O‘QUV-USLUBIY MAJMUA

CHIZIQLI ALGEBRANING TATBIQLARI

2025

MATEMATIKA VA AMALIY MATEMATIKA

MALAKA OSHIRISH MARKAZI: SamDu Huzuridagi PKQTVUMOMM

O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY TA’LIM FAN VA INNOVATSIYALAR VAZIRLIGI

OLIY TA’LIM TIZIMI KADRLARINI QAYTA TAYYORLASH VA MALAKASINI OSHRISH INISTITUTI

SHAROF RASHIDOV NOMIDAGI SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI HUZURIDAGI PEDAGOG KADRLARINI QAYTA TAYYORLASH VA ULARNING MALAKASINI OSHIRISH MINTAQAVIY MARKAZI

“Tasdiqlayman”

Mmintaqaviy markaz direktori

______________A. I.Babayarov

“___” ___________ 2025-yil

“CHIZIQLI ALGEBRANING TATBIQLARI”
moduli bo‘yicha
O‘ Q U V –U S L U B I Y M A J M U A

Qayta tayyorlash va malaka oshirish kursi yo‘nalishi: “Matematika va amaliy matematika”

Tinglovchilar kontingenti: Oliy ta’lim muassasalarining pedagoglari

SAMARQAND – 2025

Mazkur o‘quv-uslubiy majmua Oliy ta’lim, fan va innovatsiyalar vazirligining 2024-yil 27-dekabrdagi 485-sonli buyrug’i bilan tasdiqlangan o‘quv reja va dastur asosida tayyorlandi.

Tuzuvchilar:	SamDU dotsenti **H.X. Ro’zimuradov**
Taqrizchi:	Prosessor A. Soleev

Mazkur o‘quv-uslubiy majmua Sharof Rashidov nomidagi Samarqand davlat universiteti Kengashining 2025-yil 30-yanvardagi 7-sonli bayonnomasi bilan ma’qullangan.

MUNDARIJA

ISHCHI DASTUR

Kirish

«**Chiziqli algebraning tatbiqlari** » moduli matematikaning bir tarmog‘i hisoblanib, u ciziqli va vector fazolar, ularning chiziqli almashtirishlari, matrisalar ular yordamida har xil algebraic, geometric, mexanik, texnik va iqtisodiy ob’ektlarning matematik modelini qurish asoslarini o‘rganadi va fanning zamonaviy yo’nalishlari va ularning tatbiqlarini amaliyotga keng qo‘llash, hamda ularning kelajakdagi o‘rni masalalarini qamraydi.

Kursning maqsadi va vazifalari

«**Chiziqli algebraning tatbiqlari**» modulining **maqsadi** pedagog kadrlarning innovatsion yondoshuvlar asosida o‘quv-tarbiyaviy jarayonlarni yuksak ilmiy-metodik darajada loyihalashtirish, sohadagi ilg‘or tajribalar, zamonaviy bilim va malakalarni o‘zlashtirish va chiziqli algebra metodlarini amaliyotga joriy etishlari uchun zarur bo‘ladigan kasbiy bilim, ko‘nikma va malakalarini takomillashtirish, shuningdek ularning ijodiy faolligini rivojlantirishdan iborat.

Modulning **vazifalariga** quyidagilar kiradi:

“Matematika va amaliy matematika” yo‘nalishida pedagog kadrlarning kasbiy bilim, ko‘nikma, malakalarini takomillashtirish va rivojlantirish;
- pedagoglarning ijodiy-innovatsion faollik darajasini oshirish;
- pedagog kadrlar tomonidan zamonaviy axborot-kommunikatsiya texnologiyalari
- o‘quv jarayonini tashkil etish va uning sifatini ta’minlash borasidagi ilg‘or xorijiy tajribalar, zamonaviy yondashuvlarni o‘zlashtirish;

“Matematika va amaliy matematika” yo‘nalishida qayta tayyorlash va malaka oshirish jarayonlarini fan va ishlab chiqarishdagi innovatsiyalar bilan o‘zaro integratsiyasini ta’minlash.

Modul yakunida tinglovchilarning bilim, ko‘nikma va malakalari hamda kompetensiyalariga qo‘yiladigan talablar:
Qayta tayyorlash va malaka oshirish kursining o‘quv modullari bo‘yicha tinglovchilar quyidagi yangi bilim, ko‘nikma, malaka hamda kompetensiyalarga ega bo‘lishlari talab etiladi:

• zamonaviy algebraning xozirgi kundagi dolzarb masalalarini;
• zamonaviy algebrada foydalaniladigan chiziqli algebra elementlarini;
• chiziqli algebra tushunchalari, ta’riflar va ularning tatbiqlarini;
• chiziqli almashtirishlar va chiziqli formalarni;
• vektor vazolar, chiziqli bog‘liqlilik va chiziqli erklilik, bazis va o‘lcham, qism fazo tushunchalarini;
• vektor fazodagi chiziqli almashtirishlar, chiziqli almashtirishning matritsasi, chizqli almashtirishning yadrosi va obrazini;
• chiziqli dasturlash masalalari va Demografik modellarni;

• teskari matritsa va ularni topishning Gaus-Jordan usullarini ***bilishi*** kerak.

Tinglovchi:

• talabalarning o‘quv auditoriyadagi faoliyatini baholash;

• talabalarning kurs ishi, bitiruv malakaviy ishi, o‘quv-malakaviy amaliyot (mehnat faoliyati)ini nazorat qilish;

• baholashning miqdor va sifat tahlilini amalga oshirish
chiziqli algebra va uning elementlariga doir masalalarni yechish;

• vektor fazodagi chiziqli almashtirishlar, chiziqli almashtirishning matritsasi, chizqli almashtirishning yadrosi va obrazidan foydalanish;

• matritsalar nazariyasini o‘zlashtirish, matritsalarning paydo bo‘lish tarixini tahlil etish;

• chiziqli tenglamalar sistemasi va ularni yechish usullaridan foydalanish;

• matritsalar va ular ustida amallar bajarish ***ko‘nikmalariga*** ega bo‘lishi lozim.

Tinglovchi:

• O‘zbekiston Respublikasi Konstitutsiyasidagi asosiy o‘zgarishlarni tahlil qilish va ularning zarurligini muhokama etish;

• O‘zbekiston Respublikasida ilm-fanni 2030-yilgacha rivojlantirish konsepsiyasining mazmun-mohiyati va ahamiyatini ochib berish;

• talabalarning o‘quv auditoriyadan tashqari faoliyatini baholashda o‘quv topshiriqlari (reproduktiv, produktiv, qisman-izlanishli, kreativ (ijodiy) murakkablik)ni ishlab chiqish metodikasidan samarali foydalanish;

• chiziqli almashtirishlar va chiziqli formalardan foydalanish;

• chiziqli algebra va uning elementlariga doir masalalarini ishlab chiqish;

• chiziqli almashtirish matritsasining turli normal shakllarini qo‘llash;

• chiziqli almashtirishlar va ularning matritsalarini graflar nazariyasi va information texnologiyalar sohasida qo ‘llash ***malakalariga*** ega bo‘lishi lozim

Tinglovchi:

• 2030-yilgacha O‘zbekiston Respublikasining yashil iqtisodiyotga o‘tish va ekologik barqarorlikga erishish strategiyasi mohiyati bilan tanishish;

• “Yashil” va inklyuziv iqtisodiy o‘sish tamoyillariga asoslangan yuqori iqtisodiy o‘sish dasturlarini amaliyotga tadbiq etish;

• chiziqli algebrada tatbiq etilgan modullardan foydalanish;

• chiziqli algebra tushunchalari, ta’riflarini o‘zlashtirish va ularni tatbiq etish;

• chizqli tenglamalar sistemasini yechishda yuqori uchburchak ko‘rinishidagi va regular matritsalarni qo‘llash;

• zamonaviy algebraning dolzarb masalalarini yechishda chiziqli algebra elementlari va usullaridan foydalanish;

kompetensiyalariga ega bo‘lishi lozim.

Kurs hajmi

«Chiziqli algebraning tatbiqlari» kursi jami 28 soatni tashkil etadi. Bunda o‘quv dasturining 8 soat hajmi maruza mashg’ulotlariga, 8 soat amaliy mashg’ulotlarga, 12 soat k**o**‘chma mashg‘ulotlarga ajratiladi.

1.7. Chiziqli algebraning tatbiqlari modulining mazmuni.

Zamonaviy algebraning hozirgi kundagi dolzarb masalalari. Zamonaviy algebrada foydalaniladigan chiziqli algebra elementlari. Chiziqli algebrada tatbiq etilgan modular. Chiziqli algebra va uning elementlariga doir masalalar. Chiziqli algebra tushunchalari, ta’riflar va ularning tatbiqlari. Matritsalar nazariyasi, matritsalarning paydo bo‘lish tarixi. Matritsalar va ular ustida amallar. Teskari matritsa va ularni topishning Gaus-Jordan usuli. Matritsalar yordamida yechiladigan masalalar. Chiziqli fazo, chiziqli fazoning bazisi va o‘lchami tushunchalari.

Chiziqli almashtirishlar va chiziqli formalar. Chiziqli almashtirishlarning matritsalari. Matritsalarning normal formasi va ularning qo‘llanishlari. Chiziqli tenglamalar sistemasi va ularni yechish usullari. Chizqli tenglamalar sistemasini yechishda yuqori uchburchak ko‘rinishidagi va regular matritsalarning qo‘llanilishi. Vektor vazolar, chiziqli bog‘liqlilik va chiziqli erklilik. Bazis va o‘lcham, qism fazo tushunchalari. Vektor fazodagi chiziqli almashtirishlar. Chiziqli almashtirishning matritsasi. Chizqli almashtirishning yadrosi va obrazi. Chiziqli almashtirish matritsasining turli normal shakllari. Chiziqli almashtirishlar va ularning matritsalarini graflar nazariyasi va information texnologiyalar sohasida qo‘llanilishi. Zamonaviy algebraning dolzarb masalalarini yechishda chiziqli algebra elementlari va usullaridan foydalanish.

Amaliy mashg‘ulotlarni tashkil etish bo‘yicha ko‘rsatma va tavsiyalar

Amaliy mashg‘ulotlarda tinglovchilar o‘quv modullari doirasidagi ijodiy topshiriqlar, keyslar, o‘quv loyihalari, texnologik jarayonlar bilan bog‘liq vaziyatli masalalar asosida amaliy ishlarni bajaradilar.
Amaliy mashg‘ulotlar zamonaviy ta’lim uslublari va innovatsion texnologiyalarga asoslangan holda o‘tkaziladi. Bundan tashqari, mustaqil holda o‘quv va ilmiy adabiyotlardan, elektron resurslardan, tarqatma materiallardan foydalanish tavsiya etiladi.

Ko‘chma mashg‘ulotlarni tashkil etish bo‘yicha ko‘rsatma va tavsiyalar

Ko‘chma mashg‘ulotlar zamonaviy jihozlar hamda innovatsion texnologiyalarni qo‘llab faoliyat yuritayotgan ishlab chiqarish korxona va tashkilotlari, oliy ta’lim muassasalari, iqtisodiyot tarmoqlari, ilmiy-tadqiqot va loyiha-konstruktorlik muassasalarida olib boriladi.

Dasturning axborot-metodik ta’minoti

Modullarni o‘qitish jarayonida ishlab chiqilgan o‘quv-metodik materiallar, tegishli soha bo‘yicha ilmiy jurnallar, Internet resurslari, multimedia mahsulotlari va boshqa elektron va qog‘oz variantdagi manbaalardan foydalaniladi

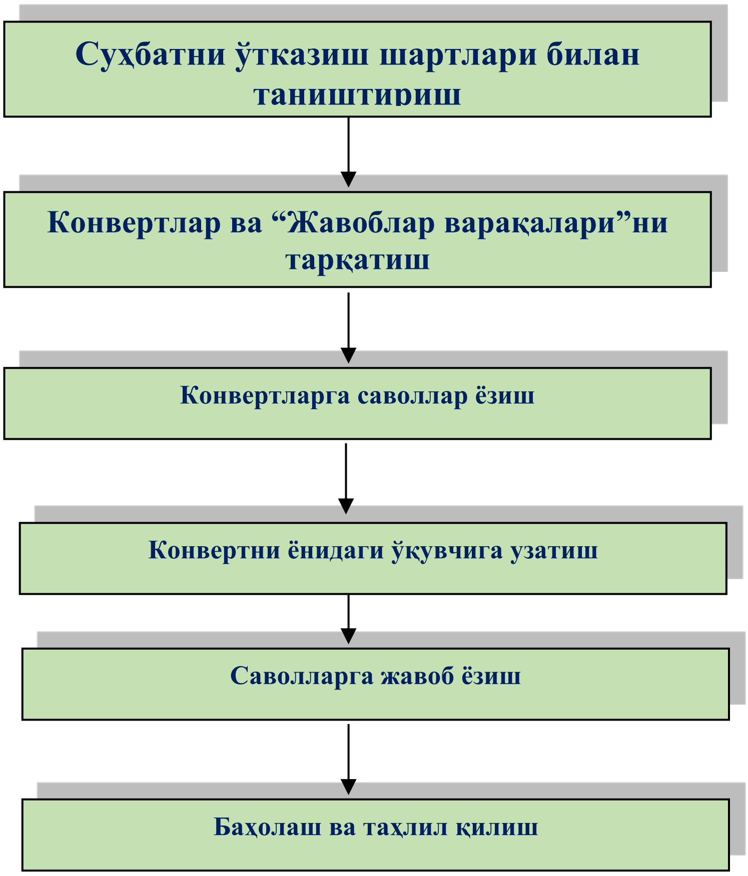
I.4. Mashg’ulotlar turlari bo‘yicha soatlar taqsimoti

№	Modul mavzulari	Jami	Mashg’ulot turlari		
			Nazariy	**Amaliy**	**Ko’chma mashg’ul ot**
1	Matritsalar va ular ustida amallar. Teskari matritsa va ularni topishning Gaus-Jordan usuli. Matritsalar yordamida yechiladigan masalalar.	6	2	2	2
2	Vektor vazolar, chiziqli bog‘liqlilik va chiziqli erklilik. Bazis va o‘lcham, qism fazo tushunchalari.	6	2	2	2
3	Vektor fazodagi chiziqli almashtirishlar	8	2	2	4
4	Chiziqli almashtirishlar va ularning matritsalarini graflar nazariyasi va information texnologiyalar sohasida qo‘llanilishi. Zamonaviy algebraning dolzarb masalalarini yechishda chiziqli algebra elementlari va usullaridan foydalanish.	8	2	2	4
	JAMI	**28**	**8**	**8**	**12**

II. MODULNI O‘QITISHDA FOYDALANILADIGAN INTERFAOL TA’LIM METODLARI

Davra stolining tuzilmasi.

Yozma davra suhbatida stol-stullar aylana shaklida joylashtirilib, har bir ta’lim oluvchiga konvert qog‘ozi beriladi. Har bir ta’lim oluvchi konvert ustiga ma’lum bir mavzu bo‘yicha o‘z savolini beradi va “Javob varaqasi”ning biriga o‘z javobini yozib, konvert ichiga solib qo‘yadi. Shundan so‘ng konvertni soat yo‘nalishi bo‘yicha yonidagi ta’lim oluvchiga uzatadi. Konvertni olgan ta’lim oluvchi o‘z javobini “Javoblar varaqasi”ning biriga yozib, konvert ichiga solib qo‘yadi va yonidagi ta’lim oluvchiga uzatadi. Barcha konvertlar aylana bo‘ylab harakatlanadi. Yakuniy qismda barcha konvertlar yig‘ib olinib, tahlil qilinadi. Quyida “Davra suhbati” metodining tuzilmasi keltirilgan



“Davra suhbati” metodining afzalliklari:

- o‘tilgan materialining yaxshi esda qolishiga yordam beradi;
- barcha ta’lim oluvchilar ishtirok etadilar;
- har bir ta’lim oluvchi o‘zining baholanishi mas’uliyatini his etadi;

o‘z fikrini erkin ifoda etish uchun imkoniyat yaratiladi **“Keys-stadi” metodi**

«Keys-stadi» - inglizcha so‘z bo‘lib, («case» – aniq vaziyat, hodisa, «stadi» – o‘rganmoq, tahlil qilmoq) aniq vaziyatlarni o‘rganish, tahlil qilish asosida o‘qitishni amalga oshirishga qaratilgan metod hisoblanadi. Mazkur metod dastlab 1921 yil Garvard universitetida amaliy vaziyatlardan iqtisodiy boshqaruv fanlarini o‘rganishda foydalanish tartibida qo‘llanilgan. Keysda ochiq axborotlardan yoki aniq voqea-hodisadan vaziyat sifatida tahlil uchun foydalanish mumkin. Keys harakatlari o‘z ichiga quyidagilarni qamrab oladi: Kim (Who), Qachon (When), Qayerda (Where), Nima uchun (Why), Qanday/ Qanaqa (How), Nima-natija (What).

“Keys metodi” ni amalga oshirish bosqichlari.

Ish bosqichlari	Faoliyat shakli va mazmuni
1-bosqich: Keys va uning axborot ta’minoti bilan tanishtirish	✓ yakka tartibdagi audio-vizual ish; ✓ keys bilan tanishish(matnli, audio yoki media shaklda); ✓ axborotni umumlashtirish; ✓ axborot tahlili; ✓ muammolarni aniqlash
2-bosqich: Keysni aniqlashtirish va o‘quv topshirig‘ni belgilash	✓ individual va guruhda ishlash; ✓ muammolarni dolzarblik iyerarxiyasini aniqlash; ✓ asosiy muammoli vaziyatni belgilash
3-bosqich: Keysdagi asosiy muammoni tahlil etish orqali o‘quv topshirig‘ining yechimini izlash, hal etish yo‘llarini ishlab chiqish	✓ individual va guruhda ishlash; ✓ muqobil yechim yo‘llarini ishlab chiqish; ✓ har bir yechimning imkoniyatlari va to‘siqlarni tahlil qilish; ✓ muqobil yechimlarni tanlash
4-bosqich: Keys yechimini yechimini shakllantirish va asoslash, taqdimot.	✓ yakka va guruhda ishlash; ✓ muqobil variantlarni amalda qo‘llash imkoniyatlarini asoslash; ✓ ijodiy-loyiha taqdimotini tayyorlash; ✓ yakuniy xulosa va vaziyat yechimining amaliy aspektlarini yoritish

“Assesment” metodi.

Metodning maqsadi: mazkur metod ta’lim oluvchilarning bilim darajasini baholash, nazorat qilish, o‘zlashtirish ko‘rsatkichi va amaliy ko‘nikmalarini tekshirishga yo‘naltirilgan. Mazkur texnika orqali ta’lim oluvchilarning bilish faoliyati turli yo‘nalishlar (test, amaliy ko‘nikmalar, muammoli vaziyatlar mashqi, qiyosiy tahlil, simptomlarni aniqlash) bo‘yicha tashhis qilinadi va baholanadi.

Metodni amalga oshirish tartibi:

“Assesment”lardan ma’ruza mashg‘ulotlarida talabalarning yoki qatnashchilarning mavjud bilim darajasini o‘rganishda, yangi ma’lumotlarni bayon qilishda, seminar, amaliy mashg‘ulotlarda esa mavzu yoki ma’lumotlarni o‘zlashtirish darajasini baholash, shuningdek, o‘z-o‘zini baholash maqsadida individual shaklda foydalanish tavsiya etiladi. Shuningdek, o‘qituvchining ijodiy yondashuvi hamda o‘quv maqsadlaridan kelib chiqib, assesmentga qo‘shimcha topshiriqlarni kiritish mumkin.

III. NAZARIY MASHG‘ULOT MATERIALLARI

1-maruza: Matritsalar va ular ustida amallar. Teskari matritsa va ularni topishning Gaus-Jordan usuli. Matritsalar yordamida yechiladigan masalalar.

MATRITSALAR ALGEBRASI

Tayanch iboralar: *matritsa; satr; ustun; matritsa elementlari; kvadrat matritsa; matritsalar yig'indisi; matritsalarni transponirlash; qo'shma kompleks matritsa; qo'shma ermit matritsa; nol matritsa; matritsaning izi; diagonal matritsa; birlik matritsa; matritsaviy ko'phad; matritsa kommutatori; matritsalarning Yordan ko'paytmasi; teskari matritsa; matritsaning elementar almashtirishlari; teskarilanuvchi matritsa; xos (maxsus) matritsa; xosmas (maxsusmas) matritsa; matritsaviy tenglama; skalyar matritsa; unimodulyar matritsa; o'rin almashtirish matritsasi; elementar matritsa; yuqori uchburchakli matritsa; pastki uchburchakli matritsa; simmetrik matritsa; kososimmetrik matritsa; ermit matritsasi; kosoermit matritsasi; ortogonal matritsa; unitar matritsa; manfiymas matritsa; stoxastik (markov) matritsa; nilpotent matritsa; davriy ; blokli (katakli) matritsa; matritsalarning (o'ng) Kroneker ko'paytmasi (yoki o'ng to'g'ri ko'paytmasi).*

1-§. Matritsalar ustida amallar

Sonlardan tuzilgan quyidagi to'g'ri burchakli jadvalga (tablisaga) *matritsa* deb aytiladi:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Matritsaning gorizontal qatoridagi sonlari uning *satrlari*, vertikal qatoridagi sonlari uning *ustunlari* deb aytiladi. a_{ij} sonlar *matritsaning elementlari* deb aytiladi. Matritsa m ta satrlarga va n ta ustunlarga ega bo'lsa, uni $m \times n$ *matritsa* deb aytiladi. Agar $m = n$ bo'lsa, bunday matritsa *n-tartibli kvadrat matritsa* deb aytiladi.

B matritsa A matritsa bilan α sonning ko'paytmasidan iborat deb aytiladi, agar ularning hamma elementlari uchun $b_{ij} = \alpha a_{ij}$ tenglik bajarilsa (A va B matritsalarning o'lchovlari bir xil) va $B = \alpha A$ deb belgilanadi.

Uchta A, B, C – matritsalar bir xil o'lchovli bo'lsin. C matritsa A va B matritsalarning yig'indisi deb aytiladi va $C = A + B$ deb belgilanadi, agar i va j indekslarning hamma qiymatlari uchun $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ tenglik bajarilsa.

Faraz qilaylik, $m \times n$-o'lchovli $A = (a_{ij})$ va $n \times p$-o'lchovli $B = (b_{ij})$ matritsalar berilgan bo'lsin. Bu matritsalarning ko'paytmasi deb shunday $C = AB = (c_{ik})$ matritsaga aytiladiki, uning elementlari quyidagi formula bilan beriladi:

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \dots + a_{in}b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}, \quad i = 1,2,\dots,m; \quad k = 1,2,\dots,p.$$

B matritsa A matritsaga nisbatan *transponirlangan matritsa* deb aytiladi va $B = A^T$ deb belgilanadi, agar B matritsaning ustunlari A matritsaning mos satrlari bo'lsa, ya'ni hamma i, j indekslar uchun $b_{ij} = a_{ji}$. A matritsadan A^T matritsaga o'tish amali A matritsani *transponirlash* deb aytiladi. Agar A matritsa $m \times n$ o'lchovli bo'lsa, A^T matritsa $n \times m$ o'lchovli bo'ladi.

B matritsa A kompleks matritsaga nisbatan *qo'shma kompleks matritsa* deb ataladi va $B = \overline{A}$ deb belgilanadi, agar hamma i, j indekslar uchun $b_{ij} = \overline{a}_{ij}$ tenglik bajarilsa. B matritsa A matritsaga nisbatan *qo'shma ermit matritsa* deb aytiladi va $B = A^H$ deb belgilanadi, agar hamma i, j lar uchun $b_{ij} = \overline{a}_{ji}$ tenglik bajarilsa.

A matritsa *nol matritsa* deb aytiladi, agar uning hamma elementlari 0 ga teng bo'lsa va $A=0$ deb belgalanadi. A matritsa i_0, j_0 *indeksli birlik matritsa* deb aytiladi, agar $a_{i_0 j_0} = 1$ bo'lib, qolgan elementlari nolga teng bo'lsa.

$a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ elementlar n tartibli $A = (a_{ij})$ kvadrat matritsaning bosh dioganalini tashkil qiladi va uning *diagonal elementlari* deb aytiladi. Matritsaning diagonal elementlari yig'indisi A matritsaning *izi* deb aytiladi va trA deb belgilanadi. Shunday qilib, $trA = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Kvadrat matritsa diagonal matritsa deb aytiladi, agar uning diagonalida bo'lmagan elementlari 0 ga teng bo'lsa, ya'ni $a_{ij} = 0$, $i \neq j$. n-tartibli diagonal matritsa $diag(a_{11}, \dots, a_{nn})$ deb belgilanadi. Diagonal elementlari 1 ga teng bo'lgan n-tartibli diagonal matritsa birlik matritsa deb aytiladi va E yoki E_n deb belgilanadi. Birlik matritsaning elementlari δ_{ij} deb belgilanadi: $E = (\delta_{ij})$,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Bizga $f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_k x^k$ - ko'phad berilgan bo'lsin. $B = a_0 E + a_1 A + \dots + a_k A^k$ matritsa A matritsadan *ko'phad* deb aytiladi va $B = f(A)$ deb belgilanadi.

2-§. Matritsalarni ko'paytirish bilan elementar almashtirishlar orasidagi munosabat

Quyidagi uchta almashtirishlar *matritsaning elementar almashtirishlari* deb aytiladi:

1) matritsaning biror satriga noldan farqli songa ko'paytirish;
2) matritsaning biror satrini songa ko'paytirib boshqa satriga qo'shish;
3) ikkita satrlarning o'rinlarini almashtirish.

Xuddi shunday uchta almashtirishlarni matritsaning ustunlari uchun ham ta'riflash mumkin.

3-§. Teskari matritsa

A – matritsa *n*-chi tartibli kvadrat matritsa bo'lsin. *A* matritsa uchun *AB=BA=E* tenglikni qanoatlantiruvchi *B* matritsa *A* ga *teskari matritsa* deyiladi va u $B = A^{-1}$ ko'rinishda belgilanadi. Teskari matritsa elementlarini

$$b_{ij} = \frac{A_{ji}}{\det A}$$

formula yordamida topish mumkin, bunda A_{ji} lar a_{ji} elementlarning algebraik to'ldiruvchisidir. A matritsa *teskarilanuvchi* deb aytiladi, agar $\det A \neq 0$, ya'ni A matritsa xosmas bo'lsa.

Har qanday xosmas A matritsani faqat satrlar (yoki faqat ustunlar) elementar almashtirishlari yordamida birlik matritsaga keltirish mumkin. Elementar almashtirishlarni xuddi shunday ketma-ketlikda *E* birlik matritsaga tadbiq qilsak, teskari matritsa A^{-1} ni hosil qilamiz. A va E matritsalarni chiziq yordamida qo'shni yozib ular ustida elementar almashtirishlarni bir vaqtda bijarish juda qulaydir.

Teskari matritsani hisoblash $AX = B,\quad YA = B$ matritsaviy tenglamalarni yechish bir-biri bilan bog'langandir, bunda *A, B* – berilgan matritsalar, *X, Y* – izlanayotgan noma'lum matritsalar. Agar *A* matritsa to'g'ri burchakli matritsa yoki xosmas matritsa bo'lsa, matritsaviy tenglamalarni yechish *X* matritsaning har bir ustuni yoki *Y* matritsaning har bir satri elementlari uchun hosil bo'ladigan chiziqli tenglamalar sistemasini yechishga keltiriladi. Bu tenglamalarni hosil qilish uchun tenglamaning har ikkala tomonidagi matritsalarning mos elementlarini bir-biriga tenglashtirish lozim. Agar *A* matritsa xosmas bo'lsa, matritsaviy tenglamalarning yechimlari qyidagi formulalar yordamida topiladi:

$$X = A^{-1}B,\quad Y = BA^{-1}.$$

4-§. Matritsalar bilan boshqa amallar. Maxsus ko'rinishdagi matritsalar

Endi *n*–tartibli matritsaning ba'zi bir maxsus ko'rinishlarini qarab chiqamiz: $A = (a_{ij})$

skalyar matritsa: $A = diag(\lambda,...,\lambda)$, λ – son;

unimodulyar matritsa: detA=1;

xos (maxsus)matritsa: detA=0;

xosmas (maxsusmas) matritsa: detA ≠ 0;

o'rinmalmashtirish matritsasi: A matritsa birlik matritsadan satrlarning o'rinlarini almashtirishdan hosil bo'ladi;

elementar matritsa: A matritsa birlik matritsadan elemetar almashtirishlar orqali hosil bo'ladi*;*

yuqori uchburchakli matritsa: $a_{ij}=0$ agar $i>j$;

pastki uchburchakli matritsa: $a_{ij}=0$ agar $i<j$;

simmetrik matritsa: $A^T=A$;

kososimmetrik matritsa: $A^T=-A$;

ermit matritsasi: $A^N=A$;

kosoermit matritsasi: $A^N=-A$;

ortogonal matritsa: $A^T=A^{-1}$;

unitar matritsa: $A^N=A^{-1}$;

manfiymas matritsa: $a_{ij}\geq 0$ hamma *i, j* lar uchun;

Markov (stoxastik) matritsasi: $a_{ij}\geq 0$ hamma *i, j* lar uchun va $\sum_{k=1}^{n}a_{ik}=1$ $i=1, 2,\ldots,n$;

nilpotent matritsa: *k natural sonning qandaydir qiymatida* $A^k=0$ (bunday *k* ning eng kichik qiymatiga *A matritsaning nilpotentlik ko'rsatkichi* deb aytiladi);

davriy matritsa: *k natural sonning qandaydir qiymatida* $A^k=E$ (bunday *k* son *A* matritsaning *davri* deb aytiladi).

B matritsa katakli matritsa deb aytiladi, agar uning elementlari $m_i\times n_j$ o'lchovli B_{ij} matritsalardan iborat bo'lsa. bunda *B* matritsaning bitta satriga qarashli bo'lgan hamma B_{ij} matritsalar bir xil balandlikka ega bo'ladi, *B* matritsaning bitta ustuniga qarashli bo'lgan hamma B_{ij} matritsalar bir xil enga ega bo'ladi. katakli matritsalar ustida bajariladigan amallar oddiy sonli matritsalar ustida bajariladigan amallardan iborat. Agar *A* sonli matritsa gorizontal va vertikal to'g'ri chiziqlar bilan B_{ij} kataklarga ajratilgan bo'lib, tabiiy holda nomerlangan bo'lsa va bu kataklardan $B=(B_{ij})$ katakli matritsa tuzilgan bo'lsa, *V* matritsa *A* matritsadan kataklarga bo'lish natijasida hosil bo'lgan deb aytiladi. B_{ij} matritsalarning elementlaridan tabiiy ravishda $\sum_i m_i\times\sum_j n_j$ o'lchovli sonli matritsani tuzish mumkin. bu holda *A* matritsa *B* matritsa kataklarining birlashmasidan hosil bo'lgan deb aytiladi va $A=B^{\square}$ deb yoziladi. Agar tushunmovchilik uchun asos bo'lmasa, $\square$ belgisini qoldirib sonli va katakli matritsalarni bir xil harflar bilan belgidash mumkin.

A$=(a_{ij})$ va *B* – matritsalar, $S=(s_{ij})$ – katakli matritsa $c_{ij}=a_{ij}B$ tenglik bilan hamma *i, j* lar uchun aniqlangan bo'lsin. *S* matritsa kataklarining birlashmasidan hosil bo'lgan sonli matritsa *A* va *B* matritsalarning *o'ng kroneker ko'paytmasi* deb aytiladi (yoki *o'ng to'g'ri ko'paytmasi deyiladi*) va $A\otimes B$ deb belgilanadi.

