O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI
HUZURIDAGI PEDAGOG KADRLARNI
QAYTA TAYYORLASH VA ULARNING
MALAKASINI OSHIRISH TARMOQ
(MINTAQAVIY) MARKAZI

CHIZIQLI ALGEBRANING TADBIQLARI

MODULI BO‘YICHA
O‘QUV – USLUBIY
MAJMUA

2025

O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY TA’LIM, FAN VA INNOVATSIYALAR VAZIRLIGI

OLIY TA’LIM TIZIMI KADRLARINI QAYTA
TAYYORLASH VA MALAKASINI OSHIRISH INISTITUTI

O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI HUZURIDAGI PEDAGOG KADRLARNI QAYTA TAYYORLASH VA ULARNING MALAKASINI OSHIRISH TARMOQ (MINTAQAVIY) MARKAZI

“CHIZIQLI ALGEBRANING TADBIQLARI” MODULI BO‘YICHA

O‘ Q U V–U S L U B IY M A J M U A

Toshkent - 2025

Modulning o‘quv-uslubiy majmuasi Oliy ta’lim, fan va innovatsiyalar vazirligining 2024-yil 27-dekabrdagi 485-sonli buyrug‘i bilan tasdiqlangan oliy ta’lim muassasalari pedagog kadrlarini qayta tayyorlash va malaka oshirish yo‘nalishlari o‘quv reja va dasturlariga muvofiq ishlab chiqilgan.

Tuzuvchi:	O V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika instituti direktori o‘rinbosari, f.-m.f.d., professor A.X.Xudoyberdiyev
Taqrizchilar:	f.-m.f.d., prof. A.R.Xayotov–O‘zRFA, V.I.Romanovskiy nomidagi matematika instituti, f.-m.f.d. J.Q.Adashev–O‘zRFA, V.I.Romanovskiy nomidagi matematika instituti

O‘quv-uslubiy majmua Mirzo Ulug‘bek nomidagi O‘zbekiston Milliy universiteti Kengashining qarori bilan nashrga tavsiya qilingan (2024- yil “29” noyabrdagi 4-sonli bayonnoma).

MUNDARIJA

I. ISHCHI DASTUR.. 5

II. MODULNI O‘QITISHDA FOYDALANILADIGAN INTERFAOL TA’LIM METODLARI... 20

III. NAZARIY MASHG‘ULOT MATERIALLARI 25

IV. AMALIY MASHG‘ULOT MATERIALLARI 59

V.KO'CHMA MASHG'ULOTLAR...83

VI.GLOSSARI..86

VII. ADABIYOTLAR RO'YXATI..88

I. ISHCHI DASTUR

KIRISH

Ushbu dastur Oʻzbekiston Respublikasining 2020-yil 23-sentabrda tasdiqlangan “Ta’lim toʻgʻrisida” Qonuni, Oʻzbekiston Respublikasi Prezidentining 2015-yil 12-iyundagi “Oliy ta’lim muassasalarining rahbar va pedagog kadrlarini qayta tayyorlash va malakasini oshirish tizimini yanada takomillashtirish toʻgʻrisida” PF-4732-son, 2019-yil 27-avgustdagi “Oliy ta’lim muassasalari rahbar va pedagog kadrlarining uzluksiz malakasini oshirish tizimini joriy etish toʻgʻrisida” PF-5789-son, 2019-yil 8-oktabrdagi “Oʻzbekiston Respublikasi oliy ta’lim tizimini 2030-yilgacha rivojlantirish konsepsiyasini tasdiqlash toʻgʻrisida” PF-5847-son, 2020-yil 29-oktabrdagi “Ilm-fanni 2030-yilgacha rivojlantirish konsepsiyasini tasdiqlash toʻgʻrisida” PF-6097-son, 2022-yil 28-yanvardagi “2022-2026 yillarga moʻljallangan Yangi Oʻzbekistonning taraqqiyot strategiyasi toʻgʻrisida” PF-60-son, 2023-yil 25-yanvardagi “Respublika ijro etuvchi hokimiyat organlari faoliyatini samarali yoʻlga qoʻyishga doir birinchi navbatdagi tashkiliy chora-tadbirlar toʻgʻrisida” PF-14-son, Oʻzbekiston Respublikasi Prezidentining 2023-yil 11-sentabrdagi ““Oʻzbekiston — 2030” strategiyasi toʻgʻrisida” PF-158-son Farmonlari, shuningdek, Oʻzbekiston Respublikasi Prezidentining 2024-yil 21-iyundagi “Aholi va davlat xizmatchilarining korrupsiyaga qarshi kurashish sohasidagi bilimlarini uzluksiz oshirish tizimini joriy qilish chora-tadbirlari toʻgʻrisida” PQ-228-son, Oʻzbekiston Respublikasi Prezidentining 2021-yil 17-fevraldagi “Sun’iy intellekt texnologiyalarini jadal joriy etish uchun shart-sharoitlar yaratish chora-tadbirlari toʻgʻrisida” PQ-4996-son qarorlari va Oʻzbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasining “Oliy ta’lim muassasalari rahbar va pedagog kadrlarining malakasini oshirish tizimini yanada takomillashtirish boʻyicha qoʻshimcha chora-tadbirlar toʻgʻrisida” 2019-yil 23-sentabrdagi 797-son hamda Oʻzbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasining “Oliy ta’lim tashkilotlari rahbar va pedagog kadrlarini qayta tayyorlash va malakasini oshirish tizimini samarali tashkil qilish chora-tadbirlari toʻgʻrisida” 2024-yil 11-iyuldagi 415-son Qarorlarida belgilangan ustuvor vazifalar mazmunidan kelib chiqqan holda tuzilgan boʻlib, u oliy ta’lim muassasalari pedagog kadrlarining kasb mahorati hamda innovatsion kompetentligini rivojlantirish, sohaga oid ilgʻor xorijiy tajribalar, yangi bilim va malakalarni oʻzlashtirish, shuningdek amaliyotga joriy etish koʻnikmalarini takomillashtirishni maqsad qiladi.

Dastur doirasida berilayotgan mavzular ta’lim sohasi boʻyicha pedagog kadrlarni qayta tayyorlash va malakasini oshirish mazmuni, sifati va ularning tayyorgarligiga qoʻyiladigan umumiy malaka talablari va oʻquv rejalari asosida shakllantirilgan boʻlib, uning mazmuni yangi Oʻzbekistonning taraqqiyot strategiyasi va jamiyatning ma’naviy asoslarini yoritib berish, oliy ta’limning normativ-huquqiy asoslari boʻyicha ta’lim-tarbiya jarayonlarini tashkil etish, pedagogik faoliyatda raqamli kompetensiyalarni rivojlantirish, ilmiy-innovatsion faoliyat darajasini oshirish, pedagogning kasbiy kompetensiyalarini rivojlantirish, ta’lim sifatini ta’minlashda baholash metodikalaridan samarali foydalanish, chiziqli algebraning tatbiqlaridan foydalanish, tabiiy jarayonlarni matematik modellashtirishni oʻzlashtirish bo‘yicha tegishli bilim, ko‘nikma, malaka va kompetensiyalarni rivojlantirishga yo‘naltirilgan.

Modulning maqsadi va vazifalari

Oliy ta’lim muasasalari pedagog kadrlarini qayta tayyorlash va ularning malakasini oshirish kursining **maqsadi** pedagog kadrlarning innovatsion yondoshuvlar asosida o‘quv-tarbiyaviy jarayonlarni yuksak ilmiy-metodik darajada loyihalashtirish, sohadagi ilg‘or tajribalar, zamonaviy bilim va malakalarni o‘zlashtirish va amaliyotga joriy etishlari uchun zarur bo‘ladigan kasbiy bilim, ko‘nikma va malakalarini takomillashtirish, shuningdek ularning ijodiy faolligini rivojlantirishdan iborat

Kursning **vazifalariga** quyidagilar kiradi:

“Matematika va amaliy matematika” yo‘nalishida pedagog kadrlarning kasbiy bilim, ko‘nikma, malakalarini takomillashtirish va rivojlantirish;

-pedagoglarning ijodiy-innovatsion faollik darajasini oshirish;

-pedagog kadrlar tomonidan zamonaviy axborot-kommunikatsiya texnologiyalari, zamonaviy ta’lim va innovatsion texnologiyalar sohasidagi ilg‘or xorijiy tajribalarning o‘zlashtirilishini ta’minlash;

-o‘quv jarayonini tashkil etish va uning sifatini ta’minlash borasidagi ilg‘or xorijiy tajribalar, zamonaviy yondashuvlarni o‘zlashtirish;

“Matematika va amaliy matematika” yo‘nalishida qayta tayyorlash va malaka oshirish jarayonlarini fan va ishlab chiqarishdagi innovatsiyalar bilan o‘zaro integratsiyasini ta’minlash.

Kurs yakunida tinglovchilarning bilim, ko‘nikma va malakalari hamda kompetensiyalariga qo‘yiladigan talablar:

Qayta tayyorlash va malaka oshirish kursining o‘quv modullari bo‘yicha tinglovchilar quyidagi yangi bilim, ko‘nikma, malaka hamda kompetensiyalarga ega bo‘lishlari talab etiladi:

- “Yangi O‘zbekiston” konsepsiyasi, uning mazmun mohiyati va asosiy tamoyillarini;
- O‘zbekiston Respublikasi Konstitutsiyasida inson va fuqaroning asosiy huquqlari, erkinliklari va burchlarini;
- O‘zbekiston Respublikasining “Ilm-fan va ilmiy faoliyat to‘g‘risida” hamda “Innovatsion faoliyat to‘g‘risida” Qonunlarini;
- O‘zbekiston Respublikasining zamonaviy konstitutsionalizmini;
- aholi talablariga va xalqaro standartlarga to‘liq javob beradigan ta’lim, tibbiyot va ijtimoiy himoya tizimini tashkil qilishni;
- “Yashil” va inklyuziv iqtisodiy o‘sish tamoyillariga asoslangan yuqori iqtisodiy o‘sish dasturlari va ularning amaliyotga tadbiq etish istiqbollarini;
- O‘zbekiston Respublikasi Konstitutsiyasida ma’muriy-hududiy va davlat tuzilishi masalalarini;
- jamiyatning iqtisodiy negizlarini;
- “Xavfsiz va tinchliksevar davlat” tamoyiliga asoslangan siyosatni;

- Oliy ta’lim sohasiga oid qonun hujjatlari va ularning mazmunini;
- O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining oliy ta’lim tizimiga oid farmonlari, qarorlarini;
- O‘zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasining oliy ta’lim tizimiga tegishli qarorlarini;
- Oliy ta’lim, fan va innovatsiya vazirligining ta’lim jarayonlarini rejalashtirish va tashkil etishga oid buyruqlarini;
- Davlat ta’lim standartlari, ta’lim yo‘nalishlari va magistratura mutaxassisliklarining Malaka talablari, o‘quv rejalari, fan dasturlari va ularga qo‘yiladigan talablarni, o‘quv yuklamalarini rejalashtirish va ularning bajarilishini nazorat qilish usullarini;
- oliy ta’lim tizimida korrupsiya va korrupsiyaga oid huquqbuzarliklarga qarshi kurashish vazifalari, mazmun-mohiyati, yuzaga kelish sabablari, ijtimoiy-huquqiy omillarini;
- ta’lim jarayonini raqamli transformatsiyasini;
- raqamli ta’lim resurslari va dasturiy mahsulotlarini;
- raqamli ta’lim resursini pedagogik loyihalash texnologiyasini;
- mediasavodxonlik va xavfsizlik asoslarini;
- raqamli ta’lim resurslarini loyihalash uchun asosiy talablarni;
- meta texnologiyalar tushunchasi, avzalliklari va kamchiliklarini;
- zamonaviy ta’lim tizimida sun’iy intellekt (AI) ning ahamiyatini;
- ta’limda sun’iy intellektningdan foydalanish istiqbollari va xavflarini;
- bilimlarni sinash va baholashning aqlli tizimlarini;
- jahonda oliy ta’lim rivojlanish tendensiyalari: umumiy trendlar va strategik yo‘nalishlarni;
- zamonaviy ta’limning global trendlarini;
- inson kapitalining iqtisodiy o‘sishning asosiy omili sifatida rivojlanishida ta’limning yoshdagi ahamiyatini;
- oliy ta’limning zamonaviy integratsiyasi: global va mintaqaviy makonda raqobatchilikdagi ustuvorliklari, universitetlarning xalqaro va milliy reytingini;
- xalqaro reyting turlari va ularning indikatorlarini;
- zamonaviy universitet jamiyatning faol, ko‘pqirrali va samarali faoliyat yurituvchi instituti sifatidagi uchta yirik vazifalarini;
- universitetlarning zamonaviy modellarini;
- zamonaviy kelajak universitetlarning beshta asosiy modellarini;
- tadbirkorlik universiteti faoliyatining muhim yo‘nalishlarini;
- pedagogning kasbiy kompetensiyalarini rivojlantirishning nazariy asoslarini;
- innovatsion ta’lim muhiti sharoitida pedagogning kasbiy kompetensiyalarini rivojlantirish yo‘llarini;
- kasbiy kompetensiyalarning mazmun va mohiyatini;
- kasbiy kompetensiyalar va ularning o‘ziga xos xususiyatlarini;
- pedagogik texnikaning asosiy komponentlarini;
- pedagogik texnikani shakllantirish yo‘llarini;

- kasbiy kompetensiyalarni rivojlantirish jarayonini tashkil etishda innovatsion, akmeologik, aksiologik, kreativ, refleksiv, texnologik, kompetentli, psixologik, andragogik yondashuvlar va xalqaro tajribalar hamda ularning kasbiy kometensiyalarni rivojlantirishga ta'sirini;
- kasbiy kompetetnsiyalarni rivojlantirish jarayonida pedagogik deontologiyaning roli, ahamiyatini;
- kasbiy kompetensiyalarni rivojlantirishda uchraydigan to'siqlarni yechishda, to'g'ri harakatlar qilishda pedagogning kompetentlik va kreativlik darajasi, pedagogik kvalimetriyasini;
- talabalar kasbiy tayyorgarlik sifatini kompleks baholashning nazariyasini;
- ta'lim sifatiga ta'sir etuvchi omillarni;
- kredit-modul tizimida talabalarning bilimi, ko'nikmasi, malakasi va kompetensiyalarini nazorat qilish va baholashning o'ziga xos xususiyatlari, didaktik funksiyalarini;
- baholash turlari,tamoyillari va mezonlarini;
- zamonaviy algebraning xozirgi kundagi dolzarb masalalarini;
- zamonaviy algebrada foydalaniladigan chiziqli algebra elementlarini;
- matematik modelni qurish va ularni tadqiq qilish uslublarini;
- matematik model tushunchasini;
- chiziqli algebra tushunchalari, ta'riflar va ularning tatbiqlarini;
- matematik modellarga qo'yiladigan asosiy talablarini;
- matematik modellarni qurish metodlarini;
- chiziqli almashtirishlar va chiziqli formalarni;
- vektor vazolar, chiziqli bog'liqlilik va chiziqli erklilik, bazis va o'lcham, qism fazo tushunchalarini;
- Maltus va Fyurxst-Perl modellarini;
- vektor fazodagi chiziqli almashtirishlar, chiziqli almashtirishning matritsasi, chizqli almashtirishning yadrosi va obrazini;
- chiziqli dasturlash masalalari va Demografik modellarni;
- «Yirtqich-o'lja» sistemasining o'zaro munosabat modelini;
- teskari matritsa va ularni topishning Gaus-Jordan usullarini ***bilishi*** kerak.

Tinglovchi:

- "O'zbekiston-2030" strategiyasining mazmun-mohiyati va ahamiyatini yoritib berish;
- O'zbekistonning xalqaro maydondagi siyosiy va iqtisodiy aloqalarini tahlil etish va baholash;
- yangi O'zbekistonning ma'naviy va madaniy tiklanish dasturlari asoslarini o'zlashtirish;
- O'zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasining Oliy ta'lim tizimiga tegishli qarorlari asosida ta'lim-tarbiya jarayonlarini tashkil etish;

- xorijiy tajribalar asosida malaka talablari, o‘quv rejalari va fan dasturlarini takomillashtirish;
- korrupsiyaga qarshi kurashish ichki tizimining huquqiy asoslarini shakllantirishda xalqaro tajribaning ahamiyatini yoritib berish;
- multimedia va infografika asosida interaktiv didaktik mayeriallar yaratish va bulut xizmatlarida saqlash;
- masofiviy ta’lim platformalari uchun video kontent yaratish;
- Internetda mualliflik huquqlarini himoya qilish usullaridan foydalanish;
- raqamli ta’lim resurslari sifatini baholash;
- pedagogik jarayonda sun’iy intellektning rolini tahlil qilish va ahamiyatini ochib berish;
- ta’lim sohasida sun’iy intellektdan foydalanishning afzalliklari va kamchiliklarini aniqlash;
- OTMlarni reyting bo‘yicha ranjirlash;
- jahon universitetlari reytingini tahlil etish va baholash;
- universitetlarni mustaqil baholash yondashuvlarini aniqlashtirish;
- tadbirkorlik universitetiga o‘tish uchun zarur bo‘ladigan o‘zgarishlarni aniqlash;
- Universitet 1.0 dan Universitet 3.0 modeliga o‘tish borasidagi muammolarni aniqlash;
- zamonaviy tadbirkorlik universiteti modeli tamoyillarini o‘zlashtirish;
- pedagoglarning kreativ potensiali tushunchasi va mohiyatini ochib berish;
- pedagoglar kasbiy kompetensiyalarini rivojlantirishning innovatsion texnologiyalarini qo‘llash;
- o‘qituvchi faoliyatida pedagogik texnikaning axamiyatini yoritib berish;
- tinglovchilar diqqatini o‘ziga tortish usullaridan foydalanish;
- kasbiy kompetentsiyalarni shakllantirish va rivojlantirish yo‘llarini tahlil etish;
- kasbiy kompetensiyalarni rivojlantirish jarayonida uchraydigan to‘siqlar, qiyinchiliklar va ularni bartaraf etish;
- talabalarning o‘quv auditoriyadagi faoliyatini baholash;
- talabalarning kurs ishi, bitiruv malakaviy ishi, o‘quv-malakaviy amaliyot (mehnat faoliyati)ini nazorat qilish;
- baholashning miqdor va sifat tahlilini amalga oshirish;
- chiziqli algebra va uning elementlariga doir masalalarni yechish;
- jarayonlarni modellashtirishda tabiatning saqlanish qonunlaridan va boshqa usullardan foydalanish;
- matematik modellarning nazariy va amaliy tadqiqoti, ulariing adekvatligini baholash;
- matematik model va uning real ob’ekti orasidagi muvofiqlilikni izohlash;
- vektor fazodagi chiziqli almashtirishlar, chiziqli almashtirishning matritsasi, chizqli almashtirishning yadrosi va obrazidan foydalanish;

- matritsalar nazariyasini o‘zlashtirish, matritsalarning paydo bo‘lish tarixini tahlil etish;
- chiziqli tenglamalar sistemasi va ularni yechish usullaridan foydalanish;
- matritsalar va ular ustida amallar bajarish ***ko‘nikmalariga*** ega bo‘lishi lozim.

Tinglovchi:

- O‘zbekiston Respublikasi Konstitutsiyasidagi asosiy o‘zgarishlarni tahlil qilish va ularning zarurligini muhokama etish;
- O‘zbekiston Respublikasida ilm-fanni 2030-yilgacha rivojlantirish konsepsiyasining mazmun-mohiyati va ahamiyatini ochib berish;
- mamlakatimizning raqamli va harbiy-tibbiy infratuzilmasini takomillashtirishga oid chora tadbirlar bilan ishlash;
- davlat hokimiyatining tashkil etilishining konstitutsiyaviy asoslarini o‘zlashtirish;
- Oliy ta’lim, fan va innovatsiya vazirligining ta’lim-tarbiya jarayonini tashkil etishga oid buyruqlari, Davlat ta’lim standartlari, ta’lim yo‘nalishlarining va magistratura mutaxassisliklarining malaka talablari, o‘quv rejalar va fan dasturlarini takomillashtirish;
- o‘quv yuklamalarni rejalashtirish va ularning bajarilishini nazorat qilish;
- meyoriy uslubiy hujjatlarni ishlab chiqish amaliyotini takomillashtirish mexanizmlarini tahlil etish;
- korrupsiyaviy xavf-xatarlarni aniqlash, ularni majburiy baholash, korrupsiya xavfi yuqori hisoblangan lavozimlar ro‘yhatini shakllantirish, xavflar darajasini pasaytirish chora tadbirlarini amalga oshirish tartibidan samarali foydalanish;
- an’anaviy va raqamli ta’limda pedagogik dizaynning xususiyatlarini ochib berish;
- onlayn mashg‘ulotlarni tashkil etishda raqamli texnologiyalardan foydalanish;
- mediasavodxonlik va xavfsizlik asoslarini o‘zlashtirish;
- pedagogik faoliyatda raqamli kompetensiyalarni rivojlantirish;
- raqamli ta’lim resurslaridan foydalanish;
- meta texnologiyalarni ta’limga samarali integratsiya qilish yo‘llaridan foydalanish;
- ta’limdagi sun’iy intellektning xususiyatlarini muhokama qilish;
- xalqaro reyting turlari va ularning indikatorlarining ahamiyatini ochib berish;
- OTM reytingiga ta’sir etuvchi omillarni tahlil etish;
- universitetlarning zamonaviy modellarini o‘rganish;
- OTM bitiruvchilari va xodimlari tomonidan texnologiyalar transferiga litsenziyalar oluvchi startaplarni shakllantirish va yaratish;
- professor-o‘qituvchilarning tadqiqotchi sifatidagi nashr faolligini rivojlantirish istiqbollarini tahlil etish;

- innovatsion ta’lim muhiti sharoitida pedagogning kasbiy kompetensiyalarini rivojlantirish;
- pedagog kasbiy kompetensiyalarini rivojlantirish hususiyatlarini tahlil etish va baholash;
- ijtimoiy va kasbiy tajribaga asoslangan intellektual mashqlarni ishlab chiqish;
- o‘quv jarayoni ishtirokchilarini bir-birlari bilan tanishtirish, samimiy do‘stona munosabat va ijodiy muhitni yuzaga keltirish, tinglovchilarning ijodiy imkoniyati va shaxsiy sifatlarini ochish, tinglovchilarning hamkorlikda ishlashlari uchun qulay sharoitni vujudga keltirish;
- tinglovchilarning kasbiy kompetensiyalarini o‘rganish, tanishish;
- kasbiy kompetetnsiyalarni rivojlantirish jarayonida pedagogik deontologiyaning roli, ahamiyatini ochib berish;
- ta’lim sifatiga ta’sir etuvchi omillar (moddiy-texnik baza, professor-o‘qituvchilarning salohiyati va o‘quv-metodik ta’minot)ni tahlil etish va baholash;
- talabalarning o‘quv auditoriyadan tashqari faoliyatini baholash;
- talabalarning o‘quv auditoriyadan tashqari faoliyatini baholashda o‘quv topshiriqlari (reproduktiv, produktiv, qisman-izlanishli, kreativ (ijodiy) murakkablik)ni ishlab chiqish metodikasidan samarali foydalanish;
- chiziqli almashtirishlar va chiziqli formalardan foydalanish;
- matematik modelni ifodalash shakllarini tahlil etish;
- chiziqli algebra va uning elementlariga doir masalalarini ishlab chiqish;
- chiziqli almashtirish matritsasining turli normal shakllarini qo‘llash;
- jamiyat rivojlanishining demografik modelidan foydalanish;
- jarayonlarni modellashtirishda tabiatning saqlanish qonunlaridan va boshqa usullardan foydalanish;
- Epidemiya modeli asoslarini o‘zlashtirish;
- massa (materiya)ning saqlanish qonunini amaliy ahamiyatini ochib berish;
- bilish jarayonida va insoniing amaliy faoliyatida modellashtirishning rolini ochib berish;
- chiziqli almashtirishlar va ularning matritsalarini graflar nazariyasi va information texnologiyalar sohasida qo ‘llash ***malakalariga*** ega bo‘lishi lozim.

