O'QUV-USLUBIY MAJMUA

TABIIY JARAYONLARNI MATEMATIK MODELLASHTIRISH

2025

MATEMATIKA VA AMALIY MATEMATIKA

MALAKA OSHIRISH MARKAZI: SamDu Huzuridagi PKQTVUMOMM

O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY TA’LIM, FAN VA INNOVATSIYALAR VAZIRLIGI

OLIY TA’LIM TIZIMI KADRLARINI QAYTA TAYYORLASH VA MALAKASINI OSHIRISH INSTITUTI

SHAROF RASHIDOV NOMIDAGI SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI HUZURIDAGI PEDAGOG KADRLARNI QAYTA TAYYORLASH VA ULARNING MALAKASINI OSHIRISH MINTAQAVIY MARKAZI

“Tasdiqlayman”
Sharof Rashidov nomidagi Samarqand davlat universiteti huzuridagi pedagog kadrlarni qayta tayyorlash va ularning malakasini oshirish mintaqaviy markazi direktori__________A.Babayarov
“____” ___________2025 yil

“TABIIY JARAYONLARNI MATEMATIK MODELLASHTIRISH” MODULI BO‘YICHA

O‘ Q U V – U S L U B I Y M A J M U A

Qayta tayyorlash va malaka oshirish kursi yo‘nalishi: “Matematika va amaliy matematika”

Tinglovchilar kontingenti: Oliy ta’lim muassasalarining pedagoglari

SAMARQAND – 2025

Mazkur ishchi o‘quv dasturi Oliy ta’lim, fan va innovatsiyalar vazirligining 2024-yil 27-dekabrdagi 485-sonli buyrug’i bilan tasdiqlangan o‘quv reja va dastur asosida tayyorlandi.

Tuzuvchi **I.N.Bozorov –** f.-m.f.n., dotsent)

Taqrizchi: **M.E.Mo’minov** - f.-m.f.d. (DSc)

O‘quv-uslubiy majmua Sharof Rashidov nomidagi Samarqand davlat universiteti Kengashining 2025-yil 30-yanvardagi 7-sonli bayonnomasi bilan ma’qullangan.

MUNDARIJA

I. ISHCHI DASTUR
KIRISH

Mazkur ishchi oʻquv dasturi Oʻzbekiston Respublikasining 2020-yil 23-sentabrda tasdiqlangan “Ta’lim toʻgʻrisida” Qonuni, Oʻzbekiston Respublikasi Prezidentining 2015-yil 12-iyundagi “Oliy ta’lim muassasalarining rahbar va pedagog kadrlarini qayta tayyorlash va malakasini oshirish tizimini yanada takomillashtirish toʻgʻrisida” PF-4732-son, 2019-yil 27-avgustdagi “Oliy ta’lim muassasalari rahbar va pedagog kadrlarining uzluksiz malakasini oshirish tizimini joriy etish toʻgʻrisida” PF-5789-son, 2019-yil 8-oktabrdagi “Oʻzbekiston Respublikasi oliy ta’lim tizimini 2030-yilgacha rivojlantirish konsepsiyasini tasdiqlash toʻgʻrisida” PF-5847-son, 2020-yil 29-oktabrdagi “Ilm-fanni 2030- yilgacha rivojlantirish konsepsiyasini tasdiqlash toʻgʻrisida” PF-6097-son, 2022-yil 28-yanvardagi “2022-2026 yillarga moʻljallangan Yangi Oʻzbekistonning taraqqiyot strategiyasi toʻgʻrisida” PF-60-son, 2023-yil 25-yanvardagi “Respublika ijro etuvchi hokimiyat organlari faoliyatini samarali yoʻlga qoʻyishga doir birinchi navbatdagi tashkiliy chora-tadbirlar toʻgʻrisida” PF-14-son, Oʻzbekiston Respublikasi Prezidentining 2023-yil 11-sentabrdagi “Oʻzbekiston — 2030” strategiyasi toʻgʻrisida” PF-158-son Farmonlari, shuningdek, Oʻzbekiston Respublikasi Prezidentining 2024-yil 21-iyundagi “Aholi va davlat xizmatchilarining korrupsiyaga qarshi kurashish sohasidagi bilimlarini uzluksiz oshirish tizimini joriy qilish chora-tadbirlari toʻgʻrisida” PQ-228-son, Oʻzbekiston Respublikasi Prezidentining 2021-yil 17-fevraldagi “Sun’iy intellekt texnologiyalarini jadal joriy etish uchun shart-sharoitlar yaratish chora-tadbirlari toʻgʻrisida” PQ-4996-son qarorlari va Oʻzbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasining “Oliy ta’lim muassasalari rahbar va pedagog kadrlarining malakasini oshirish tizimini yanada takomillashtirish boʻyicha qoʻshimcha chora- tadbirlar toʻgʻrisida” 2019-yil 23-sentabrdagi 797-son hamda Oʻzbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasining “Oliy ta’lim tashkilotlari rahbar va pedagog kadrlarini qayta tayyorlash va malakasini oshirish tizimini samarali tashkil qilish chora-tadbirlari toʻgʻrisida” 2024-yil 11-iyuldagi 415-son Qarorlarida belgilangan ustuvor vazifalar mazmunidan kelib chiqqan holda tuzilgan boʻlib, u oliy ta’lim muassasalari pedagog kadrlarining kasb mahorati hamda innovatsion kompetentligini rivojlantirish, sohaga oid ilgʻor xorijiy tajribalar, yangi bilim va malakalarni oʻzlashtirish, shuningdek amaliyotga joriy etish koʻnikmalarini takomillashtirishni maqsad qiladi.

Tabiiy jarayonlarni matematik modellashtirish moduli ishchi oʻquv dasturida tinglovchilar oʻzlarini koʻplab qiziqtirgan savollarga javob topadilar. Jumladan, model va modellashtirish tushunchalari, matematik model tushunchasi va ularga misollar, matematik modelni ifodalash shakllari, matematik modellarga qoʻyiladigan asosiy talablar, matematik modellarni qurish metodlari, matematik modellarning nazariy va amaliy tadqiqoti, ulariing adekvatligi, jarayonlarni modellashtirishda tabiatning saqlanish qonunlaridan va boshqa usullardan foydalanish bilan tanishadi.

Dasturda hozirgi vaqtda pedagog va yosh olimlar matematika va amaliy matematika sohasida ilmiy tadqiqot usullaridan foydalanishda tadqiqotda uchraydigan muammolar, ya’ni tadqiqot usullariga qoʻyiladigan umumiy talablar, matematika va amaliy matematikada matematik modellashtirish bosqichlarini oʻrganish, tahlil qilish hamda muammolarning matematik modellarini ishlab chiqish va tatbiq etish bo‘yicha bilim, ko‘nikma va malakalarga ega bo‘ladilar.

Modulning maqsadi va vazifalari

O‘quv modulning maqsadi: pedagog kadrlarni qayta tayyorlash va malaka oshirish kursi tinglovchilarini innovatsion yondoshuvlar asosida o‘quv-tarbiyaviy jarayonlarni tashkil etishda ilmiy tadqiqot usullari va natijalaridan samarali foydalanish, loyihalashtirish, sohadagi ilg‘or tajribalar asosida ilmiy izlanishlarni olib borish hamda ularning ijodiy faolligini rivojlantirish bo‘yicha kasbiy bilim, ko‘nikma va malakalarini takomillashtirishdan iborat.

O‘quv modulining vazifalari: “Matematika va amaliy matematika” mutaxassislari malakasini oshirish, matematika va amaliy matematika yo‘nalishida pedagog kadrlarning kasbiy bilim, ko‘nikma, malakalarini takomillashtirish va rivojlantirish; pedagoglarning ijodiy-innovatsion faollik darajasini oshirish; pedagog kadrlar tomonidan zamonaviy axborot-kommunikatsiya texnologiyalari, zamonaviy ta’lim va innovatsion texnologiyalar sohasidagi ilg‘or xorijiy tajribalarning o‘zlashtirilishini ta’minlash; o‘quv jarayonini tashkil etish va uning sifatini ta’minlash borasidagi ilg‘or xorijiy tajribalar, zamonaviy yondashuvlarni o‘zlashtirish; “**Matematika va amaliy matematika**” yo‘nalishida qayta tayyorlash va malaka oshirish jarayonlarini fan va ishlab chiqarishdagi innovatsiyalar bilan o‘zaro integratsiyasini ta’minlash.

Modul bo‘yicha tinglovchilarning bilimi, ko‘nikmasi, malakasi va kompetensiyalariga qo‘yiladigan talablar

“Matematika va amaliy matematika” modulini o‘zlashtirishda amalga oshiriladigan masalalar doirasida**:**

Tinglovchi:

- matematik model tushunchasini;
- matematik modelni qurish va ularni tadqiq qilish uslublarini;
- matematik modellarga qo‘yiladigan asosiy talablarini;
- matematik modellarni qurish metodlarini;
- Maltus va Fyurxst-Perl modellarini;
- chiziqli dasturlash masalalari va Demografik modellarni;
- «Yirtqich-o‘lja» sistemasining o‘zaro munosabat modelini ***bilishi*** kerak.

Tinglovchi:

- jarayonlarni modellashtirishda tabiatning saqlanish qonunlaridan va boshqa usullardan foydalanish;
- matematik modellarning nazariy va amaliy tadqiqoti, ulariing adekvatligini baholash;
- matematik model va uning real ob’ekti orasidagi muvofiqlilikni izohlash ***ko‘nikmalariga*** ega bo‘lishi lozim.

Tinglovchi:

- matematik modelni ifodalash shakllarini tahlil etish;
- jamiyat rivojlanishining demografik modelidan foydalanish;
- jarayonlarni modellashtirishda tabiatning saqlanish qonunlaridan va boshqa usullardan foydalanish;
- Epidemiya modeli asoslarini o‘zlashtirish;
- massa (materiya)ning saqlanish qonunini amaliy ahamiyatini ochib berish;
- bilish jarayonida va insoniing amaliy faoliyatida modellashtirishning rolini ochib berish ***malakalariga*** ega bo‘lishi lozim.

Tinglovchi:

- ierarxiya prinsipidai foydalanib matematik modellar yaratish;
- populyatsiya chiziqsiz modelining uch turdagi rejimini amaliyotga tatbiq etish;
- o‘zaro ta’sirlashuvchi populyatsiyalar sonini modellashtirish va tahlil qilish;
- matematik modellashtirishda variatsion prinsiplardan foydalanish kompetensiyalariga ega bo‘lishi lozim.

Modulni tashkil etish va o‘tkazish bo‘yicha tavsiyalar

“Tabiiy jarayonlarni matematik modellashtirish” moduli nazariy va amaliy mashg‘ulotlar shaklida olib boriladi. Modulni o‘qitish jarayonida: nazariy mashg‘ulotlarda zamonaviy kompyuter texnologiyalari yordamida taqdimot, video dars va elektron-didaktik texnologiyalari;

amaliy mashg‘ulotlarda tinglovchilar o‘quv modullari doirasidagi ijodiy topshiriqlar, keyslar, o‘quv loyihalari, texnologik jarayonlar bilan bog‘liq vaziyatli masalalar asosida amaliy ishlarni bajarish va mustaqil holda o‘quv va ilmiy adabiyotlardan, elektron resurslardan, tarqatma materiallardan foydalanishnish nazarda tutiladi.

Modulning o‘quv rejadagi boshqa modullar bilan bog‘liqligi va uzviyligi

“Tabiiy jarayonlarni matematik modellashtirish” moduli mazmuni o‘quv rejadagi “Chiziqli algebraning tatbiqlari”, “Pedagogik faoliyatda raqamli kompetensiyalar”, “Ilmiy va innovatsion faoliyatni rivojlantirish” va “Pedagogning kasbiy kompetensiyalarini rivojlantirish” o‘quv modullari bilan uzviy bog‘langan holda pedagoglarning kasbiy pedagogik tayyorgarlik darajasini orttirishga xizmat qiladi.

Modulning oliy ta'limdagi o‘rni

Modulni o‘zlashtirish orqali tinglovchilar ilmiy pedagogik va ilmiy tadqiqot ishlari olib borilayotgan ta'lim muassasalarning ob'ekti, uslubiy ko‘rsatmalar, yo‘riqnomalar va boshqa hujjatlarni o‘rganish, ilmiy tadqiqot ishlarini olib borish, ularni tahlil qilish, ilmiy tadqiqot natijalarini amaliyotga tatbiq etish bo‘yicha zaruriy bilimlar hamda kasbiy kompetentlikka ega bo‘ladilar.

MODUL BO‘YICHA SOATLAR TAQSIMOTI

№	Modul mavzulari	Auditoriya o‘quv yuklamasi			
		JAMI	Nazariy	Amaliy mashqlar	Ko’chma mashqlar
1.	Matematik modelni qurish va ularni tadqiq qilish uslublari.	4	2	2	
2.	Jarayonlarni modellashtirishda tabiatning saqlanish qonunlaridan va boshqa usullardan foydalanish.	6	2	4	
3.	Chiziqli dasturlash masalalari va Demografik modellar.	4	2	2	
4.	Raqobatning ayrim modellari.	4	2	2	
	Jami:	**18**	**8**	**10**	

NAZARIY MASHG‘ULOTLAR MAZMUNI

1-MAVZU: Matematik modelni qurish va ularni tadqiq qilish uslublari (2 soat) Reja:

1. Model va modellashtirish tushunchalari.
2. Matematik model tushunchasi.
3. Matematik modellarni qurish bosqichlari va metodlari.

2-MAVZU: Jarayonlarni modellashtirishda tabiatning saqlanish qonunlaridan va boshqa usullardan foydalanish (2 soat)

1. Energiya, materiya va impulsning saqlanish qonunlaridan foydalanish.
2. Matematik modellashtirishda variatsion prinsipdan foydalanish.
3. Ierarxiya prinsipidai foydalanib, matematik modellar qurish.

3-MAVZU: Chiziqli dasturlash masalalari va Demografik modellar (2 soat)

Reja:

1. Chiziqli dasturlashning umumiy masalasi. Transport masalasi. Jamiyat rivojlanishining demografik modeli.

2. Maltus va Fyurxst-Perl modellari. Populyatsiya chiziqsiz modelinint uch turdagi rejimi.

4-MAVZU: Raqobatning ayrim modellari. Biologik modellar (2 soat)

Reja:

1. Raqobatning ayrim modellari.
2. Biologik modellar.

AMALIY MASHG‘ULOTLAR MAZMUNI

1-MAVZU: Matematik modelni qurish va ularni tadqiq qilish uslublari (2 soat)

Reja:

1. Model va modellashtirish tushunchalari.
2. Matematik model tushunchasi.
3. Matematik modellarni qurish bosqichlari va metodlari.

2-MAVZU: Jarayonlarni modellashtirishda tabiatning saqlanish qonunlaridan va boshqa usullardan foydalanish (4 soat)

1. Energiya, materiya va impulsning saqlanish qonunlaridan foydalanish.
2. Matematik modellashtirishda variatsion prinsipdan foydalanish.
3. Ierarxiya prinsipidai foydalanib, matematik modellar qurish.

3-MAVZU: Chiziqli dasturlash masalalari va Demografik modellar (2 soat)

Reja:

1. Chiziqli dasturlashning umumiy masalasi. Transport masalasi. Jamiyat rivojlanishining demografik modeli.

2. Maltus va Fyurxst-Perl modellari. Populyatsiya chiziqsiz modelinint uch turdagi rejimi.

4-MAVZU: Raqobatning ayrim modellari (2 soat)

Reja:

1. Raqobatning ayrim modellari.

2. Biologik modellar.

O‘QITISH SHAKLLARI

Mazkur modul bo‘yicha quyidagi o‘qitish shakllaridan foydalaniladi:

- ma'ruzalar, amaliy mashg‘ulotlar (ma'lumotlar va texnologiyalarni anglab olish, motivatsiyani rivojlantirish, nazariy bilimlarni mustahkamlash);
- davra suhbatlari (ko‘rilayotgan loyiha yechimlari bo‘yicha taklif berish qobiliyatini rivojlantirish, eshitish, idrok qilish va mantiqiy xulosalar chiqarish);
- bahs va munozaralar (loyihalar yechimi bo‘yicha dalillar va asosli argumentlarni taqdim qilish, eshitish va muammolar yechimini topish qobiliyatini rivojlantirish).

II. MODULNI O‘QITISHDA FOYDALANILADIGAN INTERFAOL TA’LIM METODLARI “KWHL” metodi

Metodning maqsadi: Mazkur metod tinglovchilarni yangi axborotlar tizimini qabul qilishi va bilimlarni tizimlashtirishi uchun qo‘llaniladi, shuningdek, bu metod tinglovchilar uchun mavzu bo‘yicha qo‘yidagi jadvalda berilgan savollarga javob topish mashqi vazifasini belgilaydi.

Izoh. *KWHL:*
Know – nimalarni bilaman?
Want – nimani bilishni xohlayman?
How - qanday bilib olsam bo‘ladi?
Learn - nimani o‘rganib oldim?

“KWHL” metodi	
1. Nimalarni bilaman: -	***2. Nimalarni bilishni xohlayman, nimalarni bilishim kerak:*** -
3. Qanday qilib bilib va topib olaman: -	***4. Nimalarni bilib oldim:*** -

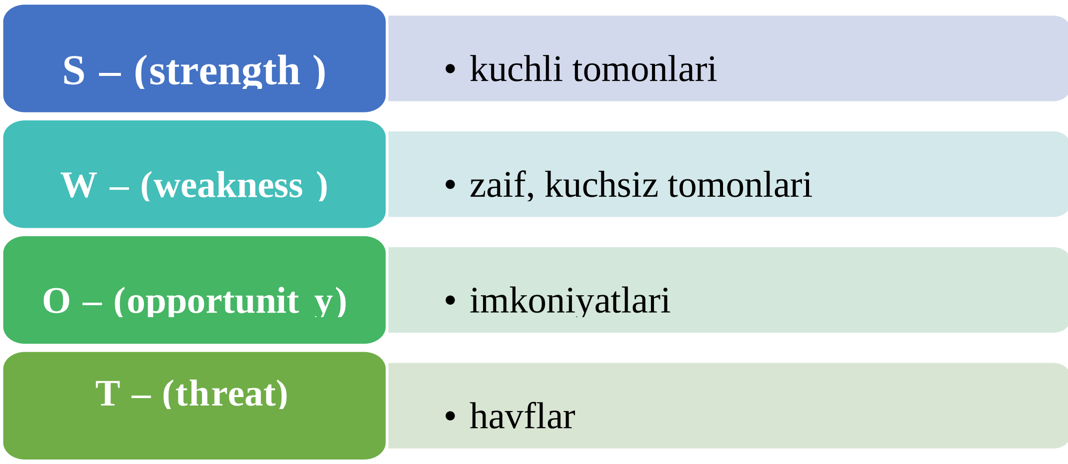
“W1H” metodi

Metodning maqsadi: Mazkur metod tinglovchilarni yangi axborotlar tizimini qabul qilishi va bilimlarni tizimlashtirishi uchun qo‘llaniladi, shuningdek, bu metod tinglovchilar uchun mavzu bo‘yicha qo‘yidagi jadvalda berilgan oltita savollarga javob topish mashqi vazifasini belgilaydi.

What?	Nima? (ta’rifi, mazmuni, nima uchun ishlatiladi)	
Where?	Qaerda (joylashgan, qaerdan olish mukin)?	
What kind?	Qanday? (parametrlari, turlari mavjud)	
When?	Qachon? (ishlatiladi)	
Why?	Nima uchun? (ishlatiladi)	
How?	Qanday qilib? (yaratiladi, saqlanadi, to‘ldiriladi, tahrirlash mumkin)	

“SWOT-tahlil” metodi

Metodning maqsadi: mavjud nazariy bilimlar va amaliy tajribalarni tahlil qilish, taqqoslash orqali muammoni hal etish yo‘llarni topishga, bilimlarni mustahkamlash, takrorlash, baholashga, mustaqil, tanqidiy fikrlashni, nostandart tafakkurni shakllantirishga xizmat qiladi.



2.1-rasm.

“VEER” metodi

Metodning maqsadi: Bu metod murakkab, ko‘ptarmoqli, mumkin qadar, muammoli xarakteridagi mavzularni o‘rganishga qaratilgan. Metodning mohiyati shundan iboratki, bunda mavzuning turli tarmoqlari bo‘yicha bir xil axborot beriladi va ayni paytda, ularning har biri alohida aspektlarda muhokama etiladi. Masalan, muammo ijobiy va salbiy tomonlari, afzallik, fazilat va kamchiliklari, foyda va zararlari bo‘yicha o‘rganiladi. Bu interfaol metod tanqidiy, tahliliy, aniq mantiqiy fikrlashni muvaffaqiyatli rivojlantirishga hamda o‘quvchilarning mustaqil g‘oyalari, fikrlarini yozma va og‘zaki shaklda tizimli bayon etish, himoya qilishga imkoniyat yaratadi. “Veer” metodidan ma’ruza mashg‘ulotlarida individual va juftliklardagi ish shaklida, amaliy va seminar mashg‘ulotlarida kichik guruhlardagi ish shaklida mavzu yuzasidan bilimlarni mustahkamlash, tahlili qilish va taqqoslash maqsadida foydalanish mumkin.

Muammoli savol					
1-usul		**2-usul**		**3-usul**	
afzalligi	kamchiligi	afzalligi	kamchiligi	afzalligi	kamchiligi
Xulosa:					

“Keys-stadi” metodi

«Keys-stadi» - inglizcha so‘z bo‘lib, («case» – aniq vaziyat, hodisa, «stadi» – o‘rganmoq, tahlil qilmoq) aniq vaziyatlarni o‘rganish, tahlil qilish asosida o‘qitishni amalga oshirishga qaratilgan metod hisoblanadi. Mazkur metod dastlab 1921 yil Garvard universitetida amaliy vaziyatlardan iqtisodiy boshqaruv fanlarini o‘rganishda foydalanish tartibida qo'llanilgan. Keysda ochiq axborotlardan yoki aniq voqea-hodisadan vaziyat sifatida tahlil uchun foydalanish mumkin.

"Keys metodi" ni amalga oshirish bosqichlari

Ish bosqichlari	Faoliyat shakli va mazmuni
1-bosqich: Keys va uning axborot ta'minoti bilan tanishtirish	yakka tartibdagi audio-vizual ish; keys bilan tanishish (matnli, audio yoki media shaklda); axborotni umumlashtirish; axborot tahlili; muammolarni aniqlash
2-bosqich: Keysni aniqlashtirish va o'quv topshirig'ni belgilash	individual va guruhda ishlash; muammolarni dolzarblik ierarxiyasini aniqlash; asosiy muammoli vaziyatni belgilash
3-bosqich: Keysdagi asosiy muammoni tahlil etish orqali o'quv topshirig'ining yechimini izlash, hal etish yo'llarini ishlab chiqish	individual va guruhda ishlash; muqobil yechim yo'llarini ishlab chiqish; har bir yechimning imkoniyatlari va to'siqlarni tahlil qilish; muqobil yechimlarni tanlash
4-bosqich: Keys yechimini shakllantirish va asoslash, taqdimot.	yakka va guruhda ishlash; muqobil variantlarni amalda qo'llash imkoniyatlarini asoslash; ijodiy-loyiha taqdimotini tayyorlash; yakuniy xulosa va vaziyat yechimining amaliy aspektlarini yoritish

"Assesment" metodi

Metodning maqsadi: mazkur metod ta'lim oluvchilarning bilim darajasini baholash, nazorat qilish, o'zlashtirish ko'rsatkichi va amaliy ko'nikmalarini tekshirishga yo'naltirilgan. Mazkur texnika orqali ta'lim oluvchilarning bilish faoliyati turli yo'nalishlar (test, amaliy ko'nikmalar, muammoli vaziyatlar mashqi, qiyosiy tahlil, simptomlarni aniqlash) bo'yicha tashhis qilinadi va baholanadi.

Metodni amalga oshirish tartibi:

"Assesment"lardan ma'ruza mashg'ulotlarida talabalarning yoki qatnashchilarning mavjud bilim darajasini o'rganishda, yangi ma'lumotlarni bayon qilishda, seminar, amaliy mashg'ulotlarda esa mavzu yoki ma'lumotlarni o'zlashtirish darajasini baholash, shuningdek, o'z-o'zini baholash maqsadida individual shaklda foydalanish tavsiya etiladi. Shuningdek, o'qituvchining ijodiy yondashuvi hamda o'quv maqsadlaridan kelib chiqib, assesmentga qo'shimcha topshiriqlarni kiritish mumkin.

Har bir katakdagi to'g'ri javob 5 ball yoki 1-5 balgacha baholanishi mumkin.

Тест

Муаммоли вазият

Тушунча таҳлили (симптом)

Амалий вазифа

2.3-rasm.

“Insert” metodi

Metodni amalga oshirish tartibi:

- o‘qituvchi mashg‘ulotga qadar mavzuning asosiy tushunchalari mazmuni yoritilgan matnni tarqatma yoki taqdimot ko‘rinishida tayyorlaydi;
- yangi mavzu mohiyatini yorituvchi matn ta’lim oluvchilarga tarqatiladi yoki taqdimot ko‘rinishida namoyish etiladi;
- ta’lim oluvchilar individual tarzda matn bilan tanishib chiqib, o‘z shaxsiy qarashlarini maxsus belgilar orqali ifodalaydilar. Matn bilan ishlashda talabalar yoki qatnashchilarga quyidagi maxsus belgilardan foydalanish tavsiya etiladi:

Belgilar	Matn
“V” – tanish ma’lumot.	
“?” – mazkur ma’lumotni tushunmadim, izoh kerak.	
“+” bu ma’lumot men uchun yangilik.	
“– ” bu fikr yoki mazkur ma’lumotga qarshiman?	

Belgilangan vaqt yakunlangach, ta’lim oluvchilar uchun notanish va tushunarsiz bo‘lgan ma’lumotlar o‘qituvchi tomonidan tahlil qilinib, izohlanadi, ularning mohiyati to‘liq yoritiladi. Savollarga javob beriladi va mashg‘ulot yakunlanadi.

III. NAZARIY MASHG‘ULOT

1-mavzu. Matematik modelni qurish va ularni tadqiq qilish uslublari

Reja:

1. Model va modellashtirish tushunchalari.
2. Matematik model tushunchasi.
3. Matematik modellarni qurish bosqichlari va metodlari.

1. Model va modellashtirish tushunchalari. Model (lot. “Modulus” – o‘lchov, me’yor) – biror obyekt yoki obyektlar tizimining obrazi yoki namunasidir.

Masalan, Yerning modeli–globus, osmon va undagi yulduzlar modeli–planetariy ekrani, pasportdagi suratni shu pasport egasining modeli deyish mumkin.

Insoniyatni farovon hayot shart-sharoitlarini yaratish, tabiiy ofatlarni oldindan aniqlash muammolari qadimdan qiziqtirib kelgan. Shuning uchun ham insoniyat tashqi dunyoning turli hodisalarini o‘rganishi tabiiy holdir.

Aniq fan sohasi mutaxassislari u yoki bu jarayonning faqat ularni qiziqtirgan xossalarinigina o‘rganadilar. Masalan, geologlar yerning rivojlanish tarixini, ya’ni qachon, qayerda va qanday hayvonlar yashaganlari, o‘simliklar o‘sganligi, iqlim qanday o‘zgarganligini o‘rganadi. Bu ularga foydali qazilma konlarini topishlarida yordam beradi. Lekin ular Yerda kishilik jamiyatining rivojlanish tarixini o‘rganishmaydi – bu bilan tarixchilar shug‘ullanadi.

Atrofimizdagi dunyoni o‘rganish natijasida noaniq va to‘liq bo‘lmagan ma’lumotlar olish mumkin. Lekin bu koinotga uchish, atom yadrosining sirini aniqlash, jamiyatning rivojlanish qonunlarini egallash va boshqalarga xalaqit bermaydi. Ular asosida o‘rganilayotgan hodisa va jarayonning modeli yaratiladi. Model ularning xususiyatlarini mumkin qadar to‘laroq akslantirishi zarur.

Modelning taqribiylik xarakteri turli ko‘rinishda namoyon bo‘lishi mumkin. Masalan, tajriba o‘tkazish mobaynida foydalaniladigan asboblarning aniqligi olinayotgan natijaning aniqligiga ta’sir etadi.

Modellashtirish – bilish obyektlarini ularning modellari yordamida tadqiq qilish, mavjud predmet va hodisalarning modellarini yasash va o‘rganishdir.

Modellashtirish uslublaridan hozirgi zamon fanlarida keng foydalanilmoqda. U ilmiy tadqiqot jarayonini yengillashtiradi, ba’zi hollarda esa murakkab obyektlarni o‘rganishning yagona vositasiga aylanadi. Mavhum, olisda joylashgan obyektlar, juda kichik hajmdagi obyektlarni o‘rganishda modellashtirishning ahamiyati katta. Modellashtirish uslubidan fizika, astranomiya, biologiya, ijtimoiy fanlarda, iqtisod fanlarida obyektlarning faqat ma’lum xususiyat va munosabatlarini aniqlashda ham foydalaniladi.

Uslubiyat sifatidan matematik modellashtirish matematika, fizika, biologiya va boshqa ilmiy fanlar bilan almashtirib bo‘lmaydi, ular bilan raqobat qilmaydi. Aksincha uning sintezlash rolini ta’kidlamasdan bo‘lmaydi. Matematik modellashtirish uchligini yaratish va qo‘llash turli metodlar va yondoshuvlar – chiziqsiz modellar sifat analizidan tortib zamonaviy dasturlash tillariga asoslanadi va fanning turli – tuman yo‘nalishlarini qo‘shimcha yangi rag‘batlantiradi.

Masalaga kengroq yondoshgan holda aytish mumkinki, modellashtirish turli “mutaxassislar” ijodiy faoliyatida uchraydi – tadqiqotchilar va tadbirkorlar, siyosatchilar va harbiy qo‘mondonlar. Bu sohalarga aniq fanlarning joriy qilinishi intuitiv “ modellash” ni chegaralab, rasional metodlar qo‘llanilish maydonini kengaytirdi. Albatta, matematik modellashtirish samarali bo‘lish uchun u yaxshi ma’lum bo‘lgan professional talablarga javob berishi kerak: asosiy tushunchalar va farazlarni aniq for-mulirovkasi, ishlatilayotgan modellar adekvatligining aposterior analizi, hisoblash algoritmlari to‘g‘riligining kafolatlanishi va h.k.

Agar “inson faktori”, ya’ni murakkab formallashgan obyektlar ishtirokida sistemalarni modellashtirish haqida gap ketganda, yuqoridagi talablardan tashqari matematik va maishiy atamalarni (bir xil eshitiluvchi, ammo turli ma’noga ega) aniq farqlash, hodisa va jarayonlarni o‘rganishga tayyor matematik apparatni ehtiyotkorlik bilan qo‘llash va boshqa bir qator talablar ham qo‘shiladi.

Axborot jamiyati muammolarini hal etishda faqatgina kompyuter qudratiga va informatikaning boshqa vositalarigagina ishonib qolish unchalik ham to‘g‘ri emas. Matematik modellashtirish bosqichlarining doimiy mukammallashib borishi va uning zamonaviy axborot – modellash sistemalariga tadbiq etilishi metodologik imperativdir. Faqat uning bajarilishigina zaruriy yuqori texnologiyali, raqobatbardosh va rang-barang moddiy va intellektual mahsulotga ega bo‘lish mumkin. Atrofimizdagi olam qonunlari o‘zgarmas va tadqiqotlarda bundan samarali foydalanish mumkin. Bu matematik modellar universalligi xossasida o‘z aksini topgan.

Shunday qilib, matematik modellashtirish vositalarining imkoniyatlaridan mexanikadan tortib sosiologiya fanlarida (ijtimoiy fanlarda) ham samarali foydalanish mumkin ekan.

Modellashtirish bosqichlari. Biror obyektni matematik modellashtirish masalasining qo'yilishi aniq harakatlar rejasini yuzaga keltiradi. Uni shartli ravishda uch bosqichga bo'lish mumkin: model – algoritm – dastur.

Birinchi bosqichda obyektning matematik formada asosiy xossalarini u bo'ysunuvchi qonunlarni, qismlari uchun o'rinli bog'liqliklar va h.k. larni aks ettiruvchi "ekvivalenti" tanlanadi (yoki quriladi). Matematik model (yoki uning fragmentlari) nazariy metodlar yordamida tadqiq qilinadi, natijada esa obyekt haqida dastlabki muhim ma'lumotlar olish mumkin.

Ikkinchi bosqich- modelni kompyuterda amalga oshiruvchi algoritm quriladi (yoki tanlanadi). Model sonli metodlar qo'llash uchun qulay shaklda tasvirlanadi, izlanayotgan kattaliklarni berilgan aniqlikda (shartlarda) topish uchun zaruriy hisoblash va mantiqiy operasiyalar ketma-ketligi aniqlanadi.

Uchinchi bosqichda model va algoritmni komyuter tushunadigan tilga "o'giruvchi" dastur yaratiladi.

Ular uchun ham tejamlilik va moslashuvchanlik talablari qo'yiladi. Dasturlarni bevosita "tajriba qurilmasi" – kompyuterda sinash uchun yaroqli bo'lgan, o'rganilayotgan obyektning "elektron" ekvivalenti, modeli deb atash ham mumkin.

"Model – algoritm – dastur" uchligi tadqiqotchi qo'lida universal, egiluvchan va arzon vositaga aylanib, u avvalo "sinov" hisoblash tajribalarida to'g'rilanadi va testlanadi. Keyin modelning berilgan obyektning barcha zaruriy sonli va sifat xossalarini aniqlovchi turli – tuman va to'la "sinov" lar o'tkaziladi.

Modellashtirish jarayoni, kerak bo'lsa, uchlikning barcha bo'g'inlarini (bosqichlarini) yaxshilash va aniqlashtirish bilan birga olib boriladi.

Model turlari. Modelni tanlash vositalariga qarab umumiy uch guruhga ajratish mumkin: **abstrakt, fizik** va **biologik modellar.**

Modellarning to'laroq mazmuni bilan quyida tanishtirib o'tiladi:

Abstrakt modellar qatoriga matematik, matematik-mantiqiy va shu kabi modellar kiradi. **Fizik** modellar qatoriga kichiklashtirilgan maketlar, turli asbob va qurilmalar, trenajyorlar va shu kabilar kiritiladi.

Fizik model. Tekshirilayotgan jarayonning tabiati va geometrik tuzilishi asl nusxadagidek, ammo undan miqdor (o'lchami, tezligi, ko'lami) jihatidan farq qiladigan modellar, masalan, samolyot, kema, avtomobil, poyezd, GES va boshqalarning modellari fizik modelga misol bo'la oladi.

Fizik-kimyoviy modellar biologik tuzilish, funksiya yoki jarayonlarni fizik yoki kimyoviy vositalar bilan qaytadan hosil qilishdir.

Matematik modellar. Tirik organizmlarning tuzilishi, o‘zaro aloqasi vazifasiga oid qonuniyatlarning matematik va mantiqiy-matematik tavsifidan iborat bo‘lib, tajriba ma’lumotlariga ko‘ra yoki mantiqiy asosida tuziladi, so‘ngra tajriba yo‘li bilan tekshirib ko‘riladi.

Biologik hodisalarning matematik modellarini kompyuterda o‘rganish tekshirilayotgan biologik jarayonning o‘zgarish xarakterini oldindan bilish imkonini beradi. Shuni ta’kidlash kerakki, bunday jarayonlarni tajriba yo‘li bilan tashkil qilish va o‘tkazish ba’zan juda qiyin kechadi.

Biologik model turli tirik obyektlar va ularning qismlari-molekula, hujayra, organizm va shu kabilarga xos biologik tuzilish, funksiya va jarayonlarni modellashda qo‘llaniladi. Biologiyada, asosan biologik, fizik va matematik modellardan foydalaniladi.

Ijtimoiy-iqtisodiy modellar taxminan, 18-asrdan qo‘llanila boshlandi. F. Kenening “Iqtisodiy jadvallar”ida birinchi marta butun ijtimoiy takror ishlab chiqarish jarayonining shakllanishini ko‘rsatishiga harakat qilingan. Iqtisodiy tizimlarning turli faoliyat yo‘nalishlarini o‘rganish uchun har xil modellardan foydalaniladi. Iqtisodiy taraqqiyotning eng umumiy qonuniyatlari xalq xo‘jaligi modellari yordamida tekshiriladi. Turli murakkab ko‘rsatkichlar, jumladan, milliy daromad, ish bilan bandlik, iste’mol, jamg‘armalar, investisiya ko‘rsatkichlarining dinamikasi va nisbatini tahlil qilish, uni oldindan aytib berish uchun katta iqtisodiy modellar qo‘llaniladi. Aniq xo‘jalik vaziyatlarini tekshirishda kichik iqtisodiy tizimlardan, murakkab iqtisodiy tizimlarni tekshirishda, asosan, matematik modellardan foydalaniladi.

2. Matematik model tushunchasi

Matematik model tushunchasi. Matematik modellashtirish. *Matematik model* deb o‘rganilayotgan obyektni matematik formula yoki algoritm ko‘rinishida ifodalangan xarakteristikalari orasidagi funksional bog‘lanishga aytiladi.

Matematik modellar obyektlar va jarayonlar sistemasining tirik organizmlarning tuzilishi, o‘zaro aloqasi, vazifasiga oid qonuniyatlarning matematik va mantiqiy-matematik tavsifidan iborat bo‘lib, tajriba ma’lumotlariga ko‘ra yoki mantiqiy asosda tuziladi, so‘ngra tajriba yo‘li bilan tekshirib ko‘riladi. Masalan, biologik hodisalarning matematik modellarini kompyuterda o‘rganish tekshirilayotgan biologik jarayonning o‘zgarish xarakterini oldindan bilish imkonini beradi. Shuni ta’kidlash kerakki, bunday jarayonlarni tajriba yo‘li bilan tashkil qilish va o‘tkazish ba’zan juda qiyin kechadi. Matematik va matematik-mantiqiy modelning yaratilishi, takomillashishi va ulardan foydalanish matematik hamda nazariy biologiyaning rivojlanishiga qulay sharoit tug‘diradi.

Zamonaviy fan va texnikaning turli sohalarida ko‘pincha vaqt mobaynida o‘tayotgan, ya’ni vaqt davomida o‘zgarayotgan jarayonlarni (dinamik jarayonlarni) tadqiq qilishga to‘g‘ri keladi. Bu jarayonlar turli xarakterga ega bo‘lishi mumkin: fizik (jism, suyuqlik, gaz harakati, temperatura, bosim o‘zgarishi va boshqalar), kimyoviy (reaksiya vaqtida biror modda miqdorining o‘zgarishi), ijtimoiy va biologik (davlat hokimiyatida taqsimot, raqobatdagi populyasiyalar sonining o‘zgarishi) va boshqalar. Bunday jarayonlarni o‘rganishda u yoki bu evolyusion jarayonni tavsiflovchi miqdorlar orasidagi bog‘lanishni bevosita o‘rnatish har vaqt ham mumkin bo‘lavermaydi. Lekin ko‘p hollarda miqdorlar (funksiyalar) va ularning boshqa (erkli) o‘zgaruvchi mikdorlarga nisbatan o‘zgarishi tezliklari orasidagi bog‘lanishni o‘rnatish, ya’ni noma’lum funksiyalar hosila belgisi ostida qatnashuvchi tenglamalarni topish mumkin bo‘ladi. Bunday tenglamalar *differensial tenglamalar* deyiladi (ya’ni *matematik modellar*). Matematik modellashtirish aniq va ijtimoiy fanlardagi turli amaliy masalalarini yechishda ham muvaffaqiyat bilan qo‘llanib kelinmoqda. Matematik modellashtirish uslubi masalani xarakterlaydigan u yoki bu kattalikni miqdor jihatdan ifodalash, so‘ngra bog‘liqligini o‘rganish imkoniyatini beradi. Ayrim hollarda esa, masalan, iqtisodiy jarayonlarni modellashtirishda miqdorlar (funksiyalar) va ularning boshqa (erkli) o‘zgaruvchi mikdorlari ularning oldingi yoki keyingi qadamidagi holatiga bog‘liqligini o‘rnatish mumkin bo‘ladi. Bunday tenglamalar *rekurrent tenglamalar* (*modellar*) deyiladi.

Xulosa sifatida aytish mumkinki, matematik modellashtirishda berilgan jarayonlarning matematik ifodalari modellashtiriladi. *Matematik model* tashqi dunyoning matematik belgilar bilan ifodalangan qandaydir hodisalar sinfining taqribiy tavsifidir. Matematik model tashqi dunyoni bilish, shuningdek, oldindan aytib berish va boshqarishning kuchli uslubi hisoblanadi.

3. Matematik modellashtirish bosqichlari. Matematik modelni tahlil qilish o‘rganilayotgan hodisaning mohiyatiga singish imkoniyatini beradi. Hodisalarni matematik model yordamida o‘rganish besh bosqichda amalga oshiriladi.

Birinchi bosqich. *Model qurish.* Bu bosqichda qandaydir berilgan “nomatematik” obyekt – tabiat hodisasi, konstruksiya, ijtimoiy jarayon, iqtisodiy reja, ishlab chiqarish jarayoni va h.k.larning asosiy qismlari yoki xossalarini bog‘lovchi qonunlar ifodalanadi. So‘ngra topilgan sifat qonuniyatlari matematik tilga tarjima qilinadi, ya’ni matematik qonuniyatlar va belgilashlar asosida matematik model quriladi. Bu modellashtirishning eng qiyin va muhim bosqichlaridan biri hisoblanadi.

Ikkinchi bosqich. Matematik masalani yechish. Bu bosqichda qurilgan matematik model keltirib chiqargan matematik masalalar (chiziqli tenglama, tenglamalar sistemasi, differensial yoki integral tenglamalar, rekurrent tenglamalar va h.k.) yechiladi. Bunda asosan masalani kompyuterda yechishga yordam beruvchi algoritmlar va sonli usullarni ishlab chiqishga katta e’tibor beriladi.

Uchinchi bosqich. Natijalarni interpretasiyalash. Bu bosqichda matematik modeldan kelib chiqqan natijalar masala qaralayotgan soha tilida interpretasiya qilinadi (o‘tkaziladi).

To‘rtinchi bosqich. Model adekvatligini tekshirish. Bu bosqichda modelning qabul qilingan amaliyot mezonlarini qanoatlantirishi aniqlanadi. Boshqacha aytganda, modeldan olingan nazariy natijalar bilan olingan obyektni kuzatish natijalari mos kelishi masalasi qaraladi.

Beshinchi bosqich. Modelni modifikasiyalash. O’rganilayotgan hodisa haqidagi ma’lumotlarni jamlash orqali modelning navbatdagi tahlilini o‘tkazish va uni rivojlantirish, aniqlashtirish. Bunda model haqiqatga mos kelishi uchun murakkablashtirilishi yoki amaliy jihatdan qo‘llashga qulay ko‘rinishga keltirish uchun soddalashtirilishi mumkin.

Shunday qilib, matematik modellashtirishning asosiy mazmunini, obyektni dastlabki o‘rganish asosida: modelni tajriba orqali va nazariy tahlil qilish, natijalarni obyekt haqidagi ma’lumotlar bilan taqqoslash, modelni tuzatish (takomillashtirish) va shu kabilar tashkil etadi. Bunday jarayonlarni tadqiq qilishning birinchi bosqichi ko‘pincha jarayonni tavsiflovchi matematik tenglamani tuzishdan, ikkinchi bosqichi esa bu tenglamaning yechimini izlashdan iborat.