2-maruza: Vektor vazolar, chiziqli bog‘liqlilik va chiziqli erklilik. Bazis va o‘lcham, qism fazo tushunchalari.

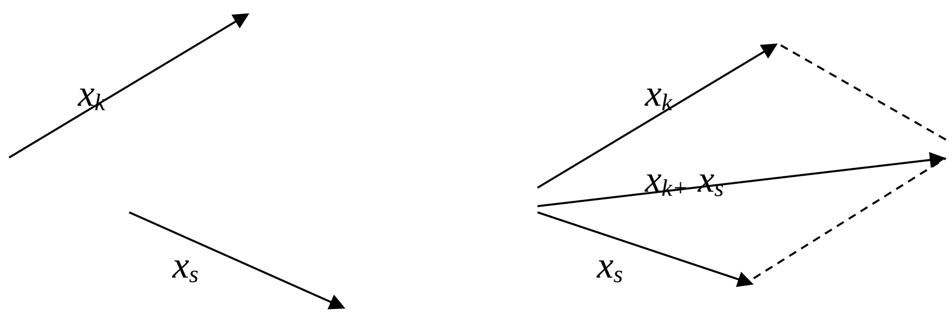
Faraz qilaylik M to’plam bo’lsin. $M=\{x_1, x_2, \cdots\}$. Bu to’plam elementlariga nisbatan Aniq bir to’plamni tushunish mumkin. Masalan: elementlari sonlardan, vektorlardan, matritsalardan iborat bo’lishi mumkinagar elementlari vektorlardan iborat bo’lsa, M vektorlar to’plami deyiladi. Agar elementlari ko’phadlardan iborat bo’lsa, M ko’phadlar to’plamidan iborat bo’ladiva xokozolar.

Endi M ko’phadlar to’plami qanday bo’lmasin uning elementlarini «vektorlar» deb ataymiz. Bu «vektor» tushuncha, ya’ni elementlarni «vektor» deb atash keng ma’noda tushuniladi.

Ta’rif. Agar M to’plamda ikki vektorning (elementning) x_k, x_s yig’indisi x_k, x_s va biror x_k vektorni λ songa ko’paytmasi λx_k tushunchasi kiritilgan bo’lib, quyidagi shartlar:

1. $\forall x_k, x_s \in M \quad x_k + x_s = x_n,\ x_n \in M \quad \lambda x_k = x_m,\ x_m \in M$
2. $x_k + x_s = x_s + x_k$
3. $x_k + (x_s + x_p) = (x_k + x_s) + x_p;$
4. $\exists \theta \in M, \quad \mathrm{x}_k + \theta = x_k;$ θ-nol vektor deyiladi.
5. $\exists x_k' \in M,\ x_k + x_k' = \theta;$ x_k'-vektor x_k vektorga qarama-qarshi deyiladi.
6. $\lambda(x_e + x_s) = \lambda x_k + \lambda x_p;$
7. $\lambda(\alpha x_k) = (\lambda\alpha)x_k;$ (α, λ-sonlar)
8. $1 \cdot x_k = x_k$

bajarilsa, u holda bunday M to’plam vektorlarning chiziqli favosi deyiladi.
Agar shu shartlardan birortasi bajarilsa, u holda M to’plam chiziqli fazo deyiladi.
Misollar: 1. M to’plam XOY tekislikda yotuvchi geometrik ma’nodagi vektorlar to’plami bo’lsin.



Bu qaralayotgan M to’plam chiziqli fazodan iborat.

2. M to'plam n-chi tartibli determinanti 0 dan farqli bo'lgan kvadrat matritsadan iborat bo'lsin.

$$x_i = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

Ikki matritsaning yig'indisi deb ularning mos elementlarining yig'indisiga aytiladi. λ sonni x_i ga ko'paytirish uchun x_i matritsaning hamma elementlari α ga ko'paytirish kerak. Bu qabul qilingan amallarga ko'ra 1,2,3 shartlarni tekshhirish qiyin emas. 4 shart uchun 0 dan iborat bo'lgan matritsa qaraladi.5 shart uchun ixtiyoriy matritsaga qarama-qarshi matritsa sifatida hamma elementlari qarama-qarshi ishora bilan olinadi. Demak matritsalar to'plami chiziqli fazoni tashkil etadi.

3. Darajasi n dan oshmaydigan $P_n(x)$ ko'phadlarni qaraylik;

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

ko'phadlarni odatdagi qo'shish, songa ko'paytirish amallarini qaraymiz. Bu to'plam ham chiziqli fazoni tashkil etadi.

4. $[a,b]$ segmentda uzluksiz bo'lgan funksiyalar to'plamini olib qaraylik. $M = \{f_1(x), f_2(x)\cdots\}$

Ixtiyoriy $f_i(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda uzluksiz.

Ikki funksiyani qo'shish va songa ko'paytirishni oddiy ma'noda qaraymiz. Demak uzluksiz funksiyalar to'plami ham chiziqli fazoni tashkil etadi.

5. M to'plam XOY tekislikning faqat 1-chi chorakda yotuvchi vektorlardan iborat bo'lsin. Bu yerda 5-shart bajarilmaydi.

2. Chiziqli fazoning bazisi va o'lchovi.

Faraz qilaylik R biror chiziqli fazo bo'lsin, bu chiziqli fazoda n ta vektorni olib qaraylik.

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n \quad (1)$$

Ta'rif. Agar hech bo'lmasa bittasi 0 dan farqli bo'lgan

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \cdots, \lambda_n \quad (2)$$

Sonlar mavjud bo'lib,

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \cdots + \lambda_n x_n \quad (3)$$

Tenglik bjarilsa u holda (II) vektorlar sistemasi chiziqli bog'langan deyiladi.

Ta'rif. Agar (3) tenglik faqat

$$\lambda_1 = 0, \ \lambda_2 = 0, \ \lambda_3 = 0, \ \cdots, \ \lambda_n = 0 \quad (4)$$

Bo'lgandagina bajarilsa, u holda (2I) vektorlar sistemasi chiziqli bog'lanmagan

deyiladi.
Fazodan olingan ixtiyoriy n-ta vektoprlar sistemasi chiziqli bog'langan yoki bog'lanmagan bo'lishi mumkin. Ular haqida quyidagi teoremani keltiramiz.
Teorema. Agar (1) vektorlar sistemasi chiziqli bog'langan bo'lsa, u holda ulardan bittasini qolganlari orqali ifodalash mumkin.
Isbot. Faraz qilaylik (II) vektorlar sistemasi chiziqli bog'langan bo'lsin. Demak (3) tenglik λ_i larning birortasi 0 dan farqli bo'lganda o'rinlidir. Buni e'tiborga olib (3) ni quyidagicha yozamiz. Aniqlik uchun $\lambda \neq 0$ deb qaraylik.

$$x = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} x_2 - \frac{\lambda_3}{\lambda_1} x_3 - \cdots - \frac{\lambda_n}{\lambda_1} x_n, \quad -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \beta_2, \ -\frac{\lambda_3}{\lambda_1} = \beta_3, \ \cdots$$

$$x = \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \cdots + \beta_n x_n \qquad (5)$$

Bu (5) tenglik x_1 vektorni qolganlari orqali ifodalashdan iboratdir.

Ta'rif. Agar R fazoda n ta vektor chiziqli bog'lanmagan bo'lsa, u holda R fazo n o'lchovli chiziqli fazo deyiladi va R_n deb belgilanadi.
Faraz qilaylik $x_1, x_2, \cdots x_n$ (Ia) chiziqli bog'lanmagan bo'lsin.
$x_1, x_2, \cdots x_n, x_{n+1}$ (6) chiziqli bog'langan bo'lsin. U holda (Ia) chiziqli erkli deyiladi. Endi (6) sistema chiziqli bog'langan bo'lganligi uchun itsbotlangan teoremaga asosan ularning bittasini qolgaglari orqali ifodalash mumkindir. Shuning uchun x_{n+1} ni qolganlari orqali ifodalaymiz.
$x_{n+1} = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n$ (7). Bu (7) x_{n+1} vektorning (Ia) ifodalanishi deyiladi.
Ta'rif. R_n fazoning n ta chiziqli bog'lanmagan vektorlar to'plami bu fazoning bazisi deyiladi.
Shunday qilib, agar R fazoda bazis vektorlar soni n bo'lsa, u holda bunday fazo n o'lchovli fazo deyiladi va R_n deb belgilanadi.

Masalan, XOY tekislikda vektorlar fazosi 2 o'lchovli fazoni tashkil etadi. R_2 fazo R_1 fazo to'g'ri chiziqlar ustida yotuvchi vektorlar fazosi bo'lib bir o'lchovlidir.

Vektorning bazisdagi koordinatasi.
Qism fazolar ustida amallar.

Faraz qiliylik R_n biror n o'lchovli fazo bo'lsin uning bazisi $x_1, x_2, \cdots x_n$ (I) vektorlardan iborat bo'lsin. Endi quyidagi vektorlar sistemasini olaylik.

$$x_1, x_2, \cdots x_n, x_{n+1} \qquad (2)$$

.
Bu (2) chiziqli bog'langan.shuning uchun (2) dagi x ni qolganlari orqali ifodalash mumkin.

$$x = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \cdots + \xi_n x_n \qquad (3)$$

Bu (3) x vektorning bazis orqali ifodalanishi deyiladi. Bundagi

$$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \cdots, \xi_n \qquad (4)$$

Sonlar agar x vektorning (I) bazisdagi koordinatalari deyiladi. Agar biz (I) bazisdagi boshqa bir

$y_1, y_2, y_3, \cdots, y_n$ (5)

Bazisi tanlansak, u holda o'sha biz qarayotgan x vektorning koordinitalari boshqa bo'ladi, ya'ni

$$x = \eta_1 y_1 + \eta_2 y_2 + \eta_3 y_3 + \cdots + \eta_n y_n \qquad (6)$$

Biz x vektorning (I) (va (5) bazisdagi koordinatalari orasidagi bog'lanish keltirib chiqarishimiz mumkin. Buning uchun (I) dagi xar bir vektorni (5) bazis orqali ifodalaymiz va bu ifodalarni (3) ga qo'yamiz. Natijada (6) ga asosan biz ξ_i va η_i larga bog'liq bo'lgan sistemani xosil qalamiz. Bu sistemani η_i Larga nisbatan chiziqli tenglamalar sistemasi ko'rinishda echamiz. Natijada quyidagilarga ega bo'lamiz.

$$\begin{cases} \eta_1 = b_{11}\xi_1 + b_{12}\xi_2 + b_{13}\xi_3 + \cdots + b_{1n}\xi_n \\ \eta_2 = b_{12}\xi_1 + b_{22}\xi_2 + b_{23}\xi_3 + \cdots + b_{2n}\xi_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \eta_n = b_{n1}\xi_1 + b_{n2}\xi_2 + b_{n3}\xi_3 + \cdots + b_{nn}\xi_n \end{cases} \qquad (7)$$

Bu (7) bazis o'zgarganda koordinatalarning o'zgarishi deyiladi.

4. Izomorf fazolar.

Faraz qaliylik R_1 va R_2 chiziqli fazolar bo'lsin, ularni elementlarini quyidagicha belgilaymiz.

$$R_1 = \{x_1, x_2, x_{3,} \cdots, x_n, \cdots\}, \quad R_2 = \{y_1, y_2, y_3, \cdots, y_n, \cdots\}$$

Ta'rif. Agar R_1 va R_2 fazolarning vektorlari orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rgatilgan bo'lib bu moslik ikki vektorning yig'indisi va songa ko'paytirish amallariga nisbatan ham o'rinli bo'lsa, u holda bunday fazolar izomorf fazolar deyiladi

Bu ta'rifni quyidagicha ifodalash mumkin.

$$\{R_1 \ni x_i \leftrightarrow y_i \in R_2\} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} x_k + x_s \leftrightarrow y_k + y_s \\ \lambda x_i \leftrightarrow \lambda y_i \end{matrix} \right\} \qquad R_1 \sim R_2$$

Izomorf fazoga taaluqli bo'lgan teoremani keltiramiz.

Teorema. Hamma bir hil o'lchovli fazolar bir-biriga izomorfdir.

Isbot. Faraz qilaylik R_1 va R_2 fazolar bir hil o'lchovli bo'lsin. Ularning bazislarini mos ravishda $e_1, e_2, \cdots, e_n$ va $f_1, f_2, \cdots, f_n$ deb olaylik. Endi $x \in R_1, \quad x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n$ vektorga monoton. $y \in R_2, \quad y = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \cdots + \alpha_n f_n$ vektorni mos qilib qo'yamiz.

Bu moslik o'zaro bir qaymatlidir. Bunday moslik vektorlarni qo'shishda ham va soni vektorga ko'paytirishda ham saqlanadi. Demak n o'lchovli R_1 va R_2 fazolar bir-

biriga izomorfdir, ya’ni $R_1 \sim R_2$. Teorema isbot bo’ldi.

5. Qism fazolar.

Faraz qilaylik R_n biror fazo bo’lsin. Bu fazoning vektorlaridan M to’plam tuzaylik Agar M to’plam tuzaylik. Agar M to’plam fazo shartlarini qanoatlantirsa u qism fazo deyiladi. Endi quyidagi vektorlarni olaylik.

$$x_1, x_2, x_3 \cdots x_m \quad (1)$$

Bu vektorlardan quyidagi ifodani tuzaylik. $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \cdots + \alpha_m x_m = y_1$ (2).
Bu (2) yig’indi (II) sistemaning chiziqli kombinatsiyasi deyiladi. Endi (2) o’xshash $\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \cdots + \beta_m x_m = y_2$ (2a) kombinatsiya tuzaylik. Bunday $\{y_k\}$to’plam ya’ni $\{y_k\} = \{y_1, y_2, \cdots\} = L$ (,3)
To’plam fazo shartlarini qanoatlantiradi. Demak L -qism fazo, ya’ni $L \in R_n$.
Bunday qism fazo chiziqli kobik deyiladi.buning o’lchovi R_n fazoning o’lchovidan ortiq emas. L-ning o’lchovini S- desak, u holda $S \le n$.
R_n fazodan ixtiyoriy $x_0 . x_0$ -tayinlangan. Ixtiyoriy x_k vektorni olib qaraylik.
$x_0 + x_k = y_{0k}, k = 1,2,3,$ (4)
Vektorlar sistemani tuzaylik. y_{0k} vektorlar x_k vektorlarni x_0 bo’yicha siljishi deyiladi. Bunday $\{y_{0k}\} = H$ vektorlar to’plami R_n fazoning bir qismi bo’lib qism fazoni tashkil etadi. Buni tekshirib ko’rish mumkin. H qism fazolar chiziqli ko’phillik deyiladi.

6.Qism fazolarning yig’indisi va kesishmasi

Faraz qilaylik R_n chiziqli fazo bo’lsin. Uning U_1 va U_2 qism fazolarni olaylik, ya’ni

$$U_1 = \{x_1, x_2, \cdots\} \text{ va } U_2 = \{y_1, y_2, \cdots\}$$

bo’lsin. U holda

$$W = U_1 + U_2 = \{x_i + y_i\}, \quad x_i \in U_1, U_2, y_i \in U_2$$

to’plam U_1 va U_2qism fazolarning yig’indisi deyiladi. W-qism fazo ekanligini ko’rsatish mumkin. U_1 va U_2 qism fazolardagi vektorlarning ayrimlari umumiy bo’lishi mumkin.Bu umumiylardan tuzilgan U to’plam qism fazolarning kesimi deyiladi.
Hosil bo’lgan U kesim to’plam ham qism fazo ekanini ko’rsatish mumkin. Endi $W = U_1 + U_2$ va $U = U_1 \cap U_0$ qism fazolaning o’lchovi haqida to’xtab o’tamiz.
$\dim R_n = n$ (dimision-o’lchov) deb olsak, u holda

$$\dim(U_1 + U_2) + Dim(U_1 \cap U_2) = DimU_1 + DimU_2$$

tenglikni isbotlash mumkin.

Qism fazolarning yig’indisi Bilan birgalikda ularning to’g’ri yig’indisi tushunchasi ham mavjud. Buni quyida ko’rib o’tamiz. $W = U_1 + U_2$ qism fazolarning yig’indisining vektori R_n fazoning vektori bo’lgani uchun

$z_{ij} \in M$ $z_{ij} = x_i + y_i$ vektorni U_1 va U_2 qism fazolarning boshqa vektorlari orqali ifodalash mumkin. Bunday ifodalanish faqat birgina emas birnechta bo'lishi mumkin. Shu nuqtai nazardan qism fazolarning to'g'ri yig'indisi tushunchasini kiritamiz. Qism faxzolarning to'g'ri yig'indisi qism fazolarning yig'indisi kabi Aniqlanib undagi har bir vektor U_1 va U_2 qism fazo vektorlari orali faqat birgina ko'rinishda ifodalanadi.

Ana shunday qism fazolarning yig'indisi qism fazolarning to'g'ri yig'indisi deyiladi va uni $U_1 \oplus U_2 = \overline{W}$ deb belgilanadi. $\overline{W}$ to'g'ri yig'indi har bir vektor birgina ko'rinishda ifodalanadi.

Teorema. R_n fazo W to'g'ri yig'indidan iborat bo'lishi uchun $U_1 \cap U_0 = 0$ (ya'ni kesim faqat bitta nol element) bo'lishi zarur va kifoyadir.
Bu teoremani boshqacha ko'rinishda ham ifodalash mumkin.

Teorema. R_n fazo U_1va U_2 o'zining qism fazolarning yig'indisi bo'lishi uchun qism fazolar bazisining birlashmasi R_n fazo bazisini tashkil etishi zarur va kifoyadir.

3-maruza: Vektor fazodagi chiziqli almashtirishlar

Chiziqli operatorlar

Bundan keyin akslantirish, funksiya, almashtirish, operator degan terminlar biz uchun bitta ma'noni beradi. Akslantirish – eng umumiy termin, funksiya – ko'proq matematik analizda ishlatiladi, almashtirish, operatorlar esa - chiziqli algebrada ish**latiladi.**

1-ta'rif. A operator deb L_1 chiziqli fazoni L_2 chiziqli fazoga akslantirishga aytiladi, $A: L_1 \to L_2$ shakldа belgilanadi.
Bu agar $x \in L_1$ bo'lsa, $A(x) = y \in L_2$ ekanligin anglatadi. $y = A(x)$ vektor x vektorning obrazi (aksi) deyiladi, x esa y vektorning proobrazi (asli) deyiladi.
Xususiy holda, agar $L_2 = \mathbb{R}$ bo'lsa, ya'ni operatorning obrazlari (qiymatlari) sonlar bo'lsa, bu operator funksional deb yuritiladi, agar $L_1 = L_2 = L$ bo'lsa, ya'ni fazolar ustma-ust tushsa, operator – almashtirish deb yuritiladi va operator L fazoda ta'sir etayapti deb aytishadi.

2-ta'rif. L_1, L_2 – chiziqli fazolar biror $\mathbb{P}$ sonlar maydoni ustida aniqlangan bo'lsin. Agar $A: L_1 \to L_2$operator uchun barcha $x, y \in L_1$ vektorlar va $\alpha, \beta \in \mathbb{P}$ sonlar uchun

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha \cdot A(x) + \beta \cdot A(y) \qquad (1)$$

tenglik o'rinli bo'lsa, A –*chiziqli operator* deyiladi.
Chiziqli funksional ham xuddi shunday aniqlanadi.
Misol. $\mathbb{R}$ - maydon ustida o'ch o'lchovli vektorlar fazosi

$$\mathbb{R}^3 = \{x = (x_1, x_2, x_3) | x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$$

ni qaraymiz. Bu fazoda quyidagi operatorlarni kiritamiz:
$a \in \mathbb{R}^3$ – biror tayinlangan vektor, $x \in \mathbb{R}^3$ – ixtiyoriy vektor bo'lsin.

1) $A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ operator $A(x) = x + a$ shaklda aniqlangan bo'lsin. Bu operatorni chiziqlilikka tekshiramiz: (1) tenglikning o'ng tomoni

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha x + \beta y + a$$

bo‘ladi, chap tomoni esa

$\alpha A(x) + \beta A(x) = \alpha(x + a) + \beta(y + a) = \alpha x + \beta y + (\alpha + \beta)a$

bo‘ladi. Bu yerdan $A(\alpha x + \beta y) \neq \alpha \cdot A(x) + \beta \cdot A(y)$ kelib chiqadi. Demak, bu operator chiziqli emas ekan.

2) Endi $B: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ operator $B(x) = [a \times x]$ shakldа aniqlangan bo‘lsin, bu yerda $[a \times x]$ – vektor ko‘paytmadan iborat. (1) tenglikni tekshiramiz:

$B(\alpha x + \beta y) = [a \times (\alpha x + \beta y)] = \alpha[a \times x] + \beta[a \times y] = \alpha B(x) + \beta B(y)$

bo‘ladi. Demak, B- chiziqli operator ekan.

Har qanday chiziqli operator biror bir matritsa yordamida tasvirlanishini ko‘rsatamiz.

L_1, L_2 – chiziqli fazolar biror $\mathbb{P}$ sonlar maydoni ustida aniqlangan va $A: L_1 \to L_2$ chiziqli operator berilgan bo‘lsin, $dimL_1 = n,\ dimL_2 = m$ bo‘lsin.

L_1 fazoning biror bazisi $e_1, e_2, \dots, e_n - (e)$; L_2 fazoning ham biror bazisi $f_1, f_2, \dots, f_n - (f)$ berilgan bo‘lsin.

L_1 fazoning (e) bazisi obrazlari $A(e_1), A(e_2), \cdots, A(e_n)$ larni L_2 fazoning $f_1, f_2, \dots, f_n$ bazisi orqali ifodalaymiz:

$$\begin{array}{rcl} A(e_1) & = & a_{11}f_1 + a_{21}f_2 + \cdots + a_{m1}f_m \\ A(e_2) & = & a_{12}f_1 + a_{22}f_2 + \cdots + a_{m2}f_m \\ & & \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ A(e_n) & = & a_{1n}f_1 + a_{2n}f_2 + \cdots + a_{mn}f_m \end{array} \qquad (2)$$

(2) sistemaning transponirlangan matritsasi

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ga $A: L_1 \to L_2$ chiziqli operatorning (e) va (f) bazislardagi matritsasi deyiladi.

L chiziqli fazoning har bir vektorini o‘z joyida qoldiruvchi almashtirish, ayniy almashtirish deb yuritiladi, $E: L \to L$ shakldа belgilanadi. Bu operatorning matritsasi har qanday bazisda $n -$ tartibli kvadrat birlik matritsadan iborat.

1-Misol. $B: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ chiziqli operator $B(x) = [a \times x]$ shakldа berilgan bo‘lsin. Bu yerda $a = (a_1, a_2, a_3)$ tayinlangan vektor, $\{i, j\ k\}$ – birlik vektorlardan iborat bo‘lgan bazisda bu operatorning matritsasini topamiz. Buning uchun $\{i, j\ k\}$ vektorlarning obrazlarini topamiz:

$$B(i) = [a \times i] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = a_3 j - a_2 k$$

$$B(j) = [a \times j] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -a_3 i + a_1 k$$

$$B(k) = [a \times i] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a_2 i - a_1 j$$

B operatorning matritsasi

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}$$

bo‘ladi.

2-misol. $R_\alpha: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ operator tekislikni koordinatalar boshiga nisbatan musbat yo‘nalishda (soat strelkasiga qarama- qarshi yo‘nalishda) α – burchakka burishdan iborat bo‘lsin. Bu operatorning standart $\{i, j\}$ bazisdagi matritsasini topamiz.

$$R_\alpha(i) \quad = \quad cos\alpha \cdot i + sin\alpha \cdot j$$
$$R\_\alpha(j) \quad = \quad -sin\alpha \cdot i + cos\alpha \cdot j$$

Bu sistemaning matritsasi

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} cos\alpha & -sin\alpha \\ sin\alpha & cos\alpha \end{pmatrix}$$

berilgan operatorning $\{i, j\}$ bazisdagi matritsasidan iborat

CHIZIQLI OPERATORNING FAZONING TURLI BAZISLARDAGI MATRITSALARI ORASIDAGI BOG‘LANISH

$\boldsymbol{L}$ – chiziqli fazo biror $\mathbb{P}$ sonlar maydoni ustida aniqlangan va $\varphi: \boldsymbol{L} \to \boldsymbol{L}$ chiziqli operator berilgan bo‘lsin, $dimL = n$ bo‘lsin.

L fazoning eski bazisi

$$e_1, e_2, \dots, e_n \; - (e);$$

bo’lsin. Bu bazisda φ operator $A_\varphi -$ matritsaga ega bo‘lsin.

Shu fazoning boshqa bir yangi bazisi

$$f_1, f_2, \dots, f_n \; - (f)$$

ham berilgan bo‘lsin. Bu bazisda φ operator $B_\varphi -$ matritsaga ega bo‘lsin.

Bitta operatorning ikkita (e) va (f) bazislardagi A_φ va B_φ matritsalari orasidagi bog‘lanishni topamiz.

1-teorema. *φ chiziqli operatorning ikkita (e) va (f) bazislardagi A_φ va B_φ matritsalari o‘zaro*

$$B_\varphi = C^{-1} A_\varphi C$$

tenglik bilan bog‘langan, bu yerda $C -$ matritsa (e) bazisdan (f) bazisga o‘tish matritsasidan iborat.

Isbot.

$\forall x \in L$ vektorni (e) bazisdagi koordinatalarini topamiz:

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n, \;\; x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \qquad (1)$$

Endi x vektorga φ – operatorni ta’sir ettiramiz va $\varphi(x)$ vektorni (e) bazisdagi koordinatalarini topamiz:

$$\varphi(x) = y_1e_1 + y_2e_2 + \cdots + y_ne_n, \;\; \varphi(x) = (y_1, y_2, \ldots, y_n) = y. \qquad (2)$$

Bu holda, agar φ – operatorning (e) bazisdagi matritsasi

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

bo‘lsa,

$$\begin{cases} y_1 & = & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 & = & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ y_n & = & a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases} \qquad (3)$$

sistemani hosil qilamiz. Bu sistemani matritsalar yordamida

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

shaklda yozishimiz mumkin. (3) ni quyidagi belgilashlar

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix} = y^T; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = x^T$$

ni kiritib,

$$Y = A_\varphi X \qquad (4)$$

matritsaviy shaklda ham yozishimiz mumkin.

Endi $C -$ matritsa (e) bazisdan (f) bazisga o‘tish matritsasi bo‘lsin. U holda

$$X_e = CX_f \qquad (5)$$

matritsaviy tenglik o‘rinli bo‘ladi, bu yerda X_e ustun x vektorning (e) bazisdagi koordintalaridan iborat, X_f ustun esa x vektorning (f) bazisdagi koordintalaridan iborat.

$C -$ matritsa (e) bazisdan (f) bazisga o‘tish matritsasi bo‘lganligi uchun u xosmas matritsadan iborat, ya’ni $detC \neq 0$. Shuning uchun bu matritsaning teskarisi C^{-1} mavjud.

(5) tenglikni chap tomondan C^{-1} ga ko‘papytirib,

$$X_f = C^{-1}X_e \qquad (6)$$

hosil qilamiz. Endi $Y_e - y$ vektorning (e) bazisdagi koordinatalari, Y_f esa y vektorning (f) bazisdagi koordinatalari bo‘lsin. U holda (5) va (6) tengliklardan

$$X_e = CX_f, \qquad Y_e = CY_f$$

tengliklarni, (4) tenglikdan esa

$$Y_e = A_\varphi X_e, \qquad Y_f = B_\varphi X_f$$

tengliklarni hosil qilamiz. Bu yerdan

$$CY_f = Y_e = A_\varphi X_e = A_\varphi C X_f$$

ni hosil qilamiz. Oxirgi tenglikni itkkala tomonini C^{-1} ga ko'paytirib,

$$Y_f = C^{-1} A_\varphi C X_f$$

ni hosil qilamiz. Bu tenglikni $Y_f = B_\varphi X_f$ tenglik bilan solishitirib, bitta bazisda vektor koordinatalarining yagonaligidan

$$B_\varphi = C^{-1} A_\varphi C \qquad (7)$$

tenglikni hosil qilamiz.

(7) tenglik φ chiziqli operatorning ikkita (e) va (f) bazislardagi A_φ va B_φ matritsalari orasidagi bog'lanishni ifodalaydi.

(7) tenglik bilan bog'langan A_φ va B_φ matritsalar **o'xshash matritsalar** deb yuritiladi.

Matritsalar o'xshashligi kvadrat matritsalar to'plamida ekvivalentlik munosabatidan iborat, ya'ni matritsalar o'xshashaligi kvadrat matritsalar to'plamini o'zaro kesishmaydigan qism to'plamlarga ajratadi.

Agar φ – operatorning (e) bazisdagi matritsasi

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

bo'lsa,

$$detA_\varphi = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

determinantga φ chiziqli operator matritsasining determinanti deyiladi.

2-teorema. *φ chiziqli operator matritsasining determinanti chiziqli fazo bazisining tanlanishiga bog'liq emas.*

Haqiqatdan ham, agar bir xil tartibli A, B, C – matritsalar uchun $C = A \cdot B$ tenglik o'rinli bo'lsa,

$$detC = \det(A \cdot B) = detA \cdot detB$$

tenglikning o'rinli ekanligini determinantlar nazariyasida qaralgan edi.

Endi (7) tenglikning ikkala tomonining determinantlarini topamiz:

$$detB_\varphi = \det\left(C^{-1}A_\varphi C\right) = \det(C^{-1}) \cdot detA_\varphi \cdot detC$$
$$= detA_\varphi \cdot \det(C^{-1}) \cdot detA_\varphi \cdot detC = detA_\varphi \det(C^{-1} \cdot C)$$
$$= detA_\varphi \cdot detE = detA_\varphi$$

bo‘ladi.

CHIZIQLI OPERATORNING OBRAZI, YADROSI, RANGI VA DEFEKTI

$\boldsymbol{L}$ – chiziqli fazo biror $\mathbb{P}$ sonlar maydoni ustida aniqlangan va $\varphi: \boldsymbol{L} \to \boldsymbol{L}$ chiziqli operator berilgan bo‘lsin, $dimL = n$ bo‘lsin.

1-ta’rif.

$$\varphi(L) = \{\varphi(x) \mid x \in L\}$$

to‘plamga $\varphi: \boldsymbol{L} \to \boldsymbol{L}$ *chiziqli operatorning qiymatlari to‘plami yoki* $\boldsymbol{L}$ *– chiziqli fazoning φ operator ta’sirida hosil bo‘lgan obrazi deyiladi.*

2-ta’rif.

$$N = \{x \in L \mid \varphi(x) = 0\}$$

to‘plamga $\varphi: \boldsymbol{L} \to \boldsymbol{L}$ *chiziqli operatorning yadrosi deyiladi.*

1-teorema. $\varphi: \boldsymbol{L} \to \boldsymbol{L}$ *chiziqli operatorning obrazi va yadrosi* $\boldsymbol{L}$ *– chiziqli fazoning qism fazolaridan iborat.*

Operator obrazidan iborat bo‘lgan $\varphi(L) = \{\varphi(x) \mid x \in L\}$ qism fazoning o‘lchoviga ***operatorning rangi*** deyiladi. Operatorning rangi uning matritsasining rangi bilan ustma-ust tushadi.

$\varphi: \boldsymbol{L} \to \boldsymbol{L}$ *chiziqli operatorning yadrosining qism fazo sifatidagi o‘lchoviga* <u>*operatorning defekti*</u> *deyiladi.*

2-teorema. Chiziqli operator rangi bilan defektining yig‘indisi chiziqli fazoning o‘lchoviga teng.

