ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

Мирзо Улуғбек номидаги
ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ

Жўраев Г.У., Бахрамов С.А., Худойберганов М.Ў.

АЙИРМАЛИ СХЕМАЛАР НАЗАРИЯСИ ЭЛЕМЕНТЛАРИ

Тошкент – 2008

Мазкур ўқув қўлланмасида айирмали схемалар назариясининг асосий элементлари – математик физика тенгламаларини дискрет (айирмали) аппроксимациясини қуриш, аппроксимация хатолигини текшириш, айирмали схема ечими турғунлиги ва берилган дифференциал масала ечимининг аниқ ечимига яқинлашиши масалалари ёритилган.

Ушбу ўқув қўлланмаси математика, тадбиқий математика ва информатика, механика ҳамда информатика ва ахборот технологиялари йўналишлари бўйича таълим олаётган бакалавриат, шунингдек, кўрсатилган бакалавриат йўналишларига мос келувчи магистратура ихтисосликлари талабаларига мўлжалланган. Қўлланмадан «Ҳисоблаш математикаси», «Ҳисоблаш усуллари», «Сонли усуллар» фанларидан дарс берувчи ўқитувчилар ҳам фойдаланишлари мумкин.

Масъул муҳаррир: ф.-м.ф.д., проф. Х.А.Музафаров

Тақризчилар: ф.-м.ф.д., профессор Алоев Р.Д.,
ф.-м.ф.д., профессор Шодиметов Х.М.

Мирзо Улуғбек номидаги Ўзбекистон миллий университети Илмий Кенгашининг 2009 йил ____________да бўлиб ўтган мажлисида нашрга тавсия этилган (-сонли баённома).

МУНДАРИЖА

К И Р И Ш

Математик физика масалаларини сонли ечишда кўп ҳолларда чекли айирмали усуллар ёки тўрлар усули қўлланилади. Сонли усуллар назариясида 2 та бош масала мавжуд:

1) Математик физика тенгламаларини дискрет (айирмали) аппроксимациясини қуриш, аппроксимация хатолигини текшириш, айирмали схема ечимини турғунлигини ва берилган дифференциал масала ечимининг аниқ ечимига яқинлашишини ҳамда ҳосил бўлган айирмали схема аниқлигини тадқиқ қилиш;

2) Ҳисоблаш алгоритмини тежамкорлигини эътиборга олган ҳолда ҳосил бўлган айирмали тенгламалар системасини аниқ (тўғри) ёки итерацион усуллар билан ечиш.

Маълумки, малакали миллий кадрлар тайёрлашда Давлат тилида яратилган ўқув қўлланмалари ва дарсликлар жуда катта аҳамиятга эга. Ҳозирги кунда ҳисоблаш математикаси фани бўйича Давлат тилида тайёрланган ўқув қўлланмалари ва дарсликларда сонли усуллар назариясининг биринчи бош масаласи етарлича ёритилмаган.

Мазкур ўқув қўлланмасида юқорида таъкидланган бўшлиқни имкон қадар тўлдириш мақсад қилиб қўйилган. Шу сабабли ўқув қўлланмада дифференциал тенгламаларни дискрет моделларини қуришга, айирмали схемаларни қуриш усулларига, аппроксимация хатолигини баҳолашга, айирмали схема ечимини турғунлигини ва берилган дифференциал масаланинг аниқ ечимига яқинлашишини ҳамда ҳосил бўлган айирмали схема аниқлигини тадқиқ қилишга катта эътибор қаратилган.

Ушбу ўқув қўлланмасидан олий ўқув юрти талабалари, магистрантлари, аспирантлари фойдаланишлари мумкин. Шунингдек, мазкур ўқув қўлланмаси олий ўқув юрти ўқитувчилари ва амалий математика соҳасидаги мутахассислар учун ҳам фойдали ўқув адабиёти сифатида хизмат қилиши мумкин.

І-БОБ. АЙИРМАЛИ СХЕМАЛАР НАЗАРИЯСИНИНГ БОШЛАНҒИЧ ТУШУНЧАЛАРИ

§ 1.1. Айирмали тенгламалар.

Дифференциал тенгламаларни тақрибий усуллар билан ечишда қуйидаги чизиқли алгебраик тенгламалар системасини ечишга келтирилади:

$$Au = f\ ,$$

бу ерда $A = \left(a_{ij}\right)$ - тартиби N бўлган квадрат матрица, $u = \left(u_1, u_2, ..., u_N\right)^T$ - номаълум вектор, $f = \left(f_1, f_2, ..., f_N\right)^T$ - берилган вектор.

Чизиқли алгебраик тенгламалар системасини ечишнинг икки хил усули мавжуд:

1) тўғри ёки “аниқ” усуллар;
2) итерацион усуллар ёки кетма-кет яқинлашишлар усули.

Математик физика тенгламаларини аппроксимация қилиш натижасида айирмали тенгламалар ҳосил бўлади. Бунда тўрда, яъни дискрет нуқталар тўпламида берилган икки ёки уч ўзгарувчили функцияни аниқлашга тўғри келади. Ҳисоблаш тўри ўн минглаб, ҳаттоки юз минглаб тугун нуқталардан ташкил топган бўлиши мумкин. Тўр функция қийматларини аниқлаш учун ҳосил бўлган чизиқли алгебраик тенгламалар (айирмали тенгламалар) системаси 2 ҳолат орқали алоҳида характерланади:

1) чизиқли алгебраик тенгламалар системасининг A матрицаси махсус кўринишга (ноль қиймат қабул қилувчи кўпгина элементларга) эга;

2) тенгламалар системасини ташкил этувчи тенгламалар сони жуда катта (ўртача $10^4 - 10^5$ га тенг).

Айирмали тенгламаларга мисоллар. Арифметик прогрессия формуласи ҳадлари учун ўринли бўлган $a_{k+1} = a_k + d$ ёки

$a_{k-1}-2a_k+a_{k+1}=0$ тенгламалар айирмали тенгламалардир. Бу ерда $a_k=a(k)$, $k=1,2,3,\ldots$ яъни, аргумент k бутун қийматларни қабул қилади.

Энди, аргументи бутун қийматларни қабул қилувчи функцияни қараймиз

$$y(i),\qquad i=0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots$$

i нуқтада қуйидаги айирмаларни ёзамиз:

ўнг айирма $\Delta y_i=y(i+1)-y(i)$,

чап айирма $\nabla y_i=y(i)-y(i-1)$.

Одатда $y_i=y(i)$ белгилаш қабул қилинган. У ҳолда

$$\Delta y_i=y_{i+1}-y_i,\qquad \nabla y_i=y_i-y_{i-1}.$$

Бу ифодаларни биринчи тартибли ҳосилани формал аналоги сифатида қараш мумкин. Иккинчи тартибли айирмани қараймиз

$$\Delta^2 y_i=\Delta(\Delta y_i)=\Delta(y_{i+1}-y_i)=(y_{i+2}-y_{i+1})-(y_{i+1}-y_i)=y_{i+2}-2y_{i+1}+y_i.$$

$\Delta y_{i-1}=\nabla y_i$ эканлигини қайд этиш лозим. Ҳақиқатдан ҳам, тенгликнинг ҳар икки томони ҳам y_i-y_{i-1} га тенг. Чап айирмали операторни қўллаш ўнг айирмали операторни бир бирлик чап нуқтага қўллаш билан тенг кучли, яъни

$$\Delta\nabla y_i=\Delta^2 y_{i-1}=y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}.$$

Худди шунингдек, $\Delta^m y_i$ аниқланади

$$\Delta^m y_i=\Delta\left(\Delta^{m-1}y_i\right).$$

Δ операторни ҳар бир марта қўллаганда ўнг томондан яна битта нуқта айирмали ифодада иштирок этади. Δ операторни m марта қўллаб, функциянинг $i,i+1,\ldots,i+m$ нуқталардаги $y_i,y_{i+1},\ldots,y_{i+m}$ қийматларидан ташкил топган $\Delta^m y_i$ ни ҳосил қилиш мумкин.

Турли тартибдаги айирмалар иштирок этувчи айирмали тенгламани қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\alpha_0 \Delta^m y_i + \alpha_1 \Delta^{m-1} y_i + \ldots + \alpha_{m-1} \Delta y_i + \alpha_m y_i = f_i ,$$

Бу ерда $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m$ - коэффициентлар бўлиб, $\alpha_0 \neq 0$. Бу тенглама бутун аргументнинг функцияси бўлган номаълум функция - y_i га нисбатан $m-$*чи тартибли айирмали тенглама дейилади.* Бу айирмали тенглама $m-$чи тартибли қуйидаги

$$\alpha_0 \frac{d^m u}{dx^m} + \alpha_1 \frac{d^{m-1} u}{dx^{m-1}} + \ldots + \alpha_{m-1} \frac{du}{dx} + \alpha_m u = f , \qquad \alpha_0 \neq 0 .$$

дифференциал тенгламанинг аналогидир. Дифференциал тенгламанинг коэффициентлари x аргументнинг функцияси бўлгани каби айирмали тенгламанинг коэффициентлари $\alpha_m = \alpha_m(i)$ лар i га боғлиқ бўлади.

Айирмали тенгламалар қаердан пайдо бўлади деган ҳақли савол пайдо бўлади. Дифференциал тенгламалар билан ифодаланувчи техник ва математик масалалар мавжуд. Бундай масалаларни айирмали усуллар билан ечиш айирмали тенгламаларга олиб келади.

Оддий дифференциал тенгламага соддагина мисол келтирамиз.

$$\frac{du}{dx} = f(x)$$

дифференциал тенгламани ечиш талаб этилсин. Бу тенгламадаги ҳосилани тақрибан айирмали ифода билан алмаштириш мумкин:

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_{x=x_i} \approx \frac{u(x_i + h) - u(x_i)}{h} ,$$

бу ерда $h > 0$ - x_i ва $x_i + h$ нуқталар орасидаги масофа. Агар $x_i + h = x_{i+1}$, $u(x_i) = u_i$, $u(x_{i+1}) = u_{i+1}$ белгилашлар киритсак, у ҳолда

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_{x=x_i} : \frac{\Delta u_i}{h} = \frac{u_{i+1}-u_i}{h}.$$

$h \to 0$ да бу айирмали ифода du/dx га интилади. Шуни таъкидлаш лозимки, бундай алмаштириш ягона, яъни бир қийматли эмас – чап айирмани ҳам ишлатиш мумкин эди:

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_{x=x_i} : \frac{\nabla u_i}{h} = \frac{u_i-u_{i-1}}{h}.$$

Ўнг ва чап айирмаларни йиғиндисининг ярми марказий айирмани ифодалайди:

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_{x=x_i} : \frac{\Delta u_i + \nabla u_i}{2h} = \frac{u_{i+1}-u_{i-1}}{2h}.$$

Ҳамма ерда : белгиси мослик ёки аппроксимацияни билдиради. $\frac{\Delta u_i}{h} = \frac{u_{i+1}-u_i}{h}$ ифода $\frac{du}{dx}$ ҳосилани аппроксимация қилади дейилади.

Шундай қилиб,

$$\frac{\Delta y_i}{h} = f_i,\ f_i = f(x_i)$$

тенгламани қараймиз. Таърифга кўра бу биринчи тартибли айирмали тенгламадир. Уни қуйидагича ёзиш мумкин

$$\Delta y_i = hf_i \quad \text{ёки} \quad y_{i+1} = y_i + hf_i.$$

Биринчи тартибли дифференциал тенгламани алмаштиришда иккинчи тартибли айирмали тенгламага ҳам эга бўлиш мумкин. Масалан,

$$u(x_{i+1}) = u(x_i) + hu'(x_i) + 0{,}5h^2u''(x_i) + \frac{h^3}{6}u'''(x_i) + O(h^4),$$

$$u(x_{i-1}) = u(x_i) - hu'(x_i) + 0{,}5h^2u''(x_i) - \frac{h^3}{6}u'''(x_i) + O(h^4).$$

Бу икки ифодани қўшиб,

$$\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} = u_i'' + O\left(h^2\right)$$

ифодага эга бўлиш мумкин. Бу ерда $O\left(h^2\right)$ ни ташлаб юбориб, u_i'' учун тақрибий

$$\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_{x=x_i} : \ \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} = \frac{\Delta^2 u_{i-1}}{h^2} = \frac{\Delta\nabla u_i}{h^2}$$

ифода ҳосил қилиш мумкин.

u_{i+1} ни x_i нуқта атрофида Тейлор қаторига ёйилмаси $u_{i+1} = u_i + hu_i' + 0{,}5h^2u_i'' + O\left(h^3\right)$ да u_i'' ни иккинчи тартибли айирмали ифода билан алмаштириб,

$$u_i' = \frac{u_{i+1} - u_i}{h} - \frac{h}{2}\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + O\left(h^2\right)$$

яъни иккинчи тартибли айирмали тенгламани ҳосил қилиш мумкин. Буни иккинчи тартибли айирмали тенглама эканлигини қуйидагича исботлаш мумкин. Охирги формулада u_i' ни f_i га алмаштириб, $O\left(h^2\right)$ ҳадни ташлаб юбориб, ҳосил бўлган тенгламани $2h$ га кўпайтирамиз. У ҳолда биринчи тартибли дифференциал тенглама $du / dx = f$ ўрнига қуйидаги иккинчи тартибли айирмали тенгламага эга бўламиз

$$\Delta\nabla y_i - 2\Delta y_i = 2hf_i.$$

§ 1.2. Биринчи тартибли айирмали тенгламалар ва тенгсизликлар.

Биринчи тартибли айирмали тенгламани қараймиз:

$$b\Delta y_i + ay_i = f_i. \tag{1.1}$$

Бу тенглама биринчи тартибли

$$b\frac{du}{dt}+au=f$$

дифференциал тенгламага мос келади. (1.1) тенгламани қуйидагича ёзиш мумкин:

$$b(y_{i+1}-y_i)+ay_i=f_i \text{ ёки } by_{i+1}=cy_i+f_i, \quad c=b-a.$$

Умумий ҳолда $b=b_i$, $a=a_i$, $c=c_i$, яъни бу коэффициентлар i аргументнинг маълум функциялари. $b_i\neq 0$ бўлсин, у ҳолда

$$y_{i+1}=q_i y_i+\varphi_i,$$

бу ерда $q_i=c_i/b_i$, $\varphi_i=f_i/b_i$, $b_i\neq 0$. Кўриниб турибдики, қандайдир i да y функциянинг қиймати берилган бўлса, ечим бир қийматли аниқланади. Фараз қилайлик, $i=0$ да y_0 берилган бўлсин. У ҳолда $y_1,y_2,...$ ва ҳ.к. аниқлаш мумкин. $q_i=q=const$ бўлсин. Агар $\varphi_i=0$ бўлса, у ҳолда y_i қийматлар геометрик прогрессияни ташкил қилади. Агар $\varphi_i\neq 0$ бўлса, у ҳолда

$$y_{i+1}=qy_i+\varphi_i=q(qy_{i-1}+\varphi_{i-1})+\varphi_i=q^2y_{i-1}+\varphi_i qy_{i-1}.$$

Бу жараённи давом эттириб, қуйидаги формулани ҳосил қилиш мумкин:

$$y_{i+1}=q^{i+1}y_0+\varphi_i+q\varphi_{i-1}+...+q^{i-1}\varphi_1+q^i\varphi_0=q^{i+1}y_0+\sum_{k=0}^{i}q^{i-k}\varphi_k. \qquad (1.2)$$

Қуйидаги

$$y_{i+1}=q_i y_i+\varphi_i, \quad i=0,1,2,...$$

тенгламанинг ечимини юқоридаги мулоҳазалардан фойдаланиб, топиш мумкин.

Айрим ҳолларда биринчи тартибли

$$y_{i+1} \le q y_i + f_i\,,\ \ i = 0,1,2,\ldots \ (y_0 \text{ берилган, } q, f_i \text{ лар маълум}) \tag{1.3}$$

тенгсизликлар билан ишлашга тўғри келади. Бу тенгсизликни ечиш учун қуйидагича мулоҳаза юритамиз. Биз

$$\vartheta_{i+1} = q\,\vartheta_i + f_i\,,\ \ \vartheta_0 = y_0 \tag{1.4}$$

тенгламани ечишимиз мумкин. $y_i \le \vartheta_i$ эканлигини кўрсатамиз. (1.3) тенгсизликдан (1.4) тенгликни айирамиз:

$$y_{i+1} - \vartheta_{i+1} \le q(y_i - \vartheta_i) \le q^2(y_{i-1} - \vartheta_{i-1}) \le \ldots \le q^{i+1}(y_0 - \vartheta_0) = 0\,. \tag{1.5}$$

Бундан эса ихтиёрий q учун $y_{i+1} \le \vartheta_{i+1}$ эканлиги келиб чиқади. ϑ_i эса (1.2) формуладаги каби q, ϑ_0, f_i лар орқали ошкор ҳолда ифодаланиши мумкин.

Мисол. Қуйидаги бир жинсли ўзгармас коэффициентли иккинчи тартибли айирмали тенгламани қараймиз

$$a y_{i-1} - c y_i + b y_{i+1} = 0\,, \tag{1.6}$$

бу ерда a, b, c коэффициентлар i га боғлиқ бўлмаган ҳақиқий сонлардир.

(1.6) тенгламанинг хусусий ечимини

$$y_i = q^i \tag{1.7}$$

кўринишда (q аниқланиши лозим бўлган сон) излаймиз. (1.7) тенгликни (1.6) тенгламага қўйиб, (1.6) *айирмали тенгламанинг характеристик тенгламаси деб аталувчи* қуйидаги квадрат тенгламага эга бўламиз:

$$b q^2 - c q + a = 0\,. \tag{1.8}$$

$c^2 - 4ab$ дискриминантнинг ишорасига боғлиқ ҳолда (1.8) тенглама илдизлари учун учта ҳар хил ҳол бўлиши мумкин. Агар $c^2 > 4ab$ бўлса, тенглама илдизлари ҳақиқий ва ҳар хил:

$$q_1 = \frac{c + \sqrt{c^2 - 4ab}}{2b}\,, \qquad q_2 = \frac{c - \sqrt{c^2 - 4ab}}{2b}\,. \tag{1.9}$$

Бу ҳолда (1.6) айирмали тенглама

$$y_i^{(1)} = q_1^{(i)}, \qquad y_i^{(2)} = q_2^{(i)} \tag{1.10}$$

хусусий ечимларга эга бўлади. Агар $c^2 < 4ab$ бўлса, q_1, q_2 илдизлар комплекс қўшма сонлар бўлади. (1.10) функциялар ҳам бу ҳолда (1.6) айирмали тенгламанинг ечимлари бўлади. Аммо, бу ҳолда (1.6) айирмали тенгламанинг ечимларини

$$q_1 = r(cos\,\varphi + i\,sin\,\varphi)$$

тригонометрик шаклда берган маъқул. Бу ерда

$$r = \sqrt{\frac{a}{b}}, \quad sin\,\varphi = \frac{\sqrt{4ab - c^2}}{2\sqrt{ab}}, \quad cos\,\varphi = \frac{c}{2\sqrt{ab}}. \tag{1.11}$$

(1.6) айирмали тенгламанинг ечимлари сифатида қуйидаги функцияларни олиш мумкин:

$$y_i^{(1)} = r^i\,cos(i\varphi), \qquad y_i^{(2)} = r^i\,sin(i\varphi).$$

Ниҳоят, $c^2 = 4ab$ бўлса, у ҳолда (1.8) тенглама $q = c/(2b)$ каррали илдизга эга бўлади, (1.6) айирмали тенглама эса

$$y_i^{(1)} = q^i, \qquad y_i^{(2)} = iq^i \tag{1.12}$$

хусусий ечимларга эга бўлади.

Энди (1.10) хусусий ечимлардан фойдаланиб, қуйидаги

$$ay_{i-1} - cy_i + by_{i+1} = 0,\; i = 1, 2, ... \tag{1.13}$$

$$y_0 = \mu_1, \qquad y_1 = \mu_2 \tag{1.14}$$

Коши масаласини ечимларини қурамиз. (1.6) тенглама чизиқли ва бир жинсли бўлганлиги боис уларнинг ихтиёрий чизиқли комбинациялари

$$y_i = \alpha_1 q_1^i + \alpha_2 q_2^i \tag{1.15}$$

ҳам ечим бўлади. α_1 ва α_2 коэффициентларни шундай танлаймизки, натижада (1.14) бошланғич шартлар қаноатлантирилсин:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \mu_1, \quad \alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2 = \mu_2 . \tag{1.16}$$

(1.16) системани ечиб, қуйидагиларга эга бўлиш мумкин:

$$\alpha_1 = \frac{\mu_1 q_2 - \mu_2}{q_2 - q_1}, \qquad \alpha_2 = \frac{\mu_2 - \mu_1 q_1}{q_2 - q_1}. \tag{1.17}$$

(1.17) тенгликни (1.15) ифодага қўйиб ва μ_1, μ_2 сонларнинг олдидаги коэффициентларни йиғиб, $c^2 > 4ab$ бўлса, (1.13)-(1.14) Коши масаласини ечими

$$y_i = \frac{q_1 q_2 \left(q_1^{i-1} - q_2^{i-1}\right)}{q_2 - q_1} \mu_1 + \frac{q_2^i - q_1^i}{q_2 - q_1} \mu_2, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.18}$$

кўринишда бўлади. Бу ерда q_1, q_2 лар (1.10) тенгликларга асосан аниқланади.

$c^2 < 4ab$ бўлганда ҳам (1.13)-(1.14) Коши масаласининг ечими юқоридаги тарзда аниқланади. Бу ҳолда r ва φ ўзгарувчилар (1.11) тенгликларга асосан аниқланади ва қуйидаги муносабатлар ўринли бўлади:

$$\frac{q_1 q_2 \left(q_1^{i-1} - q_2^{i-1}\right)}{q_2 - q_1} = -r^i \frac{\sin\left((i-1)\varphi\right)}{\sin\varphi},$$

$$\frac{q_2^i - q_1^i}{q_2 - q_1} = r^{i-1} \frac{\sin\left(i\varphi\right)}{\sin\varphi}.$$

Шу сабабли Коши масаласини ечимини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$y_i = -r^i \frac{sin((i-1)\varphi)}{sin\,\varphi} \mu_1 + r^{i-1} \frac{sin(i\varphi)}{sin\,\varphi} \mu_2. \tag{1.19}$$

$c^2 = 4ab$ бўлган ҳолда (1.12) хусусий ечимлардан фойдаланиб, (1.13)-(1.14) Коши масаласини ечимларини

$$y_i = -\left(i-1\right) q^i \mu_1 + i q^{i-1} \mu_2 \qquad \left(q = c/\left(2b\right)\right) \tag{1.20}$$

кўринишда ёзиш мумкин.

Худди шунга ўхшаш

$$ay_{i-1} - cy_i + by_{i+1} = 0, \qquad i = 1, 2, ..., N-1, \tag{1.21}$$

$$y_0 = \mu_1, \qquad y_N = \mu_2 \tag{1.22}$$

чегаравий масаланинг ечими ҳам қурилади. Агар $c^2 \neq 4ab$ бўлса, у ҳолда

$$y_i = \frac{(q_1 q_2)^i \left(q_2^{N-i} - q_1^{N-i}\right)}{q_2^N - q_1^N}\mu_1 + \frac{q_2^i - q_1^i}{q_2^N - q_1^N}\mu_2 \quad , \tag{1.23}$$

бу ерда q_1, q_2 лар (1.9) тенгликларга асосан аниқланади.

$c^2 = 4ab$ бўлса, у ҳолда чегаравий масаланинг ечимлари

$$y_i = \left(1 - \frac{i}{N}\right) q^i \mu_1 + \frac{i}{N} q^{-(N-i)} \mu_2 \quad ,$$

формула билан аниқланади, бу ерда $q = c/(2b)$.

Мисол. $u_{k+1} - 2pu_k + u_{k-1} = 0$ тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. Масалани ечиш учун қуйидаги ҳолларни қараймиз:

а) $p < 1$ бўлсин. У ҳолда $p = \cos\alpha, \alpha \neq 0$ деб олиш мумкин. Натижада тенглама $u_{k+1} - 2\cos\alpha\, u_k + u_{k-1} = 0$ кўриншга келади. $u_k = q^k$ деб фараз қилиб, $q^2 - 2\cos\alpha\, q + 1 = 0$ квадрат тенгламани ҳосил қиламиз. Унинг дискриминанти $D = \cos^2\alpha - 1 = -\sin^2\alpha < 0$ бўлиб, илдизлари $q_{1,2} = e^{\pm i\alpha}, q^k{}_{1,2} = e^{\pm ik\alpha}$, хусусий ечимлари эса $u_k^{(1)} = \cos(k\alpha), u_k^{(2)} = \sin(k\alpha)$ бўлади.

б) $p > 1$ бўлсин. Бунда $p = ch\,\alpha$ деб оламиз. $u_k = q^k$ деб фараз қилиб, $q^2 - 2ch\,\alpha\, q + 1 = 0, D = ch^2\alpha - 1 > 0$ квадрат тенгламани ҳосил қиламиз. Унинг илдизлари $q_{1,2} = ch\alpha \pm sh\alpha = e^{\pm\alpha}, q^k{}_{1,2} = e^{\pm k\alpha}$ бўлади. Айирмали тенгламанинг хусусий ечимлари эса $u_k^{(1)} = ch(k\alpha), u_k^{(2)} = sh(k\alpha)$ функциялар бўлади.

в) $p = 1$. Бу ҳолда $q^2 - 2q + 1 = 0,\ q_{1,2} = 1$ бўлиб, хусусий ечимлари $u_k^{(1)} = 1, u_k^{(2)} = k$ бўлиб, умумий ечими $u_k = C_1 + C_2 k$ чизиқли функция бўлади.

§ 1.3. Иккинчи тартибли айирмали тенгламалар. Коши масаласи. Чегаравий масалалар.

