari. Biologik modellar.

Raqobat– bu ikki kishi yoki guruhning doimiy raqobatbardosh munosabatlardagi holati. Raqobat– bu raqobatlashayotgan ikki tomon o‘rtasidagi „bir-biriga qarshi“ munosabati. O‘zaro munosabatlarning o‘zini „raqobat“ deb ham atash mumkin, yoki har bir ishtirokchi bir-biri bilan **raqib** bo‘ladi.

Yirtqich-o‘lja tizimi — yirtqich va o‘lja turlari o‘rtasida uzoq muddatli munosabatlar asosida amalga oshiriladigan murakkab ekotizim. Yirtqichlar va ularning o‘ljalari o‘rtasidagi munosabatlar neytral muvozanatning tasviri sifatida davriy ravishda rivojlanadi.

O‘ljalar tomonidan yirtqichlarga qarshi kurashish uchun ishlab chiqarilgan moslashuvlar yirtqichlarda ushbu moslashuvlarni yengish mexanizmlarini topishni talab qiladi. Yirtqichlar va o‘ljalarning uzoq muddatli birgalikdagi mavjudligi o‘zaro ta'sir tizimining shakllanishiga olib keladi, bunda ikkala guruh ham o‘rganilayotgan hududda barqaror saqlanadi. Bunday tizimning buzilishi ko‘pincha salbiy ekologik oqibatlarga olib keladi.

Yirtqichlar va o‘ljalar, masalan, quyonlar va bo‘rilar ma'lum bir izolyatsiya qilingan hududda yashasin. Quyonlar har doim yetarli miqdorda mavjud bo‘lgan o‘simlik ovqatlarini iste'mol qiladilar. Bo‘rilar faqat quyonlar bilan ovqatlanishi mumkin. Matematik modelni tuzish uchun quyonlar (o‘lja) sonini x orqali, bo‘rilar (yirtqichlar) sonini y orqali belgilaylik. Quyonlarda oziq –ovqat miqdori cheksizligi sababli, ular soniga mutanosib tezlikda ko‘payadi deb taxmin qilishimiz mumkin, ya’ni Maltus modeliga mutanosib ravishda ax kabi qabul qilishimiz mumkin. Agar quyonlarning tug‘ilish darajasi ularning o‘limidan katta bo‘lsa, u holda $a > 0$.

Quyonlarning kamayishi quyonning bo‘ri bilan uchrashish ehtimoliga mutanosib bo‘lsin, ya'ni xy sonining ko‘paytmasiga mutanosib cxy ga teng. Bo‘rilar soni tezroq o‘sib boradi, deb taxmin qilish mumkin, chunki ular quyonlar bilan tez-tez uchrashadilar, ya'ni dxy bilan mutanosib. Bundan tashqari, bo‘rilarning tabiiy o‘lim jarayoni sodir bo‘ladi va o‘lim darajasi ularning soniga mutanosib va βy ga teng deb hisoblaylik.

Ushbu eng sodda, ya'ni "yirtqich-o‘lja" ikki tomonlama tizimining matematik modeli quyidagi taxminlarga asoslanadi:

1) o‘lja va yirtqichlar populyatsiyalari soni x va y faqat vaqtga bog‘liq;

2) o‘zaro ta'sir bo‘lmasa, turlarning soni Maltus modeliga ko‘ra o‘zgaradi: bu holda o‘ljalar soni ko‘payadi va yirtqichlar soni kamayadi, chunki bu holda(biz

bo‘rilar uchun boshqa yemish yo‘q deb olgan edik) yirtqichlar hech narsa bilan ovqatlanmaydilar:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x, \qquad \frac{dy}{dt} = -\beta y, \qquad \alpha > 0, \beta > 0;$$

3) ikkala populyatsiyaning o‘zgarishiga tabiiy o‘lim hisobga olinmaydi;

4) ikkala populyatsiya sonining to‘yinganligi ta'siri hisobga olinmaydi;

5) o‘lja sonining o‘sish sur'ati yirtqichlar soniga mutanosib, ya'ni kattaligi *cxy* ga teng ravishda kamayadi, bunda c>0 va yirtqichlarning o‘sish sur'ati o‘lja soniga mutanosib, ya'ni kattaligi δxy, δ>0 ravishda oshadi.

(1)-(5) taxminlarni birlashtirib, biz Lotka-Volterra tenglamalar sistemasiga asoslangan matematik modelga kelamiz.

Ya’ni, ushbu mulohazalar o‘lja(quyonlar)ning x va yirtqich(bo‘rilar)ning y sonlari o‘zgarishi uchun quyidagi tenglamalar sistemasiga olib keladi:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha x - cxy, & \alpha > 0, c \geq 0, \\ \frac{dy}{dt} = -\beta y + \delta xy, & \beta > 0, \delta \geq 0. \end{cases} \tag{5.1}$$

Ushbu tenglamalar sistemasidan *x(0)=x(t=0), y(0)=y(t=0)* boshlang‘ich shartlari va a, c, β, δ koeffisientlarining berilgan qiymatlari bo‘yicha istalgan t >0 vaqtda populyatsiya sonini aniqlash mumkin.