Tinglovchi:

- 2030-yilgacha O‘zbekiston Respublikasining yashil iqtisodiyotga o‘tish va ekologik barqarorlikga erishish strategiyasi mohiyati bilan tanishish;
- “Yashil” va inklyuziv iqtisodiy o‘sish tamoyillariga asoslangan yuqori iqtisodiy o‘sish dasturlarini amaliyotga tadbiq etish;
- yoshlar ma’naviyatini oshirish bo‘yicha davlat dasturlari yuzasidan muhokama tashkil etish va ulardan samarali foydalanish;
- O‘zbekiston Respublikasi Oliy ta’lim, fan va innovatsiya vazirligining buyruqlari asosida ta’lim-tarbiya jarayonlarini tashkil etish;
- Davlat ta’lim standartlari, malaka talablari, o‘quv rejalar va fan dasturlar

asosida fanning ishchi dasturini ishlab chiqish amal qilish va ularni ijrosini ta’minlash;

- oliy ta’lim tizimida manfaatlar to‘qnashuviga yo‘l qo‘yilganlik holatlarini aniqlash, manfaatlar to‘qnashuvi yuzaga kelishi mumkin bo‘lgan sohalarni oldini olish va bartaraf etish uchun chora-tadbirlar ishlab chiqish, fuqarolarni ishga qabul qilish jarayonlarini nazoratga olinishini ta’minlash (nomzodlarni tekshirish tartibi), ushbu sohada qo‘llanishi lozim bo‘lgan xorij tajribasidan foydalanish;
- raqamli ta’lim resurslari va dasturiy mahsulotlarini o‘quv jarayoniga faol tatbiq etilishini tashkil etish;
- raqamli ta’lim resursini pedagogik loyihalash texnologiyasi asoslarini o‘zlashtirish;
- raqamli ta’lim muhitida pedagogik dizaynga oid innovatsiyalarni amaliyotga tatbiq etish;
- meta texnologiyalarni tahlil qilish va ularning ta’limdagi ta’sirini ochib berish;
- sun’iy intellektning asosiy xususiyatlarini asoslab berish;
- universitetlarning xalqaro va milliy reytingini baholash;
- OTMlarda talim, ilmiy va innovatsion faoliyatni rivojlantirish, ilmiy tadqiqot natijalarni tijoratlashtirish yo‘llarini tahlil etish va amaliyotga tadbiq etish;
- «Amaliyotchi professorlar» (PoP, Professor of Practice) modelini qo‘llash;
- professor-o‘qituvchilarning tadqiqotchi sifatidagi nashr faolligini rivojlantirish istiqbollarini yoritib berish;
- pedagogning kasbiy kompetensiyalarini rivojlantirishning nazariy asoslarini amaliyotga tadbiq etish;
- pedagogning kasbiy kompetensiyalarini rivojlantirishning pedagogik-psixologik trayektoriyalarini ishlab chiqish;
- kasbiy kompetensiyalarni rivojlantirish jarayonida uchraydigan to‘siqlarning xilma-xilligi va o‘ziga xos xususiyatlari, sabablarini amaliy tomonlarini yoritish, ularni yechish bosqichlarini guruh bilan birgalikda aniqlash;
- talabalar kasbiy tayyorgarlik sifatini kompleks baholash;
- talabalar kasbiy tayyorgarlik sifatini kompleks baholashning elektron monitoring tizimini yuritish;
- talabalarning ta’limiy (o‘quv predmetlari), tarbiyaviy (ma’naviy-ma’rifiy tadbirlar) va rivojlantiruvchi (ilmiy-tadqiqot ishi, start-up loyihalar) maqsadlarini baholash;
- chiziqli algebrada tatbiq etilgan modullardan foydalanish;
- ierarxiya prinsipidai foydalanib matematik modellar yaratish;
- chiziqli algebra tushunchalari, ta’riflarini o‘zlashtirish va ularni tatbiq etish;
- populyatsiya chiziqsiz modelining uch turdagi rejimini amaliyotga tadbiq etish;
- chizqli tenglamalar sistemasini yechishda yuqori uchburchak ko‘rinishidagi va regular matritsalarni qo‘llash;
- o‘zaro ta’sirlashuvchi populyatsiyalar sonini modellashtirish va tahlil qilish;

- zamonaviy algebraning dolzarb masalalarini yechishda chiziqli algebra elementlari va usullaridan foydalanish;
- matematik modellashtirishda variatsion prinsiplardan foydalanish ***kompetensiyalariga*** ega bo‘lishi lozim.

Modulni tashkil etish va o‘tkazish bo‘yicha tavsiyalar

Modulni o‘qitish ma’ruza va amaliy mashg‘ulotlar shaklida olib boriladi.

- Modulni o‘qitish jarayonida ta’limning zamonaviy metodlari, pedagogik texnologiyalar va axborot-kommunikatsiya texnologiyalari qo‘llanilishi nazarda tutilgan:
- ma’ruza darslarida zamonaviy kompyuter texnologiyalari yordamida prezentatsion va elektron-didaktik texnologiyalardan;
- o‘tkaziladigan amaliy mashg‘ulotlarda texnik vositalardan, ekspress-so‘rovlar, test so‘rovlari, aqliy hujum, guruhli fikrlash, kichik guruhlar bilan ishlash, kollokvium o‘tkazish, va boshqa interaktiv ta’lim usullarini qo‘llash nazarda tutiladi.

Modulning o‘quv rejadagi boshqa modullar bilan bog‘liqligi va uzviyligi

“Chiziqli algebraning tatbiqlari” moduli mazmuni o‘quv rejadagi “Yangi O‘zbekistonning taraqqiyot strategiyasi va jamiyatning ma’naviy asoslari”, “Oliy ta’limning normativ huquqiy asoslari hamda tizimda korrupsiya va manfaatlar to‘qnashuvining oldini olish”, “Pedagogik faoliyatda raqamli kompetensiyalar”,“Ilmiy va innovatsion faoliyatni rivojlantirish”, “Pedagogning kasbiy kompetensiyalarini rivojlantirish” “Ta‘lim sifatini ta’minlashda baholash metodikalari” ,“Tabiiy jarayonlarni matematik modellashtirish” mutaxassislik o‘quv modullari bilan uzviy bog‘langan holda pedagoglarning ta’lim jarayonida kasbiy pedagogik tayyorgarlik darajasini oshirishga xizmat qiladi.

Modulning oliy ta’limdagi o‘rni

Modulni o‘zlashtirish orqali tinglovchilar ta’lim jarayonida zamonaviy algebraning hozirgi kundagi dolzarb masalalari, Chiziqli algebrada tatbiq etilgan modular va Matritsalar nazariyasi, matritsalarning paydo bo‘lish tarixidan foydalanish va amalda qo‘llashga doir kasbiy kompetentlikka ega bo‘ladilar.

Chiziqli algebraning tadbiqlari moduli bo‘yicha soatlar taqsimoti

№	Modul mavzulari	Auditoriya uquv yuklamasi			
		Jami	jumladan		
			Nazariy	Amaiy mashg’ ulot	Ko‘ chma mashg‘ ulot
1.	**Zamonaviy algebraning hozirgi kundagi dolzarb masalalari.** Chiziqli algebrada tatbiq etilgan modular.	10	2	2	6
2.	**Matritsalar nazariyasi, matritsalarning paydo bo‘lish tarixi.** Chiziqli tenglamalar sistemalari, ularni yechish ususllari va tatbiqlari.	4	2	2	
3.	**Chiziqli almashtirishlar va chiziqli formalar.** Chiziqli almashtirishlar va ularning matritsalarini graflar nazariyasi.	10	2	2	6
4.	**Vektor vazolar, chiziqli bog‘liqlilik va chiziqli erklilik.** Yevklid fazosi. Ortogonal basizlar va ularning tatbiqlari.	4	2	2	
	Jami:28	**28**	**8**	**8**	**12**

NAZARIY MASHG‘ULOTLAR MAZMUNI

1-mavzu: Zamonaviy algebraning hozirgi kundagi dolzarb masalalari. (2 soat)

Reja:

1.1. Zamonaviy algebraning dolzarb masalalarini yechishda chiziqli algebra elementlari va usullaridan foydalanish.

1.2. Zamonaviy algebrada foydalaniladigan chiziqli algebra elementlari.

2-mavzu: Matritsalar nazariyasi, matritsalarning paydo bo‘lish tarixi. (2 soat)

Reja:

2.1. Matritsalar va ular ustida amallar.

2.2. Matritsalarning normal formasi va ularning qo‘llanishlari.

2.3.Teskari matritsa va ularni topishning Gaus-Jordan usuli.

2.4. Matritsalar yordamida yechiladigan masalalar.

3-mavzu: Chiziqli almashtirishlar va chiziqli formalar. (2 soat)

Reja:

3.1. Chiziqli almashtirishning normal formalari hamda ularning qo‘llanilishi**.**

3.2. Vektor fazodagi chiziqli almashtirishlar.

3.3. Chiziqli almashtirishlarning matritsalari.

3.4. Chizqli almashtirishning yadrosi va obrazi.

3.5. Chiziqli almashtirish matritsasining turli normal shakllari.

4-mavzu: Vektor vazolar, chiziqli bog‘liqlilik va chiziqli erklilik. (2 soat)

Reja:

4.1. Chiziqli fazo, chiziqli fazoning bazisi va o‘lchami tushunchalari.
4.2. Bazis va o‘lcham, qism fazo tushunchalari.
4.3. Qism fazo tushunchalari, qism fazoning o‘lchami va bazisi.

AMALIY MASHG‘ULOTLAR MAZMUNI

1-amaliy mashg‘ulot: Chiziqli algebrada tatbiq etilgan modular. (2 soat)

Chiziqli algebrada tatbiq etilgan modular. Chiziqli algebra va uning elementlariga doir masalalar. Chiziqli algebra tushunchalari, ta’riflar va ularning tatbiqlari.

2-amaliy mashg‘ulot: Chiziqli tenglamalar sistemalari, ularni yechish ususllari va tatbiqlari. (2 soat)

Chiziqli tenglamalar sistemasi va ularni yechish usullari. Chizqli tenglamalar sistemasini yechishda yuqori uchburchak ko‘rinishidagi va regular matritsalarning qo‘llanilishi.

3-amaliy mashg‘ulot: Chiziqli almashtirishlar va ularning matritsalarini graflar nazariyasi. (2 soat)

Chiziqli almashtirishlar va ularning matritsalarini graflar nazariyasi va information texnologiyalar sohasida qo‘llanilishi.

4-amaliy mashg‘ulot: Yevklid fazosi. Ortogonal basizlar va ularning tatbiqlari. (2 soat)

Yevklid fazosi. Ortogonal va ortonormal bazislar, ularni toppish usullari. Ortogonal bazislarni geometrik masalalar yechishdagi hamda matritsalarni turli normal shakllarini topishdagi tatbiqlari.

KO‘CHMA MASHG‘ULOT MAZMUNI

Ko‘chma mashg‘ulotlar “Zamonaviy algebraning hozirgi kundagi dolzarb masalalari” (6 soat) hamda “Chiziqli almashtirishlar va chiziqli formalar” (6 soat) mavzulari yuzasidan zamonaviy jihozlar hamda innovatsion texnologiyalarni qo‘llab faoliyat yuritayotgan ishlab chiqarish korxona va tashkilotlari, oliy ta’lim muassasalari, iqtisodiyot tarmoqlari, ilmiy-tadqiqot va loyiha-konstruktorlik muassasalarida olib boriladi.

O‘QITISH SHAKLLARI

Mazkur modul bo‘yicha quyidagi o‘qitish shakllaridan foydalaniladi:

- ma’ruzalar, amaliy mashg‘ulotlar (ma’lumotlar va texnologiyalarni anglab olish, aqliy qiziqishni rivojlantirish, nazariy bilimlarni mustahkamlash);
- davra suhbatlari (ko‘rilayotgan loyiha yechimlari bo‘yicha taklif berish qobiliyatini oshirish, eshitish, idrok qilish va mantiqiy xulosalar chiqarish);
- bahs va munozaralar (loyihalar yechimi bo‘yicha dalillar va asosli argumentlarni taqdim qilish, eshitish va muammolar yechimini topish qobiliyatini rivojlantirish).

ADABIYOTLAR

I. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining asarlari

1. Mirziyoyev Sh.M. Buyuk kelajagimizni mard va olijanob xalqimiz bilan birga quramiz. – T.: “O‘zbekiston”, 2017. – 488 b.

2. Mirziyoyev Sh.M. Milliy taraqqiyot yo‘ limizni qat’iyat bilan davom ettirib, yangi bosqichga ko‘ taramiz. 1-jild. – T.: “O‘zbekiston”, 2017. – 592 b.

3. Mirziyoyev Sh.M. Xalqimizning roziligi bizning faoliyatimizga berilgan eng oliy bahodir. 2-jild. T.: “O‘zbekiston”, 2018. – 507 b.

4. Mirziyoyev Sh.M. Niyati ulug‘ xalqning ishi ham ulug‘, hayoti yorug‘ va kelajagi farovon bo‘ ladi. 3-jild.– T.: “O‘zbekiston”, 2019. – 400 b.

5. Mirziyoyev Sh.M. Milliy tiklanishdan – milliy yuksalish sari. 4-jild.– T.: “O‘zbekiston”, 2020. – 400 b.

II. Normativ-huquqiy hujjatlar

1. O‘zbekiston Respublikasining Konstitutsiyasi. – T.: O‘zbekiston, 2023.

2. O‘zbekiston Respublikasining 2020-yil 23-sentabrda qabul qilingan “Ta’lim to‘g‘risida”gi Qonuni.

3. O‘zbekiston Respublikasining “Korrupsiyaga qarshi kurashish to‘g‘risida”gi Qonuni.

4. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2015-yil 12-iyundagi “Oliy ta’lim muassasalarining rahbar va pedagog kadrlarini qayta tayyorlash va malakasini oshirish tizimini yanada takomillashtirish to‘g‘risida”gi PF-4732-sonli Farmoni.

5. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2019-yil 27-maydagi “O‘zbekiston Respublikasida korrupsiyaga qarshi kurashish tizimini yanada takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi PF-5729-son Farmoni.

6. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2019-yil 27-avgustdagi “Oliy ta’lim muassasalari rahbar va pedagog kadrlarining uzluksiz malakasini oshirish tizimini joriy etish to‘g‘risida”gi PF-5789-sonli Farmoni.

7. O‘zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasining 2019-yil 23-sentabrdagi “Oliy ta’lim muassasalari rahbar va pedagog kadrlarining malakasini oshirish tizimini yanada takomillashtirish bo‘yicha qo‘shimcha chora-tadbirlar to‘g‘risida”gi 797-sonli Qarori.

8. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2019-yil 8-oktabrdagi “O‘zbekiston Respublikasi oliy ta’lim tizimini 2030-yilgacha rivojlantirish konsepsiyasini tasdiqlash to‘g‘risida”gi PF-5847- sonli Farmoni.

9. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2020-yil 29-oktabr “Ilm-fanni 2030 yilgacha rivojlantirish konsepsiyasini tasdiqlash to‘g‘risida”gi PF-6097-sonli Farmoni.

10. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2021-yil 17-fevraldagi “Sun’iy intellekt texnologiyalarini jadal joriy etish uchun shart-sharoitlar yaratish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi PQ-4996-son Qarori.

11. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2022-yil 28-yanvardagi “2022-2026 yillarga mo‘ljallangan Yangi O‘zbekistonning taraqqiyot strategiyasi to‘g‘risida”gi PF-60-son Farmoni.

12. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2023-yil 25-yanvardagi “Respublika ijro etuvchi hokimiyat organlari faoliyatini samarali yo‘lga qo‘yishga

doir birinchi navbatdagi tashkiliy chora-tadbirlar to‘g‘risida”gi PF-14-sonli Farmoni.

13. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2023-yil 11-sentabrdagi ““O‘zbekiston - 2030” strategiyasi to‘g‘risida”gi PF-158-son Farmoni.

14. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2024-yil 21-iyundagi “Aholi va davlat xizmatchilarining korrupsiyaga qarshi kurashish sohasidagi bilimlarini uzluksiz oshirish tizimini joriy qilish chora-tadbirlari to‘g‘risida” PQ-228-son Qarori.

III. Maxsus adabiyotlar

1. Oliy ta’limning meyoriy - huquqiy xujjatlari to‘plami. -T., 2013.
2. B.I.Ismailov, I.I.Nasriyev Korrupsiyaga qarshi kurashish bo‘yicha idoraviy chora-tadbirlarning samaradorligini oshirish masalalari//O‘quv-uslubiy qo‘llanma. - T.:O‘zbekiston Respublikasi Bosh prokuraturasi Akademiyasi, O‘zbekiston Respublikasi Sudyalar oliy kengashi. Sudyalar oliy maktabi, 2020.-272 b.
3. Юсуфжанов О., Усманова С. Зарубежный опыт противодействия коррупции. // -Т.: Адвокат, 2016. №5 - 59-62б.
4. O‘rinov V. O‘zbekiston Respublikasi oliy ta’lim muassasalarida ECTS kredit-modul tizimi: asosiy tushunchalar va qoidalar. O‘quv qo‘llanma. Nyu Bransvik Universiteti, 2020.
5. The European Higher Education Area. - Joint Declaration of the Ministers of Education. - Bologna, 1999, 19 June.
6. Shaping our Own Future in the European Higher Education Area // Convention of European Higher Education Institutions. - Salamanca, 2001, 29-30 march.
7. Виртуальная реальность как новая исследовательская и образовательная среда. Серфуз Д.н. и др. // ЖУРНАЛ Научно-аналитический журнал «Вестник Санкт-Петербургского университета Государственной противопожарной службы МЧС России», 2015. – с.185-197.
8. Ibraymov A.YE. Masofaviy o‘qitishning didaktik tizimi. Metodik qo‘llanma. – T.: “Lesson press”, 2020. -112 b.
9. Игнатова Н. Й. Образование в цифровую эпоху: монография. М-во образования и науки РФ. – Нижний Тагил: НТИ (филиал) УрФУ, 2017. – 128 с. http://elar.urfu.ru/bitstream/10995/54216/1/978-5-9544-0083-0_2017.pdf
10. Кирякова А.В, Олховая Т.А., Михайлова Н.В., Запорожко В.В. Интернет-технологии на базе ЛМS Моодле в компетентностно-ориентированном образовании: учебно-методическое пособие / А.В. Кирякова, Т.А. Олховая, Н.В. Михайлова, В.В. Запорожко; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург: ОГУ, 2011. – 116 с. http://www.osu.ru/docs/fpkp/kiryakova_internet_technologies.pdf
11. Кононюк А.Е. Облачние вичисления. – Киев, 2018. – 621 с.
12. Oliy ta’lim tizimini raqamli avlodga moslashtirish konsepsiyasi. Yevropa Ittifoqi Erasmus+ dasturining ko‘magida. https://hiedtec.ecs.uni-ruse.bg/pimages/34/3._UZBEKISTAN-CONCEPT-UZ.pdf
13. Emelyanova O. A. Ta’limda bulutli texnologiyalardan foydalanish // Yosh olim. - 2014. - № 3. - S. 907-909.
14. Moodle LMS tizimida masofaviy kurslar yaratish. O‘quv-uslubiy qo‘llanma. – T.: Toshkent farmatsevtika instituti, 2017.