Энди иккинчи тартибли айирмали тенгламаларни кўриб чиқамиз. Иккинчи тартибли айирмали тенгламаларни қуйидаги қулайроқ кўринишда ёзиш қабул қилинган:

$$A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} = -F_i \tag{1.24}$$

$$i = 1,2,3... \qquad A_i \neq 0, \quad B_i \neq 0.$$

Бу тенглама иккинчи тартибли тенглама эканлигини кўрсатамиз. $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$ белгилашдан фойдаланамиз. У ҳолда (1.24) тенглама

$$B_i \Delta y_i - A_i \Delta y_{i-1} - (C_i - B_i - A_i) y_i = -F_i \tag{1.25}$$

кўринишга келади.

$$\Delta y_i - \nabla y_i = \Delta y_i - \Delta y_{i-1} = \Delta^2 y_{i-1} = y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1},$$

$$\Delta y_{i-1} = -\Delta^2 y_{i-1} + \Delta y_i$$

эканлиги тушунарли. Бу тенгликка асосан (1.25) формулани

$$A_i \Delta^2 y_{i-1} + (B_i - A_i)\Delta y_i - (C_i - B_i - A_i) y_i = -F_i, \qquad A_i \neq 0.$$

(1.24) тенламани Δ^2 ни олдида B_i коэффициент турадиган кўринишда ёзиш мумкин, $B_i \neq 0$ бўлганлиги сабабли ҳосил бўлган тенглама иккинчи тартибли бўлади:

$$B_i\Delta^2 y_{i-1}+(B_i-A_i)\Delta y_{i-1}-(C_i-B_i-A_i)y_i=-F_i\,.$$

Шундай қилиб, (1.24) айирмали тенглама иккинчи тартибли дифференциал тенгламанинг аналогидир. Уни ечиш учун иккита қўшимча шарт берилиши керак. Бу шартлар сифатида y функция ва унинг биринчи тартибли айирмаси Δy қийматлари хизмат қилиши мумкин. Агар икки шарт (y функция ва унинг биринчи тартибли айирмаси Δy қийматлари) ҳам бир нуқтада ёки қўшни нуқталарда берилган бўлса, у ҳолда *Коши масаласи*га эга бўламиз. Агар қўшимча шартлар қўшни бўлмаган турли хил нуқталарда берилса у ҳолда масала *чегаравий масала дейилади*.

Коши масаласи ечилаётган бўлсин, яъни $i=0$ да y_0, $\Delta y_0=y_1-y_0$ ёки y_0 ва y_1 берилган бўлсин. У ҳолда y_0 ва y_1 ларни билган ҳолда $i=1,2,3,...$ лар учун

$$y_{i+1}=\frac{C_iy_i-A_iy_{i-1}-F_i}{B_i},\ B_i\neq 0$$

қийматларни аниқлаш мумкин. Шундай қилиб, y_0 ва y_1 қийматлар берилганда масаланинг ечими мавжуд ва ягонадир. Аммо, иккинчи тартибли тенглама учун математик физикада чегаравий масалалар, яъни қўшимча шартлар қўшни бўлмаган $i=0$ ва $i=N$ да

$$y_0=\mu_1,\qquad y_N=\mu_2$$

қийматлар берилганда $0<i<N$ нуқталар учун y_i қийматларни аниқлаш анча қизиқарлидир (μ_1,μ_2 - берилган сонлар).

$i=0$ ва $i=N$ нуқталарда нафақат функциянинг қийматлари ва биринчи тартибли айирманинг қиймати, балки функция қиймати ва биринчи тартибли айирманинг чизиқли комбинацияси берилиши ҳам мумкин. Умумий ҳолда бундай чегаравий шартларни

$$y_0=\chi_1y_1+\mu_1,\ y_N=\chi_2y_{N-1}+\mu_2 \tag{1.26}$$

кўринишда ёзиш мумкин. (1.26) тенгламанинг биринчисига

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0$$

тенгликни қўйсак, қуйидаги муносабатни ҳосил қиламиз:

$$\chi_1 \Delta y_0 - (1 - \chi_1) y_0 = \mu_1 . \qquad (1.27)$$

$\chi_1 = 0$ бўлган ҳол $i = 0$ нуқтада функциянинг қиймати y_0 берилганлигини англатади (бу эса *биринчи турдаги чегаравий шарт*). Агар $\chi_1 = 1$ бўлса, у ҳолда Δy_0 нинг қиймати берилган бўлади (бу эса *иккинчи турдаги чегаравий шарт*). Агар $\chi_1 \neq 0,$ $\chi_1 \neq 1$ бўлса, $i = 0$ нуқтада функция ва биринчи тартибли айирманинг чизиқли комбинацияси берилган бўлади (бу эса *учинчи турдаги чегаравий шарт*).

Амалиётда айирмали чегаравий масалалар катта аҳамиятга эга. Ҳисоблаш математикасининг энг катта ютуғи математик физиканинг кўпчилик масалаларини ҳисоблашда ҳар бир қадамда (1.6) айирмали тенгламалар системасини (1.26) чегаравий шарт билан ечишдан иборат. Бу масала классик масала бўлиб, ҳисоблаш усуллари назариясининг кўпгина мураккаб масалалари (1.24), (1.26) чегаравий масалага келтирилади. Бундай тенгламалар системасининг матрицаси уч диагоналлидир. Бу матрица қуйидаги кўринишга эга.

$$\begin{bmatrix}
1 & -\chi_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
A_1 & -C_1 & B_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & 0 & \dots & A_i & -C_i & B_i & \dots & 0 & 0 & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & A_{N-1} & -C_{N-1} & B_{N-1} \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\chi_2 & 1
\end{bmatrix}$$

Агар иккинчи ёки учинчи турдаги чегаравий шартлар берилган бўлса, бу матрицанинг тартиби $N+1$ га тенг бўлади. Биринчи турдаги чегаравий шартлар берилган бўлса, матрица $(N-1)$ - тартибга эга бўлади. Бу матрицанинг фақатгина учта диагоналида, яъни бош диагоналда ҳамда бош диагоналнинг пастки ва юқорисидаги қўшни диагоналларда элементлар нолдан фарқли бўлади. Бундай матрицага эга бўлган чизиқли алгебраик тенгламалар системасини ечишнинг самарали усули – Гаусс усули асосида (1.24), (1.26) айирмали чегаравий масалани ҳайдаш усули билан самарали ечиш мумкин.

Мисол. $y'' + x\,y' - 0{,}5\,\dfrac{y}{x} = 1$ тенгламанинг $\begin{cases} y(2) + 2y'(2) = 1, \\ y(2{,}3) = 2{,}15 \end{cases}$ шартларни қаноатлантирувчи ечимини ҳайдаш усули ёрдамида топинг.

Ечиш. $[2;\,2{,}3]$ кесмани $h = 0{,}05$ қадам билан бўлиб, тўр ҳосил қиламиз ва тўртта $x_0 = 2;\, x_1 = 2{,}05;\, x_2 = 2{,}1;\, x_3 = 2{,}15;\, x_4 = 2{,}2;\, x_5 = 2{,}25;\, x_6 = 2{,}3$ тугун нуқталарни ҳосил қиламиз. $x_0 = 2$ ва $x_6 = 2{,}3$ нуқталар чегаравий қолган нуқталар эса ички нуқталар деб аталади. Берилган тенгламани ички нуқталарда айирмали тенглама билан алмаштирамиз:

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + x_i\,\frac{y_{i+1} - + y_{i-1}}{2h} - 0{,}5\,\frac{y_i}{x_i} = 1,\; i = \overline{1,5}.$$

Чегаравий шартлардан эса

$$\begin{cases} y_0 + 2\dfrac{-y_0 + 4y_1 - 3y_0}{2h} = 1, \quad (i = 0), \\ y_6 = 2{,}15, \quad (i = 6) \end{cases}$$

тенгламаларни ҳосил қиламиз ва қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$\alpha_0 = 1, \alpha_1 = 2,\; A = 1,\; \beta_0 = 1, \beta_1 = 0,\; B = 2{,}15,\; p_i = x_i, \quad q_i = -0{,}5 / x_i, f_i = 1, i = \overline{0{,}6}.$$

Ҳайдаш усулининг тўғри йўлида ҳисобланадиган коэффициентлар

$$m_i = \frac{2h^2 q_i - 4}{2 + hp_i}, \quad n_i = \frac{2 - hp_i}{2 + hp_i}, \quad F_i = \frac{2f_i}{2 + hp_i} \left(i = \overline{1,5}\right),$$

$$c_0 = \frac{\alpha_1}{\alpha_0 h - \alpha_1}, \quad d_0 = \frac{Ah}{\alpha_1}, c_i = \frac{1}{m_i - n_i c_{i-1}}, d_i = F_i h^2 - n_i c_{i-1} d_{i-1} \quad \left(i = \overline{1,5}\right).$$

Тўғри йўл бажарилиб, юқоридаги коэффициентлар топилгандан сўнг, тескари йўлда номаълум функция қийматлари қуйидаги формула билан ҳисобланади:

$$y_6 = \frac{Bh + \beta_1 c_5 d_5}{\beta_0 h + \beta_1 (c_5 + 1)}, \quad y_i = c_i (d_i - y_{i+1}) \quad \left(i = \overline{5,0}\right).$$

Бу ерда

$$m_i = -\frac{4 + \frac{0,0025}{x_i}}{2 + 0,05 x_i}, \; n_i = \frac{2 - 0,05 x_i}{2 + 0,05 x_i}, \quad F_i = \frac{2}{2 + 0,05 x_i} \left(i = \overline{1,5}\right),$$

$$c_0 = \frac{2}{0.05 - 2} = -1.02564; \quad d_0 = \frac{0,05}{2} = 0,025\,.$$

Ҳисоблашларни қуйидаги жадвалда келтирамиз:

i	x_i	m_i	n_i	$h^2 F_i$	c_i	d_i	y_i
0	2.00	-	-	-	-1.02564	0.025000	2.2490
1	2.05	-1.903077	0.902497	0.002378	-1.02308	0.095519	2.2178
2	2.10	-1.900803	0.900238	0.002375	-1.02063	0.025878	2.1933
3	2.15	-1.898535	0.897983	0.002372	-1.01830	0.026090	2.1748
4	2.20	-1.896273	0.895734	0.002370	-1.01611	0.026167	2.1618
5	2.25	-1.894017	0.893491	0.002367	-1.01406	0.026123	2.1537
6	2.30	-	-	-	-	-	2.15

Жавоб:

x_i	y_i	x_i	y_i
2.00	2.249	2.20	2.162
2.05	2.218	2.25	2.154
2.10	2.193	2.30	2.150
2.15	2.175		

§ 1.4. Тўр ва тўр функциялар. Ҳар хил соҳаларда тўр қуриш.

Берилган дифференциал тенгламани тақрибий тавсифловчи айирмали схема тузиш учун қуйидаги икки босқични амалга ошириш керак.

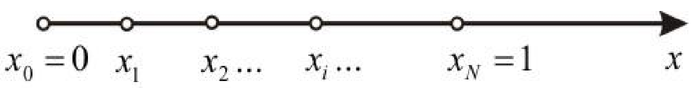
1. Аргументнинг узлуксиз ўзгариш соҳасини дискрет соҳага алмаштириш керак.

2. Дифференциал операторни бирор айирмали оператор билан, шунингдек, чегаравий ва бошланғич шартларни уларнинг айирмали анологи билан алмаштириш керак.

Ушбу процедура амалга оширилгандан кейин алгебраик тенгламалар системасига эга бўламиз. Шундай қилиб, дастлабки берилган (чизиқли) дифференциал тенгламани сонли ечиш масаласи алгебраик тенгламалар системасининг ечимини топиш масаласига келтирилади.

У ёки бу математик физика масаласини сонли ечишда аргументнинг аниқланиш соҳасидаги барча қийматлар учун сонли ечимни аниқлашнинг имкони йўқ. Шу сабабли аргументнинг аниқланиш соҳасидан қандайдир чекли нуқталар тўпламини ажратиб олиш ва тақрибий ечимларни мана шу нуқталардагина излаш лозим бўлади. Бундай чекли нуқталар тўплами *тўр дейилади.* Ажратиб олинган нуқталар *тўрнинг тугун нуқталари дейилади.* Демак, тўрнинг тугун нуқталари ҳисоблаш тўрини ташкил этувчи нуқталардир.

Тўрнинг тугун нуқталарида аниқланган функциялар *тўр функциялар дейилади.* Шундай қилиб, аргументнинг узлуксиз ўзгариш соҳасини тўр билан, яъни аргументнинг дискрет ўзгариш соҳаси билан алмаштирдик. Бошқача қилиб айтганда, биз дифференциал тенглама ечими ётган фазони тўр функциялар фазоси билан аппроксимация қилдик.



1-расм.

1-мисол. Кесмада текис тўр қуриш. Бирлик кесма $[0,1]$ ни N та тенг бўлакка бўламиз (1-расм).

Иккита қўшни тугун нуқталар орасидаги масофа *тўр қадами дейилади.* Бўлиниш нуқталари $x_i = ih$ *тўрнинг тугун нуқталари дейилади.* Кесмадаги тугун нуқталар (тўрнинг фақатгина ички тугун нуқталари) тўплами $\omega_h = \{x_i = ih, i = 1, 2, ..., N-1\}$ ушбу кесмадаги тўрни ташкил қилади. Бу тўпламга $x_0 = 0$, $x_N = 1$ чегаравий нуқталарни ҳам киритсак, ҳосил бўлган тўр $\overline{\omega}_h = \{x_i = ih, i = 1, 2, ..., N-1\}$ каби белгиланади.

$[0,1]$ кесмада узлуксиз аргументнинг функцияси $y(x)$ ўрнига дискрет аргумент функцияси $y_h(x_i)$ ни қараймиз. Бу функциянинг қиймати тўрнинг x_i тугун нуқталарида ҳисобланади, функциянинг ўзи эса тўр қадами h га нисбатан параметр сифатида боғлиқ бўлади.

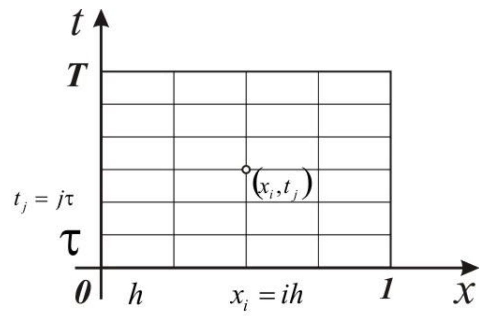
2-мисол. Текисликда текис тўр. Икки аргументли бўлган $u(x,t)$ функциялар тўпламини қараймиз. Аниқланиш соҳаси сифатида $\overline{D} = \{0 \le x \le 1,\ t \le x \le T\}$ тўғри тўртбурчакни танлаймиз (2-расм). x ва t ўқларидаги $[0,1]$ кемаларни мос ҳолда N_1 ва N_2 қисмларга бўламиз. Бўлиниш нуқталаридан бу ўқларга мос ҳолда параллел тўғри чизиқлар ўтказамиз. Бу ўқларни кесишиши натижасида $\overline{\omega}_{h\tau} = \{(x_i, t_j) \in \overline{D}\}$ ҳисоблаш тўрини ташкил қилувчи (x_i, t_j) тугун нуқталарга эга бўламиз.

Ҳосил бўлган тўр x ва t ўқлари бўйича мос ҳолда h ва τ қадамларга эга. Ораларидаги масофа h ёки τ га тенг бўлган бир тўғри (горизонтал ёки вертикал) чизиқда ётувчи нуқталар тўрнинг қўшни тугун нуқталари дейилади.

3-мисол. Кесмада нотекис тўр. $0 \le x \le 1$ кесмани қараймиз. $0 < x_1 < x_2 < ... < x_{N-1} < 1$ ихтиёрий нуқталарни киритиб, бу кесмани N қисмга бўламиз. $\{x_i, i = 0, ..., x_0 = 0, x_N = 1\}$ нуқталар тўплами $\overline{\omega}_h[0,1]$

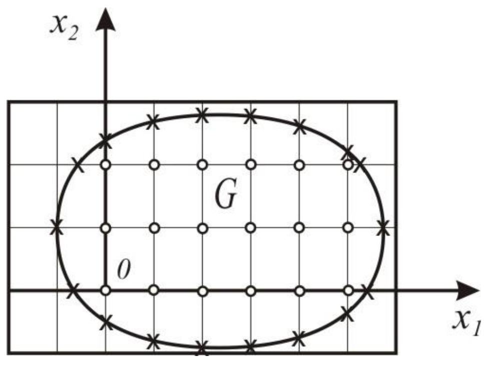
нотекис тўрни ҳосил қилади. Қўшни тугун нуқталар орасидаги масофа тўрнинг қадами бўлиб, у тугун нуқтанинг номери i га боғлик, яъни тўр қадами ҳам ўз навбатида тўр функциядир. Тўрнинг қадамлари қуйидаги шартни қаноатлантиради:

$$\sum_{i=1}^{N} h_i = 1\,.$$



2-расм.

4-мисол. Икки ўлчовли соҳада тўр қуриш.



3-расм.

$x=(x_1,x_2)$ текисликда чегараси Γ бўлган мураккаб шаклла эга бўлган G соҳа берилган бўлсин. $x_1^{(i_1)} = i_1 h_1, i_1 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, $h_1 > 0$ ва $x_2^{(i_2)} = i_2 h_2, i_1 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, $h_1 > 0$ тўғри чизиқлар ўтказамиз. У ҳолда $x=(x_1,x_2)$ текисликда тугун нуқталари $(i_1 h_1, i_2 h_2)$, $i_1, i_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

бўлган тўр ҳосил бўлади. Бу тўр Ox_1 ва Ox_2 ўқларининг ҳар бири бўйича нотекисдир. Бизни фақатгина $\varGamma$ чегарали $\overline{G} = G + \varGamma$ соҳага тегишли бўлган нуқталаргина қизиқтиради. G соҳанинг ичига тушган (i_1h_1, i_2h_2) тугун нуқталар *ички тугун нуқталар дейилади,* ички нуқталар тўплами ω_h билан белгилаймиз (3-расм).

$\varGamma$ чегара билан $x_1^{(i_2)} = i_1h_1$ ва $x_2^{(i_2)} = i_2h_2, i_1, i_2 = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ тўғри чизиқларнинг кесишидан ҳосил бўлган нуқталар *чегаравий нуқталар дейилади,* барча чегаравий нуқталар тўпламини γ_h билан белгилаймиз. 3-расмда $\times$ белги билан чегаравий нуқталар, о белги билан ички тугун нуқталар белгиланган. 3-расмдан кўриниб турибдики, шундай чегаравий нуқталар ҳам мавжудки, улар ўзларига қўшни бўлган ички нуқталардан h_1 ва h_2 дан кичик бўлган масофаларда турибди. Тўр текисликда x_1 ва x_2 ўқларнинг ҳар бири бўйича текис бўлса ҳам, аммо $\overline{G}$ соҳа учун $\overline{\omega} = \omega_h + \gamma_h$ тўр чегаралар атрофида нотекисдир.

Шундай қилиб, x аргументнинг ўзгариш соҳаси $\overline{G}$ ни $\overline{G}$ соҳага тегишли x_i чекли нуқталар тўплами $\overline{\omega}_h$ тўр билан алмаштирдик. Энди $x \in \overline{G}$ узлуксиз аргументнинг функцияси $u(x)$ ўрнига $\overline{\omega}_h = \{x_i\}$ тўрнинг x_i нуқталари функцияси бўлган $y(x_i)$ тўр функцияни қараймиз. Узлуксиз $x \in \overline{G}$ аргументнинг $u(x)$ функцияси бирор H_0 функционал фазонинг элементи бўлса, $y(x_i)$ тўрли функция эса H_h дискрет функциялар фазосининг элементи бўлади. Шундай қилиб, айирмали схемалар усулини қўллаб H_0 фазони $y(x_i)$ тўрли функциялар фазоси H_h билан алмаштирдик. $\overline{\omega}_h$ тўрлар тўпламини қараб, h параметрга боғлиқ бўлган $\{H_h\}$ тўрли функциялар фазосини ҳосил қиламиз. H_h чизиқли фазода дастлабки H_0 функционал фазодаги $\|\cdot\|_0$ норманинг аналоги бўлган $\|\cdot\|_h$ норма киритилади. $0 \le x \le 1$

кесмада қурилган $\omega_h = \{x_i = i\,h\}$ тўрли H_h фазода нормаларни қуйидагича танлаш мумкин:

1) C фазодаги норманинг тўрли аналоги

$\|y\|_C = \max\limits_{x\in\omega_h} |y(x)|$ ёки $\|y\|_C = \max\limits_{0\le i\le N} |y_i|$.

2) L_2 фазодаги норманинг тўрли аналоги

$$\|y\|_h = \left(\sum_{i=1}^{N-1} y_i^2\, h\right)^{1/2} \quad \text{ёки} \quad \|y]\|_h = \left(\sum_{i=1}^{N} y_i^2\, h\right)^{1/2}.$$

Келгусида биз u_h тўрли функцияга эга бўлиб, H_h фазонинг элементи бўлган $y_h - u_h$ айирмани тадқиқ қиламиз. y_h айирмали схема ечимининг дастлабки дифференциал тенглама ечими u га яқинлашиши $\|y_h - u_h\|_h$ сон билан боғлиқ бўлади, бу ерда $\|\cdot\|_h$ H_h фазодаги норма. Шунинг учун $\|\cdot\|_h$ норма $\|\cdot\|_0$ нормани H_0 фазонинг ихтиёрий u элементи учун $\lim\limits_{h\to 0}\|u_h\|_h = \|u\|_0$ маънода аппроксимация қилиши лозим. Ушбу шартни H_h ва H_0 фазодаги нормаларнинг мослашув (келишув) шарти деб атаймиз.

§ 1.5. Оддий дифференциал операторларнинг айирмали аппроксимацияси

L оператор $\vartheta = \vartheta(x)$ функцияга таъсир этувчи дифференциал оператор бўлсин. $L\vartheta$ да иштирок этувчи ҳосилаларни айирмали ҳосилалар билан алмаштириб, $L\vartheta$ ифода ўрнига ϑ_h тўр функция шаблонини ташкил этувчи тугун нуқталардаги қийматларининг чизиқли комбинациясидан иборат бўлган $L_h\vartheta_h$ айирмали ифодага эга бўламиз:

$$L_h\vartheta_h(x) = \sum_{\xi\in Ш(x)} A_h(x,\xi)\,\vartheta_h(\xi)$$

ёки

$$\left(L_h \vartheta_h\right)_i = \sum_{x_i \in Ш(x_i)} A_h\left(x_i, x_j\right)\vartheta_h\left(x_j\right)$$

бу ерда $A_h(x,\xi)$ - коэффициентлар, h - тўр қадами, $Ш(x)$ - x нуқтадаги шаблон. $L\vartheta$ ни $L_h\vartheta_h$ билан бундай алмаштириш *дифференциал операторни айирмали оператор билан аппроксимация қилиш (ёки L операторни айирмали аппроксимацияси) дейилади.*

L операторни айирмали аппроксимацияси одатда аввал локал, яъни фазонинг фиксирланган ихтиёрий x нуқтаси учун ўтказилади. Агар $\vartheta(x)$ узлуксиз функция бўлса, $\vartheta_h(x) = \vartheta(x)$ бўлади. Дифференциал оператор Lни айирмали аппроксимация қилишдан олдин шаблонни танлаш лозим бўлади.

1-мисол. $L\vartheta = d\vartheta / dx$.

Ох ўқида қандайдир x нуқтани фиксирлаймиз. $x-h$ ва $x+h$ ($h>0$) нуқталарни оламиз. $L\vartheta$ аппроксимация қилиш учун қуйидаги ифодалардан ихтиёрий биттасидан фойдаланиш мумкин:

$$L_h^{+}\vartheta \equiv \frac{\vartheta(x+h)-\vartheta(x)}{h} \equiv \vartheta_x, \tag{1.28}$$

$$L_h^{-}\vartheta \equiv \frac{\vartheta(x)-\vartheta(x-h)}{h} \equiv \vartheta_{\bar{x}}. \tag{1.29}$$

(1.28) ифода ўнг айирмали ҳосила (уни ϑ_x билан белгилаймиз), (1.29) ифода эса чап айирмали ҳосила (уни $\vartheta_{\bar{x}}$ билан белгилаймиз) деб аталади. $L_h^{+}\vartheta$ ва $L_h^{-}\vartheta$ айирмали ифодалар иккита нуқтада аниқланган (яъни икки нуқтали x, $x+h$ ва $x-h$, x шаблонлардан фойдаланилган).

Бундан ташқари $d\vartheta / dx$ ҳосилани айирмали аппроксимацияси сифатида (1.28) ва (1.29) ифодаларнинг чизиқли комбинациясидан ҳам фойдаланиш мумкин:

$$L_h^{(\sigma)}\vartheta \equiv \sigma\vartheta_x + (1-\sigma)\vartheta_{\bar{x}}, \tag{1.30}$$

бу ерда σ - ихтиёрий ҳақиқий сон. Хусусан, $\sigma = 0{,}5$ да марказий (икки томонлама) айирмали ҳосилага эга бўлиш мумкин:

$$\vartheta_{\overset{0}{x}} = \frac{1}{2}\left(\vartheta_x - \vartheta_{\bar{x}}\right) = \frac{\vartheta(x+h) - \vartheta(x-h)}{2h}. \tag{1.31}$$

Шундай қилиб, $L\vartheta = \vartheta'$ ҳосилани аппроксимация қилувчи айирмали тенгламалар тўпламини ёзиш мумкин экан. У ёки бу айирмали аппроксимациядан фойдаланилганда қандай хатоликка йўл қўйиш мумкин ва $h \to 0$ да x нуқтада $\psi(x) = L_h\vartheta(x) - L\vartheta(x)$ айирма ўзини қандай тутади деган савол пайдо бўлиши табиий.