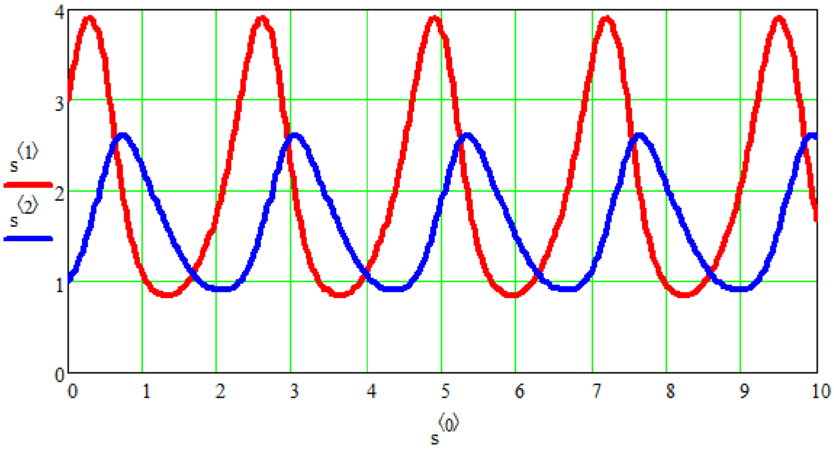
Mathcad matematik tizimida (5.1) modeli asosida koeffisientlarning *a*=4, *c*= 2.5, β=2, δ=1 qiymatlarilari va *x(0)*=3, *y(0)*=1 boshlang‘ich shartlarida yirtqich va o‘ljaning vaqt bo‘yicha o‘zgarishi 5.1-rasmda, fazoviy ko‘rinishi 5.2-rasmda ko‘rsatilgan.

Ko‘rinib turibdiki, jarayon davriy tebranish xususiyatiga ega. Ikkala turlar soni uchun boshlang‘ich berilgan boshlang‘ich nisbati 3:1 bo‘lsa, ikkala populyatsiya ham boshida o‘sadi. Yirtqichlar soni b=2 ga yetganda, o‘ljalar soni tiklanishi uchun vaqt yetmay qoladi va ular soni kamayishni boshlaydi. Bir muncha vaqt o‘tgach, oziq-ovqat miqdorining kamayishi yirtqichlar populyatsiyasiga ham ta'sir qila boshlaydi va o‘ljalar soni $x = \frac{c}{d}$ =2 ga yetganda, yirtqichlar soni ham kamayishni boshlaydi, ularga mos o‘ljalar soni ham kamayadi.

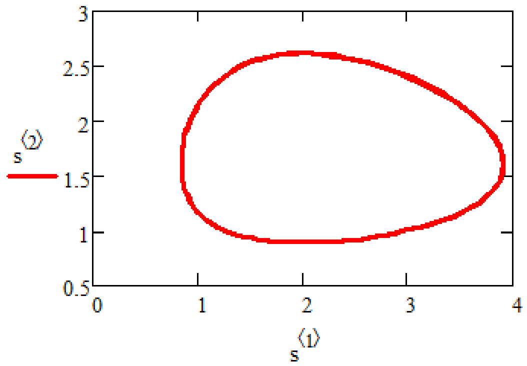
$$a := 4 \qquad b := 2.5 \qquad c := 2 \qquad d := 1$$

$$v := \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad d(t, v) := \begin{bmatrix} (4 - 2.5 \cdot v_1) \cdot v_0 \\ (-2 + 1 \cdot v_0) \cdot v_1 \end{bmatrix}$$

$$s := \mathrm{rkfixed}(v, 0, 10, 400, d)$$



5.1-rasm. Vaqt bo‘yicha qurbonlar(qizil) va yirtqichlar(ko‘k) soni



5.2-rasm. Yirtqich-o‘lja hatti-harakatlarining fazaviy trayektoriyasi.

Populyatsiyaning kamayishi yirtqichlar soni a/b=1,6 ga yetguncha sodir bo‘ladi, bu nuqtada x=0. Shu paytdan boshlab o‘ljalar soni ko‘paya boshlaydi; bir muncha vaqt o‘tgach, yirtqichlarning ko‘payishini ta'minlash uchun oziq-ovqat yetarli bo‘ladi, ikkala populyatsiya ham o‘sadi va jarayon qayta-qayta takrorlanadi. Grafikda jarayonning davriy tabiati aniq ko‘rsatilgan. Yirtqichlar va o‘ljalar soni mos ravishda x=2, y=1.6 qiymatlari yaqinida o‘zgarib turadi. Bu yerda kasr sonlar "bo‘rining yarmi" degani emas: bu miqdorlar yuzlab, minglab va hokazolarda o‘zgarishi mumkin.

Jarayonning davriyligi faza tekisligida aniq ko‘rinadi: faza egri chizig‘i (*x(t), y (t))* yopiq chiziq. Ushbu egri chiziqning eng chap nuqtasi, $y=a/b=1.6$-o‘ljalar soni eng kichik qiymatga yetadigan nuqta. Eng o‘ng nuqta, $x=4$, $y=1.6$ – o‘ljalar sonining eng yuqori nuqtasi. Ushbu nuqtalar orasida yirtqichlar soni avval faza egri chizig‘ining pastki nuqtasiga, $x=c/d=2$ ga kamayadi, u yerda u eng kichik qiymatga yetadi va keyin faza egri chizig‘ining yuqori nuqtasiga ko‘tariladi ($x=2$, $y=2.5$). Faza egri chizig‘i $x=2$, $y=1.6$ nuqtani qamrab oladi. Differensial tenglamalar tilida bu tizimning statsionar holatiga ega ekanligini anglatadi ($x=0$, $y=0$), bu $x=2$, $y=1.6$ nuqtada erishiladi.