15. M.Xurramov. Oliy ta’lim muassasalari faoliyatiga sun’iy intellekt texnologiyasini joriy etish [Matn]: metodik qo‘llanma / M.Xurramov. K.Xalmuratova. – T.: “Yetakchi nashriyoti”, 2024. – 28 b.
16. Тенденции и развития высшего образования в мире и в России. Аналитический доклад-дайджест. - М., 2021.- 198 с.
17. A.S. Zikriyoyev. Dunyo universitetlari reytingidagi tadqiqotchi olimlar orasida o‘zingizni kashf qiling. -T.: Navro‘z,2020. ISBN.9789943659285
18. Sherzod Mustafakulov, Aziz Zikriyoev, Dilnoza Allanazarova, Tokhir Khasanov, Sokhibmalik Khomidov. Explore Yourself Among World – Class Researchers. Grand OLEditor, Tashkent 2019, ISBN: 8175 25766-0.
19. Ackoff, Russell L., Scientific Method, New York: John Wiley & Sons, 1962.
20. Barzun, Jacques & Graff. F. (1990). The Modern Researcher, Harcourt, Brace Publication: New York.
21. Muslimov N.A va boshqalar. Innovatsion ta’lim texnologiyalari. O‘quv-metodik qo‘llanma. – T.: “Sano-standart”, 2015. – 208 b.
22. Muslimov N.A va boshqalar. Pedagogik kompetentlik va kreativ asoslari. O‘quv-metodik qo‘llanma. – T.: “Sano-standart”, 2015. – 120 b.
23. Печеркина, А. А. Развитие профессиональной компетентности педагога: теория и практика [Текст] : монография / А. А. Печеркина, Э. Э. Симанюк, Е. Л. Умникова : Урал. гос. пед. ун-т. – Екатеринбург : [б.и.], 2011. – 233 с.
24. О.С. Фролова. Формирование инновационной компетенции педагога в процессе внутришкольного повышения квалификации. Дисс.к.п.н. Воронеж, 2018.
25. Компетенции педагога XXИ века [Электронний ресурс]: сб. материалов респ. конференции (Минск, 25 нояб. 2021 г.) / М-во образования Респ. Беларус, ГУО «Акад. последиплом. образования», ОО «Белорус. пед. о-во». – Минск: АПО, 2021.
26. Ishmuhamedov R.J., M.Mirsoliyeva. O‘quv jarayonida innovatsion ta’lim texnologiyalari. – T.: «Fan va texnologiya», 2017, 60 b.
27. Ishmuhamedov R, Mirsoliyeva M, Akramov A. Rahbarning innovatsion faoliyati. – T.: “Fan va texnologiyalar”, 2019.- 68 b.
28. Коджаспирова Г.М. Педагогика в схемах, таблицах и опорних конспектах./ -М.:Айрис-пресс, 2016.
29. Натанзон Э. Ш. Приёмы педагогического воздействия. М, 2012.-202 с.
30. Сергеев И.С. Основы педагогической деятельности: Учебное пособие. – СПб.: Питер, 2014.
31. To’rayev X., Azizov I., Otaqulov S. Kombinatorika va graflar nazariyasi. Toshkent – 2009. 184 bю
32. Harris J., Hirst J.L., Mossinghoff M. Combinatorics and Graph Theory. Springer 2008. 381 p.
33. Kenneth H. Rosen. Discrete Mathematics and Its Applications. New York – 2012. 1017 p.

34. Ерош И.Л. Дискретная математика, Комбинаторика. Учебное пособие. Санкт Петербург – 2001. 37 ст.
35. Ильинская И.П., Ильинский А.И. Дискретная математика, Сборник задач, Комбинаторика, графы, вероятность. Учебное пособие. Харьков – 2008. 104 ст.
36. Носов В.А. Комбинаторика и теория графов. Москва – 1999. 112 ст.
37. Gilbert Strang “Introduction to Linear Algebra”, USA, Cambridge press, 5 nd Edition, 2016.
38. Grewal B.S. “Higher Engineering Mathematics”, Delhi, Khanna publishers, 42 nd Edition, 2012.
39. . Raxmatov R.R., Adizov A.A., Tadjibayeva Sh.E., Shoimardonov S.K. Chiziqli algebra va analitik geometriya. O‘quv qollanma. T., 2020.
40. Raxmatov R.R., Adizov A.A. “Chiziqli fazo va chiziqli operatorlar” O‘quv uslubiy qollanma. TATU, T., 2019.
41. Музафаров Х.А., Баклушин М.Б., Абдураимов М.Г. Математическое моделирование. Ташкент, Университет. 2002.
42. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование. М., Наука, 2005.
43. Xaydarov A., Kabiljanova F.A., Matyakubov A.S. Matematik modellashtirish asoslari. O‘quv qo‘llanma. Toshkent. 2023. 172 b.
44. Хайдаров А., Жумаев Ж., Шафиев Т.Р. Основы математического моделирования. Учебник. Бухара. 2022. 216 с.
45. O‘runbayev E., Murodov F. Kompyuter algebrasi tizimlarining amaliy tatbiqlari. – SamDU nashri – Samarqand, 2003, 96 b.
46. Usmonov B.SH., Habibullayev R.A. Oliy o‘quv yurtlarida o‘quv jarayonini kredit-modul tizimida tashkil qilish. O‘quv qo‘llanma. T.: “Tafakkur” nashriyoti, 2020 y. 120 b.

IV. Elektron ta’lim resurslari

1. www.edu.uz.
2. www.aci.uz.
3. www.ictcouncil.gov.uz.
4. www.lib.bimm.uz
5. www. Ziyonet. Uz
6. www.sciencedirect.com
7. www.acs.org
8. www.nature.com
9. http://www.kornienko-ev.ru/BCYD/index.html.

II. MODULNI O‘QITISHDA FOYDALANILADIGAN INTERFAOL TA’LIM METODLARI.

“KWHL” metodi

Metodning maqsadi: Mazkur metod tinglovchilarni yangi axborotlar tizimini qabul qilishi va bilimlarni tizimlashtirishi uchun qo‘llaniladi, shuningdek, bu metod tinglovchilar uchun mavzu bo‘yicha qo‘yidagi jadvalda berilgan savollarga javob topish mashqi vazifasini belgilaydi.

Izoh. *KWHL:*
Know – nimalarni bilaman?
Want – nimani bilishni xohlayman?
How - qanday bilib olsam bo‘ladi?
Learn - nimani o‘rganib oldim?

“KWHL” metodi	
1. Nimalarni bilaman: -	***2. Nimalarni bilishni xohlayman, nimalarni bilishim kerak:*** -
3. Qanday qilib bilib va topib olaman: -	***4. Nimalarni bilib oldim:*** -

“W1H” metodi

Metodning maqsadi: Mazkur metod tinglovchilarni yangi axborotlar tizimini qabul qilishi va bilimlarni tizimlashtirishi uchun qo‘llaniladi, shuningdek, bu metod tinglovchilar uchun mavzu bo‘yicha qo‘yidagi jadvalda berilgan oltita savollarga javob topish mashqi vazifasini belgilaydi.

What?	Nima? (ta’rifi, mazmuni, nima uchun ishlatiladi)	
Where?	Qaerda (joylashgan, qaerdan olish mukin)?	
What kind?	Qanday? (parametrlari, turlari mavjud)	
When?	Qachon? (ishlatiladi)	
Why?	Nima uchun? (ishlatiladi)	
How?	Qanday qilib? (yaratiladi, saqlanadi, to‘ldiriladi, tahrirlash mumkin)	

“SWOT-tahlil” metodi

Metodning maqsadi: mavjud nazariy bilimlar va amaliy tajribalarni tahlil qilish, taqqoslash orqali muammoni hal etish yo‘llarni topishga, bilimlarni mustahkamlash, takrorlash, baholashga, mustaqil, tanqidiy fikrlashni, nostandart tafakkurni shakllantirishga xizmat qiladi.

S – (strength)	• kuchli tomonlari
W – (weakness)	• zaif,kuchsiz tomonlari
O – (opportunity)	• imkoniyatlari
T – (threat)	• xavflar

2.1-rasm.

“VEER” metodi

Metodning maqsadi: Bu metod murakkab, ko‘ptarmoqli, mumkin qadar, muammoli xarakteridagi mavzularni o‘rganishga qaratilgan. Metodning mohiyati shundan iboratki, bunda mavzuning turli tarmoqlari bo‘yicha bir xil axborot beriladi va ayni paytda, ularning har biri alohida aspektlarda muhokama etiladi. Masalan, muammo ijobiy va salbiy tomonlari, afzallik, fazilat va kamchiliklari, foyda va zararlari bo‘yicha o‘rganiladi. Bu interfaol metod tanqidiy, tahliliy, aniq mantiqiy fikrlashni muvaffaqiyatli rivojlantirishga hamda o‘quvchilarning mustaqil g‘oyalari, fikrlarini yozma va og‘zaki shaklda tizimli bayon etish, himoya qilishga imkoniyat yaratadi. “Veer” metodidan ma’ruza mashg‘ulotlarida individual va juftliklardagi ish shaklida, amaliy va seminar mashg‘ulotlarida kichik guruhlardagi ish shaklida mavzu yuzasidan bilimlarni mustahkamlash, tahlili qilish va taqqoslash maqsadida foydalanish mumkin.

Metodni amalga oshirish tartibi:


trener-o‘qituvchi ishtirokchilarni 5-6 kishidan iborat kichik guruhlarga ajratadi;


trening maqsadi, shartlari va tartibi bilan ishtirokchilarni tanishtirgach, har bir guruhga umumiy muammoni tahlil qilinishi zarur bo‘lgan qismlari tushirilgan tarqatma materiallarni tarqatadi;


har bir guruh o‘ziga berilgan muammoni atroflicha tahlil qilib, o‘z mulohazalarini tavsiya etilayotgan sxema bo‘yicha tarqatmaga yozma


navbatdagi bosqichda barcha guruhlar o‘z taqdimotlarini o‘tkazadilar. Shundan so‘ng, trener tomonidan tahlillar umumlashtiriladi, zaruriy axborotlr bilan to‘ldiriladi va mavzu yakunlanadi.

2.2-rasm.

Muammoli savol					
1-usul		2-usul		3-usul	
afzalligi	kamchiligi	afzalligi	kamchiligi	afzalligi	kamchiligi
Xulosa:					

"Keys-stadi" metodi

«Keys-stadi» - inglizcha so'z bo'lib, («case» – aniq vaziyat, hodisa, «stadi» – o'rganmoq, tahlil qilmoq) aniq vaziyatlarni o'rganish, tahlil qilish asosida o'qitishni amalga oshirishga qaratilgan metod hisoblanadi. Mazkur metod dastlab 1921 yil Garvard universitetida amaliy vaziyatlardan iqtisodiy boshqaruv fanlarini o'rganishda foydalanish tartibida qo'llanilgan. Keysda ochiq axborotlardan yoki aniq voqea-hodisadan vaziyat sifatida tahlil uchun foydalanish mumkin.

"Keys metodi" ni amalga oshirish bosqichlari

Ish bosqichlari	Faoliyat shakli va mazmuni
1-bosqich: Keys va uning axborot ta'minoti bilan tanishtirish	✓ yakka tartibdagi audio-vizual ish; ✓ keys bilan tanishish (matnli, audio yoki media shaklda); ✓ axborotni umumlashtirish; ✓ axborot tahlili; ✓ muammolarni aniqlash
2-bosqich: Keysni aniqlashtirish va o'quv topshirig'ni belgilash	✓ individual va guruhda ishlash; ✓ muammolarni dolzarblik ierarxiyasini aniqlash; ✓ asosiy muammoli vaziyatni belgilash
3-bosqich: Keysdagi asosiy muammoni tahlil etish orqali o'quv topshirig'ining	✓ individual va guruhda ishlash; ✓ muqobil yechim yo'llarini ishlab chiqish;

yechimini izlash, hal etish yo‘llarini ishlab chiqish	✓ har bir yechimning imkoniyatlari va to‘siqlarni tahlil qilish; ✓ muqobil yechimlarni tanlash
4-bosqich: Keys yechimini shakllantirish va asoslash, taqdimot.	✓ yakka va guruhda ishlash; ✓ muqobil variantlarni amalda qo‘llash imkoniyatlarini asoslash; ✓ ijodiy-loyiha taqdimotini tayyorlash; ✓ yakuniy xulosa va vaziyat yechimining amaliy aspektlarini yoritish

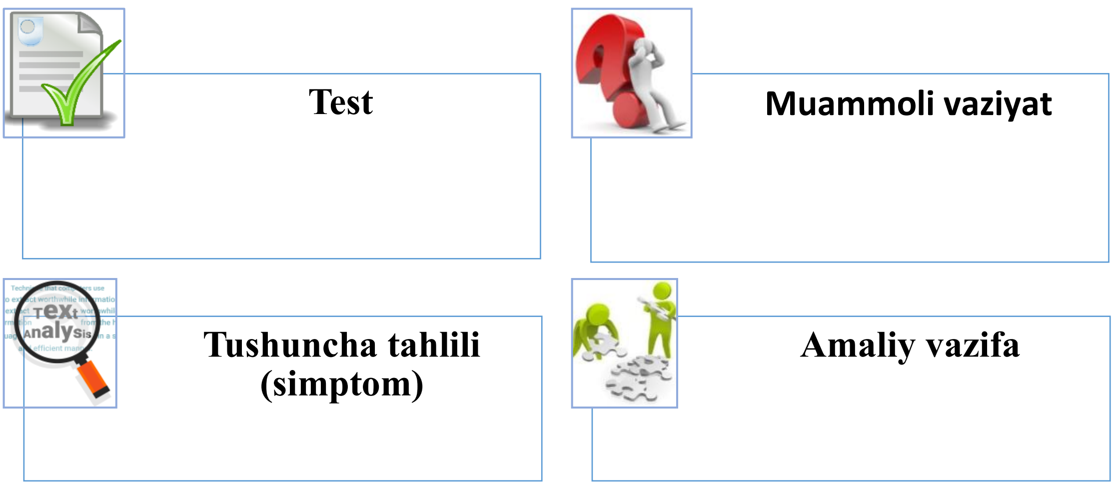
“Assesment” metodi

Metodning maqsadi: mazkur metod ta’lim oluvchilarning bilim darajasini baholash, nazorat qilish, o‘zlashtirish ko‘rsatkichi va amaliy ko‘nikmalarini tekshirishga yo‘naltirilgan. Mazkur texnika orqali ta’lim oluvchilarning bilish faoliyati turli yo‘nalishlar (test, amaliy ko‘nikmalar, muammoli vaziyatlar mashqi, qiyosiy tahlil, simptomlarni aniqlash) bo‘yicha tashhis qilinadi va baholanadi.

Metodni amalga oshirish tartibi:

“Assesment”lardan ma’ruza mashg‘ulotlarida talabalarning yoki qatnashchilarning mavjud bilim darajasini o‘rganishda, yangi ma’lumotlarni bayon qilishda, seminar, amaliy mashg‘ulotlarda esa mavzu yoki ma’lumotlarni o‘zlashtirish darajasini baholash, shuningdek, o‘z-o‘zini baholash maqsadida individual shaklda foydalanish tavsiya etiladi. Shuningdek, o‘qituvchining ijodiy yondashuvi hamda o‘quv maqsadlaridan kelib chiqib, assesmentga qo‘shimcha topshiriqlarni kiritish mumkin.

Har bir katakdagi to‘g‘ri javob 5 ball yoki 1-5 balgacha baholanishi mumkin.



2.3-rasm.

“Insert” metodi

Metodni amalga oshirish tartibi:

- o‘qituvchi mashg‘ulotga qadar mavzuning asosiy tushunchalari mazmuni yoritilgan matnni tarqatma yoki taqdimot ko‘rinishida tayyorlaydi;
- yangi mavzu mohiyatini yorituvchi matn ta’lim oluvchilarga tarqatiladi yoki taqdimot ko‘rinishida namoyish etiladi;
- ta’lim oluvchilar individual tarzda matn bilan tanishib chiqib, o‘z shaxsiy qarashlarini maxsus belgilar orqali ifodalaydilar. Matn bilan ishlashda talabalar yoki qatnashchilarga quyidagi maxsus belgilardan foydalanish tavsiya etiladi:

Belgilar	Matn
“V” – tanish ma’lumot.	
“?” – mazkur ma’lumotni tushunmadim, izoh kerak.	
“+” bu ma’lumot men uchun yangilik.	
“– ” bu fikr yoki mazkur ma’lumotga qarshiman?	

Belgilangan vaqt yakunlangach, ta’lim oluvchilar uchun notanish va tushunarsiz bo‘lgan ma’lumotlar o‘qituvchi tomonidan tahlil qilinib, izohlanadi, ularning mohiyati to‘liq yoritiladi. Savollarga javob beriladi va mashg‘ulot yakunlanadi

III.NAZARIY MASHG‘ULOT MATERIALLARI

1-mavzu: Zamonaviy algebraning hozirgi kundagi dolzarb masalalari. (2 soat)

Reja:

1.1. Zamonaviy algebraning dolzarb masalalarini yechishda chiziqli algebra elementlari va usullaridan foydalanish.

1.2. Zamonaviy algebrada foydalaniladigan chiziqli algebra elementlari.

Chiziqli algebraning daslabki masalasi chiziqli tenglamalar haqidagi masala hisoblanadi. Bunday tenglamalami yechish jarayonida determinant tushunchasi pavdo boidi. Chiziqli tenglamalar sistemasi va ulaming determinantlarini o‘rganish natijasidamatritsa tushunchasi kiritildi. G.Frobennus tomonidan matritsaning rangi tushunchasi kiritilishi chiziqli tenglamalar sistemasining birgalikda va aniq bo‘lshi shartlarini olish imkonini berdi. Shu zaylda XIX asrning oxirlariga kelib, chiziqli tenglamalar sistemasi nazariyasini barpo qilish jarayoni tugatildi.(I, 5b)

Matritsa tushunchasi *1850-yilda JamesJoseph Sylvester tomonidan kiritiigan. Kelmmg 1858-yilda* chop etilgan «*Matritsalar nazariyasi h.aqida memuar»*asarida matritsalar nazariyasi mufassal bayon qilingan. Daslabki vaqtlarda matritsa geometrik obyektlami almashtirish va chiziqli tenglamalami yechish bilan bogiiq holda rivojlantirildi. Hozirgi vaqtda matritsalar matematikaning muhim tatbiqiy vositalaridan biri hisoblanadi. Matritsalar matematika, texnika va iqtisodiyotning turli sohalarida keng qoilaniladi. Masalan, ulardan matematikada algebraik va differensial tenglamalar sistemasini yechishda, kvant nazariyasida frak kattaliklarni oldindan aytishda, aviatsiyada zamonaviy samolyotlarni yaratishda foydalaniladi.(I, 5-6b)

Matritsalar sonlar, algebraik belgilar va matematik funksiyalaming katta massivlarini yagona obyekt sifatida qarasb va bunday massivlami o‘z ichiga olgan masalalami qisqa ko‘rinishda yozish va yechish imkonini beradi. *Matritsa* -bu elementlar (sonlar, algebraik belgilar, matematik funks iyalar) massivining satr hamda ustunlarda berilgan va kichik qavslarga olingan to‘g£ri burchakli jadvalidir. Matritsaning o‘lchami uning satrlari soni va ustunlari soni bilan aniqlanadi. Matritsaning oichamini ifodalash uchun m x a belgi ishlatiladi. Bu belgi matritsaning m ta satr va n ta ustundan tashkil topganini bildiradi. Matritsa lotin alifbosining bosh harflaridan biri biian belgilanadi. Masalan,

3×2 *o'lchamli matritsa*	2×3 *o'lchamli matritsa*	2×2 *o'lchamli matritsa*
$A=\begin{pmatrix}2&5\\0&7\\3&1\end{pmatrix}$	$B=\begin{pmatrix}-1&4&7\\2&5&6\end{pmatrix}$	$C=\begin{pmatrix}\sin x&-\cos x\\\cos x&\sin x\end{pmatrix}$

matritsaning i-satr va /-ustunda joylashgan elementi *a4* bilan belgilanadi. *A = (<*<), {i = Um,j = Xn)* yoki *A=§at* \\, *0:* = йй,У= й*) yozuv *A* matritsa *atj* elementlardan tashkil topganini bildiradi:

$$A=(a_{ij})=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\dots&a_{2n}\\\dots&\dots&\dots&\dots\\a_{m1}&a_{m2}&\dots&a_{mn}\end{pmatrix};\quad A=\|a_{ij}\|=\begin{Vmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\dots&a_{2n}\\\dots&\dots&\dots&\dots\\a_{m1}&a_{m2}&\dots&a_{mn}\end{Vmatrix}$$

1 xn o‘Ichamli *A* = *(*au a12 ... a1л) matritsaga *satr matritsa* yoki *satr-vektor* deyiladi.

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\dots\\a_{m1}\end{pmatrix}$$ 1

/иx1 o‘ichamli A = matritsaga *ustun* matritsa yoki ustun-vektordeyiladi. иxиoicharnli maritsaga *« -tartibli kvadrat matritsa* deyiladi. Kvadrat matritsaning chap yuqori burchagidan o‘ng quyi burchagiga yo‘nalgan *ayi,a,a,...,am* elementlaridan tuzilgan diagonaliga uning boshdiagonali, o‘ng yuqori burchagidan chap quyi burchagiga vo‘nalgan *au,a2(n_,,,...,ая1* elementlardati tuzilgan diagonaliga yordamchidiagonali deyiladi.