Differensial tenglamalarni (matematik modellarni) tuzish uchun to‘la-to‘kis qoidalar yo‘q. Ko‘p hollarda oddiy differensial tenglamalar nazariyasini qo‘llab masalalarni yechish usuli quyidagi amallarni bajarishga keltiriladi:

1^0. Masala shartlarini batafsil tahlil kilish va uning mohiyatini izohlovchi chizmani tuzish.

2^0. Tekshirilayotgan jarayonning differensial tenglamasini tuzish.

3^0. Tuzilgan differensial tenglamani integrallash va bu tenglamaning umumiy yechimini aniqlash.

4^0. Berilgan boshlang‘ich shartlar asosida masalaning xususiy yechimini aniqlash.

5^0. Zarurat bo‘lishiga karab, masalaning qo‘shimcha shartlaridan foydalanib, yordamchi parametrlarni (masalan, proporsionallik koeffisiyenti va boshqalarni) aniqlash.

6^0. Qaralayotgan jarayonning umumiy qonunini keltirib chiqarish va izlanayotgan miqdorlarni sonli aniqlash.

7^0. Natijalarni tahlil kilish va masalaning dastlabki holatini tekshirish.

Masala xarakteriga bog‘liq holda bu tavsiyalardan ba’zilari qatnashmasligi ham mumkin.

Differensial tenglamalar bo‘yicha amaliy ijtimoiy masalalarni yechishda o‘rganilayotgan jarayonlarning mohiyatini chuqur tushunish, ijodkorlik va malaka talab qilinadi.

Demak, matematik model tuzish uchun, dastlab masala rasmiylashtiriladi. Masala mazmuniga mos holda zarur belgilar va belgilashlar kiritiladi. So‘ngra kattaliklar orasida formula yoki algoritm ko‘rinishida yozilgan funksional bog‘lanish hosil qilinadi. Aytib o‘tilganlarni sodda bir misolda ko‘rib chiqamiz.

Imitasion modellar

Analitik modellarning kamchiliklari. Obyektning bitta yoki bir qancha analitik ifodalar ko‘rinishida yozilgan matematik modelini analitik model deyiladi. Ammo analitik modellarni ishlab chiqish har vaqt ham mumkin bo‘lavermaydi yoki ularning murakkabligi tufayli maqsadga muvofiq deb hisoblanmaydi. Masalan, ko‘p o‘lchovli optimallash masalasi to‘g‘ri tuzilgan va yechilgan bo‘lsa, eng yaxshi yechimni (rejani) beradi. Agar bu yechimni aniq bajarsak, u holda haqiqiy natijalar eng yaxshi holda kelib chiqadi. Lekin biz bilamizki model qanchalik mukammal va batafsil bo‘lsa ham, u voqyelikni faqat qandaydir aniqlik bilan taqribiy aks ettiradi.

Model hisobga olmaydigan omillar har doim topiladi. Shuning uchun optimal modelli yechim, umuman aytganda, uni eng puxta amalga oshirilgandan keyin optimal bo‘lmay qolishi mumrin. Bu esa muhim narsa. Yechimni amalga oshirilish jarayonida qandaydir kutilmagan holatlar kelib chiqishi mumkin, (masalan, bugun kimdir kasal bo‘lib ishga kelmadi, ertaga qo‘shni sexdan tayyor mahsulot (zagatovka) olib kelishmadi, indiniga stanok sinib qoldi) bular esa keyingi strategiyaga jiddiy ta’sir qiladi. Qisqacha aytganda, hisoblangan optimal rejani ro‘yobga chiqarish jarayonining muhimligi bu rejani topishdan ko‘ra kam emas. Zero bu jarayonni ro‘yobga chiqarish jarayonining o‘zini ham modellashtirish mumkin. Bu bilan biz iqtisodiy – matematik modellarning boshqa sinfiga – boshqaruv modellariga, xususan reja bajarilishining boshqaruvi modellariga kelamiz. Rejaning bajarilishini boshqarish jarayonini modellashtirish zarurati iqtisodiy obyektlar va jarayonlarning imitasion modellarini o‘rganishga olib keladi.

Imitasion model tushunchasi. Imitasion modellardan hozirgi kunda turli sohalarda juda keng foydalanilmokda. EHM da aholining gripp bilan kasallanishining tarqalishi, kimyoviy reaktorning ishi, shahar transportining yo‘lovchilar bilan ta’minlanishi, zavodda ishlab chiqarishning o‘sishi va boshqa ko‘p ishlar imitasiya qilinadi, ya’ni bu yerda imitasion modellar yordamga keladi. Shu maqsadda boshqaruvning avtomatlashtirilgan sistemalari (BAS) tarkib topmoqda. BAS keng savollar to‘plamiga javoblarni operativ olishni ta’minlaydi, bu esa boshqaruvda asosli yechimlarni qabul kilish uchun zarurdir, yuqori saviyadagi BAS imitasion modellar bilan ta’minlanadi. Imitasion model jarayondagi o‘zgarishning oqibatlarini darhol ko‘rsatadi, tor joylarini aniqlaydi, boshqaruv strategiyasini aytib beradi. Bunday model bilan ishlashda har qanday aqlga to‘g‘ri keladigan variantlarni ko‘rikdan o‘tkazish mumkin. Masalan, asbob-uskunalarni profilaktik xizmat maqsadida to‘xtatish uchun vaqtni tanlash kerak bo‘lsa, modelda turli variantlarni ko‘rish oson va ulardan eng kam zarar keltiradigani tanlab olinadi. Bu holda ma’lum amallarining biror ketma-ketligi ko‘rinishida ro‘yobga chiqariladigan matematik modellardan foydalanilgan. Bunday modellar *algoritmik yoki imitasion modellar* nomini oldilar. Imitasiya so‘zi tarjimada o‘xshatmoq ma’nosini beradi. Obyektning vaqt mobaynida o‘zgarib turadigan tashqi ta’sirlardagi xarakterini aks ettiruvchi matematik model *imitasion model* deyiladi. Imitasion modellashtirish usuli murakkab sistema ishlashi jarayonini o‘rganish uchun EHM da ruyobga chiqariladigan imitasion modellardan foydalanishga asoslanadi. Imitasion modellashtirish usulining mohiyati shundan iboratki, murakkab sistema ishlashi jarayoni EHM da amalga oshiriladigan ma’lum algoritm ko‘rinishida ifodalanadi. Buning amalga oshirilishi natijalari bo‘yicha dastlabki jarayon haqida u yoki bu xulosalar chiqariladi. Bu usulni amalga oshirish uchun maxsus modellovchi algoritm ishlab chiqiladi. Bu algoritmga mos holda EHM da o‘zaro aloqa va o‘zaro ta’sirlarni hisobga olgan holda o‘rganilayotgan sistemaning elementar jarayonlarini bayon qiluvchi ma’lumot ishlab chiqariladi. Bunda modellovchi algoritm sistemadagi bo‘lib o‘tadigan jarayonlar ketma-ketligi saqlangan holda va sistemaning asosiy holatlarini aks ettirgan holda sistemaning mantiqiy tarkibiga mos keladigan qilib tuziladi.

Imitasion modellashtirish bosqichlari va umumiy sxemasi. Imitasion modellashtirish usulining asosiy bosqichlari kuyidagicha:

1. Ichki va tashqi ta’sirlarni modellashtirish.

2. Modellashtirilgan sistema ishini xuddi o‘ziday aks ettirish.
3. Modellashtirish natijalarini izohlash va qayta ishlash.

Imitasion modellashtirish usulining umumiy sxemasini keltiramiz.
Usulning yuqorida sanab o‘tilgan bosqichlari kirish va tashqi ta’sirlarning turli to‘plami uchun, modellashtirishning ichki I siklini tashkil etib, ko‘p marta takrorlanadi. Tashqi II siklda modellashtirilgan sistemaning berilgan variantlari qarab chiqiladi. Optimal variantni tanlash tadbiri variantlarni qarab chiqishni boshqaradi, imitasion modelga, ichki va tashqi ta’sirlar modeliga mos tuzatishlar kiritadi. Sistema modelini tuzish, mashina eksperimenti natijalari bo‘yicha modelning aniqligini nazorat qilish va uni tuzatish tadbiri modellashtirishning natijalariga bog‘lik holda ichki sikl bloklarini beradi va keyin o‘zgartiradi. Shunday qilib, sxemada tashqi III sikl paydo bo‘ladi, bu sikl modelni shakllantirish, nazorat qilish va tuzatish bo‘yicha tadqiqotchining faoliyatini aks ettiradi. Imitasion modellashtirish usuli nihoyatda murakkab masalalarni yechish imkonini beradi.

Bu usul sonli usul hisoblanadi. Uni Monte – Karlo usulini murakkab sistemalar holiga umumlashtirish deb hisoblash mumkin. Imitasion modellarni ro‘yobga chiqarish uchun yuqori unumdorlikdagi EHM zarur bo‘ladi. Modellashtirish uchun yuqori darajali algoritmik tillardan, masalan, Fortran, Paskal kabilardan foydalaniladi. Ammo tizimlarni modellashtirish masalalari qator xarakterli xususiyatlarga ega, bu esa modellashtirishning katta sondagi muammoga yo‘naltirilgan tillarini ishlab chiqishga olib keldi. Bunday tillardan Simula, Simskript, Delphi va boshqalarni eslatish zarur.

Kompyuterda modellashtirish va uning mohiyati. Kompyuterning ixtiro qilinishi matematik modellashtirishning ahamiyati keskin oshirib yubordi. Murakkab texnik, iqtisodiy va ijtimoiy tizimlarni yaratish, so‘ngra ularni kompyuterlar yordamida tadbiq etishning haqiqiy imkoniyati paydo bo‘ldi. Endilikda obyekt, ya’ni haqiqiy tizim ustida emas, balki uni almashtiruvchi matematik model ustida tajriba o‘tkazila boshlandi. Kosmik kemalarning harakat trayektoriyasi, murakkab muhandislik inshootlarini yaratish, transport magistrallarini loyihalash, iqtisodni rivojlantirish va boshqalar bilan bog‘liq bo‘lgan ulkan hisoblashlarning kompyuterda bajarilishi matematik modellashtirish uslubining samaradorligini tasdiqlaydi.

Odatda, matematik model ustida hisoblash tajribasini o‘tkazish haqiqiy obyektga tajribada tadbiq etish mumkin bo‘lmagan yoki iqtisodiy jihatdan maqsadga muvofiq bo‘lmagan hollarda o‘tkaziladi. Bunday hisoblash tajribasining natijalari haqiqiy obyekt ustida olib boriladigan tajribaga qaraganda juda aniq emasligini ham hisobga olish kerak. Lekin shunday misollarni keltirish mumkinki, kompyuterda o‘tkazilgan hisoblash tajribasi o‘rganilayotgan jarayon yoki hodisa haqidagi ishonchli axborotning yagona manbai bo‘lib xizmat qiladi. Masalan, faqat matematik modellashtirish va kompyuterda hisoblash tajribasini o‘tkazish yo‘li bilan yadroviy urushning iqlimga ta’siri oqibatlarini oldindan aytib berish mumkin. Kompyuter yadro qurolli urushda mutlaq g‘olib bo‘lmasligini ko‘rsatadi. Kompyuterli tajriba Yer yuzida bunday urush oqibatida salbiy ekologik o‘zgarishlar, ya’ni haroratning keskin o‘zgarishi, atmosferaning changlanishi, qutblardagi muzliklarning erishi ro‘y berishi, hatto, Yer o‘z o‘qidan chiqib ketishi mumkinligini ko‘rsatdi.

Ma’lumotlar omborini loyihalash va yaratishdan oldin shu ma’lumotlar omboriga joylashtiriladigan axborotlarning umumiy tuzilishi haqida tasavvurga ega bo‘lish lozim. Ma’lumotlar omboridan kerakli savollarga javob olish va ma’lumotlarga turli o‘zgartirishlar kiritish uchun ham uning umumiy tuzilishini bilish maqsadga muvofiq. Chunki ma’lumotlar omborida qanday ma’lumotlar borligini bilsangizgina, ularga mos savollarni qo‘ya olasiz.

Axborotlarni ifodalovchi vositalar majmui *ma’lumotlar modeli* deb ataladi.

Albatta, turli odamlar tashqi dunyoni turlicha talqin qiladilar va u haqida turlicha bilimga ega bo‘ladilar. Shuning uchun ham haqiqiy dunyo va undagi hodisalarni anglashda turlicha modellardan foydaniladi. Modellashtirish yoki modellashtirishning rasmiy muammolarini o‘rganadigan va tadqiq etadigan yaxlit nazariya mavjud.

Hozirgi kunda kompyuterda modellashtirish texnologiyasi mavjud bo‘lib, uning maqsadi atrofimizni o‘rab turgan tabiat, unda ro‘y beradigan hodisa, voqyealarni va jamiyatdagi o‘zgarishlarni anglash, tushunib yetish jarayonini tezlashtirishdir.

Kompyuter dasturlash tillaridan foydalanish matematik modellashtirish usulida jiddiy burilish yasadi. XX asr oxirlarida yaratilgan yuqori quvvatli Pentium prosessorli kompyuterlarda o‘rganilayotgan jarayonlar modellarining turli xil ko‘rinishlarini (grafik, diagramma, animasiya, multiplikasiya va hokazo) kompyuter ekranida hosil qilish mumkin. Ekrandagi modelni (masalan, rasm eskizini) turli xil darajada (tekislik, fazo bo‘yicha) harakatga keltirish imkoniyatlari mavjud.

Ekranda hosil qilingan modelni kompyuter xotirasida fayl ko‘rinishda saqlash va undan bir necha marta foydalanish mumkin.

Umuman olganda, kompyuterli modellashtirishning metodologiyasida quyidagi yo‘nalishlarni ajratish mumkin:

1. Geometrik yo‘nalishdagi tajribalarni tashkillashtirish koordinatalar tekisligida amalga oshiriladi. Kompyuter geometrik obyektlarning xossalarni o‘rganish va matematik farazlarni tekshirishda modellarni qurish va ularni tadqiq etish vositasi sifatida ishlatiladi.

2. Ikkinchi yo‘nalish turli xil xarakterlarni modellashtirish bilan bog‘liq. Kompyuter modellari orqali turli xil harakatli masalalarni yechish mumkin. Bu ro‘y beradigan jarayonlarning mohiyatini chuqurroq va kengroq his qilishga, olingan natijalarni haqiqiy baholash va kompyuterda modellashtirish imkoniyatlari haqidagi tasavvurlarning kengayishiga olib keladi.

3. Uchinchi yo‘nalish – kompyuter ekranida funksiya grafiklarini modellashtirish – kasbiy kompyuter tizimlarida keng qo‘llaniladi. Masalan, Logo dasturi funksiya grafiklari, tenglama va tenglamalar sistemasini yechish va ularning natijalarini olish imkoniyatlarini beradi. Eng muhimi shundaki, kompyuterda modellashtirish texnologiyasidan foydalanish haqiqiy voqyelikni anglashda, bilish jarayonini amalga oshirishda yangi bosqich rolini o‘ynaydi.

Ma’lumotlar modellari shakli qanday bo‘lishidan qat’iy nazar quyidagi talablarni bajarishi kerak:

1. Soddalik. Ma’lumotlar modeli kam sondagi bog‘lanishli tuzilish turlariga ega bo‘lishi lozim.
2. Yaqqollik. Ma’lumotlar modeli vizual (ko‘zga ko‘rinadigan, tasvirlanadigan) bo‘lishi kerak.
3. Qismlarga bo‘linishi. Ma’lumotlar modeli ma’lumotlar omborida oddiy o‘rin almashtirish imkoniyatiga ega bo‘lishi lozim.
4. O’rin almashtirish. Ma’lumotlar modeli o‘ziga o‘xshash modellar bilan almashtirish imkoniyatiga ega bo‘lishi kerak.
5. Erkinlik. Ma’lumotlar modeli aniq bo‘laklarnigina o‘z ichiga olmasligi lozim.

Yuqorida ko‘rsatilgan talablar ham yaratiladigan modellarning idealligini ta’minlay olmaydi. Chunki modellashtirishda haqiqiy obyektning ba’zi bir muhim xususiyatlarigina ishtirok etadi xolos.

2-ma’ruza. Jarayonlarni modellashtirishda tabiatning saqlanish qonunlaridan va boshqa usullardan foydalanish

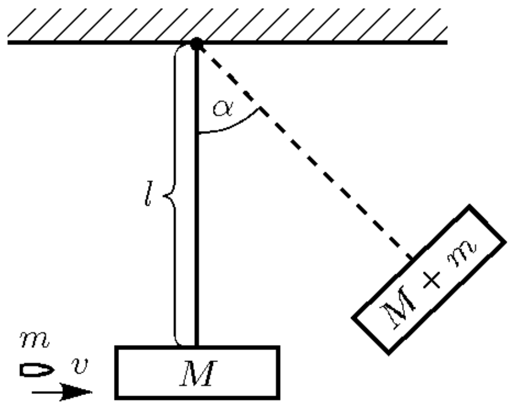
Reja:

1. Energiya, materiya va impulsning saqlanish qonunlaridan foydalanish.
2. Matematik modellashtirishda variatsion prinsipdan foydalanish.
3. Ierarxiya prinsipidai foydalanib, matematik modellar qurish.

1. Energiya, materiya va impulsning saqlanish qonunlaridan foydalanish. Modellarni qurishning eng ko‘p qo‘llaniladigan usuli tabiatning fundamental qonunlarini aniq holatlarda qo‘llashdir. Bu qonunlar bir qancha tajribalar asosida tasdiqlangan, umumtanolingan qonunlar bo‘lib, ilmiy-texnikaviy yutuqlar to‘plamining poydevori hisoblanadi.

Energiyaning saqlanish qonuni. Bu qonun deyarli 200 yildan beri ma’lum bo‘lib, tabiatning barcha qonunlari ichida muhim ahamiyat kasb etadi. Bu qonunni sodda ko‘rinishdagi quyidagi masalada qo‘llanilishini qaraymiz: yaqin joyda maxsus laboratoriya bo‘lmasa, revolverdan otilgan o‘qning tezligini qanday aniqlash mumkin.

Buni aniqlashda erkin aylanuvchi l uzunlikdagi sterjenli mayatnik tipidagi uskunadan foydalanish mumkin. Bu sterjenga ma’lum M og‘irlikka ega bo‘lgan yuk osilib, unga rivolverdan m og‘irlikdagi o‘q kelib urilsin. Natijada v tezlikga ega bo‘lgan o‘qning kinetik energiyasi $\frac{mv^2}{2}$ miqdorga teng bo‘ladi. Bu energiya natijasida sterjenga osilgan yuk



potensial energiyasi miqdori esa $\frac{(m+M)V^2}{2}$ ga teng bo‘ladi, bunda V – o‘q ta’sir etgandagi yukning tebranma harakat tezligi. Shunday qilib, energiyaning saqlanish qonuniga ko‘ra bu energiyalar teng bo‘lishi lozim:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{(m+M)V^2}{2}. \quad (1)$$

Mexanika kursidan ma’lumki, burchak tezlik

$$V = \sqrt{2gl(1 - cos\,\alpha)}$$

miqdorga teng bo‘ladi, bunda g – erkin tushish tezlanishi, α– yukning eng katta og‘ish burchagi. Bu tenglikni (1) formulaga qo‘ysak, ushbu

$$\frac{mv^2}{2} = (m+M)gl(1 - cos\,\alpha)$$

tenglikka ega bo‘lamiz. Bu tenglikdan revolver o‘qining tezligi

$$v = \sqrt{\frac{2}{m}(m+M)gl(1-cos\,\alpha)}$$

formula bilan aniqlanishi kelib chiqadi.

O’q va mayatnik orasida ro‘y berayotgan hodisa sof mexanik jarayon bo‘la olmaydi. Shuning uchun V mikdorni hisoblash uchun mexanik energiyaning saqlanish qonunidan foydalanish noto‘g‘ri. Chunki mexanik energiya o‘zgarib, to‘la energiya saqlanadi. Bu o‘q tezligini aniqlashning quyi chegarasinigina beradi.

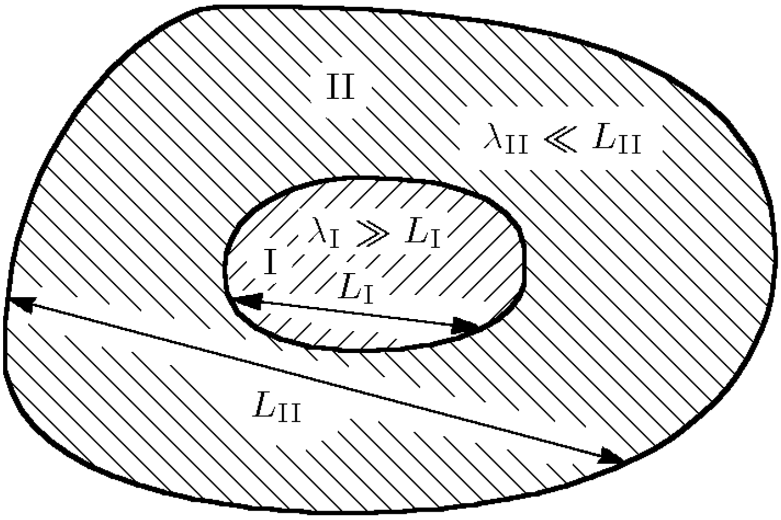
Materiyaning saqlanish qonuni. Yana bir oddiy ko‘rinishdagi hayotiy masalani qaraymiz: M og‘irlikdagi ho‘l mevani quritganda, undan qancha miqdorda quruq meva tayyorlanadi. Buni aniqlash uchun mevadagi suv miqdorini aniqlash kifoya. Chunki materiyaning saqlanish qonuniga ko‘ra $M = m + m_c$, bunda m va m_c mos holda M og‘irlikdagi ho‘l mevada suv va quruq meva (qolgan moddalar) og‘irliklari. Bu tenglikdan esa $m = M - m_c$ bo‘lishi tabiiydir.

Materiyaning saklanish konunini modellashtirishda qo‘llash sohasi nihoyatga keng hisoblanadi.

Quyidagi masalani qaraymiz:

Masala. *Kichik miqdordagi radioaktiv modda (uran) qalin qoplamli material (qo‘rg‘oshin) bilan qoplangan. Bu moddani saqlash yoki uning energiyasidan foydalanish vaziyati mavjud. Mavjud parametrlardan foydalangan holda radioaktiv moddaning sochilish qonuniyatini aniqlang.*

Masalada kichik miqdor deganda, radioaktiv moddaning erkin tarqalish uzunligi λ_1 moddaning xarakterli o‘lchami L_1 dan sezilarli darajada katta, ya’ni $\lambda_1 >> L_1$ tushuniladi. Qalin qatlamli material deganda, tarqalayotgan radioaktiv moddalarni barchasi II sohada



(qo‘rg‘oshinda) yutiladigan qilib olingan, ya’ni zarralarni ikkinchi moddada tarqalish uzunligi λ_2 moddaning xarakterli o‘lchami L_2 dan sezilarli darajada kichik, ya’ni $\lambda_2 << L_2$.

Shunday qilib, qaralayotgan masalada I sohadan (radioaktiv moddadan) uchib chiquvchi barcha zarrachalar II sohada (qo‘rg‘oshinda) yutiladigan (shu sohadan chiqib ketmaydigan) vaziyatni qaraymiz. Bu holat materiyaning saqlanish qonunini o‘zginasidir. Agar $t = 0$ boshlang‘ich momentda moddalarning vaznlari $M_1(0)$ va $M_2(0)$ bo‘lsa, materiyaning saqlanish qonuniga ko‘ra ixtiyoriy $t > 0$ vaqtdagi moddalarning vaznlari uchun ushbu balans o‘rinli bo‘ladi:

$$M_1(0) + M_2(0) = M_1(t) + M_2(t), \tag{2}$$

Bunda $M_1(t)$ va $M_2(t)$ – birinchi va ikkinchi moddalarning t momentdagi vaznlari. Faqatgina bitta tenglamaning o‘zi $M_1(t)$ va $M_2(t)$ qiymatlarning o‘lchamini aniqlashning imkoniyatini bermaydi. Moddalarning xarakteridan kelib chiqqan holda, vaqt birligida sochilayotgan atomlar soni radioaktiv moddalar soniga to‘g‘ri proporsional bo‘ladi. Shuning uchun ma’lum Δt vaqt mobaynida t va $t + \Delta t$ momentlar oralig‘ida sochilayotgan atomlar soni

$$N_1(t + \Delta t) - N_1(t) = -\alpha N_1(t + \xi \Delta t), \qquad \alpha > 0,\ 0 < \xi < 1$$

ifodani qanoatlantiradi. Bunda $N_1(t)$ – t momentdagi sochilayotgan zarralar soni. Zarrachalar soni kamayib borayotganligi tufayli oxirgi tenglikning o‘ng tomoniga “–” ishorasi qo‘yiladi. $N_1(t + \xi \Delta t)$ miqdor esa qaralayotgan vaqt oralig‘idagi o‘rtacha atomlar sonini bildiradi, ya’ni

$$N_1(t + \xi \Delta t) \approx N_1(t)\Delta t$$

deyish mumkin. Shuning uchun oxirgi tenglikdan

$$N_1(t+\Delta t) - N_1(t) = -\alpha N_1(t)\Delta t \text{ yoki } \frac{N_1(t+\Delta t)-N_1(t)}{\Delta t} = -\alpha N_1(t)$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu tenglikda Δt vaqtni kichik miqdorligini e'tiborga olsak, ushbu

$$\frac{dN_1(t)}{dt} = -\alpha N_1(t)$$

differensial tenglamani hosil qilamiz. Endi $M_1(t) = \mu_1 N_1(t)$, μ_1 – 1-modda atomi og'irligi, ekanligini e'tiborga olsak,

$$\frac{dM_1(t)}{dt} = -\alpha M_1(t) \tag{3}$$

tenglamani hosil qilamiz.

Har bir atom o'z-o'zidan radioaktivligi uchun uni o'rab turuvchi modda holatidan bog'liqsiz holda sochilish ehtimoliga ega bo'ladi. Shuning uchun ham radioaktiv moddalar qancha ko'p bo'lsa, zarralarning sochilishi shuncha ko'p bo'ladi va aksincha. $\alpha > 0$ proporsionallik koeffisiyenti esa konkret moddadan bog'liq holda aniqlanadi. (2) va (3) tenglamalar $\lambda_1 >> L_1$ va $\lambda_2 << L_2$ shartlar asosida $\alpha > 0$, $M_1(0)$ va $M_2(0)$ miqdorlar bilan birgalikda qaralayotgan masalaning matematik modelini ifodalaydi.

(3) tenglamani integrallab, bo'linuvchi modda massasi eksponensial qonun bo'yicha kamayishini ko'rish mumkin

$$\frac{dM_1(t)}{dt} = -\alpha M_1(t) \Rightarrow M_1(t) = Ce^{-\alpha t},$$

$M_1(0)$ miqdorni boshlang'ich shart ekanligidan, izlanayotgan massa

$$M_1(t) = M_1(0)e^{-\alpha t}$$

ekanligi kelib chiqadi. Bu yerdan, $t \to \infty$ da $M_1(t) \to 0$ bo'lishi kelib chiqadi, ya'ni vaqt o'tishi bilan modda to'liq yo'q bo'lib ketadi. (2) ifodaga ko'ra massalar yig'indisi o'zgarmas bo'lganligi uchun, II sohada modda miqdori ortib boradi:

$$M_2(t) = M_1(0) + M_2(0) - M_1(t) = M_1(0) + M_2(0) - M_1(0)e^{-\alpha t}$$

va $t \to \infty$ da $M_2(t) \to M_2(0) + M_1(0)$ bo'lishi kelib chiqadi, ya'ni vaqt o'tishi bilan, zarralarning sochilishi tufayli birinchi moddadagi barcha radiaktiv moddalar ikkinchi moddaga ko'chib o'tar ekan.

Impulsning saqlanish qonuni. Raketa harakatini ifodalovchi matematik model. Bu qonunga oddiy misol sifatida shamolsiz ko'lda tinch turgan qayiqdagi odam bir tomonga qarab harakatlansa, qayiq teskari tomonga harakatlanishi vaziyatini aytish mumkin. Yana bir misol, kosmosda turgan kosmik kema harakatini tezlanishi uchun teskari tomonga ma’lum massali jismni uloqtirish lozim bo‘ladi. Ushbu vaziyat ham impulsni saqlanish qonuni namoyon bo‘lishiga misol bo‘ladi. Boshqacha qilib aytganda, impulsning saqlanish qonuniga ko‘ra – tashqi kuch ta’sir qilmayotgan tizimning to‘la impulsi o‘zgarmaydi.

Raketa harakatini ifodalovchi matematik model. Reaktiv harakat ko‘pgina prinsipi ajoyib texnik qurilmalarga mo‘ljallangan. Masalan, yer atrofidagi orbitaga sun’iy yo‘ldoshni chiqaruvchi raketa yer orbitasiga chiqish uchun taxminan 8 $км/сек$ tezlikka ega bo‘lish talab etiladi. Raketa harakatini ifodalovchi eng sodda modelni, havo qarshiligini, gravitasion kuch va shu kabi boshqa kuchlarni hisobga olmasdan, impulsni saqlanish qonuni yordamida hosil qilish mumkin.

Raketaning quyi qismida joylashgan soplolardan raketa yonilg‘isining yonish mahsulotlari u tezlik bilan otilsin (hozirgi zamonaviy yonilg‘ilarda u ning qiymati $3-5$ км/сек ga teng). Kichik Δt vaqt mobaynida (t va $t+\Delta t$ momentlar oralig‘ida) yonilg‘ining ma’lum qismi yonadi va raketaning vazni Δm miqdorga o‘zgaradi, ya’ni kamayadi. Bu vaqtda raketaning impulsi ham o‘zgaradi, lekin sistemaning impulsi, ya’ni «raketa+yonish mahsuloti» sistemasi impulsi yig‘indisi $t$vaqtdagi impuls kabi o‘zgarishsiz qoladi:

$$m(t)v(t) = m(t+\Delta t)v(t+\Delta t) - \Delta m[v(t+\xi\Delta t) - u],$$

bunda $v(t)$ – raketa tezligi, $v(t+\xi dt) - u$, $0 < \xi < 1$ – dt vaqt oralig‘ida soplodan chiquvchi gazlarning o‘rtacha tezligi. Bu tenglikning o‘ng qismidagi birinchi had $(m(t+\Delta t)v(t+\Delta t))$ raketaning $t+\Delta t$ vaqtdagi impulsi, ikkinchi had $(dm[v(t+\xi dt) - u])$ esa dt vaqt oralig‘idagi gaz ta’siridagi paydo bo‘luvchi impuls. dt vaqtning kichikligi va differensialning ta’rifiga ko‘ra $m(t+\Delta t) = m(t) + m'(t)\Delta t + O(\Delta t^2)$ tenglikni o‘rinli ekanligini e’tiborga olsak,

$$m(t)v(t) = [m(t) + m'(t)\Delta t + O(\Delta t^2)]v(t+\Delta t) - \Delta m[v(t)\Delta t - u],$$

$$m(t)[v(t) - v(t+\Delta t)] = m'(t)\Delta t v(t+\Delta t) - \Delta m v(t)\Delta t + \Delta m u + O(\Delta t^2),$$

$$m(t)\frac{v(t)-v(t+\Delta t)}{\Delta t} = m'(t)v(t+\Delta t) - \Delta m v(t) + \frac{\Delta m}{\Delta t}u + O(\Delta t^2).$$

Hosil bo‘lgan bu tenglikdan, Δt va Δm miqdorlarni kichikligini hisobga olsak, hosila ta’rifiga ko‘ra quyidagi differensial tenglamani hosil qilamiz

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{dm}{dt}u,$$

bunda $-\frac{dm}{dt}u$ had raketa dvigatelining tortishish kuchi.

Bu tenglamadan $v(t)$ tezlikni quyidagicha topamiz:

$$v(t) = -u\int\frac{m\prime(t)}{m(t)}dt = -u\int m'(t)d(ln\, m\,(t)) \quad \text{yoki} \quad v(t) = v_0 + u\, ln\frac{m_0}{m(t)},$$

bu yerda v_0 va m_0 miqdorlar, mos holda, raketaning $t = 0$ vaqtdagi tezligi va massasi. Agarda $v_0 = 0$ bo‘lsa, oxirgi tenglikdan yoqilg‘i to‘liq yongandagi maksimal tezlik

$$v(t) = u\, ln\frac{m_0}{m_f + m_s} \tag{4}$$

ga teng bo‘lar ekan. Bunda m_f – foydali vazn (sun’iy yo‘ldosh) va m_s – raketa uskunalari massasi.

Amaliyotda $\frac{m_0}{m_f+m_s} = 10$ ($m_f = 0$) va $u = 3$км/сек bo‘lganda $v = u\, ln\, 10 \approx 7$км/сек bo‘lar ekan. Bundan kelib chiqadiki, eng yaxshi ideal holda ham (qarshi kuchlar hisobga olinmagan va $m_f = 0$) qaralayotgan tipdagi raketalar 1-kosmik tezlikka erisha olmas ekan.

Bu keltirib chiqarilgan Siolkovskiy formulasi kosmik raketalar konstruksiyasi to‘g‘risida fundamental xulosalar chiqarishga yordam beradi. Quyidagi $\lambda = \frac{m_s}{m_0 - m_f}$ kattalikni kiritamiz, u $m_f = 0$ bo‘lganda raketa strukturali massasi (m_s) va boshlang‘ich massalari nisbatini xarakterlaydi.

2. Matematik modellashtirishda variatsion prinsipdan foydalanish

O’zining universalligi va keng ko‘lamda qo‘llanilishi bilan berilgan, asosiy qonunlari variatsion prinsip deb nomlanadigan yana bir modellarning qurilishiga kelamiz. Ular qaralayotgan obyekt uchun ko‘plab umumiy tasdiqlarni bildiradi va barcha mumkin bo‘lgan tartib (harakat, evolyutsiya) variantlari orasidan faqat aniq bir shartni qanoatlantiradigan variantlarni tanlaydi. Odatda ushbu shartga ko‘ra obyektga bog‘liq bo‘lgan qandaydir kattalik bir holatdan boshqa holatga o‘tayotganda ekstremal qiymatga erishadi.

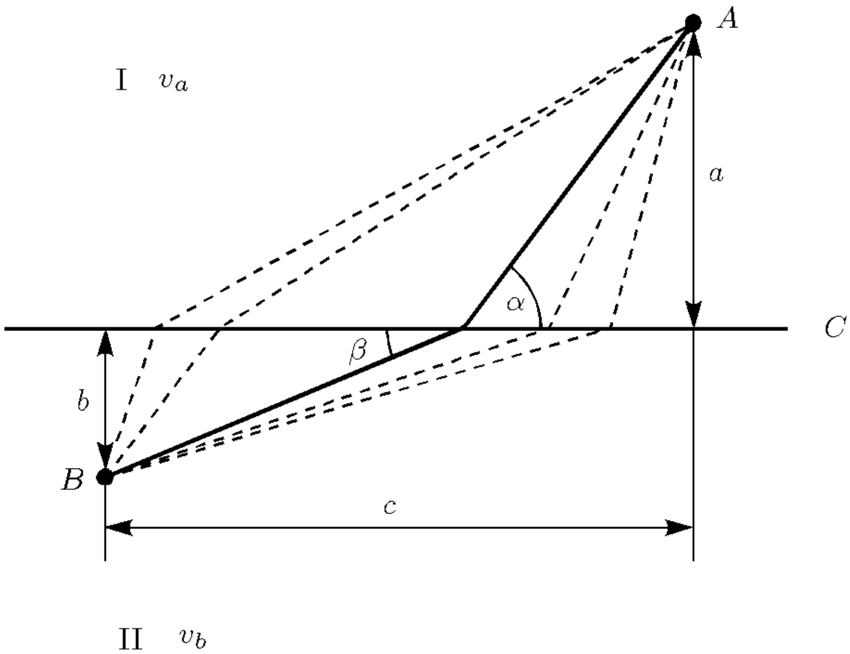
Fermaning variasion prinsipi. Fizikaviy muammolar uchun birinchi variatsion prinsip formulirovkasi Pyer Ferma nomi bilan bog‘liq. Bu prinsipga asoslanib geometrik optikaning barcha qonunlariga ega bo‘lish mumkin. Tajribadan ma’lumki, yorug‘likning sinish qonuni Snellius tomonidan aniqlangan. Bu qonunning nazariy tushunchasi Dekart tomonidan berilgan. Dekart fikriga ko‘ra, juda mustahkam muhitda (aytaylik, suvda) yorug‘likning tarqalish tezligi uncha mustahkam bo‘lmagan muhitdagiga qaraganda kattaroq bo‘ladi. Bu fakt ko‘pchilikka shubhali bo‘lib ko‘rigandi.

Ferma buni boshqa holatda tushuntirib beradi. Uning asosiy fikri shundan iborat ediki, yorug‘lik nuri shunday trayektoriyani «tanlaydi»ki, bir nuqtadan boshqa nuqtagacha bo‘lgan masofani bosib o‘tish uchun sarflangan vaqt (nuqtalarni tutashtiruvchi boshqa ixtiyoriy trayektoriya bilan taqqoslanganda) minimal bo‘lishi kerak. Barcha nuqtalar va barcha yo‘nalishlar bo‘ylab yorug‘likning tarqalish tezligi bir xil bo‘ladigan bir jinsli muhitda yorug‘likning biror trayektoriyani bosib o‘tish uchun ketgan vaqti uning uzunligiga proporsionaldir. Shuning uchun, A va B nuqtalarni tutashtiruvchi minimal vaqt trayektoriyasi – [A,B] kesma bo‘ladi. Demak, bir jinsli muhitda yorug‘lik to‘g‘ri chiziq bo‘ylab tarqaladi.

Agar A va B nuqtalar turli muhitda joylashgan bo‘lsa, yorug‘lik A nuqtadan B nuqtaga qanday harakat qiladi?

Bu savolga javobni Ferma prinsipiga asoslangan holda olamiz. Ferma g‘oyasidan foydalanish bilan yorug‘likning sinishi haqidagi Snellius qonunniga oson erishish mumkinligini ko‘rsatamiz.

Birinchi muhitdagi A nuqtadan chiqadigan yorug‘lik v_a tezlik bilan harakatlanadi, oldin C bo‘limdan o‘tatganda sinadi, ikkinchi muhitda v_b tezlik bilan harakatlanadi va B nuqtaga borib tushadi.



1. Rasm

(1-rasmda A nuqtadan B nuqtaga yorug‘likning mumkin bo‘lgan trayektoriyalardan o‘tishi va 2 muhit chegarasi bo‘lgan C chiziqda sinishi tasvirlangan. Sinish qonuni $cos_{\alpha}/\, cos_{\beta} = v_{\alpha}/v_{\beta}$ ga javob beradigan trayektoriya qalin chiziq bilan ajratilgan).

Agar α - nurning tushish burchagi, $\beta = \beta(\alpha)$ - esa uning sinish burchagi bo‘lsa, unda A dan B ga o‘tgandagi vaqt

$$t(\alpha) = \frac{a}{v_a \sin\alpha} + \frac{b}{v_b \sin\beta(\alpha)}$$

ga teng bo‘ladi.

Kattalikning minimal sharti $t(\alpha)$ quyidagi ko‘rinishda yoziladi $\frac{dt(\alpha)}{d\alpha} = 0$, ya’ni

$$\frac{a\cos\alpha}{v_a \sin^2\alpha} + \frac{b\cos(\alpha)}{v\sin^2\beta(\alpha)}\frac{d\beta}{d\alpha} = 0. \qquad (1)$$

A va B nuqtalar orasidagi C masofa

$$c = \frac{a}{tg\alpha} + \frac{b}{tg\beta(\alpha)} \qquad (2)$$

tenglik bilan aniqlanadi.

C masofa hamma nurlarning trayektoriyasi uchun bir xil. Shuning uchun (2) tenglikni α bo‘yicha defferensiallab,

$$\frac{a}{\sin^2\alpha} + \frac{b}{\sin^2\beta(\alpha)}\frac{d\beta}{d\alpha} = 0 \qquad (3)$$

munosabatga ega bo‘lamiz.

(1) va (2) dan $\frac{d\beta}{d\alpha}$ bo‘yicha hosila olib,

$$\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \frac{v_a}{v_b} \qquad (4)$$

tenglikka kelamiz, ya’ni, yorug‘likning sinish qonuniga kelamiz.

Gamilton prinsipining umumumiy sxemasi. Gamilton variasion prinsipining mexanik sistemalar uchun qisqartirilgan formulirovkasini beramiz.

Mexanik sistema mavjud bo‘lsin, hozircha formal aniqlash berilmaydi. Bunday sistemaning barcha elementlarini va ular orasidagi o‘zaro bog‘liq ravishda aniqlangan mexanika qonunlarini nazarda tutgan holda, masofada mexanik sistemaning holatini butunlay aniqlaydigan umumlashgan *Q(t)* koordinata tushunchasini kiritamiz. Q(t) kattalik Dekart koordinatasi, radius-vektor, burchak koordinatalari, sistemani tashkil etadigan material nuqtalar koordinatalari to‘plami to‘plami va hokazo bo‘lishi mumkin. $\frac{dQ(t)}{dt}$ kattalikni, tabiiyki, vaqt momentidagi mexanik sistemalarning umumlashgan tezligi deb nomlash mumkin. $Q(t)$ va $\frac{dQ(t)}{dt}$ kattaliklar to‘plamini vaqtning hamma momentidagi mexanik sistemalar holati aniqlaydi.

[2] da to‘liq qaralgan savolga mexanik sistemani tasvirlash uchun Lagranj funksiyasi kiritiladi. Lagranj funksiyasining oddiy holatida aniq ma’no beriladi va

$$L(Q, dQ/dt) = E_k - E_p$$

ko‘rinishda yoziladi, bunda E_k, E_p - mos ravishda sistemaning kinetik va potensial energiyalari. Berilgan ma’ruzaning maqsadi uchun E_k va E_p kattaliklarni umumiy aniqlash muhim emas.

$$S[Q] = \int_{t_1}^{t_2} L(Q, \frac{dQ}{dt}) dt. \tag{6}$$

harakatni ifodalaydigan $S[Q]$ kattalikni kiritamiz.

(6) integral ko‘rinib turibdiki, Q(t) koordinataning umumlashgan funksionali hisoblanadi, ya’ni, $[t_1 t_2]$ kesmada berilgan $Q(t)$ funksiyada biror bir C raqamni moC qo‘yadi.

Mexanik sistemalar uchun Gamilton prinsipi tasdiqlaydi: Agar sistema mexanika qonuni bo‘yicha harakatlansa, unda Q(t) – S[Q] uchun stasionar funksiya bo‘ladi, yoki

$$\frac{d}{dE} S[Q + \varepsilon\phi]|_{\varepsilon=0} = 0. \tag{7}$$

Prinsipda shakllanadigan (7) kichik harakat t_1, t_2 momentda nolga intiladigan va berilgan sistemada $Q(t) + \varepsilon\phi(t)$ shartni qanoatlantirishiga ko‘ra $\phi(t)$ funksiya biror bir tekshiriladigan funksiya bo‘lsin (qolgan hollarda $\phi(t)$ keltirib chiqarilgan funksiya).

(7) prinsip ma’nosi shundaki, t_1, t_2 moment orasidagi sistemaning barcha fikr yuritilgan (yo‘l qo‘yilgan) trayektoriyalarida ta’sir funksionaliga minimum qiymat beradigan harakat tanlanadi (prinsip nomi ham shundan kelib chiqadi). $\varepsilon\phi(t)$ -$Q(t)$ kattalikning variasiyasi deb nomlanadi.