Ikki mamlakat o‘rtasidagi qurollanish poygasi modeli

Bugungi kunda qurolli to‘qnashuvlarning paydo bo‘lishini bashorat qilishning ko‘plab usullari mavjud. Ularning ko‘pligi zamonaviy dunyodagi urushlardan oldin har xil holatlar to‘plami bo‘lishi mumkinligi bilan izohlanadi, ularni biron bir model bilan ifodalash qiyin. Urushlarni bashorat qilishning birinchi bo‘lib ingliz meteorologi Lyuis F. Richardson tomonidan amalga oshirilgan, ya’ni, agar ba'zi qarama-qarshi davlatlar o‘rtasida qurollanish poygasi paydo bo‘lgan yoki mavjud bo‘lsa, o‘zining bashorat qilish funksiyasini muvaffaqiyatli bajara oladigan matematik modelni yaratgan edi. Ushbu model yordamida qurollanish poygasining mohiyatini tahlil qilib, vaziyatni yanada rivojlantirish uchun juda aniq bashorat qilish mumkin edi. Richardson katta hajmdagi matematik bilimlar bilan urush hodisasini o‘rganishda qo‘llashga qaror qiladi. Richardson haqli ravishda zamonaviy urushlardan (shu jumladan birinchi jahon urushidan) oldin qurollanish poygasi bo‘lgan deb taxmin qiladi, shuning uchun u qanday va qanaqa qurollanish poygasi urushning paydo bo‘lishiga olib kelishini tushunish uchun ushbu hodisani ko‘rib chiqadi. Richardson modeli – harbiy qarama-qarshilik modelidir. Muallif ikki qarama-qarshi tomonni o‘rganib chiqadi. Ularning har biri qurollanish darajasini ko‘rsatadigan faqat bitta o‘zgaruvchiga tegishli. Richardson modeli dinamik model hisoblanadi. Bu bizga fazaviy holatlarning barqarorligi va beqarorligi masalalarini batafsil ko‘rib chiqishga, vaqt o‘tishi bilan tomonlarning kuchlari muvozanatini o‘rnatilishiga yoki buzilishiga olib keladigan yo‘llarni o‘rganishga imkon beradi.

Richardsonning qurollanish poygasi modelini qarab chiqamiz. Modelni tahlil qilish natijalari *x(t), y(t)* grafikalarini tuzish orqali raqamli hisob-kitoblar bilan tasdiqlanadi. Faza fazosi uchun tegishli dastlabki shartlarni belgilab, model ko‘rinishini yaratishga o‘tish mumkin.

Ikki urushayotgan davlat bo‘lishi mumkin bo‘lgan quyidagi vaziyatni ko‘rib chiqamiz. Birinchi mamlakat ("sariq") qo‘shni dushman mamlakat ("yashil") bilan urush xavfi paydo bo‘lishidan qo‘rqib qurollanadi. O‘z navbatida,"Yashillar" sariqlar uchun qurol-yarog‘ narxining oshishini bilib, qurol-yarog‘ xarajatlarini ham oshiradi. Aytaylik, har bir mamlakat qurollarning o‘sish (qisqarish) tezligini boshqasining xarajatlar darajasiga mutanosib ravishda o‘zgartiradi. Matematik jihatdan bu holatni quyidagicha modellashtirish mumkin. *X(t)* - t≥0 momentiga qadar "sariq"larning qurollanish xarajatlari, *y(t)* xuddi shunday, ammo "yashil"lar uchun qurollanish xarajatlari bo‘lsin. U holda qurollanish poygasining eng oddiy modelini o‘zgarmas koeffitsiyentli ikkita chiziqli differensial tenglamalar ko‘rinishida shakllantirish mumkin:

$$\begin{cases} dx/dt = ay, \\ dy/dt = bx \end{cases} \tag{5.3}$$

Bu yerda a va b musbat doimiylardir. Ushbu tenglamalar bir-biriga teskari bo‘lgan aloqani tavsiflaydi. (5.3) model quyidagi kamchilikka ega: qurol-yarog‘ narxining oshishi hech narsa bilan cheklanmagan. Shuning uchun mudofaa xarajatlarining hozirgi darajasi qanchalik katta bo‘lsa, uning o‘sish sur'ati shunchalik past bo‘ladi (salbiy teskari aloqa) degan fikr haqoqatga yaqin. Bundan quyidagi tenglamalar sistemasini olamiz:

$$\begin{cases} dx/dt = ay - mx, \\ dy/dt = bx - ny, \end{cases} \tag{5.4}$$

Bu yerda *a,b,m, n* - musbat o‘zgarmaslar. L. Richardson tomonidan modelga kiritilgan uchinchi postulatni ko‘rib chiqamiz: davlat boshqa davlatlar ushbu davlatning mavjudligiga tahdid solmasa ham, o‘zining davlat da'volari va boshqa davlatlarga dushmanligi asosida qurol-yarog‘larni ko‘paytirayotgan bo‘lsin. r va s (r>0 *va* s>0) orqali tegishli da'vo koeffitsiyentlarini belgilaymiz. Bundan quyidagi tenglamalar sistemasini olamiz:

$$\begin{cases} dx/dt = ay - mx + r, \\ dy/dt = bx - ny + s, \end{cases} \tag{5.5}$$

