

1. Kirish sonni belgilash: Faktorizatsiya qilinishi kerak bo'lgan son (n) tanlanadi.

2. Sonning toq sonligini tekshirish: Son toq sonligi ekanligini tekshirib oling. Agar son juft bo'lsa, unda uning bo'luvchilaridan biri 2 ga teng.

3. Sonning tub son ekanligini tekshirish. Agar son tub son bo'lmasa, keying qadamga o'tiladi, aks holda algoritm to'xtatiladi.

4. Tub ko'paytuvchilar ro'yxati shakllantiriladi, n sonining qiymati 1ga teng bo'lgunga qadar, n sonini Pollardning ρ – methodiga qo'yib, tub ko'paytuvchilaridan birini hisoblab topamiz.

5. Hisoblab topilgan sonni tub ko'paytuvchilar ro'yxatiga qo'shib qo'yamiz. n sonini topilgan songa bo'lib, natijani n ga o'zlashtiramiz.

6. Bu amallarni toki n ning qiymati 1 ga teng bo'lib qolgunga qadar davom ettiramiz. So'ngra natija sifatida tub ko'paytuvchilar ro'yxatini qaytaramiz.

Pollard-Strassen algoritmi, sonning tub ko'paytuvchilarini topish va ularni faktorizatsiyalashga yordam beradi. Bu jarayon samarador va effektiv hisoblanadi. Lekin, u har bir son uchun to'g'ri natija beruvchi faktorizatsiyani ta'minlamaydi.

Bu algoritmning murakkablik darajasi $O\left(N^{\left(\frac{1}{4}\right)} \log^4 N\right)$ ga teng.

Shanksning kvadrat shakllarini faktorizatsiyasi. Fermaning faktorizatsiya usulini takomillashtirish maqsadida Daniel Shanks tomonidan ishlab chiqilgan butun sonlarni faktorizatsiyalash usuli hisoblanadi.

Ferma usulining muvaffaqiyati $x^2 - y^2 = N$ shartni qanoatlantiruvchi x va y butun sonlarni topishga bog'liq. Bu yerda N faktorizatsiyalanayotgan son. Ferma usulini yaxshilash uchun $x^2 \equiv y^2 \pmod{N}$ shartni qanoatlantiruvchi x va y butun sonlarni izlashdir. Yuqoridagi shartni qanoatlantiruvchi (x, y) juftlikni topish faktorizatsiyasini kafolatlamaydi, lekin bu shuni anglatadiki, biz topgan juftliklar $N = x^2 - y^2 = (x - y) \cdot (x + y)$ shart bajarilganda, $(x - y)$ va $(x + y)$ sonlar N soni bilan umumiy bo'luvchiga ega bo'lish ehtimoli kattaroq bo'ladi.

$x^2 \equiv y^2 \pmod{N}$ shartni qanoatlantiruvchi (x, y) juftlarni topish uchun amaliy algoritm Shanks tomonidan ishlab chiqilgan bo'lib, uni *Kvadrat shakllarni faktorizatsiyalash* yoki SQUFOF (Square Forms Factorization) deb nomlangan. Hozirda ancha samarali faktorizatsiya usullari mavjud bo'lsa-da, Shanksning kvadrat shakllar faktorizatsiyasi usulining afzalligi shundaki, u dasturlashtiriladigan kalkulyatorda amalga oshirish uchun etarlicha kichikdir.

Shanksning kvadratik shakl faktorizatsiya algoritmi quyidagi qadamlardan iborat:

1) Faktorizatsiya qilinishi kerak bo'lgan N sonni olamiz.
2) Agar N toq son bo'lsa, u erda N va 1 dan farqli faktorlarni topib chiqamiz.

3) Agar N juft son bo'lsa, N ni 2 ga bo'lib bo'linma hosil qilish mumkin. Ularning ikkalasi ham faktorlardir.

4) x ni N ning kvadrat ildizining yaxlitlab olingan qiymati bilan boshlang'ich qiymatga o'zlashtiramiz.

5) Agar $x^2 = N$ bo'lsa, bu x soni N ning faktori bo'ladi.

6) Aks holda, x ni bir-biriga yaqinroq bo'lgan qiymatlarga o'zgartirib boramiz va $y_kvadrat = x^2 - N$ ni hisoblaymiz.

7) $y_kvadrat$ manfiy bo'lsa, x ning qiymatini 1ga oshirib yana $y_kvadrat$ qiymatni sinab ko'ramiz.

8) $y_kvadrat$ ning kvadrat ildizining butun qismi y ni olib, $y^2 = y_kvadrat$ shartini tekshirib ko'ramiz.

9) $x^2 \equiv y^2 \pmod{N}$ shartini qanoatlatiradigan $p = x + y$ va $q = x - y$ qiymatlarni topamiz.

10) Agar N ning p va q ga bo'linishi mumkin bo'lsa, u holda p va q sonlarini faktorlar sifatida qaytaramiz.

11) Aks holda, x ning qiymatini yana oshirib qayta qiymatlarni sinab ko'ramiz.

12) Faktorlar topilmagan holda dasturni tugatamiz.

Ushbu algoritmda kvadrat shakllarni olish, kvadrat tenglikni qanoatlantirish, p va q ni topish kabi amallar bajariladi. Dasturning boshqacha funksiyalari esa kvadratning ildizini hisoblash, faktorizatsiyani bajarish va natijalarni chiqarish uchun ishlatiladi.

Misol uchun 703 sonini ushbu algoritm yordamida faktorizatsiya qilib ko'ramiz.

— — $x = [\sqrt{N}] = [\sqrt{703}] = 26$ $x * x = N$ shartni tekshiramiz: $26 * 26 \neq 703$ shart qanoatlantirmadi.

1) $x = x + 1 = 27$

$$y_kvadrat = x^2 - N = 27^2 - 703 = 729 - 703 = 26$$

$$y = [\sqrt{y_kvadrat}] = [\sqrt{26}] = 5$$

$y^2 = y_kvadrat$ shartni tekshiramiz: $25 \neq 26$, qanoatlantirmadi x ning qiymatini bittaga oshirib yana tekshirib ko'ramiz.

2) $x = x + 1 = 28$

$$y_kvadrat = x^2 - N = 28^2 - 703 = 784 - 703 = 81$$

$y = [\sqrt{y_kvadrat}] = [\sqrt{81}] = 9$ $y^2 = y_kvadrat$ shartni tekshiramiz: $81 \neq 81$, qanoatlantirdi.

$$p = x + y \text{ va } q = x - y \Rightarrow p = 28 + 9 = 37 \text{ va } q = 28 - 9 = 19$$

703 sonining faktorlari: 37 va 19 ekan.

Pollardning P-1 algoritmi. Pollardning P-1 algoritmi faktorizatsiya algoritmi bo'lib, berilgan sonning tub omillarini topishda qo'llaniladi. U faktorlarga ajratiladigan son moduli tasodifiy butun sonning tartibini topish g'oyasiga asoslanadi. Algoritm murakkab sonning kichik omillarini samarali topish uchun ishlatilishi mumkin, bu RSA shifrlashlarini buzish uchun foydali bo'ladi. P-1 algoritmi uni 1974 yilda taklif qilgan matematik Jon Pollard sharafiga nomlangan. Algoritm ketma-ket takrorlashlar natijasida hosil bo'lgan raqamlarning eng katta tub omilini topish orqali ishlaydi. Bu hozirgacha hosil bo'lgan sonlarni tub ko'paytuvchilarga ajratish, har bir raqamning tartibini hisoblash va keyin bu tartiblarning eng katta umumiy bo'luvchisini olish orqali amalga oshiriladi. Pollardning P-1 algoritmi katta tub omillarni topish uchun samarali emas, lekin

undan murakkab sonni faktorizatsiyalashda birinchi qadam sifatida foydalanish mumkin. Pollardning P-1 algoritmi tasodifiy butun son a ni tanlash va $a^{m-1} \bmod n$ ni hisoblash orqali sonning omillarini qidiradi, bu erda n biz ko'paytirmoqchi bo'lgan butun son, m esa omillar bilan silliq sonidir. oldindan belgilangan yuqori chegara. Agar $a^{m-1} \bmod n$ ga mos kelmasa, biz a^{m-1} va n ning eng katta umumiy bo'luvchisini hisoblashga harakat qilamiz, bu esa n omilini ochishi mumkin. Pollardning P-1 algoritmining samaradorligi cheklangan, chunki algoritm muvaffaqiyatini aniqlashda darajaga oshiriladigan son m ning hajmi va P-1 omillarining o'lchami ham hal qiluvchi rol o'ynaydi.

Pollardning P-1 algoritmidagi yuqori chegarani B ni belgilab, faktorizatsiya qilinayotgan sonning o'zgaruvchilarini yuqori chegaraga qo'llab-quvvatlangan sanoq tizimlarida (arifmetik operatsiyalar, darajalar, toifalar) ishlatib faktorizatsiya jarayonini amalga oshirishga harakat qiladi.

Pollardning P-1 algoritmi quyidagi bosqichlardan iborat:

- 1) Faktorizatsiya qilinuvchi son va yuqori chegara B ni belgilaymiz.
- 2) 2 dan B gacha bo'lgan butun sonlardan bitta a son tanlaymiz.
- 3) $a = a^x \bmod n$ qiymati hisoblanadi. Bu yerda x ning boshlang'ich qiymati 2 ga teng bo'ladi.
- 4) Agar $y = \text{EKUB}(a, n)$ hisoblanadi.
- 5) Agar y 1 dan farqli son bo'lsa u n sonining tub bo'linuvchilaridan biri bo'ladi.
- 6) Agar $y = 1$ bo'lsa x ning qiymatini 1 ga oshirib boraveramiz toki B ga teng bo'lmaguncha.

Leman algoritmi (yoki Sherman Leman algoritmi) berilgan natural sonni deterministik tarzda tub ko'paytuvchilarga ajratadi. Ushbu algoritm N soni uchun

$$O\left(N^{\left(\frac{1}{3}\right)}\right)$$

ta arifmetik amallar muarakkabliligiga ega. Algoritm birinchi marta 1974 yilda amerikalik matematik Sherman Leman tomonidan taklif qilingan. Ushbu algoritm taxminiy $O(\sqrt{N})$ qiymatdan kichik bo'lgan birinchi deterministik butun son faktorizatsiya algoritmi edi. Ayni paytda u sof tarixiy ahamiyatga ega va, qoida tariqasida, amalda qo'llanilmaydi. Sababi shundaki bu algoritm ham kichik sonlarda samarali ishlashi mumkin lekin kattaroq sonlarni faktorizatsiya qilishda bu usul vaqt va xarajat jihatidan maqsadga muvofiq emas.

Quyidagi qadamlarda Leman faktorizatsiya algoritmini batafsil tushuntiriladi:

- 1) N sonining kub ildizini x ga tenglashtiramiz.
- 2) x ning oltinchi ildizini y ga tenglashtiramiz. Bu qiymat keyinchalik ishlatiladi.
- 3) $k = 1$ dan boshlab to x ga qadar sikl ochamiz. Bu k qiymatlarini sinovdan o'tkazish uchun foydalanamiz.
- 4) $4 * k * N$ ning kvadrat ildizini z ga tenglashtiramiz. Bu qiymat keyinchalik ishlatiladi.
- 5) z ni yuqoriga yaqin butun soniga yaxlitlaymiz va a ga tenglashtiramiz.

6) z ga $\frac{y}{4\sqrt{k}}$ ni qo'shib o'ng yonidan yaqin butun soniga yaxlitlaymiz va b ga tenglashtiramiz.

7) a dan b gacha i qiymatlari uchun tsikl ochamiz. Bu i qiymatlarini sinovdan o'tkazish uchun foydalanamiz.

8) t ni hisoblaymiz. Uning qiymati $t = a^2 - 4 * k * N$ ga teng bo'ladi.

9) t ning ildizini hisoblaymiz va butun songa yaxlitlaymiz hamda p ga tenglashtiramiz.

10) Agar p^2 qiymat t ga teng bo'lsa quyidagi qadamlarni bajarishimiz mumkin:

11) $i + p$ va N sonlarining eng kichik umumiy bo'luvchisini topiladi va u 1 dan farqli bo'lsa uni tub bo'luvchilardan biri sifatida qaytaramiz.

12) Agar hech qanday faktor topilmagan bo'lsa berilgan son tub deb qaytish bilan dastur tugaydi.

2.1-jadval Faktorizatsiyalash murakkabligini bartaraf etuvchi eksponensial turdagi algoritmlar tahlili

Algoritm nomi	Asosi	Effektiv chegarasi	Hisoblash murakkabligi
Fermaning faktorizatsiya usuli	N sonini ikki sonning kvadratlari ayirmasi sifatida ifodalash	< 16 bit	$O\left(N^{\frac{1}{3}}\right)$
Pollardning ρ -algoritmi	takrorlanuvchi funksiya ketma-ketlikdagi sikl uzunligini va tug'ilgan kun paradoksining ba'zi oqibatlarini topish	< 30 bit	$O\left(N^{\frac{1}{4}}\right)$
PollardShtrassen algoritmi	Pollardning ρ - algoritmi va Strassen metodi kombinatsiyasi	< 24 bit	$O\left(N^{\left(\frac{1}{4}\right)} \log^4 N\right)$
Shanksning kvadratik shakl usuli	N chekli maydonda kvadratlari teng bo'lgan sonlarni topish	< 26 bit	$O\left(N^{\frac{1}{4}+\varepsilon}\right)$
Pollardning $P1$ algoritmi	ketma-ket takrorlashlar natijasida hosil bo'lgan raqamlarning eng katta tub omilini topish	< 66 bit	$O\left(N^{\left(\frac{1}{2}\right)} \log^c N\right)$
Leman usuli	natural sonni deterministik tarzda tub ko'paytuvchilarga ajratish	< 16	$O\left(N^{\left(\frac{1}{3}\right)}\right)$

2.2 Faktorizatsiyalash murakkabligini bartaraf etuvchi subekspensial turdagi algoritmlar

Subekspensial algoritmlar, eksponensial algoritmlardan farqli ishlash tartibiga ega bo'lgan algoritmlar hisoblanadi. Bunday nomlanishining asosiy sababi, subekspensial algoritmlarning faktorizatsiya muammolarini yechishda eksponensial algoritmlardan ancha tezroq ishlashi, muhim samaradorlik olishi, katta

sonlar uchun yaxshiroq natija berishidir. Subekspensial algoritmlar, eksponensial algoritmlardan farqli ishlash prinsiplariga ega bo'lib, yuqori samaradorlikni ta'minlash uchun bir qancha ma'lumot va tekshiruvlarni olib boradi. Bu esa ularni ishlash tartibini va samaradorlik darajasini oshiradi. Shuning uchun, ular subekspensial algoritmlar deb nomlanadi.

Faktorizatsiyalash muammosini yechishda subekspensial algoritmlarning foydalari quyidagilardir:

- Ular eksponensial algoritmlardan ancha tezroq ishlaydi va katta sonlar uchun yaxshiroq natija beradi.
- Ular yuqori samaradorlik darajasiga ega bo'lib, katta sonlarni faktorlarga bo'lishda samaradorlikni oshiradi.
- Ular muhim ma'lumotlar va tekshiruvlar asosida ishlaydigan, yangi prinsiplarga asoslangan algoritmlardir.