Shunday qilib, mexanik modellar qurish uchun (7) Gamilton prinsipining qo‘llanilish sxemasi quyidagilardan iborat: sistemaning umumlashgan $Q(t)$ koordinatalari va umumlashgan dQ/dt tezliklari aniqlanadi, $Q(t)$ koordinataning $\varepsilon\phi(t)$ variasiyalarida minimallashadigan va izlanayotgan modelni beradigan $S(Q)$ ta’sir funksionalining $L(Q, \frac{dQ}{dt})$ Lagranj funksiyasi quriladi.

Konkret sistemaning detallariga bog‘liq bo‘lmagan, yuqori formallashgan ketma-ketli proseduraning universialligi, so‘zsiz, variasion prinsiplarning qiziqligida hisoblanadi. Ular murakkab strukturali obyektlarni modellashtirishda katta ahamiyatga ega. Bunday ko‘pchilik obyektlar (jarayonlar, holatlar) uchun variasion prinsiplar modellar qurishda yagona metod bo‘lib hisoblanadi. Masalan, texnik qurilmalarning mexanik qismlari turli usullar bilan o‘zaro bog‘langan turli xil elementlarning katta miqdoridan iborat. Ularning matematik modellari asosan variasion prinsiplar yordamida hosil qilingan ko‘p sonli tenglamalarni o‘z ichiga oladi. Bu yaqinlashish, shuningdek, ularning evolyusiyasi (tartibi) xarakteriga moC keladigan umumiy tasdiqlarni shakllantirishda va boshqa tabiat (fizik, ximik, biologik) sistemalari uchun oson qo‘llaniladi.

3. Ierarxiya prinsipidai foydalanib, matematik modellar qurish

Juda kam hollarda eng sodda obyektlarning matematik modellari o‘rganilayotgan obyektning barcha asosiy xossalarni o‘z ichiga oladi va o‘rganish uchun qulay bo‘ladi. Shuning uchun «soddadan murakkabga» qarab yondashuv tabiiy hisoblanadi, bunda uncha murakkab bo‘lmagan model to‘liq o‘rganilgach keyingi bosqichga o‘tiladi. Bunday hollarda uncha qiyin bo‘lmagan va keyingisi oldingisining umumlashmasi bo‘lgan matematik modellar zanjiri hosil bo‘ladi (iyerarxiya). Bunday iyerarxik zanjirni quyidagi ko‘p qismli raketa modeli misolida ko‘rish mumkin.

Bizga ma’lumki, bir qismli raketa birinchi kosmik tezlikka erisha olmaydi. Bunga sabab yoqilg‘ini raketa struktura massasining keraksiz qismi – ishlatilgan qismi uchun sarflanishidir. Shuning uchun raketaning foydalanilgan, keyinchalik kerak bo‘lmaydigan qismini tashlab yuborish maqsadga muvofiqdir.

Faraz qilaylik, m_i −raketa i -qismning umumiy massasi va $\lambda m_i -$ raketa i -qismning struktura massasi (demak, i -qismning yoqilg‘i massasi $(1-\lambda)m_i$ ga teng bo‘ladi), m_f– foydali massa og‘irligi bo‘lsin. λ miqdorning va gazning otilish tezligi u miqdorning qiymatlarini barcha n ta qismning har birida bir xil teng miqdorda bo‘lsin. Aniqlik uchun raketa 3 qismdan iborat deb olamiz, ya’ni $n=3$. Bunday raketaning umumiy massasi $m_0 = m_f + m_1 + m_2 + m_3$ ga teng bo‘ladi. Birinchi qismning yonilg‘isi to‘la sarflangan holni qaraymiz.

Bu momentda raketaning umumiy massasi $m_f + \lambda m_1 + m_2 + m_3$. U holda (Siolkovskiy) formulaga koʻra raketaning tezligi

$$v_1 = u\,ln\frac{m_0}{m_f+\lambda m_1+m_2+m_3}.$$

Raketa v_1 tezlikka erishgach, 1-qismning λm_1 struktura massasi esa tashlab yuboriladi. Bu vaqtda raketaning umumiy massasi $m_f + m_2 + m_3$ ga teng boʻlib, uning uchun qurilgan modeldan foydalanish mumkin (impulsning saqlanish qonuni) va ikkinchi qism yonilgʻisi sarflana boshlaydi. Bu vaqtdagi raketaning boshlangʻich tezligi v_1 boʻlganligini eʼtiborga olsak, uning tezligi (Siolkovskiy formulasiga koʻra)

$$v_2 = v_1 + u\,ln\frac{m_f + m_2 + m_3}{m_f + \lambda m_2 + m_3}$$

miqdorga teng boʻladi. Xuddi shu tarzda mulohaza yuritib, uchinchi qism yonilgʻisi ishga tushirilganda, raketa tezligi uchun ushbu

$$v_3 = v_2 + u\,ln\frac{m_f + m_3}{m_f + \lambda m_3}$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu zanjirni ixtiyoriy sondagi bosqich uchun qoʻllash mumkin. Bu tenglikni yuqoridagi tengliklarga koʻra, quyidagicha yozish mumkin:

$$v_3 = u\,ln\frac{m_0}{m_f + \lambda m_1 + m_2 + m_3} + u\,ln\frac{m_f + m_2 + m_3}{m_f + \lambda m_2 + m_3} + u\,ln\frac{m_f + m_3}{m_f + \lambda m_3}$$

yoki

$$\frac{v_3}{u} = ln\left(\frac{m_0}{m_f+\lambda m_1+m_2+m_3}\cdot\frac{m_f+m_2+m_3}{m_f+\lambda m_2+m_3}\cdot\frac{m_f+m_3}{m_f+\lambda m_3}\right).$$

Ushbu $\alpha_1 = \frac{m_0}{m_f+m_2+m_3}$, $\alpha_2 = \frac{m_f+m_2+m_3}{m_f+m_3}$ va $\alpha_3 = \frac{m_f+m_3}{m_f}$ belgilashlarni kiritsak, oxirgi tenglikdan

$$\frac{v_3}{u} = ln\frac{\alpha_1}{1+\lambda(\alpha_1 - 1)}\cdot\frac{\alpha_2}{1+\lambda(\alpha_2 - 1)}\cdot\frac{\alpha_3}{1+\lambda(\alpha_3 - 1)}$$

ni hosil qilamiz. Bu tenglikdan raketa maksimal tezlikka simmetrik holatda, yaʼni $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$ boʻlganda erishishi kelib chiqadi. $i = 3$ holda $P = exp(-\frac{v_3}{3u})$ desak, $\alpha = \frac{1-\lambda}{P-\lambda}$. $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3$ koʻpaytma, osongina tekshirish mumkinki, $\frac{m_0}{m_f}$ nisbatga teng, yoki

$$\alpha^3 = \frac{m_0}{m_f} = \left(\frac{1-\lambda}{P-\lambda}\right)^3.$$

tenglikka ega bo‘lamiz.

Xuddi yuqoridagidek mulohoza yuritib, ixtiyoriy n -qismli raketa uchun quyidagi tenglikni hosil qilamiz:

$$\frac{m_0}{m_f} = \left(\frac{1-\lambda}{P-\lambda}\right)^n, P = exp\left(-\frac{v_n}{nu}\right). \quad (1)$$

(1) formuladan quyidagi xulosalarni hosil qilamiz: $v_n = 10{,}5$km/sek, $\lambda = 0{,}1$ desak, $n = 2$ da $m_0 = 149m_f$, $n = 3$ da $m_0 = 77m_f$ va $n = 4$ da $m_0 = 65m_f$ tengliklarni hosil qilamiz, ya’ni ikki qismli raketa yer orbitasiga foydali massani chiqarishi mumkin, lekin 1 tonna foydali massani chiqarish uchun 149 tonnali raketa zarur bo‘lar ekan. Uch pog‘onali modelda raketa massasi ikki barobarga qisqaradi, lekin bunday raketa konstruksiyasi murakkablashadi.

3-ma’ruza. Chiziqli dasturlash masalalari va Demografik modellar

Reja:

1. Chiziqli dasturlashning umumiy masalasi. Transport masalasi. Jamiyat rivojlanishining demografik modeli.
2. Maltus va Fyurxst-Perl modellari. Populyatsiya chiziqsiz modelinint uch turdagi rejimi.

1. Chiziqli dasturlashning umumiy masalasi. Transport masalasi. Jamiyat rivojlanishining demografik modeli.

Chiziqli dasturlash matematik dasturlashning bir bo‘limi bo‘lib, bunda o‘zgaruvchilariga chiziqli cheklashlar qo‘yilgan chiziqli funksiyaning ekstremal (maksimal yoki minimal) qiymatini topish masalalari va ularni yechish usullari o‘rganiladi. Chiziqli cheklashlar tengliklar yoki qa’tiy bo‘lmagan tengsizliklar ko‘rinishida bo‘lishi mumkin.

Chiziqli dasturlash masalalarini sistemalashtirish va ularni yechish uchun umumiy, universal usul yaratish ustida L.V.Kantorovich 1939 yildan boshlab shug‘ullangan. Amerikalik olim J.Dansig tomonidan XX asrning 40-

yillarida simpleks-usul deb ataluvchi usul yaratildi va chiziqli programalashtirish nazariyasi hamda uning qo‘llanilishi tez suratlar bilan rivojlandi. «Chiziqli dasturlash» iborasini birinchi bo‘lib 1951 yilda J.Dansig va T.Kupmans kiritishgan.

Chiziqli dasturlash masalasining matematik modeli umumiy ko‘rinishda quyidagicha ifodalanadi:

$x_j, j = 1,2,\dots,n$, o‘zgaruvchilarning shunday qiymatlari topilsinki, $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \{\leq$, ёки $=$,ёки $\geq\} b_i$, $i = 1,2,\dots,m$, va $x_j \geq 0, j = 1,2,\dots,n$, shartlar bajarilsin hamda $z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ funksiya maksimal (yoki minimal) qiymat qabul qilsin, bunda $m, n \in N$.

Chiziqli dasturlash masalasining matematik modelidagi $x_j \geq 0, j = 1,2,\dots,n$, shartlar (manfiymaslik shartlari), ba’zan, qisman yoki butunlay qatnashmasligi mumkin.

Chiziqli dasturlash masalalarining matematik modeli. Ma’lumki, ishlab chiqarish haqidagi masalaning matematik modeli quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max, \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i, i = \overline{1,m}, x_j \geq 0, j = \overline{1,n}.$$

Bu model chiziqli dasturlash masalasi matematik modelining bir ko‘rinishi bo‘lib, undagi $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i, i = \overline{1,m}$**, shartlar masalaning** asosiy shartlari**,** $x_j \geq 0, j = \overline{1,n}$**, shartlar esa,** to‘g‘ri **(**bevosita**)** shartlari **deb ataladi. Maksimal qiymat qabul qilishi kerak bo‘lgan** $z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ **chiziqli fuknsiya esa, masalaning** maqsad funksiyasi **deb ataladi.**

Ba’zi chiziqli dasturlash masalalarining asosiy shartlari tenglamalar ko‘rinishida yoki ulardagi tengsizliklar «≥» ko‘rinishda bo‘lishi mumkin, xullas, asosiy shartlar tenglamalar va tengsizliklar sistemasini tashkil etadi.

Vektor-matrisa yozuvidan foydalanib chiziqli dasturlash masalasining matematik modelini quyidagi ko‘rinishida ham ifodalash mumkin:

$$c'x \to max, \ Ax \leq b, \ x \geq 0,$$

bunda $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ – vektorlar, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ matrisa, (') belgi esa transponirlash amalini anglatadi.

Bu yerda matrisa va vektorlar ustida amallar amaldagi qoidalarga binoan bajariladi. Yozuvlarda uchraydigan vektorlar vektor-ustun deb tushuniladi, vektor-satrni hosil qilish uchun esa, transponirlash amali qo‘llaniladi. Shuning uchun, c va x vektorlarning skalyar ko‘paytmasi $c'x$ ko‘rinishda yoziladi. Biror x vektor uchun $x = 0$ yoki $x \geq 0$ ko‘rinishdagi yozuv uning har bir komponentasi ko‘rsatilgan shartga bo‘ysunishini anglatadi. Shuni ham ta’kidlash kerakki, ba’zan, yozuvda transponirlash belgisi (') tushirib qoldirilishi mumkin.

Chiziqli dasturlash masalasining yuqoridagi yozuvida qatnashgan parametrlarga ishlab chiqarish haqidagi masalaning mohiyatidan kelib chiqqan holda nomlar ham berilgan: x – rejalar vektori, s – baholar (narxlar) vektori, b – shartlar vektori, A – shartlar yoki xarajatlar matrisasi. A matrisaning ustunlarini esa shartlar vektorlari deb atashadi.

Agar chiziqli dasturlash masalasining matematik modeli yuqoridagi ko‘rinishga ega bo‘lsa, u **normal** (**standart, tabiiy, simmetrik**) shaklda yozilgan deb hisoblanadi.

Agar chiziqli dasturlash masalasining asosiy shartlari faqat tenglamalardan iborat bo‘lsa, ya’ni uning matematik modeli

$c'x \to max,\ \ Ax = b,\ x \geq 0,$

ko‘rinishda bo‘lsa, u holda chiziqli dasturlash masalasi **kanonik** shaklda yozilgan deyiladi.

Bulardan tashqari, chiziqli dasturlash masalasi matematik modelini yozish uchun boshqa shakllar ham mavjud, masalan, **umumiy** shakl.

Isbotlash mumkinki, ixtiyoriy ko‘rinishda yozilgan chiziqli dasturlash masalasini, sodda matematik almashtirishlar yordamida, unga ekvivalent bo‘lgan boshqa ixtiyoriy ko‘rinishdagi chiziqli dasturlash masalasiga keltirish mumkin. Buning uchun, odatda, quyidagi almashtirishlar qo‘llaniladi.

1. Tengsizlikning ishorasini teskarisiga almashtirish: «≤» ko‘rinishdagi tengsizlikning ikkala tomoni ishorasini teskarisiga almashtirib, “≥” ko‘rinishdagi tengsizlikka va, aksincha, “≥”ni “≤”ga keltirish mumkin.

2. Tengsizlikni tenglamaga «aylantirish» mumkin:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \leq b \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + x_{n+1} = b, \\ x_{n+1} \geq 0 \end{Bmatrix},$$

bunda x_{n+1} – **qo‘shimcha o‘zgaruvchi** deb ataladi.

3. Agar biror o‘zgaruvchiga to‘g‘ri shart qo‘yilmagan bo‘lsa, u holda bu o‘zgaruvchini ikkita manfiymas o‘zgaruvchilar ayirmasi shaklida ifodalash mumkin.
4. Maqsad funksiyasining ishorasini teskarisiga almashtirish yordamida maqsadni ifodalovchi **max**ni **min**ga yoki, aksincha, **min**ni **max**ga almashtirish mumkin.

Chiziqli dasturlash masalasining barcha (asosiy va to‘g‘ri) shartlarini qanoatlantiruvchi $x' = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ vektor uning **mumkin bo‘lgan yechimi** yoki **rejasi** deb ataladi. Barcha mumkin bo‘lgan yechimlar birgalikda masalaning **mumkin bo‘lgan yechimlari (rejalari) to‘plami**ni tashkil etadi.

Masalaning maqsad funksiyasiga maksimal qiymat beruvchi $x^o = (x_1^o, x_2^o, \ldots, x_n^o)$ reja (mumkin bo‘lgan yechim) uning **optimal rejasi** (**optimal yechimi**) deb ataladi.

Misol. Quyidagi chiziqli dasturlash masalasi berilgan bo‘lsin:

$$z = 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 \rightarrow max,$$

$$-2x_2 + x_3 - 3x_5 = 8, x_1 + 4x_2 + 2x_5 = 4, x_2 + x_4 - x_5 = 1,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0.$$

Bu masala uchun $x^1 = (4; 0; 8; 1; 0)$ va $x^2 = (0; 1; 10; 0; 0)$ vektorlar rejalardir, lekin $x^3 = (-14; 4; 19; -2; 1)$ vektor reja bo‘la olmaydi, chunki x^1 va x^2 vektorlar uchun berilgan masalaning barcha shartlari bajariladi, x^3 uchun esa asosiy shartlar bajarilsada, to‘g‘ri shartlar qisman bajarilmaydi.

x^1 va x^2 rejalar uchun maqsad funksiyasining, ya’ni $z = 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4$ funksiyaning qiymatlarini hisoblaymiz:

$$z^1 = z(x^1) = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 0 - 8 + 2 \cdot 1 = 2,$$

$$z^2 = z(x^2) = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 - 10 + 2 \cdot 0 = -7.$$

$z(x^2) = -7 < z(x^1) = 2$ bo‘lgani uchun, x^2 reja masalaning optimal yechimi bo‘la olmaydi, chunki maqsad funksiyasiga x^1 reja z^2dan katta z^1 qiymat beradi. x^1 rejaning optimal reja bo‘lishi yoki bo‘lmasligini maxsus tekshirib ko‘rish kerak.

Transport masalasi. Transport masalasi chiziqli dasturlash masalalari ichida nazariy va amaliy nuqtai nazardan eng yaxshi o‘zlashtirilgan masalalardan biri bo‘lib, undan sanoat va qishloq xo‘jalik mahsulotlarini tashishni optimal rejalashtirish ishlarida muvaffaqiyatli ravishda foydalanilmoqda.

Transport masalasi maxsus chiziqli dasturlash masalalari sinfiga tegishli bo‘lib, uning chegaralovchi shartlaridagi koeffitsientlardan tuzilgan (a_{ij}) matritsaning elementlari 0 va 1 raqamlardan iborat bo‘ladi va har bir ustunda faqat ikkita element 0 dan farqli, qolganlari esa 0 ga teng bo‘ladi. Transport masalasini yechish uchun uning maxsus xususiyatlarini nazarga oluvchi usullar yaratilgan bo‘lib, quyida biz ular bilan tanishamiz.

Transport masalasining matematik modeli va xossalari

Faraz qilaylik, $A_1, A_2, \dots, A_m$ punktlarda bir xil mahsulot ishlab chiqarilsin. Ma’lum bir vaqt oralig‘ida har bir $A_i(i = \overline{1,m})$ punktda ishlab chiqariladigan mahsulot miqdori a_i birlikka teng bo‘lsin. Ishlab chiqariladigan mahsulotlar $B_1, B_2, \dots, B_n$ punktlarda iste’mol qilinsin hamda har bir $B_j(j = \overline{1,n})$ iste’molchining ko‘rilayotgan vaqt oralig‘ida mahsulotga bo‘lgan talabi $b_j(j = \overline{1,n})$ birlikka teng bo‘lsin.

Bundan tashqari $A_1, A_2, \dots, A_m$ punktlarda ishlab chiqariladigan mahsulotlarning umumiy miqdori $B_1, B_2, \dots, B_n$ punktlarning mahsulotga bo‘lgan talablarining umumiy miqdoriga teng, ya’ni

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

tenglik o‘rinli bo‘lsin deb faraz qilamiz . Faraz qilaylik, har bir ishlab chiqarish punktidan hamma iste’mol qiluvchi punktga mahsulot tashish imkoniyati mavjud, hamda A_i punktdan B_j punktga mahsulotni olib borish uchun sarf qilinadigan xarajat c_{ij} pul birligiga teng bo‘lsin.

x_{ij} bilan rejalashtirilgan vaqt oraligida A_i punktdan B_j punktga olib boriladigan mahsulotning umumiy miqdorini belgilaymiz.

Transport masalasining berilgan parametrlarini va belgilangan noma’lumlarni quyidagi jadvalga joylashtiramiz.

1-jadval

B_j / A_i	B_1	B_2		B_n	i/ch mahsulotlar miqdori
A_1	C_{11} x_{11}	C_{12} x_{12}	$\dots$	C_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	C_{21} x_{21}	C_{22} x_{22}	$\dots$	C_{2n} x_{2n}	a_2
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
A_m	C_{m1} x_{m1}	C_{m2} x_{m2}	$\dots$	C_{mn} x_{mn}	a_m
talab miqdori	b_1	b_2	$\dots$	b_n	

Masalaning iqtisodiy ma’nosi yuk tashishning shunday rejasini tuzish kerakki: 1) har bir ishlab chiqarish punktidagi mahsulotlar to‘la taqsimlansin; 2) har bir iste'molchining mahsulotga bo'lgan talabi to'la qanoatlantirsin va shu bilan birga sarf qilinadigan yo'l xarajatlarining umumiy qiymati minimal bo'lsin.

Masalaning birinchi shartini quyidagi tenglamalar sistemasi orqali ifodalash mumkin:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n} = a_1, \\ x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2n} = a_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{m1} + x_{m2} + \ldots x_{mn} = a_m. \end{cases} \quad (1)$$

Masalaning ikkinchi sharti esa quyidagi tenglamalar sistemasi ko'rinishida ifodalanadi:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + \ldots + x_{m1} = b_1, \\ x_{12} + x_{22} + \ldots + x_{m2} = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{1n} + x_{2n} + \ldots x_{mn} = b_n. \end{cases} \quad (2)$$

Masalaning iqtisodiy ma'nosiga ko'ra noma'lumlar manfiy bo'lmasligi kerak, ya'ni

$$x_{ij} > 0 (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}). \quad (3)$$

i – ishlab chiqarish punktidan j – iste'mol qiluvchi punktga rejadagi x_{ij} birlik mahsulotni yetkazib berish uchun sarf qilinadigan yo'l xarajati $c_{ij}x_{ij}$ pul birligiga teng bo'ladi.

Rejadagi barcha mahsulotlarni tashish uchun sarf qilinadigan umumiy yo'l xarajatlari

$$Y = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \ldots + c_{1n}x_{1n} + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + \ldots +$$
$$c_{2n}x_{2n} + \ldots + c_{m1}x_{m1} + c_{m2}x_{m2} + \ldots + c_{mn}x_{mn} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

funksiya orqali ifodalanadi. Masalaning shartiga ko'ra bu funksiya minimumga intilishi kerak, ya'ni

$$Y = \sum_{i=1}^{m\Sigma} \sum_{j=1}^{n\Sigma} c_{ij}x_{ij} \to min \quad (4)$$

(1) – (4) munosabatlar birgalikda transport masalalasining matematik modeli deb ataladi.

Transport masalasining matematik modelini quyidagi yig'indi ko'rinishda ham yozish mumkin.

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, (i = \overline{1, m}) \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, (j = \overline{1, n}) \quad (6)$$

$$x_{ij} \geq 0, (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}) \quad (7)$$

$$Y = \sum_{i=1}^{m\Sigma} \sum_{j=1}^{n\Sigma} c_{ij}x_{ij} \to min \quad (8)$$

Masaladagi har bir a_i, b_j va c_{ij} nomanfiy sonlar ya'ni $a_i \geq 0$, $b_j \geq 0$, $c_{ij} \geq 0$.

Agar (5) – (8) masalada

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = A \qquad (9)$$

tenglik o‘rinli bo‘lsa, ya’ni ishlab chiqarilgan mahsulotlar yig‘indisi o‘nga bo‘lgan talablar yig‘indisiga teng bo‘lsa, u holda bu masalani yopiq modelli transport masalasi deb aytamiz.

1-teorema. Har qanday yopiq modelli transport masalasi yechimga ega.

2-teorema. Transport masalasining shartlaridan tuzilgan matritsaning $r(A)$ rangi $m+n-1$ ga teng.

3-teorema. Agar masaladagi barcha a_i va $b_i$lar butun sonlardan iborat bo‘lsa, transport masalasining yechimi butun sonli bo‘ladi.

Teoremaning isbotini transport masalasining boshlang‘ich bazis rejalarini topish usullarida ko‘rish mumkin.

4-teorema. Ixtiyoriy transport masalasining optimal rejasi mavjuddir.

2. Maltus va Fyurxst-Perl modellari. Populyatsiya chiziqsiz modelinint uch turdagi rejimi

a) Radioaktiv yemirilish modeli. Quyidagi belgilishlarni kiritamiz:

$N(0)$ - radioaktiv moddaning (masalan uran, pluton kabilar) atomlar soni,

$N(t)$ - radioaktiv moddaning t vaqtdagi hali yemirilmagan atomlari soni bo‘lsin. Tajribalardan ma’lumki, vaqt birligida sochilayotgan atomlar sonining o‘zgarish tezligi radioaktiv modda atomlari soniga proporsional

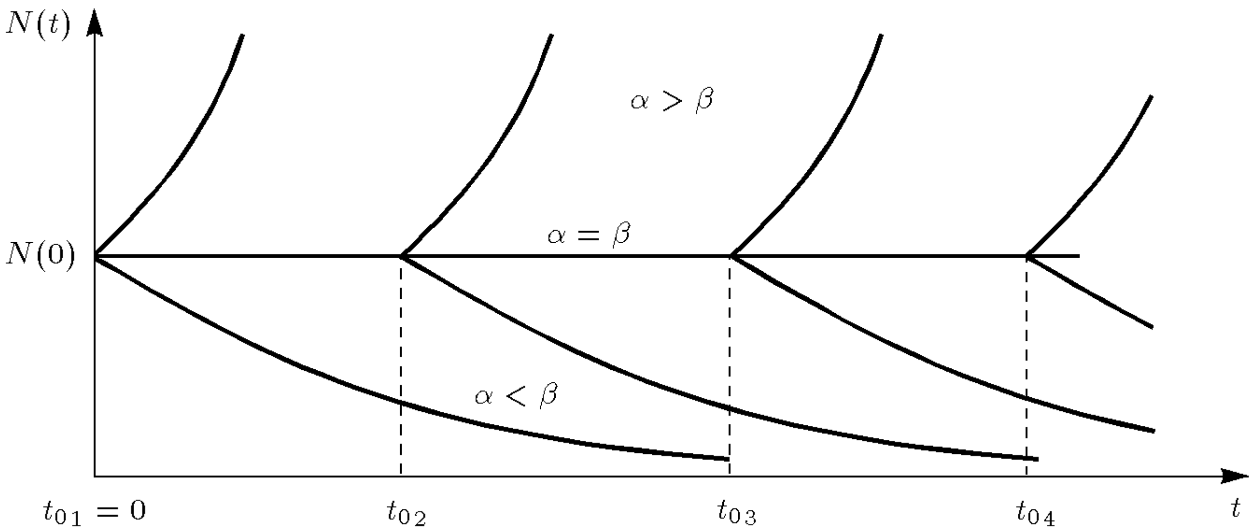
$$N' = \frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t), \lambda > 0 \qquad (1)$$

bu yerda λ - qaralayotgan radioaktiv moddagagina xos bo‘lgan o‘zgarmas (radioaktivlik koeffisiyenti deb ataladi). Maktab matematika kursidan ma’lumki, (1) differensial tenglama yechimi

$$N(t) = N(0)e^{-\lambda t} \qquad (2)$$

kabi ko‘rinishda bo‘ladi.

Maltus va Fyurxst-Perl modellari. Bu model asosida quyidagi oddiy tasdiq yotadi: populyatsiyaning vaqt bo‘yicha o‘zgarish tezligi uning t vaqt momentidagi soni *N(t)* ning ko‘payish koeffisiyenti $\alpha(t) \geq 0$ va kamayish koeffisiyenti $\beta(t) \leq 0$ lar yig‘indisiga ko‘paytirilganiga proporsionaldir.



1-rasm

Natijada radioaktiv radioaktiv yemirilish tenglamasiga juda o‘xshash bo‘lgan va $\alpha < \beta$ (α va β doimiylar) bo‘lganda esa, u bilan ustma-ust tushuvchi quyidagi tenglamaga kelamiz:

$$\frac{dN(t)}{dt} = [\alpha(t) - \beta(t)]N(t) \qquad (3)$$

(3) tenglamani integrallab tenglama yechimini olamiz:

$$N(t) = N(0)e^{\int_{t_0}^{t}[\alpha(\tau)-\beta(\tau)]d\tau} \qquad (4)$$

bu yerda $N(0) = N(t = 0)$ - boshlang‘ich tezlik.

Ko‘rinib turibdiki, qaralgan ikki xil tabiatga ega bo‘lgan masalalar modellari ((1) va (3) tenglamalar) bir xil, chunki bunda tenglamalarni keltirib chiqarishda bir xil mulohazalardan foydalaniladi.

1-rasmda α va β doimiy bo‘lganda $N(t)$ funksiyaning grafigi keltirilgan. Ko‘rinib turibdiki, $\alpha = \beta$ bo‘lganda aholi soni o‘zgarmaydi, ya’ni bu holda (1) tenglamaning yechimi $N(t) = N(0)$ o‘zgarmas miqdordan iborat bo‘ladi. Tug‘ilish va kamayish orasidagi muvozanat shu ma’noda turg‘un emaski, $\alpha = \beta$ tenglikning ozgina buzilishi vaqt o‘tishi bilan $N(t)$ funksiyaning $N(0)$ muvozanat qiymatdan katta miqdorga og‘ishiga olib keladi. $\alpha <\beta$ bo‘lganda aholi soni kamayadi va bunda $t \to \infty$bo‘lganda nolga intiladi, $\alpha >\beta$ bo‘lganda esa eksponensial qonun bo‘yicha o‘sadi va $t \to \infty$ bo‘lganda cheksizlikka intiladi. Bu oxirgi natija Mal’tus tomonidan Yer aholisining nihoyatda ko‘payishi va undan kelib chiqadigan salbiy oqibatlar to‘g‘risida xavfsirab aytgan fikrlariga asosiy manba bo‘lib hisoblanadi.

Shuni ta’kidlash kerakki, axoli sonining o‘zgarish jarayoni odamlarning o‘zlarining ongli aralashuviga bog‘liq bo‘lib, uni albatta, oddiy qonuniyat bilan ifodalab bo‘lmaydi. Hattoki ideal sharoitdagi ajratib qo‘yilgan biologik populyasiyaning mavjud bo‘lishi uchun zarur bo‘lgan resurslar cheklangani sababli taklif etilayotgan model real vaziyatga to‘lasincha mos kelmaydi.

Bu aytilganlar juda murakkab hodisalar matematik modellarini qurishda analogiya usulining rolini kamaytirmaydi. Analogiya usulining qo‘llanilishi modellarning muhim xossalaridan biri – ularning universalligiga, ya’ni turli tabiatli obyektlarga qo‘llanishi mumkinligiga asoslangan.

1. Matematik modellar chiziqsizligi haqida. Yuqorida qaralgan modellarning soddaligi ularning chiziqli ekanligiga bog‘liq. Matematik nuqtai nazardan bu muhim tushuncha superpozisiya prinsipi o‘rinli ekanligi anglatadi, ya’ni yechimlarning ixtiyoriy kombinatsiyasi (masalan, ularning yig‘indisi) ham yechim bo‘ladi. Superpozisiya prinsipidan foydalanib xususiy hollar uchun yechimlar topib umumiy hol uchun yechim qurish qiyin emas. Shuning uchun umumiy hol sifat xususiyatlari haqida xususiy hol xossalaridan xulosa chiqarish mumkin. Boshqacha qilib aytganda, *chiziqli modellarda* obyektning biror-bir shartlar o‘zgarishiga javobi shu o‘zgarishning kattaligiga proporsional bo‘ladi.

Matematik modellari superpozisiya prinsipiga bo‘ysunmaydigan *chiziqsiz modellarda* esa obyektlarning bir qismi haqidagi xulosalardan butun obyekt haqida to‘g‘ri xulosa chiqarishga kafolat bermaydi, uning shartlar o‘zgarishiga javobi shu o‘zgarishlar kattaligiga sifat jihatdan bog‘langan.

Ko‘pgina real jarayonlar va ularga mos keluvchi matematik modellar chiziqsiz hisoblanadi. Chiziqli modellar esa juda xususiy hollargagina mos bo‘lib, odatda real voqyeilikka dastlabki yaqinlashish uchun xizmat qiladi.

2. Chiziqsiz Maltus modeli (logistik model). Masalan oldingi mavzuda qaralgan populyasiya modeli uchun zaruriy resurslarning chegaralanganligini e’tiborga olsak, u chiziqsiz modelga aylanadi. Bu cheklov kiritilayotganda qo‘yidagilar hisobga olinadi:

1) populyasiya soni uchun atrof muhit ta’mirlay oladigan qandaydir N_m «muvozanat» soni mavjud;

2) populyasiya sonining o‘zgarish tezligi populyasiya soni bilan uning muvozanat qiymatidan og‘ish kattaligiga ko‘paytmasiga (chiziqli Maltus modelidan farqli ravishda) proporsional, ya’ni

$$\frac{dN}{dt} = \alpha\left(1 - \frac{N}{N_m}\right)N, \alpha > 0 \qquad (3)$$

Bu tenglamadagi $\left(1 - \frac{N}{N_m}\right)$ had populyasiya soni «to‘yinganlik» mexanizmini ta’minlaydi: $N < N_m$ bo‘lganda o‘sish tezligi musbat va $N \to N_m$ da nolga intiladi; $N > N_m$ bo‘lganda esa o‘sish tezligi manfiy va nolga intiladi.

Endi olingan (3) modelni tadqiq qilamiz. (3) tenglamani

$$\frac{dN}{N_m - N} + \frac{dN}{N} = \alpha t$$

shaklda yozib olib integrallaymiz va

$$ln(N_m - N) + ln\,N = 2t + C$$

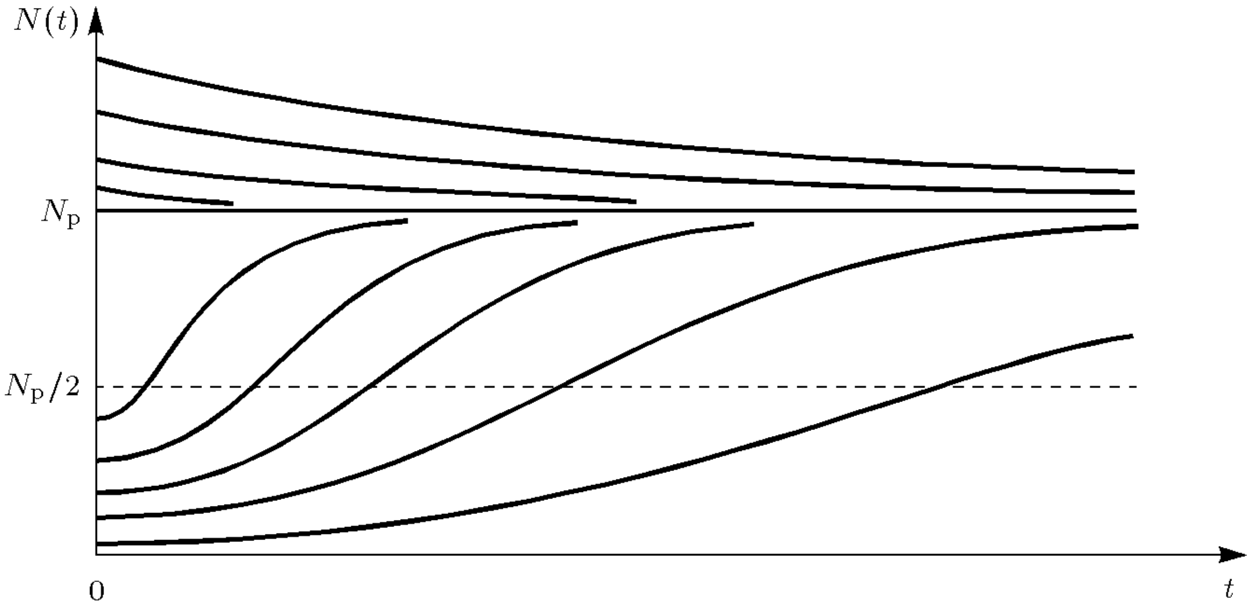
tenglikni olamiz. Bu yerdagi o‘zgarmas (S) $N(t = 0) = N(0)$ boshlang‘ich shartdan olinadi: $C = ln\frac{N(0)}{N_m - N(0)}$. Natijada

$$N = N_m \frac{N(0)}{N_m - N(0)} \ell^{\alpha t} - N \frac{N(0)}{N_m - N(0)} \ell^{\alpha t},$$

yoki

$$N(t) = \frac{N_m N(0) e^{\alpha t}}{N_m - N(0)(1 - e^{\alpha t})} \qquad (4)$$

Bu funksiyaning o‘zini tutish *logistik egri chiziq* deb ataluvchi grafik bilan tasvirlanadi (2-rasm). Ixtiyoriy $N(0)$ boshlang‘ich qiymatda populyasiya soni N_m muvozanat qiymatga intiladi, bunda $N(t)$ qanchalik $N(0)$ ga yaqin bo‘lsa, yaqinlashishi shuncha sekin yuz beradi. Shunday qilib, chiziqli Maltus modelidan farqli ravishda chiziqsiz Maltus modelida muvozanat holati turg‘un bo‘lar ekan.



2-rasm

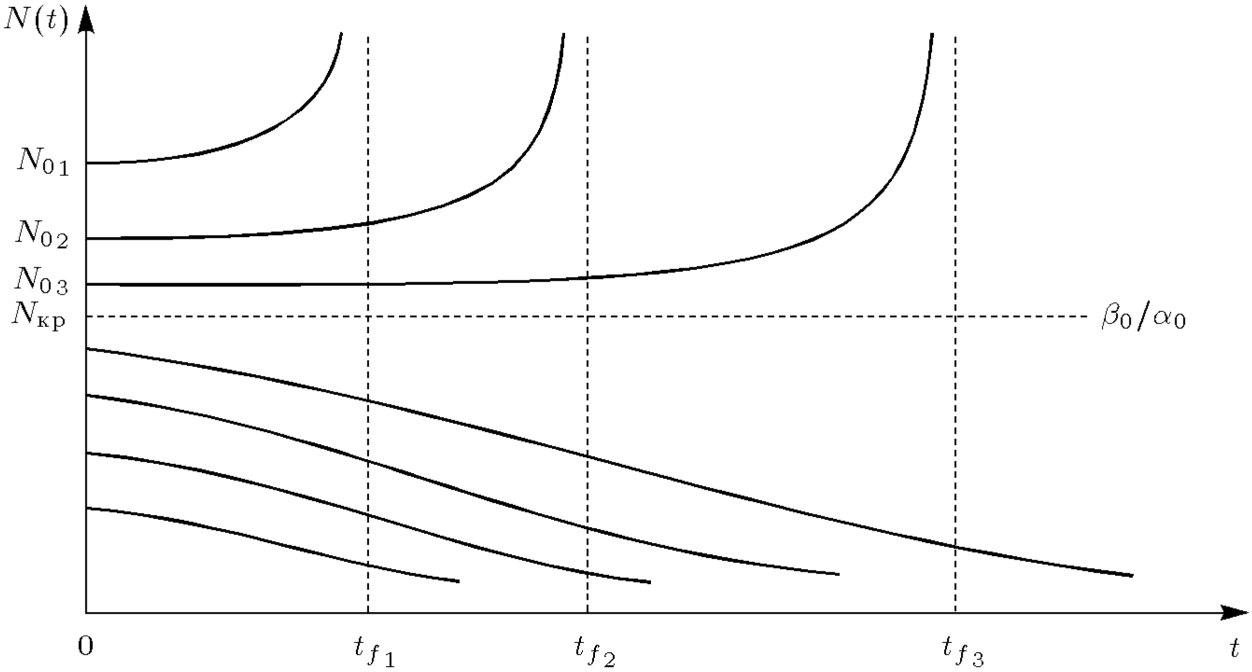
Qarab chiqilgan chiziqsiz Maltus modeli (logistik model ham deb yuritiladi) chiziqli Maltus modeliga qaraganda populyasiya dinamikasini nisbatan haqqoniy aks ettirsada, chiziqsizligi tufayli murakkab hisoblanadi. Shuni ham ta’kidlash kerakki, yuqorida qo‘llanilgan to‘yinganlik mexanizmi turli fan sohalaridagi modellarda qo‘llaniladi.

3. Populyasiya chiziqsiz modelining uch rejimi. Yuqorida murakkabligi ta’kidlangan chiziqsiz modelni tadqiq etishda davom etamiz. (1) va (3) modellardan farqli ravishda tug‘ilish koeffisiyenti populyasiya soniga, ya’ni $N(t)$ ga bog‘liq bo‘lsin deb hisoblaymiz: $\alpha = \alpha(N)$. Kamayish (o‘lim) koeffisiyenti ham N ga bog‘liq bo‘lsin.

Aniqlik uchun $\beta(N) = \beta_0 = const, \alpha(N) = \alpha_0 N$ deb olamiz, ya'ni tug'ilish populyasiya soniga proporsional (masalan, chunki populyasiya a'zolari ko'payishdan manfaatdor). U holda (1) tenglama

$$\frac{dN}{dt} = \alpha_0 N^2 - \beta_0 N \qquad (5)$$

ko'rinishga keladi. Turli boshlang'ich qiymatlarda $(N(0) = N_0) N(t)$ funksiya xarakterini qarab chiqamiz (3-rasm).



a) $N_0 < N_m = {}^{\beta_0}/_{\alpha_0}$ bo'lganda monoton ravishda kamayib, nolga intiladi $(t \to \infty)$. Bu hol uchun (5) tenglama yechimi (3) tenglama yechimiga o'xshash formula bilan beriladi, faqat t qarama – qarshi ishora bilan olinadi (teskari logistik chiziq).

b) N_0 ning kritik (muvozanat) qiymatida $(N_0 = N_m)$ populyasiya soni vaqtga bog'liq bo'lmay qoladi.

v) $N_0 > N_m$ bo'lganda yechim

$$N(t) = \frac{N_0 \cdot {}^{\beta_0}/_{\alpha_0}}{N_0 + \left[{}^{\beta_0}/_{\alpha_0} - N_0\right] \ell^{-\beta_0 t}}, N(0) = N_0 \qquad (6)$$

ko'rinishda bo'lib, u a) va b) harakat jihatdan keskin farq qiladi: populyasiya soni o'sadi, buning ustiga o'sish shu qadar tezki chekli $t = t_f$ vaqt oralig'ida cheksizlikka intiladi. Populyasiya boshlang'ich soni N_0 qancha katta bo'lsa, bu $t = t_f$ vaqt shuncha kichik bo'ladi.

Demak, (5) tenglamaning chiziqsizligi, hatto oddiy modelda ham turli tuman effektlarni yuzaga keltirib chiqaradi, populyasiya soni vaqt bo'yicha o'zgarishining mumkin bo'lgan uch rejimi; b) rejimning turg'unsizligi, ya'ni a) yoki v) sohalarga tomon kichik og'ishlar yuz berganda yechim $N_m =$

${\beta_0}/{\alpha_0}$ chiziqdan uzoqlashadi; $N(t)$ funksiyaning boshlang‘ich qiymatlarga juda sezgirligi; va nihoyat $N_0 > N_m$ bo‘lganda chekli vaqt oralig‘ida populyasiya sonining keskin tarzda oshib ketishi kabilar.

Shuni ham qo‘shimcha qilish mumkinki, (5) munosabat, meva zarurkunandalari va ayrim turdagi bakteriyalar populyasiyalar dinamikasi moddellarini ham ifodalaydi.

4-ma’ruza. Raqobatning ayrim modellari. Biologik modellar

Reja:

3. Raqobatning ayrim modellari.
4. Biologik modellar.

1. Raqobatning ayrim modellari. Ikki mamlakat qurollanish poygasi matematik modeli

Masalaning qo‘yilishi va modelni keltirib chiqarish. Qarama-qarshiliklarning turli shakllari – populyasiyada ikki tur orasidagi kurash, davlatlararo harbiy harakatlar va qurollanish poygasi jarayonlari modellarini qurishda va tahlil qilishda qo‘llaniluvchi metodologik yondoshuvlardagi o‘xshashliklarni ko‘rish qiyin emas.