$\psi(x) = L_h\vartheta(x) - L\vartheta(x)$ миқдорга x нуқтада $L\vartheta$ нинг *айирмали аппроксимация хатолиги дейилади.* x нуқтанинг $(x - h_0, x + h_0)$ атрофида $\vartheta(x)$ функция етарлича силлиқ ва $h < h_0$ деб ҳисоблаб (h_0 - фиксирланган сон), $\vartheta(x)$ ни Тейлор қаторига ёямиз

$$\vartheta(x \pm h) = \vartheta(x) \pm h\vartheta'(x) + \frac{h^2}{2}\vartheta''(x) + O(h^3).$$

Бу ёйилмаларни (1.28), (1.29) ва (1.31) ифодаларга қўйиб, қуйидагиларга эга бўлиш мумкин:

$$\vartheta_x = \frac{\vartheta(x+h) - \vartheta(x)}{h} = \vartheta'(x) + \frac{h}{2}\vartheta''(x) + O(h^2),$$

$$\vartheta_{\bar{x}} = \frac{\vartheta(x) - \vartheta(x-h)}{h} = \vartheta'(x) + \frac{h}{2}\vartheta''(x) + O(h^2), \tag{1.32}$$

$$\vartheta_{\overset{0}{x}} = \frac{1}{2}\left(\vartheta_x - \vartheta_{\bar{x}}\right) = \frac{\vartheta(x+h) - \vartheta(x-h)}{2h} = \vartheta'(x) + O(h^2).$$

Булардан кўриниб турибдики,

$$\psi = \vartheta_x - \vartheta'(x) = O(h),$$

$$\psi = \vartheta_{\bar{x}} - \vartheta'(x) = O(h),$$

$$\psi = \vartheta_{\overset{0}{x}} - \vartheta'(x) = O(h^2)\,.$$

V - x нуқтанинг $h < h_0$ бўлганда L_h операторни ўз ичига олувчи $Ш(x, h_0)$ атрофида берилган ва етарлича силлиқ $\vartheta \in V$ функциялар синфи бўлсин.
L_h оператор L дифференциал операторни x нуқтада m - $(m > 0)$ *тартиб билан аппроксимация қилади дейилади*, агарда

$$\psi(x) = L_h\vartheta(x) - L\vartheta(x) = O(h^m)$$

тенглик ўринли бўлса.

Шундай қилиб, чап ва ўнг айирмали ҳосилалар $L\vartheta = \vartheta'$ ҳосилани биринчи тартиб билан, марказий айирмали ҳосила эса иккинчи тартиб билан аппроксимация қилар экан.

2-мисол. $L\vartheta = \vartheta'' = \dfrac{d^2\vartheta}{dx^2}$.

Иккинчи тартибли ҳосилани айирмали аппроксимациялашда $(x-h, x, x+h)$ нуқтадан, яъни уч нуқтали шаблондан фойдаланиш мумкин. У ҳолда

$$L_h\vartheta = \frac{\vartheta(x+h) - 2\vartheta(x) + \vartheta(x-h)}{h^2}\,. \qquad (1.33)$$

x нуқтада ўнг айирмали ҳосила $x+h$ нуқтадаги чап айирмали ҳосилага тенг эканлигини, яъни $\vartheta_x(x) = \vartheta_{\bar{x}}(x+h)$ ни эътиборга олсак, (1.33) ни қуйидагича ёзиш мумкин

$$L_h\vartheta = \frac{\vartheta_x(x) - \vartheta_{\bar{x}}(x)}{h} = \frac{1}{h}\left[\vartheta_{\bar{x}}(x+h) - \vartheta_{\bar{x}}(x)\right] = \vartheta_{\bar{x}x}(x). \qquad (1.34)$$

$\vartheta(x)$ функцияни Тейлор қаторига ёйиб, аппроксимация хатолигининг тартиби иккига тенглигини, яъни

$$\vartheta_{\bar{x}x} - \vartheta''(x) = O(h^2)$$

эканлигини кўрсатиш мумкин.

3-мисол. $L\vartheta = \vartheta^{(IV)}$.

$(x-2h,\ x-h,\ x,\ x+h,\ x+2h)$ нуқталардан иборат шаблонни танлаймиз ва $L_h\vartheta = \vartheta_{\bar{x}x\bar{x}x}$ ни аниқлаймиз. $\vartheta_{\bar{x}x}$ ни (1.33) формуладаги ифодасидан фойдаланиб, $\vartheta_{\bar{x}x\bar{x}x}$ учун қуйидагига эга бўлиш мумкин:

$$L_h\vartheta = \vartheta_{\bar{x}x\bar{x}x} = \frac{1}{h^2}\left[\vartheta_{\bar{x}x}(x+h) - 2\vartheta_{\bar{x}x}(x) + \vartheta_{\bar{x}x}(x-h)\right] = .$$

$$= \frac{1}{h^4}\left[\vartheta(x+2h) - 4\vartheta(x+h) + 6\vartheta(x) - 4(x-h) + \vartheta(x-2h)\right].$$

L_h айирмали оператор L дифференциал операторни

$$\vartheta_{\bar{x}x\bar{x}x} - \vartheta^{(4)} = \frac{h^2}{6}\vartheta^{(6)} + O(h^4).$$

иккинчи тартиб билан аппроксимация қилишини кўрсатиш мумкин. Бунинг учун Тейлор қаторининг

$$\vartheta(x \pm kh) = \vartheta(x) + \sum_{s=1}^{7}\frac{(-1)^s k^s h^s}{s!}\frac{d^s\vartheta(x)}{dx^s} + O(h^8)$$

ёйилмасидан $k = 1,2$ лар учун фойдаланиб ва $\vartheta(x+kh) + \vartheta(x-kh)$ йиғинди фақат жуфт даражалардан иборат эканлигини ҳисобга олинса, $\vartheta_{\bar{x}x\bar{x}x}$ учун юқорида келтирилган формулага эга бўлиш мумкин.

Аппроксимация хатолиги $\psi = L_h\vartheta - L\vartheta$ ни h даражалари бўйича Тейлор қаторига ёйишдан аппроксимация хатолиги тартибини оширишда фойдаланиш мумкин. Ҳақиқатдан ҳам,

$$\vartheta_{\bar{x}x} - \vartheta'' = \frac{h^2}{12}\vartheta^{(4)} + O(h^4) = \frac{h^2}{12}\vartheta_{\bar{x}x\bar{x}x} + O(h^4).$$

Агар $(x-2h,\ x-h,\ x,\ x+h,\ x+2h)$ нуқталардан иборат шаблонда

$$L'_h \vartheta = \vartheta_{\bar{x}x} - \frac{h^2}{12}\vartheta_{\bar{x}x\bar{x}x}$$

айирмали оператордан фойдаланилса, бу оператор $L\vartheta = \vartheta''$ ни тўртинчи тартиб билан аппроксимация қилади.

4-мисол. $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - a\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = f(x,t), \quad -\infty < x < +\infty, t > 0$ тенгламани $t = 0$ да $u(x,0) = \psi(x), -\infty < x < +\infty$ бошланғич шартни қаноатлантирувчи $u(x,t)$ ечимини топиш учун айирмали схема қуринг ва аппроксимация хатолигини баҳоланг.

Ечиш. $\frac{\partial u}{\partial t}$ ҳосилани қуйидаги айирмали нисбатларнинг бири билан алмаштириш мумкин:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \approx \frac{u^{(h)}(x,t+\tau) - u^{(h)}(x,t)}{\tau}; \; \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \approx \frac{u^{(h)}(x,t) - u^{(h)}(x,t-\tau)}{\tau};$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \approx \frac{u^{(h)}(x,t+\tau) - u^{(h)}(x,t-\tau)}{2\tau}.$$

Худди шунингдек $\frac{\partial u}{\partial x}$ ҳосилани

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \approx \frac{u^{(h)}(x+h,t) - u^{(h)}(x,t)}{h}, \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \approx \frac{u^{(h)}(x,t) - u^{(h)}(x-h,t)}{h};$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \approx \frac{u^{(h)}(x+h,t) - u^{(h)}(x-h,t)}{2h}$$

ифодаларнинг бири билан алмаштириш мумкин.

Айирмали схеманинг муҳим хоссаларидан бири, тўр нуқталарида айирмали схема ечимининг дифференциал масала ечимига яқинлигидир. Бунинг учун айирмали масала дифференциал масалага «яқин» бўлиши лозим. Ушбу «яқин»лик $\left\|\delta f^{(h)}\right\|_{F_h} = \left\|L_h[u]_h - f^{(h)}\right\|_{F_h}$ миқдор билан баҳоланади, бу ерда $[u]_h$ - дифференциал масала ечимининг тўр тугун нуқталаридаги қиймати.

Энди берилган тенгламани қуйидаги айирмали схема билан алмаштирамиз:

$$\frac{u(x_m,t_{n+1})-u(x_m,t_n)}{\tau}-a\frac{u(x_{m+1},t_n)-u(x_m,t_n)}{h}=f_n,\; m=0,\pm1,\pm2,....,n=0,1,2,......$$

Аппроксимация тартибини аниқлаш учун қуйидаги тенгликдан фойдаланамиз:

$$\delta f^{(h)}=\begin{cases}\dfrac{u(x_m,t_{n+1})-u(x_m,t_n)}{\tau}-a\dfrac{u(x_{m+1},t_n)-u(x_m,t_n)}{h}-f(x_m,t_n),\\ u(x_m,t_0)-\psi(x_m),\quad m=0,\pm1,\pm2,....,n=0,1,...\end{cases}$$

Агар $-\infty<x<+\infty, t\geq 0$ соҳада $\dfrac{\partial u}{\partial t},\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2},\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ҳосилалар мавжуд бўлса,

$$u(x_m,t_{n+1})=u(x_m,t_n)+\frac{\tau}{1\,!}\frac{\partial u(x_m,t_n)}{\partial t}+\frac{\tau^2}{2\,!}\frac{\partial^2 u(x_m,\widetilde{t}_n)}{\partial t^2},$$

$$u(x_{m+1},t_n)=u(x_m,t_n)+\frac{h}{1\,!}\frac{\partial u(x_m,t_n)}{\partial x}+\frac{h^2}{2\,!}\frac{\partial^2 u(\widetilde{x}_m,t_n)}{\partial x^2},\quad t_n\leq\widetilde{t}_n\leq t_{n+1},\; x_m\leq\widetilde{x}_m\leq x_{m+1}$$

тенгликлардан фойдаланиб

$$\delta f^{(h)}=\begin{cases}\dfrac{\partial u(x_m,t_n)}{\partial t}+\dfrac{\tau}{2!}\dfrac{\partial u(x_m,\widetilde{t}_n)}{\partial t}-a\dfrac{\partial u(x_m,t_n)}{\partial x}-a\dfrac{h}{2}\dfrac{\partial^2 u(\widetilde{x}_m,t_n)}{\partial x^2}-f(x_m,t_n),\\ u(x_m,t_0)-\psi(x_m),\quad m=0,\pm1,\pm2,....,n=0,1,...\end{cases}$$

ҳосил қиламиз.

$$\frac{\partial u(x_m,t_n)}{\partial t}-a\frac{\partial u(x_m,t_n)}{\partial x}=f(x_m,t_n),\quad u(x_m,t_0)=\psi(x_m)$$

эканлигини эътиборга олиб, қуйидаги тенгликни оламиз:

$$\delta f^{(h)}=\begin{cases}\dfrac{\tau}{2}\dfrac{\partial^2 u(x_m,\widetilde{t}_n)}{\partial t^2}-a\dfrac{h}{2}\dfrac{\partial^2 u(\widetilde{x}_m,t_n)}{\partial x^2},\\ 0,\\ m=0,\pm1,\pm2,....,n=0,1,...\end{cases}$$

$$f^{(h)} = \begin{cases} \varphi(x_m, t_n),\ m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.., n = 1,2,..., \\ \psi(x_m, t_n),\ m = 0, \pm 1, \pm 2, ... \end{cases}$$

тўрли функция учун $\left\| \delta f^{(h)} \right\|_{F_h} = \max\limits_{m,n} \left| \varphi(x_m, t_n) \right| + \max\limits_{m} \left| \psi(x_m) \right|$ нормани киритиб ва $-\infty < x < +\infty, t \geq 0$ да $\left| \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right| \leq M_x^{(2)}, \left| \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right| \leq M_t^{(2)}$ деб фараз қилиб қуйидаги муносабатни ҳосил қиламиз:

$$\left\| \delta f^{(h)} \right\|_{F_h} = \max_{m,n} \left| \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u(x_m, \widetilde{t}_n)}{\partial t^2} - a \frac{h}{2} \frac{\partial^2 u(\widetilde{x}_m, t_n)}{\partial x^2} \right| \leq \frac{\tau}{2} M_t^{(2)} + |a| \frac{h}{2} M_x^{(2)}.$$

Бу тенглик айирмали схема дифференциал масалани τ ва h бўйича биринчи тартиб билан аппроксимация қилишини кўрсатади.

5-мисол. Икки ўлчовли кўчиш тенгламасини

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad (1.1.1)$$

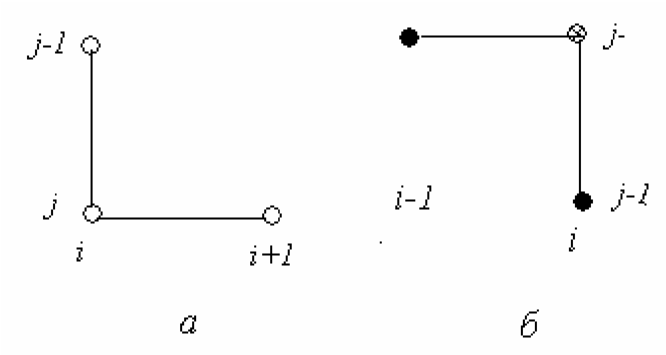
аппроксимация қилувчи Мак-Кормак схемаси қуйидаги кўринишда ёзилиши мумкин:

$$\widetilde{u}_{ij} = u_{ij}^n - \frac{\tau}{h_1} a\left(u_{i+1,j}^n - u_{i,j}^n\right) - \frac{\tau}{h_2} b\left(u_{i,j+1}^n - u_{i,j}^n\right); \qquad (1.1.2)$$

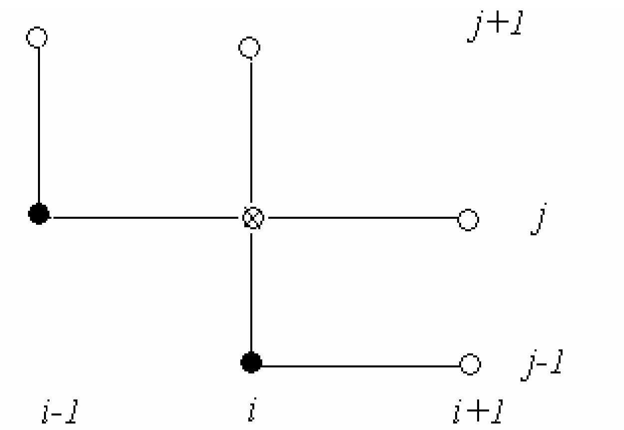
$$u_{ij}^{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j}^n + \widetilde{u}_{ij}\right) - \frac{1}{2}\frac{\tau}{h_1} a\left(\widetilde{u}_{ij} - \widetilde{u}_{i-1j}\right) - \frac{1}{2}\frac{\tau}{h_2} b\left(\widetilde{u}_{ij} - \widetilde{u}_{ij-1}\right), \qquad (1.1.3)$$

бу ерда $u_{ij}^n = u(ih_1, jh_2, n\tau)$, $h_1, h_2 -$ мос равишда x, y ўқлари бўйича, τ - вақт бўйича қадам катталиги. (1.1.2)-(1.1.3) схеманинг n- қатлам шаблонини қуринг. Ушбу шаблон $x = x_i = ih_1$, $y = y_j = jh_2$ чизиқларининг бирортасига нисбатан симметрик бўладими?

Ечиш. Ушбу масалани икки усул билан ечиш мумкин. Биринчиси геометрик қуришга асосланади. Буни қаралаётган схема учун бажарамиз. n-қатлам (1.1.2) тенгламасининг шаблони (бу тенгламани “предиктор” схема деб аталади) 4,а-расмдаги каби бўлади. (1.1.3) тенглама (бу тенгламани “корректор” схема деб аталади) тўрда аниқланган функциянинг қиймати тильда билан белгиланган, унинг шаблони 4,б-расмда кўрсатилган. Энди 4,а-расмда кўрсатилган марказий (i, j) нуқтани 4, б-расмнинг барча нуқталарига жойлаштириб, Мак-Кормак схемасининг 5-расмда кўрсатилган n- қатлам шаблонини ҳосил қилиш мумкин. Ушбу расмдан кўринадики (1.1.2)-(1.1.3) Мак–Кормак схемаси $x = x_i$ чизиққа ҳам, $y = y_j$ чизиққа нисбаттан ҳам симметрик эмас.



4-расм. n - қатлам шаблони.



5-расм. (1.1.2)-(1.1.3) Мак-Кормак схемаси, n - қатлам шаблони.

Иккинчи услуб математик амалларни бажаришга асосланган. (1.1.2) тенгламадан $\widetilde{u}_{ij}$ миқдор u^n тўр ечимнинг $(i, j), (i+1, j), (i, j+1)$ тугун нуқтадаги қийматларига боғлиқлиги келиб чиқади. Буни қуйидаги формулани қўллаб, математик ифодалашимиз мумкин:

$$\tilde{u}_{ij} = F_1\left((i, j), (i+1, j), (i, j+1)\right) \tag{1.1.4}$$

У ҳолда (1.1.3) тенгламадаги $\tilde{u}_{i-1j}$ ечимнинг қиймати (1.1.4) тенгламадан i индексни минус 1 га силжитиб топилади:

$$\tilde{u}_{i-1j} = F_1\left((i-1, j), (i+1, j), (i-1, j+1)\right) \tag{1.1.5}$$

Шунга ўхшаш

$$\tilde{u}_{ij-1} = F_1\left((i, j-1), (i+1, j-1), (i, j+1)\right). \tag{1.1.6}$$

(1.1.3),(1.1.4), (1.1.5) ифоданинг ўнг томондаги барча тўр нуқталарини йиғиб, (1.1.2), (1.1.3) Мак-Кормак схемасининг $\mathrm{St}_{\mathrm{MC}}$ шаблонини ҳосил қиламиз:

$$\mathrm{St}_{\mathrm{MC}} = \{(i-1, j), (i, j), (i+1, j), (i, j+1), (i-1, j+1), (i, j-1), (i+1, j-1)\} \tag{1.1.7}$$

(1.1.7) кўриниб турибдики (1.1.2), (1.1.3) Мак-Кормак схемасининг n - қатлам шаблони 7 та нуқтадан иборат (5-расмга қаранг).

Мисоллар

1. y ва z $a_i\varphi_{i+1} + b_i\varphi_i + c\varphi_{i-1} = 0$, $a_i \neq 0$, $c_i \neq 0$ тенгламанинг икки хусусий ечими бўлсин.

$\begin{vmatrix} y_i & y_{i+1} \\ z_i & z_{i+1} \end{vmatrix}$ дитерменант ҳамма i нуқталарда нолга тенг ёки тенг эмаслигини исботланг.

2. $a_{i+k}\varphi_{i+k} + a_{i+k-1}\varphi_{i+k-1} + \ldots + a_{i-k}\varphi_{i-k} = 0$ айирмали тенглама учун 1-масалага ўхшаш масала тузинг ва тузилган масалани ечинг.

Қуйидаги айирмали тенгламаларни умумий ечимларини топинг.

3. $6\varphi_{i+1} - 5\varphi_i + \varphi_{i-1} = 0$ 4. $2\varphi_{i+1} - 5\varphi_i + 2\varphi_{i-1} = 0$ 5. $\varphi_{i+1} - 4\varphi_i + 4\varphi_{i-1} = 0$.

6. $9\varphi_{i+1}-6\varphi_i+\varphi_{i-1}=0$ 7. $\varphi_{i+1}-4\varphi_i-5\varphi_{i-1}=0$ 8. $5\varphi_{i+1}-6\varphi_i+5\varphi_{i-1}=0$

9. $i\geq 0$ ларда

$$\varphi_{i+1}-\frac{10}{3}\varphi_i+\varphi_{i-1}=0$$

айирмали тенгламанинг $\varphi_0=1$ шартни қаноатлантирувчи чекли ечимларини топинг.

10. Қуйидаги

$$0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,\ldots$$

Фибоначчи сонлар кетма-кетлигининг миллионинчи ҳадини топинг.

11. $$\varphi_{i+1}-2\varphi_i+\varphi_{i-1}=0,\ i=\overline{1,\ n-1},$$

$$\varphi_0=a,\ \varphi_n=b.$$

айирмали тенгламалар системасининг ечимини топинг.

12. $$-\varphi_{i+1}+2\varphi_i-\varphi_{i-1}=h^2\sin(ih),\ i=\overline{1,\ n-1}$$

$$\varphi_0-\varphi_1=-h,\ \varphi_n=1,\ nh=\pi/2$$

айирмали тенгламалар системасининг ечимини топинг.

II БОБ. АЙИРМАЛИ СХЕМАЛАР ҚУРИШ УСУЛЛАРИ.

Берилган шаблонда айирмали схема қуришнинг 3 хил усули мавжуд: айирмали аппроксимация усули, интегро-интерполяцион усул ва номаьлум коэффициентлар усули.

§ 2.1. Айирмали аппроксимация усули.

Айирмали аппроксимация усулида дифференциал тенглама ва қўшимча шартларга кирувчи ҳар бир ҳосила фақатгина шаблонни ташкил қилувчи тугун нуқталарда ифодаланган айирмали ифодалар билан алмаштирилади. Ушбу усул жуда содда бўлганлиги боис қўшимча изоҳларга ҳожат йўқ.

Тўғри тўртбурчакли тўрда узлуксиз (ва етарлича силлиқ) коэффициентли дифференциал тенгламалар учун айирмали аппроксимация усули биринчи ва иккинчи тартибли аппроксимацияга эга бўлган айирмали схемаларни осон тузиш имконини беради. Аммо, ушбу усулни мураккаброқ бўлган ҳоллар учун қўллаш анча мушкул ёки қўллашни имкони бўлмайди. Масалан, узилишли коэффициентга эга бўлган дифференциал тенгламалар учун, ҳисоблаш соҳаси тўғри тўртбурчак бўлмаса, юқори тартибли дифференциал тенгламалар учун нотекис тўрда ва бошқа ҳолларда.

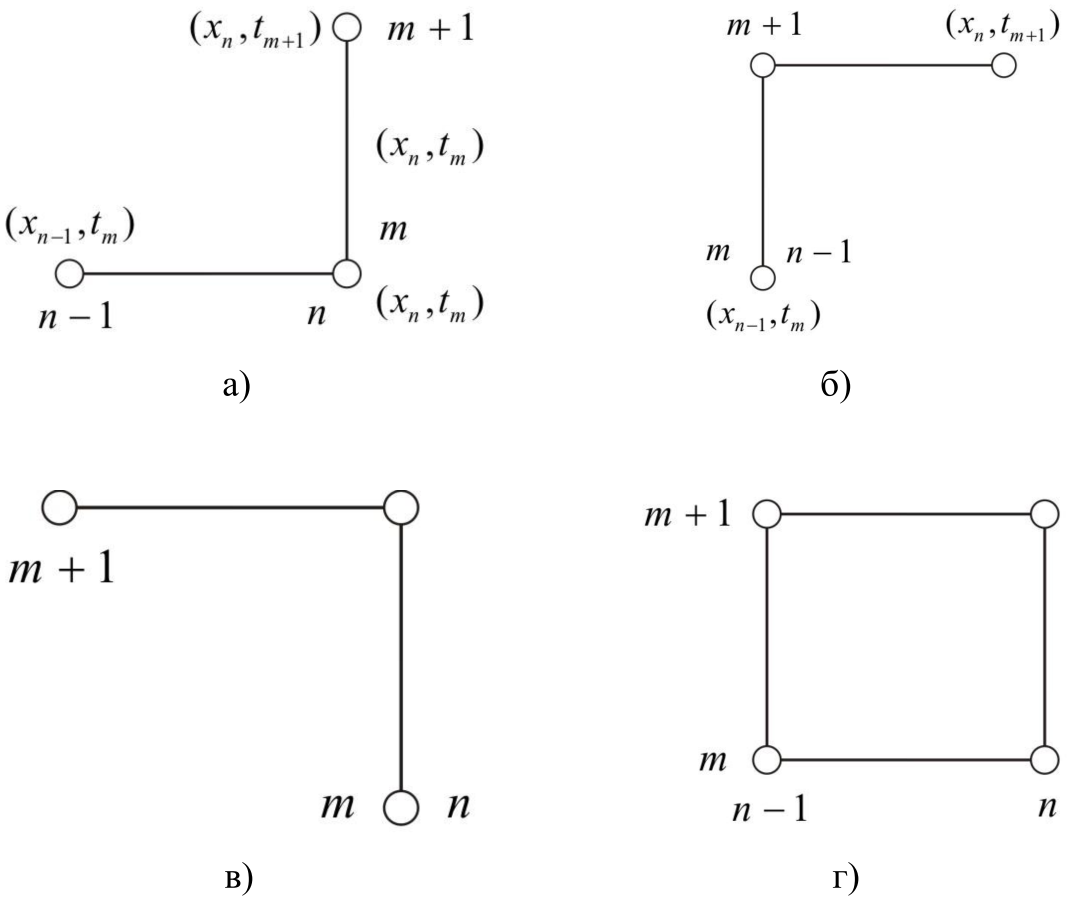
Мисол. Қуйидаги дифференциал масала учун айирмали схема тузиш талаб этилсин:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = f(x,t),\ 0 < x \le 1, \tag{2.1}$$

$$u(x,0) = \mu_1(x),\ 0 < x \le 1, \tag{2.2}$$

$$u(0,t) = \mu_2(t),\ 0 \le t \le T. \tag{2.3}$$

Айирмали аппроксимация усули бўйича айирмали схема тузиш учун шаблон танлаймиз. Бунинг учун 4-(а, б, в, г) расмларда келтирилган шаблонлардан фойдаланамиз. Ушбу шаблонлардан (2.1) дифференциал тенгламани қуйидагича аппроксимация қилиш мумкин.



6-расм.