Shu sababli, subekspensial algoritmlar faktorizatsiya muammolarini yechishda muhim ahamiyatga ega bo'ladilar. Subekspensial algoritmlar, faktorizatsiya muammolarini yechish uchun tegishli matematik modellar va prinsiplar asosida ishlaydigan, va natijada eksponensial ishchi vaqtlardan ancha tezroq natijalar olish imkonini beruvchi usullar hisoblanadi. Ularning barchasi o'zining xususiyatlari va ishlash prinsiplariga ega, shuningdek, foydalanilgan matematik konsepsiyalarga va jarayonlarga asoslanadi. Har bir subekspensial algoritmda unikal usullar va cheklashuvlar mavjud bo'lib, ularni amalga oshirishda ma'lumotlar yig'ish, hisoblashlar va mantiqiy jarayonlar keng qo'llaniladi.

Subekspensial algoritmlarning hisoblash muarakkablighi L – yozuv (yoki

L - notation) da baholanadi va quyidagiga teng bo'ladi:

$$L(a, c) := O(e^{c+o(1)} \cdot \log^a n \cdot \log^{1-\alpha} \log n)$$

Bu yerda n - tub ko'paytuvchilarga ajratilayotgan son, c va α – ba'zi doimiylar.

Subekspensial faktorizatsiya algoritmlariga quyidagi algoritmlarni misol keltirish mumkin:

- Dikson algoritmi
- Davomli kasrlar bo'yicha koeffitsientlarga ajratish usuli
- Kvadrat elak usuli
- Elliptik egri chiziqlar yordamida Lenstra faktorizatsiyasi
- Raqamli dala elak usuli

Dikson algoritmi. Dikson algoritmi faktorizatsiyalash muammosini bartaraf etish uchun ishlatilgan bir subekspensial turdagi algoritmdir. Uning asosiy maqsadi bir sonni (masalan, N) uning tub bo'luvchilariga ajratib berishdir.

Dikson usuli koeffitsientga mo'ljallangan N butun son moduliga kvadratlarning mos kelishini topishga asoslangan. Fermaning faktorizatsiya usuli tasodifiy yoki psevdotasodifiy x qiymatlarini tanlash va $x^2 \bmod N$ butun soni mukammal kvadrat bo'lishiga umid qilish orqali shunday

moslikni topadi:

$$x^2 \equiv y^2 \pmod{N} \quad x \not\equiv \pm y \pmod{N}$$

Dikson algoritmi quyidagi tartibda ishlaydi:

- 1) Dikson algoritmi uchun boshlang'ich sonlardan birini tanlash, masalan, N .
- 2) Dikson algoritmi qadamli ravishda taxminiy tub bo'lgan bir bo'luvchi sini topishga harakat qiladi. Bu taxminiy tub bo'luvchilar Dikson algoritmi uchun eng muhim qism bo'lgan boshlang'ich tahminiy bo'luvchilaridir.
- 3) Agar N taxminiy tub bo'luvchiga qoldiq qoldirgan bo'lsa, u holda faktorizatsiyani yakunlash uchun topilgan bo'luvchini qaytaradi.
- 4) Agar N taxminiy tub bo'luvchiga qoldiq qoldirmasdan o'tgan bo'lsa, Dikson algoritmi davom etish uchun boshqa bir taxminiy tub bo'luvchi sini topish uchun harakat qiladi.
- 5) Bular davom etishi taxminiy tub sonlar tugaguncha davom etadi.

Dikson algoritmi katta sonlar faktorizatsiyasini amalga oshirishda ishlatiladi. U yordamida katta sonlar o'rniga undan kichik bo'luvchilarga ajratilgan sonlar topiladi. Bu usul hammasi bilan sonlarni ajratishning tezligi va samaradorligi bilan bilinadi. Ammo, Dikson algoritmi katta sonlar uchun ishlovchi jarayonning xisoblanish chegarasi borligi sababli, katta sonlar uchun ishlovchi dasturlash yoki ma'lumotlar to'plami talab qiladi. Dikson algoritmi shifrlash, parolni to'lash, katta sonlar faktorizatsiyasi va boshqa kriptografiya, matematika va dasturlash sohalarida ishlatiladi. U katta sonlarni bo'luvchilariga ajratib berishda ishlatiladi va bu erda amalga oshirish qulay va samarador bo'lishi mumkin.

Davomli kasrlar bo'yicha koeffisientlarga ajratish usuli. Davomli kasrlar bo'yicha koeffisientlarga ajratish usuli yoki CFRAC (Continued Fraction Factorization) algoritmi butun sonlarni ko'paytuvchilarga ajratish algoritmi bo'lib, berilgan butun sonning tub ko'paytuvchilarini topish uchun davomli kasrlardan foydalanadi. Bu erda CFRAC algoritmining bosqichma-bosqich tushuntirishi:

1. Faktorlarga ajratmoqchi bo'lgan N butun sonni tanlab olamiz.
2. Kasrni kengaytirish uchun boshlang'ich qiymatni tanlang, odatda N ning kvadrat ildizga yaqinlashishiga o'rnatiladi.
3. Davomli kasrda birinchi had bo'ladigan kasr kengayishining butun son qismini hisoblang.
4. Oldingi kasrdan butun sonni ayirish orqali kasrni yangilang. Bu keyingi muddat uchun ishlatiladigan kasr qismini beradi.
5. Oldingi bosqichda olingan kasr qismining o'zaro nisbatini hisoblang.
6. Tub bo'luvchisi topilmaguncha yoki ma'lum bir shart bajarilmaguncha (masalan, takrorlashlarning maksimal soni) 3-5-bosqichlarni takrorlang.
7. Agar tub ko'paytuvchilardan biri topilsa, uni natija sifatida qaytaring.

Aks holda, keyingi bosqichga o'ting.

8. Kasrni kengaytirishning boshlang'ich qiymatini sozlang va 3-7bosqichlarni yangi boshlang'ich qiymat bilan takrorlang.

9. Agar har xil boshlang'ich qiymatlarga ega bo'lgan bir necha marta takrorlashdan keyin tub bo'luvchilardan biri topilmasa, algoritm tugatilishi mumkin.

Shuni ta'kidlash kerakki, CFRAC algoritmi barcha butun sonlar uchun tub ko'paytvchilarni topishga kafolat bermaydi. Uning muvaffaqiyati turli omillarga, jumladan faktorlangan sonning xususiyatlariga va kasrni kengaytirish uchun boshlang'ich qiymatlarni tanlashga bog'liq.

Kvadrat elak algoritmi. Kvadrat elak algoritmi murakkab sonning tub omillarini topish uchun ishlatiladigan faktorizatsiya usulidir. Bu yarim tub sonlar (ikki tub sonning ko'paytmasi) bo'lgan katta sonlarni faktoring qilish uchun samarali algoritmdir. Kvadrat elak algoritmining qisqacha tavsifi quyidagicha:

1. Faktorlar bazasining o'lchamini aniqlaydigan B ni tanlang. Faktorlar bazasi kichik tub sonlardan iborat bo'lib, faktorlarga ajratiladigan sonni ushbu tub sonlarning kichik darajalarga ko'paytmasi sifatida ifodalash mumkin.

2. Faktorlar bazasidagi tub sonlarni modul bo'yicha kvadratik qoldiqlar to'plamini hosil qiling. Bular har bir tub modul bo'yicha mukammal kvadratlar sifatida ifodalanishi mumkin bo'lgan raqamlardir.

3. Kvadrat qoldiqlardan foydalanib, A matritsasini tuzing, bunda har bir satr faktorlar asosi tubiga va har bir ustun koeffitsientga ajratiladigan songa mos keladi. Matritsada yozuvlar mos keladigan sonni faktorizatsiya qilishda har bir tub sonning ko'rsatkichini ifodalaydi.

4. Chiziqli mustaqil qatorlar to'plamini topish uchun A matritsada Gaussning yo'q qilishini bajaring. Bu matritsani qator-satr shakliga qisqartiradi.

5. A matritsaning qator-satr shakli bilan ifodalangan chiziqli sistemaning tub yechimini toping. Bu chiziqli tenglamalar tizimini modul 2 yechish orqali amalga oshiriladi.

6. Tub yechimdan foydalanib, moslik munosabatini tuzing. Bu munosabat to'liq kvadrat modul bo'lgan sonlar ko'paytmasini faktorlarga ajratiladigan sonni beradi.

7. Sonning tub omilini topish uchun moslik munosabatining kvadrat ildizini oling.

8. Kerakli omillar topilguncha jarayonni turli bazis va omil asoslari bilan takrorlang.

Kvadrat elak algoritmini amalga oshirish raqamlar nazariyasi va ilg'or matematikani chuqur tushunishni talab qiladi. Bu murakkab matematik operatsiyalar va optimallashtirishni o'z ichiga oladi. U odatda C++ yoki Python kabi dasturlash tillarida samarali modulli arifmetik va chiziqli algebra operatsiyalari uchun maxsus kutubxonalar yordamida amalga oshiriladi. E'tibor berib, Kvadrat elak algoritmi davom etayotgan tadqiqot va takomillashtirish mavzusidir. Amalga oshirish tafsilotlari va optimallashtirishlar aniq variant yoki foydalanilgan dasturga qarab farq qilishi mumkin.

Elliptik egri chiziqlar yordamida Lenstra faktorizatsiyasi. Elliptik egri chiziqlar yordamida Lenstra faktorizatsiyasi, subekspensial turdagi faktorizatsiya algoritmidir. Ushbu algoritmnining asosiy qismi, Lenstra tuzilganida, faktorlashtirishga urinishning eng oson turi sifatida qaraladi. Quyidagi qadam

ma'lumotlari yordamida Lenstra faktorizatsiyasi usulining algoritmi tasvirlangan:

1. Kirishda faktorizatsiya uchun butun murakkab sonimiz N ni tanlashimiz kerak. Bu son, ikki toq sonning ko'paytmasi bo'lishi kerak.
2. Ixtiyoriy bir elliptik egri chiziqlarni tanlab, chiziqning to'rtinchi darajasini N ga nisbatan modulga olib, chiziqning boshlanish nuqtasini aniqlaymiz.
3. Shuningdek, ixtiyoriy bir nuqta P ni elliptic egri chiziqqa qo'yamiz va uning to'rtinchi darajasini N ga nisbatan modulga olib olamiz. Agar P nuqta egri chiziq tomonidan qabul qilinsa, biz boshqa bir nuqta tanlashimiz kerak.
4. Nuqtalar jadvallarini tuzib, a'zo nuqtalarning yig'indisini aniqlab, N ga nisbatan modulga olib olamiz. Agar yig'indi N ni kattalashtirgan bo'lsa, biz boshqa nuqta tanlaymiz.
5. Nuqta va chiziqdagi sonlar bilan jadvallar yordamida oxirgi darajaga kelguncha nuqtalarni hisoblab chiqamiz.
6. Har safar nuqtalar jadvallarini yangilab, oxirgi darajaga kelguncha hisoblamalar amalga oshiriladi. Agar oxirgi darajali nuqtalardan biri nolga teng bo'lsa, faktor topilgan hisoblanadi.
7. Agar faktor topilmagan bo'lsa, biz boshqa boshlang'ich nuqta va chiziqni tanlaymiz va ushbu qadamdan qaytib qayta amalga oshiramiz.

Lenstra faktorizatsiyasi amaliyotda shu tartibda bajariladi. Uning natijasida faktorizatsiya uchun qidirilayotgan faktorlar topiladi. Biroq, ma'lumki, bu faktorizatsiya usullari muammolarga duch kelsa ham, ba'zi sonlar uchun samarali bo'lishi mumkin. Lenstra faktorizatsiyasini amaliyotda dasturlash uchun, katta sonlar bilan ishlashda yuqori darajali arifmetik operatsiyalarni amalga oshirishga imkoniyat beruvchi til, masalan, Python yoki C++ kabi, foydalanish tavsiya etiladi.

Raqamli dala elak usuli. Raqamli dala elak usuli (Number Field Sieve) bir faktorizatsiya algoritmidir, uning asosiy maqsadi katta sonlarni faktorlashtirishdan iboratdir. Raqamli dala deyishining asosiy sababi, faktorizatsiya amalini osonlashtirish va ishni yuqori darajada sodda hisoblash imkoniyatini yaratishdir. Raqamli dala, odatda, sonning ko'pincha elementli algebraik jism sifatida tanlanadi. Bu esa sonning faktorizatsiyasini, kvadrat elak usuli yoki boshqa usullardan foydalanishdan ko'ra yuqori darajali oson bo'lishini ta'minlaydi. Bu algoritmda sonlar raqamli dalalar yordamida ishlab chiqiladi va faktorizatsiya uchun ularga yordam beriladi. Quyidagi qadam ma'lumotlari yordamida Raqamli dala elak usuli faktorizatsiyasi haqida umumiy tushunchani berish mumkin:

1. Kirishda faktorizatsiya uchun faktorlashtiriladigan sonimiz N ni tanlashimiz kerak. Bu son, ikki toq sonning ko'paytmasi bo'lishi kerak.
2. Raqamli dala elak usuli uchun raqamli dalalarni tanlash kerak. Ular sonning raqamli tashkil qilinishiga to'sqinlik qiladigan dalalar bo'ladi.
3. Raqamli dalalar orqali sonimizning modulga nisbatan normasini hisoblaymiz. Norma sonimizning sifatlarini o'z ichiga oladi va dalalar orqali sonni faktorlashtirishda yordam beradi.
4. Raqamli dalalar yordamida sonning kvadratlarini hisoblaymiz va ularni normasiga nisbatan modulga olib olamiz.
5. Raqamli dalalar orqali sonimizning kvadratlaridan olinadigan normaga ega sonlarni topish uchun elon qilingan ma'lumotlardan foydalanamiz.

6. Sonlar orasida katta bo'lgan faktorlarni topish uchun o'zgaruvchiladan foydalanamiz. Ular sonning normasiga nisbatan o'zaro bog'liq bo'lgan sonlar bo'ladi.

7. Sonlar orasida katta bo'lgan faktorlarni topgandan so'ng, ular orqali asosiy sonimizni tub ko'paytuvchiga bo'lish amalga oshiriladi.

Raqamli dala elak usuli faktorizatsiyasi juda murakkab algoritm hisoblanadi va katta sonlar uchun samarali bo'lgan faktorizatsiya usulidir.

2.2-jadval Faktorizatsiyalash murakkabligini bartaraf etuvchi subekspontensial turdagi algoritmlar tahlili

Algoritm nomi	Asosi	Effektiv chegarasi	Hisoblash murakkabligi
Dikson algoritmi	koeffitsientga mo'ljallangan N butun son moduliga kvadratlarning mos kelishini topish	< 73 bit	$L\left(\frac{1}{2}, 2\sqrt{2}\right)$
Davomli kasrlar bo'yicha koeffitsientlarga ajratish usuli	Davomli kasrning yaqinlashuviga asoslangan	< 80 bit	$L\left(\frac{1}{2}, \sqrt{2}\right)$
Kvadrat elak usuli	Fermaning faktorizatsiya usulining umumlashtirish	< 100 bit	$L\left(\frac{1}{2}, 1\right)$
Elliptik egri chiziqlar yordamida Lenstra faktorizatsiyasi	elliptik egri chiziqlar yordamida natural sonni tub ko'paytuvchilarga ajratish	< 83 bit	$L\left(\frac{1}{2}, \sqrt{2}\right)$
Raqamli dala elak usuli	umumiy sonli maydon elaklari tub darajalardan tashqari har qanday raqamni omillashtirishga asoslangan	< 110 bit	$L\left(\frac{1}{3}, \sqrt[3]{\frac{64}{9}}\right)$

Faktorizatsiyalash muammosini yechuvchi algoritmlarning qiyosiy tahlilini amalga oshiruvchi dasturiy ta'minot.