Har bir mamlakat umumiy qurollar miqdori ushbu uch faktordan, ya’ni raqib qurollari miqdoridan, mavjud qurollarning eskirish darajasidan hamda raqiblar o‘rtasidagi o‘zaro ishonchsizlik darajasidan bog‘liq deb hisoblaymiz. Qurollanish sur’atining o‘sishi yoki kamayishi ko‘rsatilgan faktorlarga proporsional, ya’ni

$$\frac{dM_1}{dt} = \alpha_1(t)M_2 - \beta_1(t)M_1 + \gamma_1(t)$$

$$\frac{dM_2}{dt} = \alpha_2(t)M_1 - \beta_2(t)M_2 + \gamma_2(t) \ . \qquad (1)$$

Bu tenglamada $M_1(t), \quad M_2(t) \geq 0$ −qurollanish hajmi, $\alpha_1(t) > 0,\ \alpha_2(t) > 0, \beta_1(t) > 0,\ \beta_2(t) > 0$ koeffisiyentlar qurollanishning ortishi va “eskirishi” tezligini xarakterlaydi (iqtisodiy modellarda ishlab chiqarish quvvati amortizasiyasi jarayoniga o‘xshash), $\gamma_1(t) \geq 0$, $\gamma_2(t) \geq 0$ funksiyalar raqiblarning o‘zaro ehtiyotkorlik darajasini ifodalaydi va u qurol-yarog‘lar soniga bog‘liqmas deb hisoblanadi.

Model tahlili va sifat o‘zgarishlarini aniqlash. Qurilgan (1) modelda qurollanish poygasi dinamikasiga ta’sir qiluvchi ko‘pgina muhim faktorlar hisobga olinmagan bo‘lsada, bu jarayonning qator muhim xususiyatlarini yoritib berishga imkon beradi. Jarayon tahlili α_i, β_i, γ_i, $i = 1{,}2$ funksiyalar vaqtdan bog‘liqmas bo‘lgan holda soddalashadi (ya’ni α_i, β_i, γ_i lar o‘zgarmas sonlar):

$$\frac{dM_1}{dt} = \alpha_1 M_2 - \beta_1 M_1 + \gamma_1,$$

$$\frac{dM_2}{dt} = \alpha_2 M_1 - \beta_2 M_2 + \gamma_2 \qquad (2)$$

Endi bu (2) sistemani M_1, M_2 fazoda $M_1(t)$ va $M_2(t)$ funksiyalarning vaqt bo‘yicha sifat o‘zgarishlarini aniqlash maqsadida o‘rganamiz.

(2) tenglama $\frac{d\ M_1}{dt} = 0$ va $\frac{d\ M_2}{dt} = 0$ muvozanat holatlariga ega. Bu $M_1{}^{\circ}$ va $M_2{}^{\circ}$ muvozanat qiymatlari

$$\alpha_1\ M_2 - \beta_1\ M_1 + \gamma_1 = 0, \qquad \alpha_2\ M_1 - \beta_2\ M_2 + \gamma_2 = 0.$$

shartlardan topiladi va

$$M_1^0 = \frac{\alpha_1\gamma_2 - \beta_1\gamma_1}{\beta_1\beta_2 - \alpha_1\alpha_2}, \quad M_2^0 = \frac{\alpha_2\gamma_1 + \beta_1\gamma_2}{\beta_1\beta_2 - \alpha_1\alpha_2} \qquad (3)$$

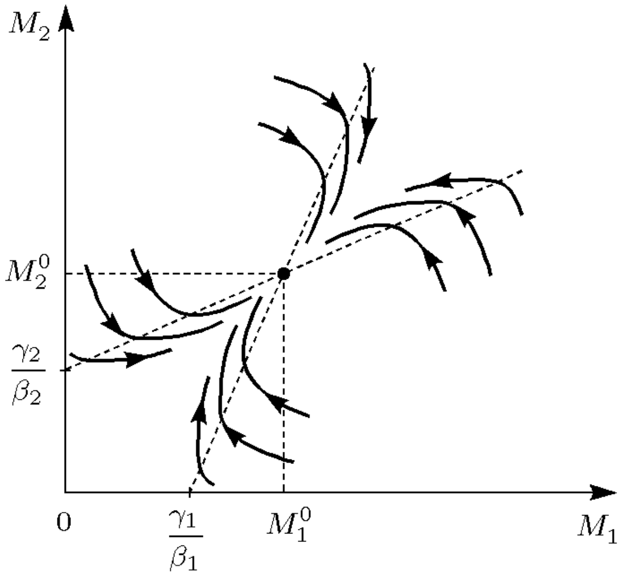
larga teng. Bu tenglikdan birinchi muhim xulosa kelib chiqadi: $M_1{}^{\circ}$, $M_2{}^{\circ}$ kattaliklarning musbat qiymatlarida ($M_1(t)$, $M_2(t)$ funksiyalar o‘z ma’nosiga ko‘ra nomanfiy) muvozanat mavjud bo‘lishi uchun

$$\beta_1\ \beta_2 > \alpha_1\ \alpha_2 \qquad (4)$$

tengsizlik bajarilishi zarur.

(4) tengsizlikning ma’nosi quyidagi mulohazalardan aniqlanadi. Masalan, faraz qilaylik, α_1, β_1 va β_2 parametrlar o‘zgarmas, α_2 parametr o‘suvchi bo‘lsin. Bu 1-mamlakat qurollanish sohasida o‘z strategiyasini o‘zgartirmasligini, 2-mamlakat esa eskirish darajasi o‘zgarishsiz bo‘lgan holda qurollanish sur’atini oshirib borishini anglatadi (β_2 parametr). U holda yetarlicha katta α_2 larda

muvozanat mumkin bo‘lmay qoladi va (4) munosabat esa albatta buziladi. O‘zaro ishonchsizlikni xarakterlovchi har ikkala $\gamma_1,\ \gamma_2$ parametr nolga teng bo‘lsa, muvozanat vaziyatiga har ikki raqib tomoni qurollanish yo‘qligiga mos keladi.



Endi (3) muvozanatning (4) shartda turg‘unligini tekshiramiz. U holda (2) tenglamaning $OM_1\ M_2$ tekislikdagi integral chiziqlari 1-rasmdagi ko‘rinishda bo‘ladi. Shtrix chiziqlar nol $\left(M_2 = \frac{\alpha_2}{\beta_2}\ M_1 + \frac{\gamma_2}{\beta_2}\right)$ va cheksizlik izoklinalariga mos keladi. Nolning izoklinasi cheksizlikning izoklinasiga nisbatan kamroq egiklikka ega. Uzluksiz qalin chiziqlarga integral egri chiziqlari mos keladi. Strelkalar bilan integral chiziqlar bo‘ylab harakat yo‘nalishi belgilanadi. $M_1(t)$ va $M_2(t)$ funksiyalar t ning o‘sishi bilan muvozanat qiymatlariga intiladi. Shunday qilib, muvozanat turg‘un: undan ixtiyoriy og‘ish yetarlicha katta vaqt oralig‘ida juda kichik bo‘ladi.

Modelda ehtimoliy harakatlar xarakteristikalarini aniqlash. Qurilgan bu modeldan muvozanat holati o‘zgarganda raqiblarning kutilayotgan ehtimoliy harakatlari xarakteristikalarini aniqlash mumkin. Faraz qilaylik, qurollanish sur’ati har ikki mamlakatda uncha katta bo‘lmagan $d\alpha$ qiymatga o‘zgarsin $(d\alpha = d\alpha_1 = d\alpha_2)$. Shu bilan birga qurollanish hajmi ham o‘zgaradi, shuningdek har ikki tomon dM_1^0 va dM_2^0 orttirmalar uchun (3) dan

$$dM_1^0 = \frac{\alpha_1\alpha_2\gamma_2 + \alpha_2\beta_2\gamma_1 + \gamma_1^2\gamma_2 + \alpha_1\beta_2\gamma_1}{(\beta_1\beta_2 - \alpha_1\alpha_2)^2}\,d\alpha,$$

$$dM_2^0 = \frac{\alpha_1\alpha_2\gamma_1 + \alpha_1\beta_1\gamma_2 + \gamma_2^2\gamma_1 + \alpha_2\beta_1\gamma_2}{(\beta_1\beta_2 - \alpha_1\alpha_2)^2}\,d\alpha$$

tengliklar hosil qilinadi.

Soddalik uchun, raqiblar o‘zaro ishonchsizlik darajasi teng $(\gamma_1 = \gamma_2)$ deb hisoblaymiz. U holda $dM_1^0 = dM_2^0$ tenglikdan muvozanatning kichik o‘zgarishlarida tomonlar tengligi (paritet) shartini hosil qilamiz:

$$\alpha_1\alpha_2\gamma + \alpha_2\beta_2\gamma + {\alpha_1}^2\gamma + \alpha_1\ \beta_2\gamma = \alpha_1\alpha_2\gamma + \alpha_1\beta_1\gamma + {\alpha_2}^2\gamma + \alpha_2\beta_1\gamma$$

$$\alpha_1\ (\alpha_1 + \beta_2 - \beta_1) = \alpha_2\ (\alpha_2 + \beta_1 - \beta_2). \qquad (5)$$

U mamlakatlar o‘rtasida mos kelishuvlarga asos bo‘lishi mumkin. Agar, masalan, $\alpha_2 = \sigma\alpha_1, \quad \sigma > 0$ bo‘lsa (5) tenglikdan

$$\alpha_1(1-\sigma) = \beta_1 - \beta_2. \qquad (6)$$

$\sigma < 1$ bo‘lganda (ikkinchi tomon qurollanishi o‘sish sur’ati birinchisinikiga nisbatan pastroq) tenglik saqlanishi uchun $\beta_2 < \beta_1$, ya’ni ikkinchi tomonning ((6) formulaga asosan) qurollanish amortizasiya (eskirish) sur’ati pastroq bo‘lishi kerak. Qarama-qarshi $\sigma > 1$ tengsizlikda amortizasiya tezliklari o‘rtasida teskari munosabat hosil qilinadi.

2. Biologik modellar. Epidemiya tarqalishining matematik modeli

Asosiy tushunchalar va masalaning qo‘yilishi. Model tuzish. Odamlar ijtimoiy jamiyatda yoki hayvonot dunyosida uchrab turuvchi yuqumli kasalliklar tarqalishi (epidemiya) bilan bog‘liq jarayonlarni tadqiq qilish ularning yuzaga kelish sabablari, tarqalish tezligi, uni davom etish davri, oldini olish kabi masalalarni matematik tadqiq qilish usullari bilan chambarchas bog‘liq. Shu sababli biror populyasiyada uchrashi mumkin bunday vaziyatni matematik tahlil qilib chiqamiz.

Soni N bo‘lgan biror populyasiya qaralayotgan bo‘lsin. Uni shartli ravishda uch guruhga bo‘lamiz. Birinchi guruhga ayni bir kasallikka moyil, lekin hozircha sog‘lom bo‘lganlari kiritiladi. Ularning t vaqtdagi sonini $S(t)$ bilan belgilaylik. Ikkinchi guruhga infeksiya yuqtirganlar kiritiladi, ular kasallik tarqatish o‘chog‘i ham hisoblanadi. Ularning t vaqt momentida sonini $I(t)$

bilan belgilaymiz. Va nihoyat uchinchi guruhga sog‘lom va bu kasallikka immuniteti bor odamlarni kiritamiz. Ularning soni $R(t)$ bo‘lsin. Shunday qilib

$$S(t) + I(t) + R(t) = N \tag{1}$$

Faraz qilamizki, infeksiya yuqtirgan odamlar soni biror fiksirlangan I^* sondan oshib ketsa, kasallikka moyil odamlar sonining o‘zgarish tezligi o‘sha kasallikka moyil odamlar soniga proporsional bo‘lsin. Infeksiyalangan (kasallangan), biroq tuzala boshlagan odamlar sonining o‘zgarish tezligi infeksiya yuqtirganlar soniga proporsional deb hisoblaymiz. Albatta, bu farazlar real vaziyatni ancha soddalashtirsada, bir qator hollarda asl voqyelikka mos keladi. Birinchi farazga ko‘ra infeksiyalangan odamlar soni $I(t) > I^*$ bo‘lganda, ular kasallikka moyil odamlarga kasallik yuqtirishlari mumkin deb hisoblaymiz. Bu esa infeksiyalangan odamlarni izolyasiyalash holati (karantin) e’tiborga olinganligini anglatadi.

Yuqoridagi mulohazalarga asoslangan holda, kasallikka moyil odamlar soni o‘zgarish modelini hosil qilamiz:

$$\frac{ds}{dt} = \begin{cases} -\alpha S, & agar I(t) > I^* \\ 0, & agar I(t) \le I^*. \end{cases} \tag{2}$$

Kasallikka moyil har bir odam oxir oqibat infeksiya yuqtirishi tufayli, infeksiya yuqtirganlar sonining o‘zgarish tezligi vaqt birligi ichida endi kasallanganlar va tuzala boshlaganlar soni farqi bilan aniqlanadi. Demak,

$$\frac{dI}{dt} = \begin{cases} \alpha S - \beta I, & agar I(t) > I^* \\ -\beta I, & agar I(t) \le I^*, \end{cases} \tag{3}$$

bu yerda α va β proporsionallik koeffisiyentlari mos ravishda *kasallanish va sog‘ayish koeffisiyentlari* deyiladi.

Va nihoyat, tuzalayotgan va immunitetga ega odamlar sonining o‘zgarishi

$$\frac{dR}{dt} = \beta I \tag{4}$$

tenglama bilan aniqlanadi.

Model boshlang‘ich shartlarning 2 ta holi. Yuqoridagi tenglama-lar bir qiymatli aniqlanishi uchun boshlang‘ich shartlarni berish kerak. Soddalik uchun $t = 0$ vaqt momentida tuzalib immunitetga ega bo‘lganlar yo‘q, ya’ni

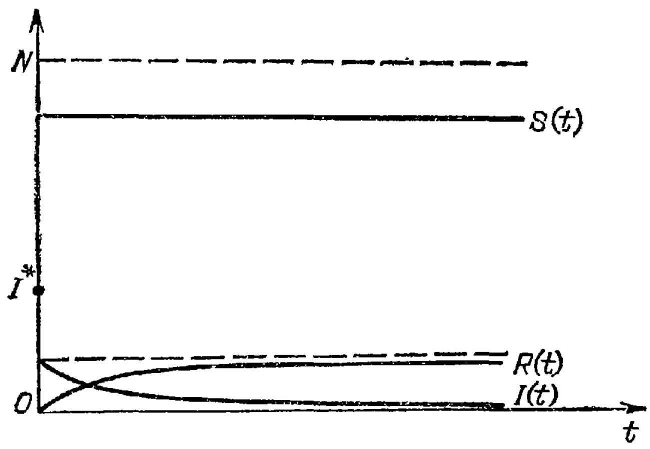
$R(0)$ infeksiyalanganlarning boshlang‘ich soni $I(0) = I_0$ ga teng deb hisoblaymiz.

Shuningdek, kasallanish va sog‘ayish koeffisiyentlari teng ($\alpha = \beta$) deb olamiz. Natijada ikki holatni qarab chiqish zarurati tug‘iladi.

1-holat. $\boldsymbol{I_0 \leq I^*}$. Bu holatda vaqt o‘tishi bilan kasallikka chalinish yuz bermaydi, chunki bunda $ds/dt = 0$ va demak, (1) tenglikka va $R(0) = 0$ shartga ko‘ra barcha t larda $S(t) = S(0) = N - I(0)$ tenglik bajariladi. Qaralayotgan hol ko‘p infeksiyaga uchraganlar izolyasiyada bo‘lgan vaziyatga mos keladi. Bu holatda (3) tenglamadan $\frac{dI}{dt} = -\alpha I$ tenglamaga kelamiz. Bu yerdan $I(t) = I_0 e^{-\alpha t}$. Demak,

$$R(t) = N - \big(S(t) + I(t)\big) = N - (N - I_0 + I_0 e^{-\alpha t}) = I_0(1 - e^{-\alpha t}).$$

Qo‘yidagi rasmda har bir guruh soni o‘zgarish grafigi tasvirlangan ($I_0 \leq I^*$).



2-holat. $I_0 > I^*$. Bu holda $\boldsymbol{t}$ ning barcha qiymatlarida $I(t) > I^*$ tengsizlik o‘rinli bo‘ladigan $0 \leq t < T$ interval mavjud bo‘lishi kerak, zero masala qo‘yilishiga ko‘ra $I(t)$ uzluksiz funksiya. Bu yerdan $\forall t \in [0, T)$ lar uchun kasallik barcha unga moyillarga tarqalishi kelib chiqadi. Shunday qilib, (2) dan

$$S(t) = S_0 e^{-\alpha t}$$

kelib chiqadi, bu yerda $S_o = S(0), \quad 0 \leq t < T$.

Bu qiymatni (3) tenglamaga qo‘yib

$$\frac{dI}{dt} + \alpha I = \alpha S_o e^{-\alpha t} \tag{5}$$

differensial tenglamaga kelamiz. Endi (5) tenglamaning ikkala qismini $e^{\alpha t}$ga ko‘paytirib

$$e^{\alpha t}\frac{dI}{dt}+\alpha I e^{\alpha t}=d\cdot S_0\cdot e^{-\alpha t}\cdot e^{\alpha t}$$

yoki

$$\frac{d(Ie^{\alpha t})}{dt}=\alpha S_o$$

tenglamaga kelamiz.

Bu yerdan $Ie^{\alpha t}=\alpha S_0 t+C$ va demak (5) tenglama barcha yechimlari to‘plami

$$I(t)=Ce^{-\alpha t}+\alpha S_0 te^{-\alpha t} \tag{6}$$

munosabat bilan aniqlanadi. Bu yerda $t=0$ desak $C=I(0)=I_0$ ni olamiz va shunday qilib (6) tenglama

$$I(t)=[I(0)+\alpha S(0)t]e^{-\alpha t} \tag{7}$$

ko‘rinishini oladi, bu yerda $0\le t<T$.

Modelni tadqiq qilish. Modelni, uning natijalarini (yechimlarini) interpretasiyalash (tadqiq qilish) *T* uchun aniq qiymat topish (*a*) va infeksiya yuqtirgan odamlar soni maksimal bo‘ladigan t_{max} vaqt momentini topishdan (*b*) iborat.

a) T qiymatni topish shu nuqtai nazardan muhimki, bu vaqt momentida kasallikka moyil odamlarning kasallikka chalinishlari barham topadi. Agar (7) tenglamaga murojaat qilsak, u holda uning o‘ng qismi $t=T$ ga I^* qiymatni qabul qiladi, ya’ni

$$I^*=[I(0)+\alpha S_0 T]e^{-\alpha ZT}.$$

Biroq

$$S(T)=\lim_{t\to\infty} S\,(t)=S(\infty)=S_\infty. \tag{8}$$

Bu kasallikka moyil, lekin kasallanishdan qutilib qolganlar sonidir va ular uchun

$$S(T)=S(\infty)=S_0e^{-\alpha t}$$

munosabat o‘rinli, bu yerdan

$$T = \frac{1}{\alpha} ln \frac{S_o}{S_\infty} \tag{9}$$

Shunday qilib, biz S_∞ *uchun aniq bir qiymat ko'rsatishimiz mumkin bo'lsa, u holda (9) tenglama yordamida epidemiya tugash vaqtini bashorat qilishimiz mumkin bo'ladi,* u holda (9) qiymatni (8) qo'yib,

$$I^* = \left[I(0) + S_0 \, ln \frac{S_0}{S_\infty}\right] \frac{S_\infty}{S_0}$$

tengsizlikni olamiz. Undan

$$\frac{I^*}{S_\infty} = \frac{I_0}{S_0} + ln \frac{S_0}{S_\infty} \quad yoki \quad \frac{I^*}{S_\infty} = ln \, S_\infty = \frac{I_0}{S_0} + ln \, S_0 \,. \tag{10}$$

Bu tenglamada I^* va I_0, S_0 hadlar ma'lum bo'lganligi uchun uning yordamida S_∞ ni aniqlash mumkin.

b) qo'yilgan ikkincha masalani yechish uchun yana (7) tenglamaga murojaat qilamiz (uni differensiallaymiz) va

$$\frac{dI}{dt} = [\alpha S_0 e^{-\alpha t} + (I_o + \alpha S_0 t) - \alpha \cdot e^{-\alpha t}] = [\alpha S_0 - \alpha I_0 - \alpha^2 S_0 t] \cdot e^{-\alpha t} = 0$$

tenglikka kelamiz.

Bu yerdan I maksimal qiymatga erishadigan $t = t_{max}$ vaqt

$$t \frac{1}{\alpha}\left[1 - \frac{I_0}{S_0}\right]_{max}$$

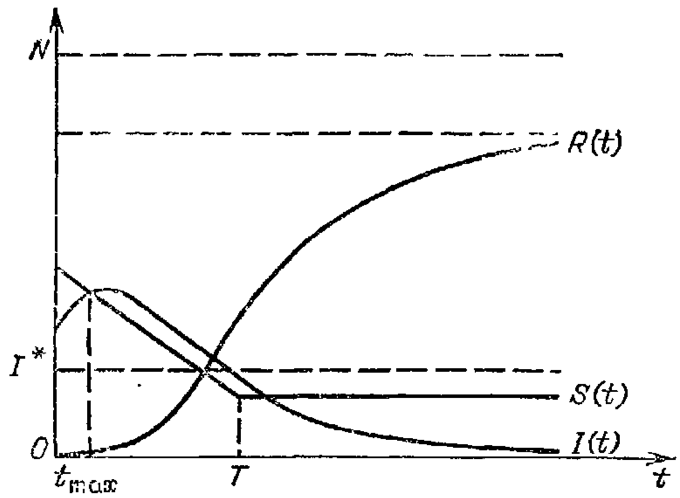
munosabat bilan aniqlanishi kelib chiqadi. Agar bu qiymatni (7) tenglikka qo'ysak

$${I_0}^{-\left[1 - {I_0}/{S_0}\right]} (t_{max}())_{max}.$$

Olingan tenglikdan ko'rinadiki, xususiy holda $t = t_{max}$ vaqt momentida kasallikka moyil odamlar soni kasallanganlar soniga teng bo'ladi.

Agar $t = T$ bo'lganda kasallikka moyil odamlar infeksiyalangan bo'ladilar va $I(t) = I^* e^{-\alpha(t-T)}$.

Qo'yidagi rasmda har bir guruhdagi odamlar soni o'zgarishi grafigi tasvirlangan:



N
R(t)
I*
S(t)
0
I(t)
t_max
T
t

IV. AMALIY MASHG‘ULOTLAR

AMALIY MASHG‘ULOTLAR MAZMUNI

1-mavzu. Matematik modelni qurish va ularni tadqiq qilish uslublari

O’ylagan sonni topish masalasi (matematik fokus). Talabalarga ixtiyoriy sonni o‘ylash va u bilan quyidagi amallarni bajarish talab etiladi:

1. O’ylangan son beshga ko‘paytirilsin.

2. Ko‘paytmaga bugungi sanaga mos son (yoki ixtiyoriy boshqa son) qo‘shilsin.

3. Hosil bo‘lgan yig‘indi ikkilantirilsin.

4. Natijaga joriy yil soni qo‘shilsin.

Olib boruvchi biroz vaqtdan so‘ng talaba o‘ylagan sonni topishi mumkiligini ta’kidlaydi. Ravshanki, talaba o‘ylagan son matematik fokusga mos model yordamida aniqlanadi. Masalani rasmiylashtiramiz: x-o‘quvchi o‘ylagan son, y -hisoblash natijasi, N -sana, M -joriy yil. Demak, olib boruvchining ko‘rsatmalari:

$$y = (x \cdot 5 + N) \cdot 2 + M$$

formula orqali ifodalanadi.

Ushbu formula masalaning (matematik fokusning) matematik modeli bo‘lib xizmat qiladi va x o‘zgaruvchiga nisbatan chiziqli tenglamani ifodalaydi.

Tenglamani yechamiz:

$$x = (y - (M + 2N))/10.$$

Ushbu formula o‘ylangan sonni topish algoritmini ko‘rsatadi.

Oddiy differensial tenglamalarga keltiriladigan masalalar. Quyida biz oddiy differensial tenglamalar nazariyasining amaliy masalalaridan ba’zilarini misol tariqasida ko‘rib chiqamiz.

1. Populyasiya evolyasiyasi modeli. Ekologiyada, biologiyada tirik organizmlarning tashqi muhit bilan o‘zaro munosabatini o‘rganiladi. Ko‘payish yoki turli sabablarga ko‘ra nobud bo‘lish bilan bog‘liq bo‘lgan populyasiyalarning ba’zi differensial modellarini keltiramiz. Vaqtning bir birligida populyasiyada tug‘ilishlar sonini A, nobud bo‘ladiganlari sonini V desak, yetarli asos bilan populyasiya soni *x* ning vaqtga bog‘liq o‘zgarish tezligini

$$\frac{dx}{dt} = A - B \tag{1}$$

formula bilan berish mumkin. Endi masala A va B ni x ga bog‘liqligini tavsiflashdan iborat.

a) Eng sodda hol, populyasiyalar evololyusiyasi masalasida agar populyasiya ajratilgan, ozuqa resurslari chegaralanmagan, ko‘payish tezligi balog‘atdagi jonzotlar mikdoriga proporsional deb hisoblansa

$$A = ax, \quad B = bx \tag{2}$$

dan iborat, bu yerda a va b – vaqtning bir birligida tug‘ilish va nobud bo‘lish koeffisentlari. (2) ni hisobga olinsa, (1) ni

$$\frac{dx}{dt} = (a - b)x \tag{3}$$

ko‘rinishda yozish mumkin. Bu tenglamaning yechimi

$$x(t) = x(t_0)e^{k(t-t_0)}$$

bo‘ladi, bu yerda $x(t_0) = x_0$ – boshlang‘ich momentdagi populyasiya soni $k = a - b$ (1) tenglamani 1802 yil Maltus birinchi bo‘lib o‘rgandi. Maltusning bu modeli kamchiligi shundan iboratki, bu tenglama populyasiyalarning juda tor sinfi uchun o‘rinli bo‘ladi. Maltus esa uni butun tabiat uchun, hatto kishilar jamiyati uchun ham universal qonun deb hisoblagan.

b) $A = ax,\ B = bx^2$ hol ham uchraydi. Bunda

$$\frac{dx}{dt} = ax - bx^2 \tag{4}$$

tenglama hosil bo‘ladi. $x(t_0) = x_0$ bo‘lsa, yechim

$$x(t)=\frac{x_0\dfrac{a}{b}}{x_0+\left(\dfrac{a}{b}-x_0\right)e^{-a(t-t_0)}}$$

dan iborat bo‘ladi.

(4) tenglama 1845 yilda olingan Ferxyulst–Perl tenglamasidan iborat bo‘lib, unda populyasiyadagi ichki kurash xisobga olinadi. Bu Maltusning (1) tenglamasiga nisbatan populyasiyaning rivojlanishini aniqroq tavsiflaydi.

2. Fan rivojlanishining ikki modeli. a) eng sodda modelda ilmiy asarlar chop etilish sonining o‘sishi tezligi, chop etilganlar soniga proporsional deb faraz qilamiz:

$$\frac{dy}{dt}=ky, \quad y=y(t)$$

bu yerda y – t momentdagi chop etilgan asarlar soni. Umumiy yechimi $y=Ce^{kt}$ dan iborat. Boshlangich momentdagi chop etilish sonini $y(t_0)=y_0$ desak, yechim

$$y(t)=y(t_0)e^{k(t-t_0)}$$

kabi bo‘ladi. $k>0$ da $t\to\infty$ da $y\to\infty$ bo‘ladi;

b) har qanday ilmiy yo‘nalish uchun to‘xtalish bosqichi bo‘ladi.

$$\frac{dy}{dt}=ky(b-y)$$

tenglamani olaylik, k , b o‘zgarmaslar, $y\to b$ bo‘lsa, $b-y\to 0$ bo‘ladi va demak $\frac{dy}{dt}\to 0$ bo‘ladi, ya’ni y ning o‘sishi to‘xtaydi.

3. *Reklama samaradorligini o‘rganish masalasi.* Bunda t vaqt momentidagi sotilayotgan maxsulot haqida xabardor bo‘lgan potensial xaridorlar soni $x(t)$ uchun

$$\frac{dx}{dt}=kx(N-x)$$

differensial tenglama hosil bo‘ladi, bu yerda $N-$ barcha potensial xaridorlar, $x-$ mahsulotdan xabardorlar soni, $N-x$— mahsulotdan bexabarlar soni, $\frac{dy}{dt}$ – xabardorlar sonining o‘zgarishi tezligi, y kattalik x va $N-x$ miqdorlarga proporsional deb hisoblanadi, $k>0$ proporsionallik koeffisenti. Tenglamaning umumiy yechimi

$$x=\frac{N}{1+Pe^{-Nkt}}$$

dan iborat, bu yerda $P=\frac{1}{e^{NC}}$, C – o‘zgarmas son.

2-mavzu. Jarayonlarni modellashtirishda tabiatning saqlanish qonunlaridan va boshqa usullardan foydalanish

Reja:

4. Energiya, materiya va impulsning saqlanish qonunlaridan foydalanish.
5. Matematik modellashtirishda variatsion prinsipdan foydalanish.
6. Ierarxiya prinsipidai foydalanib, matematik modellar qurish.

1. Energiya, materiya va impulsning saqlanish qonunlaridan foydalanish.

Energiyaning saqlanish qonuni. Energiyaning saqlanish qonunidan foydalanib, ba’zi qo‘shimcha shartlarni talab etgan holda issiqlikni tutash muhitda tarqalishi modellarini keltirib chiqaramiz. Issiqlik tarqalish tenglamasi uchun chegaraviy masalalarni keltiramiz.

1. Issiqlik tarqalishi jarayoni haqida dastlabki ma’lumotlar. Issiqlik yoki issiqlik energiyasi deganda atom yoki modda molekulasining xaotik harakati energiyasi tushuniladi.

Materialning turli qismlar orasidagi issiqlikning almashinuvi issiqlik o‘tkazishi deyiladi. Issiqlik o‘tkazish xossalarini o‘zida ifodalovchi material esa issiqlik o‘tkazuvchi deb ataladi. Masalan, metallar, ularda issiqlik energiyasini erkin elektronlar tashiydi, ba’zi gazlar va h.k. Issiqlik o‘tkazish jarayoni lokal termodinamik muvozanati (LTM) deb nomlanuvchi sharoitda qaraladi. Gaz uchun LTM tushunchasi $\lambda << L$ bo‘lganda kiritiladi, ya’ni zarrachaning erkin siljish (o‘tish) uzunligi λ qaralayotgan obyekt (tutash muhit) xarakter o‘lchami L dan o‘ta kichik bo‘lishi lozim. Bundan tashqari LTM da jarayonlar o‘rganilayotgan vaqt zarrachalar to‘qnashuviga ketgan vaqt τ dan o‘ta kichik hamda λ ga nisbatan o‘lchami katta deb hisoblanadi. Bunday holda, zarrachalar sohasida (o‘lchami λ miqdordan katta, lekin L miqdordan o‘ta kichik) muvozanat holati o‘rnatiladi va ularning zichlik miqdori, o‘rtacha zarrachalar issiqlik harakati va h.k. larni aniqlash mumkin bo‘ladi. Bu lokal miqdorlar (turli nuqtalarda turlicha) keltirilgan talablar asosida zarrachalarni Maksvell muvozanati taqsimotidan topiladi. Unga o‘rtacha kinetik energiyani ifodalovchi T temperatura ham kiradi:

$$\frac{mv^2}{2}=\frac{3}{2}kT,$$

bunda $m-$zarracha massasi, $v-$xaotik harakat o‘rtacha tezligi, $k-$ Bolsman doimiysi.

Zarracha xaotik harakati bilan bog‘liq modda energiyasi temperaturadan bog‘liq holda nisbiy issiqlik hajmi $c(\rho,T)$ orqali aniqlanadi:

$$c(\rho,T)=\frac{\partial\varepsilon(\rho,T)}{\partial T}, \qquad c(\rho,T)>0,$$

bunda $\rho=mn-$ modda zichligi ($n-$ birlik hajmdagi zarrachalar soni), $\varepsilon(\rho,T)-$ massa birligi ichki energiyasi. Boshqacha aytganda, issiqlik sig‘imi— bu modda massasi birligi temperaturasini 1 gradusga oshirish uchun sarflangan energiya tushuniladi.

Issiqlik hajmi uchun ifoda ideal gaz holda sodda ifodani tashkil etadi (gaz zarrachalari billiard sharlariga o‘xshash kinetik energiya summasini yo‘qotmagan holda bevosita to‘qnashgan holda ta’sirlashadi). Biror hajmdagi ideal gaz N zarrachadan iborat bo‘lsa, ularning to‘la ichki energiyasi quyidagicha bo‘ladi:

$$E=N\frac{mv^2}{2}=\frac{3}{2}NkT=\frac{3}{2}M\frac{k}{m}T,$$

bunda $M=N\cdot m-$ zarrachalar massalari yig‘indisi, nisbiy ichki energiya yoki massa birligiga mos energiya

$$\varepsilon=\frac{E}{M}=\frac{3}{2}\frac{k}{m}T$$

ifoda bilan beriladi, ya’ni ideal gaz issiqlik sig‘imi $\frac{3k}{2m}$ ga teng bo‘lib, ρ va T miqdorlardan bog‘liq bo‘lmaydi.

Umumiy holda ichki energiya va temperatura orasida bog‘liqlik ancha murakkab hisoblanadi. Masalan, harakatlanayotgan zarrachalarning kinetik energiyasi, ichki energiya potensial energiya va ular orasidagi o‘rtacha r

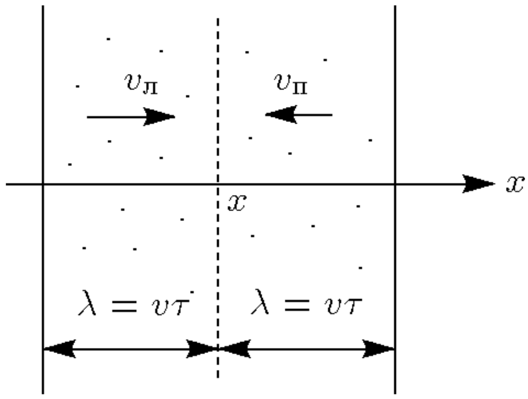
masofadan bog‘liq bo‘lgan o‘zaro ta’sirdan bog‘liq bo‘ladi hamda $r \approx (n)^{-1/3} = \left(\frac{\rho}{m}\right)^{-1/3}$ ($n -$ hajm birligidagi zarrachalar soni) bo‘ladi, ya’ni ε kattalik ρ zichlikdan bog‘liq bo‘ladi.

2. Molekular-kinetik ifodadan Furye qonunini hosil qilish. Yuqorida kiritilgan tushunchalardan issiqlik uzatishning matematik modelini hosil qilish uchun issiqlik oqimi tushunchasini kiritamiz.

Nuqtadagi issiqlik oqimi (issiqlik energiyasi) deganda berilgan nuqtada joylashgan zarrachalarni vaqt birligi ichida sirt birligi orqali tashib o‘tilgan issiqlik miqdori tushuniladi.

Issiqlik oqimi fazoda sirt birligi oriyentasiyasidan bog‘liq bo‘lganligi uchun u vektor kattalik hisoblanadi.

Berilgan muhitda x, y, z koordinatali nuqtani olib, W oqimning W_x, W_y, W_z komponentalarini fazoning mos o‘qlarida aniqlaymiz. Birlik miqdordagi yuzani x o‘qiga perpendikulyar etib joylashtiramiz.



x o‘qi bo‘ylab harakatlanayotgan zarrachalar bu yuza (maydon)ni o‘ngdan chapga va chapdan o‘ngga qarab bir xil ehtimolda kesib o‘tadi. Agar yuzaning turli tomonlarida zarrachalarni temperaturalari (yoki kinetik energiyalari) turlicha bo‘lsa, vaqt birligida yuzaning bir tomonidan ikkinchi tomoniga turlicha miqdordagi energiyalarni o‘tkazadi. Bu energiyalarning farqi x o‘qi bo‘yicha issiqlik oqimini tashkil etadi. x o‘qida joylashtirilgan yuzadan chapda va o‘ngda $\lambda = v\tau$ ($\tau -$ vaqt) masofada yotuvchi sohalarni ajratamiz. O’ng tomonda joylashgan sohadagi zarrachalarning taxminan $\frac{1}{6}$ qismi chapga harakatlanadi (chunki zarrachalar chapga-o‘ngga, oldinga-orqaga, pastga-yuqoriga 6 ta yo‘nalishda harakatlanishi mumkin). τ vaqt davomida bu zarrachalar bir qismi yuzani kesib o‘tadi va

$$\frac{1}{6}n\lambda\frac{mv_{o'ng}^2}{2}$$

ga teng bo‘lgan energiyani tashib keladi, bunda $v_{o'ng}$ – o‘ng sohadagi zarrachalar tezligi, (n, λ miqdorlarni turli tomonlar uchun teng hisoblaymiz). Shuningdek, zarrachalar chap sohada ham

$$\frac{1}{6}n\lambda\frac{mv_{chap}^2}{2}$$

miqdordagi energiya yuza (maydon)dan olib o‘tiladi.

Vaqt birligida tashilgan energiyalarning farqi quyidagicha bo‘ladi:

$$W_x = \frac{1}{6}nv\left(\frac{mv_{o'ng}^2}{2} - \frac{mv_{chap}^2}{2}\right) = \frac{mnv}{6}\left(\varepsilon_{o'ng} - \varepsilon_{chap}\right),$$

bunda $\varepsilon_{o'ng}, \varepsilon_{chap}$ – moddaning yuzadagi chap va o‘ng tomondagi ichki energiyalari, v – sifatida $v_{o'ng}$ va v_{chap} tezliklarning o‘rtacha qiymatlari olingan.

Dastlabki yaqinlashishda $\varepsilon_{o'ng}$ va ε_{chap} miqdorlarni ε miqdor bo‘yicha (x nuqtadagi, ya’ni maydondagi energiya) ni quyidagicha ifodalash mumkin:

$$\varepsilon_{o'ng} = \varepsilon + \lambda\frac{\partial\varepsilon}{\partial x} = \varepsilon + \lambda c\frac{\partial T}{\partial x}$$

$$\varepsilon_{chap} = \varepsilon - \lambda\frac{\partial\varepsilon}{\partial x} = \varepsilon - \lambda c\frac{\partial T}{\partial x}.$$

Bu formulalarlarni W_x uchun olingan ifodaga qo‘ysak,

$$W_x = -\chi\frac{\partial T}{\partial x}, \qquad (1)$$

bunda $\chi = \frac{1}{3}\rho c\lambda v$.

Xuddi shu tarzda mulohaza yuritib, W_y, W_z komponentalar uchun ushbu

$$W_y = -\chi\frac{\partial T}{\partial y}, \qquad W_z = -\chi\frac{\partial T}{\partial z} \qquad (2)$$

ifodalarni hosil qilamiz.

(1) va (2) tengliklarning birlashmasi *Furye qonunini* tashkil etadi

$$W = -\chi\, grad\, T = -\chi\left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z}\right). \qquad (3)$$

χ miqdor esa *issiqlik o‘tkazish koeffisiyenti* deyiladi.

Eslatib o‘tish joizki, $c-$ issiqlik hajmi va $\lambda-$ erkin o‘tish (harakat) uzunligi ρ va T dan bog‘liq funksiyalar bo‘lishi mumkinligidan issiqlik o‘tkazish koeffisiyenti zichlik va temperaturadan bog‘liq bo‘ladi:

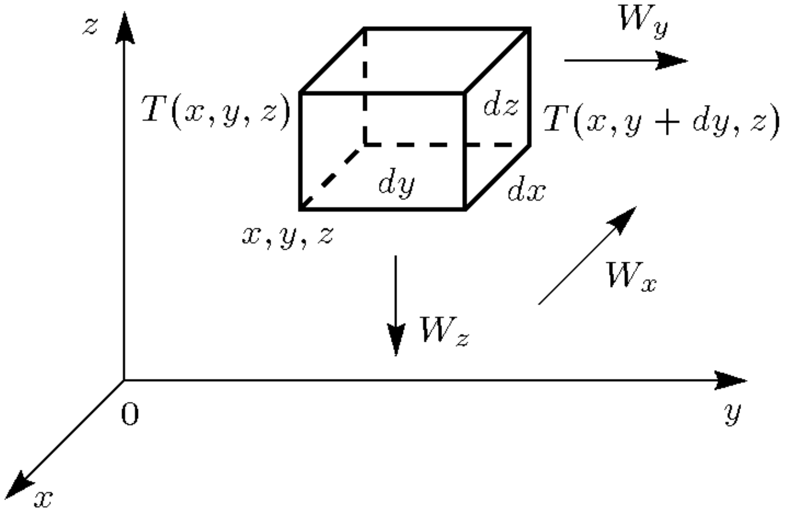
$$\chi=\frac{\rho c\lambda v}{3}\geq 0. \tag{4}$$

Masalan, odatdagidek sharoitlarda bo‘lgan gazda issiqlik molekulalar orqali ko‘chadi (molekulyar issiqlik o‘tkazuvchanlik). Bu holda λ kattalik uchun $\lambda\sim {}^{1}\!/\!_{\rho}$ munosabat o‘rinli bo‘ladi, $v\sim\sqrt{\mathrm{T}}$ bo‘lganligi uchun (4) dan $\chi_m\sim\sqrt{\mathrm{T}}$ ekanligini olamiz (issiqlik sig‘imi o‘zgarmas deb olinadi). Plazmada (bunda issiqlik asosan elektronlar orqali o‘tkaziladi) elektronning yurish uzunligi ρ va T dan bog‘liq, shunday ekan $\lambda\sim T^2\rho^{-1}$ va χ_e kattalik uchun $\chi_e\sim T^{5/2}$ ($c-$o‘zgarmas).

Demak, Furye qonuniga ko‘ra issiqlik oqimi temperatura gradiyentiga proporsional. Issiqlik energiyasi temperatura bilan bevosita bog‘liq bo‘lganligi uchun temperatura «oqimi» temperaturaning gradiyentiga proporsional deb hisoblash mumkin.

3. Issiqlik balansi tenglamasi. Issiqlik tarqalish jarayonining matematik modelini hosil qilishda energiya saqlanish qonunini qo‘llaymiz. Bunda modda ichki energiyasi faqatgina issiqlik o‘tkazuvchanlik mexanizmi asosida o‘zgaradi deb hisoblaymiz (masalan, modda ichki energiyasining kimyoviy reaksiyalar, bosim kuchi ishi va h.k. hisobiga o‘zgarishlari e’tiborga olinmaydi).

Issiqlik o‘tkazuvchi muhitda dx, dy, dz tomonli elementar kubni ajratib olamiz va dt vaqt o‘zgarishi davomida kubdagi issiqlik energiyasi o‘zgarishini hisoblaymiz.



Yuqoridagi cheklovlarga ko‘ra bu o‘zgarish kubning turli qirralari orqali kiruvchi va chiquvchi issiqlik oqimlari farqi tufayligina yuzaga keladi. Shunday qilib, x o‘qi bo‘yicha oqimlar hajmining ichki energiyasi

$$\left[W_x(x,y,z,t) - W_x(x+dx,y,z,t)\right]dydzdt$$

miqdorga oshishiga yoki kamayishiga olib keladi, bu yerda $dydz -$ x o‘qiga perpendikulyar qirra hajmi. Xuddi shunday y,z o‘qlar bo‘yicha ichki energiya o‘zgarishi hisoblanadi:

$$\left[W_y(x,y,z,t) - W_x(x,y+dy,z,t)\right]dxdzdt$$

$$\left[W_z(x,y,z,t) - W_z(x,y,z+dz,t)\right]dxdydt.$$

Umumiy energiya o‘zgarishi

$$\Delta E = -divW\, dxdydzdt$$

ga teng.