а) шаблон учун:

$$\frac{y_n^{m+1} - y_n^m}{\tau} + c\frac{y_n^m - y_{n-1}^m}{n} = f(x_n, t_m)$$

б) шаблон учун:

$$\frac{y_{n-1}^{m+1} - y_{n-1}^m}{\tau} + c\frac{y_n^{m+1} - y_{n-1}^{m+1}}{n} = f(x_n - 0{,}5h,\, t_m + 0{,}5\tau)$$

в) шаблон учун:

$$\frac{y_n^{m+1} - y_n^m}{\tau} + c\frac{y_n^{m+1} - y_{n-1}^{m+1}}{h} = f(x_n - 0{,}5h,\, t_m + 0{,}5\tau)$$

г) шаблон учун:

$$\frac{y_n^{m+1}+y_{n-1}^{m+1}-y_n^m+y_{n-1}^m}{2\tau}+c\frac{y_n^{m+1}+y_n^m-y_{n-1}^{m+1}-y_{n-1}^m}{2h}=f(x_n-0,5h,\,t_m+0,5\tau)$$

Қўшимча шартлар барча ҳоллар учун қуйидагича аппроксимация қилинади:

$$y_n^0=\mu_1(nh),\ \ n=\overline{0,N}\ ,h=\frac{a}{N}.$$

$$y_0^m=\mu_2(\tau m),\ \ m=\overline{0,M}\ ,\ \tau=\frac{T}{M}.$$

§ 2.2. Интегро-интерполяцион усул.

Ушбу усулни баланс усули ҳам деб номлашади. $D=\{0\le x\le 1, 0\le t\le T\}$ тўғри тўртбурчакда

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t), \tag{2.4}$$

дифференциал тенгламани ва

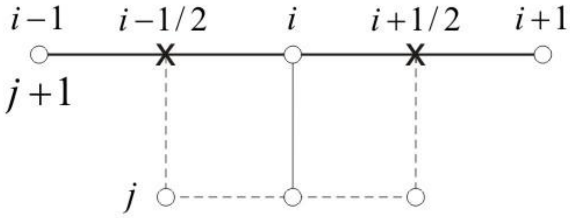
$$u(x,0)=u_0(x),\ 0\le x\le 1, \tag{2.5}$$

$$u(0,t)=u_1(t),\ u(1,t)=u_2(t),\ \ 0\le t\le T, \tag{2.6}$$

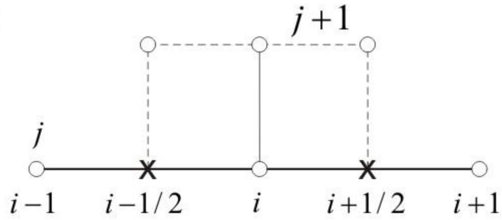
қўшимча шатрларни қаноатлантирувчи $u=u(x,t)$ функцияни аниқлаш талаб этилган бўлсин. Ушбу масалани сонли ечиш учун $D=\{0\le x\le 1, 0\le t\le T\}$ соҳада текис тўр қурамиз.

$\overline{\omega_h}=\left\{x_i=ih,\ \ i=\overline{0,N},\ h=1/N\ \right\}$ $0\le x\le 1$ кесмада h қадамли текис тўр бўлсин ва $\overline{\omega_\tau}=\left\{t_j=j\tau,\ \ \ j=\overline{0,M},\ \ \tau=T/M\ \right\}$ $0\le t\le T$ кесмада τ қадамли тўр бўлсин. У ҳолда $\overline{\omega}_{h\tau}=\overline{\omega}_h\cdot\omega_\tau=\left\{(x_it_j);\ \ x_i \ni \overline{\omega}_h,\ \ \ t_j\ni\omega_\tau\right\}$ - $D=\{0\le x\le 1, 0\le t\le T\}$ тўғри тўртбурчакда h ва τ қадамлар билан қурилган тўрни англатади.

Интегро-интерполяцион усул ёрдамида (2.4) дифференциал тенгламани айирмали схема билан аппроксимация қилиш учун (2.4) тенгламани $x_{i-0,5} \le x \le x_{i+0,5}$, $t_{i-0,5} \le t \le t_{i+0,5}$ тўғри тўртбурчакда интеграллаймиз:



7-расм



8-расм

$$\frac{1}{h\tau}\int\limits_{x_{i-0,5}}^{x_{i+0,5}}\left[u(x,t_{j+1})+u(x,t)\right]dx=\frac{1}{h\tau}\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}}\left[\frac{\partial u}{\partial x}(x_{i+\frac{1}{2}},t)-\frac{\partial u}{\partial x}(x_{i-\frac{1}{2}},t)\right]dt+$$

$$+\frac{1}{h\tau}\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}}dt\int\limits_{x_{i-0,5}}^{x_{i+0,5}}f(x,t)dx \qquad (2.7)$$

(2.7) тенгликка кирувчи интегралларни қуйидагича аппроксимациялаймиз:

$$\int\limits_{x_{i-0,5}}^{x_{i+0,5}}u(x,t):\ h\cdot u(x_i,t),\ \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}}\frac{\partial u(x_{i+0,5},t)}{\partial x}:\ \tau u_{\bar{x},i+1}^{j+1}$$

$$\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}}dt\int\limits_{x_{i-0,5}}^{x_{i+0,5}}f(x,t)dx:\ h\tau 0,5(f(x_i,t_j)+f(x_i,t_{j+1}))$$

У ҳолда (2.7) тенгликдан қуйидаги ошкормас айирмали схемага эга бўлиш мумкин:

$$\frac{u_i^{j+1}-u_i^j}{\tau}=\frac{1}{h}\left[u_{\bar{x},i+1}^{j+1}-u_{\bar{x},i}^{j+1}\right]+\frac{1}{2}\left[f_i^j+f_i^{j+1}\right]$$

ёки

$$\frac{u_i^{j+1}-u_i^j}{\tau}=\frac{u_{i+1}^{j+1}-2u_i^{j+1}+u_{i-1}^{j+1}}{h^2}+\frac{1}{2}\left[f_i^j+f_i^{j+1}\right].$$

Энди (2.4) тенгламани 8–расмда кўрсатилган ячейка бўйича интеграллаймиз:

$$\frac{1}{h\tau}\int\limits_{x_{i-0,5}}^{x_{i+0,5}}\left[u(x,t_{j+1})+u(x,t_j)\right]dx=\frac{1}{h\tau}\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}}\left[\frac{\partial u(x_{i+\frac{1}{2}},t)}{\partial x}-\frac{\partial u(x_{i-\frac{1}{2}},t)}{\partial x}\right]dt+$$

$$+\frac{1}{h\tau}\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}}dt\int\limits_{x_{i-0,5}}^{x_{i+0,5}}f(x,t)dx \qquad (2.8)$$

(2.8) тенгламага кирувчи интеграллардан $\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}}\frac{\partial u(x_{i+0,5},t)}{\partial x}: \ \tau u^{j}_{\bar{x},i+1}$ ва

$\frac{1}{h\tau}\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}}dt\int\limits_{x_{i-0,5}}^{x_{i+0,5}}f(x,t)dx: \ \frac{h\tau}{3}(f(x_{i-1},t_j)+f(x_i,t_j)+f(x_{i+1},t_j))$ аппроксимация

қилсак ошкор айирмали схемага эга бўлиш мумкин:

$$\frac{u_i^{j+1}-u_i^j}{\tau}=\frac{u_{i+1}^j-2u_i^j+u_{i-1}^j}{h^2}+\frac{1}{3}(f_{i-1}^j+f_i^j+f_{i+1}^j)$$

қўшимча шартлар иккала ҳолда ҳам

$$u_i^0=u_0(x_i) \quad , \quad y_0^j=\mu_1\left(t_j\right) \quad , \quad u_N^j=\mu_2\left(t_j\right)$$

кўринишда аппроксимация қилинади.

§ 2.3. Номаьлум коэффициентлар усули.

Номаьлум коэффициентлар усулида айирмали схема сифатида номаьлум тўр функциянинг шаблонни ташкил қилувчи тугун нуқталардаги қийматларининг чизиқли комбинацияси олинади. Ушбу чизиқли комбинациянинг коэффициентлари айирмали схема берилган дифференциал тенгламани тўр қатламлари бўйича иложи борича юқори тартибда аппроксимация қилиш шартидан топилади.

Масалан,

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

тенглама учун

$$Ш(x,t)=\left\{\left(x_{i-1},t_j\right);\left(x_i,t_j\right);\ \left(x_{i+1},t_j\right);\left(x_i,t_{j+1}\right);\right\}$$

шаблонда айирмали схема қуриш талаб этилган бўлсин. Демак айирмали схема

$$\alpha u_{i-1}^j+\beta u_i^j+\gamma u_{i+1}^j+\mu u_i^{j+1}=0. \tag{2.9}$$

кўринишда экан. u_{i-1}^j , u_{i+1}^j ва u_i^{j+1} тўр функцияларни (x_i,t_j) нуқта атрофида Тейлор қаторига ёйиб, (2.9) тенгламага қўямиз.

$$\alpha u_{i-1}^j+\beta u_i^j+\gamma u_{i+1}^j+\mu u_i^{j+1}=$$

$$\alpha\left(u_i^j-h\frac{\partial u(x_i,t_j)}{\partial x}+\frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u(x_i,t_j)}{\partial x^2}+\frac{h^3}{6}\frac{\partial^3 u(x_i,t_j)}{\partial x^3}+\ldots\right)+$$

$$+\beta\left(u_i^j+\gamma(u_i^j+h\frac{\partial u(x_i,t_j)}{\partial x}+\frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u(x_i,t_j)}{\partial x^2}+\frac{h^3}{6}\frac{\partial^3 u(x_i,t_j)}{\partial x^3}+\ldots\right)+$$

$$+\mu\left(u_i^j+\tau\frac{\partial u(x_i,t_j)}{\partial t}+\frac{\tau^2}{2}\frac{\partial^2 u(x_i,t_j)}{\partial t^2}+\frac{h^3}{6}\frac{\partial^3 u(x_i,t_j)}{\partial t^3}+\ldots\right)=$$

$$\left(\alpha+\beta+\gamma+\mu\right)u_i^j+\left(\gamma-\alpha\right)h\frac{\partial u\left(x_i,t_j\right)}{\partial x}+\frac{h^2}{2}\left(\alpha+\gamma\right)\frac{\partial^2 u\left(x_i,t_j\right)}{\partial x^2}$$

$$+\mu\tau\frac{\partial u\left(x_i,t_j\right)}{\partial t}+O\left(h^3+\tau^2\right). \tag{2.10}$$

(2.10) тенгликдан $\alpha u_{i-1}^{j} + \beta u_i^j + \gamma u_{i+1}^j + \mu u_i^{j+1} = (\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2})_{(x_i, t_j)} + O(h^3 + \tau^2)$ бўлиши учун α, β, γ ва μ коэффициентлар қуйидаги тенгламалар системасини қаноатлантириши керак.

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma + \mu = 0 \\ \gamma - \alpha = 0 \\ \alpha + \gamma = -\dfrac{2}{h^2} \\ \mu\tau = 1 \end{cases} . \tag{2.11}$$

(2.11) тенгламалар системасини ечиб, $\alpha = \gamma = -\frac{1}{h^2}$, $\mu = \frac{1}{\tau}$ ва $\beta = \frac{2}{h^2} = -\frac{1}{\tau}$ эканлигини аниқлаймиз. Коэффициентларни бу қийматларини (2.10) га қўямиз:

$$-\frac{u_{i-1}^j}{h^2} + \frac{2u_i^j}{h^2} - \frac{u_i^j}{\tau} - \frac{u_{i+1}^j}{h^2} + \frac{u_i^{j+1}}{\tau} = 0 \quad \text{ёки}$$

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} - \frac{u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j}{h^2} = 0 \tag{2.12}$$

Демак,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

дифференциал тенгламани $Ш(x_i, t_i) = \left\{ \left(x_{i-1}, t_j \right); \left(x_i, t_j \right); \left(x_{i+1}, t_j \right); \left(x_i, t_{j+1} \right); \right\}$ шаблонда аппроксимация қилувчи айирмали схема қуйидаги кўринишга эга экан:

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} = \frac{u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j}{h^2}.$$

Энди $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ дифференциал тенгламани

$$Ш(x_i,t_j)=\{(x_i,t_j)\quad (x_{i-1},t_{j+1})\quad (x_i,t_{j+1})\quad (x_{i+1},t_{j+1})\}$$

шаблонда аппроксимация қилувчи айирмали тенгламани топамиз. Бу ҳолда айирмали схема

$$\alpha u_i^j+\beta u_{i-1}^{j+1}+\gamma u_i^{j+1}+\mu u_{i+1}^{j+1}=0. \qquad (2.13)$$

кўринишда бўлади. (2.13) да u_{i-1}^{j+1}, u_i^{j+1}, u_{i+1}^{j+1} тўр функцияларни (x_i,t_j) нуқта атрофида Тейлор қаторига ёямиз:

$$u_i^{j+1}=u_i^j+\tau\frac{\partial u(x_i,t_j)}{\partial t}+\frac{\tau^2}{2}\frac{\partial^2 u(x_i,t_j)}{\partial t^2}+\frac{\tau^3}{6}\frac{\partial^3 u(x_i,t_j)}{\partial t^3}+\frac{\tau^4}{24}\frac{\partial^4 u(x_i,t_j)}{\partial t^4}+\dots$$

$$u_{i-1}^{j+1}=u_i^j-h\frac{\partial u(x_i,t_j)}{\partial x}+\tau\frac{\partial u(x_i,t_j)}{\partial t}+\frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u(x_i,t_j)}{\partial x^2}+\frac{\tau^2}{2}\frac{\partial^2 u(x_i,t_j)}{\partial t^2}-$$

$$-h\tau\frac{\partial^2 u(x_i,t_j)}{\partial x\partial t}-\frac{h^3}{6}\frac{\partial^3 u(x_i,t_j)}{\partial x^3}+\frac{\tau^3}{6}\frac{\partial^3 u(x_i,t_j)}{\partial t^3}+\frac{h^2\tau}{2}\frac{\partial^3 u(x_i,t_j)}{\partial x^2\partial t}-\frac{h\tau^2}{2}\frac{\partial^3 u(x_i,t_j)}{\partial x\partial t^2}+\dots$$

$$u_{i+1}^{j+1}=u_i^j+h\frac{\partial u(x_i,t_j)}{\partial x}+\tau\frac{\partial u(x_i,t_j)}{\partial t}+\frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u(x_i,t_j)}{\partial x^2}+\frac{\tau^2}{2}\frac{\partial^2 u(x_i,t_j)}{\partial t^2}+$$

$$+h\tau\frac{\partial^2 u(x_i,t_j)}{\partial x\partial t}+\frac{h^3}{6}\frac{\partial^3 u(x_i,t_j)}{\partial x^3}+\frac{\tau^3}{6}\frac{\partial^3 u(x_i,t_j)}{\partial t^3}+\frac{h^2\tau}{2}\frac{\partial^3 u(x_i,t_j)}{\partial x^2\partial t}+\frac{h\tau^2}{2}\frac{\partial^3 u(x_i,t_j)}{\partial x\partial t^2}+\dots$$

У ҳолда

$$\alpha u_i^j+\beta u_{i-1}^{j+1}+\gamma u_i^{j+1}+\mu u_{i+1}^{j+1}=\alpha u(x_i,t_j)+\beta\big[u(x_i,t_j)-hu'_x(x_i,t_j)+u'_t(x_i,t_j)+$$

$$+0{,}5h^2u''_{xx}(x_i,t_j)+0{,}5\tau^2u''_{tt}(x_i,t_j)-h\tau u''_{xt}(x_i,t_j)-\frac{h^3}{6}u'''_{xxx}(x_i,t_j)+\frac{\tau^3}{6}u'''_{ttt}(x_i,t_j)+$$

$$+\frac{h^2\tau}{2}u'''_{xxt}(x_i,t_j)-\frac{h\tau^2}{2}u'''_{xtt}(x_i,t_j)+\frac{h^4}{24}u''''_{xxxx}(x_i,t_j)-\frac{h^3\tau}{6}u''''_{xxxt}(x_i,t_j)+$$

$$+\frac{h^2\tau^2}{4}u''''_{xxtt}(x_i,t_j)-\frac{h\tau^3}{6}u''''_{xttt}(x_i,t_j)+\frac{\tau^4}{24}u''''_{tttt}(x_i,t_j)+\dots\Big]+$$

$$+\gamma\left[u\left(x_i,t_j\right)+\tau u_t'\left(x_i,t_j\right)+0{,}5\tau^2u_{tt}''\left(x_i,t_j\right)+\frac{\tau^3}{6}u_{ttt}'''\left(x_i,t_j\right)+\frac{\tau^4}{24}u_{ttt}'''\left(x_i,t_j\right)+\ldots\right]+$$

$$+\mu\left[u\left(x_i,t_j\right)+hu_x'\left(x_i,t_j\right)+u_t'\left(x_i,t_j\right)+\right.$$

$$+0{,}5h^2u_{xx}''\left(x_i,t_j\right)+0{,}5\tau^2u_{tt}''\left(x_i,t_j\right)+h\tau u_{xt}''\left(x_i,t_j\right)+\frac{h^3}{6}u_{xxx}'''\left(x_i,t_j\right)+\frac{\tau^3}{6}u_{ttt}'''\left(x_i,t_j\right)+$$

$$+\frac{h^2\tau}{2}u_{xxt}'''\left(x_i,t_j\right)+\frac{h\tau^2}{2}u_{xtt}'''\left(x_i,t_j\right)+\frac{h^4}{24}u_{xxxx}''''\left(x_i,t_j\right)+\frac{h^3\tau}{6}u_{xxxt}''''\left(x_i,t_j\right)+$$

$$\left.+\frac{h^2\tau^2}{4}u_{xxtt}''''\left(x_i,t_j\right)+\frac{h\tau^3}{6}u_{xttt}''''\left(x_i,t_j\right)+\frac{\tau^4}{24}u_{tttt}''''\left(x_i,t_j\right)+\ldots\right]$$

Ўхшаш ҳадларни ихчамлаб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\alpha u_i^j+\beta u_{i-1}^{j+1}+\gamma u_i^{j+1}+\mu u_{i+1}^{j+1}=\left[\alpha+\beta+\gamma+\mu\right]u\left(x_i,t_j\right)+h(\mu-\beta)u_x'\left(x_i,t_j\right)+$$

$$+\tau(\beta+\gamma+\mu)u_t'\left(x_i,t_j\right)+0{,}5h^2(\beta+\mu)u_{xx}''\left(x_i,t_j\right)+0{,}5\tau^2(\beta+\gamma+\mu)u_{tt}''\left(x_i,t_j\right)+$$

$$+h\tau(\mu-\beta)u_{xt}''\left(x_i,t_j\right)+\frac{h^3}{6}(\mu-\beta)u_{xxx}'''\left(x_i,t_j\right)+\frac{\tau^3}{6}(\beta+\gamma+\mu)u_{ttt}'''\left(x_i,t_j\right)+$$

$$+0{,}5h^2\tau(\beta+\mu)u_{xxt}'''\left(x_i,t_j\right)+0{,}5h^2\tau(\mu-\beta)u_{xtt}'''\left(x_i,t_j\right)+\frac{h^4}{24}(\beta+\mu)u_{xxxx}''''+$$

$$+\frac{h^3\tau}{6}(\mu-\beta)u_{xxxt}''''\left(x_i,t_j\right)+\frac{h^2\tau^2}{4}(\beta+\mu)u_{xxxt}''''\left(x_i,t_j\right)+\frac{h\tau^3}{6}(\mu-\beta)u_{xttt}''''\left(x_i,t_j\right)+$$

$$+\frac{h\tau^3}{6}(\mu-\beta)u_{xttt}''''\left(x_i,t_j\right)+\frac{\tau^4}{24}(\beta+\mu)u_{tttt}''''\left(x_i,t_j\right)+\ldots.$$

Охирги тенгликда қуйидагиларни бажарилишини талаб қиламиз:

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma + \mu = 0 \\ \beta + \gamma + \mu = \dfrac{1}{\tau} \\ \beta + \mu = -\dfrac{2}{h^2} \\ \mu - \beta = 0 \end{cases}.$$

Бу тенгламалар системасини ечиб, номаълум $\alpha, \beta, \gamma, \mu$ параметрларни қийматларини аниқлаймиз:

$$\alpha = -\frac{1}{\tau}, \quad \beta = \mu = -\frac{1}{h^2}, \quad \gamma = \frac{1}{\tau} + \frac{1}{h^2}.$$

Параметрларнинг ушбу қийматларида

$$\alpha u_i^j + \beta u_{i-1}^{j+1} + \gamma u_i^{j+1} + \mu u_{i+1}^{j+1} = \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{(x_i, t_j)} - 0{,}5\tau u''_{tt}(x_i, t_j) + \frac{\tau^2}{6} u'''_{ttt}(x_i, t_j) -$$

$$- \frac{h^2}{12} u''''_{xxxx}(x_i, t_j) - \frac{\tau^2}{2} u''''_{xxxx}(x_i, t_j) + - \frac{h^2 \tau^4}{12} u''''_{tttt}(x_i, t_j) + ... \qquad (2.13')$$

$\alpha, \beta, \gamma, \mu$ параметрларнинг топилган қийматларини (2.13) тенгламага қўйсак, биз қурган айирмали схеманинг кўриниши келиб чиқади:

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} - \frac{u_{i-1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i-1}^{j+1}}{h^2} = \frac{\partial u(x_i, t_j)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(x_i, t_j)}{\partial t^2} + O(\tau, h^2).$$

Демак, $Ш(x_i, t_j) = \{(x_i, t_j) \;\; (x_{i-1}, t_{j+1}) \;\; (x_i, t_{j+1}) \;\; (x_{i+1}, t_{j+1})\}$ шаблонда қурилган айирмали схема ошкормас бўлиб, берилган дифференциал масалани τ бўйича биринчи тартиб билан ва h бўйича иккинчи тартиб билан аппроксимация қилар экан.

§ 2.4. Чегаравий шартларни айирмали аппроксимация қилиш.

Фараз қилайлик, $D = \{0 \le x \le 1\ ,\ 0 \le t \le T\}$ соҳада қуйидаги дифференциал масала берилган бўлсин:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ 0 \le x \le 1\ ,\ 0 \le t \le T\ , \tag{2.14}$$

$$u(x,0) = \mu(x)\ ,\ u_x(0,t) = \mu_1(t)\ ,\ u_x(1,t) = \mu_2(t)$$

Бу ерда $u_x(0,t) = \mu_1(t)$ чегаравий шартни

$$\frac{y_1^{j+1} - y_0^{j+1}}{h} = \mu_1(t_{j+1})$$

айирмали тенглама билан аппроксимация қилиш мумкин. Маьлумки, ушбу айирмали ҳосила берилган чегаравий шартни $O(h)$ билан аппроксимация қилади. Бу эса масалани ечишдаги умумий аниқликни пасайишига олиб келади. Бундай ҳолатдан чиқиш учун чегаравий шартларни айирмали аппроксимация қилиш усуллари билан танишамиз.

Фиктив нуқталар усули. $0 \le x \le 1$ кесма ташқарисида $x_{-1} = x_0 - h$ тугун нуқта киритамиз ва ушбу x_{-1} нуқтада ҳам берилган (2.14) тенглама ўринли деб ҳисоблаймиз. $i = 0$ нуқтада (2.14) тенгламани аппроксимация қилувчи айирмали тенгламани ёзамиз.

$$\frac{y_0^{j+1} - y_0^j}{\tau} = \frac{y_{-1}^j - 2y_0^j + y_1^j}{h^2} \tag{2.15}$$

Чап чегаравий шартни марказий айирмали ҳосила билан аппроксимация қиламиз.

$$\frac{y_1^j - y_{-1}^j}{2h} = \mu_1(t_j)\,. \tag{2.16}$$

Энди (2.16) дан $y_{-1}^j = y_1^j - 2h\mu_1$ ни аниқлаб, уни (2.15) тенгликга қўйсак ва соддалаштирсак,

$$\frac{y_1^j - y_0^j}{h} = \mu_1\left(t_j\right) + \frac{h}{2\tau}\left(y_0^{j+1} - y_0^j\right) \qquad (2.17)$$

айирмали тенгламага эга бўлиш мумкин. Бу тенгламадан y_0^{j+1} ни ошкор ҳолда аниқлаш мумкин.

Аппроксимация хатолигини камайтириш усули. $u(x_1,t)$ функцияни (x_0,t) нуқта атрофида Тейлор қаторига ёямиз:

$$u(x_1,t) = u(x_0,t) + hu_x(x_0,t_j) + \frac{h^2}{2}u_{xx} + \dots$$

Чегаравий шартга кўра $u_x(0,t) = \mu_1(t)$ ва $u_{xx} = u_t$ эканлигини ҳисобга олиб, уларни Тейлор қаторига қўямиз:

$$u(x_1,t) = u(x_0,t) + h\mu_1(t) + \frac{h^2}{2}u_t(x_0,t) + \dots$$

Бу ерда $u_t \approx y_0^{j+1} - y_0^j / \tau$ эканлигини ҳисобга олсак, яна (2.17) чегаравий шартга эга бўлиш мумкин. Ўнг чегаравий шартга нисбатан ҳам баён этилган амалларни қўллаш мумкин.

Мисол. (3.1.1)-(3.1.2) кўчиш тенгламасини аппроксимация қилувчи (қаранг §3.5) (3.1.3) Лакс схемасини тадқиқ қилишдан тушунарлики, вақт бўйича τ қадамни $\tau = O(h)$ каби танланса мазкур схема турғун бўлади. Вақт бўйича τ қадамни $\tau = O(h^2)$ каби танланса ҳам схема турғун бўлади. Агар $h \to 0$ да τ ни

$$\tau = h^2/\mu, \quad \mu = const > 0 \qquad (2.1.1)$$

кўринишда олинса (3.1.3) Лакс схемаси (3.1.1)-(3.1.2) кўчириш тенгламасини аппроксимация қиладими?