Isbot.

$\varphi(L)$ – qism fazoning o‘lchovi $k = dim\varphi(L)$ ga teng bo‘lsin, ya’ni u $\boldsymbol{L}$ *– chiziqli fazoning* $e_1, e_2, \dots, e_k$ $(k \le n)$ vektorlariga tortilgan bo‘lsin. $\varphi(L) \cap N = \{0\}$ ekanligini ko‘rsatamiz.

Aytaylik $x \in \varphi(L) \cap N$ bo‘lsin. U holda $x \in \varphi(L)$ ekanligidan

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_ke_k$$

va $x \in N$ ekanligidan

$$\varphi(x) = x_1\varphi(e_1) + x_2\varphi(e_2) + \dots + x_k\varphi(e_k) = 0$$

kelib chiqadi. Lekin, $\varphi(e_1), \varphi(e_2), \cdots, \varphi(e_k)$ - vektorlar chiziqli bog‘lanmagan. Demak, oxirgi tenglikdan $x_1 = x_2 = \cdots = x_k = 0$ va bu yerdan $x = 0$ ekanligi kelib chiqadi.

Endi $\boldsymbol{L}$ *– chiziqli fazoning har qanday x vektori $\varphi(L)$* va N qism fazolar vektorlarining yig‘indisidan iborat ekanligini ko‘rsatamiz. $x \in L$ bo‘lganligi uchun $\varphi(x) \in \varphi(L)$ bo‘ladi. Shuning uchun

$$\varphi(x) = x_1\varphi(e_1) + x_2\varphi(e_2) + \cdots + x_k\varphi(e_k)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi. U holda

$$y = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ke_k$$

vektor $\varphi(L)$ qism fazoga tegishli bo‘ladi. Bu holda $z = x - y \in N$ bo‘ladi. Chunki,

$$\varphi(z) = \varphi(x - y) = \varphi(x) - \varphi(y) = 0$$

bo‘ladi.

$z = x - y$ tenglikdan $x = y + z, \quad y \in \varphi(L), \ z \in N$ ekanligini hosil qilamiz.

Natija. $\boldsymbol{L}$ *– chiziqli fazo* $\varphi(L)$ va N qism fazolarning to‘g‘ri yig‘indisidan iborat.

$L = \varphi(L) \oplus N.$

CHIZIQLI OPERATORLAR USTIDA AMALLAR, ULARNING YIG‘INDISI, SONGA KO‘PAYTMASI, KO‘PAYTMASI, CHIZIQLI OPERATORLAR FAZOSI.

Faraz qilaylik biror chiziqli R fazoda $\varphi, \ va \ \psi$ chiziqli operatolrlar berilgan bo’lsin.

1. Chiziqli operatorlarning yig’indisi.

Shunday θ operator mavjud bo’lib, bu operator va ixtiyoriy $x \in R$ vektor uchun $\varphi(x) + \psi(x) = \theta(x)$ tenglik o’rinli bo’lsa, θ operatorga $\varphi \ va \ \psi$ chiziqli operatorlarning yig’indisi deyiladi. Operatorlar yig’indisini $\varphi + \psi = \theta$ shaklda yoziladi.

Chiziqli operatorlarning yig’indisi yana chiziqli operatordan iborat. Haqiqatdan ham,

$\theta(\lambda x + \mu y) = \varphi(\lambda x + \mu y) + \psi(\lambda x + \mu y) = \lambda\varphi(x) + \mu\varphi(y) + \lambda\psi(x) + \ \mu\psi(y) = \lambda\big(\varphi(x) + \psi(x)\big) + \mu\big(\varphi(x) + \psi(x)\big) = \lambda\theta(x) + \mu\theta(x).$

Operatorlarning yig’indisi quyidagi xossalarga ega.

1. $\varphi + \psi = \psi + \varphi$;
2. $(\varphi + \psi) + \theta = \varphi + (\psi + \theta)$;
3. $\varphi \ + \ \sigma = \sigma + \varphi = \varphi$, bu yerda $\sigma -$ nol operatordan iborat;
4. Agar $-\varphi$ bilan barcha $x \in R$ lar uchun $(-\varphi)(x) = -\varphi(x)$ tenglik bilan aniqlanadigan operatorni aniqlasak, bu operator han chiziqli bo’lib,

$$(-\varphi) + \varphi = \sigma$$

tenglik o’rinli bo’ladi.

2. Operatorni songa ko’paytmasi.

   Agar biror $\lambda \in \mathbb{P}$ son va R fazodagi φ chiziqli operator uchun $(\lambda\varphi)(x) = \lambda(\varphi(x))$ tenglikni qanoatlantiradigan $\lambda\varphi$ operator mavjud bo’lsa, bu operatorga φ operatorning λ songa ko’paytmasi deyiladi. $\lambda\varphi$ operatorning chiziqli operator ekanligini bevosita ko’rsatish mumkin.

Operatorni songa ko’paytmasi quyidagi xossalarga ega.

1. $1 \cdot \varphi = \ \varphi$;

2. $0 \cdot \varphi = \sigma$;
3. $\lambda(\mu\varphi) = (\lambda\mu)\varphi$;
4. $(\lambda + \mu)\varphi = \lambda\varphi + \mu\varphi$;
5. $\lambda(\varphi + \psi) = \lambda\varphi + \lambda\psi$.

Operatorlarning yig'indisi va songa ko'paytmasining yuqorida keltirilgan xossalaridan kelib chiqadiki, $\mathbb{P}$ sonlar maydoni ustida aniqlangan R fazoni o'zini – o'ziga akslantiradigan barcha chiziqli operatorlar to'plami $\mathbb{P}$ sonlar maydoni ustida chiziqli fazo tashkil qiladi. Bu chiziqli fazo elementlari $\mathbb{P}$ sonlar maydoni elementlarudan iborat bo'lgan matrisalar fazosiga izomorf bo'ladi.

3. Endi operatorlarning ko'paytmasini qarab chiqamiz.

Shunday ϑ operator mavjud bo'lib, bu operator va ixtiyoriy $x \in R$ vektor uchun $\vartheta(x) = \varphi(\psi(x))$ tenglik o'rinli bo'lsa, ϑ operatorga $\varphi\ va\ \psi$ chiziqli operatorlarning ko'paytmasi deyiladi. Operatorlar ko'paytmasi $\varphi \cdot \psi = \vartheta$ shaklda yoziladi.

Bu ta'rifdan ko'rinib turibdiki, $\varphi\ va\ \psi$ chiziqli operatorlarning ko'paytmasi ularni ketma-ket bajarishdan iborat ekan.

Operatorlarning ko'paytmasi yana chiziqli operatordan iborat. Haqiqatdan ham,

$$\vartheta(\lambda x + \mu y) = \varphi(\psi(\lambda x + \mu y)) = \varphi(\lambda\psi(x) + \mu\psi(y)) = \varphi\left(\lambda\psi(x)\right) + \varphi(\mu\psi(y)) = \lambda\left(\varphi(\psi(x))\right) + \mu\left(\varphi(\psi(y))\right) = \lambda\vartheta(x) + \mu\vartheta(x).$$

Operatorlarning ko'paytmasi quyidagi xossalarga ega.

1. $\varphi \cdot \psi \neq \psi \cdot \varphi$;
2. $(\varphi\psi)\theta = \varphi(\psi\theta)$;
3. $\varphi \cdot e = \sigma \cdot e = \varphi$, bu yerda $e -$ barcha $x \in R$ vektorlarni o'z joyida qoldiradigan birlik operatordan iborat;
4. $(\lambda + \mu)\varphi = \lambda\varphi + \mu\varphi$;
5. $\varphi(\psi + \theta) = \varphi\psi + \varphi\theta$.
6. $(\varphi + \psi)\theta = \varphi\theta + \psi\theta$.

Operatorlarni qo'shish va ko'paytirishning xossalaridan kelib chiqadiki, $\mathbb{P}$ sonlar maydoni ustida aniqlangan R fazoni o'zini – o'ziga akslantiradigan barcha chiziqli operatorlar to'plami $\mathbb{P}$ sonlar maydoni ustida halqa tashkil qiladi. Bu halqa elementlari $\mathbb{P}$ sonlar maydoni elementlarudan iborat bo'lgan matrisalar halqasiga izomorf bo'ladi.

Misol. A operator geometrik ma'noda x ni OXo'qiga proyeksiyalashni olaylik. B deb vektorning 90^0ga burilishini olaylik. $Ax_1 = pr_{OX}x_1 = x_1, x_1 \perp x_2$

$$B(Ax_1) = Bx_1 = x_2, BAx_1 = x_2 \neq 0$$

$$Bx_1 = x_2, A(Bx_1) = Ax_2 = pr_{OX}x_2 = 0, ABx_1 = 0 \quad x_2 \neq 0,\ A \cdot B \neq B \cdot A$$

1. Teskari operatorlar.

Agar A operator x vektorni y ga o'tkazgan bo'lib, $Ax = y, By = x$ bo'lsa u holda A va B bir- biriga teskari operator deyiladi.

A operatorga teskari operator A^{-1} deb yoziladi.
$AA^{-1} = A^{-1}A = E$ birlik operator o'zini-o'ziga o'tkazaveradi. $Ex = x$

Misol. A integrallash va B hosila olish bo'lsin.

$x = t^2, \quad Ax = \frac{1}{3}t^3 + C, \quad B(Ax) = t^2$

teskari operatorning mavjud bo'lishi operator matritsalarining maxsus yoki maxsusmas bo'lishiga bog'liqdir. Agar operator matritsaning determinanti noldan farqli bo'lsa, ya'ni matritsa maxsusmas bo'lsa, u holda bunday operatorga teskari operator mavjud. Shunday qilib teskari operator mavjud bo'lishi uchun uning matritsasi maxsusmas bo'lishi kerak.

Misol. A operator differensiallash bo'lsin. Shu operatorni ko'pehadlar bazisida $(1, x, x^2, x^3)$ ko'rib o'taylik.

$R_3(t) = \{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3\}$ sistemalar ko'phadni tashkil etadi. Masalan

$R_3(t) = \{t_1(t), x_2(t), x_3(t), x_3(t), \cdots\}$ $x_1(t) = 1 - 2t^2 \quad x_2(t) = -2 + t + \frac{3}{2}t^2 + t^3$

$x_3(t) = -3 + t + t^2, \quad x_4(t) = 5 + 3t$

$(1, x, x^2, x^3)$ bazis bo'ladi, chunki

$\{\alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \alpha_3 t^3 = 0\}, \qquad \alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$

bazisga A vektorni tatbiqlaymiz.

$$e_0 = 1, e_1 = t, e_2 = t^2, e_3 = t^3$$
$$\text{A } e_0 = 0, Ae_1 = 1, Ae_2 = 2t, Ae_3 = 3t^2$$
$$\text{A } e_0 = 0 = 0 \cdot e_0 + 0 \cdot i + 0 \cdot t^2 + 0 \cdot t^3$$
$$\text{A } e_1 = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot t + 0 \cdot t^2 + 0 \cdot t^3$$
$$\text{A } e_2 = 2 = 0 \cdot 1 + 2 \cdot t + 0 \cdot t^2 + 0 \cdot t^3$$
$$\text{A } e_3 = 3 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot t + 3 \cdot t^2 + 0 \cdot t^3$$
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) darajsi 3 dan oshmaydigan ko'phadlar fazosidagi differinsiallash operatorining matritsasidir, bunda

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$ demak, A^{-1} mavjud emas.

INVARIANT QISM FAZOLAR

$\mathbb{P}$ sonlar maydoni ustida aniqlangan R -chiziqli fazo va uning qandaydir qism fazosi $R_1 \subset R$ berilgan bo'lsin. $\varphi: R \to R$ – chiziqli operator bo'lsin.

Umuman olganda R_1 qism fazoning x vektoriga φ operatorni ta'sir ettirsak, uning obrazi $\varphi(x)$ yana R_1 qism fazoga tegishli bo'lmasligi mumkin. Bundan keyin biz operator ta'sirida o'zgarmasdan qoladigan qism fazolarni qarab chiqamiz.

1-ta'rif. R -chiziqli fazoning R_1 qism fazosi φ chiziqli operatorga nisbatan invariant deyiladi, agar R_1 qism fazoning har bir x vektorining obrazi $\varphi(x)$ yana shu qism fazoga tegishli bo'lsa, ya'ni $\varphi(R_1) \subseteq R_1$ munosabat o'rinli bo'lsa.

Masalan, φ – operator uch o'lchovli geometrik vektorlar fazosini Oz o'qi atrofda burish bo'lsin. Bu holda xOy tekislik va Oz o'qi invarint qism fazolar bo'ladi.

1-teorema. φ chiziqli operatorga nisbatan invariant bo'lgan qism fazolarning yig'indisi va kesishmasi shu operatorga nisbatan yana invariant qism fazolardan iborat.

Isbot.

Haqiqatdan ham, R -chiziqli fazoning R_1 va R_2 qism fazolari φ chiziqli operatorga nisbatan invariant qism fazolar bo'lsin. U holda, $x \in R_1 \cap R_2$ bo'lganligi uchun $x \in R_1$ va $x \in R_2$ bo'ladi. Bu yerdan R_1 va R_2 qism fazolari φ chiziqli operatorga nisbatan invariant qism fazolar bo'lganligi uchun $\varphi(x) \in R_1$ va $\varphi(x) \in R_2$ bo'ladi va demak, $\varphi(x) \in R_1 \cap R_2$ bo'ladi.

Ikkinchi tomondan $x \in R_1 + R_2$ bo'lsa, u holda $x = u_1 + u_2$ bo'lib, $u_1 \in R_1$ va $u_2 \in R_2$ bo'lganligi uchun $\varphi(u_1) \in R_1$ va $\varphi(u_2) \in R_2$ bo'ladi. Bu yerdan $\varphi(x) = \varphi(u_1 + u_2) = \varphi(u_1) + \varphi(u_2) \in R_1 + R_2$ bo'ladi.

2-teorema. Agar φ – xosmas chiziqli operator bo'lsa va R_1 qism fazo φ chiziqli operatorga nisbatan invariant qism fazo bo'lsa, u holda R_1 qism fazo φ^{-1} teskari chiziqli operatorga nisbatan ham invariant bo'ladi.

Bu teoremaning isboti mustaqil ishdan iborat.

Endi, aytaylik $R = R_1 \oplus R_2$ bo'lsin, ya'ni, n- o'lchovli R chiziqli fazo o'zining φ chiziqli operatorga nisbatan invariant qism fazolari R_1 va R_2 ning to'g'ri yig'indisidan iborat bo'lsin.

R_1 qism fazoning bazisi - $e_1, e_2, \dots e_k$ va R_2 qism fazoning bazisi $e_{k+1}, e_{k+2}, \dots, e_n$ bo'lsin.

φ chiziqli operator $e_1, e_2, \dots e_k$ bazisda

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}$$

matritsaga ega bo'lsin. Shu operator $e_{k+1}, e_{k+2}, \dots, e_n$ bazisda

$$A_2 = \begin{pmatrix} a_{k+1k+1} & a_{k+1k+2} & \cdots & a_{k+1n} \\ a_{k+2k+1} & a_{k+2k+2} & \cdots & a_{k+2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{nk+1} & a_{nk+2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

matritsaga ega bo'lsin. U holda $R = R_1 \oplus R_2$ bo'lganligi uchun $e_1, e_2, \dots e_k$, $e_{k+1}, e_{k+2}, \dots, e_n$
vektorlar sistemasi R chiziqli fazoning bazisini tashkil etadi va bu bazisda φ chiziqli operator

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

katakli-diagonal shaklga ega bo‘ladi, bu yerda $0 -$ tegishli tartibli nol matritsadan iborat.

CHIZIQLI OPERATORNING XOS QIYMATLARI VA XOS VEKTORLARI

Yuqorida o‘zining φ chiziqli operatorga nisbatan invariant qism fazolarning xossaldarini qarab chiqdik. Bu yerda bir o‘lchovli invariant qism fazolar alohida ahamiyat kasb etadi.

Aytaylik, R -chiziqli fazo va uning φ chiziqli operatorga nisbatan invariant qism fazosi $R_1 \subset R$ berilgan bo‘lib, uning o‘lchovi 1 ga teng bo‘lsin, ya’ni $dimR_1 = 1$ bo‘lsin. U holda, $x \in R_1 (x \neq 0)$ bo‘lsa, $\varphi(x) \in R_1$ bo‘ladi va demak, $\varphi(x) = \lambda_0 x$ bo‘ladi, bu yerda $\lambda_0 \in \mathbb{P}$ sondan iborat bo‘ladi. Agar $y \in R_1$ boshqa bir vektor bo‘lsa, $y = \alpha x, \alpha \in \mathbb{P}$ bo‘ladi. Bu yerda

$$\varphi(y) = \varphi(\alpha x) = \alpha\varphi(x) = \alpha(\lambda_0 x) = \lambda_0(\alpha x) = \lambda_0 y$$

bo‘ladi, ya’ni, bir o‘lchovli R_1invariant qism fazoning har qanday x vektori uchun $\varphi(x) = \lambda_0 x$

tenglik o‘rinli bo‘lar ekan.

1-ta’rif. R -chiziqli fazoning noldan farqli har qanday x vektori uchun $\varphi(x) = \lambda x$ tenglikni qanoatlantiradigan $\lambda \in \mathbb{P}$ songa φ chiziqli operatorning **xos qiymati**, $x \in R$ vektorga esa bu xos qiymatga mos keladigan **xos vektori** deyiladi.

Bu ta’rifdan kelib chiqadiki, φ chiziqli operatorga nisbatan bir o‘lchovli R_1invariant qism fazoning har qanday x vektori bu operatorning bitta xos qiymatiga mos keladigan xos vektordan iborat ekan.

Bu tasdiqning teskarisi ham o‘rinli, ya’ni agar $x \in R (x \neq 0)$ φ chiziqli operatorning xos vektori bo‘lsa, bu vektorga tortilgan bir o‘lchovli qism fazo, shu operatorga nisbatan invariant qism fazodan iborat bo‘lar ekan.

Endi, agar R chiziqli fazo va bu fazoda biror φ chiziqli operator berilgan bo‘lsa, bu operatorning xos qiymatlari va xos vektorlarini topish algoritmini qarab chiqamiz.

R chiziqli fazoning biror $e_1, e_2, \dots, e_n$ bazisini tanlab olamiz.

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n$$

bo‘lsin. φ chiziqli operator bu bazisda

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

matritsaga ega bo‘lsin. U holda $\varphi(x) = \lambda x$ tenglikni

$$x^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

belgilashni kiritib,

$$A_\varphi x^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \cdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

shaklda yozishimiz mumkin. Bu yerdan

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & \lambda x_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & \lambda x_2 \\ \cdots \quad \cdots & & \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & = & \lambda x_t \end{cases}$$

sistemani hosil qilamiz. Bu sistemadan

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)\, x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & 0 \\ \cdots \quad \cdots & & \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + (a_{nn} - \lambda)x_n & = & 0 \end{cases} \qquad (1)$$

bir jinsli sistemani hosil qilamiz. (1) sistema noldan farqli yechimlarga ega bo‘lishi uchun uning asosiy matritsasi determinanti

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (2)$$

bo‘lishi zarur va yetarlidir. (2) tenglini qanoatlantiradigan λ berilgan operatorning xos qiymatlaridan iborat bo‘ladi. Bu xos qiymatlarni (1) sistemadagi λ ning o‘rniga qo‘yib, hosil bo‘lgan sistemani yechsak, xos vektorlarning koordinatalarini hosil qilamiz.

Endi (2) tenglikning chap tomonidagi determinanti hisoblaymiz:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = (-1)^n[\lambda^n - \alpha_1\lambda^{n-1} + \alpha_2\lambda^{n-2} + \cdots + \alpha_{n-1}\lambda + \alpha_n] = \xi(\lambda) \quad (3)$$

(3) tenglikdagi $\xi(\lambda)$ ko‘phad A_φ matritsaning (φ $operatorning$) harakteristik ko‘phadi deyiladi.

Agar $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ lar $\xi(\lambda)$ ko‘phadning ildizlari $(\varphi\ operatorning\ xos\ qiymatlari)$ bo‘lsa , u holda Viyet formulalariga asosan

$$\alpha_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n,\ \alpha_n = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n \quad (4)$$

Ikkinchi tomondan, (2) tenglikdagi determinantni hisoblasak,

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = (-1)^n[\lambda^n - (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})\lambda^{n-1} +$$

$\alpha_2\lambda^{n-2} + \cdots + \alpha_{n-1}\lambda + \alpha_n]$. (5)

Agar bu tenglikda $\lambda = 0$ desak,

$$\xi(0) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \alpha_n \qquad (6)$$

ni hosil qilamiz. (4), (5) va (6) tengliklarni solishtirib,

$$a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n,$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n \qquad (7)$$

tengliklarni hosil qilamiz.

A_φ matritsaning diagonalidagi elementlari yig‘indisi bu matritsaning ***izi*** deyiladi,

$$a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = trA_\varphi.$$

(7) tengliklardan quyidagi xossani hosil qilamiz.
1-teorema. φ operator matritsasining izi uning xos qiymatlarining yig‘indisiga, bu matritsaning determinanti esa xos qiymatlarning ko‘paytmasiga teng.

2-teorema. Chiziqli operatorning harakteristik ko‘phadi $\xi(\lambda)$ shu operator aniqlangan chiziqli fazo bazisining tanlanishiga bog‘liq emas.

Isbot.
R chiziqli fazoning biror

$$e_1, e_2, \ldots, e_n \quad - \quad (e)$$

bazisini tanlab olamiz. φ chiziqli operator bu bazisda

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

matritsaga ega bo‘lsin. Bu holda φ chiziqli operatorning harakteristik ko‘phadini

$$\xi_e(\lambda)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=|A_\varphi-\lambda E|$$

shakldа yozib olamiz, bu yerda E- birlik matritsadan iborat.
Shu fazoning boshqa bir yangi bazisi

$$f_1, f_2, \dots, f_n \ -(f)$$

ham berilgan bo‘lsin. Bu bazisda φ operator $B_\varphi -$ matritsaga ega bo‘lsin. Bu bazisda uning harakteristik ko‘phadi

$$\xi_f(\lambda)=\begin{vmatrix} b_{11}-\lambda & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22}-\lambda & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=|B_\varphi-\lambda E|$$

bo‘ladi. Endi (ye) bazisdan (f) bazisga o‘tish matritsasi C bo‘lsin. U holda $B_\varphi = C^{-1}A_\varphi C$ tenglik o‘rinli bo‘ladi. Bu yerdan

$$\xi_f(\lambda)=\left|B_\varphi-\lambda E\right|=\left|C^{-1}A_\varphi C-C^{-1}\lambda EC\right|=\left|C^{-1}\left(A_\varphi-\lambda E\right)C\right|$$
$$=|C^{-1}|\left|A_\varphi-\lambda E\right||C|=$$
$$=|C|^{-1}\left|A_\varphi-\lambda E\right||C|=\left|A_\varphi-\lambda E\right|=\xi_e(\lambda).$$

Demak, ikkita har xil bazislarda chiziqli operatorning harakteristik ko‘phadi bir xil bo‘lar ekan.
2 va 1-teoremalardan chiziqli operator matritsasining izi va determinanti ham bazisni tanlanishiga bog‘liq emasligi kelib chiqadi.

Endi n-o‘lchovli chiziqli fazoda aniqlangan φ chiziqli operator n-ta chiziqli bog‘lanmagan $e_1, e_2, \dots, e_n$ xos vektorlarga ega bo‘lsin, Bu vektorlar $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$-xos qiymatlarga mos bo‘lsin. U holda

$$\varphi(e_1)=\lambda_1 e_1=\lambda_1 e_1+0\cdot e_2+\cdots+0\cdot e_n$$
$$\varphi(e_2)=\lambda_2 e_2=0\cdot e_1+\lambda_2\cdot e_2+\cdots+0\cdot e_n$$
$$\cdots$$
$$\varphi(e_n)=\lambda_n e_n=0\cdot e_1+0\cdot e_2+\cdots+\lambda_n\cdot e_n$$

bo‘ladi. Bu sistemaning matritsasi φ chiziqli operatorning matritsasidan iborat:

$$A_\varphi=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Bu matritsa diagonal matritsadan iborat.

Demak, xos vektorlardan tuzilgan bazisda chiziqli operatorning matritsasi diagonal shaklda bo‘lar ekan. Matritsaning diagonalida chiziqli operatorning xos qiymatlari joylashar ekan. Bu tasdiqning teskarisi ham o‘rinli. Ya’ni, agar biror bazisda chiziqli operatorning matritsasi diagonal shaklda bo‘lsa, bu bazisning vektorlari shu operatorning xos vektorlaridan iborat bo‘ladi.

Lekin, har bir operator ham n-ta chiziqli bog'lanmagan xos vektorlarga ega bo'lavermaydi. Chiziqli operatorning xos vektorlaridan qachon bazis tuzish mumkinligini quyidagi teorema ko'rsatadi.

3-teorema. Chiziqli operatorning juft-jufti bilan har xil bo'lgan xos qiymatlariga mos keluvchi xos vektorlari chiziqli bog'lanmagan bo'ladi.

Isbot. Teoremani xos vektorlar soniga nisbatan induksiyani qo'llab isbotlaymiz.

Bitta xos vektordan iborat sistema, xos vektorning ta'rifiga ko'ra u noldan farqli bo'lganligi uchun chiziqli bog'lanmagan bo'ladi.

Teorema $k-1$ ta $e_1, e_2, \cdots, e_{k-1}$ - xos vektorlardan iborat bo'lgan sistema uchun o'rinli bo'lsin.

Faraz qilaylik, $k-$ ta har xil $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ xos qiymatlarga mos keluvchi xos vektorlar chiziqli bog'langan bo'lsin.

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_{k-1} e_{k-1} + \alpha_k e_k = 0 \qquad (8)$$

Bu tenglikning ikkala tomoniga φ operatorni ta'sir ettiramiz.

$$\varphi(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_{k-1} e_{k-1} + \alpha_k e_k)$$
$$= \alpha_1\varphi(e_1) + \alpha_2\varphi(e_2) + \cdots + \alpha_{k-1}\varphi(e_{k-1}) + \alpha_k\varphi(e_k) = 0$$

yoki

$$\alpha_1\lambda_1 e_1 + \alpha_2\lambda_2 e_2 + \cdots + \alpha_{k-1}\lambda_{k-1} e_{k-1} + \alpha_k\lambda_k e_k = 0 \qquad (9)$$

(8) tenglikni ikkala tomonini λ_k ga ko'paytiramiz:

$$\alpha_1\lambda_k e_1 + \alpha_2\lambda_k e_2 + \cdots + \alpha_{k-1}\lambda_k e_{k-1} + \alpha_k\lambda_k e_k = 0 \qquad (10)$$

(9) tenglikdan (10) tenglikni ayiramiz.

$$\alpha_1(\lambda_1-\lambda_k)e_1 + \alpha_2(\lambda_2-\lambda_k)e_2 + \cdots + \alpha_{k-1}(\lambda_{k-1}-\lambda_k)e_{k-1} = 0 \qquad (11)$$

Teorema shartiga ko'ra $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ xos qiymatlar har xil va induksiya faraziga ko'ra $e_1, e_2, \cdots, e_{k-1}$ - xos vektorlar chiziqli bog'lanmagan. Shuning uchun (11) tenglikdan $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_{k-1} = 0$ ekanligi kelib chiqadi. U holda (9) tenglikdan $\alpha_k e_k = 0$ kelib chiqadi, bu yerdan $\alpha_k = 0$ kelib chiqadi.

Demak, xos vektorlardan tuzilgan

$$e_1, e_2, \cdots, e_{k-1}, e_k$$

vektorlar sistemasi chiziqli bog'lanmagan ekan.

1-misol. $R_\alpha: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ operator tekislikni koordinatalar boshiga nisbatan musbat yo'nalishda (soat strelkasiga qarama- qarshi yo'nalishda) α – burchakka burishdan iborat bo'lsin. Bu operatorning standart $\{i, j\}$ bazisdagi matritsasini topamiz.

$$R_\alpha(i) = cos\alpha \cdot i + sin\alpha \cdot j$$
$$R\_\alpha(j) = -sin\alpha \cdot i + cos\alpha \cdot j$$

Bu sistemaning matritsasi

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} cos\alpha & -sin\alpha \\ sin\alpha & cos\alpha \end{pmatrix}$$

berilgan operatorning $\{i, j\}$ bazisdagi matritsasidan iborat. Shu operatorning xos qiymatlari va xos vektorlari topilsin.

BICHIZIQLI FUNKSIONAL. BICHIZIQLI VA KVADRATIK FORMALAR.

$\mathbb{R}$ -haqiqiy sonlar maydoni ustida R chiziqli fazo berilgan bo‘lsin. $x, y, z \in R$ fazoning ixtiyoriy vektorlari bo‘lsin.
1–ta’rif. R chiziqli fazoda har bir vektorlar jufti x, y ga $A(x, y)$ sonni mos qo‘yadigan ikki o‘zgaruvchili $A(x, y)$ funksiya quyidagi shartlarni qanoatlantirsa,

1. $A(x + y, z) = A(x, z) + A(y, z)$;
2. $A(\alpha x, y) = \alpha A(x, y)$;
3. $A(z, x + y) = A(z, x) + A(z, y)$;
4. $A(x, \alpha y) = \alpha A(x, y)$,

bu funksiyaga bichiziqli funksiya yoki bichiziqli funksional deyiladi, bu yerda $\alpha \in \mathbb{R}, x, y, z \in R$.
Shunday qilib, $A(x, y)$ tayinlangan y da x o‘zgaruvchi bo‘yicha chiziqli funksional va tayinlangan x da y o‘zgaruvchi bo‘yicha chiziqli funksionaldan iborat ekan.
R chiziqli fazoning biror bir

$$e_1, e_2, \dots, e_n \qquad (e)$$

bazisi berilgan bo‘lsin. Bu bazisda $x, y \in R$ vektorlar quyidagi koordinatalarga ega bo‘lsin:

$$\begin{aligned} x &= x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n \\ y &= y_1 e_1 + y_2 e_2 + \cdots + y_n e_n \end{aligned} \qquad (1)$$

U holda bichiziqli funksionalga

$$A(x, y) = (x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n \qquad (2)$$

tenglik bilan aniqlangan funksional misol bo‘la oladi, bu yerda (x, y) ifodaga x va y vektorlarning skalyar ko‘paytmasi deb ham yuritiladi.

Endi bichiziqli funksionalning koordinatalardagi ifodasini topamiz. (1) tengliklar bilan aniqlangan x va y vektorlarning bichiziqli funksionaldagi qiymatlarini topamiz:

$$A(x, y) = A(x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n, y_1 e_1 + y_2 e_2 + \cdots + y_n e_n) =$$

$$= \sum_{i,k=1}^{n} x_i y_k A(e_i, e_k) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} x_i y_k .$$

Bu yerda $a_{ik} = A(e_i, e_k)$ koeffitsiyentlar (e) bazisdan bog‘liq bo‘lib, x va y vektorlardan bog‘liq emas.
Shunday qilib berilgan bazisda bichiziqli funksional quyidagi

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} x_i y_k$$

bichiziqli forma bilan tasvirlanar ekan. $A = (a_{ij})$ matritsaga bichiziqli formaning matritsasi deb yuritiladi.
Endi fazoning boshqa bir yangi bazisiga o‘tishda bilan bichiziqli forma matritsasi qanday o‘zgarishini

aniqlaymiz.
R chiziqli fazoning biror bir

$$e_1, e_2, \dots, e_n \qquad (e)$$

bazisida $A(x,y)$ bichiziqli forma

$$A(x,y) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} x_i y_k, \qquad a_{ik} = A(e_i, e_k)$$

shaklda aniqlangan bo‘lsin. Shu fazoning

$$f_1, f_2, \dots, f_n \qquad (f)$$

bazisida $A(x,y)$ bichiziqli forma

$$A(x,y) = \sum_{p,q=1}^{n} b_{pq} x'_p y'_q, \qquad b_{pq} = A(f_i, f_k)$$

shaklda aniqlangan bo‘lsin, bu yerda x'_p lar x vektorning (f) bazisdagi koordinatalari, y'_q lar esa
y vektorning (f) bazisdagi koordinatalaridan iborat.