Boshqa tomondan, ΔE kattalikni kubning temperaturasi o‘zgarishi va uning issiqlik sig‘imi orqali ham ifodalash mumkin.

$$\Delta E = \left(T(t+dt) - T(t)\right)c(\rho,T)\rho\, dxdydz.$$

Oxirgi ikki ifodani tenglashtirib, dt ni nolga yaqinlashtirgan holda *issiqlik tarqalishining umumiy tenglamasini* hosil qilamiz:

$$C\frac{\partial T}{\partial t} = div\left(\chi\, grad\, T\right), \tag{5}$$

yoki yoyilgan holda

$$C\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\chi\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\chi\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\chi\frac{\partial T}{\partial z}\right), \tag{6}$$

bu yerda $C = \rho c$.

Oxirgi (6) tenglama – parabolik tipdagi nostasionar, uch o‘lchamli (T funksiya t vaqtdan va x,y,z fazoviy o‘zgaruvchilardan bog‘liq) tenglama. U bir jinsli emas, chunki issiqlik sig‘imi, issiqlik o‘tkazuvchanlik va zichlik moddaning turli nuqtalarida turlicha bo‘lishi mumkin, u chiziqlimas, negaki, c va χ funksiyalar T temperaturadan (ya’ni izlanayotgan yechimdan) ham bog‘liq bo‘lishi mumkin.

Ayrim qo‘shimcha shartlar yordamida (6) tenglamani soddalashtirish mumkin. Agar jarayon stasionar, ya’ni temperatura vaqtdan bog‘liq bo‘lmasa, (6) tenglama *elliptik tipli tenglamaga* aylanadi

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\chi\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\chi\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\chi\frac{\partial T}{\partial z}\right) = 0, \tag{7}$$

agar c, χ funksiyalar temperaturadan bog‘liq bo‘lmasa, u holda (6) chiziqli parabolik tenglamaga keladi, u ham o‘z navbatida bir jinsli muhitda *chiziqli parabolik tenglamaga* aylanadi (χ, c, ρ funksiyalar x, y, z o‘zgaruvchilarga bog‘liq emas)

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k_0 \Delta T, \tag{8}$$

bunda $k_0 = \chi / c$ kattalik *issiqlik o‘tkazuvchanlik koeffisiyenti* deb ataladi. (8) tenglama uchun umumiy yechimni topish qiyin emas.

Bir o‘lchamli holda (temperatura faqatgina t va x dan bog‘liq) (6) dan quyidagini hosil qilamiz:

$$C\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\chi \frac{\partial T}{\partial x}\right). \tag{9}$$

(9) tenglama quyidagi chiziqsiz issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasiga keltiriladi

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right), \tag{10}$$

bu yerda $\partial c/\partial x \equiv 0$, $\partial \chi/\partial x \equiv 0$ shartlar qo‘yilgan. Va nihoyat, agar $\chi = \chi_0$, $c = c_0$ bo‘lsa ($\chi_0, c_0 -$ o‘zgarmaslar), u holda (10) dan quyidagi issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi (parabolik tipli tenglama)

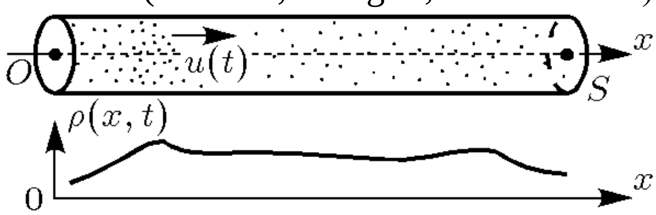
$$\frac{\partial u}{\partial t} = k_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{11}$$

hosil bo‘ladi.

Asosiy (6) tenglama yordamida issiqlik tarqalishining murakkabroq mexanizmlariga mos turli umumlashmalarini ham olish mumkin.

Bu bandda keltirilgan barcha tenglamalar energiya saqlanishining fundamental qonuni va Furye qonuni yordamida hosil qilindi. Berilgan c, χ, ρ funksiyalar va chegaraviy shartlar bilan birgalikda ular issiqlik tarqalish jarayonining matematik modelini tashkil etadi.

Materiyaning saqlanish qonuni. **1. Trubadagi zarralar oqimi.** Ko‘ndalang kesim yuzasi S bo‘lgan silindrik trubadan zarrachalar oqimi harakatlanayotgan bo‘lsin (masalan, changlar, elektronlar…). Oqim yo‘nalishi



trubadagi x o‘qi bo‘ylab harakatlansin va t vaqtdagi harakatlanish tezligi $u(t)$ bo‘lsin. Bu tezlik vaqt o‘tishi bilan o‘zgarib turishi mumkin. Masalan, zaryadlangan zarrachalar harakati elektr maydoni ta’sirida tezlashadi yoki sustlashadi. Qaralayotgan harakatning oddiy tenglamasini (modelini) tuzishda quyidagi talablarni kiritamiz:

a) zarrachalar o‘zaro ta’sirlashmasin. Buning uchun to‘plami zichligi yetarlicha kichik bo‘lishi kerak;

b) x koordinatali ko‘ndalang kesim yuzasida joylashgan zarrachalar boshlang‘ich tezliklari bir xil va x o‘qi bo‘yicha yo‘nalgan;

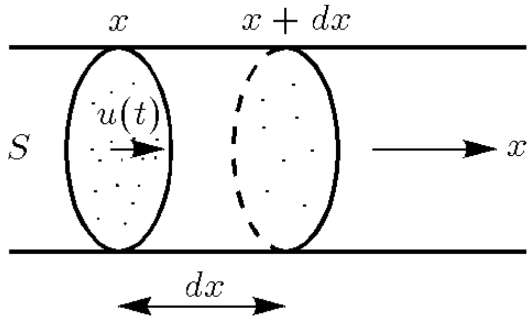
v) zarrachalar to‘plami zichligi x koordinatadan bog‘liq;

g) zarrachalarga ta’sir etuvchi tashqi kuchlar x o‘qi bo‘yicha yo‘nalgan.

a) shartning bajarilishi zarrachalar tezligi faqat tashqi kuch ta’sirida o‘zgarishini, *v*) – *g*) shartlar siljish jarayoni bir o‘lchamli bo‘lishini, ya’ni zarrachalar oqimi zichligi faqat x koordinata va $t \geq 0$ vaqtdan bog‘liq ekanligini ta’minlaydi.

Masalada zarrachalar harakati tezligi $u(t)$ va t=0 momentdagi $\rho_0(x) = \rho(x,0)$ zichlikni bilgan holda ixtiyoriy t moment va x koordinata qiymatlaridagi $\rho(x,t)$- zarrachalar zichligini aniqlash modelini tuzamiz.

Materiyaning saqlanish qonuni yordamida modda balansini hisoblaymiz. dt vaqt mobaynida x dan $x + dx$ gacha bo‘lgan truba qismida qaraymiz.



dt vaqt mobaynida elementar hajmga massasi quyidagicha bo‘lgan moddalar kiradi.

$$Su(t)dt\rho(x,t+\xi dt), \quad \xi \in [0,1],$$

bunda $Su(t)dt-$ dt vaqt oralig‘ida kirgan modda hajmi. Kesim o‘ng tomonidan shu dt vaqt mobaynida massasi

$$-Su(t)dt\rho(x+dx,t+\bar{\xi}dt), \qquad \bar{\xi} \in [0,1]$$

bo‘lgan zarrachalar chiqib ketadi. ($dt-$ kichik bo‘lganligi uchun $u(t)$ o‘zgarmaydi deb hisoblaymiz). Shunday qilib, massalar o‘zgarishi quyidagicha ekan:

$$dm = Su(t)\Big(\rho(x,t+\xi dt) - \rho(x+dx,t+\bar{\xi}dt)\Big)dt,$$

$\rho(x,t+\xi dt)$ va $\rho(x+dx,t+\bar{\xi}dt)$ vaqt bo‘yicha x va $x+dx$ kesimdagi zarrachalar o‘rtacha zichligi.

Ikkinchi tomondan Sdx hajmdagi zarrachalar massasi quyidagicha bo‘ladi ($\rho(x,t)$ kattalik qiymatiga ko‘ra):

$$dm = Sdx\left(\rho(x+\eta dx, t+dt) - \rho(x+\overline{\eta}dx, t)\right), \quad \eta, \overline{\eta} \in (0,1),$$

bunda $\rho(x+\eta dx, t+dt)$ va $\rho(x+\overline{\eta}dx, t)$ $\eta, \overline{\eta} \in (0,1) -$ qiymatlar koordinatasi (fazo) bo‘yicha t va $t+dt$ momentdagi zarrachalar zichligi. Massaning saqlanish qonunidan foydalanib, hosil qilingan dm ni qiymatlarini tenglashtirib va $dxdt$ ga bo‘lamiz

$$u(t) \cdot \frac{\rho(x, t+\xi dt) - \rho(x+dx, t+\overline{\xi}dt)}{dx} = \frac{\rho(x+\eta dx, t+dt) - \rho(x+\overline{\eta}dx, t)}{dt}.$$

Bu yerdan $dt \to 0$ da $dx \to 0$ ekanligidan ushbu

$$\frac{\partial \rho}{dt} + \frac{\partial \rho}{dx}u(t) = 0, \qquad x \in R, \quad t > 0 \tag{1}$$

$$\rho(x,0) = \rho_0(x), \qquad x \in R \tag{2}$$

tenglamani hosil qilamiz.

Ma’lumki, zichlik va tezlik ko‘paytmasi $\rho \cdot u$ (moddalar oqimi, massa oqimi) vaqt birligi ichida truba ko‘ndalang kesimi yuzasi birligidan o‘tayotgan zarrachalar sonini ifodalaydi. (1) dan ko‘rinib turibdiki, ixtiyoriy kesimdagi vaqt bo‘yicha modda zichligi o‘zgarish tezligi koordinata bo‘yicha modda zichligi o‘zgarish tezligi bo‘yicha aniqlanar ekan.

Tezlik o‘zgarmas bo‘lganda $u(t) = u_0$, xususiy hosilali oddiy chiziqli tenglama paydo bo‘ladi:

$$\frac{\partial \rho}{dt} + u_0 \frac{\partial \rho}{dx} = 0, \qquad -\infty < x < \infty, \ \ t > 0 \tag{3}$$

(3) tenglamada xarakteristikasi $- x = u_0 t + c$ chiziqda zichlik vaqt bo‘yicha o‘zgarmas $\rho(u_0 t + c, t) = \rho_0$ ekanligini e’tiborga olsak, ya’ni

$$\rho(x,t) = \rho(x + u_0(t_0 - t), t), \qquad t - t_0 \geq 0$$

ekanligidan uning umumiy yechimini topish mumkin.
$t = 0$ da

$$\rho(x,t) = \rho(x + u_0 t). \tag{4}$$

(4) funksiya (3) tenglamani umumiy yechimi bo‘ladi.

(4) formula va (2) boshlang‘ich shartlardan foydalanib, izlanuvchi funksiyani osongina topish mumkin, binobarin bu funksiya nafaqat alohida x, t o‘zgaruvchilardan, balki ularning kombinasiyasi $\xi = x + u_0 t$ dan bog‘liq (yuguruvchi funksiya) bo‘ladi.

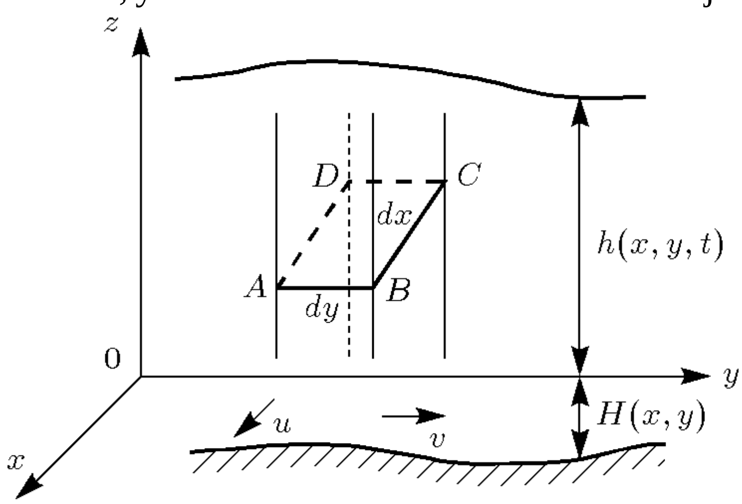
2. Yer osti suvlari oqimining gravitasion rejimi haqida. G’ovak muhit suv o‘tkazuvchi materiallar (qum, tuproq) dan iborat qatlam bo‘lib, quyidan suv o‘tkazmaydigan qatlam (granit), yuqoridan esa yer yuzasi bilan chegaralangan. Agar qatlamning biror joyida suv sathi o‘zgarsa, u holda sirt tekisligi normallashguncha og‘irlik kuchi ta’sirida suyuqlikning harakati yuzaga keladi.

Bu jarayonni tavsiflash uchun bir qator shartlarni kiritamiz:

1) Suv o‘zgarmas ρ zichlikga ega siqilmaydigan suyuqlik bo‘lsin;
2) Qatlamning qalinligi uning eni va bo‘yiga nisbatan ancha kichik;
3) Yerosti muhitidagi kesim-sirt bukilish va uzilishlarga ega emas va uni ifodalovchi $H(x,y)$ funksiya yetarlicha silliq funsiya;
4) Suvning yuqori sirtini ifodalovchi $h = h(x,y,t)$ funksiya x va y argument o‘zgarishi bilan uzviy bog‘liq;
5) Yer osti suvlari hyech qachon yer sirtiga chiqmaydi, shuningdek suyuqlik erkin sirtiga tushuvchi bosim o‘zgarmas;
6) Tuproq qatlami bir jinsli, ya’ni uning fizik-mexanik xossalari x, y, z argumentlardan bog‘liq emas.

Birinchi shart tabiiy hisoblanadi, chunki qaralayotgan jarayonda suv zichligini o‘zgartiruvchi bosimning yuzaga kelishi mumkin emas. Qolgan shartlar esa muqobillashtiruvchi shartlardir. Masalan, ikkinchi shart (yupqa qatlam) suyuqlik oqimi ikki o‘lchamli va uning barcha xarakteristikalari z koordinatadan bog‘liq bo‘lmasligini anglatadi, oxirgi ikki shart esa gruntning har bir nuqtasida bir qiymatli model yaratish imkonini beradi.

3. Grunt elementidagi massa balansi. Gruntda $ABCD$ vertikal prizma bilan kesishuvchi, yer ostida ta’sirlashuvchi elementar hajmni qaraylik.



Prizmaning dx va dy o‘lchamlari kichik hamda H va h funksiyalarning silliqligidan bu hajmni parallelepiped deb qarash mumkin. x va y o‘qlari bo‘ylab yo‘nalgan suyuqlik tezliklarini ifodalovchi noma’lum funksiyalarni $v = v(x,y,t)$ va $u = u(x,y,t)$ orqali belgilaymiz.

Bu parallelepipedga dt vaqt mobaynida kiruvchi va chiquvchi suyuqliklar miqdorini hisoblaymiz. CD qirra orqali kiradigan suyuqlik massasi shu yerdan o‘tuvchi suyuqlik hajmining ρ suyuqlik zichligi ko‘paytmasiga teng bo‘ladi, ya’ni

$$\rho u(H+h)dydt,$$

AB qirra orqali chiqadigan suyuqlik massasi esa

$$\rho u(H+h)dydt+\left\{\frac{\partial}{\partial x}[\rho u(H+h)]dx\right\}dydt.$$

Bu ifodaga, oldingisiga qaraganda, $\rho u(H+h)$ funksiyaning x tekislikdan $x+dx$ tekislikka o‘tishdagi orttirmasi qo‘shilmoqda. $\rho u(H+h)$ miqdor esa oqim massasini ifodalaydi. Shunday qilib, suyuqlik x o‘qi bo‘ylab yo‘nalganda grunt elementiga

$$-\frac{\partial}{\partial x}[\rho u(H+h)]dxdydt$$

miqdorda massa to‘planar ekan. Xudi shu tarzda AD va BC qirralar uchun mulohaza yuritib, suv y o‘qi bo‘ylab harakatlanganda grunt elementidagi massasi

$$-\frac{\partial}{\partial x}[\rho v(H+h)]dxdydt$$

miqdorga o‘zgarishini hosil qilamiz.

Shartga ko‘ra suyuqlik z o‘qi bo‘ylab harakatlanmaganligi uchun grunt elementidagi umumiy massasi

$$-\left[\frac{\partial}{\partial x}[\rho u(H+h)]+\frac{\partial}{\partial x}[\rho v(H+h)]\right]dxdydt \qquad (5)$$

miqdorga teng bo‘ladi.

Parallelepipeddagi suyuqlikning umumiy massasi undagi suyuqlik hajmi, ρ suyuqlik zichligi va g‘ovaklik koeffisiyenti $m<1$ (hajmning bir qismi grunt egallaganligi uchun) ko‘paytmasiga teng bo‘ladi, ya’ni

$$m\rho(H+h)dydx,$$

Suv massasining dt vaqt mobaynida o‘zgarishi esa

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}m\rho(H+h)dxdy\right)dt$$

ga teng bo‘ladi. $\frac{\partial H}{\partial t}=0$, $\frac{\partial \rho}{\partial t}=0$ bo‘lganligi uchun oxirgi ifoda

$$m\rho\frac{\partial h}{\partial t}dxdydt \qquad (6)$$

ko‘rinishni oladi. (5) va (6) ifodalarni tenglashtirib, qaralayotgan jarayondagi massaning saqlanish qonunini ifodalovchi ushbu

$$m\rho\frac{\partial h}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial x}[\rho u(H+h)]-\frac{\partial}{\partial x}[\rho v(H+h)]dxdydt \qquad (7)$$

tenglamani hosil qilamiz. (7) tenglama qaralayotgan miqdor massasining o‘zgarishi vaqt o‘tishi bilan shu miqdor oqim divergensiyasi orqali aniqlanishini bildirar ekan.

Agarda qo‘shimcha $\frac{\partial \rho}{\partial x}=0$, $\frac{\partial \rho}{\partial y}=0$ shartlarni kiritsak, oxirgi tenglama quyidagicha sodda ko‘rinishda yoziladi:

$$m\rho\frac{\partial h}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial x}[u(H+h)]-\frac{\partial}{\partial x}[v(H+h)]dxdydt\,. \qquad (8)$$

4. Massaning saqlanish qonunining yopiqligi haqida. (8) tenglamada uchta h, u va v noma’lum miqdorlar ishtirok etmoqda. Shuning uchun, jarayon xarakteridan kelib chiqqan holda, bu parametrlarni kamaytirish lozim bo‘ladi. Buning uchun ushbu Darsi qonunidan foydalanamiz:

$$u=-\mu\frac{\partial p}{\partial x},\;\; v=-\mu\frac{\partial p}{\partial y}, \qquad (9)$$

Bunda $p=p(x,y,z,t)$ – suyuqlik bosimi, μ – gruppa xossalaridan aniqlanadigan koeffisiyent. Darsi qonuniga ko‘ra suyuqlik oqimi tezligi komponentalari unga mos bosim gradiyenti komponentalariga proporsional bo‘ladi. Fizik ma’nosiga ko‘ra bosim gradiyenti – bu (hajm birligiga nisbatan) kuchdir. Boshqa tomondan Nyutonning ikkinchi qonuniga ko‘ra, jismga ta’sir etuvchi kuch uning tezligiga emas, balki tezlanishiga proporsionaldir. Lekin bu qarama-qarshilikdek tasavvur qilinyapti, xolos, chunki gruntdan o‘tuvchi suyuqlik oqimi erkin harakatlanmaydi, balki uning zarrachalari qarshilikka uchraydi.

(5) formulalarda yangi noma’lum miqdor suyuqlik ishtirok etyapti. Bu miqdorni suvni sekin va deyarli gorizontal harakatlanmoqda deb hisoblab, yuqorida kiritilgan parametrlar orqali ifodalash mumkin. Bu holda mavjud dinamik bosimni hisobga olmasdan, faqat gidrostatik qonun bo‘yicha bosimni ifodalaymiz:

$$p(x,y,z,t)=\rho g[h(x,y,t)-z]+const$$

Bunda g – erkin tushish tezlanishi, $const$ – suyuqlik sirtidagi bosim (masalan, atmosfera bosimi). Oxirgi ifodani (9) ga qo‘ysak,

$$u=-\mu\rho g\frac{\partial h}{\partial x},\;\; v=-\mu\rho g\frac{\partial h}{\partial y}, \qquad (10)$$

Bu tengliklarni (8) tenglamaga qo‘yib, gruntli suv harakatining tenglamasini hosil qilamiz:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = k\frac{\partial}{\partial x}[(H(x,y)+h)\frac{\partial h}{\partial x}] + k\frac{\partial}{\partial y}[(H(x,y)+h)\frac{\partial h}{\partial y}], \qquad (11)$$

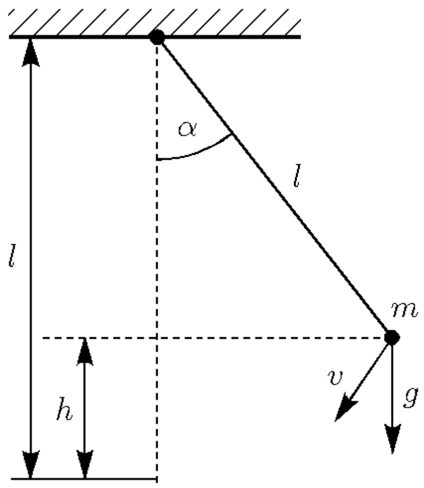
bunda $k = \frac{\mu\rho g}{m}$. (11) tenglama faqat $h(x,y,t)$ ga nisbatan chiziqsiz tenglama hisoblanib, unga *Bussinesk tenglamasi* deyiladi.

2. Matematik modellashtirishda variatsion prinsipdan foydalanish

O’zining universalligi va keng ko‘lamda qo‘llanilishi bilan berilgan, asosiy qonunlari variatsion prinsip deb nomlanadigan yana bir modellarning qurilishiga kelamiz. Ular qaralayotgan obyekt uchun ko‘plab umumiy tasdiqlarni bildiradi va barcha mumkin bo‘lgan tartib (harakat, evolyutsiya) variantlari orasidan faqat aniq bir shartni qanoatlantiradigan variantlarni tanlaydi. Odatda ushbu shartga ko‘ra obyektga bog‘liq bo‘lgan qandaydir kattalik bir holatdan boshqa holatga o‘tayotganda ekstremal qiymatga erishadi.

Og‘irlik kuchi maydonida mayatnikning tebranishi. Model qurilishining boshlang‘ich holatida Gamilton prinsipini qo‘llashga oid misol – mexanik siitemani tasvirlashni ko‘rib chiqamiz.

Qo‘zg‘alma C sharnirda mayatnik – *l* uzunlikdagi sterjenga *m* massali yuk osilgan tarzda berilgan bo‘lsin.



(2- rasm)

Harakatlanganda energiya yo‘qotmasagina sharnir ideal silliq deb hisoblanadi. Sharnirning qo‘zg‘almasligi shuni anglatadiki, undan «sterjen – yuk» sistemasiga energiya ajralmaydi (bunday sharnir sistema ustida biror ish bajara olmaydi). Sterjenning og‘irligi hisobga olinmaydi va absolyut qattiq, ya’ni uning kinetik va potensial energiyasi nolga teng, yuk esa sterjen o‘qi bo‘ylab harakat qila olmaydi. Yukning o‘lchami sterjen uzunligi bilan taqqoslaganda katta, g erkin tushish tezlanishi doimiy, havoning qarshiligi hisobga olinmaydi, tebranish fiksirlangan vertikal tekislikda amalga oshiriladi (chunki, ko‘rinib turibdiki, yukning boshlang‘ich tezlik vektori shu tekislikda yotishi kerak).

Ushbu barcha qisqa mulohazalardan ko‘rinib turibdiki, mayatnikning holati sterjenning vertikaldan og‘ish burchagi $\alpha(t)$ sifatida olinadigan bitta umumlashgan koordinata bilan aniqlanadi. Ushbu holda umumlashgan tezlik - $d\alpha/dt$ burchak tezlik.

Sistemaning kinetik energiyasi

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(l\frac{d\alpha}{dt})^2 = \frac{1}{2}ml^2(\frac{d\alpha}{dt})^2,$$

formula bilan, potensial energiya esa

$$E_p = mgh = -mg(l\cos\alpha - l)$$

ifoda bilan beriladi, bunda h – mayatnikning vertikal bo‘yicha eng kichik holatida og‘ishi. Bundan keyin E_p da mgl kattalik deymiz, chunki potensial energiya doimiy aniqlikkacha aniqlanadi.

Endi (5) Lagranj funksiyasi va (6) holatni hisoblash murakkab emas:

$$L(\alpha, \frac{d\alpha}{dt}) = ml[\frac{1}{2}l(\frac{d\alpha}{dt})^2 + g\cos\alpha],$$

$$S[\alpha] = ml\int_{t_1}^{t_2}[\frac{1}{2}l(\frac{d\alpha}{dt})^2 + g\cos\alpha]dt.$$

$\alpha + \varepsilon\phi(t)$ variasiyada harakatni aniqlab:

$$S[\alpha + \varepsilon\phi] = ml\int_{t_1}^{t_2}[\frac{1}{2}l(\frac{d\alpha}{at} + \varepsilon\frac{d\phi}{at})^2 + g\cos(\alpha + \varepsilon\phi)]dt =$$

$$= ml\int_{t_1}^{t_2}[\frac{1}{2}l\{(\frac{d\alpha}{at})^2 + 2\varepsilon\frac{d\alpha}{dt}\frac{d\phi}{at} + \varepsilon^2(\frac{d\phi}{dt})^2\} + g\cos(\alpha + \varepsilon\phi)]dt$$

ε bo‘yicha differensiallab va $\varepsilon = 0$ deb

$$\frac{d}{d\varepsilon}S[\alpha + \varepsilon\phi]\bigg|\varepsilon = 0 = ml\int_{t_1}^{t}[l\frac{d\alpha}{dt}\frac{d\phi}{dt} - \phi g\sin\alpha]dt = 0$$

ga ega bo‘lamiz. Ifodaning birinchi qismini integrallab, va t_1, t_2 vaqt momentida $\phi(t) = 0$ ekanligini hisobga olib, quyidagi tenglamaga kelamiz:

$$ml\int_{t_1}^{t_2}[l\frac{d^2\alpha}{dt^2} + g\sin\alpha]dt = 0,$$

va $\phi(t)$ hosilada barcha $t_1 < t < t_2$ lar uchun

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin\alpha \qquad (8)$$

o‘rinli bo‘lgandagina qanoatlantiriladi.

Eslatib o‘tamiz, mayatnikning (8) tenglamasi chiziqsiz tenglama. Bu holat juda murakkab geometrik sistema «sterjen - yuk» bilan bog‘liq, chunki: yukning oladigan tezlanishi, Guk qonuni holatidagidek, koordinataga proporsional emas, shuningdek, tinch holat (α burchak)dan og‘ishning juda murakkab funksiyasi hisoblanadi. Agar bu og‘ishlar kichik bo‘lsa, unda $\sin\alpha \approx \alpha$ va kichik tebranishlar modeli

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{g}{l}\alpha$$

ga chiziqli.

3. Ierarxiya prinsipidai foydalanib, matematik modellar qurish

Juda kam hollarda eng sodda obyektlarning matematik modellari o‘rganilayotgan obyektning barcha asosiy xossalarni o‘z ichiga oladi va o‘rganish uchun qulay bo‘ladi. Shuning uchun «soddadan murakkabga» qarab yondashuv tabiiy hisoblanadi, bunda uncha murakkab bo‘lmagan model to‘liq o‘rganilgach keyingi bosqichga o‘tiladi. Bunday hollarda uncha qiyin bo‘lmagan va keyingisi oldingisining umumlashmasi bo‘lgan matematik modellar zanjiri hosil bo‘ladi (iyerarxiya).

Iyerarxik modellarga misollar

1. Tashqi kuchlar ta’siridagi harakatning turli variantlari. Faraz qilaylik, sharikka vaqtdan va sharik holatidan bog‘liq bo‘lgan ma’lum $F(r,t)$ tashqi kuch tasir etsin. Bunday kuch tortishish maydonida paydo bo‘lishi, elektrik yoki magnit maydon tufayli yuzaga kelishi kelib chikishiga ega bo‘lishi mumkin va h.k. Nyutonning ikkinchi qonunidan, tebranishning bazaviy modeli

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = -kr \qquad (1)$$

ga nisbatan (1) tenglamaning o‘ng tomonida qo‘shimcha had paydo bo‘lishi kelib chiqadi:

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = -kr + F(r,t). \qquad (2)$$

(2) tenglamaning eng sodda variantiga $F(r,t) = F_0$ o‘zgarmas kuch bo‘lgan vaziyat mos keladi. Bu tenglikda $\bar{r} = r - F_0/k$ – almashtirish olib, $\bar{r}$ uchun ushbu tenglamani hosil qilamiz

$$\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = -k\bar{r},$$

ya’ni o‘zgarmas kuch (sharikka ta’sir etuvchi kuchning neytral koordinatasi nolga teng va F_0/k miqdorga siljiydi degan shart asosida) tebranish jarayoniga ta’sir etmaydi.

Agar harakat vaktdan bog‘liq bo‘lgan $F(t)$ kuch orqali amalga oshirilsa, biroz qiyin vaziyat hosil bo‘ladi. Aniqlik uchun bunday harakatda $F(t) = F_0 \sin \omega_1 t$– davriy tashqi kuch bo‘lgan holini qaraymiz:

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = -kr + F_0 \sin \omega_1 t. \qquad (3)$$

(3) chiziqli tenglamaning yechimi umumiy bir jinsli tenglama yechimi $(r = A \sin \omega t + B \cos \omega t)$ va bir jinsli bo‘lmagan (3) tenglamaning xususiy yechimlari yig‘indisi sifatida topiladi. Biz uni

$$r_1(t) = C \sin \omega_1 t \qquad (4)$$

ko‘rinishda izlaymiz. Bu ifodani (3) ga qo‘yib

$$C = \frac{F_0}{k - m\omega_1^2} = \frac{F_0}{m(\omega^2 - \omega_1^2)}$$

tenglikni hosil qilamiz, bunda $\omega = \sqrt{k/m}$– tashqi kuchlar bo‘lmagandagi prujina tebranishining chastotasi yoki sistemaning xos chastotasi. Natijada (3) tenglamaning umumiy yechimi

$$r_1(t) = A \sin \omega t + B \sin \omega t + \frac{F_0}{m(\omega^2 - \omega_1^2)} \sin \omega_1 t$$

ko‘rinishga keladi.

Shunday qilib, $F(t)$ tashqi kuch nafaqat sistemadagi ω_1 chastotali qo‘shimcha tebranishni hosil bo‘lishiga, balki, bundan tashqari $\omega_1 \to \omega$ bo‘lganda tebranish amplitudaning cheksiz o‘sishiga (rezonansga) olib kelar ekan.

2. Aylanuvchi sterjendagi prujina mahklamlangan nuqta harakati. Faraz qilaylik, prujina mahkamlangan nuqta $r_0(t) = f(t)$ qonuniyat bilan harakat qilsin. U holda bu nuqta bilan bog‘liq koordinatalar sistemasida sharikka prujina taranglashishi qiymati $ma(t)$ ga teng bo‘lgan inersiya kuchi ta’sir etadi, bu yerda $a(t)$– koordinata sistemasi harakati tufayli yuzaga kelgan tezlanish bo‘lib, $a(t) = \frac{d^2f}{dt^2}$ ga teng. Bu koordinatalar sistemasida sharik harakati

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = -kr + F(t).$$

tenglama bilan ifodalanadi, bu yerda $F(t) = -ma(t) = -m\frac{d^2f}{dt^2}$ — berilgan vaqt funksiyasi.

Ko‘rinib turibdiki, avvalgi holdagi kabi, mahkamlangan nuqtaning davriy harakatida, sistemada rezonans paydo bo‘ladi.

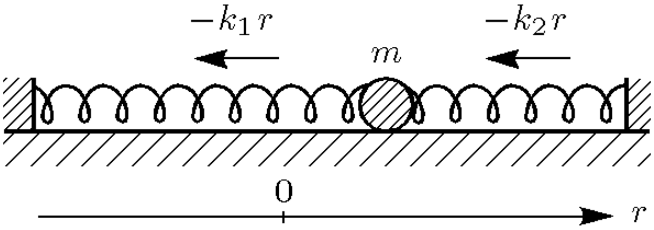
Sistemaning inersiya kuchi nafaqat t vaqtdan, balki $r$ning koordinatasidan ham bog‘liq bo‘ladi. Agar $\omega(t)$ burchak tezlik bilan harakatlanayotgan sterjenga prujina kiydirilgan bo‘lsa, u holda inersiyaning markazga intiluvchi kuchi

$$F(t) = mv^2(t)/R = m\omega^2(t)R$$

ga teng, bunda $v(t) = \omega(t)R$, $R = R_0 + r$, R_0– erkin holatdagi prujina uzunligi, r– sharikning neytral holatdan og‘ishi $r > -R_0$. Sharikning harakat tenglamasi quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = -kr + F(r,t), \qquad (5)$$

bu yerda $F(r,t) = m\omega^2(t)(R_0 + r)$ yoki $m\frac{d^2r}{dt^2} = -(k - m\omega^2(t))r + m\omega^2(t)R_0$, bundan tashqari $r << R_0$ bo‘lganda (5) chiziqli tenglama qo‘shimcha hadi $F(t) = -m\omega^2(t)R_0$ bo‘lgan (3) ko‘rinishdagi tenglamaga o‘tadi.
Bunday holda rezonans holati mavjud emas, chunki tashqi kuch bir tomonga yo‘naltirilgan va sistemani qimirlatish holatida emas.



Qattiqligi k_1 va k_2 bo‘lgan ikkita prujinaga mahkamlangan sharikni qaraymiz.
Koordinata boshini ikkala prujinaning sharikka ta’sir etuvchi kuchlari teng bo‘lgan nuqtaga o‘rnatamiz. Guk qonuniga ko‘ra, sharikning r og‘ishida sharikka chap prujina tomonidan $-k_1r$ kuch, o‘ngtomonidan esa $-k_2r$ kuch ta’sir etadi (bunda birinchi prujinaning cho‘zilishi hisobidan ikkinchi prujina siqilishi tufayli kuchlar ham bir tomonga yo‘naltiriladi). Natijada, biz bitta prujina holidagi kabi ushbu tenglamani hosil qilamiz: $m\frac{d^2r}{dt^2} = -k_1r - k_1r = -kr$, bu yerda $k = k_1 + k_1$ – ikkala prujinaning qattiqliklari yig‘indisi olinmoqda.

3. Kuch sarflanishini hisobga olish. Qaralayotgan sistemada ishqalanish kuchi hyech bo‘lmaganda ikkita sababga ko‘ra paydo bo‘ladi. Birinchisi – sharik sirti va u harakatlanayotgan tekislikning idealmasligi. Bu holda ishqalanish kuchi $F = -k_1P$ ga teng, bu yerda k_1 – ishqalanish koeffisiyenti, $P = mg$– sharik og‘irligi. U hamisha sharik harakatiga teskari yo‘nalgan, uning ishorasi har doim sharik tezligi $v = dr/dt$ ishorasiga qarama-qarshidir, ya’ni $F = -k_1mgsign(dr/dt)$. Sharik harakati ushbu

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = -kr - k_1mgsign\frac{dr}{dt}, \qquad (6)$$

tenglamaga buysunadi va bu tenglamada kuch o‘zgarmas $F(r,t) = F_0$ bo‘lsa, uning ko‘rinishi (2) tenglamaga o‘xshaydi. Ammo (6) da kuch ishorasining o‘zgarib turishidan uni tebranishning standart tenglamasiga keltirib bo‘lmaydi, bu esa (1) va (6) tenglamalar turli jarayonlarni tavsiflashini ko‘rsatadi. Xususan, sharik tebranishning amplitudasi, oxirgi holda, vaqt o‘tishi bilan kamayadi. Buni tekshirib ko‘rish qiyin emas. Buning uchun (6) tenglamani

$$m\frac{dv}{dt}+kr=-k_1 mgsignv$$

ko‘rinishda yozib, ikkala tomonni $v/2$ ga ko‘paytiramiz:

$$m\frac{v}{2}\frac{dv}{dt}+kr\frac{v}{2}=-k_1 mgsignv\frac{v}{2},$$

$v=\frac{dr}{dt}$ ekanligidan

$$\frac{m}{2}\frac{dv^2}{dt}+\frac{k}{2}\frac{dr^2}{dt}=-\frac{1}{2}k_1 mgvsignv$$

tenglamani hosil qilamiz.

Bu tenglama ushbu

$$\frac{d}{dt}\left(m\frac{v^2}{2}+k\frac{r^2}{2}\right)=-\frac{1}{2}k_1 mgvsignv \qquad (7)$$

tenglamaga teng kuchli. Uning chap qismida hosila belgisi ostida sistema kinetik va potensial energiyalari yig‘indisi $E(t)=E_k(t)+E_p(t)$ turganligi, o‘ng qismida esa $v\neq 0$ da manfiy ekanligidan

$$\frac{dE(t)}{dt}<0v\neq 0\left(\frac{dE(t)}{dt}=0v=0\right)$$

ga ega bo‘lamiz, ya’ni vaqt o‘tishi bilan sistema to‘la energiyasi kamaya boradi. Sharik maksimal $|r_m(t)|$ amplitudaga erishgan vaqtda uning tezligi (va E_k kinetik energiyasi) nolga teng bo‘lganligi uchun $E_p(t)=\frac{kr_m^2(t)}{2}=E(t)$ va $E(t)$ kamayuvchi ekanligidan $|r_m(t)|$ amplituda kamayuvchi funksiya ekan.

Endi sharik harakatlanayotgan muhit qarshiligi (havo, suv va h.k.) natijasida paydo bo‘lgan ishqalanish kuchi ta’siri natijasini qarab chiqamiz. Bu holda ishqalanish kuchi o‘zgaruvchan, bu ayniqsa harakat tezligidan bog‘liq bo‘ladi. Bu bog‘liqlik Stoks formulasi yordamida ifodalaniladi:

$$F=-\mu v=-\mu\frac{dr}{dt},$$

bu yerda $\mu>0$ koeffisiyent sharik o‘lchami, zichligi, yopishqoqligi bilan aniqlanadi. Yopishqoq muhitda harakat tenglamasi ko‘rinishi

$$m\frac{d^2r}{dt^2}=-kr+F(v)=-kr-\mu\frac{dr}{dt}. \qquad (8)$$

Birinchi hosilali haddan qutilgan holda (8) tenglama umumiy yechimini topamiz. $r(t)=\bar{r}(t)e^{\alpha t}$ almashtirish olsak,

$$m\left(e^{\alpha t}\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}+\alpha e^{\alpha t}\frac{d\bar{r}}{dt}+\alpha e^{\alpha t}\frac{d\bar{r}}{dt}+\alpha^2 e^{\alpha t}\bar{r}\right)$$
$$=-k\bar{r}e^{\alpha t}-\mu e^{\alpha t}\frac{d\bar{r}}{dt}-\mu\alpha e^{\alpha t}\bar{r}.$$

Unda $e^{\alpha t}$ ko‘paytuvchini qisqartirib, $\alpha=-\frac{\mu}{(2m)}$ belgilash olib, quyidagi tenglamaga kelamiz:

$$m\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}=-\left(k-\frac{\mu^2}{4m}\right)\bar{r}=-k_1\bar{r}. \qquad (9)$$

Yuqorida qaralgan (1) tenglamadan farqli ravishda (9) ning o‘ng qismidagi birinchi ko‘paytuvchi sistemaning k,μ,m parametrlaridan bog‘liq ravishda ishorasini o‘zgartirib turishi mumkin. bu esa $r(t)=e^{\alpha t}\bar{r}(t)$ bog‘liqlik tufayli standart holdan sezilarli farq qiluvchi tenglamaga olib keladi.

Nisbatan kichik yopishqoqlikda, ya’ni $k-\frac{\mu^2}{(4m)}=k_1>0$ da $\bar{r}(t)$ yechim $\bar{r}=A\,sin\,\omega\,t+B\,sin\,\omega\,t$ formula bilan beriladi va $r(t)$ yechim uchun

$$r(t)=\bar{r}e^{\alpha t}=e^{-\frac{t\mu}{(2m)}}(A\,sin\,\omega\,t+B\,sin\,\omega\,t)$$

ifodani olamiz, bu yerda $\omega=\left(\frac{k_1}{m}\right)^{\frac{1}{2}}$, A va B konstantalar r_0 va v_0 lar orqali topiladi. Sistema vaqt o‘tishi bilan ω chastotali tebranish so‘nishi yuz beradi.

Agar $k_1=0$ bo‘lsa $\frac{d\bar{r}}{dt}$ kattalik o‘zgarmas yoki $\bar{r}(t)=ct+c_1$. Boshlang‘ich shartlarda

$$r(t)=e^{-\frac{t\mu}{(2m)}}(ct+c_1)=e^{-\frac{t\mu}{(2m)}}\left(\left(v_0+\frac{\mu r_0}{2m}\right)t+r_0\right).$$

Bu holda yopishqoq ishqalanish kuchi ta’sirida tebranish mavjud emas. Sistema faqat bir marta $r=0$ nuqtadan o‘tishi mumkin, buning uchun $v_0<-\frac{\mu r_0}{(2m)}, r_0>0$ yoki $v_0>-\frac{\mu r_0}{(2m)}, r_0<0$ shartlarning bajarilishi zarur va yetarli, ya’ni sharikning boshlang‘ich tezligi yetarlicha katta va $r=0$ nuqtaga yo‘nalgan bo‘lishi kerak. Bunda aniqki, sharik tezligi $v(t)=\frac{dr}{dt}$ faqat bir marta o‘z ishorasini o‘zgartirishi mumkin.

Va nihoyat, kuchli yopishqoqlikda ishqalanish kuchi ta’siri shu qadar kattaki, ixtiyoriy r_0, v_0 larda sharik $r=0$ nuqtadan o‘tmasdan, muhitda «qolib ketadi», faqatgina unga $t\to\infty$ da bir tomonlama yaqinlashadi. Haqiqatan ham, $k_1<0$ da (9) tenglamaning yechimi o‘zgarmas, binobarin, $r(t)$ kattalik ham o‘z ishorasini o‘zgartirmaydi. $\bar{r}(t)$ funksiyaning $t\to\infty$ dagi holatini (9) tenglama birinchi integralining xossalaridan bilish mumkin:

$$m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = -k_1\bar{r}^2 + const \qquad (10)$$

Bu tenglik (9) tenglamaning ikala tomonini $\frac{d\bar{r}}{dt}$ ga ko‘paytirish va t bo‘yicha bir marta integrallash orqali hosil qilindi. $\bar{r}(t) \to \infty$ yoki $\bar{r}(t) \to C_1 \neq 0$ farazlar (10) tenglikka zid. Faqatgina yagona variant $t \to \infty$ da $\bar{r}(t) \to 0$ qoladi, demak shunday qilib, $r(t) \to 0$, $t \to \infty$.

Demak, sistemaning yopishqoq muhitdagi harakati ideal holatdagidan katta farq qiladi va barcha hollarda harakat so‘nuvchan bo‘ladi.