Endilikda biz yuqoridagi algoritmlar yordamida faktorizatsiyalash muammosini yechuvchi algoritmlarni qiyosiy tahlil qiluvchi dasturiy vosita ishlab chiqamiz. Bunda Python dasturlash tili hamda uning grafik foydalanuvchi oynalar bilan ishlovchi Tkinter kutubxonasidan uzviy ravishda foydalanamiz. Quyidagi rasmda dasturiy ta'minotimizning asosiy oynasi keltirib o'tigan (2.2-rasm). U quyidagi qismlardan iborat:

- 1) Faktorizatsiya qilinuvchi sonni kiritish uchun maydon;
- 2) Kerakli faktorizatsiyalash algoritmlarini tanlash imkonini beruvchi tugmachalar. Bu yerda 2 ta eksponensial (Ferma usuli, Pollardning rho- algoritmi) va 2 ta subekspontensial (Dikson usuli, Lenstra algoritmi) turdagi faktorizatsiyalash algoritmlari keltirilgan;
- 3) Hisoblash ishlarini boshlash buyrug'ini beruvchi tugmacha;
- 4) Algoritmlar qaytargan natijalarni ko'rsatuvchi maydon.

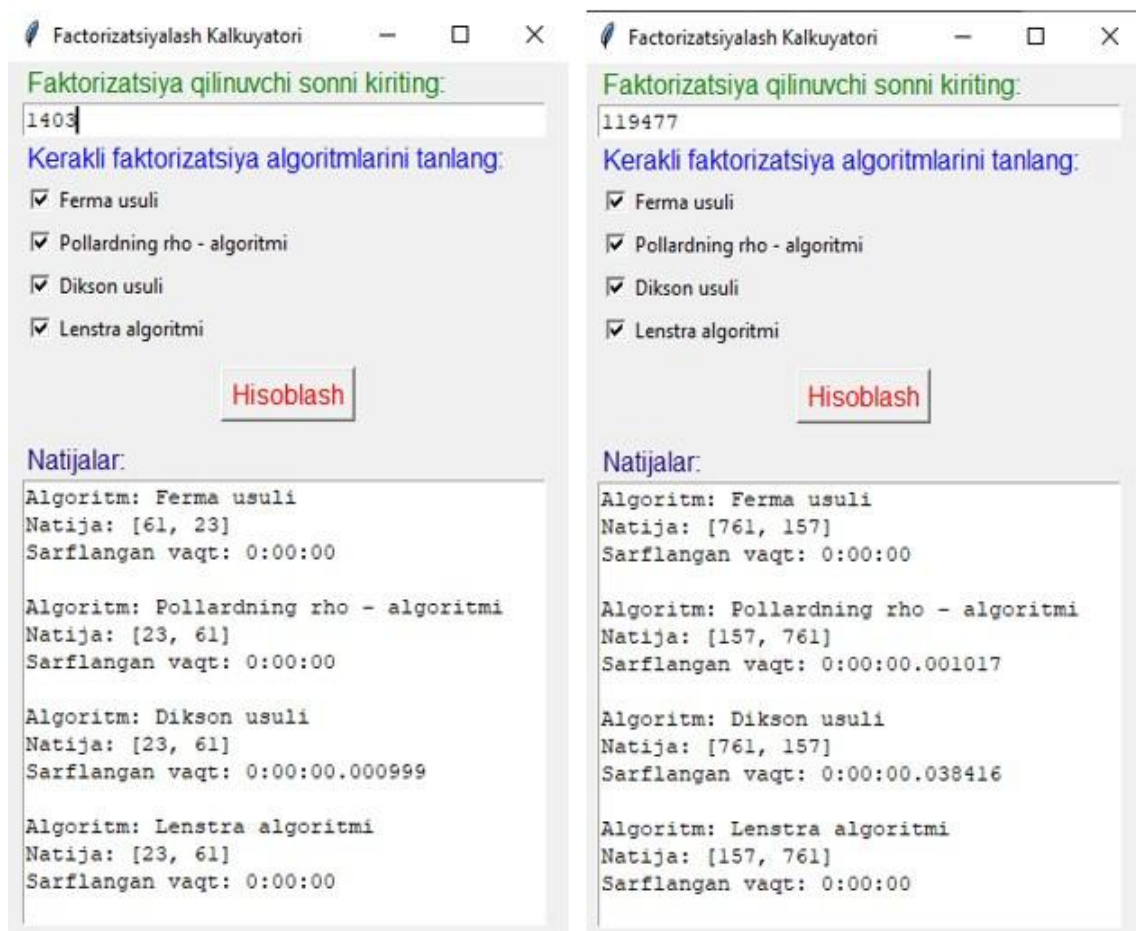
Bu dasturdan foydalanish juda qulay bo'lib, eng avvalo faktorizatsiya qilinuvchi sonni kiritiladi. So'ngra o'zimizga kerakli bo'lgan algoritmlarni tanlaymiz. Bir vaqtning o'zida bir nechta yoki bitta algoritmnini tanlash imkoniyati mavjud. Kerakli algoritmlarni tanlagandan so'ng, "Hisoblash" tugmasini bosamiz. Shundan so'ng bizga natijalar maydonida biz tanlagan algoritm nomi, faktorizatsiya natijasi, sarflangan vaqti chiqadi.



2.2-rasm. Dasturiy ta'minotimizning asosiy oynasi

Bu dasturiy ta'minotni ishlab chiqishda men yuqori ko'rib o'tgan faktorizatsiya agoritmlaridan foydalanib Python dasturlash tilida har birining dasturini tuzib chiqqanman. Asosiy dastur ishga tushishi bilan dastur "Hisoblash" tugmasining bosilishini kutadi. Bu holat yuz berganda faktorizatsiyalanuvchi qiymatni kerakli maydondan o'qib olib, belgilangan algoritmlar uchun mos ravishda ishlab chiqilgan funksiyalarni chaqirib ularga faktorizatsiya qilinuvchi sonni uzatadi. Mos algoritmlar funksiyalari kerakli natijani va sarflangan vaqtni qaytargandan so'ng, natijalar maydoniga kerakli formatda mos natijalar va sarflangan vaqtlar chiqariladi.

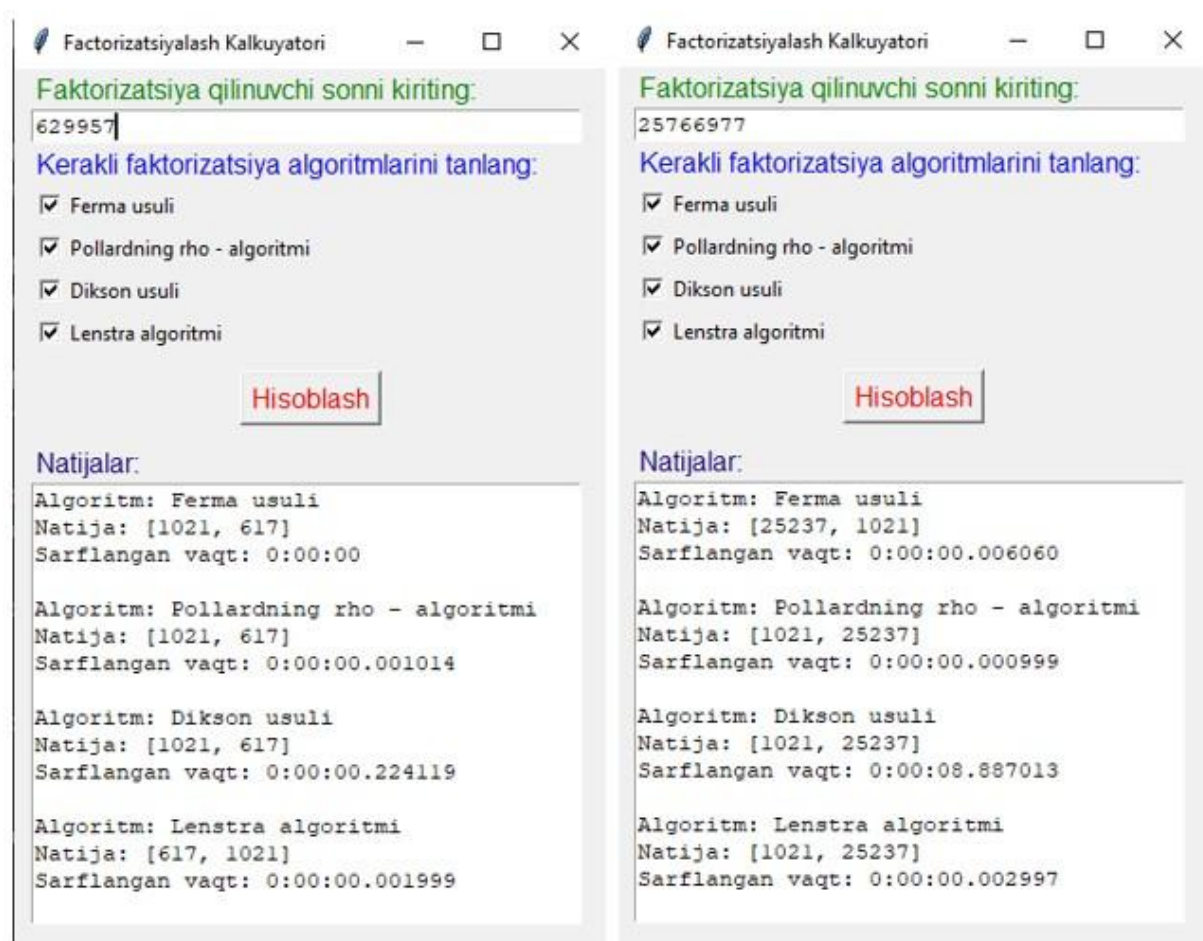
Quyida ushbu dasturiy ta'minot yordamida bir qancha sonlarni faktorizatsiyalashga va natijalar olishga harakat qilamiz:



2.3-rasm. 11 bitli 1403 va 17 bitli 119477 sonlarini dasturiy ta'minotimiz yordamida faktorizatsiya qilingandagi natijalar

Ko'rib turganingizdek, 11 bitli 1403 sonini faktorizatsiya qilganimizda Fema usuli, Pollardning rho – algoritmi va Lenstra algoritmlari deyarli vaqt sarflamasdan ishladi. Dikson algoritmi esa taxminan 1millisekund vaqt sarfladi.

Va yana ko'rib turganingizdek, 17 bitli 119477 sonini faktorizatsiya qilganimizda Fema usuli va Lenstra algoritmlari deyarli vaqt sarflamasdan bajardi. Pollardning rho-algoritmi 1millisekunddan ko'proq, Dikson algoritmi esa taxminan 38 millisekunddan ko'proq vaqt sarfladi.



2.4-rasm. 20 bitli 629957 va 25 bitli 25766977 sonlarini dasturiy ta'minotimiz yordamida faktorizatsiya qilingandagi natijalar.

Ko'rib turganingizdek, 20 bitli 629957 sonini faktorizatsiya qilganimizda Fema usuli deyarli vaqt sarflamasdan ishladi. Pollardning rho – algoritmi 1 millisekunddan ko'proq, Lenstra algoritmi taxminan 2 millisekund va Dikson algoritmi esa 224 millisekunddan ko'proq vaqt sarfladi.

Va yana ko'rib turganingizdek, 25 bitli 25766977 sonini faktorizatsiya qilganimizda Fema usuli 6 millisekunddan ko'proq vaqt sarfladi. Pollardning rho – algoritmi taxminan 1 millisekund, Lenstra algoritmi taxminan 3 millisekund va Dikson algoritmi esa 8.887 sekunddan ko'proq vaqt sarfladi.

Faktorizatsiya qilinayotgan son kattalashgan sari sarflanayotgan vaqt ham ortib boryapti. Buning juda katta sonlarda quyida ko'rishimiz mumkin:

2.3-jadval 30 bitdan katta sonlarda dasturiy ta'minotning natijalari

N ning uzunligi (bit)	N murakkab son	N ning tub bo'luvchilari	Ferma usuli (s)	Pollardning rho - algoritmi (s)	Lenstra usuli (s)
30	873250877	15877*55001	0,003	0,001	0,004
35	25010959333	109961*227453	0,008	0,002	0,002
40	749550288583	434501*1725083	0,202	0,008	0,014

45	30844725508 763	7951477*38791 19	0,271	0,036	0,004
50	89047894798 3561	66172661*1345 6901	8,309	0,040	30,338

Diskret logorifmlash muammosini yechuvchi algoritm turlari

Diskret logorifmlash muammolari, matematika va kriptografiya sohalarida keng qo'llaniladigan bir muammo turidir. Bu muammo biror modul bo'yicha diskret yechimni hisoblashni talab qiladi. Diskret logorifmlash muammosi bir qancha maqsadlarda foydalaniladi, ma'lumotlarni himoyalash, shifrlash va deshifrlash.

Diskret logorifmlashning asosiy maqsadi, ma'lum bir gruppada berilgan sonning qanday darajasi berilgan boshqa songa tengligini aniqlashga qaratilgan. Ya'ni:

$$a^x \equiv b \pmod{p}$$

tenglikda x noma'lumni topishga qaratilgan. Bu yerda p – G guruh tartibi, a – guruh generatori, b – guruh elementi.

Diskret logorifmlash muammosini yechishda, ya'ni x noma'lumni topish uchun bir nechta algoritmlar mavjuddir, ba'zi bir modullar bo'yicha hisoblash amaliy jihatdan imkonsiz deb hisoblanadi, ba'zida esa nisbatan tez yechim topishni ta'minlaydi. Shu sababli, kriptografiyada, bir moduldan tashqari yechim topish mumkin bo'lgan algoritmlardan foydalaniladi, bu esa shaxslarning ma'lumotlarini himoyalashga yordam beradi.

Diskret logorifmlash, bugungi kunda ma'lumotlar himoyalashida katta ahamiyatga ega bo'lib, xususan, kredit kartalari va bank hisob varaqlari kabi shaxsiy ma'lumotlar va shaxsiy identifikatsiyada amalga oshirishda qo'llaniladi. Shuningdek, kriptovalyuta yaratish va uning operatsiyalari ham diskret logorifmlash murakkabligiga asoslangan. Shuningdek, xabarlar zanjirli tizimi (blockchain) ham diskret logorifmlash murakkabligiga asoslangan.