$A = (a_{ik}),\ B = (b_{ik})$ matritsalarni belgilab olamiz. $C = (c_{ik})$ bilan (e) bazisdan (f) bazisga o‘tish matritsasini belgilaymiz. Bu holda

$$b_{pq} = A(f_i, f_k) = A\big(c_{1p}e_1 + c_{2p}e_2 + \dots + c_{np}e_n, \qquad c_{1q}e_1 + c_{2q}e_2 + \dots + c_{nq}e_n\big) =$$

$$= \sum_{i,k=1}^{n} c_{ip} c_{kq} A(e_i, e_k) = \sum_{i,k=1}^{n} c_{ip} c_{kq} a_{ik} = \sum_{i,k=1}^{n} c_{ip} a_{ik} c_{kq}$$

ni hosil qilamiz. Oxirgi ifodadagi c_{ip} ni d_{pi} bilan belgilab olamiz, u holda qo‘yidagi ifodani hosil qilamiz.

$$b_{pq} = \sum_{i,k=1}^{n} d_{pi} a_{ik} c_{kq}$$

bu yerda $\left(d_{pi}\right) = C^T$ matritsa $C = (c_{ip})$ o‘tish matritsasining transponirlanganidan iborat. Endi

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} c_{kq}$$

yig‘indi A matritsaning i –satrini C matritsaning q – ustuniga ko‘paytmasidan iborat bo‘lib, u AC matritsaning i –satri va q – ustunining kesishgan joyidagi elementidan iborat. Shuning uchun

$$b_{pq} = \sum_{i=1}^{n} d_{pi} a_{ik} c_{kq} = \sum_{i,k=1}^{n} d_{pi} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} c_{kq}\right)$$

yig‘indi $C^T AC$ matritsaning p –satri va q – ustunining kesishgan joyidagi elementidan iborat bo‘lib, u B matritsaning p –satri va q – ustunining kesishgan joyidagi elementga teng.
Demak,

$$B = C^T AC$$

tenglik o‘rinli ekan.

$A(x,y)$ bichiziqli forma simmetrik deyiladi, agar barcha $x,y \in R$ vektorlar uchun

$$A(x,y) = A(y,x)$$

tenglik o‘rinli bo‘lsa. Bu holda

$$a_{ik} = A(e_i, e_k) = A(e_k, e_i) = a_{ki}$$

tenglik o‘rinli bo‘lganligi uchun simmetrik bichiziqli formaning matritsasi ham simmetrik matritsadan iborat bo‘ladi.

Agar simmetrik bichiziqldi formada $y = x$ deb olsak, $A(x,x)$ – bichiziqli forma kvadratik forma deb yuritiladi. Demak, kvadratik formaning matritsasi ham simmetrik matritsadan iborat bo‘ladi.

Kvadratik forma orqali uning bichiziqli formasi ham bir qiymatli aniqlanadi.

Haqiqatdan ham barcha $x,y \in R$ vektorlar uchun

$$A(x,y) = A(y,x)$$

bo‘lganligi uchun

$$A(x+y, x+y) = A(x,x) + 2A(x,y) + A(y,y)$$

Bu yerdan

$$A(x,y) = \frac{1}{2}\big(A(x+y, x+y) - A(x,x) - A(y,y)\big)$$

bo‘ladi.

$A(x,y)$ bichiziqli funksiya kososimmetrik (qiyshiq simmetrik) deyiladi, agar

$$A(x,y) = -A(y,x)$$

Bo‘lsa.

Biror berilgan bazisda kososimmetrik forma qutsyidagicha tasvirlanadi:

$$A(x,y) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} x_i y_k, \qquad a_{ik} = A(e_i, e_k) = -A(e_k e_i) = -a_{ki}$$

barcha i, k lar uchun, $a_{ii} = 0$.

$$B(x,y) = \frac{1}{2}\big(A(x,y) + A(y,x)\big)$$

simmetrik bichiziqli funksioanldan iborat,

$$S(x,y) = \frac{1}{2}\big(A(x,y) - A(y,x)\big)$$

Funksional esa kososimmet rik funksionaldan iborat.

$$A(x,y) = B(x,y) + C(x,y)$$

KVADRATIK FORMALARNI KANONIK SHAKLGA KELTIRISHNING YAKOBI USULI

O‘tgan ma’ruzada $f(X) = X^T AX$ kvadratik formaga $X = CY$ chiziqli almashtirishni qo‘llash natijasida hosil bo‘lgan $f(Y) = Y^T BY$ kvadratik formaning matritsasi berilgan kvadratik formaning matritsasi orasidagi munosabat $B = C^T AC$ tenglikdan iborat ekanligini ko‘rsatgan edik.

1-ta’rif. Agar shunday xosmas $\boldsymbol{C}$ matritsa mavjud bo‘lib, $\boldsymbol{A}$ va $\boldsymbol{B}$ matritsalar uchun $\boldsymbol{B = C^T AC}$

tenglik o‘rinli bo‘lsa, $\boldsymbol{A}$ va $\boldsymbol{B}$ matritsalar *kongruent matritsalar* deyiladi.

Demak, kvadratik formaga chiziqli almashtirishni qo‘llash natijasida hosil bo‘lgan kvadratik formaning matritsasi dastlabki kvadratik formaning matritsasiga kongruyent bo‘lar ekan.

Endi quyidagi matritsa berilgan bo‘lsin.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Bu matritsaning bosh minorlari deb, bir xil raqamli satr va ustunlarning kesishgan joylarida turgan elementlaridan tuzilgan minorga aytiladi. Masalan, $M_{i_1 i_2 \dots i_k}^{i_1 i_2 \dots i_k}$ – k-tartibli bosh minordan iborat, bu yerda

$$1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n, \ 1 \le k \le n.$$

A matritsaning burchak minorlari deb, uning quyidagi bosh minorlariga aytamiz:

$$\Delta_1 = M_1^1 = a_{11}, \qquad \Delta_2 = M_{12}^{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \cdots, \ \Delta_k = M_{12\dots k}^{12\dots k}, \dots,$$

$$\Delta_n = M_{12\dots n}^{12\dots n} = \det A$$

bu yerda $\Delta_k = M_{12\dots k}^{12\dots k}$ minor A matritsaning dastlabki k –ta satr va k –ta ustunida joylashgan elementlardan tuzilgan minor, ya’ni

$$\Delta_k = M_{12\dots k}^{12\dots k} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}$$

Kongruent matritsalarning xossalari.

1. Kongruent matritsalarning ranglari bir xil, ya’ni teng!

Haqiqatdan ham, A matritsani xosmas C^T va C matritsalarga ko‘paytirish uning rangini o‘zgartirmaydi. Shuning uchun, $B = C^T AC$ matritsa bilan A matritsaning ranglari teng bo‘ladi.

2. Simmetrik matritsaga kongruent bo‘lgan matritsa yana simmetrik matritsadan iborat.

Haqiqatdan ham, agar $A = A^T$ bo‘lsa, $B = C^T AC$ tenglikni transponirlaymiz:

$$B^T = (C^TAC)^T = C^TA(C^T)^T = C^TAC = B$$

bu yerdan B matritsaning ham simmetrik ekanligi kelib chiqadi.

3. Haqiqiy kongruent matritsalarning determinantlari bir xil ishorali bo‘ladi.

Haqiqatdan ham, $B = C^TAC$ tenglikning ikkala tomonini determinatlarini hisoblaymiz:

$$\det B = \det(C^TAC) = detC^T \cdot detA \cdot detC = detA \cdot (detC)^2, \quad detC^t = detC.$$

Agar $detC = 1$ bo‘lsa, $detB = detA$ bo‘ladi.

4. Agar A va B matritsalar uchun $B = C^TAC$ tenglikni qanoatlantiradigan bosh diagonalida 1 lar bo‘lgan yuqori uchburchakli C matritsa, ya’ni

$$C = \begin{pmatrix} 1 & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

matritsa mavjud bo‘lsa, u holda A va B matritsalarning barcha burchak minorlari o‘zaro teng bo‘ladi.

Haqiatdan ham, A, C va B matritsalarni kataklarga ajratamiz, birinchi katakda dastlabki k −ta satr va k −ta ustunni joylashtiramiz:

$$B = C^TAC = \left(\begin{array}{c|c} C_k^T & O \\ \hline * & * \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} A_k & * \\ \hline * & * \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} C_k & * \\ \hline O & * \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} C_k^TA_kC_k & * \\ \hline * & * \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} B_k & * \\ \hline * & * \end{array}\right)$$

bu yerda O − nol matritsadan iborat, $(*)$ bilan mos o‘lchovli kataklar belgilangan bo‘lib, ular qanday bo‘lishi ahamiyatga ega emas. Bu yerdan A, C va B matritsalarning k −tartibli kataklari (ya’ni, k −tartibli bosh minorlari) uchun $B_k = C_k^TA_kC_k$ tenglikni hosil qilamiz. Endi barcha $k = 1,2, \dots n$ lar uchun $\det C_k = 1$ ekanligini hisobga olsak,

$$\Delta'_k = \det B_k = \det(C_k^TAC_k) = detC_k^T \cdot detA_k \cdot detC_k = detA_k = \Delta_k$$

bo‘ladi, ya’ni A va B matritsalarning k −tartibli burchak minorlari

$$\Delta_k = \Delta'_k$$

barcha k − larda o‘zaro teng bo‘ladi.

Teorema (Kvadratik formani kanonik shaklga keltirish haqida Yakobi teoremasi).

Agar

$$f(X) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j = X^TAX$$

kvadratik formaning rangi $rankf(X) = rankA = k$ bo‘lib, uning matritsasining barcha burchak minorlari noldan farqli bo‘lsa, ya’ni

$$\Delta_1 = M_1^1 = a_{11} \neq 0,$$

$$\Delta_2 = M_{12}^{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0, \cdots, \quad \Delta_k = M_{12\dots k}^{12\dots k} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \neq 0$$

bo‘lsa, u holda bu kvadratik formani matritsasi (1) ko‘rinishda bo‘lgan $X = CY$ chiziqli almashtirish yordamida qo‘yidagi kanonik shaklga keltirish mumkin

$$f(Y) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_k y_k^2, \quad \lambda_i = \frac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}}, i = 1,2,\dots,k, \quad \Delta_0 = 1. \qquad (2)$$

Isbot.

$$f(X) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j = X^T AX$$

kvadratik formani Lagranj usuli bilan kanonik shaklga keltiramiz. Bu holda dastlab x_1 qatnashgan hadlardan to‘la kvadrat ajartish jarayonida dastlabki chiziqli almashtirishda kvadratik forma quyidagi matritsali kvadratik formaga o‘tkazadi.

$$B_1 = C_1^T AC_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a'_{n2} & \cdots & a'_{nn} \end{pmatrix} \qquad (3)$$

Bu yerda $\Delta_1 = a_{11} \neq 0$ bo‘ladi. Bu yerda C_1- (1) ko‘rinishdagi matritsadan iborat bo‘lganligi uchun va kongruent matritsalarning 4-xossasiga asosan $\Delta_2 = \Delta'_2$. (3) tenglikdan esa $\Delta_2 = a_{11} \cdot a'_{22} = \Delta_1 \cdot a'_{22}$ kelib chiqadi. Bu yerdan $a'_{22} = \frac{\Delta_2}{\Delta_1} \neq 0$ kelib chiqadi. $a'_{22} - x_2^2$ ning koeffitsiyenti bo‘lganligi uchun, uning uchun ham yuqoridagi jarayonni takrorlaymiz. Kvadratik formaning rangi k – ga tengligi bu jarayonni k marta qo‘llashga imkon beradi. Natijada, kvdartik formani matritsasining ko‘rinishi

$$B = C^T AC = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \lambda_k & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

shaklda bo‘ladi. B va A matritsalar kongruent bo‘lganligi uchun

$$\Delta_1 = \lambda_1, \Delta_2 = \lambda_1\lambda_2, \cdots, \qquad \Delta_k = \lambda_1\lambda_2 \cdots \lambda_k$$

bo‘ladi. Bu yerdan

$$\lambda_1 = \Delta_1, \qquad \lambda_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \qquad \cdots, \qquad \lambda_k = \frac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}}$$

tengliklarni hosil qilamiz. Kvadratik forma matritsasining rangi k ga teng bo‘lganligi uchun tartibi k dan katta bo‘lgan bosh minorlar nolga teng.

Teorema isbot bo‘ldi.

Misol. $f(X) = x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + x_2^2 - x_2x_3 + x_3^2$ kvadratik formani Lagranj va Yakobi usullari bilan kanonik shaklga keltiring.

$$f(X) = x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + x_2^2 - x_2x_3 + x_3^2$$
$$= (x_1 + x_2 - x_3)^2 + 2x_2x_3 - x_2x_3 = (x_1 + x_2 - x_3)^2 + x_2x_3 =$$

$$\begin{cases} y_1 & = & x_1 + x_2 - x_3 \\ y_2 + y_3 & = & x_2 \\ y_2 - y_3 & = & x_3 \end{cases}$$

Chiziqli almashtirishni yuqoridagi formaga qo‘llaymiz,

$$= y_1^2 + (y_2 + y_3)(y_2 - y_3) = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$$

normal shaklni hosil qilamiz.

Endi shu kvadratik formani Yakobi usuli bilan kanonik shaklga keltiramiz.

Buning uchun uning matritsasini topamiz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Bu matritsaning o‘ng yuqori burchagidan boshlab bosh minorlarini hisoblaymiz:

$$\Delta_1 = 1, \ \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Bu holda Yakobi usulini qo‘llab bo‘lmaydi, teorema sharti bajarilmaydi. A matritsada Δ_1 ni o‘z ichiga olgan noldan farqli ikkinchi tartibli minorni topamiz:

Bu minor birinchi va uchinchi satr, birinchi va ikkinchi ustunlarning kesishgan joylarida joylashgan sonlardan iborat:

$$M_{12}^{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \neq 0\ .$$

Bu minorni bosh minorga aylantirish uchun berilgan kvadratik formaga quyidagi chiziqli almashtirishni qo‘llaymiz:

$$\begin{cases} x_1 = y_3 \\ x_2 = y_2, \\ x_3 = y_1 \end{cases} \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \quad X^T = Y^T\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Natijada quyidagshi kvadratik formani hosil qilamiz

$$f(Y) = Y^T\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}Y$$
$$= Y^T\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}Y$$

Ko‘rinib turibdiki, bu kvadratik formaning matritsasi

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

dan iborat. Endi b u matritsaning bosh minorlarini hisoblaymizJ

$$\Delta_1' = 1 \neq 0, \qquad \Delta_2' = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{3}{4} \neq 0, \qquad \Delta_3' = detA' = -\frac{1}{4} \neq 0.$$

Yakobi teoremasiga asosan

$$\lambda_1 = \frac{\Delta_1'}{\Delta_0'} = 1,\ \lambda_2 = \frac{\Delta_2'}{\Delta_1'} = \frac{3}{4},\ \lambda_3 = \frac{\Delta_3'}{\Delta_2'} = -\frac{1}{3}.$$

Shunday qilib, berilgan kvadratik forma quyidagi normal shaklga ekvivalent ekan:

$$f(Y) = y_1^2 + \frac{3}{4}y_2^2 - \frac{1}{4}y_3^2.$$

Haqiqiy kvadratik formalarning inersiya qonuni

Haqiqiy sonlar maydoni $\mathbb{R}$ ustida aniqlangan $f(X) = X^T AX$ kvadratik formalarni qaraymiz. Bu yerda $A = (a_{ij})$ haqiqiy matritsa, $X^T = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. O‘tgan mavzularda bu kvadratik formani biror $X = BY$ $\left(B = \left(b_{ij}\right),\ Y^T = (y_1, y_2, \cdots, y_n)\right)$ chiziqli almashtirish yordamida quyidagi kanonik shaklga keltirish m umkinligini ko‘rsatdik:

$$f(Y) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2, \qquad (1)$$

bu yerda $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ lar umuman olganda har xil ishorali haqiqiy sonlardan iborat. Ularning orasida nolga teng bo‘lganlari ham bo‘lishi mumkin. (1) dagi noldan farqli λ_i koeffitsiyentlar soni kvadratik formaning rangiga $(rankA = k)$ teng.

$f(Y)$ kvadratik formaga shunday chiziqli almashtirishni qo‘llaymizki, uning (1) ko‘rinishdagi kanonik shaklida dastlabki $p-$ ta qo‘shiluvchilar musbat koeffitsiyentli, keyingi $k - p$ – ta qo‘shiluvchilar manfiy koeffitsiyentli bo‘lsin. Bunga o‘zgaruvchilarning tartibini almashtirish bilan erishish mumkin. Bu holda (1) kanonik shaklda $k -$ ta noldan farqli qo‘shiluvchilar bo‘ladi ($\lambda_i \neq 0, i = 1,2, \dots, k$).

Agar (1) kvadratik formaga

$$y_i = \begin{cases} \frac{z_i}{\sqrt{|\lambda_i|}}, & i \leq k \\ z_i, & i > k \end{cases}$$

chiziqli almashtirishni qo‘llasak, u holda berilgan kvadratik formaning normal formasini hosil qilamiz:

$$f(Z) = z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_p^2 - z_{p+1}^2 - z_{p+2}^2 - \cdots - z_k^2\ . \qquad (2)$$

(2) dagi musbat kvadratlar soni p ga kvadratik formaning musbat indeksi, manfiy kvadratlar soni $k - p$ ga uning manfiy indeksi, musbat va manfiy indekslar ayirmasiga esa kvadratik formaning signaturasi deyiladi.

Kvadartik formaning bu to‘rtta parametri rangi, musbat indeksi, manfiy indeksi va signaturasidan ixtiyoriy ikkitasi ma’lum bo‘lsa, qolganlarini ham hisoblash mumkin bo‘ladi.

Masalan, $rankA = k,\ p -$ musbat indeks bo‘lsa, manfiy indeks $(k-p)$ ga, signatura $\sigma = p-(k-p) = 2p-k$ ga teng.

Teorema (kvadratik formalarning inersiya qonuni). Haqiqiy kvadratik formaning rangi, musbat indeksi, manfiy indeksi va signaturasi kvadratik formani kanonik shaklga olib keladigan chiziqli almashtirishga bog‘liq emas.

Isbot.

$$f(X) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + a_{nn}x_n^2$$

kvadratik forma ikkita har xil $X = BY,\ \ X = CZ$ chiziqli almashtirishlar bilan kanonik shakllarga keltirilgan bo‘lsin,

$$f(Y) = \alpha_1 y_1^2 + \cdots + \alpha_p y_p^2 - \alpha_{p+1}y_{p+1} - \cdots - \alpha_{p+q}y_{p+q}, \quad (3)$$

$$f(Z) = \beta_1 z_1^2 + \cdots + \beta_s z_s^2 - \beta_{s+1}z_{s+1}^2 - \cdots - \beta_{s+t}z_{s+t}^2. \quad (4)$$

Barcha α_i va β_j larni musbat deb hisoblaymiz. $X = BY,\ \ X = CZ$ chiziqli almashtirishlarni vektorlarning koordinatalari orqali quyidagi shaklda yozib olamiz:

$$\begin{cases} x_1 & = & b_{11}y_1 + \cdots + b_{1n}y_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n & = & b_{n1}y_1 + \cdots + b_{nn}y_n \end{cases};\Rightarrow \quad \begin{cases} y_1 & = & f_{11}x_1 + \cdots + f_{1n}x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ y_n & = & f_{n1}x_1 + \cdots + f_{nn}x_n \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} x_1 & = & c_{11}z_1 + \cdots + c_{1n}z_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n & = & c_{n1}z_1 + \cdots + c_{nn}z_n \end{cases};\Rightarrow \quad \begin{cases} z_1 & = & g_{11}x_1 + \cdots + g_{1n}x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ z_n & = & g_{n1}x_1 + \cdots + g_{nn}x_n \end{cases} \quad (6)$$

Faraz qilaylik, ikkita (3) va (4) kanonik shakldagi musbat kvadratlari soni bir xil bo‘lmasin, aniqlik uchun $p < s$ deb olamiz. (5) va (6) sistemalarda o‘zgaruvchilarga

$$y_1 = 0, \dots, y_p = 0,\ z_{s+1} = 0, \dots, z_n = 0 \quad (7)$$

qiymatlar beramiz. Barcha y_i va z_j lar $x_1, x_2, \dots, x_n$ larning chiziqli kombinatsiyalari bo‘lganligi uchun (7) tengliklar $x_1, x_2, \dots, x_n$ noma’lumlarga nisbatan chiziqli bir jinsli tenglamalar sistemasidan iborat. Bu sistemada noma’lumlar soni n ga, tenglamalar soni esa $p+n-s < n$ bo‘ladi ($p < s$ bo‘lganligi uchun). Demak, (7) sistema nolmas yechimlarga ega. Aytaylik, $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$ – ana shu nolmas yechimlardan biri bo‘lsin. Bu yechimda (5) va (6) sistemalardagi $y_1, y_2, \dots y_n$ ning qiymatlarini $y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0$ bilan, $z_1, z_2, \dots z_n$ larning qiymatlarini $z_1^0, z_2^0, \dots, z_n^0$ bilan belgilaymiz.

(7) sistemadan, $y_1^0 = 0, y_2^0 = 0, \dots, y_p^0 = 0$ ni hosil qilamiz. , $z_1, z_2, \dots z_n$ larning hammasi ham nolga teng emas, aks holda, $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$ larning barchasi nol bo‘lar edi. Lekin, yana (7) sistemadan $z_{s+1}^0 = 0,\ z_{s+2}^0 = 0, \dots, z_n^0 = 0$ larni hosil qilamiz. Shuning uchun, $z_1^0, z_2^0, \dots, z_s^0$ sonlar orasida nol bo‘lmaganlari ham mavjud. Endi (3) tenglikdan

$$f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) = -\alpha_{p+1}\left(y_{p+1}^0\right)^2 - \dots - \alpha_{p+q}(y_{p+q}^0)^2 \quad \leq 0 \qquad (8)$$

ni hosil qilamiz. (4) tenglikdan esa

$$f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) = \beta_1(z_1^0)^2 + \dots + \beta_s(z_s^0)^2 > 0 \qquad (9)$$

ni hosil qilamiz. Oxirgi tengsizlik haqiqatdan qat'iy tengsizlikdan iborat, chunki $z_1^0, z_2^0, \dots, z_s^0$ lar orasida noldan farqlilari ham bor! (8) va (9) munosabatlar esa ziddiyatdan iborat.

Shuning uchun, ikkita (3) va (4) kanonik shakllardagi musbat kvadratlari soni bir xil bo'lmasin degan farazimiz noto'g'ri ekan.

(3) va (4) kanonik shakllardagi manfiy kvadratlar soni teng ekanligini ko'rsatish uchun bu kanonik shakllarni (-1) ga ko'paytirilib, hosil bo'lgan kanonik shakllardagi musbat kvadratlar soni tengligi ko'rsatiladi.

Chiziqli almashtirish natijasida kvadratik formaning musbat va manfiy indekslari o'zgarmas ekan, ularning yig'indisi (kvadratik formaning rangi) va ularning ayirmasi (kvadratik formaning signaturasi) ham o'zgarmaydi.

Teorema to'liq isbot bo'ldi.

MUSBAT ANIQLANGAN KVADRATIK FORMALAR

1-ta'rif. Kvadratik forma musbat aniqlangan deyiladi, agar bu kvadratik forma o'zgaruvchilarining bir vaqtda nol bo'lmagan ixtiyoriy qiymatlarida faqat musbat qiymatlarni qabul qilsa.

Masalan, $f(X) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$ kvadratik forma musbat aniqlangan, chunki birortasi noldan farqli bo'lgan x_i larning ixtiyoriy qiymatlarida bu kvadratik forma faqat musbat bo'ladi.

2-ta'rif. Agar kvadratik forma o'zgaruvchilarning noldan farqli qiymatlarida faqat manfiy qiymatlar qabul qilsa, bunday formaga manfiy aniqlangan kvadratik forma deyiladi.

3-ta'rif. Kvadratik forma musbat yarim aniqlangan deyiladi, agar u o'zgaruvchilarning ixtiyoriy qiymatlarida manfiy qiymatlar qabul qilmasa.

4-ta'rif. Kvadratik forma manfiy yarim aniqlangan deyiladi, agar u o'zgaruvchilarning ixtiyoriy qiymatlarida musbat qiymatlar qabul qilmasa.

Ham musbat, ham manfiy qiymatlar qabul qiladigan kvadratik forma aniqlanmagan deyiladi.

1-teorema. Agar kvadratik formadagi o'zgaruvchilari soni uning rangiga teng bo'lsa, bunday kvadratik forma musbat aniqlangan bo'lishi uchun uning kanonik shakldagi barcha kvadratlarning koeffitsiyentlari musbat bo'lishi zarur va yetarlidir.

Teoremaning isboti ko'rinib turganligi uchun mustaqil ishdan iborat.

2-teorema. (Silvestr alomati). Haqiqiy sonlar maydoni $\mathbb{R}$ ustida aniqlangan $f(X) = X^T AX$ kvadratik forma musbat aniqlangan bo‘lishi uchun uning $A = (a_{ij})$ matritsasining barcha burchak bosh minorlari musbat bo‘lishi, ya’ni,

$$\Delta_1 = M_1^1 = a_{11} > 0,$$

$$\Delta_2 = M_{12}^{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \cdots, \Delta_k = M_{12\ldots k}^{12\ldots k}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} > 0, \cdots \Delta_n = detA > 0$$

bo‘lishi zarur va yetarlidir.

Isbot. Zarurligi. $f(X) = X^T AX$ kvadratik forma musbat aniqlangan bo‘lsin. U holda shunday xosmas yuqori uchburchak shakldagi matritsali $X = BY$ chiziqli almashtirish mavjudki, berilgan kvadratik forma bu almashtirish bilan

$$f(Y) = \alpha_1 y_1^2 + \alpha_2 y_2^2 + \cdots + \alpha_n y_n^2$$

kanonik shaklga keltiriladi va bu shakldagi barcha $\alpha_i > 0$ bo‘ladi. Bu holda

$$B^T AB = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

matritsaning barcha burchak bosh minorlari musbat bo‘ladi. $B^T AB$ va A matritsalar kongruent bo‘lganligi uchun ularning bosh minorlari teng bo‘ladi. Bu yerdan A matritsaning ham bosh minorlari musbatligi kelib chiqadi.

Yetarliligi. Endi A matritsaning barcha bosh minorlari musbat bo‘lsin. $f(X) = X^T AX$ kvadratik formani Yakobi usuli bilan kanonik shaklga keltiramiz:

$$f(Y) = \frac{\Delta_1}{\Delta_0} y_1^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_1} y_2^2 + \cdots + \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} y_n^2, \ \ \Delta_0 = 1.$$

Barcha bosh minorlar musbatligidan kvadratik formaning kanonik shakldagi barcha koeffitsiyentlarni musbat ekanligi, ya’ni, 1-teoremaga asosan kvadratik formaning musbat aniq forma ekanligi kelib chiqadi.

Teorema to‘liq isbot bo‘ldi.

4-maruza

Chiziqli almashtirishlar va ularning matritsalarini graflar nazariyasi va information texnologiyalar sohasida qo‘llanilishi. Zamonaviy algebraning dolzarb masalalarini yechishda chiziqli algebra elementlari va usullaridan foydalanish.

Chiziqli algebra matematikaning muhim tarmoqlaridan biri bo‘lib, uning elementlari va usullari zamonaviy algebra, graflar nazariyasi hamda axborot texnologiyalarida keng qo‘llaniladi. Ushbu ma’ruza matnida chiziqli almashtirishlar va ularning matritsalari, graflar nazariyasi hamda zamonaviy algebradagi dolzarb masalalarni yechishda chiziqli algebra elementlarining qo‘llanilishi yoritiladi.

Chiziqli algebra graflar nazariyasida

1. Graflarning matritsali ifodasi

Graflar nazariyasi tarmoqlanish jarayonlarini ifodalash va analiz qilish uchun qo‘llaniladi. Har qanday yo‘nalgan yoki yo‘nalmagan graf qo‘shnichilik matritsasi yoki hodisalar matritsasi orqali tasvirlanishi mumkin.

1. **Qo‘shnichilik matritsasi**: Berilgan \$G = (V, E)\$ graf uchun \$A\$ qo‘shnichilik matritsasi quyidagicha beriladi:
2. **Hodisalar matritsasi**: U tugunlarning qirralar bilan bog‘liqligini ifodalaydi.

2. Chiziqli algebra elementlaridan foydalanish

2.1. O‘rin almashish matritsalari

O‘rin almashish matritsalari grafik tasvirlar transformatsiyasida va kodlash usullarida ishlatiladi. Masalan, AES shifrlash algoritmida Galois maydoni ustida matritsali o‘rin almashish operatsiyalari qo‘llaniladi.

2.2. Egrilik va xos qiymatlar

Differensial geometriyada egrilikni ifodalash uchun **xos** qiymatlar va **xos** vektorlar ishlatiladi. Axborot texnologiyalarida esa siqish algoritmlarida (masalan, JPEG algoritmi) singular qiymat dekompozitsiyasi (SVD) asosida ma'lumotlarni siqish amalga oshiriladi.

3. Zamonaviy algebra va chiziqli algebra usullari

Zamonaviy algebrada guruhlar, halqalar va maydonlar nazariyasi asosida chiziqli algebra usullaridan foydalanish mumkin. Masalan:

- **Kriptografiyada**: RSA, ECC kabi shifrlash algoritmlarida matritsali va chiziqli algebraik amallar qo'llaniladi.
- **Kodlash nazariyasida**: Hamming kodlari, BCH kodlari matritsalar yordamida ifodalanadi.

4. Xulosa

Chiziqli almashtirishlar va ularning matritsalari ko'plab amaliy sohalarda, jumladan, graflar nazariyasi va axborot texnologiyalarida muhim ahamiyatga ega. Ushbu nazariyalarning qo'llanilishi zamonaviy algebradagi dolzarb masalalarni yechishda muhim o'rin tutadi.

5. Foydalanilgan adabiyotlar

1. Strang, G. (2005). *Linear Algebra and Its Applications*.
2. Bondy, J. A., & Murty, U. S. R. (2008). *Graph Theory*.
3. Axler, S. (2015). *Linear Algebra Done Right*.
4. Gilbert, J. R., & Moler, C. (2017). *Mathematics of Machine Learning*.