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n}\\0&a_{22}&\dots&a_{2n}\\\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&\dots&a_{nn}\end{pmatrix}\quad A'=\begin{pmatrix}a_{11}&0&\dots&0\\a_{21}&a_{22}&\dots&0\\\dots&\dots&\dots&\dots\\a_{n1}&a_{n2}&\dots&a_{nn}\end{pmatrix}$$

Bosh diagonalidan yuqorida (pastda) joylashgan barcha elementlari nolga teng bo‘lgan

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

matritsaga yuqoridan uchburchak (quyidan uchburchak) matritsadeyiladi. Bosh diagonalda jovlashmagan barcha elementlari nolga teng bo‘lganmatritsaga diagonal matritsa deyiladi. Barcha elementlari birga teng boigan diagonal matritsaga birlikmatritsa deyiladi va I (yoki E) harn bilan belgilanadi. Barcha elementlari nolga teng boigan ixtiyoriy oichamdagi matritsaga nol matritsa deyiladi va Oharfi bilan belgilanadi. A matritsada barcha satrlami mos ustunlar bilan almashtirish natijasida hosil qilingan AT matritsaga A matritsaning transponirlangan matritsasi deyiladi: (a9)T =(aJi). Agar A = AT boisa, A matritsaga simmetrik matritsa deyiladi.(I, 7b)
aij, i=1,2,,m, j=1,2,,n sonlarning muayyan tartibda yozilgan quyidagi jadvali

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

m tasatr, *n* ta ustundan tuzilgan mxn o‘lchamli matritsa, deb ataladi. Bunda aij sonlar matritsaning elementlari deyilsa, uning birinchi indeksi i shu element joylashgan satr raqamini, ikkinchi indeksi j esa u joylashgan ustun raqamini bildiradi. Matritsa qisqacha, *A*=||aij|| ko‘rinishda ham yozilishi mumkin. Agar m=n bo‘lsa, A kvadrat matritsa deyiladi. Agar barcha i=1,2,,m, j=1,2,,n lar uchun aij=bij bo‘lsa, bir xil o‘lchamli A=||aij|| va B=||bij|| matritsalarni teng deymiz, ya’ni A=B. Matritsalar uchun ular ustida bajariladigan arifmetik amallar: qo‘shish, ayirish va ko‘paytirish amallarini kiritish mumkin.(II, 4 b).

Chiziqli algebra — matematikaning chiziqli fazolar va ularning chiziqli akslantirishlarini o‘rganuvchi bo‘limi. Chiziqli algebraning rivojlanishi IXX-asrda chiziqli tenglamalarning umumiy nazariyasi vujudga kelishi bilan boshlandi. Chiziqli tenglamalarni o‘rganish jarayonida qo‘llana boshlagan aniqlovchi (determinant) vektorlar, matritsalar kabi tushunchalar matematikada o‘zaro qo‘shish va skalyarga ko‘paytirish mumkin bo‘lgan ob’yektlar alohida o‘rin tutishini anglashga, ularni boshqa konkret xossalaridan ajralgan hodda o‘rganishga olib keldi. IXX-asr oxirida ikkinchi tartibli sirtlarning tenglamalarini kanonik (eng sodda) ko‘rinishga keltirish masalasi chiziqli algebra masalasidan iborat ekanligi aniqlangach, chiziqli algebra ko‘p o‘lchovli fazo analitik geometriyasi bilan qo‘shilib ketdi va chiziqli, bichiziqli, kvadratik formalar, chiziqli almashtirish va akslantirish, Yevklid fazosi, proyektiv fazo tushunchalari bilan boyidi.

Differensial geometriya va mexanika ehtiyoji bilan chiziqli algebra da vektorlarni umumlashtiruvchi tenzorlar, chiziqli va bichiziqli formalarni umumlashtiruvchi yarimchiziqli forma tushunchalari kiritildi. Chiziqli algebraning tenzorlar algebrasi, yarimchiziqli algebra kabi bo‘limlari vujudga keldi.

Nazorat savollari

1. Chiziqli algebra iqtisodiyotda qanday qo‘llaniladi?
2. Mashinali o‘rganishda asosiy komponentalar tahlili (PCA) qanday ishlaydi?
3. Chiziqli algebra kriptografiya sohasida qanday ishlatiladi?
4. Graf nazariyasida chiziqli algebra qanday qo‘llaniladi?

2-mavzu: Matritsalar nazariyasi, matritsalarning paydo bo‘lish tarixi. (2 soat)

Reja:

2.1. Matritsalar va ular ustida amallar.
2.2. Matritsalarning normal formasi va ularning qo‘llanishlari.
2.3.Teskari matritsa va ularni topishning Gaus-Jordan usuli.
2.4. Matritsalar yordamida yechiladigan masalalar.

Matritsa tushunchasi 1850-yilda James Joseph Sylvester tomonidan kiritilgan. Kelining 1858-yilda chop etilgan “Matritsalar nazariyasi haqida memuar” nomli asarida matritsalar nazariyasi to‘liq bayon qilinadi. Dastlabki vaqtlarda matritsa geometrik obyektlarni almashtirish va chiziqli tenglamalarni yechish bilan bog‘liq holda rivojlantirildi. Hozirgi vaqtda matritsalar matematikaning muhim tatbiqiy vositalaridan biri hisoblanadi.Matritsalar sonlar, algebraik belgilar va matematik funksiyalarning katta massivlarini yagona obyekt sifatida qarash va bunday massivlarni o‘z ichiga olgan masalalarni qisqa ko‘rinishda yozish va yechish imkonini beradi. Matritsa deb, elementlar massivining satr hamda ustunlarda berilgan va kichik qavslarga olingan to‘g‘ri to‘rtburchakli jadvalga aytiladi. Matritsaning o‘lchami uning satrlari soni va ustunlari soni bilan aniqlanadi. Matritsaning o‘lchamini ifodalash uchun m×n formula ishlatiladi. Bu formula matritsaning m ta satr va n ta ustundan tashkil topganini ifodalaydi. Matritsa lotin alifbosining bosh harflaridan biri bilan belgilanadi. 1×n o‘lchamli matritsaga satr matritsa yoki satr-vektor deyiladi. m×1 o‘lchamli matritsaga ustun matritsa yoki ustun-vektor deyiladi. n×n o‘lchamli matritsaga n- tartibli kvadrat matritsa deyiladi.

Kvadrat matritsaning chap yuqori burchagidan o‘ng quyi burchagiga yo‘nalgan elementlaridan tuzilgan diagonaliga uning bosh diagonali, o‘ng yuqori burchagidan chap quyi burchagiga yo‘nalgan elementlardan tuzilgan diagonaliga uning yordamchi diagonali deyiladi. Bosh diagonalidan yuqorida yoki pastda joylashgan barcha elementlari nolga teng bo‘lgan matritsaga diagonal matritsa deyiladi. Barcha elementlari birga teng bo‘lgan diagonal matritsaga birlik matritsaga birlik matritsa deyiladi. Barcha elementlari nolga teng bo‘lgan ixtiyoriy o‘lchamdagi matritsaga nol matritsa deyiladi. A matritsada barcha satrlarni mos ustunlar bilan almshtirish natijasida hosil qilingan AT matritsaga A matritsaning transponirlangan matritsasi deyiladi. Agar A=AT bolsa, A matritsaga simmetrik matritsa deyiladi. Bir xil o‘lchovli A va B matritsalarni qo‘shish uchun ularning mos elementlari qo‘shiladi. Ayirish ham xuddi shu tartibda amalga oshiriladi. Matritsani nolda farqli songa ko‘paytirish uchun matritsaning har bir elementini shu songa ko‘paytiramiz. Matritsaning rangi. m×n o‘lchamli A matritsa berilgan bo‘lsin. Bu matritsadan biror k ta satr va k ta ustun ajratamiz. Ajratilgan satr va ustunlarning kesishishida joylashgan elementlardan k- tartibli kvadrta matritsani tuzamiz.

Bu matritsaning determinantiga A matritsaning k- tartibli minori deyiladi. A matritsa noldan farqli minorlari tartibining eng kattasiga A matritsaning rangi deyiladi va r(A) kabi belgilanadi.Tartibi r(A)ga teng bo‘lgan minorga A matritsaning bazis minori deyiladi. Matritsa bir nechta bazis minorga ega bolishi mumkin. Matritsaning rangi quyidagi ikki xossaga bo‘ysinadi: 1. Transponirlash natijasida matritsaning rangi o‘zgarmaydi; 2. Elementar almashtirishlar natijasida matritsaning rangi o‘zgarmaydi. Shunday qilib, matritsalar nafaqat matematika balki, texnika va iqtisodiyotning turli sohalarida keng miqyosda qo‘llaniladi. Misol qilib aytganda, matritsadan matematikada algebraik va differensial tenglamalar sistemasini yechishda, kvant nazariyasida fizik kattaliklarni oldindan aytishda, aviatsiya sohasida esa zamonaviy samolyotlarni yaratishda foydalaniladi.

$m \cdot n$ ta sondan tuzilgan, quyidagi to`g`ri burchakli jadvalga

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots a_{mn} \end{pmatrix}$$

m ta satrli va n ta ustunli matritsa yoki mxn o`lchamli matritsa deb ataladi.

Matritsaning o‘lchami uning satrlari soni va ustunlari soni bilan aniqlanadi. Matritsaning o‘lchamini ifodalash uchun $m \times n$ belgi ishlatiladi. Bu belgi matritsaning m ta satr va n ta ustundan tashkil topganini bildiradi. Matritsaning o‘zi lotin alifbosining bosh harflaridan biri bilan belgilanadi va uning elementlari jadvali kichik qavsga olinadi. **Masalan,**

3×2 *o‘lchamli matritsa*	2×3 *o‘lchamli matritsa*	2×2 *o‘lchamli matritsa*
$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 7 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$	$C = \begin{pmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{pmatrix}$

$a_{i,j} (i = 1,2,\ldots m,\ j = 1,2,\ldots n)$ sonlar matritsaning elementlari deb ataladi. Elementning birinchi indeksi *i* matritsa elementi turgan satr nomerini, ikkinchi indeksi *j* esa ustun nomerini ko`satadi.

A matritsaning i -satr va j -ustunda joylashgan elementi a_{ij} bilan belgilanadi.

$A = (a_{ij})$, $(i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n})$ yoki $A = \| a_{ij} \|$

, $(i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n})$ yozuv A matritsa a_{ij} elementlardan tashkil topganini bildiradi:

$$A=(a_{ij})=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad A=\| a_{ij} \|=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}.$$

$1\times n$ o'lchamli $A=(a_{11} \quad a_{12} \quad \dots \quad a_{1n})$ matritsa *satr matritsa* yoki *satr-vektor* deyiladi.

$m\times 1$ o'lchamli $A=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$ matritsa *ustun matritsa* yoki *ustun-vektor* deyiladi.

$n\times n$ o'lchamli maritsa (satrlari soni ustunlari soniga teng, ya'ni $m=n$ matritsa) n - *tartibli kvadrat matritsa* deyiladi.

Kvadrat matritsaning chap yuqori burchagidan o'ng quyi burchagiga yo'nalgan $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ elementlaridan tuzilgan diagonaliga uning *bosh diagonali*, o'nq yuqori burchagidan chap quyi burchagiga yo'nalgan $a_{1n}, a_{2(n-1)}, \dots, a_{n1}$ elementlardan tuzilgan diagonaliga uning *yordamchi diagonali* deyiladi.

Bosh diagonalidan yuqorida (pastda) joylashgan barcha elementlari nolga teng bo'lgan

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \left(A'=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \right)$$

matritsa *yuqoridan uchburchak (quyidan uchburchak) matritsa* deyiladi.

Bosh diagonalda joylashmagan barcha elementlari nolga teng bo'lgan

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

matritsa *diagonal matritsa* deyiladi.

Diagonal matritsalarning xossasi: Ikkita diagonal matritsaning yigindisi va ko`paytmasi yana diagonal matritsadir.

Barcha elementlari birga teng bo'lgan diagonal matritsa *birlik matritsa* deyiladi va *I* harfi bilan belgilanadi.

Istalgan n-tartibli A kvadrat matritsa uchun ushbu tenglik o‘rinli: $I \cdot A = A \cdot I = A$

Barcha elementlari nolga teng bo‘lgan ixtiyoriy o‘lchamdagi matritsa *nol matritsa* deyiladi va O harfi bilan belgilanadi.

A matritsada barcha satrlarni mos ustunlar bilan almashtirish natijasida hosil qilingan A^T matritsa A matritsaning *transponirlangan matritsasi* deyiladi: $(a_{ij})^T = (a_{ji})$.

Agar $A = A^T$ bo‘lsa, A matritsa *simmetrik,* agar $A_T = -A$ bo`lsa, *qiya simmetrik matritsa* deyiladi. Simmetrik matritsaning bosh diagonalga nisbatan simmetrik joylashgan elementlari teng, qiya simmetrik matritsaning bunday elementlari esa qarama-qarshidir. Qiya simmetrik matritsaning barcha diagonal elementlari nolga teng.

Bir xil o‘lchamli $A = (a_{ij})$ va $B = (b_{ij})$ matritsalarning barcha mos elementlari teng, ya’ni $a_{ij} = b_{ij}$ bo‘lsa, ular *teng matritsalar* deyiladi va $A = B$ deb yoziladi:

$$\boxed{\begin{array}{c} A = B \quad \Leftrightarrow \quad a_{ij} = b_{ij} \\ \text{barcha } i = \overline{1,m}, \ j = \overline{1,n} \text{ uchun} \end{array}}$$

2. Matrisalar ustida amallar

Matritsalar ustidagi asosiy arifmetik amallar - matritsani songa ko`paytirish, matritsalarni qo`shish, ayirish va ularni ko`paytirish amallaridir.

Matritsani songa ko‘paytirish

$$\boxed{C = \lambda A \quad \Leftrightarrow \quad c_{ij} = \lambda a_{ij}.}$$

Ta’rif. $A = (a_{ij})$ *matritsaning* λ *songa ko‘paytmasi* deb, elementlari $c_{ij} = \lambda a_{ij}$ kabi aniqlanadigan $C = \lambda A$ matritsaga aytiladi:

$$\lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{pmatrix}$$

Misol. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ bo‘lsin. $3A$ ni toping.

Yechish. $3A = 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 2 & 3\cdot(-1) & 3\cdot 0 \\ 3\cdot 3 & 3\cdot 4 & 3\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ 9 & 12 & -3 \end{pmatrix}.$

Matritsani songa ko‘paytirish amali ushbu xossalarga ega:

1) kommutativlik xossasi: $\lambda \cdot A = A \cdot \lambda$

2) assotsiativlik xossasi: $(\alpha \cdot B) \cdot A = \alpha \cdot (B \cdot A)$

Matritsalarni qo‘shish

Matritsalarni qo‘shish va ayirish amallari *bir xil o‘lchamli matritsalar* uchun kiritiladi. Bunda yig‘indi matrisa qo‘shiluvchi matritsalar bilan bir xil o‘lchamga ega bo‘ladi.

Ta’rif. $A = (a_{ij})$ va $B = (b_{ij})$ *matritsalarning* *yig‘indisi* deb, elementlari $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ kabi aniqlanadigan $C = A + B$ matritsaga aytiladi

$$\boxed{C = A + B \quad \Leftrightarrow \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}\,.}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\, a_{m2} \ldots a_{mn} \end{pmatrix} \text{ va } \quad B = \begin{pmatrix} b_{11}\, b_{12} \ldots b_{1k} \\ b_{21}\, b_{22} \ldots b_{2k} \\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots \\ b_{m1}\, b_{m2} \ldots b_{mk} \end{pmatrix}$$ matritsalar berilgan bo`lsin

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11}\, a_{12} + b_{12} \ldots a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21}\, a_{22} + b_{22} \ldots a_{2n} + b_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} + b_{m1}\, a_{m2} + b_{m2} \ldots a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

Misol. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ va $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ bo‘lsin. $A + B$ ni toping.

Yechish.

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 & -1+3 & 4+2 \\ 3+1 & 0+0 & 1+(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Matritsalarni qo‘ish amali ushbu xossalarga ega:

1⁰. kommutativlik xossasi: $A + B = B + A$

2⁰. assotsiativlik xossasi: $(A + B) + C = A + (B + C)$

3⁰. qo`shish amaliga nisbatan distributivlik xossasi: $\lambda \cdot (A + B) = \lambda A + \lambda B$

4⁰. sonlarni qo`shishga nisbatan distributivlik xossasi:

$(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$

Matritsani songa ko`paytirish va matritsalarni qo`shish amalining yuqorida aytilgan xossalari bu amallarning ta'riflari, haqiqiy sonlarni qo`shish va ko`paytirish amallarining kommutativlik va assotsiativlik xossalari hamda ko`paytirishning qo`shishga nisbatan distributuvlik xossasining natijasidir.

Matritsalarni ayirish.

Ta'rif. $A=(a_{ij})$ va $B=(b_{ij})$ *matritsalarning ayirmasi* deb $C=A-B=A+(-B)$ matritsaga aytiladi. Bunda C matritsaning elementlari $c_{ij}=a_{ij}+(-b_{ij})=a_{ij}-b_{ij}$ kabi topiladi.

$$\boxed{C=A-B \quad \Leftrightarrow \quad c_{ij}=a_{ij}-b_{ij}.}$$

$$A-B=\begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & \ldots & a_{1n}-b_{1n} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & \ldots & a_{2n}-b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}-b_{m1} & a_{m2}-b_{m2} & \ldots & a_{mn}-b_{mn} \end{pmatrix}$$

Misol. $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ va $B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ bo'lsin. $A-B$ ni toping.

Yechish.

$$A-B=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2-1 & -3-3 & 2-2 \\ 2-2 & -1-1 & 4-(-1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -6 & 0 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Matritsalarni ko`paytirish

$A-$ satr martitsa va $B-$ ustun matritsa bir xil sondagi elementlarga ega bo'lsin deylik. Bunda A satrning B ustunga ko'paytmasi quyidagicha aniqlanadi:

$$AB=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{12} \\ \ldots \\ b_{1n} \end{pmatrix}=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{12}+\ldots+a_{1n}b_{1n},$$

ya'ni ko'paytma matritsalarning mos elementlari ko'paytmalarining yig'indisiga teng bo'ladi.

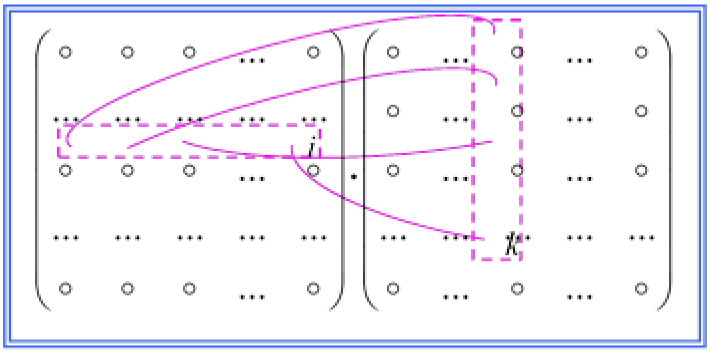
Matritsalarni ko'paytirishning bu qoidasi *satrni ustunga ko'paytirish qoidasi* deb yuritiladi.

Ikki matritsani ko'paytirish amali *moslashtirilgan matritsalar* uchun kiritiladi. A matritsaning ustunlari soni B matritsaning satrlari soniga teng bo'lsa, A va B *matritsalar moslashtirilgan* deyiladi.

Ta'rif. $m\times p$ o'lchamli $A=(a_{ij})$ *matritsaning* $p\times n$ o'lchamli $B=(b_{jk})$ *matritsaga* *ko'paytmasi* AB deb, c_{ik} elementi A matritsaning i -satrini B matritsaning j -ustuniga satrni ustunga ko'paytirish qoidasi bilan,

ya'ni $c_{ik}=a_{i1}b_{1k}+a_{i2}b_{2k}+\ldots+a_{ip}b_{pk}=\sum_{r=1}^{p}a_{ir}b_{rk},\ i=1,\ldots,m,\ k=1,\ldots,n$

(qo'shiluvchlari quyidagi sxemada keltirilgan) kabi aniqlanadigan $m\times n$ o'lchamli $C=(c_{ik})$ matritsaga aytiladi.



Misollar. Berilgan matritsalarni ko'paytiring

1. $$(2\quad 4)\cdot\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}=(2\cdot3+1\cdot4)=(10);$$

2. $$\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}\cdot(3\quad 4)=\begin{pmatrix}2\cdot3 & 2\cdot4\\-1\cdot3 & -1\cdot4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 8\\-3 & -4\end{pmatrix};$$

3. $$\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5 & 6\\7 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot5+2\cdot7 & 1\cdot6+2\cdot8\\3\cdot5+4\cdot7 & 3\cdot6+4\cdot8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}19 & 22\\43 & 50\end{pmatrix};$$

4. $$\begin{pmatrix}2 & 1\\-3 & 4\\0 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 2 & 4\\-1 & 0 & 3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2\cdot3+1\cdot(-1) & 2\cdot2+1\cdot0 & 2\cdot4+1\cdot3\\-3\cdot3+4\cdot(-1) & -3\cdot2+4\cdot0 & -3\cdot4+4\cdot3\\0\cdot3+2\cdot(-1) & 0\cdot2+2\cdot0 & 0\cdot4+2\cdot3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 4 & 11\\-13 & -6 & 0\\-2 & 0 & 6\end{pmatrix}.$$

5.

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\ 1 & -2 & 3\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1 & 5\\ 1 & 3 & -2\\ 3 & -1 & 3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2\cdot 2+3\cdot 1+(-1)\cdot 3 & 2\cdot 1+3\cdot 3+(-1)\cdot(-1) & 2\cdot 5+3\cdot(-2)+(-1)\cdot 3\\ 1\cdot 2+(-2)\cdot 1+3\cdot 3 & 1\cdot 1+(-2)\cdot 3+3\cdot(-1) & 1\cdot 5+(-2)\cdot(-2)+3\cdot 3\\ 3\cdot 2+1\cdot 1+1\cdot 3 & 3\cdot 1+1\cdot 3+1\cdot(-1) & 3\cdot 5+1\cdot(-2)+1\cdot 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 12 & 1\\ 9 & -8 & 18\\ 10 & 5 & 16\end{pmatrix}$$

Agar A matritsaning satrlarini $A_1, A_2, \ldots, A_m$ bilan va B matritsaning ustularini $B_1, B_2, \ldots, B_n$ bilan belgilansa, u holda matritsalarni ko‘paytirish qoidasini quyidagi ko‘rinishda yozish mumkin:

$$C=AB=\begin{pmatrix}A_1\\ A_2\\ \ldots\\ A_m\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}B_1 & B_2 & \ldots & B_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1B_1 & A_1B_2 & \ldots & A_1B_n\\ A_2B_1 & A_2B_2 & \ldots & A_2B_n\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ A_mB_1 & A_mB_2 & \ldots & A_mB_n\end{pmatrix}.$$

Matritsalarni ko‘paytirishda A^2 yozuv ikkita bir xil matritsani ko‘paytmasini bildiradi: $A^2=A\cdot A$ Shu kabi $A^3=A\cdot A\cdot A\cdot\ldots\cdot$ $A^n=\underbrace{A\cdot A\cdot\ldots\cdot A}_{n\ marta}.$

Misol. $f(x)=2x-x^2+5$ va $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ bo‘lsin. $f(A)$ ni toping.