Ечиш. Дастлаб Лакс схемаси аппроксимация хатолигининг бош ҳадини топамиз. Бунинг учун (3.1.3) тенгликка қуйидаги Тейлор қаторига $(jh, n\tau)$ нуқта атрофида ёйилган қуйидаги ифодаларни қўямиз:

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \tau u_t + \frac{\tau^2}{2} u_{tt} + O(\tau^3);\ u_{j\pm1}^n = u_j^n \pm \tau u_x + \frac{h^2}{2} u_{xx} + O(h^3)\ .$$

Натижада Лакс схемасининг биринчи дифференциал яқинлашишини топамиз:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{h^2}{2\tau}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ . \qquad (2.1.2)$$

Ушбу тенгликка τ учун ёзилган (2.1.1) ифодани қўямиз ва қуйидаги тенгликни ҳосил қиламиз:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{h^2}{2\mu}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\mu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ . \qquad (2.1.3)$$

(2.1.3.) тенгликдан кўринадики, $h \to 0$да Лакс схемаси (3.1.1) тенгламани эмас, балки

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\mu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

параболик тенгламани аппроксимация қилади. Лакс схемаси шартли аппроксимация қилувчи схемага мисол бўлади.

Мисоллар

1. $$\lim_{h\to0}\frac{u(x+h)-2u(x)+u(x-h)}{h^2} =$$

$$= \lim_{h\to0}\frac{\dfrac{u(x+2h)-u(x)}{2} - 2u(x) + \dfrac{u(x)-u(x-2h)}{2}}{h^2} =$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{u\left(x+h\right)-u\left(x-h\right)}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{u\left(x+2h\right)+u\left(x\right)}{2}-\dfrac{u\left(x\right)-u\left(x-2h\right)}{2}}{2h},$$

Агар $u(x)\in C^4$ бўлса, келтирилган тенгликлар ўринлими?

2. $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ нинг қандай қийматларида

$$\frac{-\varphi_{i+1}+2\varphi_i-\varphi_{i-1}}{h^2}+\left(\alpha\varphi_{i+1}+\beta\varphi_i+\gamma\varphi_{i-1}\right)=f\left(x_i\right)+\frac{h^2}{12}f''\left(x_i\right),$$

$$\varphi_0=0,\varphi_n=0\,,i=\overline{1,\ n-1},\ x_i=ih,\ h=1/n$$

айирмали схема

$$-\frac{d^2u}{dx^2}+u=f(x),\ x\in[0,1]$$

$$u(0)=0\,,\ \ u(1)=0$$

масалани тўртинчи тартиб билан аппроксимация қилади?

3. $$\frac{du}{dx}+2u\cos x=\cos x+\sin\left(2x\right),\ x\in\left[0,1\right],$$

$$u(0)=0$$

дифференциал масала

$$\frac{\varphi_{i+1}-\varphi_i}{h}+a_i\,\frac{\varphi_{i+1}+\varphi_i}{2}=f_i\,,$$

$$\varphi_0=0\,,\ i=\overline{0,\ n-1},\ h=1/n$$

айирмали схема орқали нечанчи тартибда аппроксимация қилинишини аниқланг. Бу ерда

$$a_i=\cos x_i+\cos x_{i+1},\ f_{\ i}=\frac{1}{2}a_i+\frac{1}{2}\left(\sin\left(2x_i\right)+\sin\left(2x_{i+1}\right)\right),$$

аниқланиш соҳаси f^h сифатида

$$Df^h = \left\{x_{i+1/2},\ i = \overline{0,\ n-1}\right\}$$

$$x_i = ih,\ \ x_{i+1/2} = ih + h/2$$

ни олинг.

4. $Df^h = \left\{x_i,\ i = \overline{0,\ n-1}\right\},\ x_i = ih$

аниқланиш соҳаси f^h учун 3-масалани ечинг.

5. $a_i = 2\cos x_i,\ f_i = \cos x_{i+1} + \sin\left(2x_{i+1}\right)$

$$Df^h = \left\{x_{i+1/2},\ i = \overline{0,\ n-1}\right\},\ x_i = ih,\ x_{i+1/2} = ih + h/2.$$

бўлганда 3-масалани ечинг.

6. $a_i = 2\cos x_i,\ f_i = \cos x_i + \sin\left(2x_i\right)$

$$Df^h = \left\{x_i,\ i = \overline{0,\ n-1}\right\},\ x_i = ih$$

бўлганда 3-масалани ечинг.

7. $a_i = 2\cos x_{i+1/2},\ f_i = \cos x_{i+1/2} + \sin\left(2x_{i+1/2}\right),$

$$Df^h = \left\{x_{i+1/2},\ i = \overline{0,\ n-1}\right\},\ x_i = ih,\ x_{i+1/2} = ih + h/2.$$

бўлганда 3-масалани ечинг.

8. $\dfrac{du}{dx} + a(x)u(x) = f(x),\ \ x \in [0,1],$

$u(0) = c$

дифференциал масала ва

$$\frac{\varphi_{i+1}-\varphi_i}{h}+\left(\alpha_1 a\left(x_i\right)+\alpha_2 a\left(x_{i+1}\right)\right)\left(\beta_1\varphi_i+\beta_2\varphi_{i+1}\right)=\gamma_1 f\left(x_1\right)+\gamma_2 f\left(x_{i+1}\right),$$

$$i=\overline{0,\, n-1},\ \varphi_0=c,\ h=1/n,\ x_i=ih$$

айирмали схема берилган. α_i, β_i, γ_i коэффициентларни қандай танласа, аппроксимация тартиби иккига тенг бўлади?

9. $$\frac{\varphi_{i+1}-\varphi_i}{2h}+\varphi_i=ih+1,\ i=\overline{1,\, n-1},\ h=\frac{1}{n},$$

$$\varphi_0=0,\ \varphi_1=0$$

айирмали схема

$$\frac{du}{dx}+u=x+1,\ x\in[0,1]$$

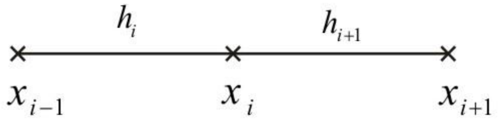
$u(0)=0$ дифференциал масалани h га нисбатан иккинчи тартиб билан аппроксимация қиладими? Агар ундай бўлмаса, айирмали схемани кўринишини шундай ўзгартирингки, у иккинчи тартиб билан аппроксимация қилсин.

10. $$-\frac{d^2u}{dx^2}+au=\cos x,\ x\in\left[0,\pi\right],\ a>0,$$

$$u(0)=0,\ u(\pi)=1$$

дифференциал масала учун уч нуқтали шаблонда ўнинчи тартибли аппроксимация қилувчи айирмали схемани қуринг.

11. Номаълум коэффициентлар усули билан нотекис тўрда



9-расм.

$$-\frac{d^2u}{dx^2}=f(x),$$

$$u(0)=a,\ u(1)=b,\ u\in C^4$$

масалани биринчи ва иккинчи тартиб билан аппроксимация қилувчи айирмали схемани қуринг. Бунда 9–расмдаги шаблондан фойдаланинг.

12. $\frac{du}{dx}+cu=f(x),\ \ u(0)=a,\ c=const,$

масала учун ўзгармас қадам билан интегро-интерполяцион усул ёрдамида уч нуқтали шаблонда тўртинчи тартиб билан аппроксимация қилувчи айирмали схемани қуринг.

13. $-\frac{d^2u}{dx^2}+cu=f(x),\ c\geq 0,\ x\in[0,1],$

$$u(0)=a,\ u(1)=b$$

масалани 12-масала шартлари билан ечинг.

III БОБ. АЙИРМАЛИ СХЕМАЛАР НАЗАРИЯСИНИНГ АСОСИЙ ТУШУНЧАЛАРИ.

Дифференциал масаланинг асосий тенгламасини ва қўшимча шартларини аппроксимация қилувчи айирмали тенгламалар системаси айирмали схемалар дейилади.

Айирмали схеманинг аппроксимация хатолиги, турғунлиги, яқинлашиши ва аниқлиги айирмали схемалар назариясининг асосий тушунчаларидир.

Айирмали схемалар назариясининг асосий масаласи - айирмали схеманинг аниқлиги унинг аппроксимация хатолиги, яқинлашиши ва турғунлигини ўрганишга олиб келади.

§ 3.1. Аппроксимация хатолиги.

L, L_h - аниқланиш соҳалари мос ҳолда Φ ва Φ_h, қийматлар соҳалари мос ҳолда F ва F_h бўлган операторлар бўлсин. Бундан кейин L, L_h операторларни мос ҳолда диффереениал ва айирмали операторлар деб атаймиз.

Айирмали L_h оператор дифференциал L операторни $n-$тартиб билан аппроксимация қилади дейилади, агарда шундай мусбат $\widetilde{h}$ ва C доимийлари мавжуд бўлсаки, барча $h < \widetilde{h}$ лар учун қуйидаги тенгсизлик ўринли бўлса

$$\left\| L_h(u)_h - (Lu)_h \right\|_{F_h} \le Ch^n .$$

L_h оператор L операторни x_i нуқтада n чи тартиб билан аппроксимация қилади дейилади, агарда шундай $\widetilde{h}$ ва C доимийлари мавжуд бўлиб, барча $h \le \widetilde{h}$ лар учун

$$\left| (L_h(u)_h - (Lu)_h)_{x=x_i} \right| \le Ch^n$$

тенгсизлик ўринли бўлса.

Қуйидаги

$$Lu = f\,,\ u \in \Phi\,,\ f \in F\,,$$

$$lu = g\,,\ g \in G\,, \tag{3.1}$$

дифференциал масала берилган бўлсин.

$$L_h\varphi^h = f^h\,,\ \varphi^h \in \Phi_h\,,\ f^h \in F_h\,,$$

$$l_h\varphi^h = g^h\,,\ g^h \in G_h \tag{3.2}$$

айирмали схемалар оиласини қарайлик. Бу айирмали масалалар тўпламини келгусида айирмали схемалар, айирмали масалалар ечимлари тўпламини айирмали схемалар ечими деб атаймиз.

(3.2) айирмали схема берилган (3.1) дифференциал масалани n чи тартиб билан аппроксимация қилади дейилади, агарда шундай $\widetilde{h}$, C_1 ва C_2 мусбат доимийлари мавжуд бўлсаки, барча $h < \widetilde{h}$ лар учун

$$\left\| L_h(u)_h - f^h \right\|_{F_h} \le C_1 h^{n_1}\,,$$

$$\left\| l_h(u)_h - g^h \right\|_{G_h} \le C_2 h^{n_2}\,,$$

$$n = \min(n_1, n_2)$$

тенгсизликлар ўринли бўлса,

$\psi_h = L_h(u)_h - (Lu)_h$ тўр функция айирмали аппроксимация хатолиги дейилади. Берилган (3.1) дифференциал масала ва (3.2) айирмали масалалар ечимлари айирмаси $Z^h = \varphi^h - u$ (3.2) айирмали схеманинг хатолиги дейилади.

1-мисол. $Lu_{\bar{x}x} = \dfrac{u_{x,i} - u_{\bar{x},i}}{h} = \dfrac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2}$

айирмали оператор $Lu = \dfrac{d^2u}{dx^2}$ операторни $x = x_i$ нуқтада h бўйича иккинчи тартиб билан аппроксимация қилишини кўрсатиш мумкин. Бунинг учун $u_{\bar{x}x,i}$ иккинчи тартибли айирмали ҳосиладаги u_{i-1} ва u_{i+1} ларни Тейлор қаторига ёйсак

$$u_{\bar{x}x,i} - u''(x_i) = \frac{h^2}{12}u^{IV}(x_i) + O(h^4)$$

эканлиги тасдиқланади.

2-мисол. $Lu = u^{IV}(x)$ дифференциал операторни $L_h u = u_{\bar{x}x\bar{x}x}$ айирмали оператор билан $(x_{i-2}, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, x_{i+2})$ шаблонда аппроксимация қилиш мумкин.

$$L_h u = \frac{1}{h^2}\left[u_{\bar{x}x}(x_{i+1}) - 2u_{\bar{x}x}(x_i) + u_{\bar{x}x}(x_{i-1})\right] =$$

$$= \frac{1}{h^4}\left(u_{i+2} - 4u_{i+1} + 6u_i - 4u_{i-1} + u_{i-2}\right) \qquad (*)$$

(*) даги u_{i-2}, u_{i-1}, u_i, u_{i-2} ларни $x = x_i$ нуқтада Тейлор қаторига ёйсак $u_{\bar{x}x\bar{x}x,i} - u^{IV}(x_i) = \dfrac{h^2}{6}u^{IV}(x_i) + O(h^4)$, яьни айирмали оператор L_h L операторни иккинчи тартиб билан аппроксимация қилади.

§ 3.2. Дискретлаштириш. Келишилганлик.

Дискретлаштириш. Хусусий ҳосилали дифференциал тенглама (тенгламалар системаси) ни алгебраик тенгламалар системасига келтириш учун бир неча вариантлардан бирини танлаш мумкин. Энг кўп қўлланадиган усуллар - чекли айирмали усуллар, чекли элементлар усули ва спектрал усул бўлиб ҳисобланади.

Дискретлаштиришда бу усуллардан бирини танлаш берилган дифференциал тенгламада (тенгламалар системасида) вақт бўйича ҳосила қатнашиши ёки қатнашмаслигига боғлиқ.

Вақт бўйича ҳосила қатнашган ҳолларда чекли айирмали усулдан фойдаланади. Фақатгина фазовий координаталар бўйича дискретлаштиришда чекли айирмали усулдан ташқари чекли элементлар усули, спектрал усул ёки чекли ҳажмлар усулини қўллаш мумкин.

Келишилганлик. Дискретлаштириш натижасида ҳосил бўлган алгебраик тенгламалар системаси берилган хусусий ҳосилали дифференциал тенглама (тенгламалар системаси) билан келишилган дейилади, агарда тўр ячейкалари ўлчамлари нолга интилганда алгебраик тенгламалар системаси тўрнинг ҳар бир тугун нуқтасида берилган хусусий ҳосилали дифференциал тенгламага эквивалент бўлса.

Айирмали масаланинг ечими дифференциал масала ечимига яқинлашиш учун келишилганлик шарти бажарилиши зарур. Аммо, бу етарли эмас, чунки тўр ячейкалари ўлчамлари нолга интилганда алгебраик тенгламалар системаси берилган дифференциал тенгламага эквивалент бўлсада, алгебраик тенгламалар системаси ечими берилган дифференциал тенглама ечимига интилиши келиб чиқмаслиги мумкин. Мисол сифатида шартли турғун айирмали схемаларни келтириш мумкин. Агар турғунлик шарти бузилса, алгебраик тенгламалар системаси берилган дифференциал тенгламага эквивалент бўлса-да, тақрибий ечим узоқлашувчи бўлади.

Мисол. Қуйидаги чегаравий масала берилган бўлсин.

$$\frac{\partial \overline{T}}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial x^2}, \; 0 < x < 1, \; 0 < t \le t_{\max} \tag{3.3}$$

$$\overline{T}(0,t) = b, \overline{T}(1,t) = d, \tag{3.4}$$

$$\overline{T}(x,0) = T_0(x), 0 \le x \le 1. \tag{3.5}$$

Бу ерда T – берилган дифференциал масаланинг аниқ ечимини билдиради.

(3.3) тенгламани дискретлаштириш учун ҳосилаларни уларга эквивалент бўлган чекли айирмали ифодалар билан алмаштириш мумкин.

$$\frac{\overline{T}_i^{n+1} - \overline{T}_i^{n}}{\Delta t} = \frac{\alpha(\overline{T}_{i-1}^{n} - 2\overline{T}_i^{n} + \overline{T}_{i+1}^{n})}{\Delta x^2} \qquad (3.6)$$

(3.6) да Δt ва Δx лар мос ҳолда вақт бўйича ва фазовий координата x бўйича тўр қадамларидир. T_i^n – T нинг (i,n) тугун нуқтадаги қийматига мос келади.

(3.6) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$T_i^{n+1} = T_i^n + \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2}(T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n) \qquad (3.7)$$

агар $\frac{\partial^2 \widetilde{T}}{\partial x^2}$ ҳосила $n+1$ вақт қатламида дискретлаштирилса, у ҳолда ошкормас айирмали схемага эга бўлиш мумкин:

$$sT_{i-1}^{n+1} - (1+2s)T_i^{n+1} + sT_{i+1}^{n+1} = -T_i^n\,, \qquad (3.8)$$

бу ерда $s = \alpha\Delta t / \Delta x^2$.

Шундай қилиб, (3.3) дифференциал тенгламани дискретлаштиришда қуйидаги ошкор ва ошкормас

$$T_i^{n+1} = sT_{i-1}^n + (1-2s)T_i^n + sT_{i+1}^n \qquad (3.9)$$

$$sT_{i-1}^{n+1} - (1+2s)T_i^{n+1} + sT_{i+1}^{n+1} = -T_i^n \qquad (3.10)$$

айирмали схемаларга эга бўлдик.

I. (3.9) ошкор айирмали схема учун келишилганлик шартини текшириш учун бу тенгламага берилган дифференциал тенгламани (i,n) тугун нуқтадаги аниқ ечимини англатувчи $\overline{T}_i^n$ ни қўямиз.

$$\overline{T}_i^{n+1} = s\overline{T}_{i-1}^n + (1-2s)\overline{T}_i^n + s\overline{T}_{i+1}^n \tag{3.11}$$

Энди (3.11) тенгламани берилган дифференциал тенлама (3.3) га мослигини (x_i, t_n) тугун нуқтада қанчалик яқинлигини аниқлашимиз зарур. (3.11) тенгламадаги айрим ҳадларни (x_i, t_n) нуқта атрофида Тейлор қаторига ёйиб, соддалаштирсак қуйидаги муносабатга эга бўлиш мумкин:

$$\left[\frac{\partial \overline{T}}{\partial t}\right]_i^n - \alpha\left[\frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial t^2}\right]_i^n + \mathrm{E}_i^n = 0, \tag{3.12}$$

бу ерда

$$\mathrm{E}_i^n = 0,5\Delta t\left[\frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial t^2}\right]_i^n - \alpha\left(\frac{\Delta x^2}{12}\right)\left[\frac{\partial^4 \overline{T}}{\partial t^4}\right]_i^n + O(\Delta t^2, \Delta t^4) \tag{3.13}$$

кўриниб турибдики, (3.13) дифференциал тенглама (3.3) дифференциал тенгламадан аппроксимация хатолиги деб аталувчи E_i^n қўшимча ҳад билан фарқ қилиб турибди. Ушбу қўшимча ҳаднинг пайдо бўлиши эса $\frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial t^2}$ ва $\frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial x^2}$ ҳосилаларни дискретлаштириш натижаси билан боғлиқ. (3.12) да тўр ячейкалари ўлчамлари $(\Delta x^2, \Delta t)$ кичик қилиб танланса, аппроксимация хатолиги E_i^n фиксирланган қандайдир (x_i, t_n) нуқтада нолга интилади. $\Delta x \to 0$, $\Delta t \to 0$ даги лимитда (3.9) тенглама (3.3) дифференциал тенгламага эквивалент бўлиб қолади. Бу хосса эса келишилганлик дейилади.

(3.3) дифференциал тенгламага асосан қуйидаги муносабатлар ўринли:

$$\frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial t^2} = \alpha \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial x^2} = \alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial \overline{T}}{\partial x} = \alpha^2 \frac{\partial^4 \overline{T}}{\partial x^4} \tag{3.14}$$

Шу сабабли аппроксимация хатолиги E_i^n ифодасини қуйидагича қайта ёзиш мумкин:

$$\mathrm{E}_i^n = 0,5\Delta x^2 (s - \frac{1}{6}) \left[\frac{\partial^4 \overline{T}}{\partial t^4} \right]_i^n + O(\Delta t^2, \Delta t^4) \tag{3.15}$$

$s = \frac{1}{6}$ бўлса, (3.15) даги биринчи ҳад нолга тенг бўлади ва аппроксимация хатолиги $O(\Delta t^2, \Delta t^4)$ бўлади.

II. Энди (3.10) ошкормас айирмали схемани берилган (3.3) дифференциал тенглама билан келишилганлигини текширамиз.

(3.10) тенгламага (3.3) дифференциал тенгламани (x_i, t_n) тугун нуқтадаги аниқ ечимини англатувчи T_i^n ни қўямиз:

$$\frac{\overline{T}_i^{n+1} - \overline{T}_i^n}{\Delta t} - \alpha \frac{\overline{T}_{i-1}^{n+1} - 2\overline{T}_i^{n+1} + \overline{T}_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2} = 0. \tag{3.16}$$

(3.16) даги $\overline{T}_{i-1}^{n+1}$ ва $\overline{T}_{i+1}^{n+1}$ ларни $(i, n+1)$ тугун нуқта атрофида Тейлор қаторига ёйамиз:

$$\frac{\overline{T}_i^{n+1} - \overline{T}_i^n}{\Delta t} - \alpha \left\{ \left[\overline{T}_{xx} \right]_i^n + (\frac{\Delta x^2}{12}) \left[\overline{T}_{x^2} \right]_i^n + (\frac{\Delta x^4}{360}) \left[\overline{T}_{x^4} \right]_i^{n+1} + ... \right\} = 0.$$

Энди охирги муносабатдаги $\overline{T}_i^{n+1}$, $\left[\overline{T}_{xx} \right]_i^{n+1}$ ва ҳокозоларни (x_i, t_n) нуқта атрофида Тейлор қаторига ёйсак, қуйидагига эга бўламиз:

$$\left[\overline{T}_t \right]_i^n - 0,5\Delta t \left[\overline{T}_{tt} \right]_i^n + \frac{\Delta t^2}{6} \left[\overline{T}_{t^3} \right]_i^n + ... - \alpha \left[\overline{T}_{xx} \right]_i^n +$$

$$\Delta t \left[\overline{T}_{xxt} \right]_i^n + 0,5\Delta t^2 \left[\overline{T}_{xxtt} \right]_i^n + ... +$$

$$+ \frac{\Delta x^2}{12} (\left[\overline{T}_{x^4} \right]_i^n + \Delta t \left[\overline{T}_{x^4 t} \right]_i^n + ...) + \frac{\Delta x^4}{360} (\left[\overline{T}_{x^4} \right]_i^n + ...)... = 0 \tag{3.17}$$

Агар $\overline{T}_t = \alpha \overline{T}_{xx}$, $\overline{T}_{tt} = \alpha^2 \overline{T}_{x^4}$, $\overline{T}_{ttt} = \alpha^3 \overline{T}_{x^6}$, $s = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2}$, $\Delta x^2 = \alpha \Delta t / s$ тенгликлардан фойдалансак, (3.17) тенглама қуйидаги кўринишга келади:

$$\left[\overline{T}_t - \alpha\overline{T}_{xx}\right]_i^n + E_i^n = 0. \qquad (3.18)$$

Бу ерда аппроксимация хатолиги

$$\mathrm{E}_i^n = -0,5\Delta t(1+\frac{1}{6s})\left[T_{tt}\right]_i^n + \frac{\Delta t^2}{3}(1+\frac{1}{4s}+\frac{1}{120s^2})\left[\overline{T}_{tttt}\right]_i^n + ... \qquad (3.19)$$

Кўриниб турибдики $\Delta t \to 0$ да $E_i^n \to 0$, (3.18) тенглама берилган (3.3) дифференциал тенглама билан устма-уст тушади. Бу эса (3.10) ошкормас айирмали схема (3.3) дифференциал тенглама билан келишилганлигини билдиради. (3.19) ни (3.13) билан солиштириб, шуни айтиш мумкинки ошкормас айирмали схемада $O(\Delta x^4)$ тартиб билан таьминловчи s ни (3.19) дан топиш мумкин эмас.

§ 3.3. Турғунлик.

Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларни дикретлаштиришда ҳосил бўладиган алгебраик тенгламалар системасини ечишда $(x_i, t_n), (i = \overline{1, N_1}), n = \overline{1, N_2}$ тугун нуқтадаги хатоликни ξ_i^n билан белгилаймиз.

$$\xi_i^n = T_i^n - {}^*T_i^n \qquad (3.20)$$

(3.20) да T_i^n , $^*T_i^n$ лар мос холда алгебраик тенгламалар системасининг аниқ ва тақрибий ечимларидир.

Дискретлаштиришда ҳосил бўладиган чизиқли алгебраик тенгламалар системасининг хатоликлари ξ_i^n ҳам худди шу чизиқли алгебраик тенгламалар системасини қаноатлантиради. Масалан, (3.9) ошкор айирмали схемадан фойдалансак, юқоридаги фикримиз $^*T_i^{n+1}$

$$^*T_i^{n+1} = s\,{}^*T_i^{n+1} + (1-2s)\,{}^*T_i^n + s\,{}^*T_{i+1}^n \qquad (3.21)$$

тенгламани қаноатлантиришини англатади.

Агар алгебраик тенгламалар системасини аниқ ечими T_i^n ҳам (3.9) тенгламани қаноатлантиришини эсласак ва (3.21), тенгламага (3.20) ни ҳисобга олсак ξ_i^n хатоликка нисбатан қуйидаги бир жинсли алгебраик тенгламага эга бўламиз:

$$\xi_i^{n+1} = s\xi_{i-1}^n + (1-2s)\xi_i^n + s\xi_{i+1}^n \tag{3.22}$$

Агар бошланғич ва чегаравий шартлар берилган деб фараз қилсак, у ҳолда барча бошланғич хатоликлар $\xi_i^0 \ (i=\overline{1, N_1-1})$, шунингдек чегаравий хатоликлар ξ_0^n ва $\xi_{N_1}^n (n=0,...N_2)$ лар (3.20) тенгликка асосан нолга тенг бўлади.

Айирмали схемалар турғунлигини таҳлил қилувчи матрицали усул ва Нейман усуллари энг кўп қўлланиладиган усуллардир. Ушбу усуллар асосида ҳисоблаш алгоритмининг ҳақиқий ечими ва тақрибий ечими ўртасидаги фарқ ёки хатоликни ўсиши ёки камайишини башорат қилиш ётади.