Ushbu sistemaning yechimi $x(t)$ va $y(t)$ funksiyalari bo‘lib, ular x_0, y_0 (qurollanish poygasining dastlabki holati) boshlang‘ich shartlari bilan aniqlanadi. Modelning elementar tahlilini o‘tkazamiz. Qurollanish poygasidan "oqilona" talab qilinadigan eng muhim xususiyatlardan biri bu barqarorlikdir. Ushbu talabni quyidagicha rasmiylashtiraylik: qurollanish xarajatlari darajasi doimiy bo‘lishi va vaqtga bog‘liq bo‘lmasligi kerak:

$$dx/dt = dy/dt = 0, \tag{5.6}$$

ya'ni, tizim muvozanat holatida bo‘lishi maqsadga muvofiqdir. (5.6)dan kelib chiqib (5.5) tizim uchun muvozanat shartlari quyidagi shaklda yoziladi:

$$ay - mx + r = 0, \tag{5.7}$$

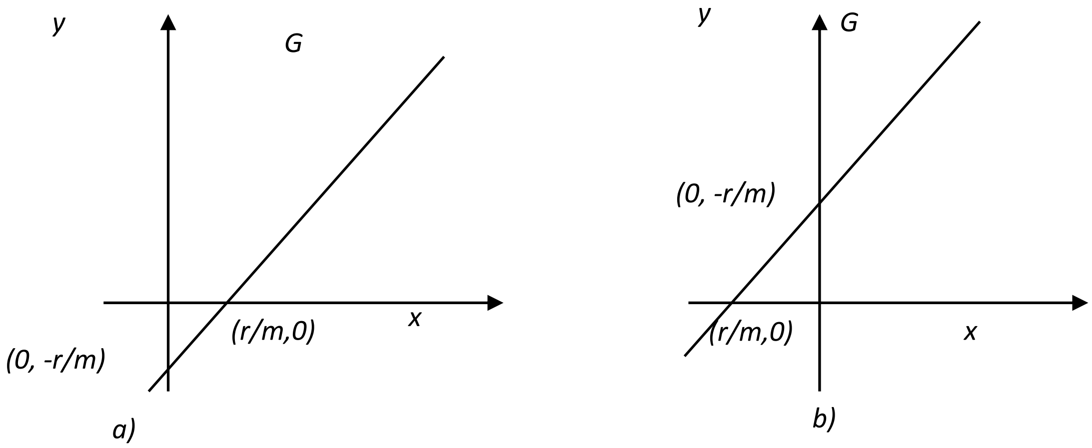
$$bx - ny + s = 0, \tag{5.8}$$

(5.7) va (5.8) dan biz quyidagini aniqlaymiz:

$$y = (m/a)x - r/a \tag{5.9}$$

$$y = (b/n)x + s/n \tag{5.10}$$

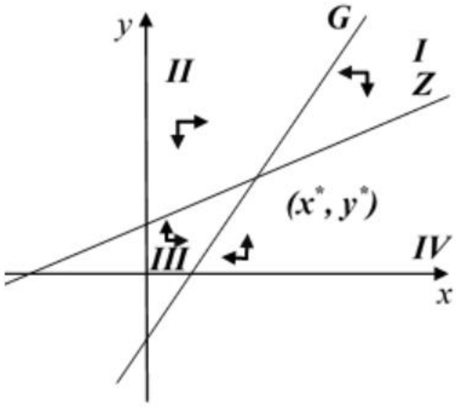
Endi (5.9) chiziqli tenglamaning geometrik talqinini (x,y) koordinatalar tekisligida ko‘rib chiqaylik (5.3-rasm).



5.3–rasm. (5.9) tenglamaning geometrik talqini: $a - r > 0$ da; $b - r < 0$ da

G chizig‘idagi barcha nuqtalar uchun bizda $dx/dt=0$ yuqoridan ma’lum. Aytishimiz mumkinki, (5.5) sistemaning birinchi tenglamasi faza tekisligidagi nuqtaning harakat tezligining gorizontal komponentini, ikkinchi tenglama esa vertikalni belgilaydi. Agar faza tekisligining ma'lum bir nuqtasida *dx/dt*>0 bo‘lsa, u holda *x(t)* ortadi va tizimning yechimi shu nuqtadan o‘ngga, agar *dx/dt*<0 bo‘lsa, u holda chapga siljiydi. Xuddi shunday, agar *dx/dt*>0 bo‘lsa, u holda nuqta yuqoriga (pastga) siljiydi.

Algebra kursidan ma'lumki, *g* to‘g‘ri chiziq tekislikni *(x, y)* ikkita yarim tekisliklarga ajratadi.



5.4-rasm. Birinchi chorakdagi muvozanat nuqtasi.

Birinchi yarim tekislikning barcha nuqtalari uchun *dx/dt*>0, ikkinchi yarim tekislik uchun esa *dx/dt*<0. Shu tartibda, ushbu sistemaning ikkinchi tenglamasi *Z* to‘g‘ri chiziq uchun to‘g‘ri keladi (vertikal tortishish) (5.4-rasm). *G* va *Z* to‘g‘ri chiziqlari birinchi chorakni I, II, III, IV Rim raqamlari bilan belgilangan to‘rtta sohaga ajratadi.