3-mavzu. Chiziqli dasturlash masalalari va Demografik modellar

Reja:

1. Chiziqli dasturlashning umumiy masalasi. Transport masalasi. Jamiyat rivojlanishining demografik modeli.
2. Maltus va Fyurxst-Perl modellari. Populyatsiya chiziqsiz modelinint uch turdagi rejimi.

1. Chiziqli dasturlashning umumiy masalasi. Transport masalasi. Jamiyat rivojlanishining demografik modeli.

Ishlab chiqarishda uchrash mumkin bo‘lgan quyidagi misolni qaraymiz. Faraz qilaylik, qandolat sexida 3 xil xom ashyodan (un, shakar va yog‘dan) 4 xil pishiriq ishlab chiqarilsin. Har bir xom ashyoning umumiy miqdori (kg hisobida) hamda har bir pishiriqdan 1 kg tayyorlash uchun zarur xom ashyo miqdori (kg hisobida) va ularni sotishdan sex oladigan daromad (pul birligi hisobida) 1- jadvalda keltirilgan.

1- jadval

Xom ashyo turlari	1 kg pishiriq tayyorlash uchun zarur xom ashyo miqdori	Xom ashyoning umumiy miqdori

	1-xil	2-xil	3-xil	4-xil	
Un	00,4	00,5	0,5	00,6	1000
Shakar	00,25	00,15	00,25	00,05	45
Yog‘	00,1	00,1	0,05	00,1	15
1 kg pishiriqni sotishdan olingan daromad	40	336	338	32	

Sex ishini shunday rejalashtirish kerakki, pishiriqlarni ishlab chiqarish uchun sarf kilinadigan xom ashyo miqdorlari minimal va ularni sotishdan olinadigan umumiy daromad maksimal bo‘lsin.

Masalaning qo‘yilishini bunday jumlalashtirish tekshirilishi kerak bo‘lgan operasiya ko‘p maqsadli, aniqrog‘i, ikki maqsadli ekanligini ko‘rsatmoqda:

1) pishiriqlarga sarf kilinadigan xom ashyo mikdorlari minimal bo‘lsin;

2) pishiriqlarni sotishdan olinadigan umumiy daromad maksimal bo‘lsin.

Ta’kidlash kerakki, bu maqsadlar o‘zaro ziddiyatlidir, chunki bir vaqtning o‘zida ham kam xarajat qilish, ham ko‘p daromadga ega bo‘lish mumkin emas. Bu vaziyatdan chiqish uchun qaror qabul qilishda oqilona yondoshish zarur. Tabiiyki, masalaning qo‘yilishida oxirgi gapni quyidagicha jumlalashtirsak, ta’kidlangan ziddiyat bartaraf etilgan bo‘ladi. Sex ishini shunday rejalashtirish kerakki, pishiriqlarni ishlab chiqarish uchun sarf kilinadigan xom ashyo miqdorlari ularning umumiy miqdorlaridan oshmasin va pishiriqlarni sotishdan olinadigan umumiy daromad maksimal bo‘lsin.

Masalaning bunday qo‘yilishi yuqorida keltirilgan birinchi maqsadni tabiiy shartga aylantiradi va bu shart ikkinchi maqsadga zid emas. Chiziqli dasturlash sxemasining birinchi bosqichida qilinishi zarur bo‘lgan ishlar bajarildi.

Endi ikkinchi bosqichga o‘tib qo‘yilgan masalaning matematik modelini tuzamiz. Buning uchun, avvalo, maqsadga mos keluvchi samaradorlik mezonini aniqlaymiz. Maqsad «pishiriqlarni sotishdan olinadigan daromad maksimal bo‘lsin» deb ifodalanganligi sababli, bu maqsadga erishish darajasini sex oladigan umumiy daromad miqdori *z* bilan o‘lchash mumkin.

Modellashtirish jarayonini davom ettirib, ishlab chiqarilishi rejalashtirilayotgan *j*- xil pishiriq miqdorini $x_j, j = 1,2,3,4$, bilan belgilaymiz. U holda samaradorlik mezoni (korxona oladigan umumiy daromad miqdori) $z = 40x_1 + 36x_2 + 38x_3 + 32x_4$ ko‘rinishga ega bo‘ladi.

Xom ashyolarning mavjud miqdorlarini hisobga olib, quyidagi shartlarni yozish mumkin:

$$0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 + 0{,}5x_3 + 0{,}6x_4 \leq 1000,$$
$$0{,}25x_1 + 0{,}15x_2 + 0{,}25x_3 + 0{,}05x_4 \leq 45,$$
$$0{,}1x_1 + 0{,}1x_2 + 0{,}05x_3 + 0{,}1x_4 \leq 15.$$

Tabiiyki, $x_j, j = 1,2,3,4$ o‘zgaruvchilar, pishiriqlar miqdorlari sifatida, manfiymaslik shartiga ham bo‘sunishadi.

Shunday qilib, sex boshqaruvi hal qilishi kerak bo‘lgan masalani quyidagicha ifodalash mumkin:

$x_j, j = 1,2,3,4$, o‘zgaruvchilarning yuqorida ifodalangan shartlarni qanoatlantiruvchi shunday (optimal) $x_j^0, j = 1,2,3,4$, qiymatlari topilsinki, ular *z* samaradorlik mezoniga maksimal qiymat bersin.

Bu masalaning matematik modelini formal ravishda quyidagicha yozish mumkin:

$$z = 40x_1 + 36x_2 + 38x_3 + 32x_4 \to max,$$

$$0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 + 0{,}5x_3 + 0{,}6x_4 \le 1000,$$
$$0{,}25x_1 + 0{,}15x_2 + 0{,}25x_3 + 0{,}05x_4 \le 45,$$
$$0{,}1x_1 + 0{,}1x_2 + 0{,}05x_3 + 0{,}1x_4 \le 15,$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0,$$

Bu masala uchun operasiyalarni tekshirish jarayonining qolgan barcha bosqichlari maxsus bilimlar talab qiladi.

Ishlab chiqarish haqidagi masala. Faraz qilaylik, korxonada *m* xil xom ashyodan *n* xil mahsulot ishlab chiqarilsin. Har bir *i*- xom ashyoning umumiy miqdori (zahirasi) $b_i, i = 1,2,\dots,m$, korxona *j*- mahsulotning har 1 birligini sotishdan oladigan daromadi $c_j, j = 1,2,\dots,n$, hamda 1 birlik *j*- mahsulotni ishlab chiqarish uchun *i*- xom ashyoni sarflash me'yori $a_{ij}, i = 1,2,\dots,m, j = 1,2,\dots,n$, berilgan bo'lsin. Korxona ishini shunday rejalashtirish kerakki, ishlab chiqarish uchun sarf kilinadigan har bir xom ashyo miqdori ularning umumiy miqdoridan oshmasin va ishlab chiqarilgan mahsulotlarni sotishdan olinadigan daromad maksimal bo'lsin.

Masalaning matematik modelini tuzish uchun ishlab chiqarilishi rejalashtirilayotgan *j*- mahsulot miqdorini $x_j, j = 1,2,\dots,n$, bilan belgilaymiz.

Masalaning qo'yilishiga ko'ra, m, n, b_i, a_{ij}, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$, va c_j, $j = \overline{1,n}$, parametrlar ma'lum, x_j, $j = \overline{1,n}$, parametr esa aniqlanishi kerak. Bu masalada $x_1, x_2, \dots, x_n$ kattaliklar qiymatlarini shunday aniqlash kerakki, ular masala shartlarlariga bo'ysunishsin va keltirilgan maqsadga muvofiq bo'lishsin.

Samaradorlik mezoni (korxonaning umumiy daromadi) *z* bilan belgilansa, $z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ bo'ladi.

Xom ashyolarning mavjud miqdorlarini hisobga olib, $x_j, j = 1,2,\dots,n$, o'zgaruvchilarning mumkin bo'lgan qiymatlar sohasini belgilaydigan shartlarni $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i,\ i = \overline{1,m},\ \ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,n}$ yozish mumkin.

Shunday qilib, $x_j, j = 1,2,\dots,n$, o'zgaruvchilarning yuqoridagi shartlarni qanoatlantiradigan va *z* samaradorlik mezoniga maksimal qiymat beradigan qiymatlari topilishi kerak. Qaralayotgan masalaning matematik modeli quyidagicha ifodalanishi mumkin:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max, \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i,\ i = \overline{1,m},\ \ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,n}.$$

Joylashtirish haqidagi masala. Faraz qilaylik, qandaydir bir jinsli mahsulot *n*ta punktlarda ishlab chiqariladi, *m*ta punktlarda esa iste'mol qilinadi. Har bir *i*- istemolchi punktning shu mahsulotni iste'mol qilish hajmi b_i, $i = \overline{1,m}$, berilgan. Har bir *j*- ishlab chiqarish punkti uchun ishlab chiqarish xarajatlari $f_j$ning ishlab chiqarilgan mahsulot miqdori $x_j$ga bog‘liqligi $f_j = f_j(x_j)$ ko‘rinishda ifodalanadi. Bundan tashqari, j- ishlab chiqarish punktidan i- iste’mol punktiga mahsulotning 1 birligini tashish uchun sarflanadigan transport xarajatlari a_{ij}, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$, ham ma’lum. Mahsulot ishlab chiqarish va uni tashish uchun shunday reja tuzilsinki, ya’ni shunday x_j, $j = \overline{1,n}$, hajmda mahsulot ishlab chiqarilsin va j- ishlab chiqarish punktidan i- iste’mol punktiga shunday x_{ij} , $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$, miqdorda mahsulot tashilsinki, umumiy xarajatlar eng kam bo‘lsin.

Bu masalaning qo‘yilishidayoq uning matematik modelini tuzish jarayonida zarur bo‘ladigan belgilashlar ham keltirilgan. Masalaning matematik modeli quyidagicha bo‘ladi.

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j) \to min,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = b_i, i = \overline{1,m},$$

$$x_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij}\, , x_{ij} \geq 0, j = \overline{1,n}.$$

Ozuqa qorishmasi haqidagi masala. Hayvonlarga beriladigan ozuqa qorishmasini tayyorlashda ishlatiladigan mahsulotlar tarkibidagi zarur ozuqa moddalari miqdorlari va bu mahsulotlar 1 birligining narxi ma’lum bo‘lsin. Ozuqa qorishmasini shunday tayyorlash kerakki, uning tarkibidagi ozuqa moddalar miqdorlari hayvonlarni ovqatlantirish uchun belgilangan chegaralardan chiqmasin va qorishmani tayyorlashda ishlatiladigan mahsulotlarni sotib olish uchun ketadigan umumiy xarajat minimal bo‘lsin.

Bu masalaning matematik modelini tuzish uchun, avvalo, quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

m – hayvonlarga ovqat sifatida berilishi mumkin bo‘lgan mahsulotlar tarkibidagi barcha ozuqa moddalari soni;

n – qorishma tarkibidagi mahsulotlar turlari soni;

a_{ij} – j- turdagi mahsulot tarkibidagi i- xil ozuqa moddasining miqdori, $i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$;

b_{*i} – qorishmadagi i- xil ozuqa moddasining belgilangan minimal miqdori, $i = \overline{1,m}$;

b_i^* – qorishmadagi i- xil ozuqa moddasining belgilangan maksimal miqdori, $i = \overline{1,m}$;

c_j – qorishmani tashkil etuvchi j- tur mahsulot 1 birligining narxi, $j = \overline{1,n}$;

x_j – qorishmani tashkil etuvchi j- tur mahsulot miqdori, $j = \overline{1,n}$.

Qaralayotgan masalaning matematik modeli quyidagicha ifodalanishi mumkin:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to min,$$

$$b_{*i} \le \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i^*, i = \overline{1,m}, x_j \ge 0, j = \overline{1,n}.$$

Transport masalasi. Boshqa chiziqli dasturlash masalalari singari transport masalasini yechish jarayoni boshlang'ich bazis rejani topishdan boshlanadi. Transport masalasining bazis rejasini topish usullari ko'p bo'lib, quyida biz "shimoliy-g'arb burchak" usuli va "minimal xarajatlar" usuli bilan tanishamiz.

1. Shimoliy-g'arb burchak usuli. Faraz qilaylik, transport masalasining shartlari quyidagi jadvalga joylashtirilgan bo'lsin.

b_j / a_i	b_1	b_2	…	b_n
a_1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1n}
a_2	c_{21}	c_{22}	…	c_{22}
…	…	…	…	…
a_m	c_{m1}	c_{m2}	…	c_{mn}

Shimoliy-garb burchak usulining g'oyasi quyidagilardan iborat. Eng avval shimoliy-g'arbda joylashgan katakchadagi $\boldsymbol{x_{11}}$ noma'lumning qiymatini aniqlaymiz, $\boldsymbol{x_{11} = min(a_1, b_1)}$. Agar $\boldsymbol{a_1 < b_1}$ bo'lsa $\boldsymbol{x_{11} = a_1}$ va $\boldsymbol{x_{1j} = 0, (j = \overline{2,n})}$ agar $\boldsymbol{b_1 < a_1}$ *bo'lsa* $\boldsymbol{x_{11} = b_1}$ va $\boldsymbol{x_{i1} = 0, (i = \overline{2,m})}$ bo'ladi. Faraz qilaylik, birinchi hol bajarilsin. Bu holda 1-qadamdan so'ng masalaning yechimlaridan tashkil topgan matritsa quyidagi ko'rinishda bo'ladi.

1-qadam

$$\begin{array}{cccccc|c}
\boldsymbol{x_{11} = a_1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
x_{21} & x_{22} & x_{23} & \dots & x_{2n} & a_2 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
x_{m1} & x_{m2} & x_{m3} & \dots & x_{mn} & a_m \\
\hline
b_1 - a_1 & b_2 & \boldsymbol{b_3} & & \boldsymbol{b_n} &
\end{array}$$

Endi ikkinchi qatordagi birinchi elementning qiymatini topamiz:

Agar $a_2 > b_1 - a_1$ ***bo'lsa,*** $x_{21} = b_1 - a_1$ ***va*** $x_{i1} = 0, (i = \overline{3,m})$***, agar*** $a_2 < b_1 - a_1$ ***bo'lsa,*** $x_{21} = a_2$ ***va*** $x_{2j} = 0, (j = \overline{2,n})$***.***

Faraz qilaylik, yangi matritsa uchun ham 1-hol bajarilsin, u holda 2-qadamdagi yechimlar matritsasi quyidagicha bo'ladi.

$$
\begin{array}{cccccc|c}
\boldsymbol{x_{11} = a_1} & 0 & 0 & \dots & 0 & & 0 \\
x_{21} & x_{22} & x_{23} & \dots & x_{2n} & & a_2 - b_1 \\
0 & x_{32} & x_{33} & \dots & x_{3n} & & a_3 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & \dots \\
x_{m1} & x_{m2} & x_{m3} & \dots & x_{mn} & & a_m \\
\hline
0 & b_2 & \boldsymbol{b_3} & & \boldsymbol{b_n} & &
\end{array}
$$

Xuddi shunday yo'l bilan davom etib, har bir qadamda birorta x_{ij} ning qiymati topiladi. $x_{ij} = min(a_i, b_j)$ va a_i yoki $b_j$nolga aylantiriladi.

Bu jarayon barcha a_i va b_j lar nolga aylanguncha takrorlanadi. Ma'lumki, har bir x_{ij} ning qiymati a_i va b_j larning turli kombinatsiyalarini ayirish yoki kushish yordami bilan topiladi, shuning uchun a_i va b_j lar butun bo'lganda topilgan bazis reja butun sonli bo'ladi.

Bundan tashqari, yuqoridagi 2-teoremaga asosan bazis yechimdagi noldan faqli x_{ij} noma'lumlar soni $m + n - 1$ dan oshmaydi.

Misol. Quyidagi transport masalasining boshlang'ich bazis yechimini toping.

b_j / a_i	3	6	2	1
4	2	5	9	5
2	8	3	5	8
3	7	3	1	4
3	5	9	7	2

1-qadam.

$$x_{11} = min(4{,}3) = 3.$$

Shuning uchun $\boldsymbol{b'_1 = 0}$ *va* $\boldsymbol{a_1 = 4 - 3 = 1, x_{21} = x_{31} = x_{41} = 0.}$

2-qadam

$$\boldsymbol{x_{12} = min(1, 6) = 1}.$$

Bunda $\boldsymbol{a'_1 = 0}$ *va* $\boldsymbol{b'_2 = 6 - 1 = 5, x_{13} = x_{14} = 0.}$

3-qadam

$$\boldsymbol{x_{22} = min(3, 3) = 3.}$$

Bunda $\boldsymbol{a'_2 = 0}$ *va* $\boldsymbol{b'_2 = 5 - 2 = 3, x_{23} = x_{24} = 0.}$

4-qadam.

$$\boldsymbol{x_{32} = min(3, 3) = 3}.$$

Bunda $\boldsymbol{a''_2 = b''_2 = 0}$ *bo'ladi hamda* $\boldsymbol{x_{33} = x_{34} = x_{42} = 0.}$

5-qadam.

$$\boldsymbol{x_{43} = 2, a'_4 = 3 - 2 = 1}.$$

6-qadam

$$x_{44} = min(1{,}1) = 1.$$

Bunda $a'_4 = b'_4 = 0$ bo'ladi va masalani yechish jarayoni tugaydi. Topilgan boshlang'ich bazis yechim quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

b_j / a_i	3	6	2	1
4	2 3	5 1	9	5
2	8	3 2	5	8
3	7	3 3	1	4
3	5	9	7 2	2 1

Topilgan boshlang'ich bazis yechimdagi noldan farqli bo'lgan noma'lumlar soni 6 ta bo'lib, u $m + n - 1 = 7$ dan kichik. Agar masalaning bazis rejadagi noldan farqli bo'lgan x_{ij} noma'lumlar soni $m + n - 1$ dan kichik bo'lsa, bunday rejani xos reja deb ataymiz. Xos rejani to'g'rilash usullari bilan keyinroq tanishamiz.

II. Minimal xarajatlar usuli. Transport masalasining optimal yechimini topish uchun kerak bo'ladigan iteratsiyalar soni boshlang'ich bazis yechimini tanlashga bog'liqdir. Optimal yechimga yaqin bo'lgan bazis yechimni topish masalaning optimal yechimini topishni tezlashtiradi. Yuqoridagi «shimoliy-garb burchak» usuli transport masalasining bazis yechimini ixtiyoriy ravishda, transport xarajatlarini nazarga olmagan holda aniqlaydi. Bunday usul yordami bilan topilgan ko'pgina bazis yechim optimal yechimdan yiroq bo'lib, optimal yechimni topish uchun juda ko'p iteratsiyalarni bajarishga to'g'ri keladi.

Adabiyotda transport masalasining boshlang'ich bazis yechimini topish uchun transport xarajatlarini nazarga oluvchi ko'p usullar ma'lum(ustundagi minimal element usuli, minimal xarajatlar usuli, ikki tomonlama tanlash usuli va hokazolar). Ularning hammasi transport xarajatlarini nazarga oluvchi usullaridir.

Minimal xarajatlar usulining g'oyasi quyidagilardan iborat:

1. Transport masalasi xarajatlaridan tashkil topgan matritsa belgilab olinadi, ya'ni

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

Bu matritsaning minimal elementini topib belgilaymiz:

$$\min_{ij} c_{ij} = c_{i_1 j_1}$$

U holda $x_{i_1 j_1}$ quyidagicha aniqlanadi

$$x_{i_1 j_1} = min(a_{i_1 j_1} b_{i_1 j_1})$$

Bu yerda ikki hol bo'lishi mumkin:

1) $a_{i_1} < b_{j_1}$

2) $a_{i_1} > b_{j_1}$

Birinchi holda $x_{i_1 j_1} = a_{i_1}$ bo'lganda qatorning barcha $x_{i_1 j}(j \neq j_1)$ elementlari *0* ga teng, ya'ni

$$x_{i_1 j} = 0(j \neq j_1)$$

bo'ladi, bunday holda i_1 qator o'chiriladi deb aytamiz. Ikkinchi holda $x_{i_1 j_1} = b_{j_1}$ va j_1 ustunning barcha $x_{i j_1}(i \neq i_1)$ elementlari *0* ga teng, ya'ni

$$x_{i j_1} = 0(i \neq i_1)$$

tenglik o'rinli bo'ladi, bunday holda $j_1$ustun o'chiriladi deb aytamiz.

2. Faraz qilaylik, C' matritsa C matritsaning i_1 qatorini (1-hol) yoki $j_1$ustunini (2-hol) o'chirish natijasida hosil bo'lgan matritsa bo'lsin. Yangi matritsa uchun

$$a_i^{(1)} = \begin{cases} a_1, i \neq i_1 \\ a_i - x_{i_1 j_1}, i = i_1 \end{cases} \quad b_j^{(1)} = \begin{cases} b_j, i \neq i_1 \\ b_j - x_{i_1 j_1}, j = j_1 \end{cases}$$

bo'lsin.

Ma'lumki, C' matritsadagi ustun va qatorlar soni C matritsaniqidan bittaga kam bo'ladi. Ikkinchi qadamda yuqoridagi C matritsa uchun bajarilgan ishlar C' matritsa va $a_i^{(1)}, b_j^{(1)}$miqdorlar uchun bajariladi. Natijada rejalardan tashkil topgan $X = (x_{ij})$ matritsaning yana bir qatori yoki ustuni to'ldiriladi. Bu jarayon C matritsaning hamma qator va ustunlari o'chirilguncha, ya'ni X matritsaning hamma qator va ustunlari to'ldirilguncha takrorlanadi.

m ta ishlab chiqaruvchi punktni n ta iste'mol qiluvchi punktga bog'lovchi transport masalasining boshlang'ich bazis rejasini topish uchun minimal xarajatlar usulida $m + n - 1$ ta qadamdan iborat ishlarni bajarish kerak bo'ladi.

1-misol. Berilgan transport masalasining bazis rejasini minimal xarajatlar usulidan foydalanib toping.

b_j / a_i	5	9	9	7
11	7	8 3	5 1	3 7
11	2 5	4 6	5	9
8	6	3	1 8	2

1. $\min\limits_{i,j} c_{ij} c_{33} = 1$

$$x_{33} = min(a_3, b_3) = min(8{,}9) = 8.$$

Bu holda $x_{3j} = 0, (j \neq 3)$ bo‘ladi. Boshqacha aytganda 3-qator o‘chiriladi va yangi C' matrisa hosil bo‘ladi. Bu matrisada

$$a_3^{(1)} = 8 - 8 = 0$$

$$b_3^{(1)} = 9 - 8 = 1$$

bo‘lib, C^I matrisa quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$C^I = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

2. $\boldsymbol{C^I}$matrisadagi elementlar ichida eng kichigini topamiz, ya’ni

$$\boldsymbol{\min\limits_{i,j} c_{ij} = c_{21} = 2}.$$

U holda $\boldsymbol{x_{21} = min(a_2, b_1) = min(11, 5) = 5}$. *Demak*, $\boldsymbol{x_{21} = b_1 = 5}$.

Shuning uchun $\boldsymbol{x_{21} = 0 (i \neq 2)}$ bo‘ladi, ya’ni 1-ustun o‘chiriladi. Natijada yangi

$$\boldsymbol{C^{II} = \begin{pmatrix} 853 \\ 459 \end{pmatrix}}$$

matrisa hosil bo‘ladi. Bu matrisa uchun $\boldsymbol{b_1^{(1)} = 5 - 5 = 0, a_2^{(1)} = 11 - 5 = 6}$.

3. $\boldsymbol{C^{II}}$ matrisaning eng kichik $\boldsymbol{\min\limits_{i,j} c_{ij} = c_{14} = 3}$.

Shuning uchun $x_{14} = min(a_j, b_4) = min(11.7) = 7$ **.** Bu yerda 4-ustun o‘chiriladi va $a_1^{(1)} = a_1 - x_{14} = 11 - 7 = 4$ bo‘ladi. Natijada yangi

$$C^{III} = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

matrisa hosil bo‘ladi.

4. C^{III} matrisaning elementlari orasida eng kichigi topiladi

$$\min\limits_{i,j} c_{ij} = c_{22} = 4.$$

Bu holda,

$$x_{22} = min(a_2^{(1)}, b_2) = min(6{,}9) = 6.$$

Natijada 2-qator o‘chiriladi va b_2 ning qiymati

$$b_2^{(1)} = b_2 - x_{22} = 9 - 6 = 3$$

ga o‘zgaradi va yangi C^{IV} matrisa-qator hosil bo‘ladi:

$$C^{IV} = (8.5).$$

Shunday yo‘l bilan 5-qadamda $x_{13} = 1$ topilib, 3-ustun o‘chiriladi. Hosil bo‘lgan X matrisa quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$X = \begin{pmatrix} 0317 \\ 5600 \\ 0080 \end{pmatrix}.$$

Bu matrisa berilgan transport masalasining bazis yechimidir.

2. Maltus va Fyurxst-Perl modellari. Populyatsiya chiziqsiz modelinint uch turdagi rejimi

a) Radioaktiv yemirilish modeli. Quyidagi belgilishlarni kiritamiz:

$N(0)$ - radioaktiv moddaning (masalan uran, pluton kabilar) atomlar soni,

$N(t)$ - radioaktiv moddaning t vaqtdagi hali yemirilmagan atomlari soni bo‘lsin. Tajribalardan ma’lumki, vaqt birligida sochilayotgan atomlar sonining o‘zgarish tezligi radioaktiv modda atomlari soniga proporsional

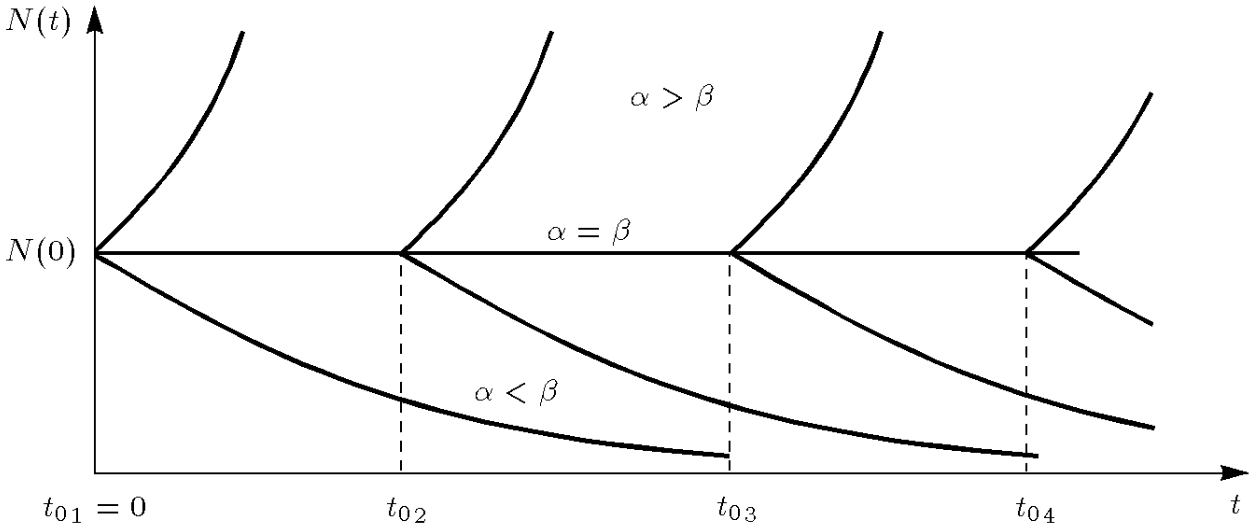
$$N' = \frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t), \lambda > 0 \tag{1}$$

bu yerda λ - qaralayotgan radioaktiv moddagagina xos bo‘lgan o‘zgarmas (radioaktivlik koeffisiyenti deb ataladi). Maktab matematika kursidan ma’lumki, (1) differensial tenglama yechimi

$$N(t) = N(0)e^{-\lambda t} \tag{2}$$

kabi ko‘rinishda bo‘ladi.

Maltus va Fyurxst-Perl modellari. Bu model asosida quyidagi oddiy tasdiq yotadi: populyatsiyaning vaqt bo‘yicha o‘zgarish tezligi uning t vaqt momentidagi soni *N(t)* ning ko‘payish koeffisiyenti $\alpha(t) \geq 0$ va kamayish koeffisiyenti $\beta(t) \leq 0$ lar yig‘indisiga ko‘paytirilganiga proporsionaldir.



1-rasm

Natijada radioaktiv radioaktiv yemirilish tenglamasiga juda o‘xshash bo‘lgan va $\alpha < \beta$ (α va β doimiylar) bo‘lganda esa, u bilan ustma-ust tushuvchi quyidagi tenglamaga kelamiz:

$$\frac{dN(t)}{dt} = [\alpha(t) - \beta(t)]N(t) \qquad (3)$$

(3) tenglamani integrallab tenglama yechimini olamiz:

$$N(t) = N(0)e^{\int_{t_0}^{t}[\alpha(\tau)-\beta(\tau)]d\tau} \qquad (4)$$

bu yerda $N(0) = N(t = 0)$ - boshlang‘ich tezlik.

Ko‘rinib turibdiki, qaralgan ikki xil tabiatga ega bo‘lgan masalalar modellari ((1) va (3) tenglamalar) bir xil, chunki bunda tenglamalarni keltirib chiqarishda bir xil mulohazalardan foydalaniladi.

1-rasmda α va β doimiy bo‘lganda $N(t)$ funksiyaning grafigi keltirilgan. Ko‘rinib turibdiki, $\alpha = \beta$ bo‘lganda aholi soni o‘zgarmaydi, ya’ni bu holda (1) tenglamaning yechimi $N(t) = N(0)$ o‘zgarmas miqdordan iborat bo‘ladi. Tug‘ilish va kamayish orasidagi muvozanat shu ma’noda turg‘un emaski, $\alpha = \beta$ tenglikning ozgina buzilishi vaqt o‘tishi bilan $N(t)$ funksiyaning $N(0)$ muvozanat qiymatdan katta miqdorga og‘ishiga olib keladi. $\alpha < \beta$ bo‘lganda aholi soni kamayadi va bunda $t \to \infty$ bo‘lganda nolga intiladi, $\alpha > \beta$ bo‘lganda esa eksponensial qonun bo‘yicha o‘sadi va $t \to \infty$ bo‘lganda cheksizlikka intiladi. Bu oxirgi natija Mal’tus tomonidan Yer aholisining nihoyatda ko‘payishi va undan kelib chiqadigan salbiy oqibatlar to‘g‘risida xavfsirab aytgan fikrlariga asosiy manba bo‘lib hisoblanadi.

Shuni ta’kidlash kerakki, axoli sonining o‘zgarish jarayoni odamlarning o‘zlarining ongli aralashuviga bog‘liq bo‘lib, uni albatta, oddiy qonuniyat bilan ifodalab bo‘lmaydi. Hattoki ideal sharoitdagi ajratib qo‘yilgan biologik populyasiyaning mavjud bo‘lishi uchun zarur bo‘lgan resurslar cheklangani sababli taklif etilayotgan model real vaziyatga to‘lasincha mos kelmaydi.

Bu aytilganlar juda murakkab hodisalar matematik modellarini qurishda analogiya usulining rolini kamaytirmaydi. Analogiya usulining qo‘llanilishi modellarning muhim xossalaridan biri – ularning universalligiga, ya’ni turli tabiatli obyektlarga qo‘llanishi mumkinligiga asoslangan.

1. Matematik modellar chiziqsizligi haqida. Yuqorida qaralgan modellarning soddaligi ularning chiziqli ekanligiga bog‘liq. Matematik nuqtai nazardan bu muhim tushuncha superpozisiya prinsipi o‘rinli ekanligi anglatadi, ya’ni yechimlarning ixtiyoriy kombinatsiyasi (masalan, ularning yig‘indisi) ham yechim bo‘ladi. Superpozisiya prinsipidan foydalanib xususiy hollar uchun yechimlar topib umumiy hol uchun yechim qurish qiyin emas. Shuning uchun umumiy hol sifat xususiyatlari haqida xususiy hol xossalaridan xulosa chiqarish mumkin. Boshqacha qilib aytganda, *chiziqli modellarda* obyektning biror-bir shartlar o‘zgarishiga javobi shu o‘zgarishning kattaligiga proporsional bo‘ladi.

Matematik modellari superpozisiya prinsipiga bo‘ysunmaydigan *chiziqsiz modellarda* esa obyektlarning bir qismi haqidagi xulosalardan butun obyekt haqida to‘g‘ri xulosa chiqarishga kafolat bermaydi, uning shartlar o‘zgarishiga javobi shu o‘zgarishlar kattaligiga sifat jihatdan bog‘langan.

Ko‘pgina real jarayonlar va ularga mos keluvchi matematik modellar chiziqsiz hisoblanadi. Chiziqli modellar esa juda xususiy hollargagina mos bo‘lib, odatda real voqyeilikka dastlabki yaqinlashish uchun xizmat qiladi.

2. Chiziqsiz Maltus modeli (logistik model). Masalan oldingi mavzuda qaralgan populyasiya modeli uchun zaruriy resurslarning chegaralanganligini e’tiborga olsak, u chiziqsiz modelga aylanadi. Bu cheklov kiritilayotganda qo‘yidagilar hisobga olinadi:

1) populyasiya soni uchun atrof muhit ta’mirlay oladigan qandaydir N_m «muvozanat» soni mavjud;

2) populyasiya sonining o‘zgarish tezligi populyasiya soni bilan uning muvozanat qiymatidan og‘ish kattaligiga ko‘paytmasiga (chiziqli Maltus modelidan farqli ravishda) proporsional, ya’ni

$$\frac{dN}{dt} = \alpha\left(1 - \frac{N}{N_m}\right)N, \alpha > 0 \qquad (3)$$

Bu tenglamadagi $\left(1 - \frac{N}{N_m}\right)$ had populyasiya soni «to‘yinganlik» mexanizmini ta’minlaydi: $N < N_m$ bo‘lganda o‘sish tezligi musbat va $N \to N_m$ da nolga intiladi; $N > N_m$ bo‘lganda esa o‘sish tezligi manfiy va nolga intiladi.

Endi olingan (3) modelni tadqiq qilamiz. (3) tenglamani

$$\frac{dN}{N_m - N} + \frac{dN}{N} = \alpha t$$

shaklda yozib olib integrallaymiz va

$$ln(N_m - N) + ln\, N = 2t + C$$

tenglikni olamiz. Bu yerdagi o‘zgarmas (S) $N(t = 0) = N(0)$ boshlang‘ich shartdan olinadi: $C = ln\frac{N(0)}{N_m - N(0)}$. Natijada

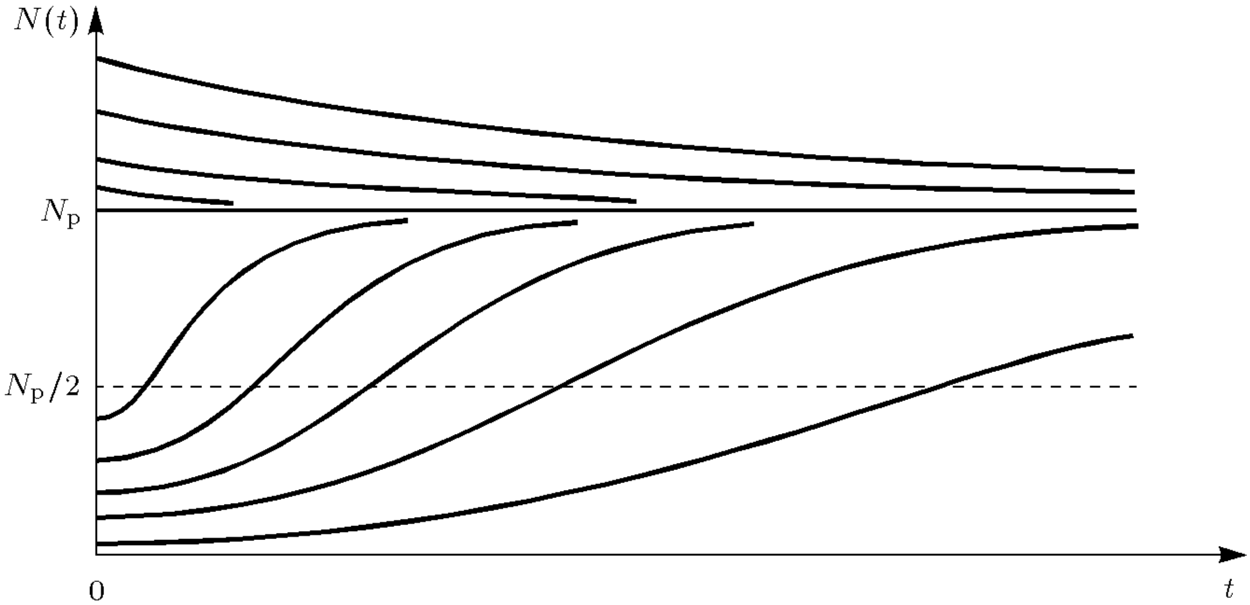
$$N = N_m \frac{N(0)}{N_m - N(0)} \ell^{\alpha t} - N \frac{N(0)}{N_m - N(0)} \ell^{\alpha t},$$

yoki

$$N(t) = \frac{N_m N(0) e^{\alpha t}}{N_m - N(0)(1 - e^{\alpha t})} \qquad (4)$$

Bu funksiyaning o‘zini tutish *logistik egri chiziq* deb ataluvchi grafik bilan tasvirlanadi (2-rasm). Ixtiyoriy $N(0)$ boshlang‘ich qiymatda populyasiya soni

N_m muvozanat qiymatga intiladi, bunda $N(t)$ qanchalik $N(0)$ ga yaqin bo‘lsa, yaqinlashishi shuncha sekin yuz beradi. Shunday qilib, chiziqli Maltus modelidan farqli ravishda chiziqsiz Maltus modelida muvozanat holati turg‘un bo‘lar ekan.



2-rasm

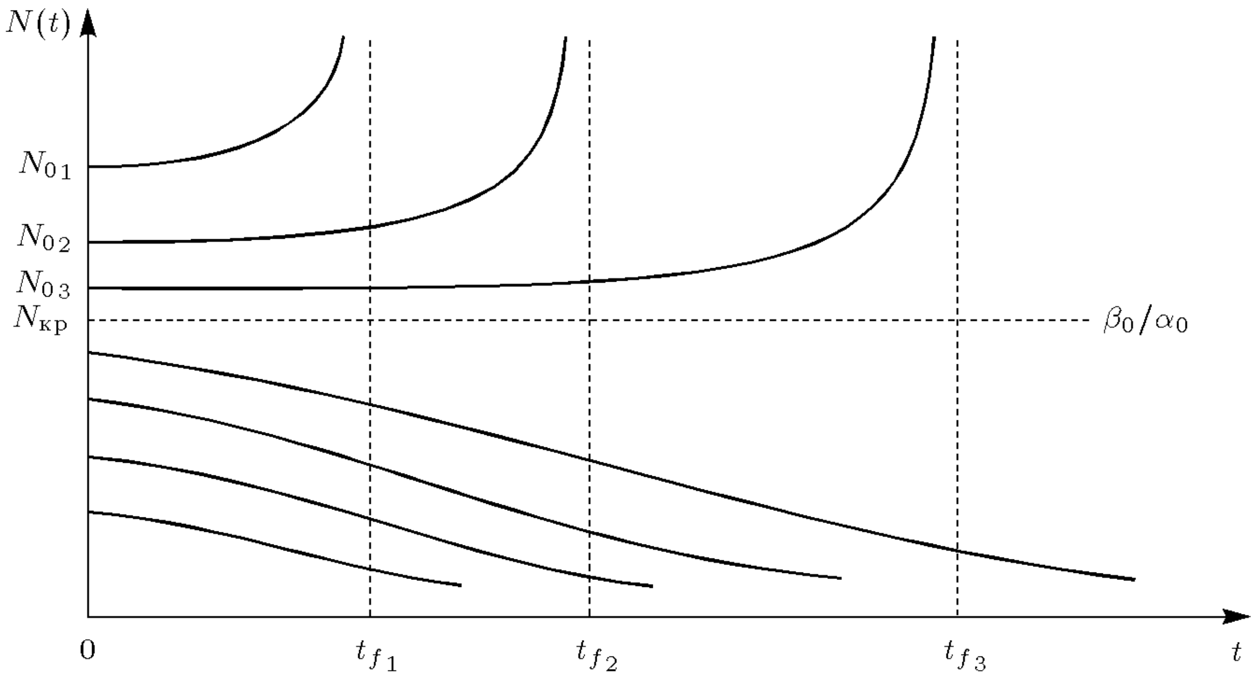
Qarab chiqilgan chiziqsiz Maltus modeli (logistik model ham deb yuritiladi) chiziqli Maltus modeliga qaraganda populyasiya dinamikasini nisbatan haqqoniy aks ettirsada, chiziqsizligi tufayli murakkab hisoblanadi. Shuni ham ta’kidlash kerakki, yuqorida qo‘llanilgan to‘yinganlik mexanizmi turli fan sohalaridagi modellarda qo‘llaniladi.

3. Populyasiya chiziqsiz modelining uch rejimi. Yuqorida murakkabligi ta’kidlangan chiziqsiz modelni tadqiq etishda davom etamiz. (1) va (3) modellardan farqli ravishda tug‘ilish koeffisiyenti populyasiya soniga, ya’ni $N(t)$ ga bog‘liq bo‘lsin deb hisoblaymiz: $\alpha = \alpha(N)$. Kamayish (o‘lim) koeffisiyenti ham N ga bog‘liq bo‘lsin.

Aniqlik uchun $\beta(N) = \beta_0 = const, \alpha(N) = \alpha_0 N$ deb olamiz, ya’ni tug‘ilish populyasiya soniga proporsional (masalan, chunki populyasiya a’zolari ko‘payishdan manfaatdor). U holda (1) tenglama

$$\frac{dN}{dt} = \alpha_0 N^2 - \beta_0 N \tag{5}$$

ko‘rinishga keladi. Turli boshlang‘ich qiymatlarda $(N(0) = N_0) N(t)$ funksiya xarakterini qarab chiqamiz (3-rasm).



a) $N_0 < N_m = {}^{\beta_0}/_{\alpha_0}$ bo‘lganda monoton ravishda kamayib, nolga intiladi $(t \to \infty)$. Bu hol uchun (5) tenglama yechimi (3) tenglama yechimiga o‘xshash formula bilan beriladi, faqat t qarama – qarshi ishora bilan olinadi (teskari logistik chiziq).

b) N_0 ning kritik (muvozanat) qiymatida $(N_0 = N_m)$ populyasiya soni vaqtga bog‘liq bo‘lmay qoladi.

v) $N_0 > N_m$ bo‘lganda yechim

$$N(t) = \frac{N_0 \cdot {}^{\beta_0}/_{\alpha_0}}{N_0 + \left[{}^{\beta_0}/_{\alpha_0} - N_0\right]\ell^{-\beta_0 t}}, N(0) = N_0 \qquad (6)$$

ko‘rinishda bo‘lib, u a) va b) harakat jihatdan keskin farq qiladi: populyasiya soni o‘sadi, buning ustiga o‘sish shu qadar tezki chekli $t = t_f$ vaqt oralig‘ida cheksizlikka intiladi. Populyasiya boshlang‘ich soni N_0 qancha katta bo‘lsa, bu $t = t_f$ vaqt shuncha kichik bo‘ladi.