Мисол. $\dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial u}{\partial x} = \varphi(x,t), -\infty < x < +\infty, 0 \le t \le 1,$ тенгламага қўйилган $u(x,0) = \psi(x), -\infty < x < +\infty$ Коши масаласини апроксимация қилувчи

$$L_h u^{(h)} = \begin{cases} \dfrac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} - \dfrac{u_m^n - u_{m-1}^n}{h}, \\ u_m^0, \\ m = 0, \pm 1, \pm 2, ..., n = 0, 1, 2, ..., \end{cases} \qquad f^{(h)} = \begin{cases} \varphi(x_m, t_n), \\ \psi(x_m), m = 0, \pm 1, \pm 2, ..., \\ n = 0, 1, 2, ..., \end{cases}$$

айирмали схеманинг турғунлигини текширинг.

Ечиш. Дастлаб схемани $u_m^{n+1} = r\, u_{m+1}^n + (1+r)\, u_m^n, \quad r = \tau / h$ кўринишда ёзиб оламиз ва қуйидаги нормаларни аниқлаймиз:

$\left\| u^{(h)} \right\|_{U_h} = \max\limits_{m,n} \left| u_m^n \right|, \ \left\| f^{(h)} \right\|_{F_h} = \max\limits_{m} \left| \psi(x_m) \right| + \max\limits_{m,n} \left| \varphi(x_m, t_n) \right|$. Агар $r \le 1$ бўлса

$$\left|u_m^{n+1}\right| \le \left| r\,u_{m+1}^n + (1-r)\,u_m^n + \tau\,\varphi(x_m,t_n)\right| \le r\left|u_{m+1}^n\right| + (1-r)\left|u_m^n\right| + \tau\left|\varphi(x_m,t_n)\right|$$

бўлади. Демак

$$\left|u_m^{n+1}\right| \le \max_m \left|u_m^n\right| + \tau \max_{m,n} \left|\varphi(x_m,t_n)\right|.$$

Ҳосил бўлган

$$\max_m \left|u_m^0\right| = \max_m \left|\psi(x_m)\right|,$$

$$\left|u_m^1\right| \le \max_m \left|u_m^0\right| + \tau \max_{m,n} \left|\varphi(x_m,t_n)\right|,$$

$$\left|u_m^2\right| \le \max_m \left|u_m^2\right| + \tau \max_{m,n} \left|\varphi(x_m,t_n)\right|,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\left|u_m^n\right| \le \max_m \left|u_m^{n-1}\right| + \tau \max_{m,n} \left|\varphi(x_m,t_n)\right|$$

тенгсизликларни қўшиб, $\max_m \left|u_m^n\right| \le \max_m \left|\psi(x_m)\right| + \tau\, n \max_{m,n} \left|\varphi(x_m,t_n)\right|$ тенгсизликни ҳосил қиламиз. Натижада

$$\max_{m,n} \left|u_m^n\right| \le \max_m \left|\psi(x_m)\right| + \tau\, N \max_{m,n} \left|\varphi(x_m,t_n)\right| \le K\left(\max_m \left|\psi(x_m)\right| + \max_{m,n} \left|\varphi(x_m,t_n)\right|\right)$$

эканлиги тушунарли, бу ерда $K = \max(1,T),\ T = \tau\, N.$ Шундай қилиб $r \le 1$ бўлганда айирмали схема турғун ва дифференциал масалани аппроксимация қилади. Демак, Лакс теоремасига асосан айирмали масаланинг ечими дифференциал масала ечимига яқинлашади.

§ 3.4. Ошкор айирмали схема турғунлигини текшириш учун матрицали усулни қўллаш.

Матрицали усулни моҳияти хатоликларни аниқловчи тенгламалар системасини матрица кўринишига келтирилади. Ундан сўнг мос матрицанинг хос қийматларини аниқлаш орқали турғунлик таҳлил қилинади.

Ушбу усулни (3.9) ошкор айирмали схемага нисбатан қўллашни кўриб ўтамиз.

(3.22) да $i=\overline{1,N_1-1}$ ларни қўйиб, чегаравий хатоликлар барча n лар учун $\xi_0^n=\xi_{N_1}^n=0$ эканлигини ҳисобга олиб қуйидаги тенгламалар системасига эга бўламиз:

$$\begin{gathered}
\xi_1^{n+1}=(1-2s)\xi_1^n+s\xi_2^n \\
\xi_2^{n+1}=s\xi_1^n+(1-2s)\xi_2^n+s\xi_3^n \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\xi_i^{n+1}=s\xi_{i-1}^n+(1-2s)\xi_i^n+s\xi_{i+1}^n \\
\xi_{N_{11}-1}^{n+1}=s\xi_{N_1-2}^n+(1-2s)\xi_{N_1}^n+s\xi_{i+1}^n
\end{gathered} \tag{3.23}$$

бу тенгламалар системасини эса қуйидаги матрицали кўринишда ёзиш мумкин:

$$\xi^{n+1}=A\xi^n,\quad n=0,1,..., \tag{3.24}$$

бу ерда A - N_1-1 тартибли квадрат матрица , ξ^n эса N_1-1 та элементдан иборат устун вектор.

Уларнинг кўриниши қўйидагича:

$$A=\begin{bmatrix} (1-2s) & s & & & \\ s & (1-2s) & s & & \\ & s & & s & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & s & (1-2s) \end{bmatrix},\ \xi^n=\begin{bmatrix} \xi_1^n \\ . \\ . \\ . \\ \xi_i^n \\ . \\ . \\ . \\ \xi_{N_1-1} \end{bmatrix}.$$

Агар A матрицанинг хос қийматлари λ_m лар ҳар хил ва абсольют қийматлари бирдан кичик ёки тенг бўлса, яьни

$$|\lambda_m| \le 1 \tag{3.25}$$

барча m лар учун бажарилса n нинг ортиши билан ξ^n хатоликлар чегараланганлигини кўрсатиш мумкин.

Илмий манбалардан маьлумки r диагоналли A матрицанинг хос қийматлари қуйидагича аниқланади:

$$\lambda_m = 1 - 4s\sin^2\left(\frac{m\pi}{2(N_1-1)}\right),\ m = \overline{1, N_1 - 1} \tag{3.26}$$

(3.25) турғунлик шарти бўлиб, фақатгина қуйидаги тенгсизликини қаноатлантирувчи s ни қийматидан фойдаланишни тақозо этади!

$$-1 \le 1 - 4s\sin^2\left(\frac{m\pi}{2(N_1-1)}\right) \le 1 \tag{3.27}$$

Ушбу тенгсизликнинг ўнг қисми барча m ва s ларда бажарилади. Аммо, тенгсизликнинг чап қисми бажарилиши учун

$$s \cdot \sin^2\left(\frac{m\pi}{2(N_1-1)}\right) \le \frac{1}{2},$$

бўлиши зарур. Бу эса $s \le \dfrac{1}{2}$ бўлганда барча m лар учун бажарилади.

Юқоридаги фикрдан (3.9) ошкор айирмали схема $s = \dfrac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2} \le \dfrac{1}{2}$ да турғун экан.

§ 3.5. Икки қатламли айирмали схемани турғунлигини текширишда матрицали усулни қўллаш.

Энди икки қатламли айирмали схемани турғунлигини текширишда матрицали усулдан фойдаланишни кўриб ўтамиз. Ушбу айирмали схема қуйидаги кўринишда бўлсин:

$$\frac{T_i^{n+1}-T_i^n}{\Delta t}-\alpha\beta L_{xx}T_i^{n+1}-\alpha(1-\beta)L_{xx}T_i^n=0\,, \qquad (3.28)$$

бу ерда

$$L_{xx}T_i=\left(T_{i-1}-2T_i+T_{i+1}\right)/\,\Delta x^2\,.$$

(3.28) тенгламада α ни иссиқлик ўтказувчанлик коэффициенти деб, β ни ошкормаслик даражасини характерловчи параметр деб талқин қилиш мумкин. ξ_i^n хатолик (3.28) тенгламага эквивалент бўлган ушбу тенглама орқали аниқланади.

$$-s\xi_{i-1}^{n+1}+\left(1+2s\beta\right)\xi_i^n-s\beta\xi_{i+1}^{n+1}=s\left(1-\beta\right)\xi_{i-1}^n+$$

$$+\left[1-2s(1-\beta)\right]\xi_i^n+s\left(1-\beta\right)\xi_{i+1}^n\quad . \qquad (3.29)$$

(3.29) тенглама ички тугун нуқталар учун ўринли. Агар чегаравий шарт сифатида Дирихле шарти қўйилган бўлса, у ҳолда чегаравий нуқталарда бу тенгламага эҳтиёж қолмайди.

(3.29) тенгламани барча $i=\overline{1,N_1-1}$ тугун нуқталар учун такрорлаб, ҳосил бўлган тенгламалар системасини қуйидаги матрицали кўринишда ёзиш мумкин:

$$A\xi^{n+1}=B\xi^n\,,$$

бу ерда

$$A = \begin{bmatrix} 1+2s & -s\beta & & & \\ -s\beta & 1+2s\beta & -s\beta & & \\ \multicolumn{5}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ & & -s\beta & 1+2s\beta & -s\beta \\ & & & -s\beta & (1+2s\beta) \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 1-2s(1-\beta) & s(1-\beta) & & & \\ s(1-\beta) & 1-2s(1-\beta) & s(1-\beta) & & \\ \multicolumn{5}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ & & s(1-\beta) & 1-2s(1-\beta) & s(1-\beta) \\ & & & s(1-\beta) & 1-2s(1-\beta) \end{bmatrix}.$$

Агар $A^{-1}B$ матрицанинг хос қийматлари модули бирдан катта бўлмаса, (3.28) ҳисоблаш алгоритми турғун бўлади. A ва B матрицаларнинг тузилишидан келиб чиқиб, ушбу шарт қуйидаги чекланишга эквивалент бўлади:

$$УСТ = \left|\left(\lambda_B\right)_m / \left(\lambda_A\right)_m\right| \le 1. \tag{3.30}$$

A ва B матрицалар уч диагоналли симметрик характерга эга эканлигини ҳисобга олиниб, уларнинг хос қийматлари адабиётларда қуйидаги аналитик кўринишларда келтирилган:

$$\lambda_A = 1 + 2s\beta - 2s\beta\cos\left(\frac{i\pi}{N_1 - 1}\right) = 1 + 4s\beta \cdot \sin^2\left(\frac{i\pi}{2(N_1 - 1)}\right),$$

$$\lambda_B = 1 - 2s\left(1-\beta\right) - 2s\left(1-\beta\right)\cos\left(\frac{i\pi}{N_1 - 1}\right) = 1 - 4s\left(1-\beta\right) \cdot \sin^2\left(\frac{i\pi}{2(N_1 - 1)}\right)$$

Хусусан турғунлик шарти қуйидагича:

$$УСТ = \left|\frac{1 - 4s(1-\beta)\sin^2\left[i\pi / 2(N_1 - 1)\right]}{1 + 4s\beta\sin^2\left[i\pi / 2(N_1 - 1)\right]}\right| \le 1.$$

Агар $\sin\left(\dfrac{i\pi}{N_1-1}\right)=0$ бўлса $УСТ=1$,

$$\sin\left(\frac{i\pi}{N_1-1}\right)=1 \text{ бўлса } УСТ=\left|\frac{1-4s(1-\beta)}{1+4s\beta}\right|\le 1 \quad .$$

Турғунлик шарти бажарилиши учун $1-4s(1-\beta)<1+4s\beta$ бўлиши керак ва у бажарилади. Шунингдек $1-4s(1-\beta)\ge -1-4s\beta$ ёки $2>4s(1-2\beta)$ бўлиши талаб этилади. Охирги тенгсизлик $s\le 0,5/(1-2\beta)$ тенгсизликга эквивалент. Бу эса $\beta<0,5$ бўлганда бажарилади.

Хусусан, агар $\beta<0,5$ бўлса, турғунлик учун $s\le 0,5/(1-2\beta)$ талаб этилади. Агар $\beta\ge 0,5$ бўлса, $2>4s(1-2\beta)$ тенгсизлик қийинчиликсиз бажарилади ва бу холда (3.28) ҳисоблаш алгоритми шартсиз турғун бўлади.

Қуйидаги кўринишдаги Коши масаласини қараймиз

$$\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}=0, \quad -\infty<x<+\infty \tag{3.1.1}$$

$$u(x,0)=u_0(x), \quad -\infty<x<+\infty, \tag{3.1.2}$$

бу ерда $a=const>0$, $u_0(x)-$берилган функция. (3.1.1)-(3.1.2) масалани қуйидагича аппроксимация қиламиз:

$$\frac{u_j^{n+1}-\left(u_{j-1}^n+u_{j+1}^n\right)/2}{\tau}+a\frac{u_{j+1}^n-u_{j-1}^n}{2h}=0; \tag{3.1.3}$$

$$u_j^0=u_0(jh),\ j=0,\pm1,\pm2,...;n=0,1,2....$$

(3.1.3) айирмали схема Лакс схемаси деб аталади.

Мисол. (3.1.3) айирмали схеманинг турғунлигини текширинг. Ушбу (3.1.3) схемани $a<0$ бўлган ҳол учун тадқиқ қилинг.

Ечиш. (3.1.3) схемада u_j^n ечим ўрнига $u_j^n=\lambda^n e^{ijkh}, i=\sqrt{-1}$ кўринишдаги ифодани қўямиз. Натижада (3.1.3) тенгламадан

$$\lambda^n e^{ijkh}\left[\frac{\lambda-\left(e^{-ikh}+e^{ikh}\right)/2}{\tau}+a\frac{e^{ikh}-e^{-ikh}}{2h}\right]=0 \qquad (3.1.4)$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Биз $\lambda \neq 0$ нотривиал ечимни излаганлигимиз учун (3.1.4) тенгликни $\lambda^n e^{ijkh}$ га бўлиб,

$$\frac{\lambda-\left(e^{-ikh}+e^{ikh}\right)/2}{\tau}+a\frac{e^{ikh}-e^{-ikh}}{2h}=0 \qquad (3.1.5)$$

эга бўламиз. Соддалик учун $\xi = kh$ белгилашни киритамиз ва $e^{\pm i\xi} = \cos\xi \pm i\sin\xi$ Эйлер формуласидан фойдаланамиз. Яна $k = a\tau / h$ белгилашни киритамиз. Натижада (3.1.3) Лакс схемасида ўтиш кўпайтувчиси λ учун :

$$\lambda = \cos\xi - ik\sin\xi \qquad (3.1.6)$$

тенгликни аниқлаймиз. Фон Нейман усулига асосан $|\lambda|$ ни ҳисоблаймиз:

$$|\lambda|^2 = cos^2\xi + k^2\sin^2\xi = 1-\sin^2\xi + k^2\sin^2\xi = 1-\sin^2\xi\left(1-k^2\right). \qquad (3.1.7)$$

Турғунлик шарти $|\lambda| \leq 1$ га кўра k ни аниқлаймиз:

$$1-\sin^2\xi\left(1-k^2\right)\leq 1;\ -\sin^2\xi\left(1-k^2\right)\leq 0;\quad \sin^2\xi\left(1-k^2\right)\geq 0;\quad 1-k^2\geq 0;$$

$$(1-k)(1+k)\geq 0.$$

(3.1.8) тенгсизлик бажарилиши учун k Курант сони

$$-1 \leq k \leq 1 \qquad (3.1.8)$$

тенгсизликни қаноатлантириши керак. (3.1.8) тенгсизликка асосан, Лакс схемаси $a < 0$ бўлган ҳолда ҳам қўлланиши мумкин, фақат берилган a ва h лар учун τ ни шундай танлаш керакки, $k = a\tau / h$ қаралаётган схеманинг (3.1.8) турғунлик соҳасига тушсин.

§ 3.6. Ошкор айирмали схема турғунлигини тадқиқ қилишда Нейман усулини қўллаш.

Турғунлик шартини аниқлашда энг кўп қўлланиладиган усул – бу Нейман усули бўлиб, уни қўллаш учун жуда қулай. Аммо, бу усулни фақатгина ўзгармас коэффицентли чизиқли масалалар турғунлигининг зарурий шартларини аниқлашда қўллаш мумкин.

Нейман усули моҳияти шундаки, ҳисоблаш алгоритмининг бир вақт қатламидаги хатоликлари чекли Фурье қаторига ёйилади. Бир вақт қатламидан иккинчи вақт қатламига ўтишда Фурье қаторининг алоҳида компоненталари ўсиши ёки камайишига қараб ҳисоблаш алгортмининг турғунмаслиги ёки турғунлиги ҳақида фикр юритилади.

Нейман усули фақатгина тўрнинг ички нуқталари учун қўлланилишини эслатиш фойдали.

Шундай қилиб, ҳисоблаш алгоримтининг бошланғич хатолик вектори ε_i^0 ни Фурьенинг чекли комплекс қатори кўринишида ифодалаймиз:

$$\varepsilon_j^0 = \sum_{m=1}^{N_1-1} a_m e^{i\theta_m j} \ , j = \overline{1, N_1 - 1}, \qquad (3.31)$$

бу ерда

$$i = \sqrt{-1} \text{ ва } \theta_m = m\pi\Delta x .$$

(3.31) да мавҳум бирлик i қатнашганлиги учун хатолик ε_i даги i индекси j га ўзгартирдик.

Ҳисоблаш алгоритмининг хатолиги (3.22) чизиқли эканлигини ҳисобга олсак, (3.31) Фурье қаторидаги ягона битта ҳадининг хатолиги $e^{i\theta_m j}$ ни ўрганиш етарли. Бундан кейин θ_m даги m индексни тушириб қолдирамиз.

(3.31) тенгликни ҳисобга олиб, (3.22) ҳисоблаш алгоритмининг хатолигини ўзгарувчиларни ажратиш усули бўйича излаймиз:

$$\varepsilon_j^n = (G)^n e^{i\theta j} \ , \qquad (3.32)$$

бу формулада Фурье компонентининг вақтга боғлиқлиги комплекс коэффицент $(G)^n$ ни ичига киритиб юборилган. $(G)^n$ да n индекс G миқдорни n чи даражасини билдиради.

(3.32) ифодани (3.22) тенгламага қўйиб, қуйидагига эга бўлиш мумкин:

$$(G)^{n+1} e^{i\theta j} = s \cdot (G)^n e^{i\theta(j-1)} + \left(1-2s\right)(G)^n e^{i\theta j} + s \cdot (G)^n e^{i\theta(j+1)}$$

Охирги тенгликни соддалаштириб, G миқдорни қийматини топиш мумкин:

$$G = 1 - 4s \cdot \sin^2\left(\theta/2\right) \qquad (3.33)$$

G миқдорни ҳисоблаш алгоритми хатолигини бир вақт қатламидан кейинги вақт қатламига ўтишини таъминловчи коэффициент сифатида баҳолаш мумкин. Буни эса (3.32) тенглик ҳам тасдиқлаб турибди:

$$\varepsilon_j^{n+1} / \varepsilon_j^n = G, \qquad (3.34)$$

Шуни ҳам таъкидлаш мумкинки, G миқдор s ва θ ўзгарувчиларнинг функциясидир: $G(s,\theta)$.

Шунингдек, $G(s,\theta)$ тўр ячейкалари ўлчамлари Δx ва Δt ларга боғлиқ бўлиб, у айнан Фурье қаторининг қайси компонентаси қаралаётганлигини ҳам англатади. Ушбу мулоҳазалар $s = \alpha\Delta t / \Delta x^2$ ва $\theta = m\pi\Delta x$ эканлигидан ўз тасдиғини топади.

Агар G нинг абсолют миқдори Фурье қаторнинг ихтиёрий гармоникаси G да бирдан ошмаса ҳисоблаш алгоритмининг (3.32) хатоликлари чекланган бўлади.

Шундай қилиб, турғунликнинг умумий талаби қуйидаги шартга келтирилди.

$$|G| \le 1 \ \text{ ихтиёрий } \theta \text{ да .} \qquad (3.34)$$

Демак, (3.33) га асосан турғунлик шарти (ошкор айирмаси схема учун) ихтиёрий θ да

$$-1 \le 1 - 4s \cdot \sin^2(\theta/2) \le 1 \tag{3.35}$$

муносабатдан иборат экан. Бу эса $s \le \dfrac{1}{2}$ бўлса ўринли эканлиги кўриниб турибди. Ушбу натижа матрица усули билан олинган натижа билан бир хил.

§ 3.7. Икки қатламли ошкормас айирмали схемани турғунлигини тадқиқ қилишда Нейман усулини қўллаш.

Энди Нейман усулини икки қатламли ошкормас айирмали схеманинг турғунлигини таҳлил қилишда қўллаймиз.

Ҳисоблаш алгоритми хатолиги айирмали схемани қаноатлантиради:

$$\frac{\varepsilon_j^{n+1} - \varepsilon_j^n}{\Delta t} - \alpha\beta L_{xx}\varepsilon_j^{n+1} - \alpha(1-\beta)L_{xx}\varepsilon_j^n = 0, \tag{3.36}$$

бу ерда $L_{xx}\varepsilon_j = \dfrac{\varepsilon_{j-1} - 2\varepsilon_j + \varepsilon_{j+1}}{\Delta x^2}$, α –коэффициент, β эса айирмали схемани ошкормаслик даражасини белгиловчи параметр.

Бу ерда ҳам турғунликни Нейман усули бўйича таҳлил қилишда (3.31) Фурье қаторидан фойдаланамиз. (3.36) тенглама чизиқли бўлганлиги боис ε_j^n ни ифодасида битта Фурье компонентаси киритилади, яъни

$$\varepsilon_j^n = (G)^n e^{i\theta j}, \tag{3.37}$$

бу ерда $i = \sqrt{-1}$, j – тўрнинг тугун номери.

$$L_{xx}\varepsilon_j^n = (G)e^{i\theta(j-1)} - 2(G)^n e^{i\theta j} + (G)^n e^{i\theta(j+1)} = (G)^n e^{i\theta j}\,\frac{2(\cos\theta - 1)}{\Delta x^2}$$

алмаштиришдан фойдалансак, (3.36) тенглама қуйидаги кўринишга келади:

$$\frac{(G)^{n+1}e^{i\theta j}-(G)^{n}e^{i\theta j}}{\Delta t}-\alpha\beta(G)^{n+1}e^{i\theta j}\,\frac{2(\cos\theta-1)}{\Delta x^2}+$$

$$+\alpha(1-\beta)(G)^{n}e^{i\theta j}\,\frac{2(\cos\theta-1)}{\Delta x^2}=0\,.$$

Тенгликнинг икки томонини $(G)^n e^{i\theta j}$ га бўламиз:

ёки

$$G=\frac{1-4s(1-\beta)\sin^2(\theta/2)}{1+4s\beta\sin^2(\theta/2)}$$

ни аниқлаймиз.

Агар $G\le 1$ ихтиёрий θ нинг қийматида бажарилса, схема турғун бўлади.

Агар $\sin(\theta/2)=0$ бўлса, $G=1$ бўлади,

Агар $\sin(\theta/2)=1$ бўлса , $G=\left[1-4s(1-\beta)\right]/\left[1+4s\beta\right]$ бўлади,

Агар $G\le 1$ бўлса, у ҳолда $1-4s(1-\beta)\le 1+4s\beta$ ёки $s>0$ бўлади.

Агар $G>-1$ бўлса, у ҳолда $1-4s(1-\beta)\le -1-4s\beta$ ёки $s\le 0{,}5/(1-2\beta)$ бўлади.

Ушбу мулоҳазалар матрицали усулда олинган натижалар билан устма-уст тушади.

Мисол. $\dfrac{\partial u}{\partial t}+c\dfrac{\partial v}{\partial x}=0,\quad \dfrac{\partial v}{\partial t}+c\dfrac{\partial u}{\partial x}=0,\quad c=const>0$ тенгламалар системасини Лакс-Вендроф схемаси билан аппроксимация қиламиз:

$$w_j^{n+1}-w_j^n+\frac{\tau}{2h}A\left(w_{j+1}^n-w_{j-1}^n\right)-\frac{\tau^2}{2h^2}A^2\left(w_{j+1}^n-2w_{j-1}^n+w_{j-1}^n\right)=0 \qquad (3.2.1)$$

бу ерда

$$w=\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}0 & c\\ c & 0\end{pmatrix} \tag{3.2.2}$$

Фурье усулидан фойдаланиб (3.2.1) схеманинг турғунлигини исбот қилинг. Бу схеманинг турғунлиги учун етарли бўладими?