Yechish. Matritsa ko‘rinishdagi $f(A)$ funksiyaga o‘tishda λ sonli qo‘shiluvchi λI ko‘paytma bilan almashtiriladi, bu yerda I - birlik matritsa

$$f(A)=2A-A^2+5I=2\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}+5\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 0 & 4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & -3\\ 0 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 1\\ 0 & 5\end{pmatrix}.$$

Umuman olganda matritsalarni ko‘paytirish nokommutativ, ya’ni $AB\neq BA$. Masalan, $1\times n$ o‘lchamli A matritsaning $n\times 1$ o‘lchamli B matritsaga AB ko‘payt masi sondan, ya’ni 1×1 o‘lchamli matritsadan iborat bo‘lsa, BA ko‘paytmasi n - tartibli kvadrat matritsa bo‘ladi.

Bir xil tartibli A va B kvadrat matritsalar uchun $AB=BA$ bo‘lsa, A va B matritsalar *kommutativ matritsalar*, $AB-BA$ ayirma esa *kommutator* deyiladi.

Misol. $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}$ va $B=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 4 & -1\end{pmatrix}$ matritsalarning kommutatorini toping.

Yechish. $AB=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 5\\ 4 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot3+1\cdot4 & 2\cdot5+1\cdot(-1)\\ 0\cdot3+3\cdot4 & 0\cdot5+3\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & 9\\ 12 & -3\end{pmatrix}$,

$$BA=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 4 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot2+5\cdot0 & 3\cdot1+5\cdot3\\ 4\cdot2+(-1)\cdot0 & 4\cdot1+(-1)\cdot3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 18\\ 8 & 1\end{pmatrix},$$

$$AB-BA=\begin{pmatrix}10 & 9\\ 12 & -3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}6 & 18\\ 8 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -9\\ 4 & -4\end{pmatrix}.$$

Matritsalarni ko‘paytirish amali ushbu xossalarga ega* [1]*:

1°. A matritsa $m\times n$ o‘lchamli va B,C matritsalar $n\times p$ o‘lchamli bo‘lsa, $A(B+C)=AB+AC$ bo‘ladi;

2°. A matritsa $m\times n$ o‘lchamli va B,C matritsalar $n\times p$ o‘lchamli bo‘lsa, $A(B+C)=AB+AC$ bo‘ladi;

3°. A,B,C matritsalar mos ravishda $m\times n$, $n\times p$, $p\times q$ o‘lchamli bo‘lsa, $A(BC)=(AB)C$ bo‘ladi;

4°. (4) A,B,I,O moslashtirilgan matritsalar va λ,μ skalyar sonlar bo‘lsa, u holda:

1) $(\lambda A)(\mu B)=(\lambda\mu)(AB)$; 2) $A(\lambda B)=(\lambda A)B=\lambda(AB)$;

3) $AI=IA=A$; 4) $AO=OA=O$;

5) $(AB)^T=B^TA^T$.

5°. $A,I,O-n$ - tartibli kvadrat matritsalar va p,q manfiy bo‘lmagan butun sonlar bo‘lsa, u holda:

1) $A^pA^q=A^{p+q}$; 2) $(A^p)^q=(A)^{pq}$; 3) $A^1=A$; 4) $A^0=I$.

Isboti. Xossalardan ayrimlari ta’riflar yordamida isbotlanadi va ayrimlarining to‘g‘riligiga misollarni yechish orqali ishonch hosil qilish mumkin.

3° -xossani to‘g‘riligiga misol yechish orqali ishonch hosil qilamiz.

$A=(1\quad 2)$, $B=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 0 & 4\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-2 & 4 & 1\\ 5 & 0 & 2\end{pmatrix}$ matritsalar berilgan bo‘lsin.

U holda

$$BC=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 0 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 4 & 1\\ 5 & 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-11 & 12 & 1\\ 20 & 0 & 8\end{pmatrix},$$

$$A(BC)=\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-11 & 12 & 1\\ 20 & 0 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}29 & 12 & 17\end{pmatrix},$$

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & -1\\ 0 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 7\end{pmatrix},$$

$$(AB)C=\begin{pmatrix}3 & 7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 4 & 1\\ 5 & 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}29 & 12 & 17\end{pmatrix}.$$

Demak, $A(BC)=(AB)C$.

3. Teskari matritsa

Bizga ma'lumki I birlik matritsa va $A\cdot I=I\cdot A=A$ tenglik o`rinli.

1-Ta'rif. A matritsa uchun $A\cdot B=I$ tenglikni qanoatlantiruvchi B matritsa A ga *teskari* matritsa deyiladi va u $B=A^{-1}$ ko`rinishda belgilanadi.

2-Ta'rif. Barcha satr vektorlari chiziqli erkli matritsa *xosmas* (aynimagan) matritsa, barcha satr vektorlari chiziqli bog`langan matritsa *xos* (aynigan) matritsa deb ataladi.

Xosmas matritsalarga doir quyidagi ikkita teoremani isbotsiz keltiramiz.

1-Teorema. Xosmas matritsani elementar almashtirishlar yordamida birlik matritsaga keltirish mumkin.

2-Teorema. Xosmas matritsaga teskari matritsa mavjud va yagonadir. (Teoremaning isbotlari A.G.Kuroshning «Oliy algebra kursi» kitobida keltirilgan).

Teskari matritsani topish.

Aytaylik, $n-$tartibli kvadrat, xosmas A matritsa berilgan bo`lsin:

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\ \dots\ a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}\ \dots\ a_{2n}\\ \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2}\ \dots\ a_{nn}\end{pmatrix}$$

A matritsaga teskari B matritsani topish uchun, uni quyidagi ko`rinishda yozamiz:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}a_{11} & a_{12} & \dots\ a_{1n} & 1 & 0 & \dots\ 0\\ a_{21} & a_{22} & \dots\ a_{2n} & 0 & 1 & \dots\ 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots\ a_{nn} & 0 & 0 & \dots\ 1\end{array}\right) \qquad (1)$$

Chap tomonida berilgan A matritsa, o`ng tomonda $I$ birlik matritsa yozilgan. Bu matritsalarning ikkalasiga bir vaqtda $A$ matritsani birlik $I$ matritsaga keltiradi gan satrlar bo`yicha elementar almashtirishlar qo`llaymiz.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \ldots & 0 & b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{array}\right) \quad \ldots\ldots(2)$$

(2) ning o`ng tomonidagi matritsa xuddi $A$ ga teng teskari $B$ matritsani ifoda laydi, ya’ni $A \cdot B = I$ bo`ladi. A matritsa o`z navbatida $B$ ga teskari bo`lganligi sababli $B \cdot A = I$ ham bajariladi.

Misol. Berilgan *A* matritsaga teskari bo`lgan A^{-1} matritsani toping.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 7 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix};$$

Yechish. Buning uchun quyidagi matritsani tuzamiz: $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

Birinchi ustunni 1 ga, so`ngra -2 ga ko`paytirib, mos ravishda ikkinchi va uchinchi ustunga qo`shamiz:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Ikkinchi ustunni 2 ga va 1 ga ko`paytirib, mos ravishda birinchi va uchinchi ustunga qo`shamiz:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Uchinchi ustunni –3 ga ko`paytirib, birinchi ustunga qo`shamiz va ikkinchi ustunni –1 ga ko`paytiramiz:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 6 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Ikkinchi va uchinchi ustunlarni almashtiramiz:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 6 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Natijada A ga teskari A^{-1} matritsaga ega bo`lamiz:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Nazorat savollari

1. Matritsa nima?
2. Matritsalar ustidagi amallarni izohlang.
3. Qanday shartda matritsalarni qo`shish mumkin?
4. Qanday shartda matritsalarni ko`paytirish mumkin?
5. Teskari matritsa deb nimaga aytiladi?
6. Kvadrat matritsa deb nimaga aytiladi?
7. Birlik matritsa deb nimaga aytiladi?
8. Matritsani songa ko`paytirishning xossalarini ayting.

3-mavzu: Chiziqli almashtirishlar va chiziqli formalar. (2 soat)

Reja:

3.1. Chiziqli almashtirishning normal formalari hamda ularning qo‘llanilishi.
3.2. Vektor fazodagi chiziqli almashtirishlar.
3.3. Chiziqli almashtirishlarning matritsalari.
3.4. Chizqli almashtirishning yadrosi va obrazi.
3.5. Chiziqli almashtirish matritsasining turli normal shakllari.

Bizga K maydon ustida aniqlangan V chiziqli fazo va unda $V_1 \subset V$ qism to‘plam berilgan bo‘lsin.

2.1-ta’rif. V_1 qism to‘plam V fazoda aniqlangan qo‘shish va songa ko‘paytirish amallariga nisbatan chiziqli fazo tashkil etsa, V_1 to‘plam V fazoning qism fazosi deyiladi.

Tabiiyki, $V_1 \subset V$ qism to‘plamni qism fazoga tekshirish uchun fazoda berilgan shartlarni hammasini tekshirish lozim bo‘ladi, ammo quyida keltiriladigan teorema bu shartlarning hammasini tekshirish umuman olganda zarur emasligini ko‘rsatadi.

2.2-teorema. $V_1 \subset V$ qism to‘plam V fazoning qism fazosi bo‘lishi uchun quyidagi shartlarning bajarilishi zarur va yetarli:

1) Ixtiyoriy $x, y \in V_1$ elementlar uchun $x + y \in V_1$;

2) Ixtiyoriy $x \in V_1$, $\lambda \in \mathrm{K}$ uchun $\lambda x \in V_1$.

Isbot: Agar V_1 qism fazo bo‘lsa, teoremadagi shartlar o‘rinli bo‘lishi to‘g‘ridan-to‘g‘ri kelib chiqadi.

Aksincha, ya’ni teoremadagi shartlar o‘rinli bo‘lsin. U holda $V_1 \subset V$ qism to‘plamda qo‘shish amaliga nisbatan kommutativlik va assosiativlik shartlari o‘rinli bo‘ladi. Aks holda, bu shartlar V fazoda ham o‘rinli bo‘lmas edi.

$\lambda x \in V_1$ ekanligidan $\lambda = 0$ deb olsak, $0 \cdot x = 0 \in V_1$ ekanligini, $\lambda = -1$ deb olsak, $-x \in V_1$ ni hosil qilamiz.

Xuddi shunday fazoda skalyarlar uchun keltirilgan shartning V_1 qism to‘plam uchun ham o‘rinliligini ko‘rish qiyin emas. □

2.3-natija. $V_1 \subset V$ qism fazo bo‘lishi uchun ixtiyoriy $x, y \in V_1$ va ixtiyoriy $\lambda, \mu \in \mathrm{K}$ uchun $\lambda x + \mu y \in V_1$ bo‘lishi zarur va yetarli.

Endi qism fazolarga doir misollarni keltirib o‘tamiz.

Misol 2.1 a) Faqat nol vektordan iborat bo‘lgan qism to‘plam va V fazoning o‘zi V da qism fazo bo‘ladi. Bu qism fazolar V ning xosmas qism fazolari deyiladi;

b) $\mathbb{R}^2$ tekislikda koordinata boshidan o‘tuvchi ixtiyoriy to‘g‘ri chiziqdagi vektorlar to‘plami qism fazo tashkil etadi;

c) $\mathbb{R}^3$ uch o‘lchamli fazoda koordinata boshidan o‘tuvchi ixtiyoriy tekislikda joylashgan vektorlar to‘plami qism fazo tashkil qiladi;

d) Darajasi n dan oshmaydigan ko‘phadlar fazosi $P_n(x)$ da darajasi $k(k < n)$ dan oshmaydigan ko‘phadlar to‘plami $P_k(x)$ qism fazo tashkil qiladi;

Yuqoridagi misollardan ko‘rinib turibdiki, biror fazoning qism fazolari cheksiz ko‘p bo‘lishi mumkin.

V fazoning ixtiyoriy M qism to‘plami uchun, M dan olingan vektorlarning chiziqli kombinatsiyalari orqali hosil qilingan barcha vektorlar to‘plamini $\langle M \rangle$ kabi belgilaymiz. Hosil bo‘lgan to‘plamga M to‘plamning *chiziqli qobig‘i* deyiladi.

Ravshanki, M to‘plamning chiziqli qobig‘i V fazoning qism fazosi bo‘ladi. $\langle M \rangle$ fazoning o‘lchami M to‘plamning rangi deb ataladi.

Yuqoridagi mulohazadan kelib chiqadiki, agar $\dim V = n$ bo‘lsa, u holda V fazo $m(m \le n)$ o‘lchamli qism fazolarga ega. Xususan, agarda V fazoning $e_1, e_2, ..., e_n$ bazis vektorlaridan tuzilgan $M = \{e_1, e_2, ..., e_m\}$ qism to‘plam uchun, $\langle M \rangle = \langle e_1, e_2, ..., e_m \rangle$ chiziqli qobiqni qarasak, u m o‘lchamli qism fazo bo‘ladi.

Bundan tashqari V chiziqli fazoning o‘zini $e_1, e_2, ..., e_n$ bazis vektorlaridan tuzilgan qobiq deb qarashimiz mumkin.

2.4-ta'rif. Bizga V fazoning qandaydir V' qism fazosi berilgan bo'lsin. Ixtiyoriy $a \in V$ vektor uchun, ushbu

$$V'_a = a + V' = \{a + x \mid x \in V'\} \subset V$$

qism to'plamga V' qism fazoni *a* vektorga siljitishdan hosil bo'lgan *gipertekisligi* deb ataladi.

Aytaylik, $L_1, L_2 \subset V$ qism fazolar berilgan bo'lib, $L_1 \bigcap L_2$ ularning to'plam ma'nosidagi kesishmasi bo'lsin. Ravshanki, $L_1 \bigcap L_2$ qism to'plam bo'sh emas, chunki nol vektor har bir qism fazoga tegishli.

2.5-teorema. L_1, L_2 qism fazolarning kesishmasi $L_1 \bigcap L_2$ qism fazo bo'ladi.

Isbot. Ixtiyoriy λ, μ sonlar va $x, y \in L_1 \bigcap L_2$ vektorlarni olaylik. Ma'lumki, $x, y \in L_1$ va $x, y \in L_2$. L_1 va L_2 qism fazo bo'lganligi uchun $\lambda x + \mu y \in L_1$ va $\lambda x + \mu y \in L_2$. Demak, $\lambda x + \mu y \in L_1 \bigcap L_2$ bo'ladi.

□

Endi qism fazolarning to'plam sifatida birlashmasi $L_1 \bigcup L_2$ ni qaraymiz. Bu to'plam xar doim ham qism fazo bo'lavermaydi. Masalan, tekislikda L_1 sifatida OX o'qida yotuvchi vektorlar to'plamini, L_2 sifatida OY o'qida yotuvchi vektorlar to'plamini olsak, L_1 va L_2 qism fazolar bo'lib, ularning birlashmasi qism fazo bo'lmaydi.

Endi qism fazolarning yig'indisi tushunchasini kiritamiz. L_1, L_2 qism fazolarning yig'indisi deb $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in L_1$, $x_2 \in L_2$ ko'rinishidagi vektorlar to'plamiga aytiladi va $L_1 + L_2$ kabi belgilanadi, ya'ni

$$L_1 + L_2 = \{x_1 + x_2 \mid x_1 \in L_1, x_2 \in L_2\}.$$

2.6-teorema. L_1, L_2 qism fazolarning yig'indisi $L_1 + L_2$ yana qism fazo bo'ladi.

Isbot. Haqiqatan ham, agar ixtiyoriy $\lambda, \mu \in \mathrm{K}$ va $x, y \in L_1 + L_2$ bo'lsa, u holda $x = x_1 + x_2$, $y = y_1 + y_2$, $x_1, y_1 \in L_1$, $x_2, y_2 \in L_2$ bo'lib, bundan

$$\lambda x + \mu y = \lambda(x_1 + x_2) + \mu(y_1 + y_2) = (\lambda x_1 + \mu y_1) + (\lambda x_2 + \mu y_2) \in L_1 + L_2$$

ekanligi kelib chiqadi. □

Endi qism fazolar kesishmasi va yig'indisini o'lchamlari orasidagi munosabatni beruvchi teoremani keltiramiz.

2.7-teorema. V fazoning chekli o‘lchamli L_1, L_2 qism fazolarining o‘lchamlari yig‘indisi ularning kesishmasi va yig‘indisi o‘lchamlarining yig‘indisiga tengdir, ya’ni

$$\dim L_1 + \dim L_2 = \dim L_1 \bigcap L_2 + \dim(L_1 + L_2).$$

Isbot. Faraz qilaylik, $\dim L_1 \bigcap L_2 = k$ bo‘lib, $e_1, e_2, ..., e_k$ uning qandaydir bazisi bo‘lsin. $L_1 \bigcap L_2 \subset L_1$ va $L_1 \bigcap L_2 \subset L_2$ bo‘lganligi uchun, $\dim L_1 = k + s$ $\dim L_2 = k + t$ deb olishimiz mumkin. Tanlangan $e_1, e_2, ..., e_k$ bazisni L_1 va L_2 qism fazolarning bazislarigacha to‘ldiramiz, ya’ni

$$e_1, e_2, ..., e_k, f_1, f_2, ..., f_s$$

vektorlar L_1 qism fazoning bazisi

$$e_1, e_2, ..., e_k, g_1, g_2, ..., g_t$$

vektorlar esa L_2 qism fazoning bazisi bo‘lsin. Biz

$$f_1, f_2, ..., f_s, e_1, e_2, ..., e_k, g_1, g_2, ..., g_t \qquad (2.1)$$

vektorlarni $L_1 + L_2$ fazoda bazis bo‘lishini ko‘rsatamiz. Dastlab, ularning chiziqli erkli ekanligini aniqlaymiz. Faraz qilaylik,

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + ... + \lambda_s f_s + \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 ... + \mu_k e_k + \nu_1 g_1 + \nu_2 g_2 + ... + \nu_t g_t = 0$$

bo‘lsin. U holda

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + ... + \lambda_s f_s + \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 ... + \mu_k e_k = -\nu_1 g_1 - \nu_2 g_2 - ... - \nu_t g_t$$

bo‘lib, tenglikning chap tomoni L_1 ga o‘ng tomoni esa L_2 ga tegishli ekanligi kelib chiqadi. Demak, tenglikning chap va o‘ng tomonlari $L_1 \bigcap L_2$ qism fazoga tegishli. $e_1, e_2, ..., e_k$ vektorlar $L_1 \bigcap L_2$ da bazis bo‘lganligi uchun $-\nu_1 g_1 - \nu_2 g_2 - ... - \nu_t g_t$ vektorni ular bazis orqali chiziqli ifodalash mimkin, ya’ni qandaydir $c_1, c_2, ..., c_k$ lar uchun

$$-\nu_1 g_1 - \nu_2 g_2 - ... - \nu_t g_t = c_1 e_1 + c_2 e_2 + ... + c_k e_k.$$

tenglik o‘rinli. Bundan

$$c_1 e_1 + c_2 e_2 + ... + c_k e_k + \nu_1 g_1 + \nu_2 g_2 + ... + \nu_t g_t = 0$$

hosil bo‘ladi, bu vektorlarning chiziqli erkli ekanligidan

$$c_1 = c_2 = \ldots = c_k = \nu_1 = \nu_2 = \ldots = \nu_t = 0$$

kelib chiqadi. Bularni yuqoridagi tenglikka olib borib qo'ysak,

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_s f_s + \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 \ldots + \mu_k e_k = 0$$

tenglik hosil bo'ladi. $e_1, e_2, \ldots, e_k, f_1, f_2, \ldots, f_s$ vektorlarning chiziqli erkli ekanligidan $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_s = 0,\ \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_s = 0$ kelib chiqadi. Demak, (2.1) vektorlar sistemasi chiziqli erkli ekan.

Endi ixtiyoriy $x \in L_1 + L_2$ vektorni (2.1) vektorlar sistemasi orqali chiziqli ifodalanishini ko'rsatamiz. Ta'rifga asosan, $x = x_1 + x_2,\ x_1 \in L_1,\ x_2 \in L_2$, bo'lib, x_1 va x_2 vektorlarni bazis vektorlar orqali yoysak,

$$x_1 = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \ldots + a_k e_k + a_{k+1} f_1 + \ldots + a_{k+s} f_s$$

va

$$x_2 = b_1 e_1 + b_2 e_2 + \ldots + b_k e_k + b_{k+1} g_1 + \ldots + b_{k+t} g_t$$

tengliklar o'rinli bo'ladi. Bundan esa

$$x = x_1 + x_2 = (a_1 + b_1)e_1 + (a_2 + b_2)e_2 + \ldots + (a_k + b_k)e_k +$$

$$a_{k+1} f_1 + a_{k+2} f_2 + \ldots\ldots + a_{k+s} f_s + b_{k+1} g_{k+1} + b_{k+2} g_{k+2} + \ldots + b_{k+t} g_t$$

hosil bo'ladi.

Demak, ixtiyoriy $x \in L_1 + L_2$ vektorni (2.1) vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi orqali ifodalash mumkin. Shunday qilib, biz (2.1) vektorlar sistemasi $L_1 + L_2$ qism fazoning bazisi ekanligini ko'rsatdik. Bundan esa, $\dim(L_1 + L_2) = s + k + t$ ekanligi kelib chiqadi, ya'ni

$$\dim(L_1 + L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 \cap L_2)$$

□

2.8-ta'rif. Agar $L_1 \cap L_2 = \{0\}$ bo'lsa, L_1 va L_2 qism fazolarning yig'indisiga to'g'ri yig'indi deyiladi va $L_1 \oplus L_2$ ko'rinishida yoziladi.