Richardson modelining hatti-harakatlarini t→∞ bo‘lganda tahlil qilamiz. Bunda uchta holat bo‘lishi mumkin:

1. Cheksiz qurollanish poygasi: $x \to \infty$ va $y \to \infty$.

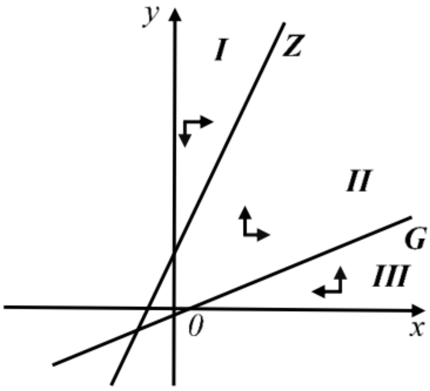
2. O‘zaro qurolsizlanish: $x \to 0$ va $y \to 0$.

3. Qurol muvozanati: $x \to x^*$, $y \to y^*$, bu yerda x^*, $y^* > 0$.

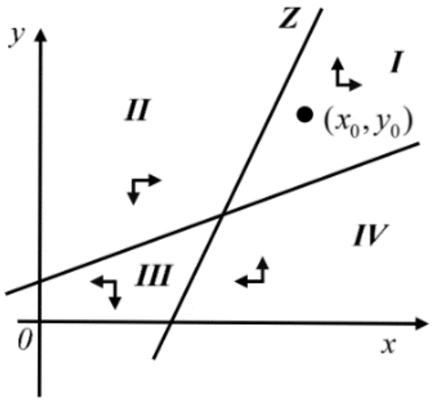
Muvozanat nuqtasi *(x*, y*)* G [(5.7) tenglama] va *Z* [(5.8) tenglama] chiziqlarining kesishmasida joylashgan (5.4 - rasm). Agar *r*>0 va *s*>0 bo‘lsa, unda *G* va *Z* kesishish nuqtasi birinchi(5.4 rasmga qarang) yoki uchinchi(5.5 rasm) kvadrantda joylashganligini ko‘rsatish oson.

5.4-rasmdagi yo‘nalishlar faza tekisligining ma'lum bir choragida joylashgan nuqta harakatining gorizontal va vertikal tashkil etuvchilarini ko‘rsatadi. 5.4-rasmda ko‘rsatilgan chizmada, har qanday boshlang‘ich nuqtadan boshlab, yechim vaqt o‘tishi bilan muvozanat nuqtasiga keladi, qurollanishning boshlang‘ich darajasidan qat'iy nazar, "kuchlar muvozanati" ga erishiladi. 5.5 - rasmdan ko‘rinadiki, agar boshlang‘ich nuqta II sohaga tushgan bo‘lsa, u holda $x \to \infty$ va $y \to \infty$.

r, s koeffitsiyentlaridan kamida bittasi $r, s<0$ bo‘lgan vaziyatni ko‘rib chiqamiz (5.6-rasm). Agar boshlang‘ich xarajatlar darajasi, ya'ni (x_0, y_0) nuqta *I* sohada bo‘lsa, unda qurollanish poygasi cheksiz bo‘ladi. Agar boshlang‘ich nuqta III mintaqada bo‘lsa, u holda (5.4) tizimning yechimi ham (x^*, y^*) muvozanatdan "chiqib ketadi", lekin u $(0, 0)$ nuqtaga intiladi (o‘zaro qurolsizlanish).



5.5-rasm. Uchinchi kvadrantdagi muvozanat nuqtasi



5.6-rasm. *R<0* yoki (va) *s<0* da tizimning o’zini turishi.

Shunday qilib, bir yoki hatto ikkala davlatda ham "yaxshi niyat" ning mavjudligi $r, s<0$ qurollanish poygasining qoniqarli natijasini kafolatlamaydi. Bularning barchasi tizimning dastlabki holatiga bog‘liq. Shubhasiz, Richardson modelining hatti-harakati *a,b,m, n* koeffitsiyentlari va *r, s* qiymatlarning ishorasiga bog‘liq:, bunda quyidagi 4 ta holatdan biri bo‘lishi mumkin:

Agar $mn\text{-}ab>0$, $r> 0$, $s>0$ bo‘lsa, unda muvozanat nuqtasi mavjud.

Agar $mn\text{-}ab<0$, $r>0$, $s>0$ bo‘lsa, unda modeldan mantiqan qurollanish poygasining cheksiz kuchayishi kelib chiqadi.

Agar $mn\text{-}ab>0$, $r<0$, $s<0$ bo‘lsa, unda to‘liq o‘zaro qurolsizlanish kafolatlanadi.

Agar $mn\text{-}ab<0$, $r>0$, $s>0$ bo‘lsa, unda bashoratning pessimistligi yoki optimizmi dastlabki holatga bog‘liq.

Ushbu model urushlarni faqat qurollanish poygasi oldidan bashorat qilishi mumkin, ammo, davlatlar o‘rtasida yadroviy urush paydo bo‘lishi uchun qurollanish poygasi umuman talab qilinmaydi: yadro quroliga ega davlatlarda yadroviy kallakli raketalar allaqachon mavjud va ularning kuchi butun yer aholisini yo‘q qilish uchun yetarli. Ushbu urushlarni bashorat qilish uchun yanada murakkab matematik vositalar bilan ishlaydigan boshqa modellar kerak bo‘ladi.