Ечиш. Фурье усулига асосан (3.2.1) ифодага $w_j^n=W_0\lambda^n e^{ijkh}$ ечимни қўямиз, бу ерда $i=\sqrt{-1}$, $k-$ ҳақиқий сон, W_0- ўзгармас вектор. Тенгликнинг ҳар икки томонини e^{ijkh} га бўлиб, W_0 ни аниқлаш учун биржинсли $(G-\lambda I)W_0=0$ системани ҳосил қиламиз, бу ерда G (3.2.1) схеманинг ўтиш матрицаси:

$$G=I-\left(\frac{\tau}{h}i\sin\xi\right)A+\frac{\tau^2}{h^2}(\cos\xi-1)A^2 \tag{3.2.3}$$

Бу ерда I - бирлик матрица, $\xi=k\,h$. (3.2.3) ифодадан кўриниб турибтики G матрица (3.2.2) тенглик билан аниқланадиган А матрицанинг кўпҳади. Шунинг учун G матрицанинг λ_1, λ_2 хос сонлари

$$\lambda_k=1-\frac{\tau}{h}i\sin\xi\mu_k+\frac{\tau^2}{h^2}(\cos\xi-1)\mu_k^2,\quad k=1,2 \tag{3.2.4}$$

бу ерда μ_1,μ_2- А матрицанинг хос сонлари. Улар $\det(A-\mu I)=0$ тенгламадан топилади:

$$\begin{vmatrix}-\mu & c\\ c & -\mu\end{vmatrix}=\mu^2-c^2=0\Rightarrow\mu_1=c,\,\mu_2=-c.$$

Шундай қилиб, μ_1,μ_2-илдизлар ҳақиқий сонлар экан. Шунинг учун

$$|\lambda_k|^2=\left(1-\frac{\tau^2}{h^2}2\sin^2\frac{\xi}{2}\mu_k^2\right)^2+\left(\frac{\tau^2}{h^2}\sin^2\xi\right)\mu_k^2=1-4\frac{\tau^2}{h^2}\sin^2\frac{\xi}{2}\mu_k^2+4\frac{\tau^4}{h^4}\sin^4\frac{\xi}{2}\mu_k^4+$$

$$+4\frac{\tau^2}{h^2}\sin^2\frac{\xi}{2}\cos^2\frac{\xi}{2}\mu_k^2=1-4\frac{\tau^2}{h^2}\sin^4\frac{\xi}{2}\mu_k^2+4\frac{\tau^4}{h^4}\sin^4\frac{\xi}{2}\mu_k^4= \tag{3.2.5}$$

$$=1-4\frac{\tau^2}{h^2}\left(\sin^4\frac{\xi}{2}\right)\mu_k^2\left(1-\frac{\tau^2}{h^2}\mu_k^2\right).$$

(3.2.5) тенгликдан тушунарлики фон Нейман зарурий шартининг бажарилиши учун вақт бўйича τ қадам

$$\frac{\tau}{h}c \le 1 \qquad (3.2.6)$$

шартни қаноатлантириши керак. Энди (3.2.6) шарт Лакс-Вендроф схемасининг турғунлиги учун етарли шарт бўлиши мумкин ёки мумкинмаслигини текширамиз. Бунинг учун G матрицанинг нормал матрицалигини, яъни G^*G ва GG^* матрицалар кўпайтмасининг тенглигини текширишимиз лозим. Лекин бушбу жараён анча мураккаб бўлганлиги сабабли, биз матрицалар назариясида исбот қилинган қуйидаги тасдиқдан фойдаланамиз. Агар G матрица ҳақиқий ёки комплекс коэффициентли симметрик ҳақиқий матрицанинг матрицали кўпҳадидан иборат бўлса, у ҳолда G матрица нормал бўлади. Натижада (3.2.3) тенгликдаги G матрица нормал бўлади ва (3.2.6) шарт (3.2.1) Лакс-Вендроф схемасининг турғунлиги учун етарли бўлади.

§ 3.8. Ечимнинг яқинлашиши ва аниқлиги.

Берилган хусусий ҳосилани дифференциал тенгламани аппроксимация қилувчи алгебраик тенгламалар системасининг ечими яқинлашувчи дейилади, агар тақрибий ечим хусусий ҳосилали дифференциал тенгламанинг аниқ ечимига эркли ўзгарувчининг ихтиёрий қийматида яқинлашса, ёки ҳеч бўлмаганда тўр ячейкаларининг ўлчамлари нолга интилганда тақрибий ечим берилган хусусий хосилали дифференциал тенглама ечимига яқинлашса. Шундай қилиб, тақрибий ечим T_i^n-хусусий ҳосилали дифференцал тенгламанинг аниқ ечими $\overline{T}(x_i, t_n)$ га яқинлашади дейилади агарда $\Delta x \to 0$, $\Delta t \to 0$, да $T_i^n \to \overline{T}(x_i, t_n)$ бўлса.

Хусусий ҳосилали дифференциал тенглама аниқ ечими ва алгебраик тенгламалар системасининг аниқ ечими ўртасидаги айирма ечимнинг хатолиги дейилади ва e_i^n билан белгиланади:

Алгебраик тенгламалар системасининг аниқ ечими хусусий ҳосилали дифференциал тенглама учун тақрибий ечим ҳисобланилади. Алгебраик тенгламалар системасининг ечими аниқ дейилади, агарда ҳисоблаш жараёнида бирон бир сонли хатоликка йўл қўйилмаган бўлса, масалан, яхлитлаш туридаги хатоликка. Одатда e_i^n хатолик миқдори (i, n) тугун нуқтада тўр ячейкасининг ўлчамлари Δx ва Δt га ҳамда дифференциал тенгламани аппроксимация қилишда ташлаб юбориладиган юқори тартибли ҳосилаларни шу тугун нуқтадаги қийматларига боғлиқ бўлади.

Алгебраик тенгламалар системасининг ечими берилган хусусий ҳосилали дифференциал тенгламанинг аниқ ечимига яқинлашишини ҳаттоки оддий масала учун ҳам исботлаш анча мушкул. Шу сабабли айрим масалаларни яқинлашишини баҳолашда Лакснинг эквивалентлик ҳақидаги теоремасидан фойдаланилади:

Теорема: Агар бошланғич шартли коррект қўйилган чизиқли масала ва уни аппроксимацияловчи келишилганлик шартини қаноатлантирувчи чекли айирмали масала мавжуд бўлса, у ҳолда турғунлик яқинлашишнинг зарурий ва етарли шартидир.

Шундай қилиб, ечимнинг яқинлашиши ва аниқлигини ўрганиш айирмаси схеманинг аппроксимация хатолигини ва турғунлигини ўрганишга келтирилади.

Хулоса сифатида шуни айтиш мумкинки, агар айирмали схема берилган дифференциал масалани аппроксимация қилса ва турғун бўлса айирмали схема яқинлашади дейилади (одатда аппроксимация ва турғунликдан яқинлашиш келиб чиқади дейилади). Шунингдек аниқлик тартиби (яқинлашиш тезлиги) айирмали схеманинг аппроксимация тартиби билан аниқланади.

1-мисол. Айирмали схемалардан фойдаланиб $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ параболик тенгламанинг $u(x,0) = 3x(1-x) + 0.12$ бошланғич шартни ва $u(0,t) = 2(t + 0,06), \quad u(0,6;t) = 0,84$ чегаравий қийматларни қаноатлантирувчи қийматлари топилсин. Бунда $x \in [0;0,6]$, $t \in [0;0,01]$, $h = 0,1$, $\sigma = 1/6$. Ностационар масалаларнинг ечими функциянинг $u(x_i, t_j)$ қийматидан фойдаланиб, $u(x_i, t_{j+1})$ қийматини топиш орқали амалга оширилади, бунда $t_{j+1} = t_j + k, \ k = h^2 / 6 = 0,01/6 = 0,0017$.Ҳисоблашла $u_{i,j+1} = \frac{1}{6}\left(u_{i+1,j} + 4u_{i,j} + u_{i-1,j}\right)$ $(i = 1,2,3,4,5,6; \quad j = 1,2,3,4,5,6)$ формула билан ҳисобланади. Барча ҳисоблаш натижалари қуйидаги жадвалда келтирилган:

j	i	0	1	2	3	4	5	6
	$t_j \backslash x_i$	0	0,1	0,2	0.3	0.4	0.5	0.6
0	0	0,12	0,39	0,60	0,75	0,84	0,87	0,84
1	0,0017	0,1233	0,3800	0,5900	0,7400	0,8300	0,8600	0,84
2	0,0033	0,1267	0,6372	0,5800	0,7300	0,8200	0,8500	0,84
3	0,0050	0,1300	0,3659	0,5704	0,7200	0,8103	0,8445	0,84
4	0,0067	0,1333	0,3607	0,5612	0,7101	0,8010	0,8380	0,84
5	0,0083	0,1367	0,3562	0,5526	0,7004	0,7920	0,8322	0,84
6	0,01	0,1400	0,3524	0,5445	0,6910	0,7834	0,8268	0,84

2-мисол. Айирмали схемадан фойдаланиб $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ тор тебраниш тенгламасининг $u(x,0) = 2x(1 - x^2), u_t(x,0) = (x + 0.4)\cos(x + 0,3)$ бошланғич ва $u(0,t) = 0,5t^2, u(1,t) = 0$ чегаравий шартларни қаноатлантирувчи сонли ечимини топинг, бунда $h = 0.1, \quad 0 \le t \le 0,5$.

Ечиш. $u_{i,j+1} = u_{i+1,j} + u_{i-1,j} - u_{i,j-1}, i = 1,2\mathrm{K}\ , j = 1,2,3\mathrm{K}$ муносабатдан масалани ечиш учун фойдаланамиз. Бунда $u_{i,0} = f_i$ бўлиб, $u_{i,1}$ ни масалан қуйидаги усулдан фойдаланиб аниқлаш мумкин: $u_{i,1} = \dfrac{1}{2}(f_{i+1} + f_{i-1}) + h\Phi_i$,

$x_i = 0 + ih\ (i = 0,1,2,\mathrm{K}\ , n), n = \dfrac{1-0}{h} = 10$, $t_j = 0 + jh\ (i = 0,1,2,3,4,5)$,

$u_{0,j} = 0.5t_j^{\ 2}; u_{n,j} = 0$. Ушбу формулалар ёрдамида изланаётган функциянинг тўр тугун нуқталаридаги қийматларини топиб, жадвални қуйидаги алгоритм асосида тўлдирамиз:

- $x_i = 0,1i$ да $u_{i,0} = f(x_i) = 2x_i(1 - x_i^{\ 2})$ қийматларни топамиз ва уларни жадвалнинг биринчи қаторига ёзамиз (улар $t_0 = 0$ га мос келади).

- $t_j = 0,1$ да $u_{0,j} = 0,5t_j^2$ қийматларни биринчи устунга жойлаштирамиз (улар $x_0 = 0$ га мос келади).

- $u_{10,j} = 0$ қийматларни охирги устунга жайлаштирамиз (улар $x_{10} = 1$ га мос келади).

- $u_{i,1} = \dfrac{1}{2}(f_{i+1} + f_{i-1}) + h\Phi_i$ формула ёрдамида $u_{i,1}$ қийматларни ҳисоблаймиз, бу ерда f_{i+1} ва f_{i-1} жадвалнинг биринчи қаторидан олинади, $\Phi_i = (x_i + 0,4)\cos(x_i + 0,3); \quad x_i = 0,1\,i\ (i = 1,2,...,9); h = 0.1$ ҳисобланиб, иккинчи қаторга ёзамиз.

• Навбатдаги қаторлардаги $u_{i,j}$ қийматларни $u_{i,j+1} = u_{i+1,j} + u_{i-1,j} - u_{i,j-1}$ формуладан фойдаланиб топамиз, бу ерда $u_{i+1,j}, u_{i-1,j}, u_{i,j-1}$ қийматлар жадвалнинг олдинги қаторларидан олинади.

$t_j \backslash x_i$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	0	0,198	0,384	0,546	0,672	0,750	0,768	0,714	0,576	0,342	0
0,1	0,005	0,2381	0,4247	0,5858	0,7092	0,7677	0,7942	0,7315	0,5825	0,3354	0
0,2	0,02	0,2317	0,4399	0,5879	0,6815	0,7534	0,7312	0,6627	0,4909	0,2405	0
0,3	0,045	0,2218	0,3949	0,5356	0,6321	0,6450	0,6219	0,4906	0,3207	0,1555	0
0,4	0,08	0,2082	0,3175	0,4391	0,4991	0,5006	0,4044	0,2799	0,1552	0,0802	0
0,5	0,125	0,1757	0,2524	0,2810	0,3076	0,2585	0,1586	0,6090	0,0394	-0,0003	0

3- мисол. $\dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0$ Лаплас тенгламасига учлари A(0;0), B(0;1),C(1;1),D(1;0) нуқталарда бўлган квадратга $u\big|_{AB} = 45y(1-y)$, $u\big|_{BC} = 25x$, $u\big|_{CD} = 25$, $u\big|_{AD} = 25x\sin\dfrac{\pi x}{2}$ шартлар билан қўйилган Дирихле айирмали масаласини $h = 0{,}2$ қадам билан тўр усули ёрдамида тақрибий ечинг.

Масалани ечиш учун Либман итерация усулидан фойдаланамиз. Бунинг учун $h = 0{,}2$ қадам билан берилган соҳада тўр қурамиз ва чегаравий нуқталарда изланаётган функциянинг қийматларини ҳисоблаймиз.AB кесмада функциянинг қийматини $u(x,y) = 45y(1-y)$ функция орқали ҳисоблаймиз, яъни

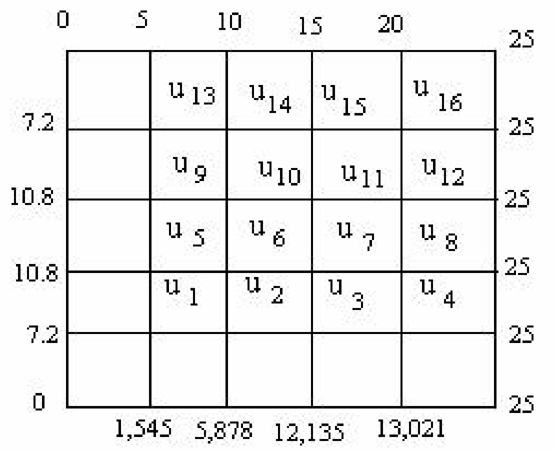
$$u(0,0) = 0; u(0;0.2) = 7.2; u(0;0,4) = 10.8; u(0;0,6) = 10.8; u(0;0,8) = 7,2; u(0;1) = 0,$$

BC томонда: $u(x,y) = 25x$ функция орқали

$u(0,2;1) = 5,\ u(0,4;1) = 10,\ u(0,6;1) = 15,\ u(0.8;1) = 20,\ u(1;1) = 25$ қийматларни,

CD томонда: $u(x,y) = 25$ функция орқали

$u(1;0.8) = u(1;0.6) = u(1;0.4) = u(1;0.2) = u(1;0) = 25$ қийматларни,



1-расм

AD томонда $u(x,y) = 25x\sin\frac{\pi x}{2}$ функция орқали $u(0{,}2;0) = 1.545; u(0{,}4;0) = 5.878; u(0{,}6;0) = 12.135; u(0.8;0) = 19.021; u(1;1) = 25$ қийматларни топамиз.

Тўрнинг ички нуқталарида функциянинг қийматларини топиш учун Лаплас тенгламасини қуйидаги айирмали нисбат билан алмаштирамиз: $u_{i,j} = u(x_i, y_j) = \frac{1}{4}\left(u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1}\right)$. Ушбу формуладан ва берилган чегаравий қийматлардан фойдаланиб тўрнинг ички ҳар бир нуқтаси учун функцияни қийматини ҳисоблаш формулаларини ёзамиз:

$$u_1 = \frac{1}{4}(7.2 + 1.545 + u_2 + u_5);\ u_2 = \frac{1}{4}(5.878 + u_1 + u_3 + u_6);$$

$$u_3 = \frac{1}{4}(12.135 + u_2 + u_4 + u_7);\ u_4 = \frac{1}{4}(19.021 + 25 + u_3 + u_8);$$

$$u_5 = \frac{1}{4}(10.8 + u_1 + u_6 + u_9);\ u_6 = \frac{1}{4}(u_2 + u_5 + u_7 + u_{10});\ u_7 = \frac{1}{4}(u_3 + u_6 + u_8 + u_{11});$$

$$u_8 = \frac{1}{4}(25 + u_4 + u_7 + u_{12});\ u_9 = \frac{1}{4}(10.8 + u_5 + u_{10} + u_{13});\ u_{10} = \frac{1}{4}(u_6 + u_9 + u_{11} + u_{14});$$

$$u_{11}=\frac{1}{4}(u_7+u_{10}+u_{12}+u_{15});\ u_{12}=\frac{1}{4}(25+u_8+u_{11}+u_{16});\ u_{13}=\frac{1}{4}(7.2+5+u_9+u_{14});$$

$$u_{14}=\frac{1}{4}(10+u_{10}+u_{13}+u_{15});\ u_{15}=\frac{1}{4}(15+u_{11}+u_{14}+u_{16});\ u_{16}=\frac{1}{4}(20+25+u_{12}+u_{15}).$$

Энди бу система ечимини Зейдел итерацион усули билан топамиз. Ҳар бир қиймат $u_i^{(0)},u_i^{(1)},u_i^{(2)},\ldots,u_i^{(k)},\ldots$ кетма-кетлик ҳадлари учун формулаларни берамиз:

$$u_{1}^{k}=\frac{1}{4}\left(8.745+u_2^{(k-1)}+u_5^{(k-1)}\right);\ u_2^{(k)}=\frac{1}{4}\left(5.878+u_1^{(k)}+u_3^{(k-1)}+u_6^{(k-1)}\right);$$

$$u_3^{(k)}=\frac{1}{4}\left(12.135+u_2^{(k)}+u_4^{(k-1)}+u_7^{(k-1)}\right);\ u_4^{(k)}=\frac{1}{4}\left(44.021+u_3^{(k)}+u_8^{(k-1)}\right);$$

$$u_5^{(k)}=\frac{1}{4}\left(10.8+u_1^{(k)}+u_6^{(k-1)}+u_9^{(k-1)}\right);\ u_6^{(k)}=\frac{1}{4}\left(u_2^{(k)}+u_5^{(k)}+u_7^{(k-1)}+u_{10}^{(k-1)}\right);$$

$$u_7^{(k)}=\frac{1}{4}\left(u_3^{(k)}+u_6^{(k)}+u_8^{(k-1)}+u_{11}^{(k-1)}\right);\ u_8^{(k)}=\frac{1}{4}\left(25+u_4^{(k)}+u_7^{(k)}+u_{12}^{(k-1)}\right);$$

$$u_9^{(k)}=\frac{1}{4}\left(10.8+u_5^{(k)}+u_{10}^{(k-1)}+u_{13}^{(k-1)}\right);\ u_{10}^{(k)}=\frac{1}{4}\left(u_6^{(k)}+u_9^{(k)}+u_{11}^{(k-1)}+u_{14}^{(k-1)}\right);$$

$$u_{11}^{(k)}=\frac{1}{4}\left(u_7^{(k)}+u_{10}^{(k)}+u_{12}^{(k-1)}+u_{15}^{(k-1)}\right);\ u_{12}^{(k)}=\frac{1}{4}\left(25+u_8^{(k)}+u_{11}^{(k)}+u_{16}^{(k-1)}\right);$$

$$u_{13}^{(k)}=\frac{1}{4}\left(12.2+u_9^{(k)}+u_{14}^{(k-1)}\right);\ u_{14}^{(k)}=\frac{1}{4}\left(10+u_{10}^{(k)}+u_{13}^{(k)}+u_{15}^{(k-1)}\right);$$

$$u_{15}^{(k)}=\frac{1}{4}\left(15+u_{11}^{(k)}+u_{14}^{(k)}+u_{16}^{(k-1)}\right);\ u_{16}^{(k)}=\frac{1}{4}\left(45+u_{12}^{(k)}+u_{15}^{(k-1)}\right).$$

Ушбу формулалардан фойдаланиб номаълум қийматларни топиш учун бошланғич яқинлашиш $u_i^{(0)}$ лар берилиши лозим. Бу қийматлар бирор усул билан топилади. Масалан, изланаётган $u(x,y)$ функция қаралаётган соҳада горизотал бўйича текис тақсимланган деб фараз қилиб топамиз. Бунда (0;0,2) ва (1;0,2) чегарани қараб, ички $u_1^{(0)},u_2^{(0)},u_3^{(0)},u_4^{()}$ нуқталардаги қийматларни ҳисоблаймиз. Кесма 5 та қисмга бўлингани учун функциянинг ўзгариш қадами $K_1 = (25 - 7.2)/5 = 3,56$ эканлигини топиб, қуйидагиларни ҳисоблаймиз:

$$u_1^{(0)} = 7.2 + K_1 = 7.2 + 3.56 = 10.76; \quad u_2^{(0)} = u_1^{(0)} + K_1 = 10.76 + 3.56 = 14.32;$$

$$u_3^{(0)} = u_2^{(0)} + K_1 = 14.32 + 3.56 = 17.88; \quad u_4^{(0)} = u_3^{(0)} + K_1 = 17.88 + 3.56 = 21.44\,.$$

Худди шу каби қолган бўйича қийматлар топилади. Натижада бошланғич қийматлар учун қуйидаги жадвалдаги қийматлар топилади:

1	0	5	10	15	20	25
0,8	7,2	10,76	14,32	17,88	21,44	25
0,6	10,8	13,64	16,48	19,32	22,16	25
0,4	10,8	13,64	16,48	19,32	22,16	25
0,2	7,2	10,76	14,32	17,88	21,44	25
0	0	1,545	5,878	12,135	19,021	25
y_i x_i	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1

Бу қийматларни бошланғич яқинлашиш деб қараб, навбатдаги итерациянинг биринчи қадамида фақат функциянинг ички тугун нуқтадаги қийматларини жадвалларда ҳисоблаймиз. $k = 1$ да

9,790	13,258	17,027	20,904
12,641	15,363	18,411	21,589
12,524	15,170	18,241	21,506
9,176	12,354	16,312	20,623

ва ҳоказо. $k = 14$ да

8,635	11,772	15,803	20,303
10,565	12,646	16,138	20,407
10,170	12,101	15,693	20,185
7,202	9,883	14,339	19,637

$k = 2$ да

9,346	12,708	16,561	20,679
11,927	14,460	17,630	21,153
11,754	14,243	17,443	21,079
8,406	11,442	15,610	20,384

$k = 15$ да

8,634	11,770	15,802	20,302
10,562	12,642	16,135	20,405
10,167	12,096	15,689	20,183
7,200	9,879	14,336	19,636

Кўриниб турибдики 14 ва 15 итерация қадамидаги қийматлар бир-биридан 0,01 (сўралган аниқлик) га фарқ қилади. Шунинг учун ҳисоблашларни тўхтатамиз ва натижа

1	0	5	10	15	20	25
0,8	7,2	8,63	11,77	15,80	20,30	25
0,6	10,8	10,56	12,64	16,14	20,40	25
0,4	10,8	10,17	12,10	15,69	20,18	25
0,2	7,2	7,20	9,88	14,34	19,64	25
0	0	1,54	5,88	12,14	19,02	25
y_i x_i	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1

кўринишда бўлади.

Мустақил ишлаш учун мисоллар

1. $$\theta\frac{\varphi_{i+1}-\varphi_i}{h}+\left(1-\theta\right)\frac{\varphi_i-\varphi_{i-1}}{h}=f_i,\ i=\overline{1,\,n-1}$$

$$\varphi_0=a\,,\ \varphi_1=b$$

айирмали схеманинг турғунлигини $\theta\in\left(0,1\right)$ да текширинг.

2. Қуйидаги айирмали схеманинг турғунлигини исботланг:

$$-\frac{2}{\left(x_{i+1}-x_{i-1}\right)}\left(\frac{\varphi_{i+1}-\varphi_i}{\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{dx}{p(x)}}-\frac{\varphi_i-\varphi_{i-1}}{\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{dx}{p(x)}}-\varphi_i\int\limits_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}}q(x)dx\right)=\frac{2}{\left(x_{i+1}-x_{i-1}\right)}\int\limits_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}}f(x)dx\,,$$

$$p(x)>0\,,\ q(x)>0\,,\ i=\overline{1,\,n-1}\,,$$

$$\varphi_0=0\,,\ \varphi_n=0\,,\ x_0=0\,,\ x_n=1\,,\ x\in[0,1].$$

3. Қуйидаги дифференциал ва айирмали масаланинг ечимини топинг.

$$\frac{du}{dx}+2u=0\,,\ u(0)=1\,,\ \ x\in[0,1];$$

$$\frac{\varphi_{i+1}-\varphi_{i-1}}{2h}+2\varphi_i=0\,,\ i=\overline{1,\,n-1}\,,\ h=\frac{1}{n}\,,$$

$$\varphi_0=1\,,\ \varphi_0=1-2h\,.$$

Топилган ечимга ва яқинлашиш теоремасига асосан $\left\| (u)_h - \varphi^h \right\|_{\Phi_h}$ ни баҳоланг.

4. 3-масалани қуйидаги айирмали схема учун ечинг.

$$\frac{\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1}}{2h} + 2\varphi_i = 0,\ i = \overline{1,\ n-1},$$

$$\varphi_0 = 1, \varphi_1 = 1.$$

5. Қуйидаги дифференциал ва айирмали масаланинг ечимини топинг.

$$\frac{du}{dx} = 0,\ u(0) = 1,\ x \in [0,1];$$

$$4\frac{\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1}}{2h} - 3\frac{\varphi_{i+1} - \varphi_i}{h} = 0,\ i = \overline{1,\ n-1},\ h = \frac{1}{n},$$

$$\varphi_0 = 1,\ \varphi_1 = 1 + h^2,$$

$\left\| (u)_h - \varphi^h \right\|_{\Phi_h}$ ни баҳоланг.

6. $$\frac{\varphi_i - \varphi_{i-1}}{h} + l\psi_{i-1} = 0,\ \varphi_0 = a,\ h = \frac{1}{n}$$

$$\frac{\psi_i - \psi_{i-1}}{h} - l\varphi_{i-1} = 0,\ \psi_0 = b,\ i = \overline{1,\ n}$$

айирмали схеманинг ечимини

$$\frac{du}{dx} + l\vartheta = 0,\ u(0) = a,$$

$$\frac{du}{dx} - lu = 0,\ \vartheta(0) = b,$$

$$x \in [0,1] \quad l = const,$$

дифференциал масала ечими учун турғунлигини иккала масала ечимларидан фойдаланиб текширинг.