Diskret logorifmlash muammosini yechish uchun bir qancha algoritmlar ma'lum. Biz algoritmlarni ikkita toifaga ajratamiz, **umumiy algoritmlar** va **guruhga xos** algoritmlar. Birinchi toifani biz umumiy algoritmlar deb ataymiz, chunki ular odatda har qanday siklik guruhga nisbatan qo'llaniladi. Umumiy algoritm umumlashtirilgan diskret logorifmlash muammosini (GDLP) hal qiladi. Algoritmlarning ikkinchi toifasi guruhga xos algoritmlardir. Bular guruh elementlaridagi strukturadan foydalanadigan va faqat ma'lum guruhlar oilalarida qo'llaniladigan maxsus algoritmlardir.

Biz ko'rib chiqadigan umumiy algoritmlarga Shank algoritmi kiradi, bu algoritm Baby-Step Giant-Step algoritmi, Pollardning Rho va Pollardning Kangaroo algoritmlari deb ham ataladi. Bu algoritmlar har qanday siklik guruhga, shu jumladan elliptik egri guruhlariga va Z_p^* ning kichik guruhlariga nisbatan qo'llaniladi, bu yerda yaxshiroq usullar qo'llanilmaydi. Biz muhokama qiladigan guruhga xos algoritmlar indekslarni hisoblash algoritmlaridir. Ular Z_p^* guruhlarida qo'llaniladi. Shuning uchun indekslarni hisoblash algoritmlari standart diskret logorifmlash muammosini (DLP) hal qiladi.

Diskret logorifmlash muammosini yechuvchi algoritmlarni **Big O notation** yordamida, nazariy jihatdan ish vaqti murakkabligini o'lcaymiz.

Algoritmni ishga tushirish uchun zarur bo'lgan aniq vaqt, vaqt murakkabligi haqida to'liq tasavvurga ega bo'lish uchun yetarli ma'lumot emas. Ushbu muammoni hal qilish uchun siz Big O dan foydalanishingiz mumkin. Big O ko'pincha turli ilovalarni solishtirish va qaysi biri eng samarali ekanligini aniqlash uchun ishlatiladi, keraksiz tafsilotlarni o'tkazib yuboradi va algoritmnining ishlash vaqtida nima muhimligiga e'tibor beradi.

Turli xil algoritmlarni ishga tushirish uchun zarur bo'lgan soniyalar vaqtiga bir nechta bog'liq bo'lmagan omillar, jumladan protsessor tezligi yoki mavjud xotira ta'sir qilishi mumkin. Boshqa tomondan, Big O apparat diagnostikasi nuqtai nazardan ish vaqtining murakkabligini ifodalash uchun platformani taqdim etadi. Big O bilan siz algoritmingizning ishlash vaqti kirish hajmiga nisbatan qanchalik tez o'sishi nuqtai nazaridan murakkabligini ifodalaysiz.

Agar n algoritmgacha kirish hajmi deb faraz qilsak, Big O n va algoritm yechim topish uchun bajaradigan qadamlar soni o'rtasidagi munosabatni ifodalaydi. Big O bosh harfi "O" dan keyin qavslar ichidagi bu munosabatdan foydalanadi. Masalan, $O(n)$ ularning kiritish hajmiga mutanosib ravishda bir necha bosqichlarni bajaradigan algoritmlarni ifodalaydi.

Big O	Complexity (Murakkablik)	Tavsif
$O(1)$	<i>constant</i> (doimiy)	Ish vaqti kirish hajmidan qat'iy nazar doimiydir. Xesh jadvalidagi elementni topish <i>doimiy vaqt</i> ichida bajarilishi mumkin bo'lgan operatsiyaga misoldir.
$O(n)$	<i>linear</i> (chiziqli)	Ish vaqti kirish hajmiga qarab <i>chiziqli</i> ravishda o'sadi. Ro'yxatning har bir bandidagi shartni tekshiradigan funksiya $O(n)$ algoritmgacha misol bo'la oladi.
$O(n^2)$	<i>quadratic</i> (kvadratik)	Ish vaqti kirish hajmining <i>kvadratik</i> funktsiyasidir. Har bir element ikki marta tekshirilishi kerak bo'lgan ro'yxatdagi takroriy qiymatlarni topishning sodda amalga oshirilishi kvadratik algoritmgacha misoldir.
$O(2^n)$	<i>exponential</i> (ko'rsatkichli)	Ish vaqti kirish hajmi bilan <i>eksponent</i> ravishda o'sadi. Ushbu algoritmlar juda samarasiz deb hisoblanadi.
$O(\log n)$	<i>logarithmic</i> (logorifmik)	Ish vaqti <i>chiziqli</i> ravishda o'sadi, kirish hajmi esa <i>eksponent</i> ravishda o'sadi. Misol uchun, ming elementni qayta ishlash uchun bir soniya kerak bo'lsa, o'n mingni qayta ishlash uchun ikki soniya, yuz mingni qayta ishlash uchun uch soniya va hokazo. Ikkilik qidiruv logorifmik ish vaqti algoritmgacha misoldir.

Diskret logorifmlashning yechimi, bir nechta usullar yordamida amalga oshiriladi, bularga quyidagi usullar keltirsak bo'ladi:

Brute-Force qidiruvi. Biz umumiy algoritmlarni o'rganishni eng oddiy usullardan biri bo'lgan, *brute-force* yoki *to'liq* qidiruvi bilan boshlaymiz. Bu shunchaki moslik topilmaguncha barcha mumkin bo'lgan darajani ($g^0, g^1, g^2, \dots$) sinab ko'rishdir.

Algoritm: *Brute-Force qidiruvi*

Input: G – siklik guruh, g – generator, a – guruh elementi

Output: $g^x = a$ dan x – darajani topish kerak

```
1:  $b = 1$ 
2:  $x = 0$ 
3: while  $a \neq b$  do
4:    $b = b \times g$ 
5:    $x = x + 1$ 
6: end while
7: return  $x$ 
```

Eng yomon holatda, $a = g^{N-1}$ bo'lganida, har bir daraja ya'ni 0 dan $N - 1$ gacha sinovdan o'tkaziladi. Kirishning bit uzunligi bo'yicha, n , bu eng yomon holatda 2^n guruh operatsiyalarini va taqqoslashni talab qiladi. O'rtacha holatda, algoritmning yarmini yoki 2^{n-1} guruh operatsiyalarini qidirgandan so'ng to'g'ri darajani topishni kutish mumkin. Ikkala holatda ham algoritmning ishlash vaqti eksponent bo'lib, $O(2^n)$ bo'lib, tezda n ni oshirish juda qiyin bo'ladi.

Boshqa tomondan, algoritm talablari minimaldir. Har bir qadamda biz faqat x va b ni saqlashimiz kerak va ikkalasini ham n bitda ko'rsatish mumkin. Shuning uchun Brute-Force algoritmining asimptotik space (bo'sh joy talabi) talabi $O(n)$.

Oldindan hisoblangan jadval algoritmi. Brute-Force qidiruv algoritmining o'rtacha ikkita ishi barcha N darajani hisoblashga teng ish hajmini talab qiladi. Buning o'rniga, avval barcha N darajani hisoblab, ularni saqlagan bo'lsa, bu oldindan hisoblangan jadval algoritmi ortidagi g'oya. Biz guruh uchun har bir diskret logorifmdan iborat jadval tuzamiz. Jadvalni hisoblagandan so'ng, individual diskret logorifmni topish uchun faqat bitta jadvaldan qidirish kerak bo'ladi.

Oldindan hisoblangan jadval algoritmining asimptotik ish vaqti $O(2^n)$. Algoritmning afzalligi shu guruhdagi keyingi diskret logorifmlarning tezkor yechimlari; faqat bitta jadvaldan qidirish talab qilinadi.

Algoritm: *Oldindan hisoblangan jadval algoritmi*

Input: G – siklik guruh, g – generator, a – guruh elementi

Output: $g^x = a$ dan x – darajani topish kerak

1: $0 \leq x < N$ uchun $\text{hash}[g^x] = x$ jadvalini tuzish kerak

2: $b = 1$

3: **for** $x = 0$ to $N - 1$ **do**

4: $\text{hash}[b] = x$

5: $b = b \times g$

6: **end for**

7: // jadval qidiruvi bajariladi

8: $x = \text{hash}[a]$

9: **return** x

Bu algoritm kriptologik ahamiyatga ega bo‘lgan n ning qiymatlari uchun bajarib bo‘lmaydi, chunki u time (vaqt) va space (bo‘sh joy) murakkabligida eksponent hisoblanadi. Qidiruv jadvali n o‘lchamdagi N ta qiymatga ega bo‘lib, $O(n2^n)$ ning asimptotik o‘lchamini beradi.

Shank algoritmi. Diskret logorifmlash muammosini brute-force qidiruvi yordamida yechish $O(2^n)$ guruh operatsiyalarini talab qiladi. Oldindan hisoblangan jadval yordamida biz buni doimiy vaqtda bajarishimiz mumkin, lekin $O(n2^n)$ bit saqlashni talab qilamiz. Agar biz ushbu ikki ekstremal o‘rtasida optimal nuqtani topsak nima bo‘ladi? Shank algoritmi bizga bunday muvozanatga erishish yo‘lini beradi. Shank algoritmi *baby-step giant-step* algoritmi sifatida ham tanilgan. Algoritm ikki bosqichdan iborat. Algoritmning birinchi bosqichida biz g^i ning birinchi X darajalarini ketma-ket bosib o‘tamiz: $g^0, g^1, g^2, \dots, g^{X-1}$ kabi. Bular “baby-steps (chaqaloq qadamlari)” deyiladi. Har bir qadamda biz darajani, i ni, g^i bilan indekslangan xesh jadvalida saqlaymiz. X qadamlardan so‘ng bizda diskret logorifmlar jadvali mavjud, lekin faqat siklik guruhning birinchi X elementlari uchun.

Ikkinchi bosqichda biz $a = g^x$ ni oldindan hisoblangan diskret logorifmlar diapazonimizdagi qiymatga aylantirmoqchimiz. g^x dan boshlab, biz logorifmlarni oldindan hisoblab chiqqan siklning boshiga yetgunimizcha, siklik guruh bo‘ylab bir vaqtning o‘zida X elementlarni bosqichma-bosqich o‘tkazamiz. Ushbu “giant-steps (gigant qadamlar)” ni olish uchun biz shunchaki g^X ga ko‘paytiramiz,

$$\begin{aligned} g^x g^X &= g^{x+X}, \\ g^{x+X} g^X &= g^{x+2X} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Oldindan hisoblangan diapazonda qiymatni topganimizda, biz quyidagi tenglamaga ega bo‘lamiz,

$$g^h = g^{x+yX}$$

x quyidagicha hal qilinadi,

$$h = x + yX \mod N$$

$$x = h - yX \mod N$$

Algorithm: *Shank algoritmi*

Input: G – siklik guruh, g – generator, a – guruh elementi,

Oldindan hisoblash uchun darajalar soni: X

Output: $g^x = a$ dan x – darajani topish kerak

```

1:  $0 \leq i < X$  uchun  $\text{hash}[g^i] = i$  xesh jadvalini tuzish kerak
2:  $b = 1$ 
3: for  $i = 0$  to  $X - 1$  do
4:    $\text{hash}[b] = i$ 
5:    $b = b \times g$ 
6: end for
7: // Xeshda bittasini topilguncha ketma-ket darajalarni hisoblash
8:  $b = a$ 
9:  $y = 0$ 
10:  $h = \text{hash}[b]$ 
11: while  $g^x = a$  do
12:    $b = b \times g^X$ 
13:    $y = y + 1$ 
14:    $h = \text{hash}[b]$ 
15: end while
16:  $x = h - yX \mod N$ 
17: return  $x$ 

```

Biz oldindan hisoblangan ketma-ket X darajalar oralig'ida logorifmni topamiz, chunki biz bir vaqtning o'zida aynan X darajaga qadam qo'yamiz.

Endi biz algoritmning ishlash vaqtini ko'rib chiqamiz. Birinchi bosqich X guruhi operatsiyalarini talab qiladi. Ikkinchi bosqichning ishlash muddati oldindan hisoblangan darajalar oralig'iga erishish uchun ulkan qadamlar soniga qarab o'zgaradi. Ko'p qadamlar $X < x < 2X$ bo'lganda, x ni oldindan hisoblangan darajalar oralig'idan tashqariga qo'yganda kerak bo'ladi. Bu eng yomon holatda, ikkinchi bosqich $\left\lceil \frac{N}{X} \right\rceil$ guruh operatsiyalarini oladi (g^h ga ko'paytirish).

Umumiy hisoblash vaqtini minimallashtirish uchun biz X ni tanlashimiz kerak, shunda baby-steps giant-steps soniga teng bo'ladi. $X = \left\lceil \frac{N}{X} \right\rceil$ bo'lganda.

$$\begin{aligned}
 X &= \left\lceil \frac{N}{X} \right\rceil, \\
 X^2 &= N, \\
 X &= \sqrt{N}, \\
 X &= \sqrt{2^n}, \\
 X &= 2^{\frac{n}{2}}.
 \end{aligned}$$

$X = 2^{\frac{n}{2}}$ bo'lsa, algoritmning ikkala bosqichida $2^{\frac{n}{2}}$ guruh amallari qabul qilinadi. Shuning uchun Shank algoritmining ish vaqti murakkabligi $O\left(2^{\frac{n}{2}}\right)$ ga teng.

Ishlash vaqti hali ham eksponent bo'lsa-da, bu brute-force qidiruvga nisbatan sezilarli yaxshilanishdir.

Bo'sh joy talablari brute-force qidiruvi va oldindan hisoblangan jadval algoritmlari o'rtasidagi o'rta zamindir. Shank algoritmidagi jadval n -bit o'lchamdagi X yozuvlarni talab qiladi. Shuning uchun Shank algoritmining bo'sh joy murakkabligi $O\left(n2^{\frac{n}{2}}\right)$ ga teng.

Pohlig-Hellman algoritmi. Bu algoritm N ning asosiy faktorizatsiyasidan, guruh tartibidan foydalanadi. Asosiy tartib guruhlar uchun bu algoritm hech qanday afzallik bermaydi va Shank algoritmiga ekvivalentdir. Bizning tahlilimiz N tartibida faqat kichik asosiy omillarga ega bo'lgan holatga qaratiladi. Aynan shu yerda algoritm eng samarali hisoblanadi.

Pohlig-Hellman algoritmining birinchi pog'onasi guruh tartibi N ni, faktorlari topiladi. Agar N faqat kichik tub sonlarga ega bo'lsa, faktorizatsiyani osongina topish mumkin. $N = \prod_{i=1}^k p_i^{n_i}$

Har bir noyob tub son, p_i uchun biz $x_i \equiv x \bmod p_i^{n_i}$ ni hal qilamiz. Har bir x_i topilgach, ular qoldiqlar haqidagi Xitoy teoremasi yordamida x ni topish uchun birlashtirilishi mumkin, $O(k \log N)$ guruh operatsiyalari va $O(k \log N)$ bo'sh joy talab qilinadi.