MATLAB muhitida qurollanish poygasi modeli:

```
clear
a1=0.1 ; a2=0.1 ;
b1=0.2 ; b2=0.2 ;
y1=10 ; y2=10 ;
M1=210; M2=90;
m1x=M1; m2x=M2;
z=1;
for i=1:0.01:100
dM1=(a1*m2x-b1*m1x+y1)*0.01;
m1x=m1x+dM1;
M1(z)=m1x;
dM2=(a2*m1x-b2*m2x+y2)*0.01;
m2x=m2x+dM2;
M2(z)=m2x;
t(z)=z;
z=z+1;
end
k1=(a1*y2+b2*y1)/(b1*b2-a1*a2);
k2=(a2*y1+b1*y2)/(b1*b2-a1*a2);
grid on
hold on
plot(M1,M2,'r');
plot(k1,k2,'p');
```

GLOSSARIY

Algoritm – ko‘rsatilgan maqsadga erishish yoki qo‘yilgan topshiriq (masala) ni yechishga qaratilgan vazif a(amal) lar ketma–ketligini baj arish borasida ijrochiga tushunarli va aniq ko‘rsatmalar berish.

Abstraktlash – mavhumlashtirish orqali nazariy umumlashmalar hosil qilishdan iborat ta’lim metodi.

Bashoratlash – bo‘lajak darsni tashkil qilishining turli variantlarini baholash va ulardan qabul qilingan mezonlarga muvofiq eng ma’qulini tanlab olish.

Kattalik – miqdor jihatdan aniqlanadigan va sifat jihatdan ajralib turadigan jism, modda, maydon, hodisa, jarayon yoki axborotning tavsifi; shkalalardan foydalanish bilan ifodalanadi.

Ob’yekt – har xil xossa va xususiyatlarga ega bo‘lgan tabiat elementi.

Model – lotincha modulus so‘zidan olingan bo‘ib, o‘lchov, me'yor degan ma`nolarni anglatadi

Model–bu o‘rganilayotgan ob'ekt hodisalarining alohida tomonlarini aks ettiruvchi soddalashtirilgan tizim.

Modellashtirish – modellarni qurish, o‘rganish va qo‘llash jarayoni tushuniladi.

Model - lotincha *modulus* so`zidan olingan bo`lib, o`lchov, namuna ma’nolarini anglatadi.

Model – bu real ob’yektni almashtirishi mumkin bo`lgan, tadqiqot va tajriba o`tkazish uchun qulay va arzon bo`lgan boshqa bir real yoki abstrakt ob’yektdir. Model real ob’yektning soddalashtirilgan ko`rinishi bo`lib, uning hamma xossalarini emas, balki asosiy xossalarinigina o`zida mujassam etadi.

Matematik model – real ob’yektni tasavurimizdagi abstrakt ko`rinishi bo`lib, u matematik belgilar va ba’zi bir qonun–qoidalar bilan ifodalangan bo`ladi. Masalan, Nyuton qonunlari, massaning saqlanish qonuni.

Matematik model - o`rganilayotgan jarayonlarni algebraik, differentsial yoki integral tenglamalar ko`rinishidagi taqribiy ifodasi;

Faktorlar - modellashtirishda tashqi muhitning tekshirilayotgan ob'yekt parametrlariga ta'sir qiluvchi ko`rsatkichlari.

Matematik modellashtirish - real ob'yekt yoki jarayonlarni matematik usullar vositasida nazariy tadqiq qilish usuli.

Modellashtirishning mohiyati - ob'yektni boshqa soddaroq ob'yekt (model) bilan almashtirib, modelni xususiyatini tadqiq qilish orqali original ob'yektni o`rganishdan iborat.

Ideal modellashtirish – bu modellashtirish, unda haqiqiy ob'ektga uning so'zlar ko'rinishidagi ifodasi, grafika, jadvallar, matematik fbodalar shaklidagi tasvirlanishi qarama – qarshi qo'yiladi .

Matematik model–bu modellashtirilgan ob'ekt yoki hodisaning kirish va chiqish ma'lumotlari o'rtasidagi shakliy bog'liqlikni aniqlaydigan matematik iboralar to'plamidir.

Moddiy modellar – Asosan o'rganilayotgan ob'ekt va jarayonni geometrik, fizik, dinamik yoki funktsional tavsiflarini ifodalaydi.

Modelning adekvatligi – modelning modellashtirilayotgan obyekt yoki jarayonga mos kelishi.

Abstrakt (ideal) modellar – Inson tafakkurining mahsuli bo'lib, ular tushunchalar, gipotezalar va turli xil qarashlar sistemasidan iborat.

Funktsional modellar– Iqtisodiy boshqarishda keng qo'llaniladi, bunda ob'ektning holati («chiqish»)ga «kirish»ni o'zgartirish yo'li bilan ta'sir ko'rsatiladi.

Determinirlangan modellar – Model o'zgaruvchilari orasidagi qat'iy funktsional bog`lanishlar borligini nazarda tutadi

Stoxastik modellar – Tadqiq qilinayotgan ko'rsatkichlarga tasodifiy ta'sirlarning borligiga yo'l qo'yadi hamda ularni tasvirlash uchun ehtimollar nazariyasi va matematik statistikaning vositalaridan foydalanadi.