7. 6-масалани қуйидаги айирмали схема учун ечинг.

$$\frac{\varphi_i-\varphi_{i-1}}{h}+l\psi_i=0,\ \varphi_0=a,\ h=\frac{1}{n},$$

$$\frac{\psi_i-\psi_{i-1}}{h}-l\varphi_i=0,\ \psi_0=b,\ i=\overline{1,\ n}.$$

8. 6-масалани қуйидаги айирмали схема учун ечинг.

$$\frac{\varphi_i-\varphi_{i-1}}{h}+l\frac{\psi_i+\psi_{i-1}}{2}=0,\ \varphi_0=a,\ h=\frac{1}{n},$$

$$\frac{\psi_i-\psi_{i-1}}{h}-l\frac{\varphi_i+\varphi_{i-1}}{2}=0,\ \psi_0=b,\ i=\overline{1,\ n}.$$

9. 6-масалани қуйидаги айирмали схема учун ечинг.

$$\frac{\varphi_{i+1}-\varphi_{i-1}}{2h}+l\psi_i=0,\ \varphi_0=a,\ \varphi_1=a-lhb,$$

$$\frac{\psi_{i+1}-\psi_{i-1}}{2h}-l\varphi_i=0,\ \psi_0=b,\ \psi_1=b+lha$$

$$i=\overline{1,\ n-1},\ h=\frac{1}{n}.$$

10. 6-масалани қуйидаги айирмали схема учун ечинг.

$$4\frac{\varphi_{i+1}-\varphi_{i-1}}{2h}-3\frac{\varphi_{i+1}-\varphi_i}{h}+l\psi_i=0,\ h=\frac{1}{n},$$

$$4\frac{\psi_{i+1}-\psi_{i-1}}{2h}-3\frac{\psi_{i+1}-\psi_i}{h}-l\varphi_i=0,\ i=\overline{1,\ n-1},$$

$$\varphi_0=a,\ \varphi_1=a-lhb,$$

$$\psi_0=b,\ \psi_1=b+lha.$$

11. Яқинлашиш ҳақидаги теоремадан фойдаланиб, айирмали схема ечимининг дифференциал масала ечимига яқинлашиш тартибини баҳоланг.

$$\frac{du}{dx}+5u=\cos x+5\sin x,\ u(\pi)=0,\ x\in\left[\pi,2\pi\right],$$

$$\frac{\varphi_{i+1}-\varphi_i}{h}+5\varphi_i=\cos\left(ih\right)+5\sin\left(ih\right),\ i=\overline{0,\ n-1},$$

$$\varphi_0=0,\ h=\pi/n.$$

12. 11-масалани қуйидаги тенгламалар учун ечинг.

$$\frac{du}{dx}+2u=2\left(x+x^2\right),\ u(4)=16,\ x\in\left[4,7\right],$$

$$\frac{\varphi_{i+1}-\varphi_i}{h}+\varphi_{i+1}+\varphi_i=2\left(4+ih+\left(4+ih\right)^2\right),\ i=\overline{0,\ n-1},$$

$$\varphi_0=16,\ h=3/n.$$

13. 11-масалани қуйидаги тенгламалар учун ечинг.

$$\frac{du}{dx}+2u=2\left(x+x^2\right),\ u(4)=16,\ x\in\left[4,7\right],$$

$$\frac{\varphi_{i+1}-\varphi_i}{h}+\varphi_{i+1}+\varphi_i=2\left(4+ih+\left(4+ih\right)^2\right)+h\left(1+2\left(4+ih\right)\right),\ i=\overline{0,\ n-1},$$

$$\varphi_0=16,\ h=3/n.$$

14. 11-масалани қуйидаги тенгламалар учун ечинг.

$$\frac{du}{dx}+u\sin x=\frac{\sin\left(2x\right)}{2}+\sin x,\ x\in\left[0,1\right],$$

$$u(0)=1,$$

$$\frac{\varphi_{i+1}-\varphi_i}{h}+\varphi_i\sin\left(ih\right)=\frac{\sin\left(2ih\right)}{2}+\sin\left(ih\right),\ i=\overline{0,\ n-1},$$

$$\varphi_0 = 1,\ h = 1/n.$$

15. $$-\frac{\varphi_{i+1} - 2\varphi_i + \varphi_{i-1}}{h^2} + (1 + ih)\varphi_i = (ih)^3 - ih - 2,\ i = \overline{1,\ n-1},$$

$$\varphi_0 = \varphi_n = 0,\ h = 1/n$$

айирмали схема ечимини

$$-\frac{d^2u}{dx^2} + (1 + x)u = x^3 - x - 2,\ x \in [0,1],$$

$$u(0) = u(1) = 0$$

дифференциал масала ечимига яқинлашишини текширинг.

16. $$-\frac{\varphi_{i+1} - 2\varphi_i + \varphi_{i-1}}{h^2} = -\frac{1}{(1 + ih)^2},\ i = \overline{1,\ n-1},\ h = \frac{1}{n},$$

$$\frac{\varphi_1 - \varphi_0}{h} = 1,\ \varphi_n = \ln 2$$

айирмали схема ечимини

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = -\frac{1}{(1 + x)^2},\quad x \in [0,1],$$

$$\left.\frac{du}{dx}\right|_{x=0} = 1,\ u(1) = \ln 2$$

дифференциал масала ечимига яқинлашишини текширинг.

17. $$-\frac{d^2u}{dx^2} - 3\frac{du}{dx} - 4u = 0,\ x \in [0,1],$$

$$u(0) = 1,\ \left.\frac{du}{dx}\right|_{x=0} = -1,$$

дифференциал масала учун

$$\frac{\varphi_{i+1}-2\varphi_i+\varphi_{i-1}}{h^2}-3\frac{\varphi_{i+1}-\varphi_{i-1}}{2h}-4\varphi_i=0,\ i=\overline{1,\ n-1},$$

$$\varphi_0=1,\ \frac{\varphi_1-\varphi_0}{h}=-1,\ h=\frac{1}{n}$$

айирмали схема тузилган.

а) Аппроксимация тартибини аниқланг.

б) Иккинчи тартибли аппроксимацияга эришиш учун чегаравий шартларни аппроксимациясини қандай ўзгартириш керак?

18.

$$\frac{-3\varphi_i+4\varphi_{i+1}-\varphi_{i+2}}{2h}+a\varphi_i=f(x_i),\ i=0,2,4,...,2n-2,$$

$$\frac{-\varphi_{i-1}+\varphi_{i+1}}{2h}+a\varphi_i=f(x_i),\ i=1,3,5,...,2n-1,$$

$$\varphi_0=b,\ h=\frac{1}{n},\ x_i=ih$$

айирмали схема ечимини

$$\frac{du}{dx}+au=f(x),\ x\in[0,1],$$

$u(0)=b$ дифференциал масала ечимига яқинлашишини текширинг.

19. $$\frac{\varphi_{i+1}+\varphi_{i-1}}{2h}+2\varphi_i=-\frac{5}{2}(1-ih)^{3/2}+2(1-ih)^{5/2},\ i=\overline{1,\ n-1},$$

$$\varphi_0=1,\ \varphi_1=(1-h)^{5/2},\ h=1/n$$

айирмали схема ечимини

$$\frac{du}{dx}+2u=-\frac{5}{2}(1-x)^{3/2}+2(1-x)^{5/2},\ x\in[0,1],$$

$u(0)=1$ дифференциал масала ечимига яқинлашишини текширинг.

20. $$\frac{\varphi_{i+1}+2\varphi_i+\varphi_{i-1}}{h^2}+3\varphi_i=\frac{35}{4}(1-ih)^{3/2}-3(1-ih)^{7/2},\ i=\overline{1,\ n-1},$$

$$\varphi_0=1,\ \frac{\varphi_1-\varphi_0}{h}=-\frac{7}{2}+\frac{35}{8}h,\ h=\frac{1}{n}$$

айирмали схема ечимини дифференциал масала ечимига яқинлашишини текширинг.

21. Қуйидаги дифференциал ва айирмали масалаларнинг ечимларини топинг.

$$\frac{du}{dx}+u=0,\ x\in[0,1],$$

$$u(0)=1;$$

$$-\frac{\varphi_{i+1}-\varphi_{i-1}}{2h}+\varphi_i=0,\ i=\overline{1,\ n-1},\ h=\frac{1}{n},$$

$$\varphi_0=1,\ \varphi_1=e^{-h}$$

Агар $\psi_i=\frac{4}{3}\varphi_{2i}^{(2)}-\frac{1}{3}\varphi_i^{(1)},\ i=\overline{0,\ n_1}\ n_1=\frac{1}{h_1}$ бўлса, $\left\|(u)_h-\psi^h\right\|_\infty$ ни баҳоланг. Бу ерда $\varphi_i^{(1)}$ - $h=h_1$ қадамли, $\varphi_{2i}^{(2)}$ - $h=h_1/2$ қадамли айирмали схемаларни ечимлари.

22. Қуйидаги дифференциал ва айирмали масалаларнинг ечимларини топинг.

$$-\frac{d^2u}{dx^2}+u=0,\ x\in[0,1],$$

$$u(0)=1,\ \left.\frac{du}{dx}\right|_{x=0}=-1;$$

$$-\frac{\varphi_{i+1}+2\varphi_i+\varphi_{i-1}}{h^2}+\varphi_i=0,\ i=\overline{1,\,n-1},\ h=\frac{1}{n},$$

$$\varphi_0=1,\ \frac{\varphi_1-\varphi_0}{h}=-1+\frac{h}{2},$$

Агар $\psi_i=\frac{4}{3}\varphi_{2i}^{(2)}-\frac{1}{3}\varphi_i^{(1)},\ i=\overline{0,\ n_1},\ n_1=\frac{1}{h_1}$ бўлса, $\left\|(u)_h-\psi^h\right\|_\infty\le Ch^4$

эканлигини кўрсатинг. Бу ерда ерда $\varphi_i^{(1)}$ - $h=h_1$ қадамли, $\varphi_{2i}^{(2)}$ - $h=h_1/2$ қадамли айирмали схемаларнинг ечимлари.

23. $$Lu=\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}$$

дифференциал операторни

$$(L_{h\tau}\varphi^{h\tau})_i^j=\frac{\varphi_i^{j+1}-\frac{\varphi_{i+1}^j+\varphi_{i-1}^j}{2}}{\tau}+a\frac{\varphi_{i+1}^j-\varphi_{i-1}^j}{2h}$$

айирмали оператор нечанчи тартиб билан локал аппроксимация қилишини аниқланг.

24. $$(L_{h\tau}\varphi^h)_{i,k}=\frac{\varphi_{i-1,k}+\varphi_{i,k-1}+\varphi_{i+1,k}+\varphi_{i,k+1}-4\varphi_{i,k}}{h^2}$$

айирмали оператор қайси дифференциал операторни нечанчи тартиб билан локал аппроксимация қилишини аниқланг.

25. Қуйидаги айирмали оператор учун 24-масалани ечинг.

$$(L_h\varphi^h)_{i,k}=\frac{\varphi_{i-1,k+1}+\varphi_{i-1,k-1}+\varphi_{i+1,k+1}+\varphi_{i+1,k-1}-4\varphi_{i,k}}{2h^2}.$$

26. $$\frac{\varphi_i^{j+1}-\varphi_i^j}{\tau}=\frac{\varphi_{i-1}^j-2\varphi_i^j+\varphi_{i+1}^j}{h^2}$$

айирмали схема

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

дифференциал операторни $\tau / h^2 = 16$ бўлганда τ бўйича иккинчи тартиб билан ва h бўйича тўртинчи тартиб билан локал аппроксимация қилишини кўрсатинг.

27. Қуйидаги дифференциал тенглама берилган.

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{\varphi_i^{j+1}-\varphi_i^j}{\tau}=\theta\frac{\varphi_{i+1}^{j+1}-2\varphi_i^{j+1}+\varphi_{i-1}^{j+1}}{h^2}+(1-\theta)\frac{\varphi_{i+1}^{j}-2\varphi_i^{j}+\varphi_{i-1}^{j}}{h^2}$$

айирмали схема θ нинг қандай қийматларида τ бўйича иккинчи тартиб билан ва h бўйича тўртинчи тартиб билан локал аппроксимация қилишини топинг.

28. $$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ t\in[0,T], x\in[0,1]$$

$$u(0,x)=\vartheta(x),\ u(t,0)=u(t,1)=0$$

дифференциал масалани

$$\frac{1}{12}\frac{\varphi_{i+1}^{j+1}-\varphi_{i+1}^j}{\tau}+\frac{5}{6}\frac{\varphi_i^{j+1}-\varphi_i^j}{\tau}+$$

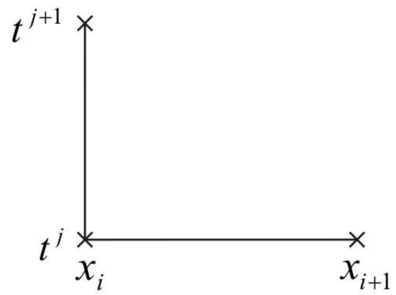
$$+\frac{1}{12}\frac{\varphi_{i-1}^{j+1}-\varphi_{i-1}^j}{\tau}=\frac{1}{2h^2}((\varphi_{i-1}^{j+1}-2\varphi_i^{j+1}+\varphi_{i+1}^{j+1})+(\varphi_{i-1}^{j}+\varphi_{i+1}^{j}-2\varphi_i^{j})),$$

$$j=\overline{0,\ m-1},\ i=\overline{1,\ n-1},$$

$$\varphi_i^0=\vartheta(x_i),\quad i=\overline{0,n},\quad h=1/n,\quad x_i=ih,$$

$\varphi_i^0 = \varphi_n^j = 0$, $\quad j = \overline{0, m}$, $\tau = T/m$ айирмали схема нечанчи тартиб билан аппроксимация қилади?

29. 8-расмда келтирилган шаблондан фойдаланиб,

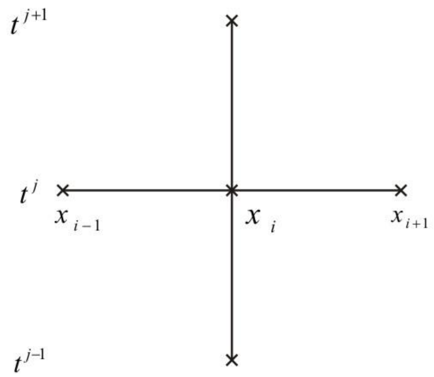


8-расм.

$$Lu = \frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x}$$

оператор учун (мумкин бўлса) $\tau = rh \ (r = const)$ да 8-расмда кўрсатилган шаблонда биринчи ва иккинчи тартиб билан локал аппроксимация қилувчи айирмали операторни қуринг.

30. 9-расмда келтирилган шаблондан фойдаланиб,

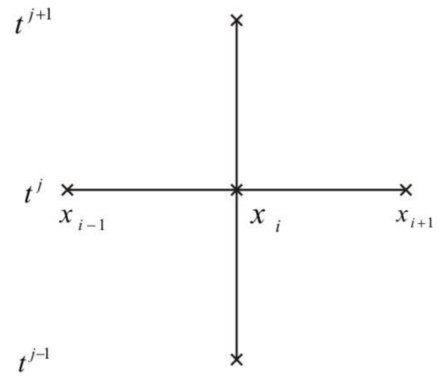


9-расм.

$$Lu = \frac{\partial u}{\partial t} - a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial u}{\partial x}$$

дифференциал операторни τ ва h бўйича иккинчи тартиб билан локал аппроксимация қилувчи айирмали операторни қуринг.

31. 10-расмда келтирилган шаблондан фойдаланиб,



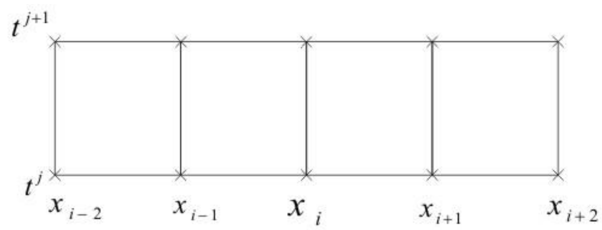
10-расм.

$\left(t^{j}, x_i\right)$ нуқтада

$$Lu = \frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x}$$

дифференциал операторни τ ва h бўйича иккинчи тартиб билан локал аппроксимация қилувчи айирмали операторни қуринг.

32. 11-расмда келтирилган шаблондан фойдаланиб,



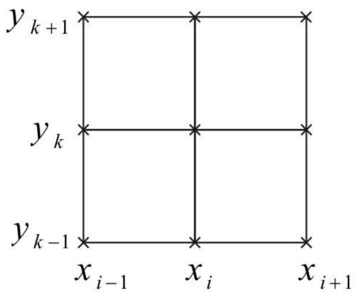
11-расм.

$\left(t^{j+1/2}, x_i\right)$ нуқтада

$$Lu = \frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x}$$

дифференциал операторни τ бўйича иккинчи тартиб билан ва h бўйича тўртинчи тартиб билан локал аппроксимация қилувчи айирмали операторни қуринг.

33. 12-расмда келтирилган шаблондан фойдаланиб,



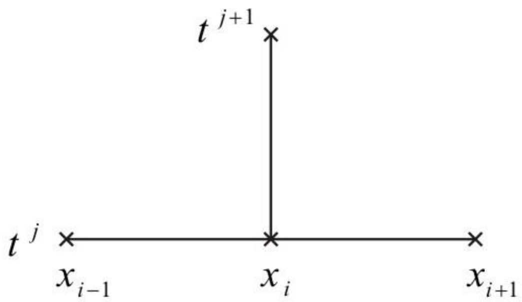
12-расм.

$h = x_i - x_{i-1} = y_k - y_{k-1} = const$ - ўзгармас қадам билан номаълум коэффициентлар усули бўйича

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f\left(x, y\right)$$

дифференциал тенгламани тўртинчи тартиб билан локал аппроксимация қилувчи айирмали схемани қуринг.

34. 13-расмда келтирилган шаблондан фойдаланиб,



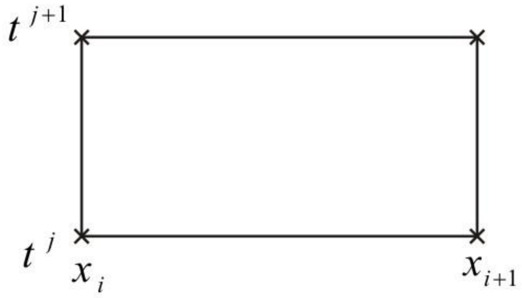
13-расм.

номаълум коэффициентлар усули бўйича

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = f\left(t, x\right), \qquad t \in \left[0, T\right],$$

$u(0,x) = g(x)$, $u\left(t, x\right) = u\left(t, x+1\right)$ дифференциал масалани τ ва h бўйича иккинчи тартиб билан аппроксимация қилувчи айирмали схемани қуринг.

35. 14-расмда келтирилган шаблондан фойдаланиб,



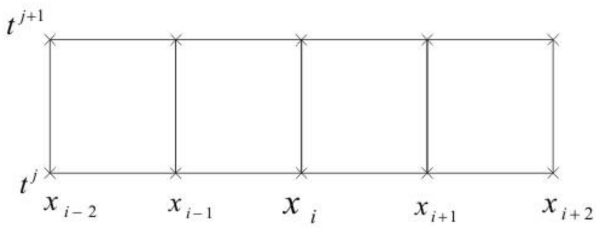
14-расм.

интегро-интерполяцион усул билан

$$\frac{\partial u}{\partial x}+a\frac{\partial u}{\partial x}=f(t,x),\ x\in[0,1],\ t\in[0,T],$$

$u(0,x)=g^0(x)$, $u(t,0)=g_0(t)$ дифференциал масалани τ ва h бўйича иккинчи тартиб билан аппроксимация қилувчи айирмали схемани қуринг.

36. 15-расмда келтирилган шаблондан фойдаланиб,



15-расм

интегро-интерполяцион усул билан τ бўйича иккинчи тартиб билан ва h бўйича олтинчи тартиб билан аппроксимация қилувчи 5.13 масалани ечинг.

37. Қуйидаги диффенциал масалани τ ва h бўйича иккинчи тартиб билан аппроксимация қилувчи айирмали схемани қуринг.

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=f(x,y)\ ,\ t\in[0,T],$$

$$u(0,\ \ x,\ \ y)=g(x,y)\,,$$

$$u(t,\ x,\ y)=u(t,\ x+1,\ y),\ u(\mathrm{t, x, y})=u(\mathrm{t, x, y}+1).$$

38. Қуйидаги айирмали схемани турғунлигини текширинг.

$$\frac{\varphi_i^{j+1}-\varphi_i^j}{\tau}+a\frac{\varphi_i^{j+1}-\varphi_{i-1}^{j+1}}{h}=0,\quad i=\overline{1,\ n}\ ,\ j=\overline{0,\ m-1}\ ,$$

$$\varphi_i^0=g_i,\ i=\overline{0,\ n},\ \ nh=1\ ,$$

$$\varphi_0^j=g^j\ ,\ j=\overline{0,\ m}\ ,\ m\tau=T\ ,\ a>0\ .$$

39. Қуйидаги айирмали схемани турғунлигини текширинг.

$$\frac{\varphi_i^{j+1}-\varphi_i^j}{\tau}+a\frac{\varphi_{i+1}^j-\varphi_i^j}{h}=0,\ i=0,\pm1,\pm2,\ldots\ \ j=\overline{0,\ m-1}$$

$$\varphi_i^0=g_i,$$

$$j=\overline{0,\ m}\ ,\ m\tau=T\ ,\ a>0\ .$$

40. Қуйидаги айирмали схемани турғунлигини текширинг.

$$\frac{\varphi_i^{j+1}-\varphi_i^j}{\tau}+a\frac{\varphi_{i+1}^j-\varphi_{i-1}^j}{2h}=f_i^j,$$

$$i=\overline{0,\ n-1}\ ,\ j=\overline{0,\ m-1}\ ,$$

$$\varphi_i^0=g_i\ ,\ i=\overline{0,\ n}\ \ ,nh=1\ ,$$

$$\varphi_0^j=\varphi_n^j\ ,\ \varphi_{-1}^j=\varphi_{n-1}^j\ ,\ j=\overline{0,\ m}\ ,\ m\tau=T\ ,a>0\ .$$

4.1 Қуйидаги айирмали схемани турғунлигини текширинг.

$$\frac{\varphi_i^{j+1}-\dfrac{\varphi_{i+1}^j+\varphi_{i-1}^j}{2}}{\tau}-\frac{\varphi_{i+1}^j-\varphi_{i-1}^j}{2h}=f_i^j\ ,$$

$$i=\overline{0,\ n-1}\ ,\ \ j=\overline{0,\ \ m-1}\ ,$$

$$\varphi_i^0 = g_i \ , \ i = \overline{0,\ n} \quad nh = 1 \ ,$$

$$\varphi_0^j = \varphi_n^j \ , \ \varphi_{-1}^j = \varphi_{n-1}^j \ , \ j = \overline{0,\ m} \ , \ m\tau = T \ .$$

42. Қуйидаги айирмали схемани турғунлигини текширинг.

$$\frac{\varphi_i^{j+1} - \varphi_i^{j-1}}{2\tau} = \frac{\varphi_{i-1}^j - 2\varphi_i^j + \varphi_{i+1}^j}{h^2} \ ,$$

$$i = \overline{1,\ n-1} \ , \ j = \overline{1,\ m-1} \ ,$$

$$\varphi_i^0 = g_i \quad \varphi_i^1 = g_i \ , \ i = \overline{0,\ n} \ , \ nh = 1 \ ,$$

$$\varphi_i^0 = \varphi_n^j = 0 \ , \ j = \overline{0,\ m} \ , \ m\tau = T \ .$$

43. Қуйидаги айирмали схемани турғунлигини текширинг.

$$\frac{\varphi_i^{j+1} - \varphi_i^j}{\tau} = \left(1-\theta\right)\frac{\varphi_{i-1}^{j+1} - 2\varphi_i^{j+1} + \varphi_{i+1}^{j+1}}{h^2} + \theta\frac{\varphi_{i-1}^j - 2\varphi_i^j + \varphi_{i+1}^j}{h^2} \ ,$$

$$i = \overline{1, n-1} \ , \ j = \overline{0, m-1} \ ,$$

$$\varphi_i^0 = g_i, \ i = \overline{0, n} \ , \ nh = 1,$$

$$\varphi_0^j = \varphi_n^j = 0, \ j = \overline{0, m}, \ m\tau = T \ .$$

44. $\tau / h = 1$ да қуйидаги айирмали схема турғунмаслигини исботланг.

$$\frac{\varphi_i^{j+1} - 2\varphi_i^j + \varphi_i^{j-1}}{\tau^2} = \frac{\varphi_{i-1}^j - 2\varphi_i^j + \varphi_{i+1}^j}{h^2},$$

$$i = \overline{1, n-1} \ , \ j = \overline{1, m-1} \ ,$$

$$\varphi_i^0 = g_i^{(0)}, \ \frac{\varphi_i^1 - \varphi_i^0}{\tau} = g_i^1, \ \ i = \overline{0, n}, \ nh = 1,$$

$$\varphi_0^j = \varphi_n^j = 0, \ j = \overline{0, m}, \ m\tau = T$$

45. $$\frac{\varphi_i^{j+1}-\varphi_i^j}{\tau}-\frac{\varphi_{i+1}^j-\varphi_{i-1}^j}{2h}-\frac{\tau}{2h^2}\left(\varphi_{i-1}^j-2\varphi_i^j+\varphi_{i+1}^j\right)=0,$$

$$i=\overline{1,\,n},\ j=\overline{0,\,m-1},$$

$$\varphi_i^0=g_i\ ,\ i=\overline{0,\,n},\ nh=1,$$

$\varphi_{i+n}^j=\varphi_i^j\ ,\ j=\overline{0,\,m},\ m\tau=T$ айирмали схема ечимининг

$$\frac{du}{dt}-\frac{du}{dx}=0,\ t\in\left[0,T\right],$$

$u(0,x)=g(x)$, $u(t,x)=u(t,x+1)$ дифференциал масала ечимига яқинлашишини текширинг.

ФОЙДАЛАНИЛГАН АДАБИЁТЛАР РЎЙХАТИ

1. Самарский А.А. Теория разностных схем. -М., Наука, 1989.
2. Самарский А.А, Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. -М., Наука, 1978.
3. Самарский А.А., Гулин В.А. Численные методы. -М., Наука, 1989.
4. Калиткин Н.Н. Численные методы. -М., Наука, 1978.
5. Годунов С.К, Рябенький В.С. Разностные схемы, введению в теорию. -М., Наука, 1977.
6. Рихтмайер Р, Мортон К. Разностные методы решения краевых задач. -М.: Мир, 1972.
7. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные методы решения задач газовой динамики. -М., 1991.
8. Азаров А.И. и др. Сборник задач по методам вычислений. –Минск, 1983.
9. Дробышевич В.И. и др. Задачи по вычислительной математике. –М., Наука, 1980.
10. Исматуллаев Ғ.П, Жўраев Ғ.У. Ҳисоблаш усулларидан методик қўлланма. –Т., Университет. 2005.
11. Алоев Р.Д, Шарипов Т.Х. Сонли усуллар (маърузалар матни). БухДУ, 2003.