Ravshanki, L_1 va L_2 qism fazolarning to'g'ri yig'indilari uchun

$$\dim(L_1 \oplus L_2) = \dim L_1 + \dim L_2$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

2.9-teorema. $L_1 \oplus L_2$ to‘g‘ri yig‘indining ixtiyoriy vektori L_1 va L_2 qism fazolar vektorlarining yig‘indisi shaklida yagona ravishda ifodalanadi.

Isbot. Teskarisini faraz qilamiz, ya’ni

$$x = x_1 + x_2,\ x_1 \in L_1,\ x_2 \in L_2$$

va

$$x = y_1 + y_2,\ y_1 \in L_1,\ y_2 \in L_2$$

bo‘lsin. U holda bu tengliklardan $y_1 - x_1 = x_2 - y_2$ hosil bo‘ladi.

$$y_1 - x_1 \in L_1,\ x_2 - y_2 \in L_2 \text{ va } L_1 \bigcap L_2 = \{0\}$$

ekanligidan

$$y_1 - x_1 = x_2 - y_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = y_1,\ x_2 = y_2$$

kelib chiqadi. □

Shuni ta’kidlash joizki, V fazoning bir nechta $L_1, L_2, ..., L_s$, qism fazolari uchun ham $\bigcap_{i=1}^{s} L_i$ qism fazolarning kesishmasi va $\sum_{i=1}^{s} L_i$ yig‘indisini aniqlash mumkin.

Nazorat savollari

1. Chiziqli tenglamalar tizimi deganda nimani tushunasiz?
2. Matritsalar chiziqli algebra va uning tadbiqlarida qanday rol o‘ynaydi?
3. Cramer qoidasi yordamida chiziqli tenglamalar tizimini qanday yechish mumkin?
4. Determinant qanday aniqlanadi va uning qanday amaliy qo‘llanilishi bor?

4-mavzu: Vektor vazolar, chiziqli bog‘liqlilik va chiziqli erklilik. (2 soat)

Reja:

4.1. Chiziqli fazo, chiziqli fazoning bazisi va o‘lchami tushunchalari.
4.2. Bazis va o‘lcham, qism fazo tushunchalari.
4.3. Qism fazo tushunchalari, qism fazoning o‘lchami va bazisi.

Matematikaning asosiy tushunchalardan biri vektor tushunchasidir. Ular birinchi navbatda maktab matematika kursida u bilan tanishadilar. Maktab kursida vektor turli yo'llar bilan, koordinatalar to'plami , parallel tarjima sifatida, lekin ko'pincha yo'naltirilgan segmentlar to'plami sifatida aniqlanadi. Ushbu yondashuv to'liq oqlanadi. U maktab o'quvchilari uchun mavjud bo'lgan vektor fazosining eng vizual modelidan foydalanadi va ular tomonidan muammolarni hal qilish uchun vektor usulidan amaliy foydalanishda to'liq qo'llanilishi mumkin. Biroq, matematik kontseptsiyani uning modeli bilan almashtirish talabalar oliy matematika bo'limlarini o'rganishni boshlaganlarida, chiziqli fazo tushunchasi talabalar tomonidan yo'naltirilgan segmentlar to'plami bilan to'liq aniqlanishiga olib keladi.

Har qanday chiziqli fazoni qurish uchun asos bo'lgan Veyl aksiomatikasi natijani ta'minlaydigan aniqlik darajasini ta'minlamaydi, shuning uchun yo'naltirilgan segmentlardan boshqa ob'ektlar bilan chiziqli fazoning misollarini mos deb hisoblash mumkin. Bunday chiziqli fazo modelini qurishga misol sifatida bivektorlar yoki chiziqli maydonlarning chiziqli fazosini qurish mumkin. Ikki vektorni qo„shish deb, birinchi vektorning oxiriga ikkinchi vektorning boshi keltirib qo„yilganda birinchi vektorning boshidan chiqib ikkinchi vektorning oxiriga tomon yo„nalgan vektorga aytiladi. a,b,c,...,k vektorlarning yig„indisi deb, quyidagicha yasaladigan a + b + c ... + к vektorga aytiladi. Ixtiyoriy O nuqtaga a vektor qo„yiladi, uning oxiriga b vektorning boshi qo„yiladi va hokazo. Olingan O nuqta a + b + c ... + +k vektorning boshi, eng so„ngi vektorning oxiri esa, yig„indining oxiri deyiladi.

Vektorlarning yig„indisi O nuqtani tanlab olishga bog„liq emas.

Kollinear bo„lmagan ikkita a, b vektorlarning yig„indisi quyidagicha ham yasalishi

mumkin (parallelogramm qoidasi): ikkala a, b vektorni bitta O nuqtadan boshlab OA = a , OB = b vektorlar qo„yiladi; tomonlari OA, OB bo„lgan OBCA parallelogramm

yasaladi, u holda OC = AB + OB = a + b hosil bo„ladi.

X + b = a (2.1) shartni qanoatlantiruvchi x vektorga a, b vektorlarning ayirmasi deyiladi.

Ikki vektorning skalyar ko„paytmasi deb, shu vektorlar modullarining ular

orasidagi burchak kosinusi bilan ko„paytmasiga aytiladi. a va b vektorlar skalyar

ko„paytmasi $a \cdot b$ ko„rinishda belgilanadi. Demak, $a \cdot b = a \cdot b \cdot cos\varphi$, bu yerda φ a va b

vektorlar orasidagi burchak $cos\varphi = a{\cdot}b\ a \cdot b\ a \cdot b$ sondan iborat bo„ladi.

a, b vektorlarning a - b ayirmasini yasash uchun quyidagicha ish ko„riladi: a, b

vektorlar bitta nuqtadan qo„yiladi OA = a , OB = b. U hol OA = a , OB = b da BA = OA + OB = a + b.

a Ф 0 vektorga qarama - qarshi vektor deb a vektorga kollinear, moduli shu vektor moduliga teng, yo„nalishi esa a vektor yo„nalishiga qarama - qarshi bo„lgan vektorga

aytiladi. Ravshanki, qo„shish amalining xossalari quyidagicha bo„ladi:

a + (b + c) = (a + b) + c (assotsiativlik)

a + 0 = a

a + (-a) = 0

Vektorlar uchun bir vaqtning o„zida nolga teng bo„lmagan a, ß, y,..., X sonlar mavjud bo„lib, a-a + ß- b + yk = 0 tenglik bajarilsa, a, b, c,..., k vektorlar chiziqli bog„liq deb ataladi.

Ikki vektorning kollinear bo„lishi uchun ular chiziqli bog„liq bo„lishi zarur va yetarlidir.

Bizga K maydon ustida aniqlangan V chiziqli fazo va unda $V_1 \subset V$ qism to‘plam berilgan bo‘lsin.

Bizga V to‘plam berilgan bo‘lsin. Ixtiyoriy $x, y \in V$ elementlarga ularning yig‘indisi deb ataluvchi $z \in V$ elementni mos qo‘yib, uni $z := x + y$ ko‘rinishda belgilab olamiz. Shuningdek, biror $\mathrm{K}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ maydondan olingan ixtiyoriy $\lambda \in \mathrm{K}$ sonini $x \in V$ elementga ko‘paytmasi sifatida $y \in V$ elementni mos qo‘yamiz va uni $y := \lambda \cdot x$ ko‘rinishda belgilaymiz.

1.1-ta’rif. Agar V to‘plamda aniqlangan qo‘shish va songa ko‘paytirish amallari quyidagi shartlarni qanoatlantirsa, V to‘plam *chiziqli fazo* yoki *vektor fazo* deyiladi:

1) $x + y = y + x$ (kommutativ sharti);

2) $(x + y) + z = x + (y + z)$ (assosiativlik sharti);

3) shunday $0 \in V$ element mavjud bo‘lib, har qanday $x \in V$ uchun $x + 0 = 0 + x = x$, bu yerdagi 0 element *nol element* deyiladi;

4) har qanday $x \in V$ uchun $-x \in V$ bilan belgilanadigan shunday element mavjud bo‘lib, $x + (-x) = (-x) + x = 0$;

5) $1 \cdot x = x;$

6) $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = \alpha\beta \cdot x = \beta \cdot (\alpha \cdot x);$

7) $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x;$

8) $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y;$

bu yerda, $\alpha, \beta \in \mathrm{K},\ x, y \in V.$

Misol 1.1. a) Haqiqiy (kompleks) sonlar maydoni $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) o‘z ustida chiziqli fazo tashkil etadi.

b) Tekislikdagi (fazodagi) vektorlar to‘plami vektorlarni qo‘shish va songa ko‘paytirish amallariga nisbatan chiziqli fazo tashkil etadi.

c) Darajasi n dan oshmaydigan haqiqiy (kompleks) koeffitsientli barcha ko‘phadlar to‘plami ko‘phadlarni qo‘shish va ko‘phadni songa ko‘paytirish amallariga nisbatan chiziqli fazo tashkil etadi.

d) Barcha $n\times m-$tartibli matritsalar to‘plami matritsalarni qo‘shish va matritsani songa ko‘paytirish amallariga nisbatan chiziqli fazo tashkil etadi.

Chiziqli fazo elementlarini *vektorlar* deb atash qabul qilingan. Agar chiziqli fazo haqiqiy (kompleks) sonlar maydonida berilgan bo‘lsa *haqiqiy (kompleks) chiziqli fazo* deyiladi.

Bizga V chiziqli fazo berilgan bo‘lib, $x_1, x_2, ..., x_n$ vektorlar chiziqli fazoning elementlari bo‘lsin. $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n$ yig‘indi vekrorlarning chiziqli kombinatsiyasi deyiladi, bu yerda $\alpha_i \in \mathrm{K}$.

1.2-ta’rif. Agar kamida bittasi noldan farqli bo‘lgan $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ sonlar mavjud bo‘lib,

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n = 0$$

tenglik o‘rinli bo‘lsa, u holda $x_1, x_2, ..., x_n$ vektorlar chiziqli bog‘liq vektorlar deyiladi.

Chiziqli bog‘liq bo‘lmagan vektorlar chiziqli *erkli vektorlar* deyiladi. Ya’ni,

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n = 0$$

tenglik $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$ bo‘lgan holdagina o‘rinli bo‘lsa, $x_1, x_2, ..., x_n$ vektorlar chiziqli erkli vektorlar deyiladi.

1.3-tasdiq. Agar $x_1, x_2, ..., x_n$ vektorlar chiziqli bog‘liq bo‘lsa, u holda ulardan kamida bittasi qolganlarining chiziqli kombinatsiyasi orqali ifodalaniladi. Va aksincha, agar vektorlarning bittasi qolganlarining chiziqli kombinatsiyasi orqali ifodalansa, bu vektorlar chiziqli bog‘liq bo‘ladi.

Isbot. Aytaylik, $x_1, x_2, ..., x_n$ vektorlar chiziqli bog‘liq bo‘lsin. U holda

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n = 0$$

chiziqli kombinatsiyadagi koeffitsientlarning kamida bittasi noldan farqli. Umumiylikka ziyon yetkazmagan holda, $\alpha_1 \neq 0$ deb olishimiz mumkin. U holda $\alpha_1 x_1 = -\alpha_2 x_2 - \alpha_3 x_3 - ... - \alpha_n x_n$ tenglikdan

$$x_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}x_2 - \frac{\alpha_3}{\alpha_1}x_3 - \ldots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1}x_n$$

kelib chiqadi. $\lambda_i = -\frac{\alpha_i}{\alpha_1}$, $2 \le i \le n$ kabi belgilasak, x_1 vektor $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi shaklida

$$x_1 = \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \ldots + \lambda_n x_n$$

kabi ifodalanishini hosil qilamiz.

Aksincha, agar x_1 vektor $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi shaklida $x_1 = \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \ldots + \lambda_n x_n$ kabi ifodalansa, $x_1 - \lambda_2 x_2 - \lambda_3 x_3 - \ldots - \lambda_n x_n = 0$ tenglikdan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vektorlarning chiziqli bog‘liq ekanligi kelib chiqadi.

Misol 1.2. Agar $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vektorlar orasida nol vektor bo‘lsa, u holda bu vektorlar chiziqli bog‘liq bo‘ladi.

Endi fazoning o‘lchami tushunchasini kiritamiz.

1.4-ta’rif. Agar V chiziqli fazoda n ta chiziqli erkli vektorlar mavjud bo‘lib, bundan ortiq sondagi chiziqli erkli vektorlar mavjud bo‘lmasa, V chiziqli fazo n o‘lchamli fazo deyiladi. Chiziqli fazoning o‘lchami $\dim(V)$ kabi belgilanadi.

Agar V fazoda cheksiz ko‘p chiziqli erkli vektorlar mavjud bo‘lsa, u holda V fazo *cheksiz o‘lchamli fazo* deyiladi.

1.5-ta’rif. n o‘lchamli V fazodagi n ta chiziqli erkli $e_1, e_2, \ldots, e_n$ vektorlar V fazoning *bazisi* deb ataladi.

Misol 1.3. a) To‘g‘ri chiziqdagi vektorlar to‘plamida har qanday ikki vektor proporsional, ya’ni chiziqli bog‘liqdir. Demak, to‘g‘ri chiziq bir o‘lchamli fazoga misol bo‘ladi.

b) Tekislikda ikkita chiziqli erkli vector mavjud, ammo xar qanday uchta vektor chiziqli bog‘liq bo‘ladi. Bundan esa, tekislik ikki o‘lchamli chiziqli fazo ekanligi kelib chiqadi.

Bizga n o‘lchamli V chiziqli fazo va uning biror bazisi berilgan bo‘lsin.

1.6-teorema. n o‘lchamli V chiziqli fazoning ixtiyoriy elementini bazis vektorlarining chiziqli kombinatsiyasi orqali yagona ravishda ifodalash mumkin.

Isbot. Bizga $x \in V$ element va $e_1, e_2, \ldots, e_n$ bazis berilgan bo‘lsin. Chiziqli fazo n o‘lchamli bo‘lganligi uchun $n+1$ ta vektordan iborat $x\, e_1, e_2, \ldots, e_n$ vektorlar chiziqli bo‘g‘liq bo‘ladi. Demak, kamida bittasi noldan farqli bo‘lgan $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sonlar topilib,

$$\alpha_0 x+\alpha_1 e_1+\alpha_2 e_2+...+\alpha_n e_n=0,$$

bo‘ladi. Agar $\alpha_0=0$ bo‘lsa, $\alpha_1 e_1+\alpha_2 e_2+...+\alpha_n e_n=0$ tenglikdan va $e_1, e_2, ..., e_n$ vektorlarning chiziqli erkli ekanligidan $\alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_n=0$ ekanligi kelib chiqadi. Bu esa yuqoridagi mulohazaga zid. Demak, $\alpha_0\neq 0$ bo‘lib,

$$x=-\frac{\alpha_1}{\alpha_0}e_1-\frac{\alpha_2}{\alpha_0}e_2-...-\frac{\alpha_n}{\alpha_0}e_n$$

ekanligi kelib chiqadi, ya’ni $x\in V$ vektor $e_1, e_2, ..., e_n$ vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi orqali ifodalanadi.

Endi hosil qilingan ifodaning yagona ekaniligini ko‘rsatamiz. Faraz qilaylik, x vektorning bazis vektorlar orqali ikki hil ifodasi mavjud bo‘lsin, ya’ni:

$$x=\xi_1 e_1+\xi_2 e_2+...+\xi_n e_n \text{ va } x=\eta_1 e_1+\eta_2 e_2+...+\eta_n e_n.$$

Bu ifodalarni tenglab,

$$(\xi_1-\eta_1)e_1+(\xi_2-\eta_2)e_2+...+(\xi_n-\eta_n)e_n=0$$

tenglikni hosil qilamiz.

$e_1, e_2, ..., e_n$ vektorlar chiziqli erkli bo‘lgani uchun, bu tenglik $\xi_1=\eta_1,\ \xi_2=\eta_2,\ ...,\ \xi_n=\eta_n$ bo‘lgandagina o‘rinlidir. □

1.7-ta’rif. $e_1, e_2, ..., e_n$ vektorlar n o‘lchamli fazoning bazisi bo‘lib,

$$x=\xi_1 e_1+\xi_2 e_2+...+\xi_n e_n$$

bo‘lsa, u holda $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ sonlar x vektorning $e_1, e_2, ..., e_n$ bazisdagi koordinatalari deb ataladi.

1.5-teoremaga muvofiq, ma'lum $e_1, e_2, ..., e_n$ bazisda xar bir vektor bir qiymatli aniqlanadigan koordinatalarga ega.

Agar x va y vektor $e_1, e_2, ..., e_n$ bazisda mos ravishda $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ va $\nu_1, \nu_2, ..., \nu_n$ koordinatalarga ega bo‘lsa, ya’ni,

$$x=\xi_1 e_1+\xi_2 e_2+...+\xi_n e_n,\ y=\nu_1 e_1+\nu_2 e_2+...+\nu_n e_n.$$

U holda $x+y$ vektor $\xi_1+\nu_1, \xi_2+\nu_2, ..., \xi_n+\nu_n$ koordinatalarga ega bo‘ladi, ya’ni

$$x+y=(\xi_1+\nu_1)e_1+(\xi_2+\nu_2)e_2+...+(\xi_n+\nu_n)e_n,$$

Shunday qilib, x va y vektorlarni qo‘shishda ularning bir hil bazisdagi koordinatalari yig‘indisi olinadi.

x vektorni λ soniga ko‘paytirishda esa uning xar bir koordinatasi shu songa ko‘paytiriladi.

Misol 1.4. a) Bizga $V = \mathbb{R}^3$ uch o‘lchamli haqiqiy vektor fazo berilgan bo‘lsin. Bu fazoda $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$ vektorlar bazis tashkil qiladi va ixtiyoriy $x = (x_1, x_2, x_3)$ vektorning ushbu bazisdagi koordinatalari x_1, x_2, x_3 bo‘ladi.

b) $V = P_n(t)$ darajasi n dan oshmaydigan ko‘phadlardan iborat bo‘lgan fazo bo‘lsin. Bu fazoda $e_1 = 1,\ e_2 = t,\ ...,\ e_{n+1} = t^n$ vektorlar to‘plami bazis tashkil qiladi, ya’ni $\dim P_n(t) = n+1.$ Ushbu bazisda ixtiyoriy $f(t) = a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + ... + a_n$ ko‘phad koordinatalari uning $a_0,\ a_1,\ ...,\ a_n$ koeffitsientlaridan iborat bo‘ladi.

Agar $P_n(t)$ fazoda boshqa bazis $e_1' = 1,\ e_2' = t - a,\ ...,\ e_{n+1}' = (t-a)^n$ tanlasak, u holda $f(t)$ ko‘phadning bu bazisdagi koordinatalarini topish uchun uni Teylor qatoriga yoyiladi:

$$f(t) = f(a) + f'(a)(t-a) + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(t-a)^n.$$

Demak, $f(t)$ ko‘phadning

$$e_1' = 1,\ e_2' = t - a,\ ...,\ e_{n+1}' = (t-a)^n$$

bazisdagi koordinatalari $f(a),\ f'(a),\ ...,\ \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$ ko‘rinishida bo‘ladi.

Endi chiziqli fazolar izomorfizmi tushunchasini kiritamiz.

1.8-ta’rif. Bizga V va V' chiziqli fazolar berilgan bo‘lsin. Agar $x \in V$ va $x' \in V'$ vektorlar orasida shunday o‘zaro bir qiymatli $x \leftrightarrow x'$ moslik o‘rnatish mumkin bo‘lib, x va x', hamda y va y' vektorning mosligidan

1) $x + y$ vektor $x' + y'$ vektorga mosligi;

2) λx vektor $\lambda x'$ vektorga mosligi

kelib chiqsa, u holda V va V' chiziqli fazolar izomorf fazolar deyiladi.

1.9-teorema. Bir hil o‘lchamga ega bo‘lgan barcha chiziqli fazolar bir-birlariga izomorfdir.

Isbot. Aytaylik, V va V' chiziqli fazolar n o‘lchamli fazolar bo‘lsin. V va V' fazolar mos ravishda $e_1, e_2, ..., e_n$ va $e'_1, e'_2, ..., e'_n$ bazislarni tanlab olamiz. V fazodan olingan ixtiyoriy

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + ... + \xi_n e_n$$

vektorga V' fazodagi $x' = \xi_1 e'_1 + \xi_2 e'_2 + ... + \xi_n e'_n$ vektorni mos qo‘yamiz.

Bu moslik o‘zaro bir qiymatli bo‘ladi. Haqiqatan ham, har bir x vektor $x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + ... + \xi_n e_n$ ko‘rinishida yagona ravishda tasvirlangani uchun x' vektor ham bir qiymatli aniqlanadi. V va V' fazolarning teng o‘lchamli ekanligini e’tiborga olsak, xar bir $x' \in V'$ vektorga V ning faqat bittagina elementi to‘g‘ri keladi. Demak, bu moslik bir qiymatli moslik ekan.

Agar $x \leftrightarrow x'$ va $y \leftrightarrow y'$ bo‘lib, $x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + ... + \xi_n e_n$ va $y = \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2 + ... + \eta_n e_n$ bo‘lsa, u holda

$$x + y = (\xi_1 + \eta_1)e_1 + (\xi_2 + \eta_2)e_2 + ... + (\xi_n + \eta_n)e_n$$

ekanligidan $x + y \leftrightarrow x' + y'$ moslik o‘rinli ekanligi kelib chiqadi. Xuddi shunday $\lambda x \leftrightarrow \lambda x'$ moslik ham osongina kelib chiqadi. □

Endi vektor vazoning bazisi o‘zgarganda vektorning koordinatalarini qanday o‘zgarishi keltiramiz.