Algoritm: Pohlig-Hellman algoritmi

Input: G – siklik guruh, g – generator, a – guruh elementi,
 N – guruh tartibi

Output: $g^x = a$ dan x – darajani topish kerak

```

1:  $N = \prod_{i=1}^k p_i^{n_i}$  ning tub ko'paytuvchilarini topish
2: // Har bir  $p_i^{n_i}$  uchun  $x_i \equiv x \bmod p_i^{n_i}$  ni topish
3: for  $i = 1$  to  $k$  do
4:    $z = a$ 
5:    $h = g^{-1}$ 
6:    $q = (p - 1)/p_i$ 
7:    $g_i = g^q$ 
8:   for  $j = 0$  to  $(n_i - 1)$  do
9:      $w = z^q$ 
10:     $b_j = \log_{g_i} w$  // Shank algoritmi yordamida diskret logarifm yechiladi
11:     $z = zh^{b_j}$ 
12:     $h = h^{p_i}$ 
13:     $q = q/p_i$ 
14:   end for
15:    $x_i = \sum_j b_j p_i^j$ 
16: end for
17: // Qoldiqlar haqidagi xitoy teoremasi yordamida  $x$  topiladi
18: return  $x$ 

```

x_i ni topish uchun har bir koeffitsientni, b_j ni $x_i = \sum_j^{n_i-1} b_j p_i^j$ quyidagi ifodadan topamiz. Pohlig-Hellman algoritmidan $b_i = \log_{g_i} w$, bu yerda $\log$ diskret logarifmdir. Asosiy $g_i = g^{(p-1)/p_i}$, shuning uchun g_i tartibi p_i hisoblanadi. Eng

katta tub bo'luvchisi p_i bo'lgan guruh uchun dominant qadam Shank algoritmidan foydalangan holda p_i tartibli kichik guruhida diskret logorifmni topish bo'ladi.

Kichik p_i uchun diskret logorifmlarni oldindan hisoblangan jadvallar yordamida yechish mumkin. Barcha p_i N ga nisbatan kichik bo'lgan holatda, algoritmnining dominant bosqichi $w = z^n$ ni hisoblash bo'lib, $O(\log N)$ guruh operatsiyalarini talab qiladi. z^n necha marta hisoblash kerak bo'lsa, $\sum_1^k n_i$, bu tub bo'luvchilar kichik bo'lganda $O(\log N)$ bo'ladi. Bu $O(\log N)^2$ yoki $O(n^2)$ ning umumiy ish vaqtini beradi.

Pollardning Rho algoritmi. Bu Pollardning Rho algoritmi Shank algoritmi bilan bir xil tartibda ishlash vaqtiga ega, ammo bu algoritm eng katta saqlangan jadvaldan qochadi. Rho algoritmi *birthday paradox* (tug'ilgan kun paradoksi) dan foydalanadi; Ya'ni tasodifiy tanlangan 23 kishidan 2 nafari tug'ilgan kunini baham ko'rish ehtimoli 50% dan yuqori. Umuman olganda, elementlarni N ta elementdan tasodifiy tanlaganda, to'qnashuv kutilgan $\sqrt{\pi N/2}$ tanlanganidan keyin topiladi.

a elementining g asosiga diskret logorifmini topish uchun Pollardning Rho algoritmi a va g darajalarining hosilasi sifatida ifodalanishi mumkin bo'lgan s^i guruh elementlarining tasodifiy ketma-ketligidan o'tadi.

$$s_i = a^{a_i} g^{g_i} = g^{xa_i} g^{g_i} = g^{xa_i + g_i}$$

Algoritm ketma-ketlikda sikldan qidiradi, ikkita element s_u , s_v , $u \neq v$ shuning uchun $s_u = s_v$. Bu tenglamani x uchun yechish a ning diskret logorifmini beradi.

$$\begin{aligned} s_u &= s_v \\ g^{xa_u + g_u} &= g^{xa_v + g_v} \\ xa_u + g_u &\equiv xa_v + g_v \mod N \\ xa_u - xa_v &\equiv g_v - g_u \mod N \\ x(a_u - a_v) &\equiv g_v - g_u \mod N \\ x &\equiv (a_u - a_v)^{-1} g_v - g_u \mod N \end{aligned}$$

Ishlash vaqti ketma-ketlikda sikldan qidirish bilan ustunlik qiladi. Sikldan topish har bir elementni ketma-ketlikda bitta takrorlanmaguncha saqlash orqali amalga oshirilishi mumkin. Bu katta hajmdagi saqlashni talab qiladi, uning o'rniga Pollard *Floyd siklini aniqlash* algoritmidan foydalanadi, bu esa atigi ikkita ketma-ketlik elementini saqlashni talab qiladi s_i va s_{2i} . s_{2i} elementi har doim ketma-ketlikda s_i dan ikki barobar uzoqroq bo'ladi va $s_i = s_{2i}$ bo'lganda sikl topiladi. Ikkala ketma-ketlikni oldinga siljitish uchun algoritmnining bir bosqichi ketma-ketlikning jami uchta bosqichini talab qiladi. Pollardning hisob-kitoblari i uchun $1.08 \sqrt{N}$ o'rtacha qiymatini berdi. Asimptotik ish vaqti $O(2^{\frac{n}{2}})$ guruh operatsiyalari va faqat $O(n)$ ni saqlashdir.

Pollardning Rho algoritmi Oorschot va Wiener tufayli Pollardning Rho metodining takomillashtirilgan versiyasidir. Ularning usuli siklni ketma-ketliklar bo'ylab faqat bir marta bosib o'tish orqali topadi, bu 3 marta tezlashtirishni ta'minlaydi. Bu mumkin, chunki ular alohida nuqtalarni saqlaydi. Ajratilgan nuqtalar – oson ajratiladigan xususiyatga ega bo'lgan guruh elementlari, masalan, ularning ikkilik tasvirining birinchi c bitlari nolga teng bo'lgan elementlar. Biz

tasodifiy joydan boshlaymiz va aniq nuqtaga yetgunimizcha ketma-ketlikni bosib o'tamiz. Biz ajratilgan nuqtani saqlaymiz va yangi tasodifiy joydan qayta boshlaymiz. Biz allaqachon saqlagan muhim nuqtaga erishganimizda, biz siklni topdik va logorifmni hal qila olamiz.

Algoritm: Pollardning Rho algoritmi

Input: G – siklik guruh, g – generator, a – guruh elementi, g ning tartibi: N

Output: $g^x = a$ dan x – darajani topish kerak

```

1: // Tasodifiy ketma-ketliklar algoritmi bilan aniqlangan
    $S = s_0, s_1, \dots$  tasodifiy ketma-ketlikda sikldan qidirish
2: success = false
3:  $D = G$  dan ajratilgan nuqtalar to'plami
4: while (success = false) do
5:    $i = 0$ 
6:    $a_i = (0 \text{ va } p - 1 \text{ oralig'ida tasodifiy tanlangan ko'rsatkich})$ 
7:    $g_i = (0 \text{ va } p - 1 \text{ oralig'ida tasodifiy tanlangan ko'rsatkich})$ 
8:    $s_i = g^{g_i} a^{a_i}$ 
9:   repeat
10:     $i = i + 1$ 
11:    Tasodifiy ketma-ketliklar algoritmini qo'llab  $s_i, a_i, g_i$  ni hisoblang
12:  until ( $s_i \in D$ )
13:  if  $((a_j, g_j) = \text{hash}(s_i))$  then
14:    success = false
15:  else
16:     $\text{hash}(s_i) = (a_j, g_j)$ 
17:  end if
18: end while
19:  $m = a_i - a_j \bmod N$     20:  $x = m^{-1}(g_j - g_i) \bmod N$     21: return  $x$ 

```

Algoritm: Pollardning Rho – Tasodifiy ketma-ketlik algoritmi

Input: element: s_i , ko'rsatkichlar: a_i, g_i quyidagi ifodadan $s_i = a^{a_i} g^{g_i}$

Output: element: s_{i+1} , ko'rsatkichlar: a_{i+1}, g_{i+1} quyidagi ifodadan $s_{i+1} = a^{a_{i+1}} g^{g_{i+1}}$

```
1: // G ning uchta teng o'lchamdagi  $S_1, S_2, S_3$  kichik to'plamlarga bo'linishi berilgan
2: if  $s_i \in S_1$  then
3:    $s_{i+1} = as_i$ 
4:    $a_{i+1} = a_i + 1 \mod N$ 
5:    $g_{i+1} = g_i$ 
6: else if  $s_i \in S_2$  then
7:    $s_{i+1} = s_i^2$ 
8:    $a_{i+1} = 2a_i \mod N$ 
9:    $g_{i+1} = 2g_i \mod N$ 
10: else if  $s_i \in S_3$  then
11:    $s_{i+1} = gs_i$ 
12:    $a_{i+1} = a_i$ 
13:    $g_{i+1} = g_i + 1 \mod N$ 
14: end if
15: return  $s_{i+1}, a_{i+1}, g_{i+1}$ 
```

Rho algoritmining ushbu versiyasining ishlash vaqti to'qnashuvni topish uchun vaqt yig'indisi, T_c , shuningdek, ajratilgan nuqtaga yetib borish vaqti, T_d . Agar ketma-ketlikni tasodifiy xaritalash deb faraz qilsak, u holda to'qnashuvning kutilgan vaqti $T_c = \sqrt{\pi N/2}$ bo'ladi. Belgilangan nuqtaga erishish vaqti ajratilgan nuqtalarning chastotasiga bog'liq. Ba'zi doimiy $c \gg 1$ uchun guruhda $c\sqrt{N}$ farqlangan nuqtalar mavjudligini hisobga olsak, har bir $\frac{N}{c\sqrt{N}} = \frac{\sqrt{N}}{c}$ elementdan biri ajratilgan nuqta hisoblanadi. Ketma-ketlik kutilgan $T_c = \frac{\sqrt{N}}{c}$ qadamlardan keyin ajralib turadigan nuqtaga yetadi. Rho algoritmining umumiy kutilgan ishlash vaqti

$$T_c + T_d = \sqrt{\frac{\pi N}{2}} + \frac{\sqrt{N}}{c} = \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{c} \right) \sqrt{N} \approx \sqrt{\frac{\pi N}{2}}.$$

Bit uzunligi n bo'yicha asimptotik ish vaqti $O\left(2^{\frac{n}{2}}\right)$ ga teng.

Index calculus algoritmi. Bu algoritm, $O(\exp((\sqrt{\log p}) * \log \log p))$ vaqtni talab qiladi. Bu algoritm, qaralayotgan modulni faktorlashtirishga asoslangan, shuning uchun ham, jarayon ancha uzun va qiyin.

Number Field Sieve algoritmi. Bu algoritm, $O(\exp((\sqrt{\log p / \log \log p}) * \log \log p))$ vaqtni talab qiladi. Bu algoritmning shaxsiy qurilishi, yomon foydalanuvchilarga o'z kalitlarini yaratish uchun yaxshi xizmat qiladi, chunki katta vaqt talab qiladi.

Adleman-Pomerance-Rumely algorithm. Bu algoritm, 200 bitdan kichik sonlarda muammoni hal qilish uchun yaxshi natija olish mumkin, ammo 200 bitdan katta sonlarda yaxshi samara bermaydi.

Yuqorida sanab o'tilgan algoritmlar ichida brute force algoritmidan tashqari hech birida, berilgan har qanday diskret logorifmlash muammosining aniq bir yechimini topish amaliy jihatdan mumkin emas. Chunki, har bir taklif qilingan algoritm uchun qo'yilgan talablar mavjud, masalan qaysidir algoritm faqatgina kichikroq modullar uchun samarali hisoblansa, ayrimlari qaralayotgan modullarni faktorlash bilan bog'liq shartlar kiritilgan.

Amaliy bajarish uchun vazifalar

1. Faktorlash muammosini yechishning eksponensial algoritmlarini amalga oshirish
2. Faktorlash muammosini yechishning sub-eksponensial algoritmlarini amalga oshirish
3. Chekli maydonda diskret logorifmlash masalasini yechish algoritmlarini amalga oshirish

Adabiyot va Internet saytlar:

4. Шеннон К. Теория и связи в секретных системах. Работы по теории информации и кибернетике. – М.: Иностранная лит. 1963. – 243 б.
5. Авдошин С.М., Савельева А.А. «Криптоанализ: вчера, сегодня, завтра», Государственный университет – Высшая Школа Экономики. Москва – 2007.
6. Авдошин С.М., Савельева А.А. «Криптоанализ: современное состояние и перспективы развития», Государственный университет – Высшая Школа Экономики.

5-amaliy ish. Xesh funksiyalarning kriptotahlili, Pseudotasodifiy va tasodifiy sonlar generatorlarining tahlili. Tug'ilgan kun muammosi, MD4 va MD5 algoritmlarining kriptotahlili. NIST va DIEHARD statistik testlar to'plami. (2 soat)

***Amaliy ishning maqsadi** – Xesh funksiyalarning kriptotahlili, Pseudotasodifiy va tasodifiy sonlar generatorlarining tahlili. Tug'ilgan kun muammosi, MD4 va MD5 algoritmlarining kriptotahlili, NIST va DIEHARD statistik testlar to'plami bo'yicha bilim va ko'nikmalarga ega bo'lish.*

Nazariy qism

MD4 algoritmiga kolliziya hujumi

MD4 algoritmiga kolliziya hujumini 2^{-2} dan 2^{-6} gacha imkoniyatda muvaffaqiyatli amalga oshirish imkoniyati mavjud. Bunda hisoblash murakkabligi 2^8 dan past. Hujum uch qismdan iborat:

1. M va M' xabarlar uchun kolliziya hosil qiladigan differensial topiladi;
2. Kolliziya differensialini saqlab turishni ta'minlaydigan yetarli

shartlar to'plami ishlab chiqiladi;

3. Har qanday tasodifiy M xabari uchun yuqoridagi shartlar bajarilguncha M ga o'zgartirish kiritib boriladi.

MD4 algoritmi uchun kolliziya differensial

MD4 algoritmi uchun kolliziya differensial quyidagicha tanlanadi:

$$\Delta H_0 = 0 \left(\xrightarrow{(M, M')} \right) \Delta H = 0$$

Shu kabi

$$\Delta M = M' - M = (\Delta m_0, \Delta m_1, \dots, \Delta m_{15})$$

$$\Delta m_1 = 2^{31}, \Delta m_2 = 2^{31} - 2^{28}, \Delta m_{12} = -2^{16}$$

$$\Delta m_i = 0, 0 \leq i \leq 15, i \neq 1, 2, 12.$$

Kolliziya differensialidagi barcha xususiyatlarni 6.4-jadvalda topish mumkin. Birinchi ustun qadamni bildiradi, ikkinchi ustun M uchun har bir qadamdagi zanjirli o'zgaruvchisi, uchinchi - har bir qadamda M uchun xabar so'zi, to'rtinchisi – siljish sikli, beshinchi va oltinchi ustunlar - mos ravishda M va M' ma'lumotlari differensial, yettinchi esa M' uchun zanjirli o'zgaruvchidir. Ayniqsa, beshinchi va oltinchi ustunlardagi bo'sh elementlar nol farqlarni bildiradi va jadvalda ko'rsatilmagan qadamlar xabar so'zlari va zanjirli o'zgaruvchilar uchun nolga teng differensialga ega.

Ko'rinib turibdiki, kolliziya differensiallari mos ravishda 2-25 qadam va 36-41 bosqichli ikkita ichki moslikdan iborat.