Analog modellar – bu o'rganilayotgan jarayonlarni boshqa fizik tabiatga ega bo'lgan jarayonlar bilan almashtiradigan model. Ularning barchasi bir xil matematik modelga ega.

Mantiqiy model – bu mantiqiy xulosalar va shartlarni tahlil qilish asosida amalga oshiriladigan amallarni tanlashning turli xil variantlarini taqdim etadigan model.

Informatsion(axborot) modeli – bu real dunyoning bir qismini axborot shaklida o‘rganishdir(akslantirishdir). Axborot modelini qurish uchun bir necha bosqichlardan o‘tish kerak. Ob’ektni idrok etishdan formal ko‘rinishini hosil qilishgacha bo‘lgan jarayon “formallashtirish”, teskari jarayon esa “interpretatsiya” deb ataladi.

Funktsional bog‘lanish – bir o‘zgaruvchi belgining har qaysi qiymatiga boshqa o‘zgaruvchi belgining aniq bitta qiymati mos keladi

Imitatsiya – bu ma'lum bir davrda real ob'ektlar, jarayonlar va tizimlarning hatti–harakatlarini taqlid qiladigan matematik modellar va ularning mantiqiy tuzilishi va vaqt o‘tishi ketma–ketligini saqlab qolgan holda jarayon yoki tizimni tashkil etadigan elementar hodisalarni tadqid qilishdir.

Imitatsion model — o‘rganilayotgan obyektning ma’lum biror vaqt intervali oralig‘idagi dinamik o‘zgarishlarini akslantiruvnchi algoritmining kompyuter uchun mo‘ljallangan dasturi.

**Korrelyatsion bog`lanish** – bir o‘zgaruvchi belgining har qaysi qiymatiga boshqa o‘zgaruvchi belgining o`rtacha qitmati mos keladi.

Statik modellar – Barcha bog`lanishlar vaqtning tayinli payti yoki davriga tegishlidir.

Dinamik modellar – Iqtisodiy jarayonlarning vaqt bo‘yicha o‘zgarishini tavsiflaydi.

Qovushqoqlik – suyuqlik va gazlarning bir qismlarining boshqalariga nisbatan ko`chishiga qarshilik ko`rsatish xossasi.

Bosim – muvozanatda urinmali kuchlanishlar mavjud bo`lmagan (suyuq va gazsimon) muhitning kuchlanganlik holatini tavsiflovchi fizik kattalik; jism sirtining biror bir qismiga shu sirtga perpendikulyar yo`nalishda ta`sir qilayotgan kuchlar intensivligini tavsiflovchi fizik kattalik; sirt bo`ylab bir xil taqsimlangan normal kuchning shu sirt maydoniga bo`lgan nisbati bilan ifodalanadi.

Xatolik – haqiqiy qiymatdan og‘ish.

Matematik model xatoligi – real jarayonning matematik tavsiflanishi naoniqligidan kelib chiqadigan xatolik.

Energiya (yunoncha: harakat, faoliyat) – fizik tizimning boshqa fizik tizimlarga nisbatan ish bajara olish qobiliyati miqdoridir.

Energiyaning saqlanish va aylanish qonuni – har qanday berk tizimda energiya yo‘qdan bor bo‘lmaydi va yo‘qolib ketmaydi, faqat bir turdan ikkinchi turga aylanib turadi. Berk tizimda faqat konservativ (o‘zgarmas) kuchlar mavjud bo‘lsa, tizimning to‘liq mexanik energiyasi o‘zgarmas qiymatga ega bo‘lib qoladi, ya’ni kinetik energiya potensial energiyaga aylanib turadi va aksincha.

Impul’s – biron bir kattalik qiymatining vaqt bo`yicha cheklangan keskin og‘ishi; davomiyligi tizim, qurilma va uning elementida ro`y berayotgan jarayonning davom etishligidan kichik hamda noldan farqli chekli energiyaga ega bo`lgan diskret signal.

Impulsning saqlanish qonuni – yopiq sistemada jismlar impulslarining vektor yig‘indisi jismlarning o‘zaro ta’sirlashishi va vaqt o‘tishidan qat’i nazar o‘zgarmaydi.

Biologik model – turli tirik ob'ektlar va ularning qismlari–molekula, hujayra, organizm va shu kabilarga xos biologik tuzilish, funksiya va jarayonlarni modellashda qo‘llaniladi.

Epidemiya – infeksion kasalliklarning ma’lum hududda odatdagidan ko‘p tarqalishi.

Demografiya – har yili vafot etgan aholi o‘rnini yangidan dunyoga kelgan avlod hisobiga to‘ldirib borilishi qonuniyatlarini ijtimoiy-tarixiy sharoitlarga bog‘lik holda o‘rganadigan fan.

Populyatsiya (lotincha: populus – guruh, uyushma, xalq) – erkin chatisha oladigan, ma’lum darajada zamon va makonda bir–biriga o‘zaro ta’sir ko‘rsatadigan organizmlar guruhi.

Inflatsiya – pulning qadrsizlanishi, muomalada xo‘jalik oboroti ehtiyojlaridan ortiq darajada qog‘oz pullar miqdorining ko‘payib ketishi.