Demak, (5) tenglamaning chiziqsizligi, hatto oddiy modelda ham turli tuman effektlarni yuzaga keltirib chiqaradi, populyasiya soni vaqt bo‘yicha o‘zgarishining mumkin bo‘lgan uch rejimi; b) rejimning turg‘unsizligi, ya’ni a) yoki v) sohalarga tomon kichik og‘ishlar yuz berganda yechim $N_m = {}^{\beta_0}/_{\alpha_0}$ chiziqdan uzoqlashadi; $N(t)$ funksiyaning boshlang‘ich qiymatlarga juda sezgirligi; va nihoyat $N_0 > N_m$ bo‘lganda chekli vaqt oralig‘ida populyasiya sonining keskin tarzda oshib ketishi kabilar.

Shuni ham qo‘shimcha qilish mumkinki, (5) munosabat, meva zarurkunandalari va ayrim turdagi bakteriyalar populyasiyalar dinamikasi moddellarini ham ifodalaydi.

4-mavzu. Raqobatning ayrim modellari. Biologik modellar

Reja:

5. Raqobatning ayrim modellari.
6. Biologik modellar.

1. Raqobatning ayrim modellari

Harbiy harakatlar modellari. Masalaning qo‘yilishi. Birinchi jahon urushi yillarida ingliz muhandisi va matematigi F. Lanchester havo janglari olib borishning matematik modellarini ishlab chiqdi. Keyinchalik bu modellar doimiy armiya, partizan qo‘shilmalari va aralash qo‘shin turlari harbiy harakatlari uchun umumlashtirildi.

Faraz qilaylik, harbiy harakatlarda 2 ta x, y qarama-qarshi tomonlar ishtirok etishsin. Ularning t vaqt momentidagi soni (t kunlarda) mos ravishda $x(t)$ va $y(t)$ bilan belgilaymiz. Keyinchalik, aynan tomonlar soni modellarda asosiy o‘rinni egallashini ko‘rishimiz mumkin. Gap shundaki, qarama-qarshiliklarda tomonlarning tarkibi, darajasi va malakasi, ruhiyati va boshqa omillar ham muhim hisoblanishi mumkin. Shuningdek, $x(t)$ va $y(t)$ uzluksiz va differensiallanuvchi funksiyalar deb faraz qilamiz. Albatta bu farazlar real holatning soddalashtirishi hisoblanadi. Vaqtning qisqa oraliqlarida tomonlar tarkibi o‘zgarishini juda kichik deb hisoblash mumkin.

Bu kelishuvlar $x(t)$ va $y(t)$ lar uchun aniq formulalar olish uchun yetarli bo‘lmasada, tomonlar soni o‘zgarish tezligini ifodalash uchun yetarli faktorbo‘lishi mumkin: $OLR - x$ tomonning harbiy harakatlarga bog‘liq bo‘lmagan yo‘qotishlar tezligini ifodalovchi kattalik, $CLR - x$ tomonning bevosita harbiy to‘qnashuvda yo‘qotishlar tezligi, $RR-x$ tomonga yetib keluvchi yordam tezligi. U holda $x(t)$ ning o‘zgarish umumiy tezligi

$$\frac{\boldsymbol{dx(t)}}{\boldsymbol{dt}} = -(\boldsymbol{OLR} + \boldsymbol{CLR}) + \boldsymbol{RR} \qquad (1)$$

tenglama bilan beriladi. $y(t)$ uchun ham shunga o‘xshash tenglama hosil qilinadi. Endi masala OLR, CLR va RR kattaliklar uchun mos tenglamalarni qo‘rsatish va qurilgan differensial tenglamalarni tadqiq etishdan iborat. Olingan natijalar esa g‘olib haqida xulosa chiqarishga yordam beradi.

Lanchester harbiy harakatlarining 3 modeli. Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

a, b, c, g, h – tomonlar soniga turli faktorlar ta’siri darajasini xarakterlovchi nomanfiy o‘zgarmaslar; $p(t)$ va $q(t)$ – kun davomida raqib tomonlarga qo‘shimcha kuchlar kelishi imkoniyatini hisobga oluvchi hadlar; x_0, y_0 – harbiy harakatlar boshlanishidan oldin tomonlar soni. Endi yuqorida aytib o‘tilgan uch modelni yozib chiqamiz:

A) $\begin{cases} dx(t)/dt = -ax(t) - by(t) + p(t) \\ dy(t)/dt = -cx(t) - dy(t) + q(t) \end{cases}$ regulyar armiyalar o‘rtasida harbiy harakatlari uchun

B) $\begin{cases} dx(t)/dt = -ax(t) - gx(t) + y(t) + p(t) \\ dy(t)/dt = -ax(t) - hx(t) + y(t) + q(t) \end{cases}$ partizan otryadlari o‘rtasidagi harakatlari uchun

S) $\begin{cases} dx(t)/dt = -ax(t) - gx(t)y(t) + p(t) \\ dy(t)/dt = -cx(t) - dy(t) + q(t) \end{cases}$ aralash tipli harakatlar modeli

Har bir sistema tomonlar soni o‘zgarishini ifodalaydi va (1) ko‘rinishga ega. Harbiy harakatlarga bog‘liq bo‘lmagan yo‘qotishlar hadlari ($-ax(t)$ va $-dy(t)$ lar) bu yo‘qotish nisbiy tezligi o‘zgarmaslarini topish imkonini beradi:

$$a = -\frac{1}{x}\frac{dx}{dt}, \qquad d = -\frac{1}{y}\frac{dy}{dt}.$$

Lanchester modellarida $-by(t)$, $-cx(t)$, $-gx(t)y(t)$ va $-hx(t)y(t)$ hadlar harbiy harakatlar mavjudligini bildiradi.

(A) sistemada har bir tomon raqib tomon harbiy qurol vositalari ta’sir doirasida joylashgan hamda faqat jonli kuchlarda talofat yetkaziladi deb hisoblaymiz.

U holda $b = -\frac{1}{y}\frac{dx}{dt}$ koeffisiyent u tomonning harbiy harakatlari samaradorligini, $-by(t)$ had esa x tomonning harbiy yo‘qotishlarini anglatadi. Xuddi shunday $-cx(t)$ hadga izoh bermi mumkin. Bu b, c koeffisentlarni topish uchun ularni

$$b = r_y p_y,\ c = r_x p_x, \tag{2}$$

ko‘rinishda qaraymiz, bu yerda r_y va $r_x - y$ va x tomonlarining harbiy qudrati, p_y va p_x - tomonlarining aniq nishonga tegish ehtimolligi.

Lanchester harbiy harakatlari modellari tahlili. Endi har bir differensial modelga to‘xtalib o‘tamiz.

A) *Kvadratik qonun*. Faraz qilamiz, doimiy armiyada harbiy harakatlarning bog‘liq bo‘lmagan yo‘qotishlar yo‘q va ular yordam kuchlari olmasin. U holda A) sistema matematik modeli

$$\frac{dx}{dt} = -by, \qquad \frac{dy}{dt} = -cx \tag{3}$$

ko‘rinishiga keladi. 2-tenglamani 1-tenglamaga bo‘lib

$$\frac{dy}{dx} = \frac{cx}{by} \tag{4}$$

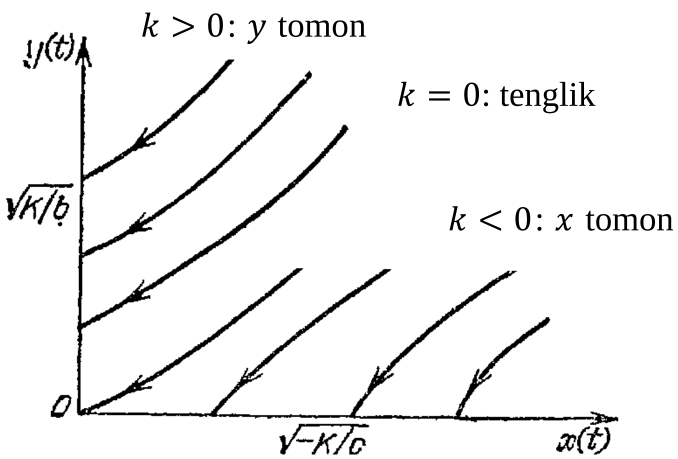
tenglamani olamiz. (4) tenglamani integrallaymiz va

$$b[y^2(t) - y_0^2] = c[x^2(t) - x_0^2] \tag{5}$$

tenglamaga kelamiz. (5) munosabat (3) sistema nima uchun kvadratik qonunli modelga mos kelishini tushuntiradi. Agar $by_0^2 - cx_0^2 = K(const)$ kabi belgilasak, (5) dan kelib chiquvchi

$$by^2 - cx^2 = K \tag{6}$$

tenglama giperbolani aniqlaydi ($k = 0$ da to‘g‘ri chiziqlar juftligi) va biz (3) sistemani aniqroq klassifikasiyalashimiz mumkin.



Soddalik uchun faqat 1-kvadrant $(x \geq 0, y \geq 0)$ qaralmoqda. Egri chiziqlardagi yo‘nalish strelkalari vaqt o‘tishi bilanqo‘shin soni o‘zgarish yo‘nalishini bildiradi.

Agar $k > 0$ bo‘lsa y tomon g‘olib bo‘ladi, (6) ga ko‘ra $\boldsymbol{u}$ o‘zgaruvchi nolga aylanishi mumkin emas, $y(t) = \sqrt{k/b}$ qiymatda $x = 0$ bo‘ladi. Shunday qilib, y tomon g‘olib bo‘lishi uchun ular $k > 0$, ya’ni

$$by_0^2 > cx_0^2 \tag{7}$$

bo‘ladigan holatga intilish kerak. (2) formulaga ko‘ra (7) ni quyidagicha yozib olish mumkin:

$$\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^2 > \frac{c}{b} = \frac{r_x p_x}{r_y p_y}.$$

Bundan ko‘rinadiki, y_0/x_0 kuchlar nisbatining o‘zgarishi tomonlardan biriga kvadratik qonuniga mos ustunlik beradi. (6) formula tomonlar kuchlar nisbatini vaqtga bog‘liqsiz ravishda aniqlaydi. Vaqtni hisobga oluvchi formulani keltirib chiqaramiz. (3) sistemaning 1-tenglamasini t bo‘yicha differesiallaymiz. 2-tenglamadan foydalansak,

$$\frac{d^2x}{dt^2} - bcx = 0 \tag{9}$$

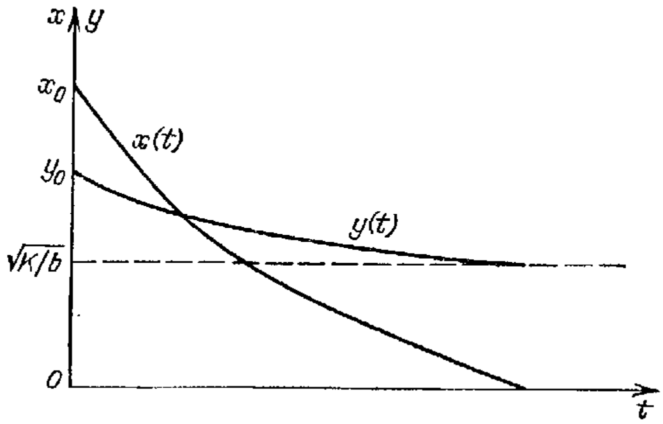
ga kelamiz. Endi $x(0) = x_0$, $x'(0) = -by_0$ boshlang‘ich shartlardan foydalanib, (9) ning yechimini olamiz:

$$x(t) = x_0 ch\beta t - \gamma y_0 sh\beta t, \tag{10}$$

bu yerda$\beta = \sqrt{bc}, \gamma = \sqrt{b/c}$. Xuddi shunga o‘xshash

$$y(t) = y_0 ch\beta t - \frac{x_0}{\gamma} sh\beta t \quad (11)$$

Quyidagi rasmda (10) va (11) funksiya grafiklari $k > 0$ (ya'ni $by_0^2 > cx_0^2$ yoki $\gamma y_0 > x_0$ da) holda tasvirlangan:



Shuni ham ta'kidlash kerakki, y tomonning g'olib bo'lishi uchun $y_0 > x_0$ bo'lishi shart emas, balki $\gamma y_0 > x_0$ shart bajarilishi talab etildi xolos.

V). *Chiziqli qonun*. Bunda ham yuqoridagidek shartlar qo'yilgan bo'lsa, (*V*) sistema

$$\frac{dx}{dt} = -gxy, \frac{dy}{dt} = -hxy \quad (12)$$

ko'rinishga keladi. Bu sistemadagi 2-tenglamani 1-tenglamaga bo'lib, quyidagi sodda tenglamaga kelamiz:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{h}{y}.$$

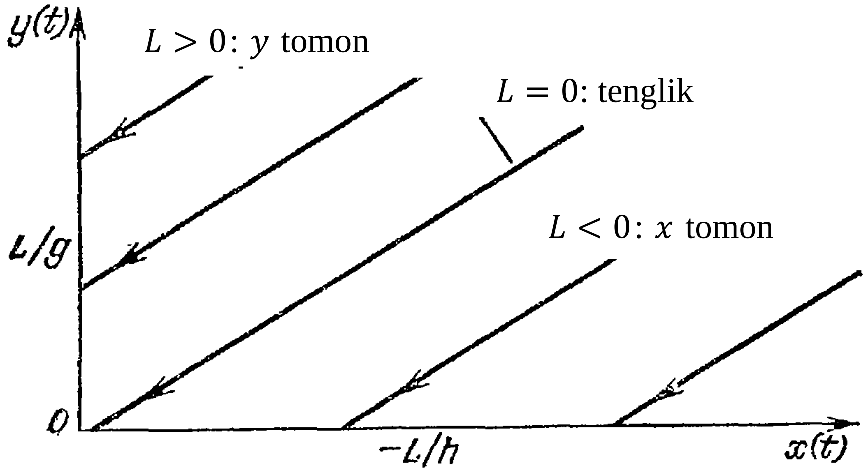
Uni integrallasak,

$$g[y(t) - y_0] = h[x(t) - x_0] \quad (13)$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu (13) tenglikni

$$gy - hx = L \quad (14)$$

ko'rinishda yozib olish mumkin, bu yerda $L = gy_0 - hx_0$. Bundan agar $L > 0$ bo'lsa, y tomon g'olib bo'lishi kelib chiqadi. Quyidagi rasmda L ning turli qiymatlarida (14) chiziqli funksional bog'liqlikning geometrik talqini tasvirlangan:



S). *Parabolik qonun*. Bunda ham yuqoridagi kabi shartlarda partizan kuchlari doimiy armiyaga qarshi jang olib bormoqda deb hisoblaylik. Bu holda quyidagi sistemaga ega bo‘lamiz.

$$\frac{dx}{dt} = -gxy, \frac{dy}{dt} = -cx, \tag{15}$$

bu yerda $x(t)$ partizan kuchlari, $y(t)$ doimiy armiya kuchlari. (15) sistema 2-tenglamasini 1-siga bo‘lib,

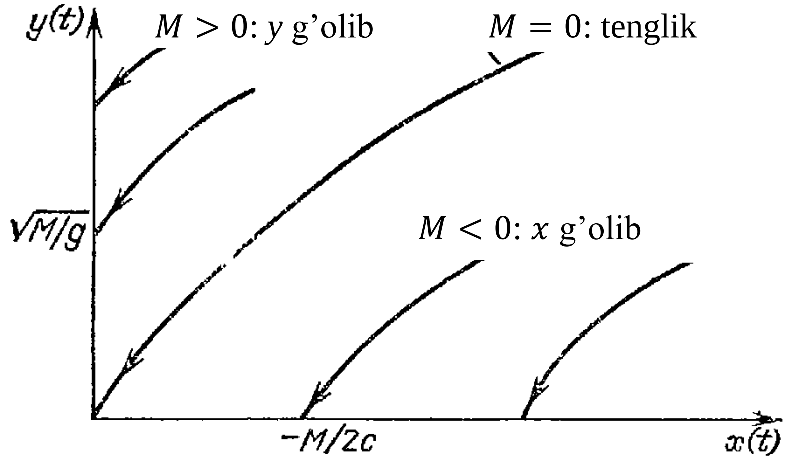
$$\frac{dy}{dx} = \frac{c}{gy}$$

tenglamani olamiz. Uni integrallab, quyidagi

$$gy^2(t) = 2cx(t) + M \tag{16}$$

munosabatni olamiz, bu yerda $M = gy_0^2 - 2cx_0$.

Shunday qilib, (15) differensial sistema parabolik qonunga bo‘ysunuvchi modelga mos keladi. Agar $M < 0$ bo‘lsa partizanlar g‘olib chiqadi, aks holda mag‘lubiyatga uchraydi. Quyidagi rasmda M ning turli qiymatlarida (16) tenglama bilan aniqlanuvchi parabolalar tasvirlangan.



Tajribalar shuni koʻrsatadiki, regulyar armiya gʻolib boʻlishi uchun $\frac{y_0}{x_0}$ nisbat 1 dan katta boʻlishi kerak.

Harbiy harakatlar olib borishning parabolik qonuniga asoslanib, $M > 0$ shartni e'tiborga olgan holda

$$\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^2 > \frac{2c}{g} \cdot \frac{1}{x_0}$$

shart bajarilsa, regulyar armiya muvaffaqiyati kafolatlanadi degan xulosaga kelamiz.

2. Biologik modellar

“Yirtqich-oʻlja” sistemasining oʻzaro munosabat modeli. Bu qralayotgan sistemadagi munosabatlar “raqobat” boʻlmasdan, aslida bu “raqobat” oʻljalar sonining oʻzgarishida ifodalandi, bu oʻzgarish esa yirtqichlar soniga ham ta'sir koʻrsatadi. Haqiqatdan ham, hech bir organizim (yoki populyatsiya) ajratilgan holda yashay olmaydi, u atrof – muhit bilan muloqotda boʻladi. Oʻzaro ta'sirlashuvning eng koʻp tarqalgan turi – bir turdagi organizimlar (hayvonlar, qushlar, baliqlar, hashorotlar) tomonidan boshqa organizimlarni ozuqa sifatida foydalanishidir.

Eng sodda holda, ya'ni ikki turdan iborat “yirtqich – oʻlja”sistemasi matematik modeli quyidagi farazlarga asoslanadi:

1) o‘lja populyatsiya soni N va yirtqich populyatsiya soni Mfaqatgina vaqtga bog‘liq (demak, bu model populyatsiyaning o‘zi egallab turgan hududga fazoviy taqsimotini e’tiborga olmaydigan model ekan);
2) o‘zaro tasirlashuvlar bo‘lmaganda turlarning o‘zgarishi Mal’tus modeli bo‘yicha amalga oshadi, bunda o‘ljalar soni ortadi, yirtqichlar soni esa ozuqa bo‘lmagani sabab kamaya boradi:

$$\frac{dN}{dt} = \alpha N, \frac{dM}{dt} = -\alpha M, \alpha > 0, \beta > 0;$$

3) o‘ljalar tabiiy kamayishi va yirtqichlar tabiy ko‘payishi joiz deb hisoblanmaydi;
4) har ikkala populyatsiya soninig to‘yinganlik effekti hisobga olinmaydi;
5) O‘ljalar sonining o‘sish tezligi yirtqichlar soniga, ya’ni $cM, c > 0$ kattalikka proporsional ravishda kamayadi, yirtqichlar soni o‘sishi tezligi o‘ljalar soniga, ya’ni $dN, d > 0$ kattalikka proporsional ravishda o‘sadi.

Yuqoridagilarni birlashtirib Lotki–Vol’terra tenglamalar sistemasiga (Lotki–Vol’terra modeliga) kelamiz:

$$\left\{\frac{dN}{dt}(\alpha - cM)N; \frac{dM}{dt}(-\beta + dN)M\right\} \qquad (1)$$

va undan $N(t = 0) = N(0), M(t = 0) = M(0)$ boshlang‘ich shartlar yordamida ixtiyoriy $t > 0$ vaqtdagi populyatsiya soni topiladi (bu model Vol’terra tomonidan Adristika dengizida bir xil davrli, ammo turli fazali baliq ovi tebranishlarini tadqiq etish maqsadida yaratilgan).

Chiziqsiz bo lgan bu modelni N, M o‘zgaruvchilar tekisligida tadqiq qilish qulay, buning uchun birinchi tenglamani ikkinchisiga bo‘lamiz:

$$\frac{dN}{dM} = \frac{(\alpha - cM)N}{(-\beta + dN)M} \qquad (2)$$

(1), (2) tenglama muvozanat holatiga (ya’ni statsionar, vaqtga bog‘liq bo‘lmagan yechimga) ega

$$M_0 = \frac{\alpha}{c}, N_0 = \frac{\beta}{d} \qquad (3)$$

Bu muvozanat holati turg‘unligi masalasini qaraymiz. Buning mazmuni quyidagicha. Agar boshlang‘ich populyatsiya soni (3) qiymatlarga teng bo‘lsa, vaqt o‘tishi bilan u qanday o‘zgaradi? Agar qandaydir sabablarga ko‘ra populyatsiya soni M_0, N_0 qiymatlardan biroz og‘ishgan bo‘lsa, sistema muvozanat holatiga keladimi? Va nihoyat, agar $N(0), M(0)$ boshlang‘ich qiymatlar muvozanat qiymatlardan sezilarli farq qilsa, vaqt o‘tishi bilan ular M_0, N_0 kattaliklarga nisbatan qanday o‘zgaradi?

$N(t), M(t)$ funksiyalarning vaqt dinamikasini tushinish uchun (2) tenglama shaklini o‘zgartiramiz:

$$dN(-\beta + dN)M = dM(\alpha + cM)N,$$

hosil bo‘lgan tenglikning ikkala qismini NM kattalikga bo‘lamiz va barcha hadlarini tenglamaning chap tomoniga o‘tkazamiz:

$$\beta \frac{dN}{N} - d(dN) + \alpha \frac{dM}{M} - cdM = 0. \tag{4}$$

(4) tenglamani integrallab,

$$\beta \ln N - dN + \alpha \ln M - cM = const$$

munosabatlarni olamiz, bu yerda o‘zgarmas son $N(0)$ va $M(0)$ boshlang‘ich qiymatlar orqali aniqlanadi. Boshqacha qilib aytganda, (2) tenglama yoki (1) sistema

$$\ln N^{\beta} + e^{-dN} + \ln M^{\alpha} + \ln e^{-cM} = C$$

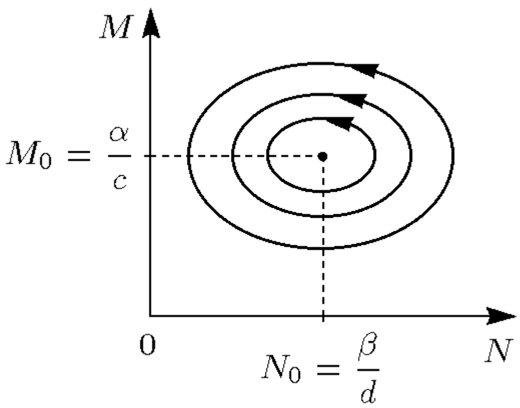
ko‘rinishidagi integralga yechimga ega.

Oxirgi tenglamani potensirlab (logarifmini yo‘qotib)

$$N^{\beta} e^{-dN} = C_1 M^{-\alpha} e^{cM}, C_1 > 0 \tag{5}$$

integralni hosil qilamiz.

(5) yechimning mavjudligi qo‘yilgan savollarga javob berish imkonini beradi (1-rasmda (1) sistema faza trayektoriyalari tasvirlangan; strelkalar bilan vaqt mobaynida trayektoriya bo‘ylab harakat yo‘nalishi ko‘rsatilgan):

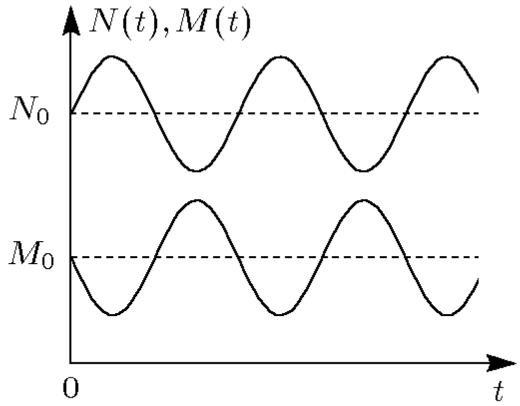


1

1. agar $N(0) = N_0, M(0) = M_0$ bo‘lsa, butun davr mobaynida populyatsiya soni o‘zgarishsiz qoladi ;

2. yirtqich va o‘lja populyatsiyasining muvozanat holatidan kichik o‘zgatishdan so‘ng vaqt mobaynida muvozanat hoatlariga qaytmaydi;
3. agar muvozanat holatidan o‘zgarish katta bo‘lsa, $N(t), M(t)$ funksiyalarning holatlari xuddi b) holatdagi kabi bo‘ladi.

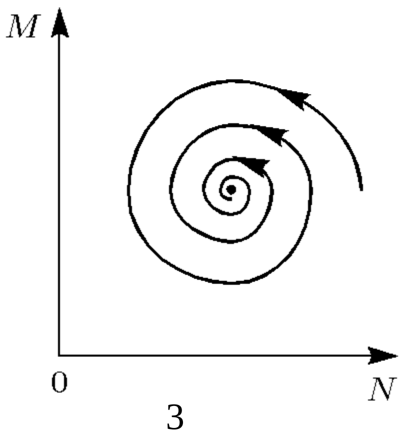
Bu xulosalar yirtqich va o‘lja populyatsiyalar soni muvozanat holati atrofida davriy tebranishini anglatadi (ya’ni yirtqich populyatsiya soni ozuqa manbai yetarli bo‘lganda ortadi, biroq vaqt o‘tishi bilan yirtqichlar populyatsiysi kamayib boradi. Bu esa yana o‘z navbatida o‘ljalar populyatsiysi soni ortishiga olib keladi va shu taxminiy sikl takrorlanadi). Tebranishlar amplitudasi va davri $N(0), M(0)$ boshlang‘ich qiymatlar bilan aniqlanadi, ular faza bo‘yicha yuz bermaydi: $N(t)$ ning maksimal qiymatiga $M(t)$ ning o‘rta qiymati mos keladi va aksincha (2-rasm).



2

Tebranishlar (ularning mazmuni tushunarli, ular real tabiatda ham uchrab turadi) ikki turli populyatsiya sistemalarida bir turli sistemalarga qaraganda murakkabroq jarayonlarning paydo bo‘lishini ta’minlaydi (chiziqli Maltus modeli va logistik modellar bilan taqqoslang).

Yanada aniq matematik modellar ikki turli sistemalar o‘zaro ta’sirlashuvlarida populyatsiya sonining o‘zlari egallab turgan hududlarida notekis taqsimotlari (ularga xususiy hosilali tenglamalar sistemalari mos keladi), individlar tug‘ulishi va voyaga yetishi o‘rtasidagi kechikishlari va h.k. lar inobatga olinadi. Ham vaqt bo‘yicha, ham fazo bo‘yicha o‘zaro tasirlashuv jarayoni yuzaga keladi. Masalan, o‘lja populyatsiya uchun to‘yinganlik e’tiborga olinsa (1) ning birinchi tenglamasida



3

$$\frac{dN}{dt} = (\alpha - cM - cN)N \quad (6)$$

had paydo bo‘ladi. Bu holda fazo yo‘nalishlari spiral shaklida bo‘ladi (3-rasm), ular vaqt o‘tishi bilan muvozanat holatiga intiladi, tebranish amplitudasi esa kamaya boradi.

V. GLOSSARIY

Model – (lot. “Modulus” – o’lchov, me’yor) – biror obyekt yoki obyektlar tizimining obrazi yoki namunasidir.

Modellashtirish – bilish obyektlarini ularning modellari yordamida tadqiq qilish, mavjud predmet va hodisalarning modellarini yasash va o’rganishdir.

Fizik model – tekshirilayotgan jarayonning tabiati va geometrik tuzilishi asl nusxadagidek, ammo undan miqdor (o’lchami, tezligi, ko’lami) jihatidan farq qiladigan modellar**.**

Fizik-kimyoviy modellar – biologik tuzilish, funksiya yoki jarayonlarni fizik yoki kimyoviy vositalar bilan qaytadan hosil qilishdir.

Matematik modellar – Tadqiq qilinayotgan obyektni matematik formula yoki algoritm ko’rinishida ifodalangan xarakteristikalari orasidagi funksional bog’lanish.

Biologik model – turli tirik obyektlar va ularning qismlari-molekula, hujayra, organizm va shu kabilarga xos biologik tuzilish, funksiya va jarayonlarni modellashda qo’llaniladi.

Model qurish – qandaydir berilgan “nomatematik” obyekt jarayonlarining asosiy qismlari yoki xossalarini bog’lovchi qonunlar.

Matematik masalani yechish – qurilgan matematik model keltirib chiqargan matematik masalalarni yechish.

Natijalarni interpretasiyalash – matematik modeldan kelib chiqqan natijalarni masala qaralayotgan soha tiliga o’tkazish.

Model adekvatligini tekshirish –modeldan olingan nazariy natijalar bilan tadqiq qilinayotgan obyektni kuzatish natijalari mos kelishi masalasi qaraladi.

Modelni modifikasiyalash – o’rganilayotgan obyekt jarayonlar haqidagi ma’lumotlarni jamlash orqali modelning navbatdagi tahlilini o’tkazish va uni rivojlantirish, aniqlashtirish.

Analitik model – obyektning bitta yoki bir qancha hodisalarini analitik ifodalar ko’rinishida yozilgan matematik modeldir.

Imitatsion model – obyektning vaqt mobaynida o’zgarib turadigan tashqi ta’sirlardagi xarakterini aks ettiruvchi matematik model.

Imitasiya – so’zi tarjimada o’xshatmoq ma’nosini beradi.

Iyerarxiya – soddadan murakkabga.

Issiqlik energiyasi – atom yoki modda molekulasining xaotik harakati energiyasi.

Issiqlik oqimi – berilgan nuqtada joylashgan zarrachalarni vaqt birligida sirt birligi orqali tashib o’tilgan issiqlik miqdori.

Epidemiya – yuqumli kasalliklar.

maqsad funksiyasi – tadqiq qilinayotgan ob'ektning modeli bo'lgan maksimal qiymat qabul qilishi kerak bo'lgan chiziqli fuknsiya.

TEST

1. Matematik model nima?
   A. O'rganilayotgan jarayonlarni algebraik, differensial yoki integral tenglamalar ko'rinishidagi taqribiy ifodasi;
   B. Real jarayonlarni matematik usullar vositasida tadqiq qilish usuli
   C. O'rganilayotgan jarayonlarni differensial tenglamalar ko'rinishidagi taqribiy ifodasi
   D. Real jarayonlarni hisoblash matematikasi vositasida tadqiq qilish usuli
2. Empirik formula nima?
   A. Tajriba natijalari asosida qurilgan analitik bog'lanishlar
   B. Funksiya hosilasi qatnashgan analitik formula
   C. Interpolyasiyalash natijasida qurilgan va funksiya hosilasi qatnashgan analitik formula
   D. To'g'ri javoblar keltirilmagan

3. Yonish jarayonini matematik modelida ishtirok etuvchi tenglamani ko'rsating

A. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(k(T)\dfrac{\partial T}{\partial x}\right) + Q(T)$

B. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(k(T)\dfrac{\partial T}{\partial x}\right)$

C. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}$

D. $\dfrac{\partial^2 T}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}$

4. Chegaraviy masala nima?

A. Integrallash oralig'ini boshi va oxirida noma'lum funksiyaning chiziqli munosabati bilan berilgan differensial tenglama (tenglamalar sistemasi).

B. Boshlangich vaktda noma'lum funksiyaning kiymati berilgan differensial tenglama (tenglamalar sistemasi)

C. Differensial tenglamaga nisbatan berilgan Koshi masalasi

D. Ayirmali tenglamaga nisbatan berilgan Koshi masalasi

5. Ma'lumotlarni tahlil qilish va qayta ishlashda y va x o'zgaruvchilar orasidagi bog'lanish $y = f(x, \theta_1, \theta_2)$ (θ_1 , θ_2 , – parametrlar) funksiya vositasida ifodalanadi. Eng kichik kvadratlar usulini qo'llash jarayonida tajribaviy qiymatlarning tavsiflanish sifati o'lchovi (funksiyasi) ...

A. minimallashtiriladi

B. maksimallashtiriladi

C. uchun $\theta_1, \theta_2 \to \infty$ bo'lganda, limitik qiymat aniqlanadi

D. mumkin bo'lgan qiymatlar sohasi aniqlanadi

6. ... – bu real obyektni almashtirishi mumkin bo'lgan, tadqiqot va tajriba o'tkazish uchun qulay va arzon bo'lgan boshqa bir obyektdir

A. Model

B. eksperiment

C. maket

D. qurilma

7. ... – real obyektni tasavurimizdagi abstrakt ko'rinishi bo'lib, u matematik belgilar va ba'zi bir qonun – qoydalar bilan ifodalangan bo'ladi

A. Matematik model

B. Maket

C. Qurilma

D. Eksperiment

8. Matematik modelga qo'yiladigan asosiy talablarni ko'rsating.

A. Keltirilgan talablarning barchasi

B. Universallik, kompaktlik

C. Soddalik

D. Past sezgirlik darajasi

9. Matematik modelni qurish bosqichlarini ko'rsating.

A. Keltirilganlarning barchasi

B. Obektni o'rganish. Yigilgan ma'lumotlarni sistemalashtirish

C. Yig'ilgan ma'lumotlar asosida obyekt buysunadigan qonun yoki qonuniyatlar tanlash

D. Obyektni taklif etilayotgan matematik modelini "jihozlash"

10. Matematik modellashtirish nimadan boshlanadi?

A. Modellashtirish jarayoni obyektni formallashtirishdan boshlanadi.

B. Matematik modellashtirish modellashtirish vositalarini tanlashdan boshlanadi

C. Modellashtirish jarayoni dasturlar ishlab chiqishdan boshlanadi

D. To'gri javoblar keltirilmagan

11. Matematik fizika masalalariga nisbatan necha turdagi chegaraviy shartlar beriladi?

A. Uch turdagi chegaraviy shartlar beriladi

B. Ikki turdagi chegaraviy shartlar beriladi

C. Bir turdagi chegaraviy shartlar beriladi

D. Chegaraviy shartlar turlarga ajratilmaydi

12. Birichi tur chegaraviy shart degani nima?

A. Chegaralarda noma’lum funksiyaning kiymatlari berilgan shartlar
B. Chegaralarda noma’lum funksiya va uning xosilasining chizikli kombinasiyasi berilgan shartlar
C. Chegaralarda noma’lum funksiya xosilasining chizikli kombinasiyasi berilgan shartlar
D. Bu yerda keltirilmagan shartlar

13. Ma’lumotlarni tahlil qilish va qayta ishlashda y va x o’zgaruvchilar orasidagi bog’lanish $y = f(x, \theta_1, \theta_2)$ (θ_1 , θ_2 , – parametrlar) funksiya vositasida ifodalanadi. Eng kichik kvadratlar usulini qo’llash jarayonida $y_i - f(x_i, \theta_1, \theta_2)$ ayirma nima deb ataladi?

A. Qoldiq.
B. Tajribaning orttirmasi.
C. Tajribaning limitik qiymati
D. Sifat.

14. Matematik modellarni tuzishda parametrlar orasidagi bog’lanishni ifodalovchi munosabatlarni ko’rinishini ko’rsating?

A. Keltirilgan barcha shakllarda
B. Faqat algebraik shakl.
C. Faqat integral shakl.
D. Faqat differensial shakl.

15. O’rganilayotgan obyektning tadqiqotchining xayolida matematik munosabatlar vositasida hosil qilingan obrazi nima deb ataladi?

A. Matematik model
B. Fizik model
C. Kibernetik tizim
D. Xayoliy obyekt

16. Modellashtirishda tashqi muhitning tekshirilayotgan obyekt parametrlariga ta’sir qiluvchi ko’rsatkichlari nima deb ataladi?

A. faktorlar.
B. munosabatlar.
C. qoidalar
D. masalani yechish algoritmlari.

17. Issiqlik tarqalish jarayoni qanday jarayonga tegishli?

A. Stasionar, nostasionar jarayonlarga
B. Nostasionar jarayonlarga
C. Vaqt bo’yicha tez o’suvchi jarayonlarga
D. Stasionar jarayonlarga

18. Matematik model va uning real obyekti yaqinligi qanday baholanadi?

A. Qoldiq funksiyasi bilan
B. Trigonometrik funksiya bilan
C. Polinom bilan
D. Yo'qotish funksiyasi bilan

19. Murakkab sistemalarni tadqiq qilishda qanday metodlardan foydalaniladi?
A. Barchasi to'g'ri
B. Analitik
C.Sonli
D. Imitasion

20. Muxitda jismni sovushini modellashtirish qanday tenglama bilan ifodalanadi?
A. $\frac{dT}{at} = k(T - T_m)$, T_m-muxit temperaturasi, $k > 0$- proporsionallik koeffisiyenti
B. $\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)$,
C. $\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)$,
D. $\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

21. Hisoblash eksperimenti qaysi triadaga asoslangan?
A. Model-metod(algoritm)-dastur
B. Obyekt-algoritm-dastur
C. Metod-algoritm-dastur
D. Obyekt-metod-dastur

22. Modellashtirish – bu
A. real obyekt va vaziyatlarni samarali tekshirish va o'rganish usulidir
B. masalani rasmiylashtirish usulidir
C. masalani yechish algoritmini ishlab chiqish usulidir
D. kretirial baxolarni rasmiylashtirish jarayonidir

23. Matematik modellashtirish to'g'ri masalasining mohiyati nimadan iborat?
A. Modelda ishtirok etayotgan barcha parametrlarning qiymatlari ma'lum bo'lgani holda modelning tabiatini o'rganishdan iborat
B. Real obyekt va uning matematik modeli tabiatini solishtirgan holda modeldagi qandaydir parametrlarning noma'lum qiymatlarini aniqlashdan iborat
C. To'g'ri javob keltirilmagan
D. Matematik modelni qayta ko'rib chiqishdan iborat

24. Berilgan matematik model uchun sonli usulni qurish qaysi bosqichlardan iborat?

A. Diskret masalani shakllantirish, diskret masalani yechimini aniqlash imkonini beruvchi hisoblash algoritmini ishlab chiqishdan iborat
B. Diskret masalani shakllantirish, dastur tuzishdan iborat
C. Hisoblash algoritmini ishlab chiqishdan, dastur tuzishdan iborat
D. Integrallash, dastur tuzishdan iborat

25. Matematik modellashtirish nima?
A. Real obyekt yoki jarayonlarni matematik usullar vositasida nazariy tadqiq qilish usuli
B. To'g'ri javob keltirilmagan
C. Real obyekt yoki jarayonlarni matematik modelini qurish usuli
D. Real obyekt yoki jarayonlarni tajriba vositasida nazariy o'rganish usuli

26. Modlellashtirish nazariyasida obyekt deganda nima tushuniladi?
A. Tabiiy, sun'iy, real yoki xayoliy sistemalar
B. Xayoliy sistemalar
C. Kompyuternaya texnologiyalari
D. Real jarayonlar

27. Modlellashtirishning moxiyati nimadan iborat?
A. Obyektni boshqa soddaroq obyekt (model) bilan almashtirib, modelni xususiyatini tadqiq qilish orqali original obyektni o'rganishdan iborat
B. Modlellashtirish real sistemalarni fizik bilish jarayonidan iborat
C. To'g'ri javob keltirilmagan
D. Modlellashtirish fizik jarayonlarni o'rganishdan iborat

28. Qanday modellar differensial tenglamalar bilan ifodalanadi?
A. O'zluksiz-determinallashgan
B. O'zluksiz-stoxastik
C. O'zluksiz-chiziqli.
D. Chiziqli-stoxastik

29. Matematik modellar qanday matematik ifoda bilan ifodalanadi?
A. Keltirilganlarning barchasi bilan
B. Differensial tenglamalar bilan
C. Algebraik tenglama yoki tengsizliklar bilan
D. Integro-differensial tenglamalar bilan

30. Modellashtirishning maqsadi qanday amalga oshiriladi?
A. Modellashtirishning maqsadi ishlab chiqilgan modelni tadqiq qilish orqali amalga oshiriladi
B. Modellashtirishning maqsadi sistemani soddalashtirish orqali amalga oshiriladi

C. Modellashtirishning maqsadi modelni algoritmlashtirish orqali amalga oshiriladi
D. Modellashtirishning maqsadi modelni korrektlashtirish orqali amalga oshiriladi

31. Modellashtirish natijalari qanday maqsadlarda ishlatiladi?
A. Obyekt yoki sistemaning ishga yaroqliligi haqida qaror chiqarish uchun, eyeng yaxshi loyixaviy variantni tanlash uchun yoki obyekt yoki sistemani optimallashtirish uchun
B. Kompyuterdan foydalanishni kamaytirish uchun
C. Obyekt yoki sistemani boshqarish natijalarini tekshirish uchun
D. Sistema yoki obyektni matematik formallashtirish uchun

32. Modellarni adekvatlikka tekshirishni moxiyati nima?
A. Modelni real obyektga muvofiqligini tekshirish
B. Obyektning asosiy parametrl arini tekshirish
C. To'g'ri javob keltirilmagan.
D. Modelni tekshirish

33. Modellashtirish muammosi bilan qaysi ikki holda to'qnash kelamiz?
A. Bilish va boshqarish jarayonlarida
B. Bashorat qilish va tahlil qilish jarayonlarida
C. Kuzatish va algoritmlashtirish jarayonlarida
D. Ishlab chiqarish jarayonlari va hodisalarida

34. Matematik modellashtirish teskari masalasining mohiyati nimadan iborat?
A. Real obyekt va uning matematik modeli tabiatini solishtirgan holda modeldagi qandaydir parametrlarning noma'lum qiymatlarini aniqlashdan iborat
B. To'g'ri javob keltirilmagan
C. Modelda ishtirok etayotgan barcha parametrlarning qiymatlari ma'lum bo'lgani holda modelning tabiatini o'rganishdan iborat
D. Matematik modelni qayta ko'rib chiqishdan iborat

35. Model lotincha "modulus" so'zidan olinganligi ma'lum, u qanday ma'noni anglatadi?
A. barcha javoblar to'g'ri
B. o'lchov
C. namuna
D. me'yor

36. Modelni ta'rifini ko'rsating.
A. barcha javoblar to'g'ri
B. model – bu real obyektni almashtirishi mumkin bo'lgan, tadqiqot va tajriba o'tkazish uchun qulay va arzon bo'lgan boshqa bir abstrakt obyektdir

C. model real obyektning soddalashtirilgan ko'rinishi bo'lib, uning hamma xossalarini emas, balki asosiy xossalarinigina o'zida mujassam etgan boshqa bir real yoki abstrakt obyektdir
D. model – bu real obyektni almashtirishi mumkin bo'lgan, tadqiqot va tajriba o'tkazish uchun qulay va arzon bo'lgan boshqa bir real obyektdir

37. Hozirgi kunda fan olamida ma'lum bo'lgan ma'lumotlarni ko'rinishi va ma'nosiga qarab qanday turlarga bo'lish mumkin?
A. fizik, grafikli, matematik
B. grafikli, matematik
C. matematik, fizik
D. fizik, grafikli

38. Tajriba o'tkazishga mo'ljallangan tajriba uchastkalari, laboratoriya mashg'ulotlarini o'tkazishga mo'ljallangan asbob uskunalar qanday modellarga misol bo'ladi?
A. fizik
B. matematik
C. grafikli
D. to'g'ri javob yo'q

39. Sxemalar, chizmalar, rasmlar, ilmiy va tarixiy asarlar qanday modellarga misol bo'la oladi?
A. grafikli
B. matematik
C. fizik
D. to'g'ri javob yo'q

40. Nyuton qonunlari, saqlanish qonunlari qanday modellarga misol bo'la oladi?
A. matematik
B. fizik
C. to'g'ri javob yo'q
D. grafikli

41. ... model real obyektni tasavurimizdagi abstrakt ko'rinishi bo'lib, u matematik belgilar va ba'zi bir qonun–qoidalar bilan ifodalangan bo'ladi.
A. matematik
B. to'g'ri javob yo'q
C. fizik
D. grafikli

42. Masalaning yechilishi hususiyatlariga qarab matematik modellar qanday turlarga bo'linishi mumkin?
A. funksional modellar; strukturali modellar
B. strukturali modellar
C. funksional modellar
D. to'g'ri javob yo'q

43. Funksional modellarni mohiyati nimada?

A. barcha javoblar to'g'ri
B. funksional modellarda hodisa yoki obektni harakterlovchi barcha kattaliklar miqdoriy ifodalaniladi
C. funksional modellarda kattaliklarning ayrimlari erkli o'zgaruvchilar sifatida sifatida qaraladi
D. funksional modellarda kattaliklarning ayrimlari erkli o'zgaruvchilar sifatida, boshqalari esa shu miqdorlarning funksiyalari sifatida qaraladi

44. Matematik modellar quyida keltirilganlar-ning qaysi biri bilan ifodalanishi mumkin?

A. differensial, algebraik tenglamalar, tengsizliklar yoki ularning sistemasi ko'rinishida
B. differensial tenglamalar yoki tenglamalar sistemasi ko'rinishida
C. algebraik tenglamalar yoki tenglamalar sistemasi ko'rinishida
D. algebraik tengsizliklar yoki tengsizliklar sistemasi ko'rinishida

45. Strukturali modellarning mohiyati nimadan iborat?

A. keltirilganlarning barchasi to'g'ri
B. strukturali modellarda matematik model murakkab obektning strukturasini ifodalaydi
C. strukturali modellarda murakkab obyekt odatda turli qismlardan tuzilgan bo'lib, bu qismlar orasidagi bog'lanishlarni odatda miqdoriy ifodalab bo'lmaydi
D. strukturali modellarda murakkab obyekt odatda turli qismlardan tuzilgan bo'ladi

46. Matematik modeldagi berilganlar va bashoratlash natijalarining xarakteriga ko'ra modellar qanday turlarga ajratilishi mumkin?