Barcha xususiyatlarni ushlab turishni ta'minlaydigan yetarli shartlar 6.5-jadvalda keltirilgan mantiqiy funktsiyalarning xususiyatlari bilan osongina tekshirilishi mumkin. Bu shuni anglatadiki, agar M 6.5-jadvaldagi barcha shartlarni qanoatlantirsa, M va M' ma'lumotlarning kolliziya qiymatlari topilgan bo'ladi.

Quyida 6.4-jadvalning 9-bosqichidagi yetarlilik shartlarining natijasi keltirilgan. 9-bosqichdagi differensial xarakteristika:

$$(b_2[-13, -14, 15], c_2[19, 20, -21], d_2[14], a_2)$$

$$\rightarrow (a_3[17], b_2[-13, -14, 15], c_2[19, 20, -21, 22], d_2[14])$$

- 1-taklifga binoan, $c_{2,13} = d_{2,13}$ va $c_{2,15} = d_{2,15}$ shartlar b_2 dagi 13 va 15-bitlardagi o'zgarishlar hech qanday o'zgarishga olib kelmasligini ta'minlaydi.
2. 1-taklifga binoan, $b_{2,19} = 0, b_{2,20} = 0, b_{2,21} = 0$ va $b_{2,22} = 0$ shartlar 19-chi, 20-bandlardagi o'zgarishlarni ta'minlaydi. c_2 ning , 19-, 21- va 22-bitlari a_3 ning o'zgarishiga olib kelmaydi.

6.4- jadval

MD4 algoritmi uchun kolliziya differensialidagi xarakteristikalar

Qadam	M uchun zanjirli qiymat	$W_{j,i}$	Siljish	Δm_i	i -bosqichdagi differensial	M' uchun i -chi chiqish
1	a_1	m_0	3			a_1
2	d_1	m_1	7	2^{31}	2^6	$d_1[7]$
3	c_1	m_2	11	$-2^{28}+2^{31}$	-2^7+2^{10}	$c_1[-8,11]$
4	b_1	m_3	19		2^{25}	$b_1[26]$
5	a_2	m_4	3			a_2
6	d_2	m_5	7		2^{13}	$d_2 [14]$
7	c_2	m_6	11		$-2^{18}+2^{21}$	$c_2[19,20-21,22]$
8	b_2	m_7	19		2^{12}	$b_2[-13,-14,15]$
9	a_3	m_8	3		2^{16}	$a_3 [17]$
10	d_3	m_9	7		$2^{19}+2^{20}-2^{25}$	$d_3[20,-21,-22,23-26]$
11	c_3	m_{10}	11		-2^{29}	$c_3[-30]$
12	b_3	m_{11}	19		2^{31}	$b_3[32]$
13	a_4	m_{12}	3	-2^{16}	$2^{22}+2^{25}$	$a_4[23,26]$
14	d_4	m_{13}	7		$-2^{26}+2^{28}$	$d_4[-27,-29,30]$
15	c_4	m_{14}	11			c_4
16	b_4	m_{15}	19		2^{18}	$b_{14}[19]$
17	a_5	m_0	3		$2^{25}-2^{28}-2^{31}$	$a_5[-26,27,-29,-32]$
18	d_5	m_4	5			d_5
19	c_5	m_8	9			c_5

Qadam	M uchun zanjirli qiymat	$W_{j,i}$	Siljish	Δm_i	i -bosqichdagi differensial	M' uchun i -chi chiqish
20	b_5	m_{12}	13	-2^{16}	$-2^{29}+2^{31}$	$b_5[-30,32]$
21	a_6	m_1	3	2^{31}	$2^{28}-2^{31}$	$a_6[-29,30,-32]$
22	d_6	m_5	5			d_6
23	c_6	m_9	9			c_6
24	b_6	m_{13}	13			b_6
25	a_7	m_2	3	$-2^{28}+2^{31}$		a_7
...	...					
36	b_9	m_{12}	15	-2^{16}	2^{31}	$b_9[-32]$
37	a_{10}	m_2	3	$-2^{28}+2^{31}$	2^{31}	$a_{10}[-32]$
38	d_{10}	m_{10}	9			d_{10}
39	c_{10}	m_6	11			c_{10}
40	b_{10}	m_{14}	15			b_{10}
41	a_{11}	m_1	3	2^{31}		a_{11}

3. f funksiyaning xossasidan $b_{2,14} = 1$, $d_{2,14} = 0$ va $c_{2,14}=0$ shartlar $f(b_{2,14}, d_{2,14}, c_{2,14}) = 0$ ni hosil qiladi. va $f(\neg b_{2,14}, c_{2,14}, \neg d_{2,14}) = 1$. Demak, $\Delta a_3 = 2^{16}$.

4. $a_{3,17} = 0$ sharti $a'_3 = a_3$ bo'lishini ta'minlaydi.

Shunday qilib, yuqoridagi 10 ta shart 9-bosqichdagi differensial xarakteristikalar uchun yetarli shartlar to'plamidan iborat bo'ladi va MD4 algoritmi uchun kolliziya hujumini ifodalaydi.

6.5-jadval

MD4 algoritmida kolliziya uchun yetarlilik shartlar to'plami

a_1	$a_{1,7} = b_{0,7}$
d_1	$d_{1,7} = 0, d_{1,8} = a_{1,8} = 1, c_{1,11} = a_{1,11}$
c_1	$c_{1,7} = 1, c_{1,8} = 1, a_{1,8} = 1, c_{1,11} = 0, c_{1,26} = d_{1,26}$
b_1	$b_{1,7} = 1, b_{1,8} = 0, b_{1,11} = 0, b_{1,26} = 0$
a_2	$a_{2,8} = 1, a_{2,11} = 1, a_{2,26} = 0, a_{2,14} = b_{1,14}$
d_2	$d_{2,14} = 0, d_{2,19} = a_{2,19}, d_{2,20} = a_{2,20}, d_{2,22} = a_{2,21}, d_{2,22} = a_{2,22}, d_{2,22}$

	$= 1$
c_2	$c_{2,13} = d_{2,13}, c_{2,13} = 0, c_{2,15} = d_{2,15}, c_{2,19} = 0, c_{2,20} = 0, c_{2,21} = 1, c_{2,22} = 0$
b_2	$b_{2,13} = 0, b_{2,14} = 1, b_{2,15} = 0, b_{2,17}, c_{2,17}, b_{2,19} = 0, b_{2,20} = 0, b_{2,21} = 0, b_{2,22} = 0,$
a_3	$a_{3,13} = 1, a_{3,14} = 1, a_{3,15} = 1, a_{3,17} = 0, a_{3,19} = 0, a_{3,20} = 0, b_{3,20} = 0, a_{3,21} = 0, a_{3,23} = b_{2,23}, a_{3,22} = 1, a_{3,26} = b_{2,26}$
d_3	$d_{3,13} = 1, d_{3,14} = 1, d_{3,15} = 1, d_{3,17} = 0, d_{3,20} = 0, d_{3,21} = 1, d_{3,22} = 1, d_{3,23} = 0, d_{3,26} = 1, d_{3,26} = 1, d_{3,30} = a_{3,30}$
c_3	$c_{3,17} = 1, c_{3,20} = 0, c_{3,21} = 0, c_{3,22} = 0, c_{3,23} = 0, c_{3,26} = 0, c_{3,30} = 1, c_{3,32}, c_{3,32} = d_{3,32}$
b_3	$b_{3,20} = 0, b_{3,21} = 1, b_{3,22} = 1, b_{3,23} = c_{3,23}, b_{3,26} = 1, b_{3,30} = 0, b_{3,32} = 0$
a_4	$a_{4,23} = 0, a_{4,26} = 0, a_{4,27} = b_{3,27}, a_{4,29} = b_{3,29}, a_{4,30} = 1, a_{4,32} = 0,$
d_4	$d_{4,23} = 0, d_{4,26} = 0, d_{4,27} = 1, d_{4,29} = 1, d_{4,30} = 0, d_{4,32} = 1,$
c_4	$c_{4,19} = d_{4,19}, c_{4,23} = 1, c_{4,26} = 1, c_{4,27} = 0, c_{4,29} = 0, c_{4,30} = 0,$
b_4	$b_{4,19} = 0, b_{4,26} = c_{4,26} = 1, b_{4,27} = 1, b_{4,29} = 1, b_{4,30} = 0,$
a_5	$a_{5,19} = c_{4,19}, a_{5,26} = 1, a_{5,27} = 1, a_{5,29} = 1, a_{5,32} = 1,$
d_5	$d_{5,19} = a_{5,19}, d_{5,26} = b_{4,26}, d_{5,27} = b_{4,27}, d_{5,29} = b_{4,29}, d_{5,32} = b_{4,32},$
c_5	$c_{5,26} = d_{5,26}, c_{5,27} = d_{5,27}, c_{5,29} = d_{5,29}, c_{5,30} = d_{5,30}, c_{5,32} = d_{5,32},$
b_5	$b_{5,29} = c_{5,29}, b_{5,30} = 1, b_{5,32} = 0,$
a_6	$a_{6,29} = 1, a_{6,32} = 1,$
d_6	$d_{6,29} = b_{5,29},$
c_6	$c_{6,29} = d_{6,29}, c_{6,30} = d_{6,30} + 1, c_{6,32} = d_{6,22} + 1,$
b_9	$b_{9,32} = 1$
a_{10}	$a_{10,32} = 1$

Axborot xavfsizligida tasodifiy sonlar generatoridan hosil bo'lgan ketma-ketliklarni tasodifiylik darajasini tekshirish uchun mos aniqlash usuli mavjud bo'lishi zarur. Hozirgi kunda tadqiqotchilar tomonidan qurilmaga yoki dasturiy ta'minotga asoslangan yangi tasodifiy sonlar generatorlari ishlab chiqilmoqda. Biroq, ulardan hosil bo'lgan tasodifiy qiymatlarga baho bermasdan turib, ularni amalga foydalanish tavsiya etilmaydi.

Tasodifiy sonlar generatoridan hosil bo'lgan qiymatlarni statistik testlash usullari asosida testlash amalga keng foydalanilib, odatda

quyidagi turdagi statistik testlar to‘plamidan keng qo‘llaniladi (5.1-jadval).

5.1-jadval

Statistik testlar to‘plami va ularning xususiyatlari

№	Manba/ muallif	Testlar to‘plami nomi	To‘plam-dagi testlar soni
7.	Donald Knuth/ Stanford University	The Art Of Computer Programming Vol. 2 Seminumerical Algorithms	11 ta
8.	George Marsaglia/Florida State University	DIEHARD	15 ta
9.	Helen Gustafson, et. al./ Queensland University of Technology	Crypt-XS	6 ta
10	Alfred Menezes, et. al./CRC Press, Inc.	Handbook of Applied Cryptography	
11	Pierre L’Ecuyer, Richard Simard/ Université de Montréal	TestU01’s test batteries	SmallCrush (10) Crush (96 ta) BigCrush (106 ta)
12	Andrew Rukhin, et. al./NIST ITL	NIST Statistical Test Suite	15 ta

Donald Knut tomonidan yozilgan “The Art of Computer Programming, Seminumerical Algorithms, Volume 2” nomli kitobda, muallif qator emperik testlarni keltirib o‘tgan. Jumladan, *chastota* (frequency), *ketma-ketlik* (serial), *oraliq* (gap), *poker* (poker), *kupon to‘plovchi* (coupon collector's), *o‘rin almashtirish* (permutation), *yugirish* (run), *t ning maksimumi* (maximum-of-t), *kolliziya* (collision), *tug‘ulgan kun oraliq‘i* (birthday spacings) va *ketma-ketlik korrelyatsiyasi* (serial correlation) testlar.

DIAHARD testlar to‘plami Djorj Marsaliya tomonidan ishlab chiqilgan bo‘lib, 15 ta statistik testlardan: *tug‘ulgan kun oraliq‘i* (birthday spacings), *bog‘liqlikni almashtirish* (overlapping permutations), *matrisa*

rangini o'lchash (ranks of 31x31, 32x32, 6x8 matrices), “20-bitli so‘zda maymun” testi (monkey tests on 20-bit Words, monkey tests OPSO), OQSO, DNA, *ketma-ketlikdagi birlar sonini aniqlash* (count the 1's in a stream of bytes), *maxsus baytdagi birlar sonini aniqlash* (count the 1's in specific bytes), “avtostoyanka” (parking lot), *minimal distansiya* (minimum distance), *tasodifiy sferalar* (random spheres), *siqish* (squeeze), *bog‘liqliklar yig‘indisi* (overlapping sums), *yugurish* (runs) va *krap*s (craps) iborat.

Crypt-XS statistik testlar to‘plami Avstraliyadagi Kvinslend Texnologiyalar universitetining Axborot xavfsizligi tadqiqotlar markazidagi tadqiqotchilar tomonidan ishlab chiqilgan va u *chastota* (frequency), *binar hosila* (binary derivative), *nuqtalarni almashtirish* (change point), *yugirishlar* (runs), *ketma-ketlik murakkabligi* (sequence complexity) va *chiziqli murakkablik* (linear complexity) testlaridan iborat bo‘lgan.

NIST statistik testlar to‘plami (NIST Statistical Test Suite) NIST institutining Kompyuter xavfsizligi va Statistik injineriya bo‘limlari tomonidan ishlab chiqilgan. Ushbu to‘plam o‘zida 15 ta statistik testlarni mujassamlashtirgan:

16. Chastota (Frequency) testi;
17. Bloklar uchun chastota (Frequency Test within a Block) testi;
18. Yugurishlar (Runs) testi;
19. Blok ichidagi eng uzun yugurish (Longest Run of Ones in a Block) testi;
20. Birlik matrisa rangini hisoblash (Binary Matrix Rank) testi;
21. Diskret Furje almashtirishlari (Discrete Fourier Transform) testi;
22. Davriy bo‘lmagan qismlar (Non-overlapping Template Matching) testi;
23. Davriy bo‘lgan qismlar (Overlapping Template Matching) testi;
24. Maurerning «Universal statistik» (Maurer’s «Universal Statistical») testi;
25. Chiziqli murakkablik (Linear Complexity) testi;
26. Davomiylik (Serial) testi;
27. Taxminiy entropiya (Approximate Entropy) testi;
28. Ortib boruvchi yig‘indi (Cumulative Sums) testi;
29. Tasodifiy tashriflar (Random Excursions) testi;
30. Tasodifiy tashriflar varianti (Random Excursions Variant) testi.

Quyida NIST statistik testlar to‘plami bilan yaqindan tanishib chiqiladi. Mazkur testlar to‘plami yordamida yagona tasodifiy qiymatni

tasodifiylikka tekshirish ketma-ketligi 5.2-jadvalda aks ettirilgan. Ushbu ketma-ketlik umumiy testlash senariysini aks ettirgan bo'lib, NIST statistik testlar to'plamidan foydalanib testlashda muhim ahamiyatga ega.