AMALIY MASHG'ULOTLAR

MATRITSALAR ALGEBRASI

1-m i s o l. Matritsalarning chiziqli kombinasiyasi topilsin:

$$2\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2\cdot 2-5-5\cdot 1 & 2\cdot 7-4-5\cdot 0 \\ 2\cdot(-1)-2(-2)-5\cdot 0 & 2\cdot 3-1-5\cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 10 \\ 0 & -35 \end{pmatrix} \blacksquare.$$

2-m i s o l. Matritsalarning ko'paytmasi topilsin:

$$A=\begin{pmatrix}5 & 8 & -4\\ 6 & 9 & -5\\ 4 & 7 & -3\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}3 & 2 & 5\\ 4 & -1 & 3\\ 9 & 6 & 5\end{pmatrix}.$$

Yechish. Matritsalarni ko'paytmasi formulasiga asosan quyidagi tenglik kelib chiqadi:

$$AB=\begin{pmatrix}5\cdot3+8\cdot4+(-4)\cdot9 & 5\cdot2+8\cdot(-1)+(-4)\cdot6 & 5\cdot5+8\cdot3+(-4)\cdot5\\ 6\cdot3+9\cdot4+(-5)\cdot9 & 6\cdot2+9\cdot(-1)+(-5)\cdot6 & 6\cdot5+9\cdot3+(-5)\cdot5\\ 4\cdot3+7\cdot4+(-3)\cdot9 & 4\cdot2+7\cdot(-1)+(-3)\cdot6 & 4\cdot5+7\cdot3+(-3)\cdot5\end{pmatrix}=$$

■

$$=\begin{pmatrix}11 & -22 & 29\\ 9 & -27 & 32\\ 13 & -17 & 26\end{pmatrix}.$$

3-m i s o l. Quyidagi matritsa bilan o'rin almashinuvchi hamma matritsalar topilsin.

$$A=\begin{pmatrix}7 & -3\\ 5 & -2\end{pmatrix}.$$

Yechish. Shunday X matritsa topishimiz $AX=XA$ bo'lsin. $X=\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}$ deb belgilaymiz. U holda

$$\begin{pmatrix}7 & -3\\ 5 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7 & -3\\ 5 & -2\end{pmatrix}.$$

Bundan

$$\begin{pmatrix}7x_1-3x_3 & 7x_2-3x_4\\ 5x_1-2x_3 & 5x_2-2x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7x_1+5x_2 & -3x_1-2x_2\\ 7x_3+5x_4 & -3x_3-2x_4\end{pmatrix}.$$

Shunday qilib,

$$\begin{cases}7x_1-3x_3=7x_1+5x_2\\ 7x_2-3x_4=-3x_1-2x_2\\ 5x_1-2x_3=7x_3+5x_4\\ 5x_2-2x_4=-3x_3-2x_4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}5x_2+3x_3=0\\ 3x_1+9x_2-3x_4=0\\ 5x_1-9x_2-5x_4=0\\ 5x_2+3x_3=0\end{cases}$$

Bu sistemani yechib quyidagi tengliklarni hosil qilamiz:
$x_1=\alpha;\ x_2=3\beta;\ x_3=-5\beta;\ x_4=\alpha+9\beta$, bu yerda α va β -ixtiyoriy sonlar.
Izlanayotgan matritsa quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$\begin{pmatrix}\alpha & 3\beta\\ -5\beta & \alpha+9\beta\end{pmatrix},\ \alpha,\beta\in\boldsymbol{C}.$$ ■

4-m i s o l. $f(A)$ ni hisoblang, agar:

$$f(x)=x^2-2x+1,\ A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Yechish. Matritsaviy ko'phad ta'rifiga asosan quyidagi tenglikka ega bo'lamiz:

$$f(A)=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}^2-2\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

2-§. Teskari matritsa

1-m i s o l. Berilgan matritsa uchun teskari matritsa topilsin

$$A=\begin{pmatrix}3&-4&5\\2&-3&1\\3&-5&-1\end{pmatrix}.$$

Yechish. $\det A=-1$ bo'lganligi uchun teskari matritsa A^{-1} mavjud. Matritsa elementlarining algebraik to'ldiruvchilarini topamiz:

A_{11}=8, A_{21}=-29, A_{31}=11,
A_{12}=5, A_{22}=-18, A_{32}=7,
A_{13}=-1, A_{33}=3, A_{33}=-1.

Teskari matritsani topish formulasiga asosan bu algebraik to'ldiruvchilarni (-1) ga bo'lib, teskari matritsani hosil qilamiz:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-8&29&-11\\-5&18&-7\\1&-3&1\end{pmatrix}.■$$

2-m i s o l. Satrlarning elementar almashtirishlari yordamida teskari matritsa A^{-1} ni toping

$$A=\begin{pmatrix}3&-4&5\\2&-3&1\\3&-5&-1\end{pmatrix}.$$

Yechish. Quyidagilarni hosil qilamiz:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}3&-4&5&1&0&0\\2&-3&1&0&1&0\\3&-5&-1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{R_1-R_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&4&1&-1&0\\2&-3&1&0&1&0\\3&-5&-1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{R_2-2R_1}$$

$$\xrightarrow{R_2-2R_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&4&1&-1&0\\0&-1&-7&-2&3&0\\3&-5&-1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{R_3-3R_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&4&1&-1&0\\0&-1&-7&-2&3&0\\0&-2&-13&-3&3&1\end{array}\right)\xrightarrow{R_3-2R_2}$$

$$\xrightarrow{R_3-2R_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & 4 & 1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & -7 & -2 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{R_1-4R_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & 0 & 3 & 11 & -4\\ 0 & -1 & -7 & -2 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{R_2+7R_1}$$

$$\xrightarrow{R_2+7R_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & 0 & -3 & 11 & -4\\ 0 & -1 & 0 & 5 & -18 & 7\\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{R_1-R_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -8 & 29 & -11\\ 0 & -1 & 0 & 5 & -18 & 7\\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{(-1)R_2}$$

$$\xrightarrow{(-1)R_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -8 & 29 & -11\\ 0 & 1 & 0 & -5 & 18 & -7\\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 1\end{array}\right).$$

Bunda R_i matritsaning i-satri.

Shunday qilib, teskari matritsa quyidagi ko'riniga ega bo'ladi:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-8 & 29 & -11\\ -5 & 18 & -7\\ 1 & -3 & 1\end{pmatrix}.\blacksquare$$

3-m i s o l. Quyidagi tenglamalardan X matritsani toping:

$$\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}-4 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Yechish. $\det A=-1\neq 0$ va $\det B=-4\neq 0$ bo'lgani uchun A^{-1} va B^{-1} teskari matritsalar mavjud. Tenglamaning chap va o'ng tomonlarini chapdan A^{-1} ga, o'ngdan B^{-1} ga ko'paytirsak, quyidagi tenglikka ega bo'lamiz:

$$A^{-1}(AXB)B^{-1}=A^{-1}CB^{-1}.$$

$$A^{-1}(AXB)=(A^{-1}A)X(BB^{-1}).$$

$A^{-1}A=E, BB^{-1}=E$ va $EXE=X$ bo'lganligi uchun $X=A^{-1}CB^{-1}$ kelib chiqadi.

Bu tenglikka asosan X matritsani hisoblaymiz:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad B^{-1}=\begin{pmatrix}-0{,}25 & 0\\ 0{,}5 & 1\end{pmatrix},$$

$$X=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-0{,}25 & 0\\ 0{,}5 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-0{,}5 & 1\\ 0{,}5 & 1\end{pmatrix}.\ \blacksquare$$

4-m i s o l. Har qanday qanday elementar almashtirishlar xosmas matritsalarning ko'paytmasidan iborat ekanligini isbotlang.

Yechish. A matritsa satrlarining har qanday elementar almashtirishlari A matritsani chapdan elementar matritsaga ko'paytirishdan iborat bo'lib, bu elementar matritsani birlik matritsadan o'shanday elementar almashtirish yordamida hosil qilish mumkin. Xosmas matritsani elementar almashtirishlar yordamida birlk matritsaga keltirish mumkin. Shuning

uchun quyidagiga ega $S_k\cdots S_1A=E,$

bo'lamiz:

bundan esa $S_k \cdots S_1 = A^{-1}$, $A = S_1^{-1} \cdots S_k^{-1}$. $S_1^{-1},...,S_k^{-1}$ matritsalar hamda $S_1,..., S_k$ matritsalar ham elementar matritsalardir, ularni birlik matritsadan satrlarning «teskari» elementar almashtirishi yordamida hosil qilish mumkin. ■

5-m i s o l. Berilgan matritsani elementar matritsalarning ko'paytmasiga yoying: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Yechish. To'rtinchi misolning yechimiga asosan bunda $A = S_1^{-1} \cdots S_k^{-1}$ matritsalar A matritsa satrlarining elementar almashtirishlariga mos keladiki, uni birlik matritsaga keltiradi. $S_1,...,S_k$ matritsalarni tanlab keyin $S_1^{-1},...,S_k^{-1}$ larni topamiz. Bu jarayonni bitta qadamga kamaytirish mumkinligini ko'rsatamiz. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ matritsani soddalashtiramiz. Matritsaning ikkinchi satrini $\left(-\frac{1}{2}\right)$ ga ko'paytirish A ni chap tomondan $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ matritsaga ko'paytirish bilan teng kuchlidir. Quyidagi tenglik hosil bo'ladi:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = B \qquad (*)$$

B matritsa elementar matritsadir. Hisoblaymiz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = S.$$

(*) tenglikning har ikkala tomonini chapdan *S* ga ko'paytirsak, izlanayotgan yoyilma kelib chiqadi:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = SB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. ■$$

6-m i s o l. *A* va *B* matritsalar satrlarining elementar almashtirishlari yordamida $A^{-1}B$ ko'paytmani hosil qilish usulini keltiring.

Yechish. A va *B* matritsalarni ketma-ket yozamiz. (*AB*) matritsaning satrlari bilan elementar almashtirishlarni bajaramiz. Bu almashtirishlar *A* matritsani *E* matritsaga keltirsin. U holda bu almashtirishlar natijasida *A* matritsa joyida *E* matritsa, *B* matritsa joyida A^{-1} matritsa hosil bo'ladi.

Haqiqatdan ham, $S_1 \cdots S_k A = E$ bo'lgani uchun $S_1 \cdots S_k = A^{-1}$ bo'ladi. U holda $S_1 \cdots S_k B = A^{-1}B$ (4 misolga qarang).■

3-§. Matritsalar bilan boshqa amallar. Maxsus ko'rinishdagi matritsalar

1-m i s o l. *A* diagonal matritsa bo'lib, uning hamma diaganal elementlari har xil bo'lsin va $AB=BA$. U holda B matritsa ham diaganal ekanligini isbotlang.

Yechish. Bu tasdiqning to'g'riligini ikkinchi tartibli matritsa uchun isbotlaymiz.

$A=\begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$, $d_1 \neq d_2$, $B=\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ bo'lsin. U holda

$$AB=\begin{pmatrix} d_1x & d_1y \\ d_2z & d_2t \end{pmatrix},\ BA=\begin{pmatrix} d_1x & d_2y \\ d_1z & d_2t \end{pmatrix}.$$

$AB=BA$ bo'lganligi uchun $d_1y=d_2y$ va $d_2z=d_1z$ bo'ladi. bundan esa $(d_1-d_2)y=0,(d_2-d_1)z=0$, ya'ni $y=0,\ z=0$ bo'ladi, chunki $d_1-d_2\neq 0$.

Xuddi shunday bu tasdiqni n-chi tartibli matritsalar uchun isbotlash mumkin. ■

2-m i s o l. Har qanday n chi tartibli maxsusmas matritsa bilan o'rin almashinuvchi matritsalarni toping.

Yechish. Dioganal matritsa *diag(1, 2, ..., n)* maxsusmasdir. Bu matritsadan foydalanib birinchi misolni qo'llasak, A matritsaning dioganalligi kelib chiqadi. endi faqat A matritsaning hamma dioganal elementlari teng ekanligini isbotlash qoladi. Agar A matritsa ikkinchi tartibli bo'lsa, $A=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, uni chapdan va o'ngdan $S=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ matritsaga ko'paytiramiz. AS va SA matritsalarni tenglashtirib $\lambda_1=\lambda_2$ tenglikni hosil qilamiz. Xuddi shunday ixtiyoriy tartibli A dioganal matritsa uchun S ni tanlab A matritsaning har qanday ikkita dioganal elementlarining tengligini tekshiramiz. ■

3-m i s o l. $A=\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$ matritsa ermit matritsasidir, chunki

$$A^H=\overline{A}^T=\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}. ■$$

4-m i s o l. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ matritsa o'rinalmashtirishmatritsasidir, chunki bu matritsa birlik matritsadan 1-,2- chi va 3-, 4- chi satrlarning o'rinlarini almashtirishdan hosil bo'ladi. ■

5-m i s o l. $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$ matritsa unitar matritsadir, chunki

$$A^{-1}=A^H=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}. ■$$

6-m i s o l. Agar A matritsa yuqori uchburchakli bo'lsa va uning hamma dioganal elamentlari noldan farqli bo'lsa, A^{-1} matritsa mavjudligini va yuqori uchburchakli matritsa ekanligini isbotlang.

Yechish. Teskari matritsani $(A|E)$ matritsadan satrlarning elementar almashtirishlari yordamida izlaymiz. soddalashtirish prosessini oxirgi satrdan boshlaymiz. bunda A va E matritsalarning bosh dioganaldan pastda joylashgan elementlari o'zgarmaydi. natijada birlik matritsadan yuqori uchburchakli matritsa hosil bo'ladi. ■

7-m i s o l. $A=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$ matritsa ortogonal matritsadir, chunki $A^T=\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}=A^{-1}$. ■

8-m i s o l. $\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ matritsa nilpotentdir va uning nilpotentlik ko'rsatkichi 2 ga teng, chunki bu matritsaning kvadrati nol matritsadir. ■

9-m i s o l. $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ matritsa davriy matritsadir va uning davri 2 ga teng, chunki uning kvadrati birlik matritsaga tengdir.

10-m i s o l. $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ matritsa stoxastik matritsadir. ■

11-m i s o l. Œrinalmashtirish matritsasi davriy matritsa ekanligini isbotlang.

Yechish. Faraz qilaylik, A - o'rin almashtirish matritsasi bo'lsin. Mumkin bo'lgan barcha A^k matritsalarni qaraymiz. Tekshirish mumkinki, o'rinalmashtirishlar matritsalarning ko'paytmasi yana o'rin almashtirish matritsasi bo'ladi. Har xil o'rinalmashtirishlar matritsalarning bir xil tartibga ega bo'lgan matritsalari soni cheklidir. Shuning uchun shunday p, q natural sonlar mavjudki, $q>p$ va $A^q=A^p$ bo'ladi. Bundan esa $A^{q-p}=E$ kelib chiqadi. ■

12-m i s o l. Berilgan A va B matritsalarni bloklarga ajratib AB ko'paytmani toping.

$$A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Yechish. Berilgan A va B matritslarani bloklarga quyidagicha ajratamiz. Bu matritsalarni blokli matritsalarni ko'paytirish qoidasiga asosan ko'paytirsak:

$$A=\left(\begin{array}{cc|cc}0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ \hline 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{array}\right),\quad B=\left(\begin{array}{cc|cc}0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ \hline 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\end{array}\right).$$

quyidagi matritsa hosil bo'ladi $AB = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$. ■

13-m i s o l. Agar $N = \begin{pmatrix} E & A \\ 0 & E \end{pmatrix}$ blokli matritsa bo'lsa, $(N^{\square})^{-1}$ matritsa topilsin.

Yechish. $\det H = E \neq 0$ bo'lganligi uchun teskari matritsa mavjud. algebraik to'ldiruvchilarni hisoblamaymiz.

$$A_{11} = E, A_{12} = 0, A_{21} = -A, A_{22} = E.$$

bundan esa $(N^{\square})^{-1} = \begin{pmatrix} E & -A \\ 0 & E \end{pmatrix}$ kelib chiqadi. ■

14-m i s o l. A va B matritsalarning kroneker ko'paytmasini hisoblang.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Yechish. Kroneker ko'paytmasining ta'rifiga asosan quyidagiga ega bo'lamiz:

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} 3\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & 5\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \\ 5\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & 9\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 5 & 10 \\ 9 & 12 & 15 & 20 \\ 5 & 10 & 9 & 18 \\ 15 & 20 & 27 & 36 \end{pmatrix}. ■$$

Chiziqli fazolarga doir misollar

1-misol. Haqiqiy sonlar maydoni ustidagi arifmetik n-o'lchamli chiziqli fazo R_n ning elementlari haqiqiy sonlardan iborat bo'lgan *n*-o'lchamli ustun vektorlardan tashkil topgan bo'lib, unda vektorlar yig'indisi va songa ko'paytirish amallari komponentlar bo’yicha amalga oshiriladi.

2-misol. Kompleks sonlar maydoni ustidagi arifmetik n-o’lchamli chiziqli fazo C_n (kompleks arifmetik fazo)ning elementlari kompleks sonlardan iborat bo’lgan n o’lchamli ustun vektorlar bo’lib, amallar xuddi 1-misoldagidek aniqlanadi.

3-misol. R maydon ustidagi $m \times n$ o’lchamli matritsalar chiziqli fazoni tashkil etadi. Yig’indi va songa ko’paytirish amallari oddiy yo’l bilan aniqlanadi.

4-misol. Darajasi n dan oshmaydigan haqiqiy koeffisientli bitta o’zgaruvchi t dan bog’liq barcha ko’phadlar to’plami P_n ko’phadlarning yig’indisi va songa ko’paytirish amallariga nisbatan chiziqli fazoni tashkil etadi.

5-misol. $[a, b]$ kesmada aniqlangan barcha uzluksiz haqiqiy funksiyalar to’plami $C_{[a,b]}$ funksiyalarning yig’indisi va songa ko’paytmasi amallariga nisbatan chiziqli fazoni tashkil etadi.

6-misol. Faqat nol elementdan iborat to’plamda amallar 0+0=0, $\alpha 0 = 0$ tarzda kiritilsa, chiziqli fazo bo’ladi. Bu fazo nol fazo deyiladi.

7**-misol**. Haqiqiy sonlar ketma-ketliklari to’plami S da yig’indi va songa ko’paytirish amallarini komponentalar bo’yicha kiritilsa, chiziqli fazo bo’ladi.

Mashqlar

1. Quyidagi sonlar to’plami oddiy yig’indi va ko’paytirish amallariga nisbatan chiziqli fazo bo’ladimi?

   a) N; b) Z; c) Q; d) R; e)$R^{>0}$: (barcha musbat sonlar to’plami

2. Quyidagi geometrik vektorlar to’plami vektorlarning yig’indisi va songa ko’paytmasi amallariga nisbatan chiziqli fazoni tashkil etadimi?

a) berilgan to’g’ri chiziqqa parallel bo’lgan barcha vektorlar to’plami;

b) berilgan tekislikka parallel bo’lgan barcha vektorlar to’plami;

c) berilgan to’g’ri chiziqqa parallel bo’lmagan barcha vektorlar to’plami;

d) oxiri berilgan to’g’ri chiziqda yotgan barcha vektorlar to’plami;

e) oxiri birinchi chorakda yotuvchi barcha vektorlar to’plami;

f) oxiri birinchi va uchinchi chorakda yotuvchi barcha vektorlar to’plami;

g) nolmas a vektori bilan φ burchak ($0 \leq \varphi \leq \pi$) hosil qiluvchi barcha vektorlar to’plami.

3. Musbat haqiqiy sonlar to'plami $R^{>0}$ ga amallarni quyidagicha kiritamiz:

a) «yig'indi » $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{ab}$ (ya'ni $\boldsymbol{a}$ va$\boldsymbol{b}$ sonlarning oddiy ko'paytmasi)

в) «haqiqiy songa ko'paytirish» $\alpha \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}^{\alpha}$ (y a'ni $\boldsymbol{a}$ sonini α darajaga ko'tarish).

$\boldsymbol{R}^{>0}$ to'plam bu amallarga nisbatan chiziqli bo'lishini ko'rsating.

4. Haqiqiy sonlar maydoni $\boldsymbol{R}$ ustida quyidagi matritsalar to'plami matritsalarni qo'shish va $\boldsymbol{R}$ maydon elementiga ko'paytirish amallariga nisbatan chiziqli fazo tashkil etadimi?

a) barcha matritsalar to'plami;

b) $\left\{\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} \middle| \alpha, \beta, \gamma \in \boldsymbol{R}\right\}$; c) $\left\{\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} \middle| \alpha, \beta, \gamma \in \boldsymbol{R}\right\}$; d) $\left\{\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \middle| \alpha, \beta \in \boldsymbol{R}\right\}$.

5. Quyidagi to'plamlar haqiqiy chiziqli fazo bo'ladimi?

a) darajasi n ga teng bo'lgan barcha ko'phadlar to'plami;

b) quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi barcha $f(t)$ ko'phadlar to'plami,

1) $f(0)=1$; 2) $f(1)=0$; 3) $2f(0)$-$3 f(1)=0$; 4) $f(1)+ f(2)+ \ldots + f(k)=0$;

c) $[a,b]$ kesmada uzilishga ega bo'lgan barcha funksiyalar to'plami;

d) $[a,b]$ kesmada k marta uzluksiz differensiallanuvchi funksiyalar to'plami $C_{[a,b]}^{(k)}$ $k=0,1,2,\ldots$

e) $[a,b]$ kesmada integrallanuvchi barcha funksiyalar to'plami;

f) $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + b$ ko'rinishdagi $\boldsymbol{n}$ o'zgaruvchiga bo'g'liq barcha funksiyalar to'plami, bunda $a_1, a_2, \ldots, a_n$ - haqiqiy qiymatlarni qabul qiladi.

6. Uzunligi n ga teng bo'lgan q elementli maydon ustidagi satrlar to'plamidan iborat chiziqli fazo nechta vektordan tuzilgan ?

7*. Shunday M to'plamiga misol keltiringki, unda chiziqli fazoning istalgan $\boldsymbol{a} \in M$ uchun $1 \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$ aksiomadan bo'lak qolgan barcha aksiomalari bajarilsin. Chiziqli fazoning ta'rifida bu aksiomaning roli nimadan iborat?

8* Chiziqli fazoda yig'indining kommutativlik xossasi boshqa aksiomalardan kelib chiqishini isbotlang.

§2. Vektorlarning chiziqli bog'lanishi

L – P maydon ustidagi chiziqli fazo bo'lsin. L dagi ixtiyoriy chekli

$$\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,...,\boldsymbol{a}_k \qquad (1)$$

vektorlarga vektorlar tizimi deyiladi. (1) tizimdagi vektorlar har xil bo'lishi talab qilinmaydi. $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,...,\boldsymbol{a}_k$ vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi deb, $\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+...+\lambda_k\boldsymbol{a}_k$ vektorga aytiladi. Bunda $\lambda_1,\lambda_2,...\lambda_k$ lar P maydonning elementlari bo'lib, ular chiziqli kombinatsiyaning koeffisientlari deyiladi.

Agar biror $b\epsilon L$ vektor uchun shunday $\lambda_1,\lambda_2,...\lambda_k$ skalyarlar topilib

$$\boldsymbol{b}=\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+...+\lambda_k\boldsymbol{a}_k \qquad (2)$$

bo'lsa, bunday $\boldsymbol{b}$ vektor $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,...,\boldsymbol{a}_k$ lar orqali chziqli ifodalangan deyiladi.

Agar kamida biri noldan farqli bo'lgan shunday $\lambda_1,\lambda_2,...\lambda_k$ skalyarlar mavjud bo'lib,

$$\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+...+\lambda_k\boldsymbol{a}_k=\boldsymbol{0} \qquad (3)$$

tenglik bajarilsa, $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,...,\boldsymbol{a}_k$ vektorlar tizimi chiziqli bog'langan deyiladi.Aks holda, bu vektorlar tizimi chiziqli bog'lanmagan (erkli) deyiladi.

Shunday qilib, $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,...,\boldsymbol{a}_k$ vektorlar tizimining chiziqli bog'lanmaganligining ma'nosi shuki, $\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+...+\lambda_k\boldsymbol{a}_k=\boldsymbol{0}$ tenglikdan $\lambda_1=0,\lambda_2=0,\ldots,\lambda_k=0$ ekanligi kelib chiqadi.

Agar (2) tenglikda barcha λ_i lar nolga bo'lsa, u holda chiziqli kombinatsiya trivial deyiladi, agar barchasi nol bo'lmasa, notrivial deyiladi.

Chiziqli bog'langanlik va chiziqli bog'lanmaganlikni quyidagicha ta'riflash mumkin

$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,...\boldsymbol{a}_k$ vektorlar tizimining biror notrivial kombinatsiyasi nol vektorga teng bo'lsa, chiziqli bog'langan deyiladi, agar ixtiyoriy notrivial chiziqli kombinatsiyasi nol vector bo'lsa, chiziqli bog'lanmagan deyiladi.

$k > 1$ bo'lsin. $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,...\boldsymbol{a}_k$ vektorlar tizimi chiziqli bog'langan bo'lishi uchun bu vektorlardan kamida bittasi qolganlari orqali chiziqli ifodalanishi zarur va yetarli.

1-misol. Uchinchi tartibli barcha haqiqiy matritsalar fazosi $\boldsymbol{R}_{3x3}$ da quyidagi matritsalar chiziqli bog'langanligini ko'rsating.

$$A=\begin{pmatrix}2&3&-1\\5&4&-2\\0&1&-3\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}3&1&2\\-3&4&5\\7&6&0\end{pmatrix},\qquad C=\begin{pmatrix}2&-4&6\\-16&0&14\\14&10&6\end{pmatrix}$$

Yechish: Darhaqiqat 2,-2 va 1sonlar uchun

$$2\cdot\begin{pmatrix}2&3&-1\\5&4&-2\\0&1&-3\end{pmatrix}+(-2)\begin{pmatrix}3&1&2\\-3&4&5\\7&6&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&-4&6\\-16&0&14\\14&10&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

ya'ni, *2A-2B+C=0*, bundan *A, B va C* larning chiziqli bog'langanligi kelib chiqadi. ■

2-misol. *[a,b]* kesmada uzluksiz bo'lgan funksiyalar fazosi $C_{[a,b]}$ da $f_1(x)=\sin^2 x$, $f_2(x)=\cos^2 x$, $f_3(x)=1$ lar chiziqli bog'langanligini ko'rsating.

Yechish: $\forall x\epsilon[a,b]$ga $\sin^2 x+\cos^2 x-1=0$ ya'ni, $f_1(x)+f_2(x)-1=0$ Demak, $f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x)$ lar chiziqli bog'langan.■

3-misol. $C_{[a,b]}$ fazoda *n* ta $f_1(x)=1,\ f_2(x)=x,\ f_3(x)=x^2,...,\ f_n(x)=x^{n-1}$ elementlar chiziqli bog'lanmaganligini ko'rsating.

Yechish: $\lambda_1\cdot 1+\lambda_2 x+\lambda_3 x^2+...+\lambda_n x^{n-1}=0\quad \forall x\in[a,b]$ bo'lsin. Ko'phad istalgan $x\in[a,b]$ga faqat barcha λ_i lar teng bo'lganda nolga teng bo'ladi. Shunday qilib, har bir *n* uchun $C_{[a,b]}$ fazoda *n* ta $1,x,x^2,...,x^{n-1}$ chiziqli bog'lanmagan elementlar mavjud. ■

4-misol. $\boldsymbol{R}_{2x3}$ fazodagi quyidagi oltita elementlar

$$\boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{e}_3=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$
$$\boldsymbol{e}_4=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{e}_5=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{e}_6=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

chiziqli bog'lanmaganligini ko'rsating .

Yechish. $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4, \boldsymbol{e}_5, \boldsymbol{e}_6$ elementlarining chiziqli kombinatsiyasi quyidagi matrisaga teng.

$$\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2+\lambda_3\boldsymbol{e}_3+\lambda_4\boldsymbol{e}_4+\lambda_5\boldsymbol{e}_5+\lambda_6\boldsymbol{e}_6=\begin{pmatrix}\lambda_1&\lambda_2&\lambda_3\\\lambda_4&\lambda_5&\lambda_6\end{pmatrix}=\Lambda\ .$$

Λ matritsa nol matritsaga $\lambda_i=0\ \left(i=\overline{1,6}\right)$ bo'lganda teng bo'ladi. Demak, $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2,..., \boldsymbol{e}_6$ elementlar ta'rifiga ko'ra chiziqli bog'lanmagan. ■

5-misol. Agar $\boldsymbol{a}_1,...,\boldsymbol{a}_m$ vektorlar chiziqli bog'langan bo'lsa, $\boldsymbol{a}_1,...,\boldsymbol{a}_m,\boldsymbol{a}_{m+1},...,\boldsymbol{a}_n$ vektorlar tizimi ham chiziqli bog'langanligini isbotlang.

Yechish: Vektorlar tizimining chiziqli bog'langanligi ta'rifiga ko'ra, kamida biri noldan farqli $\lambda_1,...,\lambda_m$ skalyarlar topiladiki,

$$\lambda_1\boldsymbol{a}_1 + \lambda_2\boldsymbol{a}_2 + ... + \lambda_m\boldsymbol{a}_m = \boldsymbol{0}$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Demak, $\boldsymbol{a}_{m+1},..., \boldsymbol{a}_n$ ixtiyoriy vektorlar uchun

$$\lambda_1\boldsymbol{a}_1 + \lambda_2\boldsymbol{a}_2 + ... + \lambda_m\boldsymbol{a}_m + 0\cdot\boldsymbol{a}_{m+1} + ... + 0\cdot\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{0}$$

tenglik ham o'rinli bo'ladi. λ_i larning barchasi nol bo'lmaganligidan $\boldsymbol{a}_1,...,\boldsymbol{a}_m,...,\boldsymbol{a}_n$ tizim chiziqli bog'langan.■

6-misol. $\boldsymbol{R}^n$ fazodagi

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},...,\quad \boldsymbol{e}_n = \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

vektorlar tizimi chiziqli bog'lanmaganligini isbotlang.

Yechish: $\lambda_1\boldsymbol{e}_1 + ... + \lambda_n\boldsymbol{e}_n$ chiziqli kombinatsiyasi $(\lambda_1,...,\lambda_n) = \mathrm{p}$ p vektor barcha $\lambda_i = 0(i = \overline{1,n})$ bo'lgandagina nol vektorga teng bo'ladi. Demak, ta'rifga ko'ra $\boldsymbol{e}_1,...,\boldsymbol{e}_n$ vektorlar chiziqli bog'lanmagandir.■

§3. Fazoning bazisi va o'lchami.Vektorning koordinatalari.

1-misol. $\boldsymbol{R}_{2x3}$ fazoning biror bazisini toping va uni o'lchamini aniqlang.

Yechish: 2-§ dagi 4-misolda $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2,...,\boldsymbol{e}_6$ oltita elelmentlar chiziqli bog'lanmadanligi sababli 2x3 o'lchamli har bir matrisa ularning chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo'ladi. Demak, $\dim \mathrm{R}_{2x3} = 6$.

2-misol. P_n fazoda $f_1(x) = 1,\ f_2(x) = x,\ f_3(x) = x^2,...,\ f_{n+1}(x) = x^n$ ko'phadlar bazis tashkil qiladi. *dim P_n* ni toping.

Yechish: 2§ ning 3 misolida $f_i(x)$ ko'phadlarning chiziqli bog'lanmaganligi ko'rsatilgan edi. Har bir $f(x) \in \mathrm{P}_n$ ko'phadni

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n+1} a_k x^{k-1} = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \dots + a_{n+1} x^n$$

ko'rinishda ifodalash mumkin bo'lib, $1, x, x^2, \dots, x^n$ tizim P_n da bazis tashkil etadi va *dim* $P_n = n+1$. ■

3-misol. Haqiqiy koeffitsientli barcha ko'phadlar fazosida bazis yo'q, chunki istalgan n da $1, t, \dots, t^n$ ko'phadlar tizimi chiziqli bog'lanmagandir. Demak, bu fazo cheksiz o'lchamlidir.