Makroiqtisodiy modellar – iqtisodiyotni bir butun deb qarab,umumlashtirilgan moddiy va moliyaviy ko‘rsatkichlarni: yalpi milliy mahsulot, iste’mol, investitsiya, ish bilan bandlik, foiz stavkalari, pulning miqdori va boshqalami o‘zaro bog‘lagan holda tasvirlaydi.

Mikroiqtisodiy modellar – iqtisodiyotnig tuzilmali va funksional tashkil etuvchilarining o‘zaro ta’sirini ifodalaydi.

Determinatsiyalangan iqtisodiy modellar – korxonalarning ishlab chiqarish faoliyatidagi texnik-iqtisodiy ko‘rsatkichlarni hisoblashda ishlatiladigan analitik modellar.

Bozor iqtisodiyoti – erkin tovar-pul munosabatlariga asoslangan, iqtisodiy monopolizmni inkor etuvchi, ijtimoiy mo‘ljalga, aholini ijtimoiy muhofaza qilish yo‘llariga ega bo‘lgan va boshqa tartiblanib turuvchi iqtisodiyot.

Ekonometrik model – prognozlashda obyektning barcha mavjud faktorlarining o‘zaro bog‘anishini ifodalovchi regressiya tenglamalar tizimlari.

Raqobat– bu ikki kishi yoki guruhning doimiy raqobatbardosh munosabatlardagi holati. Raqobat – bu raqobatlashayotgan ikki tomon o‘rtasidagi „bir-biriga qarshi“ munosabati. O‘zaro munosabatlarning o‘zini „raqobat“ deb ham atash mumkin, yoki har bir ishtirokchi bir-biri bilan raqib bo‘ladi.

Yirtqich-o‘lja tizimi — yirtqich va o‘lja turlari o‘rtasida uzoq muddatli munosabatlar asosida amalga oshiriladigan murakkab ekotizim. Yirtqichlar va ularning o‘ljalari o‘rtasidagi munosabatlar neytral muvozanatning tasviri sifatida davriy ravishda rivojlanadi.

ADABIYOTLAR RO'YXATI:

1. Ishmuhamedov R.J., M.Mirsoliyeva. O'quv jarayonida innovatsion ta'lim texnologiyalari. - T.: «Fan va texnologiya», 2017, 60 b.
2. Mathematical modeling: Problems, Methods, Applications / Eds by L.Ao Uvarova and A.Vo Latyshev. New York etc.: Klewer Acad / Plenum Pubis, 2001. 300 pp. ISBN 0-306-46664-3.
3. Taha H.A. Operations reseach.-2010. 9-th Edition.
4. Музафаров Х.А., Баклушин М.Б., Абдураимов М.Г. Математическое моделирование. Ташкент, Университет. 2002.
5. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование. М., Наука, 2005.
6. Xaydarov A., Kabiljanova F.A., Matyakubov A.S. Matematik modellashtirish asoslari. O'quv qo'llanma. Toshkent. 2023. 172 b.
7. Хайдаров А., Жумаев Ж., Шафиев Т.Р. Основы математического моделирования. Учебник. Бухара. 2022. 216 с.
8. Jumayev J., Shafiyev T.R., Shadmonov I.U. Matematik modellashtirish. Darslik. Buxoro, "Durdona", 2023. 200b.
9. To'xtasinov M. Jarayonlar tadqiqoti. Darslik. 2017. -572 b.
10. To'xtasinov M. Jarayonlar tadqiqotidan masalalar to'plami. O'quv-qo'llanma. Universitet. 2019. -206 b.
11. К.Л. Самаров. Линейное программирование. www. Resolventa.ru
12. Raisov M. Matematik programmalash. O'quv qo'llanma. T.: "Voris", 2009. -176 b.
13. Соколов С. В. Модели динамики популяций: учеб. пособие. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2018. 61 с.
14. Bazarbayev M.I., Sayfullayeva D.I., Mamarasulov A.F. Biologiya va tibbiyotda matematik modellashtirish. O'quv qo'llanma//"Tibbiyot nashriyoti matbaa uyi" MChJ. Toshkent-2022. 172 bet.
15. Ризниченко Г. Ю. Математические модели в биофизике и экологии. — Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003, 184 стр.

16. Usmonov B.SH., Habibullayev R.A. Oliy o‘quv yurtlarida o‘quv jarayonini kredit-modul tizimida tashkil qilish. O‘quv qo‘llanma. T.: “Tafakkur” nashriyoti, 2020 y. 120 b.
17. А.А.Самарский, А. П. Михайлов. Математическое моделирование. М., Наука, 1997.
18. С.П.Капитса, С.П.Курдюмов, Г.Г.Малинетский. Синергетика и прогнози будушего. –М., URSS, 2003.
19. Музафаров Х.А., Баклушин М.Б., Абдураимов М.Г. Математическое моделирование. –Т., Университет. 2002.
20. Ю.Ю.Тарасевич. Математическое и компьютерное моделирование. –М., УРСС, 2003.
21. Введение в математическое моделирование. Под ред. В. П. Трусова. - М., Логос, 2005.
22. M.I.Israilov. Hisoblash metodlari, I. Toshkent, O`zbekiston, 2003; Hisoblash metodlari, II. Toshkent, 2008.

Elektron ta‘lim resurslari

1. www.uzedu.uz
2. www.edu.uz
3. www.multimediya.uz
4. www.bim.uz
5. www.ziyonet.uz