5.2-jadval

Yagona binar ketma-ketlikni baholash muolajasi

Qadam va qadam jarayon	Izoh
Sizning nollik gipoteza holatingiz	Binar ketma-ketlikni tasodifiy deb faraz qiling
Statistik testlar ketma-ketligini amalga oshirish	Testlash bitlar kesimida amalga oshiriladi
P – qiymatni hisoblash	$P \in [0,1]$ ga tegishli
P – qiymatni α ga solishtirish	$\alpha \in (0.001,0.01]$ kabi kelgilang. Agar $P \geq \alpha$ bo'lsa, testdan o'tgan, aks holda o'ta olmagan

Mazkur testlash to'plamida kiritilgan har bir test usuli aynan bir maqsadga qaratilgan bo'lib, aynan bir holat bo'yicha baho beradi. Quyidagi 5.3-jadvalda har bir testning maqsadi va baho beruvchi asosiy zaiflik tomoni aks ettirilgan.

5.3-jadval

NIST statistik testlar to'plamining xususiyatlari

№	Statistik test	Zaiflikni aniqlash
15.	Frequency	Bir yoki nolni juda ko'pligini
16.	Cumulative Sums	Ketma-ketlik boshlanishida bir yoki nolni juda ko'pligini
17.	Longest Runs Of Ones	Birlarni uzoq vaqtli davomiyligi taqsimotining og'ishini
18.	Runs	Bitlar ketma-ketligida tezkor (sekin) birdan nolga va aksincha o'tishlarni ko'rsatuvchi yugirishlarning umumiy katta (kichik) sonini
19.	Rank	Mos tasodifiy ketma-ketlikdan qism takroriyligi natijasidagi rang taqsimotini og'ishini
20.	Spectral	Bitlar ketma-ketligidagi takrorlanish xususiyatini
21.	Non-overlapping Template Matchings	Kesishmagan shablonlarni qanchalik ko'p paydo bo'lishini
22.	Overlapping	Birlarning m bitli yugirishlarni paydo

№	Statistik test	Zaiflikni aniqlash
	Template Matchings	bo'lishini
23.	Universal Statistical	Siqilishni (biror qoniniyatga asoslanishini)
24.	Random Excursions	Tasodifiy yurishda yagona holatga o'tishlar sonini taqsimotining og'ishini
25.	Random Excursion Variant	Yagona holatga turli holatlardan o'tishlarning umumiy soni taqsimotining og'ishini
26.	Approximate Entropy	m bit uzunlikdagi so'zlar taqsimotining bir xil emasligini.
27.	Serial	m bit uzunlikdagi so'zlar taqsimotining bir xil emasligini. Approximate Entropyga o'xshash
28.	Linear Complexity	Cheklangan uzunlikdagi (qism) qator uchun chiziqli murakkablikning taqsimotidan og'ishini

Har bir testni amalga oshirish uchun unga talab etilgan uzunlikdagi tasodifiy qiymat kiritilishi talab etiladi. NIST tomonidan keltirilgan har bir test uchun kiritiladigan tasodifiy qiymatlarga minimal uzunlik talabi qo'yilgan (5.4-jadval).

5.4-jadval

NIST statistik testlariga kirish qiymatlariga uzunlik talabi

№	Statistik test	Minimal kirish qiymat uzunligi (bit)
16.	Chastota (Frequency) testi	100
17.	Bloklar uchun chastota (Frequency Test within a Block) testi	100
18.	Yugurishlar (Runs) testi	100
19.	Blok ichidagi eng uzun yugurish (Longest Run of Ones in a Block) testi	128
20.	Birlik matrisa rangini hisoblash (Binary Matrix Rank) testi	38912
21.	Diskret Furiye almashtirishlari (Discrete Fourier Transform) testi	1000
22.	Davriy bo'lmagan qismlar (Non-overlapping Template Matching) testi	10^6
23.	Davriy bo'lgan qismlar (Overlapping Template Matching) testi	10^6

№	Statistik test	Minimal kirish qiymat uzunligi (bit)
24.	Maurerning «Universal statistik» (Maurer's «Universal Statistical») testi	387840
25.	Chiziqli murakkablik (Linear Complexity) testi	10^6
26.	Davomiylik (Serial) testi	128
27.	Taxminiy entropiya (Approximate Entropy) testi	100
28.	Ortib boruvchi yig'indi (Cumulative Sums) testi	100
29.	Tasodifiy tashriflar (Random Excursions) testi	10^6
30.	Tasodifiy tashriflar varianti (Random Excursions Variant) testi	10^6

Tasodifiy ketma-ketliklar entropiyasini o'lchash usullari. Generasiya qilingan psevdotasodifiy ketma-ketliklarni statistik testlar orqali tekshirish bilan har doim ham ularga aniq baho berib bo'lmaydi. Kalitlarni tasodifiy darajasini tekshirishda odatda ularning entropiya qiymatini o'lchash muhim ahamiyat kasb etadi.

NIST SP 800-90B nashridagi entropiyani o'lchash usuli. Ushbu nashrda *min-Entropy – minimal entropiya* usuli keltirilgan bo'lib, uning ketma-ketligi quyidagicha:

7. Tasodifiy sonlar generatoridan hosil qilingan ketma-ketliklar ma'lum bloklarga ajratilib, to'plam shaklida ifodalanadi. Bunda agar blok uchunligi n bit bo'lsa, to'plamdagi bloklar soni N kamida 2^n ga teng bo'lishi zarur.

8. To'plam ichida eng ko'p takrorlangan qiymat C_{max} ga o'zlashtiriladi.

9. Ushbu qiymat uchun ehtimollik $p_{max} = C_{max}/N$ ga teng bo'ladi.

10. Chegara qiymat $C_{chegara} = C_{max} + 2.3\sqrt{N * p_{max}(1 - p_{max})}$ tenglik orqali hisoblanadi.

11. Chegara qiymat uchun entropiya $H = -\log_2(C_{chegara}/N)$ tenglik orqali hisoblanadi.

12. Yakuniy minimal – entropiya = $\min(n, H)$ ga ya'ni, ikki qiymatning eng kichigiga teng bo'ladi.

/dev/random generatorida entropiyani o'lchash. Ushbu algoritmda muallif tomonidan isbotga ega bo'lmagan quyidagi entropiyani hisoblash tengligidan foydalanilgan:

$$\begin{aligned}\Delta_n^1 &= time_n - time_{n-1}, \\ \Delta_n^2 &= \Delta_n^1 - \Delta_{n-1}^1, \\ \Delta_n^3 &= \Delta_n^2 - \Delta_{n-1}^2, \\ \Delta_n &= \min(|\Delta_n^1|, |\Delta_n^2|, |\Delta_n^3|), \\ entropy_n &= \log_2\left(\left\lceil \frac{\Delta_n}{2} \right\rceil \pmod{2^{12}}\right).\end{aligned}$$

$time_n$ o'zgaruvchisi biror manbadagi tashqi hodisani vaqt belgisini ifodalaydi. Har bir manba o'zining $\{time_n\}_{n \geq 0}$ ketma-ketliklariga ega. $\pmod{2^{12}}$ dan foydalanish esa entropiya qiymatini ko'pi bilan 12 bitga teng bo'lishini bildiradi.

Yarrow generatorida entropiyani o'lchash. Mualliflar tomonidan mazkur algoritm uchun entropiyani to'plash uchun o'zgacha usuldan foydalanilgan. Har bir hodisalar manbasi uchun alohida entropiyani o'lchash sanog'i qo'yilgan bo'lib, har bir genetorning ichki holati yangilangandan so'ng, ular nolga olib kelingan.

Ushbu generatorning keyingi avlodi sanalmish *Fortuna* generatorida esa hodisalar manbasidan kelgan qiymatlarni 32 ta pulga taqsimlangan holda saqlash va ulardan generator ichki holatini yangilashda o'zgacha usuldan foydalanish orqali entropiyani hisoblashdan qochilgan.

Bundan tashqari entropiyani hisoblashda ko'plab usullardan foydalanilgan bo'lib, ular ichida EGD (Entropy Gathering Daemon) entropiya to'plovchisida foydalanilgan yondashuv muhim ahamiyat kasb etadi. Ushbu yondashuvga ko'ra manbadan olingan har bir bayt uchun bir bit entropiyaga ega deb faraz qilingan.

Umumiy holda mavjud entropiyani o'lchash usullarini turli statistik usullarga va farazlarga asoslanilganini yoki uni hisoblashdan qochilganiga ko'rish mumkin.

Amaliy bajarish uchun vazifalar

1. Xesh funksiyalarga nisbatan kolliziya hujumini amalga oshirish
2. MD4 algoritmgiga nisbatan hujumlarni amalga oshirish
3. Psevdotasodifiy sonlar generatorini tasodifiylikka tekshirish

Adabiyot va Internet saytlar:

7. Шеннон К. Теория и связи в секретных системах. Работы по теории информации и кибернетике. – М.: Иностранная лит. 1963. – 243 б.
8. Авдошин С.М., Савельева А.А. «Криптоанализ: вчера, сегодня, завтра», Государственный университет – Высшая Школа Экономики. Москва – 2007.
9. Авдошин С.М., Савельева А.А. «Криптоанализ: современное состояние и перспективы развития», Государственный университет – Высшая Школа Экономики.

V-BO‘LIM

KEYSLAR BANKI

V. KEYSLAR BANKI

1-keys mavzusi: “RSA shifrini tahlil qilish va hujum strategiyasini ishlab chiqish”

Maqsad: RSA algoritmining ishlash mexanizmini va uning zaif tomonlarini tahlil qilish.

Vaziyat tavsifi: O‘quvchilar RSA algoritmi yordamida shifrlangan matnni deshifrlash uchun hujum strategiyasini ishlab chiqishlari kerak. Faktorlashtirish algoritmlari va hisoblash murakkabligi nazariyasidan foydalanish topshiriladi.

Keys savollari:

1. Berilgan ochiq kalit va shifrlangan ma’lumot yordamida yopiq kalitni toping.
2. Faktorlashtirish usullaridan birini tanlab, izohlang.
3. Natijani tahlil qilib, RSA algoritmini kuchaytirish bo‘yicha takliflar bering.

<i>No</i>	<i>Nomi</i>	<i>natija</i>	<i>Izoh</i>
1			
2			
3			

- 1) Keysdagi muammoni keltirib chiqargan asosiy sabablarni va ularning oqibatlarini belgilang.

<i>No</i>	<i>Sabab</i>	<i>Oqibat</i>
1		
2		

- 2) Maqsad, kutiladigan natijalar, vaqt oraliqlari kabi parametrlar bo‘yicha muammoni bartaraf etish chora tadbirlarini ishlab chiqing.

2-keys mavzusi: “Tug‘ilgan kun paradoksini qo‘llab, xesh funksiya tahlili”

Maqsad: Xesh funksiyalari zaifliklarini aniqlash va ulardan foydalanish usullarini tushuntirish.

Vaziyat tavsifi: Tinglovchilarga xesh funksiya natijalari va tug‘ilgan kun paradoksiga asoslangan qoidalar beriladi. Maqsad - xesh qiymatlari bir xil bo‘lish ehtimolini hisoblash.

Keys savollari:

- 1) Berilgan xesh qiymatlari ichidan ikki xil ma’lumot uchun bir xil xesh qiymatini toping.
- 2) Tug‘ilgan kun paradoksining matematik asoslarini tushuntiring.
- 3) Xesh funksiyalari xavfsizligini oshirish bo‘yicha takliflar bering.

<i>№</i>	<i>Misol</i>	<i>Natijasi</i>	<i>Izoh</i>
1			
2			
3			
4			
5			

- 4) Tug‘ilgan kun paradoksi usulidan foydalanish konsepsiyasini ishlab chiqish.
- 5) Xesh funksiyalarni ushbu hujum usuliga bardoshli qilish uchun berilgan tavsilarni sanab bering..

3-keys mavzusi: “Klassik shifrlarni sodda usullar bilan buzish”

Maqsad: Klassik shifrlarning (masalan, Sezar shifri, Vigenere shifri) ishlash mexanizmini tushunish va ularni kriptotahlil qilish.

Senariy: Bir guruh shifrlangan xabarlar Sezar shifri bilan kodlangan. Ushbu xabarlarni deshifrlash uchun shifrnig kalitini topish talab etiladi. O‘quvchilarga shifrlangan matn va alohida shifrlar bo‘yicha qo‘llanma beriladi.

Topshiriq:

1. Sezar shifrida foydalanilgan kalitni toping va shifrlangan xabarni oching.
2. Vigenere shifri uchun kalit uzunligini aniqlang va shifrni deshifrlang.
3. Shifrlarning himoyalanganligi haqida qisqa tahlil yozing va zamonaviy algoritmlar bilan solishtiring.

Resurslar: Shifrlangan matnlar, ochiq matnlar va Sezar/Vigenere shifrlarining tavsifi.

Muammo yechimi: Sezar shifrida kalitni brutforce (hamma ehtimoliy kalitlarni sinash) usuli bilan topish, Vigenere shifri uchun Kasiski testi yoki chastota tahlilini qo‘llash.

4-keys mavzusi: “MD5 xesh funksiyasining zaifliklarini tahlil qilish”

Maqsad: MD5 algoritmining zaif tomonlarini aniqlash va bu zaifliklardan foydalanib, kolliziyalarni topish.

Stsenariy: O‘quvchilarga turli ma’lumotlarning MD5 xesh qiymatlari taqdim etiladi. Maqsad - ikki xil ma’lumot uchun bir xil xesh qiymatini topish (kolliziya) va buni amalda qo‘llash usulini tahlil qilish.

Topshiriq:

1. Berilgan xesh qiymatlari orasidan ikki xil ma’lumot uchun bir xil xesh qiymatini toping.
2. MD5 funksiyasining zaif tomonlarini tahlil qiling.
3. Xesh funksiyasining xavfsizligini oshirish uchun boshqa algoritmlar bilan solishtirish o‘tkazing.

Resurslar: MD5 xesh qiymatlari, tug‘ilgan kun paradoksining izohi, zamonaviy xesh algoritmlari tavsifi.

Muammo yechimi: MD5 kolliziyalarini yaratish uchun zamonaviy hujum usullaridan foydalanish (masalan, Google tomonidan yaratilgan “SHAttered” usuli).

5-keys mavzusi: “Psevdotasodifiy sonlar generatorlarining tahlili”

Maqsad: Psevdotasodifiy sonlar generatorlarining (PTSG) xavfsizlik darajasini baholash va tasodifiylikni sinovdan o‘tkazish.

Stsenariy: Psevdotasodifiy sonlar generatori ma’lum statistik xatoliklarga ega. O‘quvchilarga bu generator tomonidan ishlab chiqarilgan sonlar taqdim etiladi va NIST testlarini qo‘llash topshiriladi.

Topshiriq:

1. PTSG tomonidan ishlab chiqarilgan sonlarning tasodifiyligini NIST testlari yordamida sinovdan o‘tkazing.
2. PTSG zaifliklarini aniqlang va ularni bartaraf etish bo‘yicha takliflar bering.
3. Tasodifiy sonlarning himoyalanganligini oshirish uchun qanday texnologiyalarni qo‘llash mumkinligini baholang.

Resurslar: PTSG orqali yaratilgan sonlar, NIST va DIEHARD testlar to‘plami.

Muammo yechimi: NIST testlarini qo‘llash orqali PTSG zaif tomonlarini aniqlash va yangi algoritmlar tavsiyalarini ishlab chiqish.