4-misol. Barcha geometrik vektorlar to'plami V_3 da yig'indi va songa ko'paytirish amallarini odatdagi vektorlar algebrasida kiritilgandek aniqlasak, V_3 chiziqli fazo bo'ladi. Bu fazoda istalgan uchta nokomplanar vektorlar tizimi V_3 da basis tashkil etadi va *dim* $V_3 = 3$. ■

5-misol. $1, (\lambda-1), (\lambda-1)^2, \dots, (\lambda-1)^n$ ko'phadlar P_n fazoda bazis bo'lishini ko'rsating. $f(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \dots + a_n\lambda^n$ ko'phadni $1, (\lambda-1), (\lambda-1)^2, \dots, (\lambda-1)^n$ bazisdagi koordinatalarini $1, \lambda, \lambda^2, \dots, \lambda^n$ bazisdagi koordinatalari orqali ifodalang. *Yechish:* P_n fazoni $f(\lambda)$ ixtiyoriy ko'phadni λ*-1* darajalari bo'yicha Teylor qatori bo'yicha yozamiz.

$$f(\lambda) = f(1) + (\lambda-1)\frac{f'(1)}{1!} + \dots + (\lambda-1)^n \frac{f^{(n)}(1)}{n!}.$$

Shunday qilib, P_n dagi har bir $f(\lambda)$ ko'phad $1, \lambda-1, (\lambda-1)^2, \dots, (\lambda-1)^n$ orqali chiziqli ifodalanadi. $1, \lambda-1, \dots, (\lambda-1)^n$ ko'phadlar sistemasi chiziqli bog'lanmagan, chunki agar $c_0 + c_1(\lambda-1) + \dots + c_n(\lambda-1)^n = 0$ bo'lsa, qavsdagi ifodalarni Nyuton binomi bo'yicha ochsak,

$$c_n\lambda^n + \dots + \left(c_0 - c_1 + \dots + (-1)^n c_n\right) = 0$$

hosil qilamiz.

Chaq tomondagi ko'phad faqat barcha koeffitsientlar nol bo'lgandagina nolga teng. Xususiy holda $c_n=0$, bundan $\left(c_0 + c_1(\lambda-1) + \dots + c_{n-1}(\lambda-1)^{n-1}\right) = 0$. Xuddi oldindagidek qavslarni ochib $c_{n-1} = 0$ ni va h.k.ni hosil qilamiz.

Demak, $1, (\lambda-1), \dots, (\lambda-1)^n$ P_n da bazis ekan. $f(\lambda)$ ni Teyelor qatoriga $\lambda - 1$

ning darajalari bo'yicha yoyilmalaridan $f(\lambda)$ ning $1, (\lambda-1), \dots, (\lambda-1)^n$ bazisdagi $x'_0, x'_1, \dots, x'_n$ koordinatalari $1, \lambda, \dots, \lambda^n$ bazis koordinatalari orqali ifodasi hosil bo'ladi.

$$x'_0 = f(1) = x_0 + x_1 + \dots + x_n;$$

$$x'_1 = f'(1) = \qquad x_1 + \dots + nx_n;$$

………………………..

$$x'_n = \frac{f^{(n)}(1)}{n!} = \quad x_n,$$

Chunki, $x_0 = a_0,\ x_1 = a_1, \ldots, x_n = a_n \quad f(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \ldots + a_n\lambda^n$.

6-misol. Uch o'lchamli fazoning biror e_1, e_2, e_3 bazisida $\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{e}_1 + 7\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$ vektor berilgan bo'lsin.Bu vektorning

$$\boldsymbol{f}_1 = \boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2 + 5\boldsymbol{e}_3,$$
$$f_2 = 6\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3,$$
$$f_3 = 3\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$$

bazisdagi koordinatalarini toping. Bu sistemaninh matrisasini tuzib,

$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ ni hosil qilamiz. Bunga teskari matritsani topamiz.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 5 & -15 & 8 \\ -9 & 28 & -15 \end{pmatrix}.$$

Bundan

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 5 & -15 & 8 \\ -9 & 28 & -15 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 \\ -82 \\ 154 \end{pmatrix},$$

bunda x'_1, x'_2, x'_3 - $\boldsymbol{a}$ ning yangi bazisdagi koordinatalari. Bundan $x'_1 = 33,\ x'_2 = -82,\ x'_3 = 154$, y'ani $\boldsymbol{a} = 33\boldsymbol{f}_1 - 82\boldsymbol{f}_2 + 154\boldsymbol{f}_3$. ■

§1.Chiziqli operator va uning matritsasi

1-misol. L fazoni L' fazoga akslantiruvchi nol akslantirish: $O(\mathrm{a}) = \mathrm{o}\forall \mathrm{a} \in L$ chiziqli akslantirish bo'ladi. ■

2-misol. Birlik yoki ayniy akslantirish: $I: I(\mathrm{a}) = \mathrm{a}\forall \mathrm{a} \in L$ chiziqli akslantirishdir. ■

3-misol. $\phi(\mathrm{a}) = \alpha \mathrm{a}, \alpha \in R$ akslantirish chiziqli ekanligini ko'rsating.

Yechish:

$$\phi(\mathrm{a} + b) = \alpha(\mathrm{a} + b) = \alpha \mathrm{a} + \alpha b = \phi(\mathrm{a}) + \phi(b),$$

$\phi(\lambda a) = \alpha(\lambda a) = \lambda(\alpha a) = \lambda\phi(a)$.

Shunday qilib, chiziqli akslantirishning ikkita sharti ham bajarildi. Bu almashtirish o'xshash almashtirish yoki sonli almshtirish deyiladi . ■

4-misol. Chiziqli fazo L ga almashtirish φ quyidagicha aniqlansin: $a_0 \in L$ noldan farqli belgilangan vector bo'lsin. $\phi(a) = a + a_0$ deb olamiz. Almashtirish φ chiziqli bo'ladimi?

Yechish: $\phi(a+b) = a + b + a_0$, $\phi(a) + \phi(b) = a + a_0 + b + a_0$ dan $a + b + a_0 = a + a_0 + b + a_0$ dan $a_0 = 0$ ekanligi kelib chiqadi, bu bo'lsa shartga zid. Demak, almashtirish φ chiziqli emas. ■

5-misol. Almashtirish φ geometrik vektorlar chiziqli fazosining har bir vektoriga uning Ox o'qidagi tashkil etuvchisini mos qo'ysin. Bu almashtirish chiziqlimi?

Yechish: $a = x_1 i + y_1 j + z_1 k$ va $b = x_2 i + y_2 j + z_2 k$ ixtiyoriy vektorlar $\alpha \in R$ bo'lsin.

$a + b = (x_1 + x_2)i + (y_1 + y_2)j + (z_1 + z_2)k$, $\alpha a = \alpha x_1 i + \alpha y_1 j + \alpha z_1 k$, dan

$\phi(a + b) = (x_1 + x_2)i = x_1 i + x_2 i = \phi(a) + \phi(b)$, $\phi(\alpha a) = \phi(\alpha x_1 i) = \alpha\phi(a)$

Ega bo'lamiz. Demak, ϕ chiziqli almashtirish ekan. ■

6-misol. To'rto'lchamli chiziqli fazoda chiziqli almashtirish φ berilgan bo'lsin. Agar

$\phi(e_1) = e_3 + e_4$, $\phi(e_2) = e_1 + e_4$, $\phi(e_3) = e_4 + e_2$, $\phi(e_4) = e_2 + e_3$

Bo'lsa, bu almashtirishning koordinata shaklida yozing.

Yechish: Almashtirish ϕ ning matritsasi quyidagi ko'rinishga ega

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Demak, koordinata shaklda almashtirish φ quyidagicha yoziladi:

$$\phi(x) = \phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2 + x_3, x_3 + x_4, x_1 + x_4, x_1 + x_2)$$

7-misol. L – ikkinchi tartibli barcha kvadrat matritsalar fazosi bo'lsin. Matritsalarni chapdan $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ matritsaga ko'paytirish chiziqli operator ekanligini ko'rsating. Uning matritsasini

$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Bazisda toping?

Yechish: Bizning holda operatorning chiziqlilik xossasi matritsalarning ko'paytirish va qo'shish xossalaridan kelib chiqadi, xususiy holda distributivlik qonunidan, agarda $\phi(A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} A$, $\phi(B) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} B$ bo'lsa, u holda

$$\phi(A + B) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}(A + B) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} A + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} B = \phi(A) + \phi(B).$$

Xuddi shunday ikkinchi xossa ham tekshiriladi. $\phi(e_1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = e_1 + 3e_3$ va shu kabi $\phi(e_2) = e_2 + 3e_4$, $\phi(e_3) = 2e_1 + 4e_3$, $\phi(e_4) = 2e_2 + 4e_4$.

Shunday qilib, operatorning $4x4$ o'lchamga ega bo'lgan matritsasi (chunki L to'rt o'lchamli) quyidagi ko'rinishga ega

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}. \ ■$$

8-misol.

a) Kompleks sonlar maydoni C ikki o'lchamli kommutativ algebra;

b) haqiqiy sonlar maydoni ustidagi n- tartibli barcha kvadrat matritsalar $M_n(R)$ $n \geq 2$-ga nekommutativ n^2-o'lchamli algebra;

c) haqiqiy koeffisientli barcha ko'phadlar to'plami-cheksiz o'lchamli kommutativ algebra;

d) darajasi n dan oshmaydigan barcha ko'phadlar to'plami P_n $(n+1)$- o'lchamli kommutativ algebra;

e) $[a, b]$- kesmada aniqlangan barcha uzluksiz haqiqiy funksiyalar to'plami $C[a, b]$ – cheksiz o'lchamli kommutativ algebra. ■

9-misol. Quyidagi ikkita chiziqli almashtirishlar berilgan:

$$\phi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_1 + x_3), \quad \phi(x_1, x_2, x_3) = (x_2 + x_3, x_1 + x_3, x_1 + x_2).$$

$\phi\psi$ va $\psi\phi$ almashtirishlarni toping.

Yechish: Bu almashtirishning matritsalari

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ko'rinishga ega. Bu matritsalar ko'paytmalarini topamiz:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$AB=BA$ ekanligi ko'rinib turibdiki, shu sababli $\phi\psi$ va $\psi\phi$ chiziqli almashtirishlar ustma-ust tushadi. $\phi\psi$ almashtirishning koordinata shakli quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi.

$$\phi\psi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + 2x_3, 2x_1 + x_2 + x_3, x_1 + 2x_2 + x_3). \ ■$$

10-misol. Chiziqli almashtirish φ xOy tekislikdagi har bir vektori $\frac{\pi}{4}$ burchakka burilishdan iborat. $\psi = \phi^2 + \sqrt{2}\phi + I$ chiziqli almashtirish matritsasini toping.

Yechish:

$$\phi(i) = i\cos\frac{\pi}{4} + j\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}i + \frac{\sqrt{2}}{2}j, \quad \phi(j) = -i\cos\frac{\pi}{4} + j\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}i + \frac{\sqrt{2}}{2}j.$$

Demak, chiziqli almashtirish φ ning matritsasi quyidagi ko'rinishga ega:

Bundan chiziqli almashtirish ψ ning matritsasi quyidagi ko’rinishni oladi:

. ■

11-misol. $a_1 = e_1 - e_2 + e_3, a_2 = e_1 + e_2 - e_3, a_3 = e_1 - e_2 - e_3$ vektorlarni $b_1 = e_1 + e_2 + e_3, b_2 = e_2 + e_3, b_3 = e_1 + e_3$ vektorlarga mos ravishda o’tkazuvchi chiziqli operator mavjud ekanligini ko’rsating(e_1, e_2, e_3-fazoning bazisi). Uning e_1, e_2, e_3 bazisdagi matritsasini toping.

Yechish: a_1, a_2, a_3 vektorlar chiziqli bog’lanmaganligini ko’rish qiyin emas, demak, ular fazoning bazisini tashkil etadi va shu sababli har bir ***a*** vector $a = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3$ ko’rinishda bir qiymatli yoziladi. Demak, operator $\phi(a) = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3$ dan iborat bo’ladi. e_1, e_2, e_3 larni a_1, a_2, a_3 larga mos ravishda o’tkazuvchi chiziqli operatorni ψ deb belgilaymiz. e_1, e_2, e_3 bazisda u

matritsa yordamida beriladi. Bu matritsa maxsusmas. Ularning ko’paytmasidan iborat $\varphi\psi$ operator b_1, b_2, b_3 ga o’tkazadi va shu sababli u e_1, e_2, e_3 bazisda $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ matritsaga ega bo’ladi. Operatorlar ko’paytmasi(aynan bitta bazisda) ularning matritsalarining ko’paytmasiga teng bo’lganligi uchun *D*=*AC*, bunda *A*–matritsa φ operatorning e_1, e_2, e_3 bazisadgi matritsasi.Demak,

$$A = DC^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

. ■

12-misol. Chiziqli operator φ ning $a_1 = (8,-6,7), a_2 = (-16,7,-13), a_3 = (9,-3,7)$ bazisdagi matritsasi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 18 & 15 \\ -1 & -22 & -15 \\ 1 & -25 & 22 \end{pmatrix}$$

bo’lsin. Bu operatorning $b_1 = (1,-2,1), b_2 = (3,-1,2), b_3 = (2,1,2)$ bazisdagi matritsasini toping.

Yechish: a_1, a_2, a_3 bazisdan b_1, b_2, b_3 bazisga o’tish matritsasini topamiz:

Demak, o'tish matritsasi T

ko'rinishga ega bo'ladi. T ga teskari T^{-1} matritsani

topamiz. U holda operator φ ning b_1, b_2, b_3 bazisdagi matritsasi

ko'rinishga ega bo'ladi. ■

13-misol. Chiziqli operator φ ning $a_1 = (3,1), a_2 = (-2,3)$ bazisdagi matritsasi $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, chiziqli operator ψ ning $b_1 = (-1,3), b_2 = (4,2)$-bazisdagi matritsasi $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$. $\varphi + \psi$ operatorning b_1, b_2 bazisdagi matritsasini toping.

Yechish: φ operatorning $\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}$ bazisdagi matritsasini topamiz. Buning uchun avvalo a_1, a_2 bazisdan b_1, b_2 bazisga o'tish matritsasini topamiz.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & -2 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & -11 & -10 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{10}{11} & \frac{2}{11} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{3}{11} & \frac{16}{11} \\ 0 & 1 & \frac{10}{11} & \frac{2}{11} \end{array}\right).$$

Demak, o'tish matritsasi T quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$T = \begin{pmatrix} \frac{3}{11} & \frac{16}{11} \\ \frac{10}{11} & \frac{2}{11} \end{pmatrix}.$$

Bundan, $T^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{7} & \frac{8}{7} \\ \frac{5}{7} & -\frac{3}{14} \end{pmatrix}$. U holda operator φ ning b_1, b_2 bazisdagi matritsasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$T^{-1}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} T = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} -2 & 16 \\ 10 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 3 & 16 \\ 10 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{154}\begin{pmatrix} 944 & 1236 \\ -426 & -38 \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{77}\begin{pmatrix}472 & 618\\ 213 & -19\end{pmatrix}.$$

Bundan operator $\varphi+\psi$ ning b_1, b_2 bazisdagi matritsasi quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\frac{1}{77}\begin{pmatrix}472 & 618\\ 213 & -19\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{703}{77} & \frac{772}{77}\\ \frac{367}{77} & \frac{520}{77}\end{pmatrix}=\frac{1}{77}\begin{pmatrix}703 & 772\\ 367 & 520\end{pmatrix}. \blacksquare$$

14-misol. Agar A va B matritsalardan kamida biri maxsusmas bo'lsa, AB va BA matritsalar o'xshash bo'lishligini isbotlang. Shunday maxsus A va B operatorlar topingki, AB va BA lar o'xshash bo'lmasin.

Yechish: Masalan, A matritsa maxsusmas bo'lsin, ya'ni uning uchun teskari A^{-1} matritsa mavjud bo'lsin. U holda, $AB=A(BA)A^{-1}$, ya'ni AB va BA matritsalar o'xshash bo'ladi.

Endi ikkita maxsus ,A va B matritsalar topingki, AB va BA lar o'xshash bo'lmasin.

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} \text{ va } B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

matritsalarni qaraymiz. U holda$AB=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, BA=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$. ■

Mashqlar

1. Tekislikning geometrik vektorlari fazosida berilgan chiziqli operator dekart tekisligini koordinata boshiga nisbatan α burchakka burish bo'lsin. Uning $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}$ bazisdagi matritsasini toping.

2. V_3- geometrik vektorlar fazosi,$\phi: V_3 \to V_3$ akslantirish quyidagicha berilgan. Bu chiziqli operatorlarning $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ bazisdagi matritsalarini toping.Har bir akslantirish ixtiyoriy $x=x_1i+x_2j+x_3k$vektorga ta'siri orqali berilayabdi
a) $\phi(x)=o$; **b)** $\phi(x)=2x$; **c)** $\phi(x)=x+i$; **d)** $\phi(x)=(x\cdot a)x, a$ –berilgan vektor; $(x\cdot a)$ – $\boldsymbol{x}$ va $\boldsymbol{a}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi; **e)** $\phi(x)=[x\times a], a=2i+j+3k, [x\times a]$ – $\boldsymbol{x}$ va $\boldsymbol{a}$ vektorlarning vektorial ko'paytmasi;
f)$\phi(x)=2x_1i-(x_1+x_2)j-k$;**g)** $\phi(x)=x_1^2i+x_2j+x_3k$; **h)** $\phi(x)=x_1i$; **i)** $\phi(x)=x_1i+x_2j$.
h) va i) almashtirishlarning geometrik ma'nosini ko'rsating.

3.$P_n=\{\alpha_0+\alpha_1t+\ldots+\alpha_nt^n|\alpha_i\in R\}$ fazoning quyidagi keltirilgan almashtirishlardan qaysi birlari chiziqli operator bo'ladi, ularning $1,t,t^2,\ldots,t^n$bazisdagi matritsalarini toping. Har bir almashtirish ixtiyoriy $f(t)\in P_n$ko'phadga ta'siri orqali beriladi:

a)$\phi(f(t))=f(-t)$; b)$\phi(f(t))=f(t+1)$; c)$\phi(f(t))=f(at+b)$, bunda a va b-berilgan sonlar,$a\neq 0$;
d) $D(f(t))=f'(t)$. Bu operator kelgusida *differensiallash* operatori deyiladi;
e) $D^k(f(t))=f^{(k)}(t)$. Bu operator kelgusida *k-karrali differensiallash* operatori deyiladi;

4. L –chiziqli fazo L_1 va L_2 fazolarning to'g'ri yig'indisi bo'lsin. L fazoning $x=a_1+a_2, a_1\in L_1, a_2\in L_2$ yoyilmaga ega bo'lgan har qanday $\boldsymbol{x}\in L$ vektoriga bu yoyilmaning $\boldsymbol{a}_1$ vektorini mos qo'yuvchi operatori p chiziqli ekanligini ko'rsating.

Bunday operator L fazoni L_1 ga parallel ravishda proeksiyalovchi operator deyiladi. Bu operatorning L_1 va L_2 qism fazolarning bazislari birlashmasidan iborat bo'lgan bazisdagi matritsani toping. $p^2=p$ ekanligini isbotlang.

5. P_n fazoda ikkita har xil chiziqli operator tuzingki, ular P_{n-1} qism fazoda differensiallash operatori bilan ustma-ust tushsin.

6. L chiziqli fazo L_1 va L_2 qismfazolarning to'g'ri yig'indisidan iborat bo'lsin. $x\in L$ vektorning yoyilmasi $\mathrm{x} = a_1 + a_2, a_1 \in L_1, a_2 \in L_2$ bo'lsin. Har bir $x\in L$ vektorga $S(x) = a_1 - a_2$, vektorni mos qo'yuvchi S operatorning (ya'ni $S(x) = a_1 - a_2$) chiziqli ekanligini ko'rsating. S operatorga L_1 yo'nalish bo'yicha simmetriya deyiladi.

Bu operatorning L_1 va L_2 qismfazolar bazislari birlashmasidan hosil bo'lgan bazisdagi matritsasini toping. $S^2 = e$ ekanligini isbotlang.

7. Quyidagi operatorlardan qaysi biri chiziqli agar chiziqli bo'lsa, ularning matritsasini V_2 ga $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ bazisda, V_3 fazoda $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ bazisda toping.

a) agar Δ o'q $\boldsymbol{i}$ ga β burchak ostida og'ishgan bo'lsa, S_Δ operator Δ o'q bilan V_2 tekislikda o'qli simmetriya,

b) V_2 tekislikni $\boldsymbol{i}$ ga β burchak ostida og'ishgan to'g'ri chiziqqa ortogonal proeksiyalash operatori;

c) V_3 fazoni $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$ vektorga ortogonal bo'lgan tekislik Π ga nisbatan simmetriya operatori S_n

d) V_3 fazoni $n = \cos\phi_1\, i + \cos\phi_2\, j + \cos\phi_3\, k$ vektorga orthogonal bo'lgan Π tekislikka orthogonal proeksiyalash operatori.

8. P_n ga differensiallash operatorining $1, t, t^2, \ldots, t^n$ bazisdagi matritsasini tuzing.

9. Differensiallash operatorini quyidagi ikki o'lchamli fazodagi matritsasini toping:

a) $\{x \sin t + y \cos t \,|x, y \in R\}$ ni $(\sin t, \cos t)$ bazisda;

b) $\{e^{at}(x \cos b\,t + y \sin b\,t)|x, y \in R\}$ni $(e^{at} \cos b\,t, e^{at} \sin b\,t)$ bazisda.

10. Bir o'lchamli fazoni o'ziga akslantiruvchi har qanday chiziqli operator fazoning barcha vektorlarini belgilangan(fiksirlangan) songa ko'paytirdan iborat ekanligini ko'rsating.

11. Chiziqli operator uchun quyidagilar to'g'rimi?

a) u nchiziqli bog'langan vektorlar sistemasini chiziqli bog'langan sistemaga o'tkazadi;

b) chiziqli bog'lanmagan vektorlar sistemasini chiziqli bog'lanmagan vektorlar sistemasiga o'tkazadi.

12. Quyidagi tasdiq to'g'rimi: agar $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vektorlar sistemasi bilan $b_1, b_2, \ldots, b_m$ ekvivalent bo'lsa, u holda har qanday chiziqli operator uchun $\phi(a_1), \ldots, \phi(a_k)$ sistemasi va $\phi(b_1), \ldots, \phi(b_m)$ sistemalar ekvivalent bo'ladi.

13. φ -chiziqli operator L fazoni M fazoga akslantirsin. L_1, L_2 lar L ning qismfazolari bo'lsin. Quyidagilar to'g'rimi?

a) $\phi(L_1 + L_2) = \phi(L_1) + \phi(L_2)$;

b) $\phi(L_1 \cap L_2) = \phi(L_1) \cap \phi(L_2)$;

14. Uch o'lchamli fazning quyidagi akslantirishlaridan qaysi birlari chiziqli operator bo'lishini aniqlang, chiziqli operatorlarni va φ vektorlarning koordinatalari berilgan bazisda matritsalarini toping: $x = (x_1, x_2, x_3)$

a) $\phi(x) = (x_2 + x_3,\ 2x_1 + x_3,\ 3x_1 - x_2 + x_3)$;

b) $\phi(x) = (x_1,\ x_2 + 1,\ x_3 + 2)$;

c) $\phi(x) = (2x_1 + x_2,\ x_1 + x_3,\ x_3^2)$;

d) $\phi(x) = (x_1 - x_2 + x_3,\ x_3,\ x_2)$.

15. Ikki o'lchamli fazoning a_1, a_2 vektorlarini b_1, b_2 vektorlarga mos ravishda o'tkazuvchi chiziqli operator mavjudmi? Agar mavjud bo'lsa bu operatorning e_1, e_2 bazisdagi matritsasini toping:

a) $a_1 = e_1 + 2e_2,\ b_1 = 6e_1 + 3e_2,\ a_2 = 9e_1 - e_2,\ b_2 = 11e_1 - 8e_2$;

b) $a_1 = e_1 + 2e_2,\ b_1 = 2e_1 - e_2,\ a_2 = 2e_1 + 4e_2,\ b_2 = e_1 + e_2$;

c) $a_1 = e_1 + 2e_2,\ b_1 = e_1 - 2e_2,\ a_2 = 4e_1 + 4e_2,\ b_2 = 2e_1 - e_2$.

16. Uch o'lchamli fazoning a_1, a_2, a_3 vektorlarini mos ravishda b_1, b_2, b_3 vektorlarga o'tkazuvchi chiziqli operator mavjudmi? Agar mavjud bo'lsa vektorlar koordinatalari berilgan bazisda operator matritsasini toping?

a) $a_1 = (2, 3, 5),\ a_2 = (0, 1, 2),\ a_3 = (1, 0, 0),\ b_1 = (1, 1, 1),\ b_2 = (1, 1, 1),\ b_3 = (2, 1, 2)$;

b) $a_1 = (1, 2, 0),\ a_2 = (1, 1, 1),\ a_3 = (2, 3, 1),\ b_1 = (1, 1, 1),\ b_2 = (1, 1, 0),\ b_3 = (1, 0, 0)$.

17. Ikkinchi tartibli matritsalar fazosida quyidagi matritsalardan tuzilgan bazis berilgan:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bu bazisdan quyidagilarni yozing:

a) transponirlash operatorining matritsasini, ya'ni, har bir X matritsaga uning transponirlangani X^T ni mos qo'yuvchi operatorni;

b) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ bo'lsa, $\phi_A(X) = AX$ tenglik bilan aniqlanuvchi ϕ_A operator matritsasini;

c) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ bo;lsa, $\psi_A(X) = AX$ tenglik bilan aniqlanuvchi ψ_A operator matritsasini.

19. Chiziqli φ operator e_1, e_2, e_3 bazisda $\begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}$ matritsaga ega. Uning a_1, a_2, a_3 bazisdagi matritsasini toping, bunda $a_1 = 2e_1 + 3e_2 + e_3,\ a_2 = 3e_1 + 4e_2 + e_3,\ e_3 = e_1 + 2e_2 + 2e_3$.

20. Chiziqli φ operator $a_1 = (1, 2),\ a_2 = (1, 1)$ bazisda $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ matritsaga ega. Uning $b_1 = (2, 3),\ b_2 = (0, 1)$ bazisdagi matritsasini toping?

21. Ikkinchi tartibli matritsalar fazosida

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

bazisda chiziqli operator

matritsa bilan berilgan.Bu operatorning

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ bazisdagi matritsasini toping.

22. P_2 fazoning $1, t, t^2$ bazisdagi φ operator

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

matritsa bilan berilgan. Bu operatorning quyidagi bazislardagi matritsasini toping.

a) $t - t^2, 1 + 2t + t^2, 1 + 3t + t^2$;

b) $3t^2 + 2t, 5t^2 + 3t + 1, 7t^2 + 5t + 3$.

23. $H - \boldsymbol{e}, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ bazisli to'rt o'lchamli haqiqiy fazo bo'lsin. *H* da ko'paytirishning quyidagicha aniqlaymiz:

$$(a_1 e + b_1 i + c_1 j + d_1 k)(a_2 e + b_2 i + c_2 j + d_2 k) = (a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2)e + (a_1 b_2 + b_1 a_2 + c_1 d_2 - d_1 c_2)i + (a_1 c_2 - b_1 d_2 + c_1 a_2 + d_1 b_2)j + (a_1 d_2 + b_1 c_2 - c_1 b_2 + d_1 a_2)k$$

ya'ni *H* dagi vektorlar ko'phadni ko'phadga ko'paytirish qoidasi bo'yicha, bazis vektorlarni ko'paytirishning quyidagi jadvalini hisobga olgan holda amalga oshirilsin. *H* chiziqli fazoda vektorlarni yuqoridagi ko'paytirish amaliga nisbatan, chiziqli algebra bo'lishini isbotlang. Bu chiziqli algebra kvartenionlar algebrasi deb, uning elementlari kvartionlar deb ataladi.

	e	**i**	**j**	**k**
e	**e**	**i**	**j**	**k**
i	**i**	**-e**	**k**	**-j**
j	**j**	**-k**	**-e**	**i**
k	**k**	**j**	**-i**	**-e**

24. Elementlari P sonlar maydonidan olingan n tartibli kvadrat matritsani A bilan belgilaymiz. A ga nisbatan tuzilgan barcha ko'phadlar to'plami P ustidagi kommutativ algebra bo'lishini isbotlang.

25. Quyidagi chiziqli operatorlar berilgan.

$$\phi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 + 3x_3;\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3;\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3),$$

$$\psi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 3x_2 + 4{,}5x_3;\ 6x_1 + 7x_2 + 9x_3;\ 10{,}5x_1 + 12x_2 + 13x_3).$$

$3\phi - 2\psi$ operatorni toping.

26*. xOy tekislikning $U = xi + yj$ vektorlar to'plamida quyidagi ikkita chiziqli almashtirishni qaraymiz: φ-almashtirishni vektorni uning Ox; o'qidagi tashkil etuvchisiga almashtirilsin; ψ-vektorning I va III koordinatalar bissektrisalariga nisbatan ko'zgu bo'yicha akslantirishi bo'lsin. $\varphi\psi$ va $\psi\varphi$ almashtirishlarini toping.

27. xOy tekislikning har bir vektorini α burchakka burishidan iborat almashtirishni φ bilan belgilaymiz. ϕ^2 almashtirish matritsasini toping.

28. $a_1 = (1,2), a_2 = (2,3)$ bazisda chiziqli operator φ $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ matritsasiga ega, $b_1 = (3,1), b_2 = (4,2)$ bazisda ψ operator $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$ matritsasiga ega. $\varphi+\psi$ operatorning b_1, b_2 bazisdagi matritsasini toping.

29. $a_1 = (-3,7), a_2 = (1,-2)$ baisda chiziqli operator φ ning matritsasi $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, $b_1 = (6,-7), b_2 = (-4,2)$ bazisda chiziqli operator ψ ning matritsasini $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ dan iborat bo'lsa, $\varphi\psi$ operatorning barcha vektorlar koordinatalari aniqlangan bazisdagi matritsasini toping.

§2. Chiziqli operatorning yadrosi va obrazi

L va L' lar chiziqli fazolar, φ: $L \to L'$ chiziqli akslantirish bo'lsin. φ akslantirishda nolning proobrazi (asli) φ akslantirishning yadrosi deyiladi va $k[$φ $]$ yoki $ker\varphi$ bilan belgilanadi. Shunday qilib,

$$Ker\varphi=\{ a\epsilon L \mid \varphi(a) = 0\}$$

Agar *A* chiziqli operator φ ning biror bazisdagi matritsasi bo'lsa, u holda $ker\varphi$ yadro *Ax=0* bir jinsli sistemaning yechimlari qismfazosi bilan ustma-ust tushadi.

$\{ \varphi(a) | a\epsilon L\}$ to'plam chiziqli operator φ ning obrazi deyiladi va $Im\varphi$ bilan belgilanadi. Agar $a_1, a_2, .., a_n$ - L ning bazisi bo'lsa u holda

$$Im\varphi= L(\varphi(a_1), \phi(a_2), , .., \phi(a_n))$$

$ker\varphi$ -*L* fazoning qism fazosi, $Im\varphi$ bo'lsa L' fazoning qism fazosidir.

$Im\varphi$ va $ker\varphi$ qism fazolarning o'lchamlari chiziqli operatorning mos ravishda *rangi va defekti* deyiladi va $rang\varphi$ va $def\varphi$ bilan belgilanadi. Agar L chekli o'lchamli fazo bo'lsa, chiziqli operatorning rangi va defektlarining yig'indisi fazoning o'lchamiga teng bo'ladi, ya'ni $rang\varphi + def\varphi = dim\ L$.