A. deterministik, ehtimolli-statistik modellar
B. ehtimolli-statistik, algebraik modellar
C. deterministik modellar
D. differensial modellar

47. Deterministik modellar nima bilan xarakterlanadi?

A. deterministik modellarda aniq, bir qiymatli bashorat qilinadi
B. deterministik modellar statistik ma'lumotlarga asoslangan bo'lib, ular yordamidagi bashoratlar ehtimolli harakterda bo'ladi
C. deterministik modellarda aniq, bir qiymatli bashorat qilinmaydi
D. to'g'ri javob yo'q

48. Ehtimolli-statistik modellar nima bilan xarakterlanadi?

A. ehtimolli-statistik modellar statistik ma'lumotlarga asoslangan bo'lib, ular yordamidagi bashoratlar ehtimolli harakterda bo'ladi

B. ehtimolli-statistik modellarda aniq, bir qiymatli bashorat qilinadi
C. to’g’ri javob yo’q
D. ehtimolli-statistik modellarda aniq, bir qiymatli bashorat qilinmaydi

49. Matematik modelga qo’yiladigan asosiy talablarni ko’rsating.
A. universallik, kompaktlik, soddalik, past sezgirlik darajasiga ega bo’lishi, moslashish darajasi yuqori bo’lishi
B. universallik, past sezgirlik darajasiga ega bo’lishi, moslashish darajasi yuqori bo’lishi
C. kompaktlik, soddalik, past sezgirlik darajasiga ega bo’lishi, moslashish darajasi yuqori bo’lishi
D. universallik, kompaktlik, soddalik, moslashish darajasi yuqori bo’lishi

50. Matematik modelni qurishning asosiy bosqichlarini ko’rsating.
A. obyektni o’rganish, yig’ilgan ma’lumotlarni sistemalashtirish, yig’ilgan ma’lumotlar asosida obyekt bo’ysunadigan qonun yoki qonuniyatlar tanlash; obyektni taklif etilayotgan matematik modelini “jihozlash”, matematik model asosida diskret model qurish va diskret model asosida dastur tuzib, kompyuterda qo’yilgan matematik masalani yechish
B. obyektni o’rganish, yig’ilgan ma’lumotlar asosida obyekt bo’ysunadigan qonun yoki qonuniyatlar tanlash; obyektni taklif etilayotgan matematik modelini “jihozlash”, matematik model asosida diskret model qurish va diskret model asosida dastur tuzib, kompyuterda qo’yilgan matematik masalani yechish
C. obyektni o’rganish, yig’ilgan ma’lumotlar asosida obyekt bo’ysunadigan qonun yoki qonuniyatlar tanlash; obyektni taklif etilayotgan matematik modelini “jihozlash”, dastur tuzib, kompyuterda qo’yilgan matematik masalani yechish
D. to’g’ri javob yo’q

51. Matematik model va uning real obyekti orasidagi muvofiqlik deyilganda nima tushuniladi?
A. matematik model va uning real obyekti orasidagi muvofiqlik deyilganda obyekt va uning matematik modeli dinamikalarining sifat va miqdor jihatdan o’xshashligi va yaqinligi tushuniladi
B. matematik model va uning real obyekti orasidagi muvofiqlik deyilganda obyekt va uning matematik modeli dinamikalarining sifat jihatdan o’xshashligi va yaqinligi tushuniladi
C. to’g’ri javob yo’q
D. matematik model va uning real obyekti orasidagi muvofiqlik deyilganda obyekt va uning matematik modeli dinamikalarining miqdor jihatdan o’xshashligi va yaqinligi tushuniladi

52. Obyekt va uning matematik modeli dinamikalari orasida muvofiqlikni o'rnatishning usullarini ko'rsating.

A. keltirilganlarning barchasi to'g'ri
B. matematik modelda ishtirok etayotgan o'zgarmas kattaliklarni qaytadan baholash
C. matematik modelni yozishda qabul qilingan ishchi gipotezalarni qaytadan ko'rib chiqish
D. real obyekt haqida qo'shimcha ma'lumotlar yig'ish va yangi yig'ilgan ma'lumotlar asosida modelni qaytadan ko'rib chiqish

53. Agar $M_{\mathrm{I}}(0)$ va $M_{\mathrm{II}}(0)$ moddalarning boshlang'ich, $M_{\mathrm{I}}(t)$ va $M_{\mathrm{II}}(t)$ joriy massalari bo'lsa, $M_{\mathrm{I}}(0)+M_{II}(0)=M_{\mathrm{I}}(t)+M_{II}(t)$ formula nimani ifodalaydi?

A. moddalar massasining saqlanish qonunini
B. energiyani saqlanish qonuni
C. impulsni saqlanish qonuni
D. hyech nimani ifodalamaydi

54. Radiaktiv yemiriluvchi modda massasining vaqt bo'yicha o'zgarish qonunini ko'rsating.

A. $M_{\mathrm{I}}(t)=\mathrm{M}_{I}(0)e^{-\alpha t}$
B. $M_{\mathrm{I}}(t)=\mathrm{M}_{I}(0)e^{\alpha t}$
C. $M_{\mathrm{I}}(t)=\mathrm{M}_{I}(0)\left(e^{-\alpha t}+e^{\alpha t}\right)$
D. to'g'ri javob yo'q

55. Radiaktiv moddaning yemirilish tezligi qanday formula bilan ifodalanadi?

A. $\dfrac{\mathrm{dM}_{\mathrm{I}}(t)}{dt}=-\alpha M_{I}(t)$
B. $\dfrac{\mathrm{dM}_{\mathrm{I}}(t)}{dt}=\alpha M_{I}(t)$
C. to'g'ri javob yo'q
D. $\dfrac{\mathrm{dM}_{\mathrm{I}}(t)}{dt}=-\alpha M_{I}(0)$

56. Raketa harakati uchun impulsning saqlanish qonuni qanday ifodalanadi?

A. $m(t)v(t)=m(t+\Delta t)v(t+\Delta t)+[m(t)-m(t+\Delta t)][v(t+\Delta t)-u]$
B. to'g'ri javob yo'q
C. $m(t)v(t)=m(t+\Delta t)v(t+\Delta t)$
D. $m(t)v(t)=[m(t)-m(t+\Delta t)][v(t+\Delta t)-u]$

57. Raketa harakati uchun impulsning saqlanish qonuni qanday ifodalanadi?

A. $m\dfrac{dv}{dt}=-\dfrac{dm}{dt}u$

B. $\frac{dv}{dt} = -\frac{dm}{dt}u$

C. $m\frac{dv}{dt} = -u$

D. to'g'ri javob yo'q

58. Bir pog'onali raketaning tezligi qanday qonun asosida o'zgaradi?

A. $v(t) = v_0 + u\ln\left(\frac{m_0}{m(t)}\right)$

B. $v(t) = v_0 + u\ln(m(t))$

C. to'g'ri javob yo'q

D. $v(t) = v_0 + \ln\left(\frac{m_0}{m(t)}\right)$

59. Bir pog'onali raketalardan nega foydalanilmaydi?

A. raketalarning tezligi kichik bo'lganligi sababli, ya'ni bu raketalar hattoki birinchi kosmik tezlikka ham erisha olmasligi sababli

B. bunday raketalarning massalari nisbatan kichik bo'lganligi sababli

C. raketalarning konstruksiyasi sodda bo'lganligi sababli

D. raketalarning konstruksiyasi murakkab bo'lganligi sababli

60. Iyerarxiya prinsipidan foydalanib, matematik modellar qurilganda hosil bo'lgan modellar qanday xususiyatlarga ega bo'ladi?

A. keltirilganlarning barchasi to'g'ri

B. har biri oldingi modellarni umumlashtiruvchi va ularni o'zining xususiy holi sifatida o'ziga biriktirib oluvchi nisbatan to'la modellar zanjiri (iyerarxiyasi) hosil bo'ladi

C. keyingilari oldingilarini o'z ichiga olgan, ya'ni oldingi modellar keyingi modellarning xususiy holi bo'lgan nisbatan to'liq bo'lgan modellar zanjiri hosil bo'ladi

D. nisbatan to'la modellar zanjiri (iyerarxiyasi) hosil bo'ladi

61. $m_0 = m_p + m_1 + m_2 + m_3$ ifoda nimani anglatadi?

A. uch pog'onali raketaning boshlang'ich massasini

B. murakkab konstruksiyali raketaning boshlang'ich massasini

C. raketaning struktura massasini

D. raketaning yoqilg'i massasini

62. Ko'p pog'onali raketalarda λm_i – i-chi pog'onaga mos keluvchi struktura massasi bo'lsa, $(1-\lambda)m_i$ ifoda nimani anglatadi?

A. i-chi pog'onaga mos keluvchi yoqilg'i massasi

B. *i*-chi pog’onaga mos keluvchi foydali yuk massasi
C. *i*-chi pog’onaga mos keluvchi struktura foydali yuk massasi
D. to’g’ri javob yo’q

63. Uch pog’onali raketalar uchun $m_p + \lambda m_1 + m_2 + m_3$ ifoda nimani anglatadi?
A. raketa birinchi pog’onasining yoqilg’isi sarf bo’lgandagi raketaning tezligi
B. $v_1 = u \ln\left(\frac{m_0}{m_p + \lambda m_1 + m_2 + m_3} \right)$ ga teng bo’lgandagi massasi
C. ikkinchi pog’onaning boshlang’ich massasi
D. hyech narsani anglatmaydi

64. Uch pog’onali raketalar uchun $v_2 = v_1 + u \ln\left(\frac{m_p + m_2 + m_3}{m_p + \lambda m_2 + m_3} \right)$ ifoda nimani anglatadi?
A. ikkinchi pog’onadagi yoqilg’i yonib tugagandan keyingi, ya’ni, raketaning uchinchi pog’onasi ishga tushgandagi boshlang’ich tezligini
B. ikkinchi pog’onadagi yoqilg’i yonib tugagandan keyingi raketaning tezligini
C. raketaning uchinchi pog’onasi ishga tushgandagi boshlang’ich tezligini
D. to’g’ri javob yo’q

65. Uch pog’onali raketalar uchun boshlang’ich massani foydali yuk massasiga nisbati nimaga teng?
A. $\frac{m_0}{m_p} = \frac{(1-\lambda)^3}{(P-\lambda)^3}$
B. $\frac{m_0}{m_p} = \frac{(1-\lambda)}{(P-\lambda)}$
C. $\frac{m_0}{m_p} = \frac{(1-\lambda)^2}{(P-\lambda)^2}$
D. $\frac{m_0}{m_p} = \frac{(1-\lambda)^4}{(P-\lambda)^4}$

66. Nega kosmanavtikada ikki va to’rt pog’onali raketalardan foydalanilmasdan uch pog’onali raketadan foydalaniladi?
A. keltirilganlarning barchasi to’g’ri
B. ikki pog’onali raketa foydali massani orbitaga chiqarishga layoqatlidir, ammo bir tonnalik foydali yuk uchun raketa massasi 149 tonna bo’lishi talab etiladi
C. uch pog’onadan foydalanish raketa massasini deyarli ikki martaga kamaytiradi, ammo uning strukturasini ikki pog’onali raketaga nisbatan murakablashtiradi

D. to’rt pog’onali raketa esa uch pog’onaliga nisbatan sezilarli yutuqni bermasa-da, raketaning strukturasini uch pog’onali raketaga nisbatan ancha murakablashtiradi

67. Iyerarxiya prinsipidan foydalanib matematik modellar qurish qanday tamoyillarga asoslanadi?

A. «soddadan-murakkablikka qarab» yoki «murakkablikdan soddalikka qarab» tamoyiliga
B. «soddadan-murakkablikka qarab» tamoyiliga
C. «murakkablikdan soddalikka qarab» tamoyiliga
D. to’g’ri javob yo’q

68. Maltus modeli quyidagilardan qaysi biri bilan ifodalanadi?

A. $\frac{\mathrm{dN}}{\mathrm{dt}} = (\alpha - \beta)N$
B. $\frac{\mathrm{dN}}{\mathrm{dt}} = (\alpha - \beta \mathrm{N})N$
C. $\frac{\mathrm{dN}}{\mathrm{dt}} = (\alpha - \beta)N^2$
D. $\frac{\mathrm{dN}}{\mathrm{dt}} = (\alpha - \beta)N^3$

69. Quyidagi ifodalardan qaysi biri Maltus modelining yechimini ifodalaydi?

A. $N = N_0 e^{(\alpha-\beta)t}$
B. $N = N_0 e^{(\alpha+\beta)t}$
C. $N = N_0 \sqrt{e^{(\alpha-\beta)t}}$
D. $N = N_0 e^{(\alpha/\beta)t}$

70. Maltus modeli asosida populyasiya sonining vaqt bo’yicha o’zgarishi qanday bo’ladi?

A. keltirilganlarning barchasi to’g’ri
B. agar o’limlar soni tug’ilishlarga qaraganda ko’proq bo’lsa, u holda Maltus modeli populyasiya sonining eksponensial ravishda kamayishiga ishora qiladi
C. tug’ilishlar va o’limlar soni o’zaro teng bo’lsa, Maltus modelining ko’rsatishicha, populyasiya soni butun vaqt oralig’ida o’zgarmasdan qoladi
D. agar tug’ilishlar soni o’limlar soniga nisbatan ko’p bo’lsa, u holda Maltus modeli populyasiya sonining eksponensial ravishda o’sishiga ishora qiladi

71. Maltus modelini qaysi hollarda qo’llash mumkin?

A. hayotni ta’minlovchi resurslarga cheklanishlar bo’lmagan hollarda
B. populyasiya soni muhit sig’imiga yaqinlashganda
C. to’g’ri javob yo’q

D. populyasiya soni muhit sig'imiga yaqinlashmaganda

72. Ferxyulst-Perl modeli quyidagilardan qaysi biri bilan ifodalanadi?

A. $\frac{\mathrm{dN}}{\mathrm{dt}} = (\alpha - \beta \mathrm{N})N$

B. $\frac{\mathrm{dN}}{\mathrm{dt}} = (\alpha - \beta)N$

C. $\frac{\mathrm{dN}}{\mathrm{dt}} = (\alpha - \beta)N^2$

D. $\frac{\mathrm{dN}}{\mathrm{dt}} = (\alpha - \beta)N^3$

73. Quyidagi ifodalardan qaysi biri Ferxyulst-Perl tenglamasining yechimini ifodalaydi?

A. $N = \frac{\alpha N_0 e^{\alpha t}}{\alpha - \beta N_0 \left(e^{\alpha t} - 1\right)}$

B. $N = N_0 e^{(\alpha - \beta)t}$

C. $N = N_0 e^{(\alpha + \beta)t}$

D. $N = N_0 e^{(\alpha \cdot \beta)t}$

74. Ferxyulst-Perl modeli asosida populyasiya sonining vaqt bo'yicha o'zgarishi qanday bo'ladi?

A. keltirilganlarning barchasi to'g'ri

B. populyasiya sonining cheksiz o'sishiga yo'l qo'ymaydi. O'sish □/□ kattalik bilan chegaralangan bo'ladi

C. agar o'limlar soni tug'ilishlarga qaraganda ko'proq bo'lsa, u holda Maltus modeli populyasiya sonining eksponensial ravishda kamayishiga ishora qiladi

D. tug'ilishlar va o'limlar soni o'zaro teng bo'lsa, Maltus modelining ko'rsatishicha, populyasiya soni butun vaqt oralig'ida o'zgarmasdan qoladi

75. Ferxyulst-Perl modelini qaysi hollarda qo'llash mumkin?

A. populyasiya soni muhit sig'imiga yaqinlashganda, hayotni ta'minlovchi resurslar cheklangan holda

B. to'g'ri javob yo'q

C. hayotni ta'minlovchi resurslar cheklangan holda

D. populyasiya soni muhit sig'imiga yaqinlashganda

76. Populyasiyaning chiziqsiz modeli $\frac{dN}{dt} = \alpha \cdot \left(1 - \frac{N}{N_P}\right) \cdot N, \quad \alpha > 0$

qanday farazlarga asoslangan?

A. atrof muhit tomonidan ta’minlanadigan «muvozanatli» populyasiya soni N_P mavjud va populyasiya sonining o’zgarish tezligi muvozanat qiymatidan og’ish miqdoriga ko’paytirilgan populyasiya soniga proporsional
B. atrof muhit tomonidan ta’minlanadigan «muvozanatli» populyasiya soni N_P mavjud
C. populyasiya sonining o’zgarish tezligi muvozanat qiymatidan og’ish miqdoriga ko’paytirilgan populyasiya soniga proporsional
D. to’g’ri javob yo’q

77. Populyasiyaning chiziqsiz modeli $\frac{dN}{dt} = \alpha \cdot \left(1 - \frac{N}{N_P}\right) \cdot N, \quad \alpha > 0$

ning yechimi qanday tenglik bilan ifodalanadi?

A. $N(t) = \frac{N_P N(0) \cdot e^{\alpha \cdot t}}{N_P - N(0)\left(1 - e^{\alpha \cdot t}\right)}$
B. $N(t) = \frac{N(0) \cdot e^{\alpha \cdot t}}{1 - N(0)\left(1 - e^{\alpha \cdot t}\right)}$
C. $N(t) = \frac{N_P N(0)}{N_P - N(0)\left(1 - e^{\alpha \cdot t}\right)}$
D. $N(t) = \frac{N_P N(0)}{N_P - N(0)}$.

78. Populyasiyaning chiziqsiz modeli $\frac{dN}{dt} = \alpha \cdot \left(1 - \frac{N}{N_P}\right) \cdot N, \quad \alpha > 0$ ga asosan populyasiya soni vaqt o’tishi bilan qanday o’zgaradi?

A. keltirilganlarning barchasi to’g’ri
B. boshlang’ich populyasiya soni $N(0)$ ning ixtiyoriy qiymatida populyasiya soni muvozanat qiymati N_P ga intiladi
C. Maltus modelidan farqli o’laroq ushbu holda muvozanat turg’un bo’ladi
D. Maltus modeliga nisbatan ushbu model populyasiya dinamikasini realroq ifodalaydi

79. $\begin{cases} \frac{dN}{dt} = (\alpha - cM) \cdot N \\ \frac{dM}{dt} = (-\beta + dN) \cdot M \end{cases}$ differensial tenglamalar sistemasi qanday jarayonni ifodalaydi?

A. yirtqich-o’lja sistemasining o’zaro munosabati modelini
B. ikki davlat o’rtasidagi qurollanish poygasi modelini
C. to’g’ri javob yo’q
D. ikki armiya o’rtasidagi jangovar harakat modelini

80. Lotka-Volter tenglamalar sistemasining yechimi asosida qanday xulosaga kelish mumkin?

A. keltirilganlarning barchasi to’g’ri

B. agar $N(0)=N_0$, $M(0)=M_0$ (N_0, M_0 - populyasiyaning muvozanatini ta’minlovchi qiymatlar) bo’lsa, hamma vaqt mobaynida populyasiyalar soni o’zgarmasdan qoladi

C. yirtqich va xuddi shuningdek, o’ljaning populyasiya sonlari muvozanat holatidan ozgina o’zgarishi, bu populyasiya sonlarining vaqt o’tishi bilan muvozanat holatiga qaytmasligiga olib keladi

D. agar boshlang’ich muvozanat holatidan og’ish katta bo’lsa, sistema vaqt o’tishi bilan muvozanat holatiga qaytmaydi

81. Yirtqich-o’lja sistemasining o’zaro munosabati modeli asosida qanday xulosaga kelish mumkin?

A. yirtqich va o’ljalar populyasiya sonlari muvozanat holati atrofida davriy tebranib turadi. Tebranish amplitudasi va uning davri populyasiyalarning boshlang’ich sonlari $N(0)$, $M(0)$ orqali aniqlanib, $N(t)$ ning maksimal qiymatiga $M(t)$ ning minimal qiymati mos keladi va aksincha

B. to’g’ri javob yo’q

C. yirtqich va o’ljalar populyasiya sonlari muvozanat holati atrofida davriy tebranib turadi

D. tebranish amplitudasi va uning davri populyasiyalarning boshlang’ich sonlari $N(0)$, $M(0)$ orqali aniqlanib, $N(t)$ ning maksimal qiymatiga $M(t)$ ning minimal qiymati mos keladi va aksincha

82. Ikki davlat o’rtasidagi qurollanish poygasi modeli quyidagi farazlarning qaysi biriga asoslangan?

A. har bir davlatdagi qurollar miqdorining o’sishi va kamayishi raqib davlatdagi qurollar miqdoriga, o’zidagi mavjud qurollarning eskirishi darajasiga va raqiblar o’rtasidagi o’zaro ishonchsizlik darajasiga proporsional bo’ladi deb faraz qilinadi

B. har bir davlatdagi qurollar miqdorining o’sishi va kamayishi raqib davlatdagi qurollar miqdoriga va raqiblar o’rtasidagi o’zaro ishonchsizlik darajasiga proporsional bo’ladi deb faraz qilinadi

C. har bir davlatdagi qurollar miqdorining o’sishi va kamayishi raqib davlatdagi qurollar miqdoriga, o’zidagi mavjud qurollarning eskirishi darajasiga proporsional bo’ladi deb faraz qilinadi

83. $\begin{cases} \dfrac{dM_1}{dt} = \alpha_1(t)M_2 - \beta_1(t)M_1 + \gamma_1(t) \\ \dfrac{dM_2}{dt} = \alpha_2(t)M_1 - \beta_2(t)M_2 + \gamma_2(t) \end{cases}$ differensial tenglamalar sistemasi qanday jarayonni ifodalaydi?

A. ikki davlat o'rtasidagi qurollanish poygasi modelini
B. yirtqich-o'lja sistemasining o'zaro munosabati modelini
C. to'g'ri javob yo'q
D. ikki armiya o'rtasidagi jangovar harakat modelini

84. Ikki armiya o'rtasidagi jangovar harakat modeli quyidagi farazlarning qaysi biriga asoslangan?

A. har bir armiyadagi qo'shinlar sonining kamayish tezligi bevosita jangovar harakatlarga bog'liq bo'lmagan sabablar bilan, raqib armiyaning jangovar harakati va yordamchi kuchlarning qo'shilish tezligi bilan bog'liq
B. har bir armiyadagi qo'shinlar sonining kamayish tezligi raqib armiyaning jangovar harakati va yordamchi kuchlarning qo'shilish tezligi bilan bog'liq
C.)har bir armiyadagi qo'shinlar sonining kamayish tezligi bevosita jangovar harakatlarga bog'liq bo'lmagan sabablar bilan, raqib armiyaning jangovar harakati bilan bog'liq
D. har bir armiyadagi qo'shinlar sonining kamayish tezligi yordamchi kuchlarning qo'shilish tezligi bilan bog'liq

85. $\begin{cases} \dfrac{dM_1}{dt} = -\alpha_1(t)M_1 - \beta_2(t)M_2 + \gamma_1(t) \\ \dfrac{dM_2}{dt} = -\alpha_2(t)M_2 - \beta_1(t)M_1 + \gamma_2(t) \end{cases}$ differensial tenglamalar sistemasi qanday jarayonni ifodalaydi?

A. ikki armiya o'rtasidagi jangovar harakat modelini
B. ikki davlat o'rtasidagi qurollanish poygasi modelini
C. to'g'ri javob yo'q
D. yirtqich-o'lja sistemasining o'zaro munosabati modelini

86. $\begin{cases} \dfrac{dM_1}{dt} = -\alpha_1(t)M_1 - \beta_2(t)M_2 + \gamma_1(t) \\ \dfrac{dM_2}{dt} = -\alpha_2(t)M_2 - \beta_1(t)M_1M_2 + \gamma_2(t) \end{cases}$ differensial tenglamalar sistemasi qanday jarayonni ifodalaydi?

A. muntazam armiya va partizan qismlari o'rtasidagi jangovar harakat modelini
B. ikki davlat o'rtasidagi qurollanish poygasi modelini
C. yirtqich-o'lja sistemasining o'zaro munosabati modelini

D. to’g’ri javob yo’q

87. $\alpha x^2 = \beta x^2 + \gamma x^4 + \delta \frac{d}{dt}\left(\rho x^3\right)$ ifoda qanday jarayonni ifodalaydi?

A. modda va energiya muvozanatini

B. massani saqlanish qonunini

C. populyasiyalarning o’zgarish qonunini

D. impulsni saqlanish qonunini

88. $x(t) = \sqrt{\frac{a}{b}} \frac{1 - e^{-2\sqrt{ab}(t - t_0)}}{1 + e^{-2\sqrt{ab}(t - t_0)}}$ ifoda qanday jarayonni ifodalaydi?

A. daraxt balandligini vaqt o’tishi bilan o’zgarishini (o’sishini);

B. daraxt erkin energiyasini

C. ozuqaviy eritmani daraxtning barcha qismlariga yetkazib berish uchun sarf bo’ladigan energiyani

D. aniq bir jarayonni ifodalamaydi

89. Modda va energiya muvozanatini ifodalaydigan matematik modelni hosil qilishda quyida keltirilgan qaysi farazlardan foydalaniladi?

A. yetuklik yoshidagi daraxt o’sish jarayonida geometrik o’xshashlikni saqlab qoladi; daraxt erkin energiyani (daraxt uchun zarur bo’lgan moddani) faqatgina fotosintez jarayoni sababli oladi va bu energiya fotosintezga, tirik tanani shakllantirish (o’sish) va eritmani tuproqdan ko’tarish uchun sarf bo’ladi

B. daraxt erkin energiyani (daraxt uchun zarur bo’lgan moddani) faqatgina fotosintez jarayoni sababli oladi va bu energiya fotosintezga, tirik tanani shakllantirish (o’sish) va eritmani tuproqdan ko’tarish uchun sarf bo’ladi

C. daraxt erkin energiyani (daraxt uchun zarur bo’lgan moddani) faqatgina fotosintez jarayoni sababli oladi va bu energiya tirik tanani shakllantirish (o’sish) va eritmani tuproqdan ko’tarish uchun sarf bo’ladi

D. to’g’ri javob yo’q

90. Modda va energiya muvozanatini ifodalaydigan matematik modeldan qanday xulosalar olish mumkin?

A. avval daraxt vaqt o’tishi davomida to’xtovsiz o’sib, ma’lum bir vaqtdan keyin daraxtning o’sishi sekinlashadi va nihoyat umuman o’sishdan to’xtab qoladi

B. to’g’ri javob yo’q

C. daraxt vaqt o’tishi davomida to’xtovsiz o’sib boradi

D. daraxt vaqt o’tishi davomida to’xtovsiz o’sib boradi, ma’lum bir vaqtdan keyin daraxtning o’sishi sekinlashadi va daraxt yana o’sishda davom etadi

91. $x(t) + y(t) = N + 1$ ifoda qanday jarayonni ifodalaydi?

A. aholisi soni N ga teng bo'lgan hududda epidemiyaga chalingan 1 ta kasal kelib qo'shilishi natijasida hududda epidemiya tarqalishi jarayonini ifodalaydi
B. daraxt balandligini vaqt o'tishi bilan o'zgarishini (o'sishini);
C. to'g'ri javob yo'q
D. daraxt erkin energiyasini

92. $\frac{dx}{dt} = \alpha x(N+1-x)$ ifoda qanday jarayonni ifodalaydi?

A. aholisi soni N ga teng bo'lgan hududda epidemiyaga chalingan 1 ta kasal kelib qo'shilishi natijasida hududda kasallar sonining vaqt bo'yicha o'zgarishini ifodalayli
B. to'g'ri javob yo'q
C. daraxt balandligini vaqt o'tishi bilan o'zgarishini (o'sishini)
D. daraxt erkin energiyasini

93. Aholisi soni N ga teng bo'lgan hududda epidemiyaga chalingan 1 ta kasal kelib qo'shilishi natijasida hududda kasallar sonining vaqt bo'yicha o'zgarishini qanday munosabat bilan aniqlanadi?

A. $x(t) = \frac{N+1}{Ne^{-\alpha(N+1)t}+1}$
B. $x(t) = \frac{N+1}{Ne^{\alpha(N+1)t}+1}$
C. $x(t) = \frac{1}{Ne^{\alpha(N+1)t}+1}$
D. $x(t) = \frac{1}{Ne^{\alpha(N+1)t}-1}$

94. $\frac{dN}{dt} = [\alpha_1(t)+\alpha_2(t)N(t)](N_0 - N)$ ifoda qanday jarayonni ifodalaydi?

A. reklama kompaniyasini tashkillashtirish modelini
B. chiziqsiz populyasiya modelini
C. Ferxyulst-Perl modelini
D. Maltus modelini

95. Bitta tovardan tushadigan foyda p, xaridorlar soni N va $\alpha_1(t)$ reklama uchun vaqt birligi ichida qilinadigan harakatlar soni bo'lsa, u holda tovarni sotishdan tushadigan foyda nimaga teng?

A. $P = pN(t) = pN_0\int_0^t \alpha_1(t)dt$
B. $P = p/N(t) = p\Big/ N_0\int_0^t \alpha_1(t)dt$

C. $P = p/N(t) = N_0 \int_0^t \alpha_1(t)dt \Big/ p$

D. $P = p/N(t) = \int_0^t \alpha_1(t)dt \Big/ p$

96. Xaridorlar soni N , $\alpha_1(t)$ reklama uchun vaqt birligi ichida qilinadigan harakatlar soni, elementar reklama harakatining narxi s bo'lsa, u holda sarf qilingan xarajatlar nimaga teng?

A. $S = s\int_0^t \alpha_1(t)dt$

B. $S = \int_0^t \alpha_1(t)dt \Big/ s$

C. $S = \mathrm{s} \Big/ \int_0^t \alpha_1(t)dt$

D. $S = \int_0^t \alpha_1(t)dt$

97. Modellashtirishning asosiy muammolari nimalardan iborat?
   A. barcha javoblar to'g'ri
   B. model qurishdan
   C. modelni tadqiq qilishdan
   D. modeldan foydalanishdan

98. Modelni asosiy xususiyatlari nimalardan iborat?
   A. barcha javoblar to'g'ri
   B. cheklilik (model originalini chekli marta akslantiradi)
   C. soddalik
   D. (model real obyektni asosiy xossalarini akslantiradi), taxminiylik (model real obyektni taxminiy, ya'ni taqribiy ifodalaydi)
   E. adekvatlik (model tadqiq qilinayotgan obyekt xarakterini yetarlicha ifodalaydi)

99. Dinamik model nima?
   A. vaqt bo'yicha parametr ishtirok etuvchi, ya'ni vaqt bo'yicha o'zgaruvchi jarayon yoki obyektlarni ifodalovchi modellar dinamik model deyiladi
   B. vaqtning diskret momentlaridagina tizim yoki obyektni tabiatini ifodalovchi modellar dinamik model deyiladi
   C. modeldagi ishtirok etuvchi parametrlar nabori (kiruvchi) ga bir qiymatli aniqlangan parametrlar nabori (chiquvchi) mos keluvchi modellar dinamik model deyiladi

D. qandaydir vaqt oralig’idagi vaqtning barcha momentlarida tizim yoki obyektni tabiatini ifodalovchi modellar dinamik model deyiladi

100. Diskret model nima?

A. vaqtning diskret momentlaridagina tizim yoki obyektni tabiatini ifodalovchi modellar diskret model deyiladi
B. vaqtning diskret momentlaridagina tizim yoki obyektni tabiatini ifodalovchi modellar uzluksiz model deyiladi
C. to’g’ri javob yo’q
D. vaqt bo’yicha parametr ishtirok etuvchi, ya’ni vaqt bo’yicha o’zgaruvchi jarayon yoki obyektlarni ifodalovchi modellar dinamik model deyiladi

101. Uzluksiz model nima?

A. qandaydir vaqt oralig’idagi vaqtning barcha momentlarida tizim yoki obyektni tabiatini ifodalovchi modellar uzluksiz model deyiladi
B. vaqtning diskret momentlaridagina tizim yoki obyektni tabiatini ifodalovchi modellar uzluksiz model deyiladi
C. modeldagi ishtirok etuvchi parametrlar nabori (kiruvchi) ga bir qiymatli aniqlangan parametrlar nabori (chiquvchi) mos keluvchi modellar uzluksiz model deyiladi
D. to’g’ri javob yo’q

102. Determinallashgan model nima?

A. modeldagi ishtirok etuvchi parametrlar nabori (kiruvchi) ga bir qiymatli aniqlangan parametrlar nabori (chiquvchi) mos keluvchi modellar determinallashgan model deyiladi
B. vaqt bo’yicha parametr ishtirok etuvchi, ya’ni vaqt bo’yicha o’zgaruvchi jarayon yoki obyektlarni ifodalovchi modellar determinallashgan model deyiladi
C. vaqtning diskret momentlaridagina tizim yoki obyektni tabiatini ifodalovchi modellar determinallashgan model deyiladi
D. to’g’ri javob yo’q

103. Modellashtiriluvchi tizimning hayotiy sikli nimalardan iborat?

A. barcha javoblar to’g’ri
B. obyekt haqida ma’lumot to’plash, gipotezalar qabul qilish, modelni tuzilishi va tarkibini loyihalash
C. modelni tadqiq qilish, modellashtirish algoritmi (dasturi)ni ishlab chiqish; modelni adekvatligini, turg’unligini, sezgirligini tadqiq qilish; modellashtirish vositasi (sarf-xarajat) ni baholash

D. olingan sonli natijalarni tahlil qilish va talqin qilish; agar zarurat bo'lsa modelni aniqlashtirish yoki modifikasiyalash; modellashtirish vositasida olingan yangi bilimlar bilan tadqiq qilinayotgan tizimga qaytish

104. Modellar ustida bajariladigan asosiy amallarni ko'rsating.

A. barcha javoblar to'g'ri
B. chiziqlashtirish, identifikasiyalash (kuzatish natijalari asosida modellar qurish)
C. agregirlash (kichik o'lchovga o'tkazish), o'lchovsizlantirish
D. dekompozisiyalash, hisoblash eksperimenti o'tkazish

105. Modellashtirish va modellar qanday asosiy va muhim yo'nalishlarda qo'llaniladi?

A. barcha javoblar to'g'ri
B. tadqiq qilinayotgan tizimlarni o'rganish va ularni tadqiq qilish nazariyasini ishlab chiqishda
C. obyekt yoki tizimlar holatini bashoratlashda; tizimlarni yoki alohida qismiy tizimlarni avtomatlashtirishda
D. tizimni butunligicha yoki uning qismiy tizimlarini boshqarishda; strategiya va boshqarish qarorlarini ishlab chiqishda

106. Modellarni qurish, o'rganish va qo'llash jarayoni .... deyiladi

A. modellashtiirish
B. abstraktlashtirish
C. chiziqlashtirish
D. qismiy tizimlarga ajratish

107. Texnik jarayonlarga nisbatan modellashtirishning qanday turlari mavjud?

A. konseptual, fizik, strukturali-funksional, matematik (mantiqiy-matematik), imitasion (dasturli)
B. konseptual, fizik
C. strukturali-funksional
D. matematik (mantiqiy-matematik), imitasion (dasturli)

108. Matematik modellarni sintezi qanday asosiy qismlardan tashkil topgan?

A. mazmunli, analitik, hisoblash qismlaridan
B. mazmunli, analitik, qismlaridan
C. analitik, hisoblash qismlaridan
D. mazmunli, hisoblash qismlaridan

109. Matematik modellarni sintezini tashkil etuvchi mazmunli qismi nimadan iborat?

A. obyektning fizik tabiatini o'z ichiga oluvchi formal ifodalashdan
B. obyektni matematik ifodalashdan

C. to’g’ri javob yo’q
D. modellashtirish algoritmidan

110. Matematik modellarni sintezini tashkil etuvchi analitik qismi nimadan iborat?

A. obyektni matematik ifodalashdan
B. to’g’ri javob yo’q
C. modellashtirish algoritmidan
D. obyektning fizik tabiatini o’z ichiga oluvchi formal ifodalashdan

111. Matematik modellarni sintezini tashkil etuvchi hisoblash qismi nimadan iborat?

A. modellashtirish algoritmidan
B. obyektning fizik tabiatini o’z ichiga oluvchi formal ifodalashdan
C. obyektni matematik ifodalashdan
D. to’g’ri javob yo’q

VII. ADABIYOTLAR RO‘YXATI

I. O‘zbekiston Respublikasi Prezidenti asarlari

1. Mirziyoyev Sh.M. Buyuk kelajagimizni mard va olijanob xalqimiz bilan birga quramiz. – T.: “O‘zbekiston”, 2017. – 488 b.
2. Mirziyoyev Sh.M. Milliy taraqqiyot yo‘ limizni qat’iyat bilan davom ettirib, yangi bosqichga ko‘ taramiz. 1-jild. – T.: “O‘zbekiston”, 2017. – 592 b.
3. Mirziyoyev Sh.M. Xalqimizning roziligi bizning faoliyatimizga berilgan eng oliy bahodir. 2-jild. T.: “O‘zbekiston”, 2018. – 507 b.
4. Mirziyoyev Sh.M. Niyati ulug‘ xalqning ishi ham ulug‘, hayoti yorug‘ va kelajagi farovon bo‘ ladi. 3-jild.– T.: “O‘zbekiston”, 2019. – 400 b.
5. Mirziyoyev Sh.M. Milliy tiklanishdan – milliy yuksalish sari. 4-jild.– T.: “O‘zbekiston”, 2020. – 400 b.

II. Normativ-huquqiy hujjatlar

1. O‘zbekiston Respublikasining Konstitutsiyasi. – T.: O‘zbekiston, 2023.
2. O‘zbekiston Respublikasining 2020-yil 23-sentabrda qabul qilingan “Ta’lim to‘g‘risida”gi Qonuni.
3. O‘zbekiston Respublikasining “Korrupsiyaga qarshi kurashish to‘g‘risida”gi Qonuni.
4. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2015-yil 12-iyundagi “Oliy ta’lim muassasalarining rahbar va pedagog kadrlarini qayta tayyorlash va malakasini oshirish tizimini yanada takomillashtirish to‘g‘risida”gi PF-4732-sonli Farmoni.
5. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2019-yil 27-maydagi “O‘zbekiston Respublikasida korrupsiyaga qarshi kurashish tizimini yanada takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi PF-5729-son Farmoni.
6. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2019-yil 27-avgustdagi “Oliy ta’lim muassasalari rahbar va pedagog kadrlarining uzluksiz malakasini oshirish tizimini joriy etish to‘g‘risida”gi PF-5789-sonli Farmoni.
7. O‘zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasining 2019-yil 23-sentabrdagi “Oliy ta’lim muassasalari rahbar va pedagog kadrlarining malakasini oshirish tizimini yanada takomillashtirish bo‘yicha qo‘shimcha chora-tadbirlar to‘g‘risida”gi 797-sonli Qarori.
8. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2019-yil 8-oktabrdagi “O‘zbekiston Respublikasi oliy ta’lim tizimini 2030-yilgacha rivojlantirish konsepsiyasini tasdiqlash to‘g‘risida”gi PF-5847- sonli Farmoni.
9. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2020-yil 29-oktabr “Ilm-fanni 2030 yilgacha rivojlantirish konsepsiyasini tasdiqlash to‘g‘risida”gi PF-6097-sonli Farmoni.

10. Oʻzbekiston Respublikasi Prezidentining 2021-yil 17-fevraldagi “Sun’iy intellekt texnologiyalarini jadal joriy etish uchun shart-sharoitlar yaratish chora- tadbirlari toʻgʻrisida”gi PQ-4996-son Qarori.
11. Oʻzbekiston Respublikasi Prezidentining 2022-yil 28-yanvardagi “2022- 2026 yillarga moʻljallangan Yangi Oʻzbekistonning taraqqiyot strategiyasi toʻgʻrisida”gi PF-60-son Farmoni.
12. Oʻzbekiston Respublikasi Prezidentining 2023-yil 25-yanvardagi “Respublika ijro etuvchi hokimiyat organlari faoliyatini samarali yoʻlga qoʻyishga doir birinchi navbatdagi tashkiliy chora-tadbirlar toʻgʻrisida”gi PF-14-sonli Farmoni.
13. Oʻzbekiston Respublikasi Prezidentining 2023-yil 11-sentabrdagi “Oʻzbekiston - 2030” strategiyasi toʻgʻrisida”gi PF-158-son Farmoni.
14. Oʻzbekiston Respublikasi Prezidentining 2024-yil 21-iyundagi “Aholi va davlat xizmatchilarining korrupsiyaga qarshi kurashish sohasidagi bilimlarini uzluksiz oshirish tizimini joriy qilish chora-tadbirlari toʻgʻrisida” PQ-228-son Qarori.

Ш. Maxsus adabiyotlar

20. Музафаров Х.А., Баклушин М.Б., Абдураимов М.Г. Математическое моделирование. Ташкент, Университет. 2002.
21. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование. М., Наука, 2005.
22. Xaydarov A., Kabiljanova F.A., Matyakubov A.S. Matematik modellashtirish asoslari. Oʻquv qoʻllanma. Toshkent. 2023. 172 b.
23. Хайдаров А., Жумаев Ж., Шафиев Т.Р. Основы математического моделирования. Учебник. Бухара. 2022. 216 с.

IV. Internet saytlar

1. www.edu.uz.
2. www.aci.uz.
3. www.ictcouncil.gov.uz.
4. www.lib.bimm.uz
5. www. Ziyonet. Uz
6. www.sciencedirect.com
7. www.acs.org
8. www.nature.com
9. http://www.kornienko-ev.ru/BCYD/index.html.