VI-BO‘LIM

GLOSSARIY

VI. GLOSSARIY

Tushunchaning o'zbek tilidagi ko'rinishi	Ma'nosi o'zbek tilida	Tushunchaning ingliz tilidagi tarjimasi
Kriptologiya	Shifrlash va shifrlangan ma'lumotlarni tahlil qilishni o'rganuvchi fandır.	Cryptology
Kriptografiya	Ma'lumotlarni shifrlash orqali himoya qilish usullari bilan shug'ullanuvchi yo'nalish.	Cryptography
Kriptotahlil	Shifrlangan ma'lumotlarni tahlil qilish va ularning zaif tomonlarini aniqlash usullari.	Cryptanalysis
Klassik shifrlarning kriptotahlili	An'anaviy shifrlash usullari (masalan, Sezar shifri) zaifliklarini tahlil qilish.	Cryptanalysis of classical ciphers
Kriptotahlilning sodda usullari	Shifrlash usullarining sodda zaifliklarini ochish uchun qo'llaniladigan asosiy usullar.	Basic cryptanalysis methods
Kriptografik bardoshlilik tushunchasi	Algoritmnin hujumlarga qarshi chidamlilik darajasi.	Cryptographic resilience
Hisoblash murakkabligi nazariyasi	Algoritmnin buzish uchun talab qilinadigan hisoblash resurslari nazariyasi.	Theory of computational complexity
Simmetrik blokli shifrlar	Blok bo'yicha shifrlash amalga oshiriladigan simmetrik algoritmlar.	Symmetric block ciphers
Statistik usullar	Shifrlash algoritmlarining statistik zaif tomonlarini tahlil qilish usullari.	Statistical methods
Chiziqli kriptotahlil	Shifrlash algoritmlaridagi chiziqli munosabatlarni tahlil qilish usuli.	Linear cryptanalysis
Differensial kriptotahlil	Shifrlash algoritmining kiritish va chiqarish ma'lumotlari farqlarini tahlil qilish usuli.	Differential cryptanalysis
Algebraik kriptotahlil	Shifrlash algoritmlarini algebraik tenglamalar orqali tahlil qilish usuli.	Algebraic cryptanalysis
Integral kriptotahlil	Blok shifrlash algoritmlaridagi ma'lum bitlar munosabatini tahlil qilish usuli.	Integral cryptanalysis
"Slaydli hujum"	Shifrlash algoritmidagi takroriy naqshlarni aniqlashga asoslangan hujum usuli.	Slide attack

Apparat xatoliklariga asoslangan usullar	Qurilmaning xatoliklarini tahlil qilib shifrlash kalitini aniqlash usullari.	Fault-based cryptanalysis
Faktorlash muammosi	Katta sonlarni tub ko'paytuvchilarga ajratish qiyinligi muammosi.	Factoring problem
Diskret logarifmlash muammosi	Diskret logarifmlarni hisoblashning murakkabligi.	Discrete logarithm problem
Xesh funksiyalari	Ma'lumotlarning ixcham, o'zgarmas qiymatini hosil qiluvchi algoritmlar.	Hash functions
Psevdotasodifiy sonlar generatori	Haqiqiy tasodifiylikni taqlid qiluvchi algoritmlar.	Pseudorandom number generator
Tug'ilgan kun muammosi	Xesh qiymatlarining bir xil bo'lish ehtimoli masalasi.	Birthday problem
MD4 va MD5 algoritmlarining kriptotahlili	MD4 va MD5 xesh funksiyalarining zaif tomonlarini tahlil qilish.	Cryptanalysis of MD4 and MD5
NIST statistik testlar to'plami	Tasodifiylikni baholash uchun ishlatiladigan testlar to'plami.	NIST statistical test suite
DIEHARD statistik testlar	Psevdotasodifiy sonlar generatorlarini sinovdan o'tkazuvchi testlar to'plami.	DIEHARD statistical tests
Oqimli shifrlash algoritmlari	Ma'lumotlarni oqim shaklida shifrlovchi algoritmlar.	Stream ciphers
Qo'shimcha kanallardan foydalanishga asoslangan kriptotahlil	Qurilmalarning yon ma'lumotlarini (masalan, quvvat iste'moli yoki vaqt) tahlil qilish usullari.	Side-channel cryptanalysis
Yangi texnologiyalardan foydalanish	Zamonaviy texnologiyalar yordamida shifrlash algoritmlarini tahlil qilish.	Use of emerging technologies
Shor algoritmi	Katta sonlarni faktorizatsiya qilish uchun kvant algoritmi. RSA va boshqa ochiq kalitli algoritmlarga tahdid tug'diradi.	Shor's algorithm
Post-kvant kriptografiya	Kvant kompyuterlari hujumlariga qarshi bardoshli bo'lgan kriptografik algoritmlar yo'nalishi.	Post-quantum cryptography
Panjara asosli kriptografiya	Kvant hujumlariga bardoshli bo'lgan algoritmlar sinfi, panjaraviy (lattice) strukturalarga asoslangan.	Lattice-based cryptography
Kod asosli kriptografiya	Xatolarni tuzatish kodlariga asoslangan kvant bardoshli kriptografik algoritmlar.	Code-based cryptography

Xesh asosli kriptografiya	Ma'lumotlarni xavfsiz himoya qilish uchun xesh funksiyalariga asoslangan algoritmlar.	Hash-based cryptography
Kvant kompyuterlari	Kvant mexanikasi qonunlariga asoslangan, yuqori hisoblash quvvatiga ega bo'lgan kompyuterlar.	Quantum computers
Yon kanal hujumi	Qurilmalarning yon ma'lumotlari (quvvat, vaqt, elektromagnit nurlanish) orqali shifrlash tizimini buzish usuli.	Side-channel attack
Quvvat tahliliga qarshi himoya	Yon kanal hujumlarini bartaraf etish uchun elektr quvvatidan foydalanishni himoyalovchi texnikalar.	Power analysis resistance
Tasodifiylashtirish texnikalari	Yon kanal hujumlariga qarshi ma'lumotlarni shifrlashda qo'shimcha tasodifiylik kiritish texnologiyasi.	Randomization techniques
Bulutli kriptotahlil	Bulutli platformalar yordamida katta hajmdagi ma'lumotlarni tezkor tahlil qilish usullari.	Cloud-based cryptanalysis
Distributsiyali hisoblash	Bir nechta qurilmalar hisoblash quvvatini birlashtirib, kriptografik tahlillarni amalga oshirish usuli.	Distributed computing
Homomorfik shifrlash	Ma'lumotlarni ochmasdan ular ustida hisoblashni amalga oshiruvchi shifrlash texnologiyasi.	Homomorphic encryption
Integral chiziqli tahlil	Blokli shifrlash algoritmlaridagi bir xil statistik naqshlarni topish usuli.	Integral linear analysis
Tugun (nod)	Ma'lumotlar tarmog'idagi asosiy birlashuv nuqtasi yoki bloklar.	Node
Kvant superpozitsiyasi	Kvant kompyuterida bir vaqtning o'zida bir nechta holatda bo'lish imkoniyati.	Quantum superposition
Kriptografik protokollar	Ma'lumotlarni xavfsiz uzatish va tasdiqlash uchun ishlab chiqilgan algoritmlar to'plami.	Cryptographic protocols
Ko'p partiyali hisoblash	Bir nechta tomonlar o'rtasida ma'lumotlarni oshkor qilmasdan hisoblashni amalga oshirish texnologiyasi.	Multi-party computation
Kvant qulash effekti	Kvant holatining o'lchov paytida yagona qiymatga o'tish jarayoni.	Quantum collapse effect

AES (Advanced Encryption Standard)	Zamonaviy simmetrik blokli shifrlash algoritmi, xavfsiz va tez ishlash uchun yaratilgan xalqaro standart.	Advanced Encryption Standard (AES)
RSA algoritmi	Katta sonlarni faktorizatsiya qilishga asoslangan, ochiq kalitli shifrlash algoritmi.	RSA algorithm
Tugʻilgan kun paradoksi	Ikkita oʻxshash xesh qiymatini topish ehtimoli kutilganidan yuqori boʻlishi tushunchasi.	Birthday paradox
MD5	Xesh funksiyasi, xabarlarni ixcham shaklda ifodalash uchun ishlatiladi, ammo zamonaviy hujumlarga bardoshli emas.	MD5
NIST testlar	Kriptografik algoritmlar va tasodifiy sonlar generatorlarining xavfsizligini baholash uchun testlar toʻplami.	NIST tests

VII-BO‘LIM

ADABIYOTLAR RO‘YXATI

VII. ADABIYOTLAR RO'YXATI

I. O'zbekiston Respublikasi Prezidentining asarlari:

1. Mirziyoyev SH.M. Buyuk kelajagimizni mard va olijanob xalqimiz bilan birga quramiz. – T.: “O'zbekiston”, 2017. – 488 b.
2. Mirziyoyev SH.M. Milliy taraqqiyot yo'limizni qat'iyat bilan davom ettirib, yangi bosqichga ko'taramiz. 1-jild. – T.: “O'zbekiston”, 2017. – 592 b.
3. Mirziyoyev SH.M. Xalqimizning roziligi bizning faoliyatimizga berilgan eng oliy bahodir. 2-jild. –T.: “O'zbekiston”, 2018. – 507 b.
4. Mirziyoyev SH.M. Niyati ulug' xalqning ishi ham ulug', hayoti yorug' va kelajagi farovon bo'ladi. 3-jild.– T.: “O'zbekiston”, 2019. – 400 b.
5. Mirziyoyev SH.M. Milliy tiklanishdan – milliy yuksalish sari. 4-jild.– T.: “O'zbekiston”, 2020. – 400 b.

II. Normativ-huquqiy hujjatlar:

6. O'zbekiston Respublikasining Konstitusiyasi.–T.:O'zbekiston, 2018.
7. O'zbekiston Respublikasining 2020-yil 23-sentabrda qabul qilingan “Ta'lim to'g'risida”gi O'RQ-637-sonli Qonuni.
8. O'zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017-yil 7-fevral “O'zbekiston Respublikasini yanada rivojlantirish bo'yicha Harakatlar strategiyasi to'g'risida”gi 4947-sonli Farmoni.
9. O'zbekiston Respublikasi Prezidentining 2018-yil 21-sentabr “2019-2021 yillarda O'zbekiston Respublikasini innovatsion rivojlantirish strategiyasini tasdiqlash to'g'risida”gi PF-5544-sonli Farmoni.
10. O'zbekiston Respublikasi Prezidentining 2019-yil 27-may “O'zbekiston Respublikasida korrupsiyaga qarshi kurashish tizimini yanada takomillashtirish chora-tadbirlari to'g'risida”gi PF-5729-son Farmoni.
11. O'zbekiston Respublikasi Prezidentining 2019-yil 27-avgust “Oliy ta'lim muassasalari rahbar va pedagog kadrlarining uzluksiz malakasini oshirish tizimini joriy etish to'g'risida”gi PF-5789-sonli Farmoni.
12. O'zbekiston Respublikasi Prezidentining 2019-yil 8-oktabr “O'zbekiston Respublikasi oliy ta'lim tizimini 2030-yilgacha rivojlantirish konsepsiyasini tasdiqlash to'g'risida”gi PF-5847-sonli Farmoni.
13. O'zbekiston Respublikasi Prezidentining 2024-yil 15-avgustdagi “O'zbekiston Respublikasida kriptologiya sohasida ta'lim va ilm-fanni rivojlantirish bo'yicha qo'shimcha chora-tadbirlar to'g'risida”gi PQ-293-son Qarori.
14. O'zbekiston Respublikasi Prezidenti Shavkat Mirziyoyevning 2020-yil 25-yanvardagi Oliy Majlisga Murojaatnomasi.
15. O'zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasining 2001-yil 16-avgustdagi “Oliy ta'limning davlat ta'lim standartlarini tasdiqlash to'g'risida”gi

343-sonli Qarori.

16. O‘zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasining 2015-yil 10-yanvardagi “Oliy ta’limning Davlat ta’lim standartlarini tasdiqlash to‘g‘risida”gi 2001-yil 16-avgustdagi “343-sonli qaroriga o‘zgartirish va qo‘shimchalar kiritish haqida”gi 3-sonli qarori.

III. Maxsus adabiyotlar:

17. O.P.Axmedova, Z.T.Xudoykulov, O. Allanov, I.M.Boyquziyev Kriptoanaliz. O‘quv qo‘llanma. T.: “Iqtisod-Moliya”, 2022. 171 b.

18. Kuryazov D.M., Sattorov A.B., Axmedova B.B. Blokli simmetrik shifrlash algoritmlari bardoshligini zamonaviy kriptotahlil usullari bilan baholash. O‘quv qo‘llanma. T.: “Aloqachi”. 2017, 228 bet.

19. Xasanov P.F., Xasanov X.P., Axmedova O.P., Davlatov A.B. Kriptotahlil va uning maxsus usullari, O‘quv qo‘llanma, Toshkent, 2010

20. Akbarov D.YE. Axborot xavfsizligini ta’minlashning kriptografik usullari va ularning qo‘llanishlari. Toshkent. ”O‘zbekiston markasi“, 2009

21. Л.К.Бабенко, Е.А.Ищукова. Современные алгоритмы блочного шифрования и методы из анализа: учеб. пособие для студентов вузов, обучающихся по группе специальностей в обл. информ. безопасности – М.: Гелиос АРВ, 2006. – 376 с.

22. M.Stamp. Applied cryptanalysis: Breaking Ciphers in the Real World. John Wiley & Sons, Inc, 2007, -P. -417.

23. Б.Шнайер. Прикладная криптография. Протоколы, алгоритмы, исходные тексты на языке Си – Москва: ТРИУМФ, 2002.

24. Xasanov P., Xasanov X., Axmedova O., Davlatov A. Kriptotahlil va uning maxsus usullari. O‘quv qo‘llanma.– Toshkent, 2010.

IV. Internet saytlar:

25. <http://edu.uz> – O‘zbekiston Respublikasi Oliy va o‘rta maxsus ta’lim vazirligi.

26. <http://lex.uz> – O‘zbekiston Respublikasi Qonun hujjatlari ma’lumotlari milliy bazasi.

27. <http://bimm.uz> – Oliy ta’lim tizimi pedagog va rahbar kadrlarini qayta tayyorlash va ularning malakasini oshirishni tashkil etish Bosh ilmiy-metodik markazi.

28. <http://ziyonet.uz> – Ta’lim portali ZiyonET.

29. <http://natlib.uz> – Alisher Navoiy nomidagi O‘zbekiston Milliy kutubxonasi.

30. <http://jnicholl.org/Cryptanalysis/Tools/>

31. <https://www.cryptool.org/en/cto/>

32. <https://resources.infosecinstitute.com/topic/cryptanalysis-tools/>

- 33. <http://rumkin.com/tools/cipher/>
- 34. <https://blackarch.org/crypto.html>
- 35. <https://www.guballa.de/vigenere-solver>
- 36. [https://www.simonsingh.net/The Black Chamber/substitutioncrackin
gtool.html](https://www.simonsingh.net/The_Black_Chamber/substitutioncrackin
gtool.html)
- 37. [https://www.guru99.com/how-to-make-your-data-safe-using-
cryptography.html](https://www.guru99.com/how-to-make-your-data-safe-using-
cryptography.html)
- 38. <https://www.cs.bu.edu/~goldbe/teaching/CS558S17/Lab1.pdf>