1-misol. a) *ker0=L;* b) *kerI*$=\{0\}$

2-misol. *Im0=o*

3 -misol. $\boldsymbol{R_3}$ fazoda φ: $R_3 \to R_3$

$$\varphi(x)=(\boldsymbol{x_1-2x_2+3x_3},\ \boldsymbol{x_1-2x_2+3x_3},\ \boldsymbol{x_1-2x_2+3x_3})$$

operator berilgan bo'lsin. Uning defekti va rangini toping, yadrosi va obrazlarining bazislarini tuzing.

Yechish: Operator φ ning $e_1(1,0,0), e_2(1,0,0), e_3(0,0,1)$ $b$azisdagi matritsasini tuzamiz:

$\varphi(e_1)=(1,1,1), \varphi(e_2)=(-2,-2,-2), \varphi(e_3)=(3,3,3)$

bo'lganligi sababli

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

rangA=1 ekanligini ko'rish qiyin emas. Demak, *rangA=1* va *defφ=n-r =3-2=1*. Yadroning bazisini topamiz

$$Ax=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1-2x_2+3x_3=0 \\ x_1-2x_2+3x_3=0 \\ x_1-2x_2+3x_3=0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1-2x_2+3x_3=0$$

$x_2=\alpha, x_3=\beta$ bo'lsin. U holda $x_1=2\alpha-3\beta$ va $(2\alpha-3\beta,\alpha,\beta)=\alpha(2,1,0)+\beta(-3,0,1)$ sistemaning umumiy yechimi. Bundan $x_1=(2,1,0)^T$ va $x_2=(-3,0,1)^T$ vektorlar fundamental yechimlar sistemasini tashkil etadi va demak, operator φ ning yadrosining bazisi ham bo'ladi, demak,

$Ker\varphi=\{\lambda x_1+\mu x_2|\lambda,\mu\epsilon R\}$

Endi $Im\varphi$ obrazning bazisini topamiz. Buning uchun yadroga kirmaydigan noldan farqli ixtiyoriy vektorni, masalan $a=(1,1,0)^T$ ni olamiz. U holda $\varphi(a)=(1,1,1)^T$ $Im\varphi$ ning bazisi bo'ladi, ya'ni $Im\varphi=\{\lambda\,(1,1,1)^T \mid \lambda \in R\}$.

4-misol. P_3 fazoda $\varphi: P_3\to P_3$ operator quyidagicha berilsin:

$$\varphi(f(t))=f(t)-f(-t)$$

bunda $f(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3$. Operator φ ning rangi, defekti, yadrosi va obrazini toping.

Yechish. φ operatorning $1,t,t^2,t^3$ bazisdagi matrisasini topamiz.

$\varphi(1)=1-1=0=0\times1+0\times t+0\times t^2+0\times t^3$

$\varphi(t)=t-(-t)=2t=0\times1+0\times t+0\times t^2+0\times t^3$

$\varphi(t^2)=t^2-(t^2)=0=0\times1+0\times t+0\times t^2+0\times t^3$

$\varphi(t^3)=t^3-(-t^3)=2t^3=0\times1+0\times t+0\times t^2+0\times t^3$

Demak, $A=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}.$

Rang $A=2$ ekanligi ko'rinib turibdi. Demak, rang $\varphi=2$. U holda, $dim\,ker\ \varphi=def\ \varphi=4-2=2.$

Endi operator φ ning yadrosini topamiz.

$$AX=0 \quad \Leftrightarrow \begin{cases}2x_2=0\\2x_4=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_2=0\\x_4=0\end{cases}.$$

Bundan fundamental yechimlar sistemasi va demak, yadroning bazisi $X_1=(1,0,0,0)^{\mathrm{T}}$ va $X_2=(0,0,1,0)$ dan iboratligi kelib chiqadi. Demak,

$$ker\varphi=\{\lambda x_1+\mu x_2|\lambda,\mu\in P\}=\{\lambda 1+\mu t^2|\lambda,\mu\in P\}$$

Endi operator φ ning obrazini topamiz. t va t^3 vektorlar yadroga tegishli emasligini ko'rish qiyin emas, demak, $\varphi(t)=2t, \varphi(t^3)=2t^3$ vektorlar obrazning bazisini tashkil etadi, ya'ni $Im\varphi=\{v\cdot 2t,\ \delta\cdot 2t^3|v,\delta\in P\}$.

5-misol. Operator P quyidagi $p^2=p$ shartni qanoatlantirsin. U holda, fazo bu operatorning yadrosi va obrazlarining to'g'ri yig'indisidan iboratligini isbotlang.

Yechish. *kerp* fazo $p(x)=0$ shartni qanoatlantiruvchi *x v*ektorlardan iborat. Obraz *Im p* bo'lsa, biror bir *y* da *p(y)* ko'rinishga ega bo'lgan barcha vektorlardan iborat bo'ladi.

$p^2=p$ bo'lganligidan $p^2(y)=p(p(y))=p(y)$ ya'ni $Im\,p$ dagi vektorlar p ning ta'sirida o'zgarmaydi. Demak, faqat nol vektorgina yadro va obrazga tegishlidir, ya'ni $Im\,p\cap\ ker\,p=\{0\}$.

Yadro va obraz haqiqatdan ham to’g’ri yig’indini tashkil etadi. Bu yig’indiniing butun fazoga tengligini ko’rsatish uchun fazoning ixtiyoriy vektorini $x = p(x) + \left(x - p(x)\right)$ ko’rinishda yozib olamiz. Birinchi qo’shiluvchi $Im\, p$ ga, ikkinchi qo’shiluvchi bo’lsa ($p^2 = p$ ligi sababli) yadroga tegishli. Shunday qilib, butun fazo yadro va obrazlarning to’g’ri yig’indisidan iborat ekan.

$Im\, p$ dagi barcha vektorlar qo’zg’almasdan qoladi, *kerp* dagi barcha vektorlar bo’lsa nolga o’tadi. Demak, operator *p* ning ta’sir etishini quyidagicha izohlash mumkin ekan. ”Operator fazoni *kerp* ga parallel ravishda $Im\, p$ ga proeksiyalar ekan”.

Mashqlar

37. Agar φ va ψ chiziqli operatorlar bo’lsa, quyidagilarni isbotlang:

a) $ker\, \varphi\, \psi \leq \ker \psi$;

b) $Im\, \varphi\, \psi \leq Im\, \varphi$.

Agarda operator φ yana maxsusmas ham bo’lsa, u holda $ker\, \varphi\, \psi = \ker \psi$

va agar operator ψ maxsusmas bo’lsa, u holda $Im\, \varphi\, \psi = Im\, \varphi$.

38. Chiziqli fazoning har qanday qism fazosi uchun quyidagilar o’rinli ekanligini isbotlang:

a) bu qism fazo biror chiziqli operatorning yadrosidir;

b) u biror chiziqli operatorning obrazidir.

39. Agar rangi 1ga teng bo’lgan ikkita chiziqli operatorning teng yadrolarga va teng obrazlarga ega bo’lsa, ular o’rin almashinuvchi bo’ladi.

40. Geometrik vektorlarning haqiqiy chiziqli fazosi V_3 ni R ga akslantiruvchi quyidagi har bir chiziqli operatorlar uchun yadroni toping:

$\varphi_1(x) = (x, a),\ \ \varphi_2(x) = ([a \times x], b)$

bunda *a,b* lar noldan farqli berilgan vektorlar.

41. Geometrik vektorlarning haqiqiy chiziqli fazosi V_3 da berilgan chiziqli operator φ ning obrazi va yadrosini toping.

a) $\varphi\ (x) = [a \times x]$;

b) $\varphi\ (x) = \big[a \times [a \times x]\big]$,

bunda a,*b* lar noldan farqli berilgan vektorlar.

42. R^3fazoda berilgan quyidagi chiziqli operatorlarning defekti va rangini toping. Ularning yadrosi va obrazlarining bazislarini quring. Har bir operator ixtiyoriy x=(x_1,x_2,x_3) vektorlarga ta'siri orqali berilyapti:

a) $\varphi\ (x) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3)$;

b) $\varphi\ (x) = (2x_1 - x_2 - x_3, x_1 - 2x_2 + x_3, x_1 + x_2 - 2x_3)$;

c) $\varphi\ (x) = (-x_1 + x_2 + x_3, x_1 - x_2 + x_3, x_1 + x_2 - x_3)$;

43. P_n fazoda differensiallash operatori *D* ning obrazi va yadrosini toping.

44. *L* fazoni L' fazoga akslantiruvchi shunday chiziqli operator φ ni topingki, uning obraz va yadrolarining to'g'ri yig'indisi *L* fazodan iborat bo'lmasin.

45. P_n fazoda quyidagi $\varphi_n : \varphi_n\big(f(t)\big) = \frac{1}{n}\big(f(t+n) - f(t)\big)$ operator berilgan bo'lib, bunda *n*- noldan farqli fiksirlangan son. Uning obrazi va yadrosini toping.

46. L_2 ga parallel ravishda L_1 ga proeksiyalash operatori (4-masalani qarang) va L_1 ga nisbatan L_2 yo'nalishda simmetriya operatorini (6-masalani qarang) obrazi va yadrolarini toping.

47. *L* fazoning biror bazisida matritsasi *A* orqali berilgan chiziqli operator φ ning yadro va obrazlarining bazislarini toping:

a) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; b) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$; c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$;

d) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -5 & 11 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$; e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

$$f)\ A=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&0\\1&1&1&1\\1&2&2&1\end{pmatrix}.$$

48. L fazoning ixtiyoriy qism fazosi L fazoni L' fazoga biror chiziqli akslantirishning yadrosidan iborat degan jumla to'g'rimi?

49. n-o'lchamli chiziqli fazoning operatorlari fazosi *H(L)* ning o'lchamini toping. *H(L)* fazoning bazisini quring.

§3. Chiziqli operatorning xos vektorlari va xos qiymatlar

L - P maydon ustidagi chiziqli fazo, $\varphi: L \to L$ chiziqli operator noldan farqli $x \in L$ element operator φ ning xos vektori deyiladi, agarda shunday $\lambda \in P$ son topilsin, $\varphi(x) = \lambda x$ bo'lsa, λ songa operator φ ning xos qiymati deb, x vektorga ega λ xos songa mos xos vektor deyiladi.

λ xos qiymatga mos keluvchi barcha xos vektorlar to'plamining chiziqli qobig'iga chiziqli operator φ ning bu λ xos songa mos keluvchi xos qism fazosi deyiladi va L_λ bilan belgilanadi.

L n-o'lchamli fazo, $e_1, e_2, \dots, e_n$ uning biror bazisi $A -$ operator φ ning bu bazisdagi matritsasi, X – xos son λ ga mos keluvchi xos vektorning koordinat ustuni bo'lsin.

U holda X vector

$$(A - \lambda E)X = 0 \qquad (1)$$

bir jinsli sistemaning yechimi bo'ladi. (1) sistemaning nolmas yechimi mavjud bo'lishi uchun

$$\det(A - \lambda E) = 0 \qquad (2)$$

bo'lishi zarur.

(2) tenglama xarakteristik tenglama deb, uning ildizlari bo'lsa, A matritsaning xarakteristik sonlari deb ataladi. Kompleks chiziqli fazoda chiziqli operatorning barcha

xarakteristik sonlari uning xos qiymatlari bo'ladi, haqiqiy fazoda - faqat haqiqiy xarakteristik sonlari xos qiymatlar bo'ladi.

(2) tenglamaning chap tomoni darajasi $n = \dim L$ ga teng bo'lgan λ ning ko'phadi bo'ladi:

$$\det(\mathrm{A} - \lambda E) = (-\lambda)^n + tr\, A(-)^{n-1} + \cdots + \det A \qquad (3)$$

bu yerda $trA - A$ matrisaning izi. Bu ko'phad A matritsaning xarakteristik ko'phadi deyiladi. Chiziqli akslantirishning matrisasi A ning xarakteristik ko'phadi bazis o'zgarganda o'zgarmaydi, demak, uning koeffitsientlari, xususiy holda izi va A matritsaning determinanti va xarakteristik sonlari o'zgarmaydi. Bu operatorning barcha xos qiymatlari to'plamiga uning spektri deyiladi. Xuddi shunday matritsaning spektri haqida ham gapirish mumkin. Agar chiziqli operator geometrik usulda yoki formula asosida berilsa, uning xos vektorlarini matritsasini hisoblamasdan turib, hisoblash mumkin. Chiziqli operator φ ning xos qiymatlari va xos vektorlarini topish masalasi quyidagilarni o'z ichiga oladi:

a) Uning xarasteristik ko'phadining ildizlarini hisoblash;

b) fazo haqiqiy bo'lgan holda ildizlar ichida haqiqiylarini ajratib olish, chunki faqat ular xos qiymatlar bo'ladi;

c) Operator φ ning har bir xos qiymatlari λ ga xos qism fazolari L_λ ning bazisidan tuzilgan maksimal chiziqli bog'lanmagan xos vektorlar sistemasini toppish.

Chiziqli operator φ ning matritsasi biror bazisda diagonal ko'rinishda bo'lishi uchun uning barcha bazis vektorlari φ uchun xos vektorlardan tashkil topgan bo'lishidir. Bunda matritsaning diagonalida mos ravishda xos qiymatlar joylashishi kerak. Agar L da berilgan chiziqli operatorning matritsasi diagonal shaklda bo'lsa, u holda bunday operator oddiy spektrli operator (yoki oddiy strukturali operator, yoki diagonallanuvchi operator) deyiladi. Diagonal matritsaga o'xshash oddiy spektrli matritsa (yoki oddiy strukturali matritsa, yoki diagonallanuvchi matrissa) deyiladi. Diagonallashuvchanlik L fazo qaysi maydon ustidagi fazo ekanligiga bog'liq. Kompleks xarakteristik sonlarga ega bo'lgan haqiqiy matritsa haqiqiy fazodagi chiziqli operatorning matritsasi sifatida diagonallanuvchi emas, lekin kompleks sonlar maydoni ustida diagonallanuvchi bo’lishi mumkin.

Chiziqli operatorni (yoki uning matritsasini) diagonal shaklga keltirish – bu spektrning xos vektorlaridan iborat bazisni topish va operatorning matritsasini bu bazisda yozib olish demakdir.

1–misol.

a) Nolmas har bir vektor nol operatorning 0 xos qiymatiga mos xos vektordan iborat.
b) Har bir nol vektor ayniy operatorning 1 xos songa mos keluvchi xos vektori bo’ladi.
c) Sonli operator αI uchun har qanday nolmas vektor α xos songa mos xos vektor bo’ladi.

2-misol. Barcha ko’phadlar fazosida differensiallash operatorining xos vektori $f_0(t) = 1$ bo’lib, u $\lambda = 0$ xos qiymatga mosdir.

3-misol. $\frac{\pi}{2}$ burchakka burish operatori geometrik vektorlar fazosi V_2 da xos vektorlarga ega emas.

4-misol. Chiziqli $\varphi: L \to L$ operatorning nolmas xos qiymatlarga mos xos vektorlari $I_m\ \varphi$ obrazda yotadi, nol xos qiymatga mos xos vektorlari va nol vector yadro ker φ ni tashkil etadi.

5-misol. $f(t)$ ko’phad bo’lsin. Agar *x* vektor chiziqli operator $f(\varphi)$ ning

$f(\lambda)$ xos qiymatiga mos xos vektori bo’ladi.

6-misol. R_3 fazoda A matritsa bilan berilgan operatorning barcha xos vektorlarini toping.

Yechish: $A - \lambda E$ xarakteristik matritsa va $\det(A - \lambda E) = 0$ xarakteristik tenglamani tuzamiz.

$$A - \lambda E = \cdots$$

Shunday qilib, 1 soni uch karrali xarakteristik ildiz bo’lib, u asosiy maydonda yotibdi, demak, u xos qiymatdir. Matritsasi $A - E$ bo’lgan chiziqli bir jinsli tenglamalar sistemasini tuzamiz. Sistemani yechib, $x_1 = \alpha$ – ixtiyoriy son, $x_2 = x_3 = 0$ ni hosil qilamiz. Shunday qilib, xos vektorlar $\alpha(1,0,0)$ bo'lib, bunda

α – ixtiyoriy son.

Bu misoldan shuni ko'rish mumkinki, barcha ildizlar haqiqiy bo'lgani bilan xos vektorlardan iborat bazis mavjud emas, chunki xos vektor proporsionallik aniqligida bitta. **7-misol.** C_3 fazoda operator φ

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

matritsa bilan berilgan. Bu operatorning xos vektorlari va xos qiymatlarini toping. Yangi bazisga o'tish bilan bu matritsani diagonal shaklga keltirish mumkinmi? Bu bazisni va unga mos matritsani toping.

Yechish: Xuddi oldingi masaladagidek yechib, xos qiymatlarni topamiz:

$$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1 + i, \lambda_3 = 1 - i.$$

Har xil xos qiymatlarga mos xos vektorlar chiziqli bog'lanmaganligi sababli, bu operatorning xos vektorlaridan tuzilgan bazisi mavjud.

$\lambda_1 = 2$ xos vector uchun sistemani tuzamiz.

$$(A - 2E)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

Bu sistemani yechsak, fundamental yechimlar sistemasi bitta $(0,1,-1)^T$ vektordan iborat bo'ladi, ya'ni $\lambda_1 = 2$ xos songa mos vektor $(0,1,-1)^T$, xuddi shunday $\lambda_2 = 1 + i$ xos qiymatga mos $(1+i,1,1)^T$ xos vektorni va $\lambda_3 = 1 - i$ mos $(1-i,1,1)^T$ xos vektorni topamiz.

Shunday qilib, berilgan operatorning $f_1 = (0,1,-1)^T, f_2 = (1+i,1,1)^T, f_3 = (1-i,1,1)^T$ bazisdagi matritsani quyidagi diagonal ko'rinishga keltiriladi:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 1-i \end{pmatrix}.$$

8-misol. *R* maydon ustidagi ikki o'lchamli L fazoda chiziqli φ operator toping.

Yechish:Bu operatorning xarakteristik ko'phadi $\lambda^2 - 2\lambda + 1$ bo'lib, u *R* da ildizlarga ega emas, demak, φ operator xos vektorlarga ega emas.

Mashqlar

50*. Chiziqli operatorning bitta xos qiymatiga mos keluvchi barcha xos vektorlari to'plami va nol vektori birgalikda xos qism fazo bilan ustma-ust tushishini isbot qiling.

51. n-o'lchamli chiziqli fazoda berilgan operatorning matritsasi A va xos qiymati λ berilgan bo'lsin. Agar $A-\lambda E$ matritsaning rangi r ga teng bo'lsa, λ xos qiymatga mos keluvchi xos qism fazoning o'lchami nechaga teng?

52. Agar bazis vektorlar chiziqli operatorning xos vektorlari bo'lsa, uning matritsasi qanday ko'rinishda bo'ladi?

53. Xarakteristik ko'phadning biror ildiziga muvofiq holda tuzilgan xos qism fazoning o'lchami bu ildizning karraliligidan oshmasligini isbotlang.

54. x, y lar chiziqli operatorning har xil xos qiymatlariga mos keluvchi vektorlari, α, β lar noldan farqli sonlar bo'lsin. $\alpha x+\beta y$ vektor xos vektor bo'lmasligini ko'rsating.

55. Chiziqli operatorning har xil xos qiymatlarga mos keluvchi xos vektorlari chiziqli bog'lanmagan ekanligini ko'rsating.

56. Chiziqli operatorning biror bazisdagi matritsasi diagonal ko'rinishda bo'lishi uchun bazisning barcha vektorlari xos vektorlari bo'lishi zarur va yetarli ekanligini isbotlang.

57. n- o'lchamli chiziqli fazodagi chizqli operator n ta har xil xos qiymatlarga ega bo'lsa, bunday operator diagonallanuvchi ekanligini ko'rsating.

58. Chekli o'lchamli chiziqli L fazodagi chiziqli operator φ berilgan bo'lsin. Quyidagi jumlalar teng kuchli ekanligini ko'rsating.

a) φ diagonallanuvchi;

b) L ga operator φ ning xos vektorlardan iborat bazis mavjud;

c) xos qism fazolar bazislarining yig'indisi L da basis bo'ladi;

d) xarakteristik tenglamaning har bir λ ildizining karraliligi xos qism fazo L ning o'lchamiga teng.

e) L fazo xos qism fazolarning to'g'ri yig'indisidan iborat.

59. Quyidagilarni isbotlang:

a) Kompleks chiziqli fazoda berilgan chiziqli operator matritsaning har bir xarakteristik qiymati xos qiymatdan iborat bo'ladi, demak, har bir chiziqli operator kamida bitta xos vektorga ega bo'ladi.

b) haqiqiy fazoda har bir haqiqiy xarakteristik son xos qiymat bo'ladi.

60*. Toq o'lchamli (masalan, uch o'lchamli) haqiqiy chiziqli fazoda berilgan chiziqli operator kamida bitta xos vektorga ega bo'lishini isbotlang.

61. a) chiziqli operatorning xarakteristik ko'phadi matritsaning determinanti va izi bazisning tanlanishiga bog'liq emasligini isbotlang;

b) xarakteristik ko'phadning koeffitsientlari ifodasini, xususiy holda tartibi *n* ga teng bo'lgan matritsaning izi va determinantini xarakteristik sonlar orqali ifodasini toping.

62. Chiziqli operatorning biror bazisidagi matritsasi diagonal elementlari $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ dan iborat bo'lgan yuqori yoki quyi uchburchakli ko'rinishda bo'lsin. Bu operatorning barcha xos qiymatlarini toping.

63. Uch o'lchamli kompleks chiziqli fazoda berilgan chiziqli operator φ ning biror bazisdagi matritsasi haqiqiy bo'lib, bu matritsaning hech bo'lmaganda bitta xarakteristik soni haqiqiy bo'lmasin. φ diagonallanuvchi ekanligini isbotlang.

64. *n* o'lchamli chiziqli fazoda berilgan chiziqli operator φ ning xarakteristik sonlari $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ lar bo'lsin. Quyidagi operatorning xarakteristik sonlari (karraligini hisobga olganda) nimaga teng:

a*) φ^2; b*) $\varphi^m, m \in N$;

c) φ^{-1} (agar φ teskarilanuvchi bo'lsa);

d) $f(\varphi)$, bunda $f(t)$ ixtiyoriy ko'phad ($\lambda_1, \dots, \lambda_n$har xil bo'lgan shartda);

65. §1 ning 7-masalasida berilgan chiziqli operatorlarning xos qiymatlari va xos vektorlarini toping.

66. $C\genfrac{}{}{0pt}{}{(1)}{[a,b]}$ fazoda berilgan differensiallash operatorining xos qiymatlari va xos vektorlarini toping.

67. Berilgan chiziqli fazolarning biror bazisida chiziqli operatorlarning xos qiymatlari va xos vektorlarini toping:

1) Q maydon ustidan; 2) R maydon ustida; 3) C maydon ustida quyidagi matritsalar bilan belgilangan.

$$a)\ \begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & -3\end{pmatrix};\quad b)\ \begin{pmatrix}3 & -2\\ 4 & -1\end{pmatrix};\quad c)\ \begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix};\quad d)\ \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix};$$

$$e)\ \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix};\quad f)\ \begin{pmatrix}1 & -2 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix};\quad g)\ \begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ 1 & 0 & 2\\ -2 & 1 & -1\end{pmatrix};$$

$$h)\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 3 & -1\\ -1 & 2 & 3\end{pmatrix};\quad i)\begin{pmatrix}3 & -2 & -1\\ 3 & 4 & -3\\ 2 & -4 & 0\end{pmatrix};\quad j)\ \begin{pmatrix}-1 & 1 & -2\\ 4 & 1 & 0\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix};$$

$$k)\begin{pmatrix}4 & -1 & 0\\ 3 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix};\quad l)\begin{pmatrix}3 & -4 & 0 & 2\\ 4 & -5 & -2 & 4\\ 0 & 0 & 3 & -2\\ 0 & 0 & 2 & 1\end{pmatrix};\quad m)\ \begin{pmatrix}2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

68. Z_p maydon ustidagi chiziqli fazoning biror bazisida quyidagi matritsalar bilan berilgan chiziqli operatorlarning xos qiymatlari va xos vektorlarini toping.

$$a)\ \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}, p = 2,3;\qquad b)\ \begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix}, p = 3,5;$$

$$c)\ \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}, p = 2,3;\qquad d)\ \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix},\ p = 2,3;$$

69. *R* ustidagi *L* fazoda biror bazisda matritsalari bilan berilgan chiziqli operatorlardan qaysi birlarini yangi bazisga o'tish bilan diagonal ko'rinishga keltirish mumkin.

$$a)\ \begin{pmatrix}1 & -1\\ -4 & 4\end{pmatrix};\quad b)\ \begin{pmatrix}4 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix};\quad c)\ \begin{pmatrix}2 & -1\\ 4 & 2\end{pmatrix};\quad d)\ \begin{pmatrix}3 & 12 & -4\\ -1 & -3 & 1\\ -1 & -12 & 6\end{pmatrix}$$

$$e)\ \begin{pmatrix}10 & -3 & -9\\ -18 & 7 & 18\\ 18 & -6 & -17\end{pmatrix};\qquad f)\ \begin{pmatrix}5 & -1 & -4\\ -12 & 5 & 12\\ 10 & -3 & -9\end{pmatrix}.$$

70. O'xshash matritsalarning xarakteristik ko'phadlari teng ekanligini ko'rsating.

71. Quyidagi matritsalardan qaysi biri diagonal matritsaga o'xshash?

$$a)\ \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix};\quad b)\ \begin{pmatrix}-1 & 3 & -1\\ -3 & 5 & -1\\ -3 & 3 & 1\end{pmatrix};\quad c)\ \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

§4. Invariant qism fazolar

L fazoda chiziqli operator φ berilgan bo'lsin. *L* ning *S* qism fazosi shunday bo'lsaki, $\forall a \in S$ dan $\varphi(a) \in S$ ekanligi kelib chiqsa, u holda *S* ga φ ga nisbatan invariant qism fazo deyiladi.

1-misol. Har bir chiziqli operatorning ikkita trivial invariant qism fazolari bor: nol qism fazo va fazolning o'zi. ■

2-misol. Nol operator, ayniy operator, umuman ixtiyoriy skalyar operator -bu operatorlarning barchasi uchun ixtiyoriy qism fazo invariantdir. ■

3-misol. L uch o'lchamli fazo, φ −noldan o'tuvchi o'q atrofida burish bo'lsin. U holda invariant qism fazolar quyidagilar bo'ladi: a) aylanish o'qi (bir o'lchamli invariant qismfazo); b) koordinata boshidan o'tuvchi va berilgan o'qqa ortogonal tekislik (ikki o'lchamli invariant qism fazo). ■

4-misol. Chiziqli operator φ uchun $ker\ \varphi$ va $Im\ \varphi$ qism fazolar invariant qism fazolardir.

Yechish: haqiqatdan ham, har bir $x \in ker\ \varphi$ uchun $\varphi(x) = 0 \in \ker\varphi$, ya'ni $\varphi(ker\ \varphi) = 0 \in \ker\varphi$ ga ega bo'lamiz. Har bir vector uchun $y = \varphi(x) \in\ Im\ \varphi$, demak, quyidagiga ega bo'lamiz: $\varphi(y) = \varphi^2(x) = \varphi\big(\varphi(x)\big) \in\ Im\ \varphi$ ya'ni $\varphi(\ Im\ \varphi\ ) \subset\ Im\ \varphi$ ■

5-misol. Darajasi *n* dan oshmaydigan barcha ko'phadlar fazosining darajasi *k* dan ($k \leq n$) oshmaydigan ko'phadlar qism fazosi differinsiallash operatoriga nisbatan invariant qism fazo bo'ladi.

Yechish: Haqiqatdan ham, darajasi *k* dan oshmaydigan ko'phadni diffensiallash natijasida uning darajasi kamayadi va demak, natijada yana darajasi *k* dan oshmaydigan ko'phad hosil bo'ladi. ■

6-misol. Uch o'lchamli fazoda quyidagi

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

matritsa orqali berilgan operatorga invariant bo'lgan barcha qism fazolarni toping.

Yechish: xarakteristik tenglamani tuzib uni yechamiz:

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 & 2 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ -1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Demak, $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = 2$ Bu qiymatlarni navbati bilan $(A - \lambda\, E)\, x = 0$ ga qo'yib quyidagilarni hosil qilamiz:

(2,2,-1) – $\lambda_1 = 2$ qiymatga mos xos qism fazo bazisi;

(1,1,0), (1,0,-1) - $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ qiymatga mos xos qism fazoning bazisi.

V_3 ni fiksirlangan to'g'ri burchakli $Oxyz$ koordinatalar sistemali uch o'lchamli evklid fazo ko'rinishida ifodalaymiz. U holda V_3 dagi bir o'lchamli qism fazolar koordinata boshidan o'tuvchi to'g'ri chiziqlar bilan ustma-ust tushadi, V_3 ning ikki o'lchamli qism fazolar koordinata boshidan o'tuvchi tekislaiklar bilan ustma-ust tushadi.

Shunday qilib, invariant qism fazolar butun fazo va nol qism fazo ya'ni koordinata boshi hisoblanadi. Bulardan tashqari yana quyidagi qism fazolar ham invariant bo'ladi: yo'naltiruvchi vectori $n(2,2,-1)$ bo'lgan to'g'ri chiziq bazis vektori $n_1(1,1,0)$ va $n_2(1,0,-1)$ bo'lgan L tekislikning, ya'ni $x_1 - x_2 + x_3 = 0$ tekislikning ixtiyoriy to'g'ri chizig'i; L tekislikning o'zi; n vektordan o'tuvchi ixtiyoriy tekislik. ■

Mashqlar

72. Chiziqli operatorning xos qism fazosi invariant ekanligini isbotlang.

73. Chiziqli operator φ chiziqli L fazoda berilgan bo'lsin. $S - \varphi$ ga nisbatan invariant bo'lgan L dagi qism fazo bo'lsin, $f(t)$ ko'phad bo'lsin. L da quyidagi qism fazolar φ ga nisbatan invariant ekanligini ko'rsating.

$a)\ \varphi\ (S);$ $b)\varphi^{-1}(S)$ (agar φ teskarilanuvchi bo'lsa);

$c)\ \varphi^m(S) \quad (m \geq 1);$ $d)\ Ker\ f(\varphi);$ $e)\ Im\ f(\varphi).$

74. Chiziqli operator invariant qism fazolarining a) ikkitasining (umuman istalgan sondagisining) yig'indisi; b) ikkitasining (umuman istalgan sondagisining) kesishmasi invariant qism fazolar bo'lishiligini isbotlang.

75. φ-chiziqli fazodagi chiziqli operator bo'lsin. $Im\ \varphi$ ni o'zida saqlovchi ixtiyoriy qism fazo invariant ekanligini isbotlang.

76. Agar chiziqli operator φ maxsusmas bo'lsa, u holda φ va φ^{-1} larning invariant qism fazolari bir xildir.

77. Agar a) birinchi *k* ta bazis vektorlar; b) oxirgi *n*-*k* ta bazis vektorlari invariant qism fazoning bazisini tashkil etsa, *n* o'lchamli chiziqli fazo chiziqli operatorining matritsasi qanday ko'rinishga ega bo'ladi.