Aytaylik, n o‘lchamli V vektor fazoda $e_1, e_2, ..., e_n$ va $e'_1, e'_2, ..., e'_n$ bazislar berilgan bo‘lib, x vektorning birinchi bazisdagi koordinatalari $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ ikkinchi bazisdagi koordinatalari $\xi'_1, \xi'_2, ..., \xi'_n$ bo‘lsin. U holda

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + ... + \xi_n e_n = \xi'_1 e'_1 + \xi'_2 e'_2 + ... + \xi'_n e'_n.$$

Xar bir e'_i vektor $e_1, e_2, ..., e_n$ vektorlar orqali quyidagicha ifodalansin:

$$\begin{cases} e'_1 = a_{1,1}e_1 + a_{2,1}e_2 + ... + a_{n,1}e_n, \\ e'_2 = a_{1,2}e_1 + a_{2,2}e_2 + ... + a_{n,2}e_n, \\ ...., \\ e'_n = a_{1,n}e_1 + a_{2,n}e_2 + ... + a_{n,n}e_n \end{cases}$$

U holda birinchi bazisdan ikkinchi bazisga o‘tish matritsasi $A = (a_{i,j})$ orqali ifodalanadi. Ma’lumki, ushbu matritsaning determinanti noldan farqli.

Yuqoridagi tenglikdan

$$x=\xi_1 e_1+\xi_2 e_2+\ldots+\xi_n e_n=\xi_1'(a_{1,1}e_1+a_{2,1}e_2+\ldots+a_{n,1}e_n)+$$
$$+\xi_2'(a_{1,2}e_1+a_{2,2}e_2+\ldots+a_{n,2}e_n)+$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+$$
$$+\xi_1'(a_{1,n}e_1+a_{2,n}e_2+\ldots+a_{n,n}e_n)$$

hosil bo‘ladi. $e_1, e_2, ..., e_n$ vektorlarning chiziqli erkli ekanligidan, bu tenglikning o‘ng va chap tomonidagi bazis vektorlar oldidagi koeffitsientlar teng bo‘ladi, ya’ni

$$\begin{cases} \xi_1=a_{1,1}\xi_1'+a_{1,2}\xi_2'+\ldots+a_{1,n}\xi_n', \\ \xi_2=a_{2,1}\xi_1'+a_{2,2}\xi_2'+\ldots+a_{2,n}\xi_n', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \xi_n=a_{n,1}\xi_1'+a_{n,2}\xi_2'+\ldots+a_{n,n}\xi_n'. \end{cases}$$

Demak, berilgan x vektorning koordinatalari orasida quyidagi munosabat o‘rinli:

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \ldots \\ \xi_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1' \\ \xi_2' \\ \ldots \\ \xi_n' \end{pmatrix}.$$

Bundan esa,

$$\begin{pmatrix} \xi_1' \\ \xi_2' \\ \ldots \\ \xi_n' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n} \end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \ldots \\ \xi_n \end{pmatrix}$$

hosil bo‘ladi.

Shunday qilib, x vektorning ikkinchi bazisdagi koordinatalari, birinchi bazisdan ikkinchi bazisga o‘tish matritsasi teskarisi bilan birinchi bazisdagi koordinatalari ko‘paytmasiga teng.

2.1-ta’rif. V_1 qism to‘plam V fazoda aniqlangan qo‘shish va songa ko‘paytirish amallariga nisbatan chiziqli fazo tashkil etsa, V_1 to‘plam V fazoning qism fazosi deyiladi.

Tabiiyki, $V_1 \subset V$ qism to‘plamni qism fazoga tekshirish uchun fazoda berilgan shartlarni hammasini tekshirish lozim bo‘ladi, ammo quyida keltiriladigan teorema bu shartlarning hammasini tekshirish umuman olganda zarur emasligini ko‘rsatadi.

2.2-teorema. $V_1 \subset V$ qism to‘plam V fazoning qism fazosi bo‘lishi uchun quyidagi shartlarning bajarilishi zarur va yetarli:

1) Ixtiyoriy $x, y \in V_1$ elementlar uchun $x + y \in V_1$;

2) Ixtiyoriy $x \in V_1$, $\lambda \in \mathrm{K}$ uchun $\lambda x \in V_1$.

Isbot: Agar V_1 qism fazo bo‘lsa, teoremadagi shartlar o‘rinli bo‘lishi to‘g‘ridan-to‘g‘ri kelib chiqadi.

Aksincha, ya’ni teoremadagi shartlar o‘rinli bo‘lsin. U holda $V_1 \subset V$ qism to‘plamda qo‘shish amaliga nisbatan kommutativlik va assosiativlik shartlari o‘rinli bo‘ladi. Aks holda, bu shartlar V fazoda ham o‘rinli bo‘lmas edi.

$\lambda x \in V_1$ ekanligidan $\lambda = 0$ deb olsak, $0 \cdot x = 0 \in V_1$ ekanligini, $\lambda = -1$ deb olsak, $-x \in V_1$ ni hosil qilamiz.

Xuddi shunday fazoda skalyarlar uchun keltirilgan shartning V_1 qism to‘plam uchun ham o‘rinliligini ko‘rish qiyin emas. $\square$

2.3-natija. $V_1 \subset V$ qism fazo bo‘lishi uchun ixtiyoriy $x, y \in V_1$ va ixtiyoriy $\lambda, \mu \in \mathrm{K}$ uchun $\lambda x + \mu y \in V_1$ bo‘lishi zarur va yetarli.

Endi qism fazolarga doir misollarni keltirib o‘tamiz.

Misol 2.1 a) Faqat nol vektordan iborat bo‘lgan qism to‘plam va V fazoning o‘zi V da qism fazo bo‘ladi. Bu qism fazolar V ning xosmas qism fazolari deyiladi;

b) $\mathbb{R}^2$ tekislikda koordinata boshidan o‘tuvchi ixtiyoriy to‘g‘ri chiziqdagi vektorlar to‘plami qism fazo tashkil etadi;

c) $\mathbb{R}^3$ uch o‘lchamli fazoda koordinata boshidan o‘tuvchi ixtiyoriy tekislikda joylashgan vektorlar to‘plami qism fazo tashkil qiladi;

d) Darajasi n dan oshmaydigan ko‘phadlar fazosi $P_n(x)$ da darajasi $k(k < n)$ dan oshmaydigan ko‘phadlar to‘plami $P_k(x)$ qism fazo tashkil qiladi;

Yuqoridagi misollardan ko‘rinib turibdiki, biror fazoning qism fazolari cheksiz ko‘p bo‘lishi mumkin.

V fazoning ixtiyoriy M qism to‘plami uchun, M dan olingan vektorlarning chiziqli kombinatsiyalari orqali hosil qilingan barcha vektorlar to‘plamini $\langle M \rangle$ kabi belgilaymiz. Hosil bo‘lgan to‘plamga M to‘plamning *chiziqli qobig‘i* deyiladi.

Ravshanki, M to‘plamning chiziqli qobig‘i V fazoning qism fazosi bo‘ladi. $\langle M\rangle$ fazoning o‘lchami M to‘plamning rangi deb ataladi.

Yuqoridagi mulohazadan kelib chiqadiki, agar $\dim V = n$ bo‘lsa, u holda V fazo $m(m \le n)$ o‘lchamli qism fazolarga ega. Xususan, agarda V fazoning $e_1, e_2, ..., e_n$ bazis vektorlaridan tuzilgan $M = \{e_1, e_2, ..., e_m\}$ qism to‘plam uchun, $\langle M\rangle = \langle e_1, e_2, ..., e_m\rangle$ chiziqli qobiqni qarasak, u m o‘lchamli qism fazo bo‘ladi.

Bundan tashqari V chiziqli fazonining o‘zini $e_1, e_2, ..., e_n$ bazis vektorlaridan tuzilgan qobiq deb qarashimiz mumkin.

2.4-ta’rif. Bizga V fazoning qandaydir V' qism fazosi berilgan bo‘lsin. Ixtiyoriy $a \in V$ vektor uchun, ushbu

$$V'_a = a + V' = \{a + x \mid x \in V'\} \subset V$$

qism to‘plamga V' qism fazoni *a* vektorga siljitishdan hosil bo‘lgan *gipertekisligi* deb ataladi.

Aytaylik, $L_1, L_2 \subset V$ qism fazolar berilgan bo‘lib, $L_1 \bigcap L_2$ ularning to‘plam ma’nosidagi kesishmasi bo‘lsin. Ravshanki, $L_1 \bigcap L_2$ qism to‘plam bo‘sh emas, chunki nol vektor har bir qism fazoga tegishli.

2.5-teorema. L_1, L_2 qism fazolarning kesishmasi $L_1 \bigcap L_2$ qism fazo bo‘ladi.

Isbot. Ixtiyoriy λ, μ sonlar va $x, y \in L_1 \bigcap L_2$ vektorlarni olaylik. Ma’lumki, $x, y \in L_1$ va $x, y \in L_2$. L_1 va L_2 qism fazo bo‘lganligi uchun $\lambda x + \mu y \in L_1$ va $\lambda x + \mu y \in L_2$. Demak, $\lambda x + \mu y \in L_1 \bigcap L_2$ bo‘ladi.

Endi qism fazolarning to‘plam sifatida birlashmasi $L_1 \bigcup L_2$ ni qaraymiz. Bu to‘plam xar doim ham qism fazo bo‘lavermaydi. Masalan, tekislikda L_1 sifatida OX o‘qida yotuvchi vektorlar to‘plamini, L_2 sifatida OY o‘qida yotuvchi vektorlar to‘plamini olsak, L_1 va L_2 qism fazolar bo‘lib, ularning birlashmasi qism fazo bo‘lmaydi.

Endi qism fazolarning yig‘indisi tushunchasini kiritamiz. L_1, L_2 qism fazolarning yig‘indisi deb $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in L_1$, $x_2 \in L_2$ ko‘rinishidagi vektorlar to‘plamiga aytiladi va $L_1 + L_2$ kabi belgilanadi, ya’ni

$$L_1 + L_2 = \{x_1 + x_2 \mid x_1 \in L_1, x_2 \in L_2\}.$$

2.6-teorema. L_1, L_2 qism fazolarning yig‘indisi $L_1 + L_2$ yana qism fazo bo‘ladi.

Isbot. Haqiqatan ham, agar ixtiyoriy $\lambda, \mu \in \mathrm{K}$ va $x, y \in L_1 + L_2$ bo‘lsa, u holda $x = x_1 + x_2,\ y = y_1 + y_2,\ x_1, y_1 \in L_1,\ x_2, y_2 \in L_2$ bo‘lib, bundan

$$\lambda x + \mu y = \lambda(x_1 + x_2) + \mu(y_1 + y_2) = (\lambda x_1 + \mu y_1) + (\lambda x_2 + \mu y_2) \in L_1 + L_2$$

ekanligi kelib chiqadi. □

Endi qism fazolar kesishmasi va yig‘indisini o‘lchamlari orasidagi munosabatni beruvchi teoremani keltiramiz.

2.7-teorema. V fazoning chekli o‘lchamli $L_1,\ L_2$ qism fazolarining o‘lchamlari yig‘indisi ularning kesishmasi va yig‘indisi o‘lchamlarining yig‘indisiga tengdir, ya’ni

$$\dim L_1 + \dim L_2 = \dim L_1 \cap L_2 + \dim(L_1 + L_2).$$

Isbot. Faraz qilaylik, $\dim L_1 \cap L_2 = k$ bo‘lib, $e_1, e_2, \ldots, e_k$ uning qandaydir bazisi bo‘lsin. $L_1 \cap L_2 \subset L_1$ va $L_1 \cap L_2 \subset L_2$ bo‘lganligi uchun, $\dim L_1 = k + s$ $\dim L_2 = k + t$ deb olishimiz mumkin. Tanlangan $e_1, e_2, \ldots, e_k$ bazisni L_1 va L_2 qism fazolarning bazislarigacha to‘ldiramiz, ya’ni

$$e_1, e_2, \ldots, e_k,\ f_1,\ f_2, \ldots,\ f_s$$

vektorlar L_1 qism fazoning bazisi

$$e_1, e_2, \ldots, e_k,\ g_1,\ g_2, \ldots,\ g_t$$

vektorlar esa L_2 qism fazoning bazisi bo‘lsin. Biz

$$f_1, f_2, \ldots, f_s, e_1, e_2, \ldots, e_k, g_1, g_2, \ldots, g_t \tag{2.1}$$

vektorlarni $L_1 + L_2$ fazoda bazis bo‘lishini ko‘rsatamiz. Dastlab, ularning chiziqli erkli ekanligini aniqlaymiz. Faraz qilaylik,

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_s f_s + \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 \ldots + \mu_k e_k + \nu_1 g_1 + \nu_2 g_2 + \ldots + \nu_t g_t = 0$$

bo‘lsin. U holda

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_s f_s + \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 \ldots + \mu_k e_k = -\nu_1 g_1 - \nu_2 g_2 - \ldots - \nu_t g_t$$

bo‘lib, tenglikning chap tomoni L_1 ga o‘ng tomoni esa L_2 ga tegishli ekanligi kelib chiqadi. Demak, tenglikning chap va o‘ng tomonlari $L_1 \cap L_2$ qism fazoga tegishli.

$e_1, e_2, ..., e_k$ vektorlar $L_1 \bigcap L_2$ da bazis bo‘lganligi uchun $-\nu_1 g_1 - \nu_2 g_2 - ... - \nu_t g_t$ vektorni ular bazis orqali chiziqli ifodalash mimkin, ya’ni qandaydir $c_1, c_2, ..., c_k$ lar uchun

$$-\nu_1 g_1 - \nu_2 g_2 - ... - \nu_t g_t = c_1 e_1 + c_2 e_2 + ... + c_k e_k.$$

tenglik o‘rinli. Bundan

$$c_1 e_1 + c_2 e_2 + ... + c_k e_k + \nu_1 g_1 + \nu_2 g_2 + ... + \nu_t g_t = 0$$

hosil bo‘ladi, bu vektorlarning chiziqli erkli ekanligidan

$$c_1 = c_2 = ... = c_k = \nu_1 = \nu_2 = ... = \nu_t = 0$$

kelib chiqadi. Bularni yuqoridagi tenglikka olib borib qo‘ysak,

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + ... + \lambda_s f_s + \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 ... + \mu_k e_k = 0$$

tenglik hosil bo‘ladi. $e_1, e_2, ..., e_k,\ f_1,\ f_2, ...,\ f_s$ vektorlarning chiziqli erkli ekanligidan $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_s = 0,\ \mu_1 = \mu_2 = ... = \mu_s = 0$ kelib chiqadi. Demak, (2.1) vektorlar sistemasi chiziqli erkli ekan.

Endi ixtiyoriy $x \in L_1 + L_2$ vektorni (2.1) vektorlar sistemasi orqali chiziqli ifodalanishini ko‘rsatamiz. Ta’rifga asosan, $x = x_1 + x_2,\ x_1 \in L_1,\ x_2 \in L_2$, bo‘lib, x_1 va x_2 vektorlarni bazis vektorlar orqali yoysak,

$$x_1 = a_1 e_1 + a_2 e_2 + ... + a_k e_k + a_{k+1} f_1 + ... + a_{k+s} f_s$$

va

$$x_2 = b_1 e_1 + b_2 e_2 + ... + b_k e_k + b_{k+1} g_1 + ... + b_{k+t} g_t$$

tengliklar o‘rinli bo‘ladi. Bundan esa

$$x = x_1 + x_2 = (a_1 + b_1)e_1 + (a_2 + b_2)e_2 + ... + (a_k + b_k)e_k +$$

$$a_{k+1} f_1 + a_{k+2} f_2 + ... + a_{k+s} f_s + b_{k+1} g_{k+1} + b_{k+2} g_{k+2} + ... + b_{k+t} g_t$$

hosil bo‘ladi.

Demak, ixtiyoriy $x \in L_1 + L_2$ vektorni (2.1) vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi orqali ifodalash mumkin. Shunday qilib, biz (2.1) vektorlar sistemasi $L_1 + L_2$ qism fazoning bazisi ekanligini ko‘rsatdik. Bundan esa, $\dim(L_1 + L_2) = s + k + t$ ekanligi kelib chiqadi, ya’ni

$$\dim(L_1 + L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 \cap L_2)$$

2.8-ta'rif. Agar $L_1 \cap L_2 = \{0\}$ bo'lsa, L_1 va L_2 qism fazolarning yig'indisiga to'g'ri yig'indi deyiladi va $L_1 \oplus L_2$ ko'rinishida yoziladi.

Ravshanki, L_1 va L_2 qism fazolarning to'g'ri yig'indilari uchun

$$\dim(L_1 \oplus L_2) = \dim L_1 + \dim L_2$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

2.9-teorema. $L_1 \oplus L_2$ to'g'ri yig'indining ixtiyoriy vektori L_1 va L_2 qism fazolar vektorlarining yig'indisi shaklida yagona ravishda ifodalanadi.

Isbot. Teskarisini faraz qilamiz, ya'ni

$$x = x_1 + x_2,\ x_1 \in L_1,\ x_2 \in L_2$$

va

$$x = y_1 + y_2,\ y_1 \in L_1,\ y_2 \in L_2$$

bo'lsin. U holda bu tengliklardan $y_1 - x_1 = x_2 - y_2$ hosil bo'ladi.

$$y_1 - x_1 \in L_1,\ x_2 - y_2 \in L_2 \text{ va } L_1 \cap L_2 = \{0\}$$

ekanligidan

$$y_1 - x_1 = x_2 - y_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = y_1,\ x_2 = y_2$$

kelib chiqadi. □

Shuni ta'kidlash joizki, V fazoning bir nechta $L_1, L_2, ..., L_s$, qism fazolari uchun ham $\bigcap_{i=1}^{s} L_i$ qism fazolarning kesishmasi va $\sum_{i=1}^{s} L_i$ yig'indisini aniqlash mumkin.

Nazorat savollari

1. Vektor fazo tushunchasini izohlang.
2. Chiziqli almashtirish deb nimaga aytiladi? Uning fizikada qo'llanilishi qanday?
3. O'z vektor va o'z qiymatlar nima uchun muhim?
4. Chiziqli fazoda bazis va o'lcham tushunchalarini tushuntiring.

IV.AMALIY MASHG‘ULOTLAR MAZMUNI

1-amaliy mashg‘ulot: Chiziqli algebrada tatbiq etilgan modular. (2 soat)

Chiziqli algebrada tatbiq etilgan modular. Chiziqli algebra va uning elementlariga doir masalalar. Chiziqli algebra tushunchalari, ta’riflar va ularning tatbiqlari.

Ushbu mavzuda kompleks fazoda berilgan ixtiyoriy almashtirish uchun uning matritsasini birmuncha sodda ko‘rinishga keltiruvchi bazisni ko‘rsatamiz.

Aytaylik n o‘lchamli kompleks fazoda A chiziqli almashtirish berilgan bo‘lsin. Agar A chiziqli almashtirish n ta chiziqli erkli xos vektorlarga ega bo‘lsa, bu xos vektorlani bazis sifatida tanlab, chiziqli almashtirish matritsasi diagonal shaklga keltiriladi. Chiziqli almashtirishning chiziqli erkli xos vektorlari soni n dan kichik bo‘lsa, uning matritsasi diagonal shaklga yaqin bo‘lgan normal shaklga keltiriladi.

Ta’kidlash joizki, n o‘lchamli kompleks fazodagi A chiziqli almashtirish turli hil k ta $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ xos qiymatlarga ega bo‘lsa, u holda A almashtirish k tadan kam bo‘lmagan chiziqli erkli xos vektorlarga ega. Umuman olganda, chiziqli erkli xos vektorlar soni turli xos qiymatlar sonidan katta bo‘lishi mumkin.

12.1-teorema. n o‘lchamli kompleks fazoda ixtiyoriy A chiziqli almashtirish berilgan bo‘lib, $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ uning xos sonlari va bu xos sonlarga mos keluvchi $m(m \geq k)$ ta $e_1,\ f_1, ..., h_1$ xos vektorlar bo‘lsin.

U holda

$$e_1, e_2, ..., e_p;\ f_1,\ f_2, ...,\ f_q; ....; h_1, h_2, ..., h_s \qquad (12.1)$$

vektorlardan iborat bazis mavjudki, A almashtirish

$$\begin{aligned} &Ae_1 = \lambda_1 e_1,\ Ae_2 = e_1 + \lambda_1 e_2, ...,\ Ae_p = e_{p-1} + \lambda_1 e_p, \\ &Af_1 = \lambda_2 f_1,\ Af_2 = f_1 + \lambda_2 f_2, ...,\ Af_q = f_{q-1} + \lambda_2 f_q, \\ &.., \\ &Ah_1 = \lambda_k h_1,\ Ah_2 = h_1 + \lambda_k h_2, ...,\ Ah_s = h_{s-1} + \lambda_k h_s \end{aligned} \qquad (12.2)$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

Bu teoremani isbotlashdan avval (12.2) ko‘rinishidagi chiziqli almashtirishlarning xossalarini o‘rganib chiqamiz. Ravshanki, (12.2) ko‘rinishidagi chiziqli almashtirish $e_1, e_2, ..., e_p$ vektorlarni yana shu vektorlarga o‘tkazadi. Xuddi shunday boshqa bazis vektorlar jamlanmasi ham shu vektorlarga o‘tkazadi. Demak, bazis vektorlarning xar bir jamlanmasi A almashtirishga nisbatan invariant qism fazo tashkil qiladi.