78. a) chiziqli fazo chiziqli operatorining ikkita invariant qism fazolarining to'g'ri yig'indisidan iborat bo'lsin. U holda agar *A* va *B* kvadrat matritsalar bo'lsa, u holda almashtirish matritsasi $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$ ko'rinishga ega bo'lishini isbotlang.

79. Quyidagilarni isbotlang:

a) chiziqli operatorning xarakteristik ko'phadi uning invariant qism fazodagi qismining xarakteristik ko'phadi bo'lishini;

b) chiziqli fazo L ning chiziqli operator φ ning xarakteristik ko'phadining barcha ildizlari L aniqlangan maydonga tegishli bo'lsa, u holda L ning φ ga nisbatan invariant qism fazosi bu operatorning xos vektorini o'zida saqlaydi.

c) agar chiziqli fazo chiziqli operator φ ning invariant qism fazolarining to'g'ri yig'indisidan iborat bo'lsa, u holda φ ning xarakteristik ko'phadi φ ning bu invariant qism fazolardagi qisqartmalarining xarakteristik ko'phadlarining ko'paytmasidan iborat.

80. n-o'lchamli chiziqli fazoning chiziqli operatori n ta har xil qiymatlarga ega bo'lsin. Barcha invariant qism fazolarni toping va ularning sonini aniqlang.

81. n-o'lchamli chiziqli fazo L ning chiziqli operatori φ diagonallanuvchi bo'lsin. φ ga nisbatan invariant bo'lgan L dagi barcha qism fazolarni toping.

82. λ soni chiziqli fazo L da aniqlang chiziqli operatorning xos qiymati bo'lsin. L dagi $Im\ (\varphi - \lambda I)$ ni o'zida saqlovchi har qanday qism fazo φ ga nisbatn invariant ekanligini ko'rsating.

83*. Quyidagi tasdiqlarni isbotlang:

a) agar n-o'lchamli chiziqli fazodagi chiziqli operator xos vektorga ega bo'lsa, u holda uning *(n-1)* o'lchamli invariant qism fazosi mavjud;

b) A chiziqli operator φ ning biror ***e*** bazisidagi matritsasi, λ xos qiymati, ***a*** satr esa $a(A - \lambda E) = 0$ tenglama orqali aniqlangan bo'lsin. U holda $aX = 0$ tenglama ***e*** bazisda φ ga nisbatan *(n-1)* o'lchamli invariant qism fazoni aniqlaydi. Teskari tasdiq o'rinlimi?

c) Kompleks fazo chiziqli operatorining k-o'lchamli har qanday invariant qism fazosi *(k-1)* o'lchamli invariant qism fazoni o'z ichiga olishini ko'rsating.

84. §1 ning 7-masalasidagi chiziqli operatorlarga nisbatan barcha invariant qism fazolarni toping.

85. $\boldsymbol{C}^{(\mathbf{1})}_{(-\infty,\infty)}$ fazoda to'rtta vektorlarning chiziqli qobig'i berilgan bo'lsin. L ning o'lchamini aniqlash va L qism fazo differensiallash operatoriga nisbatan invariant bo'ladimi, agar $a)\ L = L(1, \cos t, \sin t, t)$; $c)\ L = L(e^t, cht, sht, e^{-t})$; $b)\ L = L(1, \cos^2 t, \ \sin^2 t, \cos 2t)$ $d)\ L = L\ (\cos^2 t, \ \sin^2 t, \sin 2t)$.

86. Chiziqli operator φ ning xos vektorlarning ixtiyoriy chiziqli qobig'I φ ga nisbatan invariant ekanligini isbotlang.

87. Uch o'lchamli fazoda quyidagi matritsalar

a)$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$

orqali berilgan chiziqli operatorga nisbatan invariant bo'lgan barcha qism fazolarni aniqlang.

88. Chiziqli fazoning noldan farqli barcha vektorlari chiziqli operator φ ning xos vektorlari bo'lishi uchun $\varphi = \alpha I, \alpha \epsilon P$ bo'lishi zarur va yetarli ekanligini isbotlang.

89. Cheksiz differensiallanuvchi funksiyalar *f(t)*, $t\epsilon R$ chiziqli fazosi D da quyidagi funksiyalar to'plami qism fazoni tashkil etishini ko'rsating:

a) Barcha ko'phadlar to'plami;

b) Darajasi n dan (n$\epsilon N \cup \{0\}$)oshmaydigan barcha ko'phadlar to'plami;

c) $e^{\lambda_1 t}, \dots e^{\lambda_n t}$ (n$\epsilon N \cup \{0\}, \lambda \epsilon R$) funksiyalarning barcha chiziqli kombinatsiyalari to'plami;

d) $f(t) = e^{\lambda t} p(t)$ ko'rinishdagi barcha funksiyalar to'plami, bundap(t)-ixtiyoriy ko'phad;

e) $p(t)cost,\ p(t)sint$ ko'rinishdagi barcha funksiyalar to'plami, bunda p(t)-ixtiyoriy ko'phad.

90. Barcha ko'phadlar fazosida ko'phadlarni t ga ko'paytirishdan iborat operator xos vektorlarga ham, invariant qism fazolarga ham (nol qism fazo va fazoning o'zidan farqli) ega emasligini ko'rsating.

91. Tartibi n ga teng bo'lgan, transponirlashga nisbatan invariant bo'lgan barcha matritsalar chiziqli fazosining qism fazolarini toping.

$\mathbf{92}^*.\, R_{n*n}$ fazoda $\varphi(x) = Ax$ operatorni qaraymiz, bunda A-fiksirlangan matritsa. R_{n*n} fazo φ ga nisbatan invariant bo'lgan n ta qism fazolarning to'g'ri yig'indisi bo'lishini ko'rsating.

$\mathbf{93}.\, R_{n*n}$ fazoda $\varphi(x) = Ax - xA$ operatorni qaraymiz, bunda A-fiksirlangan matritsa. U holda quyidagi to'plamlar φ ga nisbatan invariant qism fazoni tashkil etishlarini ko'rsating:

$\boldsymbol{a}$) izi nolga teng bo'lgan barcha matritsalar to'plami;

$\boldsymbol{b}$) yuqori uchburchakli barcha matritsalar to'plami (agar A yuqori uchburchakli matritsa bo'lsa);

$\boldsymbol{c}$) barcha qiyshiq simmetrik matritsalar to'plami (agar A qiyshiq simmetrik matritsa bo'lsa);

$\boldsymbol{d}$) barcha diagonal matritsalar to'plami (agar A diagonal matritsa bo'lsa).

94. R_{n*n}fazoda chiziqli operator quyidagi formula bilan aniqlangan bo'lsin: $\varphi(x) = A^T x + xA$ bunda, A fiksirlangan matritsalar to'plami R_{n*n} da φ operatorga nisbatan invariant qism fazoni tashkil qilishini ko'rsating.

95. R_{n*n} fazoda $\varphi(x) = A^{-1}xA \ (detA \neq 0)$ chiziqli operatorni qaraymiz. Quyidagi matritsalar to'plami operator φ ga nisbatan invariant qism fazolar bo'lishligini ko'rsating:

a) izi nolga teng bo'lgan barcha matritsalar to'plami;

b)barcha skalyar matritsalar;

c)barcha yuqori uchburchak matritsalar to′plami (agar A yuqori uchburchak matritsa bo'lsa);

d) barcha simmetrik matritsalar to'plami va qiyshiq simmetrik matritsalar to'plami (agar A ortogonal matritsa bo'lsa).

96. Chiziqli operator φ va ψ lar o'rin almashinuvchi bo'lsin. Quyidagilarni isbotlang:

a) Ulardan birining yadro va obrazlari ikkinchisiga nisbatan invariantdir;

b) operator φ ning xos qism fazosi operator ψ ga nisbatan invariantdir.

97*.Quyidagilarni isbotlang:

a) kompleks fazoning o'rin almashinuvchi ixtiyoriy ikkita operatori umumiy xos vektorga ega;

b) agar operatorlarning xos qiymatlari haqiqiy bo'lsa, yuqoridagi a) tasdiq haqiqiy fazolar uchun ham o'rinli.

98. Kompleks fazoning o'rin almashinuvchi operatorlari juftligidan tuzilgan ixtiyoriy G to'plami (hech bo'lmaganda cheksiz) uchun G dagi barcha operatorlar uchun xos vector mavjudligini isbotlang.

99. φ va ψ lar n-o'lchamli fazodagi o'rin almashinuvchi chiziqli operatorlar bo'lib, φ

operator n ta har xil xos qiymatlarga ega bo'lsin.U holda operator φ ning barcha xos vektorlari ψ operatorning ham xos vektorlaridan iborat bo'lishini va bu xos vektorlardan iborat bo'lgan bazisda φ va ψ operatorlarning matritsasi diagonal bo'lishini isbot qiling.

100. φ chiziqli operator dagonallashuvchi bo'lsin va uning har bir xos qism fazosi ψ o'peratorga nisbatan invariant bo'lsin. $\varphi \cdot \psi = \psi \cdot \varphi$ tenlikni isbot qiling.

KEYSLAR BANKI

1. Chiziqli fazolar. Qism fazolar. Ta'rif va misollar. Qism fazolar yig'indisi va kesishmasi. Chiziqli qobiq. Qism fazolarning to'g'ri yig'indisi.
2. Qism fazolar yig'indisi va kesishmasining o'lchamlari. Qism fazolar yig'indisi va kesishmasining bazalari. Fredgolm teoremasi.
3. Faktor-fazolar. Ekvivalentlik munosabati va faktor to'plam. Faktor fazo. Faktor fazoning o'lchovi.
4. Vektor fazolarning chiziqli almashtirishlari. Chiziqli almashtirishlar. Ta'riflar va misollar. Chiziqli almashtirishning matrisasi. Vektor obrazining koordinatalari. Har xil bazalardagi chiziqli almashtirish matrisalarining o'zaro bog'liqligi. Chiziqli almashtirishlar algebrasi.
5. Chiziqli almashtirishning obrazi va yadrosi. Vektor fazo qism fazosining obrazi va yadrosi. Xosmas chiziqli almashtirishlar.

6. Invariant qism fazolar. Invariant qism fazolar va keltirilmaslik. Almashtirishni indusirlash. Bir o’lchamli invariant qism fazolar, almashtirishning xos vektorlari va xos qiymatlari. Gamilton-Keli teoremasi.
7. Nilpotent va yarim sodda almashtirishlar. Nilpotent almashtirishlar. Yarim sodda almashtirishlar. Almashtirishning xarakteristik ildizlarini o’zida saqlaydigan maydon ustidagi yarim soddalik. Almashtirishni yarim sodda va nilpotent komponentalarga yoyish. Haqiqiy sonlar maydoni ustida yarim soddalik.
8. Matrisaning Jordan formasi. Jordan teoremasi.
9. Matrisalar o’xshashligi to’g’risida masala.
10. Ildizli yoyilma. Nilpotent almashtirishning kanonik ko’rinishi. Jordan teoremasining iboti.
11. Polinomial matrisalar. λ-matrisalarning ekvivalentlik masalasi. -matrisalarni kanonik ko’rinishga keltirish. λ-matrisalarning unimodulyar matrisalarga ekvivalentligi. λ-matrisalarni bo’lish. λ-matrisalarning skalyar ekvivalentligi. Skalyar matrisalarning o’xshashlik alomati. λ-matrisalarning elementar bo’luvchilari. Jordan teoremasining boshqa isboti.
12. Matrisali funksiyalar. Matrisali ko’phdalar. Matrisali funksiyalar. Lagranj-Silvester ko’phadlari.
13. Matrisali qatorlar. Matrisali funksiyalarning chiziqli tenglamalar sistemasini yechishga qo’llanilishi.

Mustaqil ta’lim mavzulari

2. Nilpotent va yarim sodda almashtirishlar.
3. Matritsaning Jordan formasi. Jordan teoremasi.
4. Matritsalar o’xshashligi to’g’risida masala.
5. Ildizli yoyilma.
6. Nilpotent almashtirishning kanonik ko’rinishi. Jordan teoremasining qo’llanilishi.
7. Polinomial matritsalar.
8. λ-matritsalarning ekvivalentlik masalasi.
9. λ-matritsalarni bo’lish. λ-matritsalarning skalyar ekvivalentligi.

10. Skalyar matritsalarning o'xshashlik alomati. λ-matritsalarning elementar bo'luvchilari.Jordan teoremasining boshqa isboti
11. Matritsali funktsiyalar.
12. Matritsali ko'phadlar.
13. Matritsali qatorlar.
14. Matritsali funktsiyalarning chiziqli tenglamalar sistemasini yechishga qo'llanilishi.
15. Polichiziqli (yarim chiziqli) algebra.
16. Polichiziqli formalarning fazosi.
17. Vektor fazolarning tenzor ko'paytmasi.
18. Chiziqli akslantirishlarning tenzor ko'paytmasi.

Glossariy(izohli lug'at)

Algebra(aljabr) – matematik fan bo'lib, unda gruppa, xalqa, maydon, struktura va shu kabi ob'ektlar o'rganiladi. Algebraning alohida shohobchasi elementlar algebralar. Qisqaroq ma'noda algebra tenglamalar yechish xaqidagi ta'limot deb qaraladi. Ancha keng ma'noda Algebra deganda ixtiyoriy tabiatli to'plamning elementlari ustida sonlarni qo'shish va ko'paytirish kabi odatdagi amallarni umumlashtiruvchi amallarni o'rganuvchi fan tushuniladi.

Algebraik to'ldiruvchi - Kvadrat matritsaning biror a_{ij} elementining (yoki biror elementiga oid) algebraik to'ldiruvchi deb bu elementning $(-1)^{i=j}$ ishora bilan olingan M_{ij} minoriga aytiladi.

Bazis - vektorlar fazosining bazisi (asosi)- vektorlar fazosidagi chiziqli erkli vektorlarning shunday sistemasidirki, bu fazoga tegishli har qanday vektor o'sha sistema vektorlarining chiziqli kombinatsiyasi shaklida ifodalanishi mumkin. Masalan, darajasi n dan yuqori bo'lmagan ko'phadlar fazosida $1, x, x^2 \dots x^n$ ko'phadlar sistema bazis bo'ladi.

Bezu teoremasi- ixtiyoriy ko‘pxadni chiziqli ikkixadga bo‘lishdan chiqadigan qoldiq xaqidagi teorema. U kuyidagicha ta’riflanadi: ixtiyoriy $f(x)$ ko‘pxadni $x-a$ ikkixadga bo‘lishdan chiqqan qoldiq $f(a)$ga teng. Bezu teoremasi uni birinchi bo‘lib ta’riflagan va isbot etgan fransuz matematigi Bezu nomi bilan atalgan.

Vektor fazo (chiziqli fazo) - odatdagi (uch o‘lchovli) fazoni umumlashtiruvchi tushuncha.

Maxsus matritsa- determinanti nolga teng bo‘lgan kvadrat matritsa.

Gruppa- a,b,c,…elementlarining G to‘plami bo‘lib, bu elementlar uchun ko‘paytirish (kompozitsiya) amali shunday aniqlanganki, G dan ma’lum tartibda olingan har qanday ikki a va b element uchun o‘sha to‘plamning o‘zidan olingan biror c element bir qiymatli ravishda mos qo‘yilgan; bu element a va b elementlarining ko‘paytmasi deb ataladi. Va ab bilan belgilanadi; shu bilan birga, Gning barcha elementlari uchun yuqorida qayd qilingan operatsiyaga nisbatan quyidagi talablar (aksioma, postulatlar) o‘rinli bo‘ladi:

1) To‘plamning har qanday ikki elementining ko‘paytmasi yoki biror elementining kvadrati shu to‘plamning o‘ziga tegishlidir:

2) To‘plamning har qanday uchta elementi uchun assotsiativ (gruppalash) qonuni bajariladi: $a(bc)=(ab)c$:

3) To‘plamda shunday ye element mavjudki, bu element uchun $ae=ea=a$ tenglik o‘rinli bo‘ladi, u element birlik element yoki gruppaning birligi yoki neytral element deb ataladi:

4) To‘plamning har qanday a elementi uchun o‘sha to‘plamga tegishli bo‘lgan shunday a^{-1} element mavjudki, $aa^{-1}=a^{-1}=a=e$ bo‘ladi. a^{-1} element a elementga teskari element deb ataladi.

Nolning bo‘luvchilari- xalqada $a\neq 0, b\neq 0$ bo‘lgan xolda $ab=0$ shartni qanoatlantiruvchi ikkita a *ва* b elementi. Sonlar xalqasida nolning bo‘luvchilari bo‘lmaydi, lekin ixtiyoriy xalqada masalan, matritsalar xalqasida nolning bo‘luvchilari bo‘lishi mumkin. Maydonda nolning bo‘luvchilari bo‘lmaydi.

Ko‘pxadning bo‘luvchisi- Agar $f=dg$ tenglikni qanoatlantiruvchi g ko‘pxad mavjud bo‘lsa, shu xolda va faqat shu xoldagina d ko‘pxad f ko‘pxadning bo‘luvchisi deyiladi, f ko‘pxad esa d ko‘pxadga bo‘linadigan ko‘pxad deyiladi. Boshqacha aytganda, P(x) xalqadagi f(x) ko‘pxadni o‘sha xalqadagi d(x) ko‘pxadga qoldiqli bo‘lganda nolga teng bo‘lgan qoldiq hosil bo‘lsa, d(x) ko‘pxad o‘sha xalqadagi f(x)ning bo‘luvchisi bo‘ladi.

Yevklid algoritmi-butun sonlar va bir o‘zgaruvchili ikki ko‘pxadning eng katta umumiy bo‘luvchisini topish usuli. Dastlab Yevklidning “Asoslar” kitobida ikki kesmaning umumiy o‘lchovliini topish usuli sifatida geometrik shaklda bayon qilingan edi. Butun sonlar xalqasida ham, bir o‘zgaruvchili ko‘pxadlar xalqasida ham eng katta umumiy bo‘luvchini topishning Yevklid algoritmi Yevklid xalqalaridagi biror umumiy algoritmining xususiy xolidir.

Gruppa birligi- gruppaning har qanday a elementi uchun $ae=a$ tenglikni qanoatlantiradigan ye elementi. Bu xolda $ea=a$ bo‘ladi. Gruppa birligi har bir gruppada mavjud bo‘lib, bir gruppada ikki turli birlik elementining mavjud bo‘lishi mumkin emas.

Xalqa birligi- xalqaning har qanday a elementi uchun $ae=a$ tenglikni qanoatlantiradigan ye elementi. Xalqa birligi har qanday xalqada ham mavjud bo‘lavermaydi. Masalan R maydondagi ko‘pxadlar xalqasida birlik mavjud, ammo juft sonlar xalqasida birlik element mavjud emas. Maydonda birlik hamma vaqt mavjud.

Birlik matritsa- bosh diagonalida birlar va qolgan joylarning hammasida nollar turgan kvadrat matritsa. Matritsalar xalqasida birlik matritsa xalqa birligi bo‘ladi.

Assotsiativlik (gruppalash) qonuni- binar operpsiyasi bo‘ysunadigan qonun. Agar binar amalini ko‘paytirish deb tushunilsa, u xolda assotsiativlik qonuni $a(bc)=(ab)c$ ko‘rinishda bo‘ladi.

Distributivlik qonuni- ayni bir to‘plamda aniqlangan ikkita binar operatsiyasini bir-biriga bog‘laydigan qonun. Agar bir operatsiyani ko‘paytirish, ikkinchisini qo‘shish deb qaralsa, u xolda distributivlik qonuni bunday ko‘rinishda bo‘ladi: $a(b+c)=ab+ac.$

Kommutativlik qonuni-binar operatsiyasi bo‘ysunishi mumkin bo‘lgan qonun. Agar binar operatsiyasini ko‘paytirish deb tushunilsa, u xolda kommutativlik qonuni bunday ko‘rinishda bo‘ladi: $ab=bc.$

Inersiya qonuni-Xaqiqiy kvadratik formalarning inersiya qonuni quyidagidan iborat: maxsusmas chiziqli almashtirish yordamida xaqiqiy koeffitsiyentli normal ko‘rinishga keltirilgan kvadratik formadagi musbat va manfiy kvadratlar soni bu almashtirishga bog‘liq emas. Bu jumla Xaqiqiy kvadratik formalar nazariyasining asosiy teoremalaridan biridir.

Kvadratik forma- quyidagi bir jinsli ikkinchi darajali polinom:

$$F(x_1, x_2, \dots x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_i x_j$$

Xalqa-ixtiyoriy tabiatli elementlar to‘plami bo‘lib, ular uchun qo‘shish va ko‘paytirish amallari aniqlangan. Bu amallardan har biri xalqaning tartiblangan elementlarining har qanday juftiga shu xalqaning bir elementini mos keltiradi, shu bilan birga quyidagi shartlar bajariladi:

1. $a+b=b+a-$qo‘shishning kommutativligi, 2. $(a+b)+c=a+(b+c)-$ qo‘shishning assotsiativligi, 3. ixtiyoriy a va b lar uchun $a+x=b$ tenglama yagona bir yechimga ega, 4. qo‘shishga nisbatan ko‘paytirishning distributligi:

$a(b+c)=ab+ac, \quad (b+c)a=ba+ca.$

Qo‘shma kompleks sonlar- $-z=a+bi$ *ва* $\bar{z}=a-bi$ ko‘rinishdagi kompleks sonlar

Kompleksi sonlar- birinchi marta tasvirlashda $a+bi$ ko‘rinishdagi ifodalardir, bunda a va b –xaqiqiy sonlar, i-biror simval.

Tenglamaning ildizi- $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_n=0$ ko‘rinishdagi algebraik tenglamaning ildizi x argumentning bu tenglamani ayniyatga aylantiruvchi son qiymatidir.

Kramer qoidasi- chiziqli tengamalar sistemasini yechish qoidasi.

Ko‘pxadning Karrali ildizi- $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_n$ ko‘pxadning karrali ildizi shunday x_0 sonki , $f(x)$ ko‘pxad $(x-x_0)^k$ binom darajasiga qoldiqsiz bo‘linadi, lekin $(x-x_0)^{k+1}$ ga bo‘linmaydi, bunda $1<k\le n.k$ -natural son.

Kriteriy- zaruriylik va yetarlilik alomati.

Misollar: 1.) Tekislikda sirkul va chizg‘ich yordamida yasash masalasini xal qilish mumkinligining kriteriysi shundan iboratki, biror kesmaning (masalada yasalishi talab qilinadigan kesmaning) uzunligi berilgan kesmalar uzunliklari orqali chekli sondagi asosiy amallar (qo‘shish, ayirish, ko‘paytirish, bo‘lish va kvadrat ildiz chiqarish) orqali ifodalanadigan musbat funksiya bo‘lishi kerak. 2.) Qatorning yaqinlashuvi bo‘lishiga oid Bolsano-Koshi kriteriy quyidagidan iborat: istagancha kichik bo‘lgan ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun ε ga bog‘liq bo‘lgan shunday N son mavjud bo‘lsaki, har qanday $n > N$ va har qanday $p \geq 1$ uchun

$\left|U_{n+1} + U_{n+2} + ...U_{n+p}\right| < \varepsilon$ tengsizlik o‘rinli bo‘lganda va faqat shu xolda $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

Qator yaqinlashuvchi bo‘ladi.

Ko‘pincha kriteriy deganda faqat yetarlilik alomati nazarda tutiladi, masalan ko‘pxadlarning keltirilmaslik kriteriysi Eyzenshteyn kriteriysi va boshqalar yechish vositasi.

Kroneker-Kapelli teoremasi- chiziqli algebraning asosiy teoremalaridan biri bo‘lib, m noma’lum n ta chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning yetarli va zaruriy shartini ifodalaydi.

Lagranjning interpolyatsion formulasi – darajasi m bo‘lgan $L(x)$ ko‘pxadni topish formulasi bo‘lib, bu ko‘pxad $f(x)$ funksiya aniqlangan $[a, b]$ oraliqning $(m+1)$ nuqtalarida tayinli $f(x_i)$ (bunda $i = 1, 2, ..., m$) qiymatlar qabul qiladi.

Laplas teoremasi- n-tartibli determinatda ixtiyoriy $k(k < n)$ yo‘l yoki ustun ajratamiz (belgilaymiz), u xolda Laplas teoremasini bunday ta’riflash mumkin: n-tartibli determinant o‘sh ixtiyoriy ravishda ajratilgan k ta yo‘l (ustun) elementlaridan tuzilgan k-tartibli barcha minorlar bilan ularning algebraik to‘ldiruvchilari ko‘paytmalarining yig‘indisiga teng.

Chiziqli algebra- algebraning bo‘limi bo‘lib, unda chekli o‘lchovli chiziqli fazolardagi chiziqli almashtirishlar o‘rganiladi.

Chiziqli almashtirish- chiziqli X fazoni chiziqli Y fazoga, xususiy xolda o‘ziga shunday A almashtirishki, uning quyidagi xossalaribor:

$A(x+y) = A(x) + A(y),\ A(\lambda x) = \lambda A(x)$ bunda x va y-chiziqli fazoning ixtiyoriy vektorlari, λ esa ixtiyoriy son.

Chiziqli tenglama- faqat birinchi darajali noma’lumlar (o‘zgaruvchilar) qatnashadigan tenglama.

Chiziqli operator- chiziqli fazoni o‘ziga yoki boshqa chiziqli fazoga almashtiruvchi shunday A almashtirishki, u quyidagi shartlarni qanoatlantiradi: $A(x+y) = A(x) + A(y),\ A(\lambda x) = \lambda A(x)$, bunda x va u – chiziqli fazoning ixtiyoriy vektorlari, λ -ixtiyoriy son.

Kvadratik forma matritsasi- $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_i x_j$ kvadratik formaning koeffitsiyentlaridan tuzilgan kvadrat matritsa Kvadratik forma matritsa doimo simmetrik matritsa bo‘ladi.

Ko‘pxad(polinom)-R maydondagi n no’malumli (ko‘pxad) –R maydondagi n noma’lum birxadlardan istaganchasining yig‘indisi.

Muavr formulasi- trigonometrik shaklda tasvirlangan kompleks sonni darajaga ko‘tarishga imkon beradigan formula muavr formulasi bunday ko‘rinishga ega: $z^n = [\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$.

Eng katta umumiy bo'luvchi-bir necha natural sonning Eng katta umumiy bo'luvchi - $a_1, a_2, ..., a_n$ sonlaridan har biri bo'linadigan musbat sonlardan eng kattasi.

Eng kichik umumiy bo'linuvchi- $a_1, a_2, ... a_n$ natural sonlarning Eng kichik umumiy bo'linuvchi o'sha sonlardan har biriga bo'linadigan eng kichik natural son.

Maxsusmas matritsa- D(A) determinanti noldan farqli bo'lgan n-tartibli A_{ij} kvadrat matritsa (yo'llari soni ustunlari soniga teng) n-tartibli maxsusmas matritsa rangi n ga teng.

Keltirilmaydigan ko'pxad- ko'paytuvchilarga (ya'ni koeffitsiyentlari R maydondan olingan va darajasi noldan yuqori bo'lgan ko'pxadlarga) ajralmaydigan ko'pxad.

A-matritsaning normal Jordan formasi- $\begin{pmatrix} A_1\ 0 \ldots 0 \\ 0\ A_2 \ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ 0\ \ 0 \ldots A_p \end{pmatrix}$ ko'rinishdagi matritsa bo'lib,

bunda $A_j\,(i = 1,\ 2, \ldots p)$ biror tartibli quyidagi kvadrat matritsa $\begin{pmatrix} \lambda_i\ \ 1\ 0 \ldots 0 \\ 0\ \lambda_i\ 1 \ldots 0 \\ 0\ \ 0\ \lambda_i 1 \ldots 0 \\ 0\ \ 0\ \ 0 \ldots \lambda_i \end{pmatrix}$

Nol matritsa- butunlay nollardan tuzilgan matritsa.

Ko'pxadlarning umumiy bo'linuvchisi-Agar d ko'pxad har bir $f_i\,(i = 1, 2, \ldots, k)$ ko'pxad uchun ko'pxadning bo'luvchisi bo'lsa; u xolda d ko'pxad $f_1, f_2, \ldots, f_k$ ko'pxadlarning umumiy bo'luvchisi deyiladi.

Kompleks sonlar Algebrasining asosiy teoremasi-kompleks sonlar maydonida darajsi $n(n > 0)$ bo'lgan har qanday $f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$ ko'pxad [bunda $a_0 \neq o]\ f(z) = 0$ ni qanoatlantiradigan kamida bitta z_1 ildizga ega ekanligi xaqidagi teoremadir.

O'xshash matritsalar- Agar shunday bir maxsusmas S matritsa mavjud bo'lib, $B = CAC^{-1}$ bo'lsa, tartiblari bir xil bo'lgan ikkita A va V kvadrat matritsa o'xshash matritsalar deyiladi.

Qism fazo – P fazo elementlarining P' qism to'plami bo'lib, u ham R fazo ma'nosidagi fazodir.

Maydon- birlikka ega bo'lgan kommutativ, assotsiativ R xalqa, lekin bu xolda u faqat bitta elementdan iborat bo'lmasligi va unda bo'lish amalini (nolga bo'lishdan boshqa hamma hollarda) bir qiymati bajarish mumkin bo'lishi kerak.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. B.L. Van der Varden. Algebra. M., Nauka, 1976.
2. Kostrikin A.I. Vvedeniye v algebru. M., 1977, 495 str.
3. Leng S. Algebra. M. Mir, 1968.
4. Faddeyev D.K. Leksii po algebre. M., Nauka, 1984, 415 st.
5. Faddeyev D.K., Sominskiy I.S. Sbornik zadach po vysshey algebre. M., Nauka, 1977.
6. Sbornik zadach po algebre pod redaksiyey. A.I. Kostrikina, M., Nauka, 1985.
7. Xojiyev J., Faynleb A.S. Algebra va sonlar nazariyasi kursi, Toshkent, «O'zbekiston», 2001.
8. Narzullayev U.X., Soleyev A.S. Algebra i teoriya chisel. I-II chast, Samarkand, 2002.
9. Isroilov M.I., Soleyev A.S. Sonlar nazariyasi. - T.: Fan, 2003.
10. Iskandarov R.I. Gruppalar nazariyasi. - Samarqand, SamDU, 1970.
11. Iskandarov R.I., Nazarov A. Algebra va sonlar nazariyasi. 1, 2- qism. T.: O'qituvchi, 1977.
12. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре.- М.: Наука, 1984.

13. Шнеперман Л.Б.Сборник задач по алгебре и теории чисел.-Минск, Вышейшая школа, 1982.
14. Ayupov Sh.A., Omirov B.A., Xudoyberdiyev A.X.,Xaydarov F.H. Algebra va sonlar nazariyasi . Tafakkur gulshani . T.2019
15. Xojiev J.X. Faynleyb A.S. Algebra va sonlar nazariyasi kursi, Toshkent, «O‘zbekiston», 2001 y.
16. Kostrikin A.I. Vvedenie v algebru. M. Nauka, 2012
17. A.Soleev, U.X.Narzullaev, X.X.Ro’zimuradov. “Algebra va sonlar nazariyasi» fanidan masala vamashqlar to’plami I. O’quv qo’llanma. 2021 yil. 176-s.
18. A.Soleev, U.X.Narzullaev, X.X.Ro’zimuradov. “Algebra va sonlar nazariyasi» fanidan mashqlar to’plami II. O’quv qo’llanma. 2022 yil.
19. A.Soleev, U.X.Narzullaev, X.X.Ro’zimuradov, X.Nosirova. “Algebra va sonlar nazariyasi» fanidan mashqlar to’plami III. Chiziqli fazolar va chiziqli operatorlar”. O’quv qo’llanma. 2023 yil. -250 s.