Bundan tashqari, xar bir qism fazoda bittadan xos vektor bor. Masalan, $e_1, e_2, ..., e_p$ vektorlarga tortilgan qism fazoda e_1 vektor xos vektor bo‘ladi. Endi bu qism fazolarning xar birida faqat bitta xos vektor bor ekanligini ko‘rsataylik. Haqiqatdan ham, agar $e_1, e_2, ..., e_p$ bazis vektorlardan tuzilgan qism fazoda biror $c_1e_1+c_2e_2+...+c_pe_p$ vektor xos vektor bo‘lsa, u holda

$$A(c_1e_1+c_2e_2+...+c_pe_p)=\lambda(c_1e_1+c_2e_2+...+c_pe_p).$$

Bu tenglikning chap tomoniga (12.2) formuladagi ifodalarini qo‘ysak,

$$c_1\lambda_1e_1+c_2(e_1+\lambda_1e_2)+...+c_p(e_{p-1}+\lambda_1e_p)=c_1\lambda e_1+c_2\lambda e_2+...+c_p\lambda e_p$$

tenglik hosil bo‘ladi. Bundan bazis vektorlarning mos koeffitsientlarini tenglashtirib,

$$\begin{cases} c_1\lambda_1+c_2=\lambda c_1, \\ c_2\lambda_1+c_3=\lambda c_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ c_{p-1}\lambda_1+c_p=\lambda c_{p-1}, \\ c_p\lambda_1=\lambda c_p \end{cases}$$

tenglamalar sistemasiga ega bo‘lamiz.

Dastlab, $\lambda=\lambda_1$ ekanligini ko‘rsatamiz. Chindan ham, agar $\lambda\neq\lambda_1$ bo‘lsa, $c_p=0,$ undan yuqoridagi tenglikdan esa $c_{p-1}=0$ va hokazo, qolgan tengliklardan $c_{p-2}=...=c_2=c_1=0$ ekanligi kelib chiqadi. Bu esa $c_1e_1+c_2e_2+...+c_pe_p$ xos vektorning noldan farqli ekanligiga zid. Demak, $\lambda=\lambda_1$.

Endi $\lambda=\lambda_1$ ekanligidan foydalanib, sistemaning birinchi tenglamasidan $c_2=0,$ ikkinchidan $c_3=0$ va shu tarzda davom etib oxirgi tenglamasidan $c_p=0$ ekanligini hosil qilamiz. Bundan esa xos vektor c_1e_1 ga teng ekanligi kelib chiqadi. Demak, $e_1, e_2, ..., e_p$ vektorlardan qurilgan qism fazo ko‘paytuvchining aniqligida yagona xos vektorga ega. Xuddi shunday qolgan qism fazolar ham ko‘paytuvchining aniqligida yagona xos vektorga ega eganligi ko‘rsatiladi.

Endi (12.2) ko‘rinishidagi almashtirishning matritsasini yozib olamiz. Xar bir qism fazo invariant qism fazo ekanligidan, chiziqli almashtirish matritsasining birinchi p ta ustunida faqat birinchi p ta satr elementlarigina noldan farqli bo‘lishi kelib chiqadi. Xuddi shunday, keyingi q ta ustunning shu ustunlar nomerlari bilan bir hil nomerli satrlarida turgan elementlarigina noldan farqli bo‘lishi va oxirgi s ta ustun uchun ham shu munosabat o‘rinli bo‘ladi.

Shunday qilib, berilgan bazisda (12.2) ko‘rinishidagi almashtirish matritsasi bosh diagonal bo‘yicha joylashgan m ta katakdan iborat bo‘lib, bu kataklarning hech biriga tegishli bo‘lmagan elementlarning hammasi nolga teng bo‘ladi.

Bu kataklarda qanday elementlar turishini bilish uchun esa, xar bir vektorlar jamlanmasining qanday almashtirilishini yana bir marta yozish kifoya, masalan,

$$
\begin{gathered}
Ae_1 = \lambda_1 e_1, \\
Ae_2 = e_1 + \lambda_1 e_2, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\
Ae_{p-1} = e_{p-2} + \lambda_1 e_{p-1}, \\
Ae_p = e_{p-1} + \lambda_1 e_p.
\end{gathered}
$$

Bazisning ma’lum almashtirilishiga javob beradigan matritsaning qanday tuzilishini yodga olsak, berilgan vektorlar jamlanmasiga mos bo‘lgan katagi

$$
A = \begin{pmatrix}
\lambda_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & \lambda_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \lambda_1 & \dots & 0 & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_1
\end{pmatrix} \qquad (12.3)
$$

ko‘rinishida bo‘lishini topamiz. Ushbu ko‘rinishidagi matritsalarga *Jordan kataklari* deb ataladi.

Butun matritsa esa, mos tartibda, $p, q, \dots, s$ tartibli shunga o‘xshash kataklardan tuzilgan, quyidagi ko‘rinishdagi matritsa bo‘ladi

$$
\begin{pmatrix}
\lambda_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & \lambda_1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & \lambda_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_2 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda_2 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_2 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \lambda_k & 1 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \lambda_k & 1 & \dots & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda_k & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_k
\end{pmatrix}.
$$

Chiziqli almashtirish matritsasining ushbu ko‘rinishiga uning *normal shakli* yoki *Jordan normal shakli* deyiladi. Demak, matritsaning Jordan normal shaklida uning dioganali bo‘ylab bir nechta Jordan kataklari joylashib, qolgan elementlari nolga teng bo‘ladi.

Endi biz 12.1-teoremaning isbotida kerak bo‘ladigan qiyidagi lemmani keltiramiz.

12.2-lemma. n o‘lchamli V kompleks fazoda ixtiyoriy A chiziqli almashtirish uchun kamida bitta $n-1$ o‘lchamli invariant qism fazo mavjud.

Isbot. Berilgan chiziqli almashtirishning qo‘shmasi bo‘lgan A^* almashtirishni qaraylik. Xar qanday almashtirishning xos vektori bo‘lgani kabi, A^* ham e xos vektorga ega, ya’ni

$$A^* e = \lambda e.$$

Ushbu e vektorga ortogonal vektorlardan tuzilgan $n-1$ o‘lchamli V' qism fazo A almashtirishga nisbatan invariant ekanligini ko‘rsatamiz. Ixtiyoriy $x \in V'$ uchun $(x, e) = 0$ ekanligidan

$$(Ax, e) = (x, A^* e) = (x, \lambda e) = \overline{\lambda}(x, e) = 0$$

kelib chiqadi. Demak, $Ax \in V'$, ya’ni V' qism fazo A almashtirishga nisbatan invariant. □

Endi biz ixtiyoriy chiziqli almashtirishni Jordan normal shaklga keltirish mumkinligi haqidagi 12.1- teoremaning isbotiga o‘tamiz.

12.1-teoremaning isboti. Biz teorema isbotini chiziqli fazoning o‘lchamiga nisbatan induksiya usulini bo‘yicha olib boramiz. Chiziqli fazo bir o‘lchamli bo‘lganda teorema sharti o‘rinli bo‘lishi ravshan.

Chiziqli almashtirish uchun n o‘lchamli fazoda bunday bazis mavjud deb faraz qilib, $n+1$ o‘lchamli fazoda kerakli bazisni topish mumkin ekanligini isbot qilamiz.

A almashtirish $n+1$ o‘lchamli V fazoda ixtiyoriy chiziqli almashtirish bo‘lsin. 12.2-lemmaga asosan, V fazoda A almashtirishga nisbatan invariant bo‘lgan n o‘lchamli V' qism fazo mavjud. Induksiya faraziga ko‘ra, n o‘lchamli fazoda teorema o‘rinli bo‘lgani uchin, V' fazoda chiziqli almashtirishni normal shaklga keltiradigan bazis mavjud. Bu bazisni

$$e_1, e_2, ..., e_p;\ f_1,\ f_2, ...,\ f_q; ....; h_1, h_2, ..., h_s$$

kabi belgilaylik, bu yerda $p+q+...+s=n.$ Ushbu bazisda chiziqli almashtirish quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi

$$Ae_1 = \lambda_1 e_1,$$
$$Ae_2 = e_1 + \lambda_1 e_2,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots,$$
$$Ae_p = e_{p-1} + \lambda_1 e_p,$$

$$Af_1 = \lambda_2 f_1,$$
$$Af_2 = f_1 + \lambda_2 f_2,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots,$$
$$Af_q = f_{q-1} + \lambda_2 f_q,$$

$$Ah_1 = \lambda_k h_1,$$
$$Ah_2 = h_1 + \lambda_k h_2,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots,$$
$$Ah_s = h_{s-1} + \lambda_k h_s.$$

Bu bazisni $e_1, e_2, ..., e_p;\ f_1,\ f_2, ...,\ f_q; ....; h_1, h_2, ..., h_s$ vektorlar bilan birgalikda V fazoda bazis tashkil qiladigan biror e vektor bilan to‘ldiraylik. Ushbu e vektorga A almashtirishni ta’sir qildirib, Ae vektorni bazis vektorlar bo‘yicha yoyib yozamiz:

$$Ae = \alpha_1 e_1 + ... + \alpha_p e_p + \beta_1 f_1 + ... + \beta_q f_q + ... + \delta_1 h_1 + ... + \delta_s h_s + \tau e.$$

Umimiylikka ziyon yetkazmagan holda, $\tau = 0$ deb olish mumkin. Haqiqatdan ham, agar biror bazisda A chiziqli almashtirish normal shaklda bo‘lsa, u holda $A - \tau E$ almashtirish ham bu bazisda normal shaklda bo‘ladi. Shuning uchun, $\tau \neq 0$ holda A almashtirish o‘rniga $A - \tau E$ almashtirishni qarash mumkin. Demak,

$$Ae = \alpha_1 e_1 + ... + \alpha_p e_p + \beta_1 f_1 + ... + \beta_q f_q + ... + \delta_1 h_1 + ... + \delta_s h_s. \quad (12.4)$$

Endi e vektorni e' vektor bilan Ae' vektor mumkin qadar sodda ko‘rinishda bo‘ladigan qilib almashtiramiz. Buning uchun e' vektorni ushbu ko‘rinishda izlaymiz:

$$e' = e - \chi_1 e_1 - ... - \chi_p e_p - \mu_1 f_1 - ... - \mu_q f_q - ... - \omega_1 h_1 - ... - \omega_s h_s. \quad (12.5)$$

Bundan

$$
\begin{aligned}
&Ae' = Ae - A(\chi_1 e_1 + ... + \chi_p e_p) - \\
&A(\mu_1 f_1 + ... + \mu_q f_q) - ... - A(\omega_1 h_1 + ... + \omega_s h_s) = \\
&= \alpha_1 e_1 + ... + \alpha_p e_p + \beta_1 f_1 + ... + \beta_q f_q + ... + \delta_1 h_1 + ... + \delta_s h_s - \\
&- A(\chi_1 e_1 + ... + \chi_p e_p) - ... - A(\omega_1 h_1 + ... + \omega_s h_s)
\end{aligned} \qquad (12.6)
$$

tenglikni hosil qilamiz.

Endi $\chi_1, \chi_2, ..., \chi_p, \mu_1, \mu_2, ..., \mu_q, ..., \omega_1, \omega_2, ..., \omega_s$ koeffitsient-larni tenglikning o‘ng tomoni mumkin qadar kam qo‘shiluvchilar qoladigan qilib tanlashga harakat qilamiz.

Buning uchun $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ xos qiymatlarning hech biri no‘lga teng bo‘lmagan va xos qiymatlarning ba’zilari nolga teng bo‘lgan hollarni alohida ko‘rib chiqamiz.

Aytaylik, xos qiymatlarning hech biri nolga teng bo‘lmasin, ya’ni $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0, ..., \lambda_k \neq 0.$ Bu holda e' vektorni $Ae' = 0$ bo‘ladigan qilib tanlab olish mumkin. Haqiqatan ham, A almashtirish V' fazodagi xar bir vektorlar jamlanmasidan tuzilgan qism fazoni shu qism fazoga o‘tkazganligi uchun, $\chi_1, \chi_2, ..., \chi_p$ koeffitsientlarni tanlash kifoya. Bu vektorlarni o‘z ichiga olgan hadlarni alohida yozib olaylik.

$$
\begin{gathered}
\alpha_1 e_1 + ... + \alpha_p e_p - A(\chi_1 e_1 + ... + \chi_p e_p) = \\
\alpha_1 e_1 + ... + \alpha_p e_p - \chi_1 \lambda_1 e_1 - \chi_2 (e_1 + \lambda_1 e_2) - ... - \chi_p (e_{p-1} + \lambda_1 e_p) = \\
(\alpha_1 - \chi_1 \lambda_1 - \chi_2) e_1 + (\alpha_2 - \chi_2 \lambda_1 - \chi_3) e_2 + ... + \\
+ (\alpha_{p-1} - \chi_{p-1} \lambda_1 - \chi_p) e_{p-1} + (\alpha_p - \chi_p \lambda_1) e_p.
\end{gathered}
$$

Agar $\chi_p = \dfrac{\alpha_p}{\lambda_1}, \chi_{p-1} = \dfrac{\alpha_{p-1} + \chi_p}{\lambda_1}, ..., \chi_1 = \dfrac{\alpha_1 + \chi_2}{\lambda_1}$ deb olsak, tenglikning o‘ng tomoni nolga aylanadi. Bu holda (12.6) tenglikning o‘ng tomonida $e_1, e_2, ..., e_p$ basis vektorlar ishtirok etmaydi.

Qolgan xos vektorlar ham noldan farqli bo‘lganligi uchun, xuddi shunga o‘xshab, (12.6) tenglikning o‘ng tomonidagi barcha hadlarini qisqarib ketadigan $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_q, ..., \omega_1, \omega_2, ..., \omega_s$ koeffitsientlarni tanlash mumkin. Natijada biz

$$
Ae' = 0
$$

shartni qanoatlantiruvchi vektorni hosil qiamiz. Bu vektorni mavjud basis vektorlar tarkibiga qo‘shib, $n+1$ o‘lchamli V fazoda

$$e', e_1, e_2, ..., e_p;\ f_1,\ f_2, ...,\ f_q; ....; h_1, h_2, ..., h_s$$

bazisni hosil qilamiz. Bu bazisda chiziqli almashtirish kanonik ko‘rinishga kelib, e' xos vektorga mos kelivchi xos qiymat nolga teng bo‘ladi. Biz yuqorida $\tau = 0$ deb olish uchun A almashtirish o‘rniga $A-\tau E$ almashtirishni qaragan edik. Agar to‘g‘ridan to‘gri $\tau \neq 0$ holni qaralsa, xuddi shunga oxshab e' xos vektorni hosil qilish mumkin, lekin bu xos vektorga mos kelivchi xos qiymat τ ga teng bo‘ladi.

Endi ikkinchi holni ya’ni xos sonlarning ba’zilari nolga teng bo‘lgan holni qaraymiz. Bu holda (12.6) tenglikning o‘ng tomonidagi ifodaning xos qiymati nolga teng va xos qiymatlari noldan farqli vektorlar jamlanmasiga ajratish orqali ikki hil qo‘shiluvchilar ko‘rinishida yozib olamiz.

Xos qiymatlari noldan farqli bo‘lgan vektorlarga mos keluvchi qo‘shiluvchilarni birinchi holdagi kabi, koeffitsientlarni tanlash hisobiga nolga aylantirib yuborish mumkin. U holda (12.6) tenglikning o‘ng tomonida faqat xos qiymatlari nolga teng bo‘lgan vektorlardan iborat qo‘shiluvchilar qoladi.

Aytaylik, $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_t = 0,\ \ (t \le k)$ bo‘lib, bu xos sonlarga mos keluvchi vektorlar $e_1, e_2, ..., e_p;\ f_1,\ f_2, ...,\ f_q; ....; g_1, g_2, ..., g_r$ bo‘lsin. Bu holda (12.6) tenglik quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$\begin{aligned} Ae' &= \alpha_1 e_1 + ... + \alpha_p e_p + \beta_1 f_1 + ... + \beta_q f_q + ... + \gamma_1 g_1 + ... + \gamma_r g_r - \\ & A(\chi_1 e_1 + ... + \chi_p e_p) - A(\mu_1 f_1 + ... + \mu_q f_q) - ... - A(\gamma_1 g_1 + ... + \gamma_r g_r). \end{aligned} \tag{12.7}$$

Ammo $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_t = 0$ bo‘lgani uchun

$$Ae_1 = 0,\ Ae_2 = e_1, ...,\ Ae_p = e_{p-1},$$

$$Af_1 = 0,\ Af_2 = f_1, ...,\ Af_q = f_{q-1},$$

$$...,$$

$$Ag_1 = 0,\ Ag_2 = g_1, ...,\ Ag_r = g_{r-1}.$$

Demak $e_1, e_2, ..., e_p$ vektorlarning (12.7) tenglik o‘ng tomonida qatnashayotgan chiziqli kombinatsiyasi ushbu ko‘rinishda bo‘ladi:

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_p e_p - \chi_2 e_1 - \chi_3 e_2 - ... - \chi_p e_{p-1}.$$

Bu ifodada $\chi_2 = \alpha_1, \chi_3 = \alpha_2, ..., \chi_p = \alpha_p$ faraz qilib, biz $\alpha_p e_p$ haddan boshqa hamma hadlarni yo‘qotib yuborishimiz mumkin. Shu operatsiyani qolgan $f_1,\ f_2, ...,\ f_q; ......; g_1, g_2, ..., g_r$ vektorlar jamlanmasi uchun ham qo‘llasak,

$$Ae' = \alpha_p e_p + \beta_q f_q + ... + \gamma_r g_r$$

tenglikni qanoatlantiruvchi vektorni hosil qilamiz.

Agar $\alpha_p = \beta_q = ... = \gamma_r = 0$ bo‘lib qolsa, u holda

$$Ae' = 0$$

tenglik hosil bo‘lib,

$$e', e_1, e_2, ..., e_p;\ f_1,\ f_2, ...,\ f_q; ....; h_1, h_2, ..., h_s$$

bazisda chiziqli almashtirish normal shaklga keladi.

Agar $\alpha_p, \beta_q, ..., \gamma_r$ koeffitsientlardan kamida bittasi noldan farqli bo‘lsa, chiziqli almashtirishni normal shaklga keltirish uchun V' qism fazodagi bazisni o‘zgartirishga tog‘ri keladi. Umimiylikka ziyon yetkazmagan holda, $p \geq q \geq ... \geq r$ deb olaylik. Bu holda

$$e'_{p+1} = e', e'_p = Ae'_{p+1}, e'_{p-1} = Ae'_p, ..., e'_1 = Ae'_2$$

deb olsak,

$$e'_{p+1} = e' = \alpha_p e_p + \beta_q f_q + ... + \gamma_r g_r,$$

$$e'_p = Ae'_{p+1} = \alpha_p e_{p-1} + \beta_q f_{q-1} + ... + \gamma_r g_{r-1},$$

$$...,$$

$$e'_{p-r+2} = Ae'_{p-r+3} = \alpha_p e_{p-r+1} + \beta_q f_{q-r+1} + ... + \gamma_r g_1,$$

$$...,$$

$$e'_1 = Ae'_2 = \alpha_p e_1$$

hosil bo‘ladi.

Tanlangan $e'_1, e_1, e_2, ..., e_p$ vektorlarni $e'_1, e'_2, ..., e'_p, e'_{p+1}$ vektorlar bilan almashtirib qolgan vektorlarni o‘zgarishsiz qoldirsak, berilgan chiziqli almashtirish ushbu bazisda normal shakga keladi.

2-amaliy mashg‘ulot: Chiziqli tenglamalar sistemalari, ularni yechish ususllari va tatbiqlari. (2 soat)

Chiziqli tenglamalar sistemasi va ularni yechish usullari. Chizqli tenglamalar sistemasini yechishda yuqori uchburchak ko‘rinishidagi va regular matritsalarning qo‘llanilishi.

3.7- teorema. Ixtiyoriy n o‘lchamli Yevklid fazosida ortogonal bazis mavjud.

Isbot. Ma'lumki, n o'lchamli fazoning ta'rifiga muvofiq unda qandaydir $f_1,\ f_2, ...,\ f_n$ bazis mavjud. Bu $f_1,\ f_2, ...,\ f_n$ vektorlardan o'zaro ortogonal bo'lgan n ta vektor yasaymiz.

Dastlab, $e_1 = f_1$ deb olib, e_2 vektorni $e_2 = f_2 + \alpha e_1$ ko'rinishda izlaymiz. α sonini shunday tanlab olamizki, $(e_2, e_1) = 0,$ ya'ni $(f_2 + \alpha e_1, e_1) = 0$ bo'lsin. Bundan

$$\alpha = -\frac{(f_2, e_1)}{(e_1, e_1)}$$

ekanligi kelib chiqadi. Demak, α sonni tanlash hisobiga e_1 va e_2 ortogonal vektorlar topish mumkin.

Aytaylik, o'zaro ortogonal va noldan farqli bo'lgan $e_1, e_2, ..., e_{k-1}$ vektorlar topilgan bo'lsin. U holda e_k vektorni

$$e_k = f_k + \lambda_1 e_1 + ... + \lambda_{k-1} e_{k-1}$$

shaklida izlaymiz, ya'ni e_k vektorni $e_1, e_2, ..., e_{k-1}$ va f_k vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi yordamida hosil qilamiz. $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{k-1}$ koeffitsientlarni e_k vektor bilan $e_1, e_2, ..., e_{k-1}$ vektorlarning ortogonalligi shartidan topamiz:

$$(f_k + \lambda_1 e_1 + ... + \lambda_{k-1} e_{k-1}, e_1) = 0;$$

$$(f_k + \lambda_1 e_1 + ... + \lambda_{k-1} e_{k-1}, e_2) = 0;$$

....

$$(f_k + \lambda_1 e_1 + ... + \lambda_{k-1} e_{k-1}, e_{k-1}) = 0.$$

$e_1, e_2, ..., e_{k-1}$ vektorlar o'zaro ortogonal bo'lganliklari uchun, bu tengliklar ushbu ko'rinishga keladi:

$$(f_k, e_1) + \lambda_1 (e_1, e_1) = 0;$$

$$(f_k, e_2) + \lambda_2 (e_2, e_2) = 0;$$

....

$$(f_k, e_{k-1}) + \lambda_{k-1} (e_{k-1}, e_{k-1}) = 0.$$

Bulardan,

$$\lambda_1 = -\frac{(f_k, e_1)}{(e_1, e_1)},\ \lambda_2 = -\frac{(f_k, e_2)}{(e_2, e_2)},\ ...,\ \lambda_{k-1} = -\frac{(f_k, e_{k-1})}{(e_{k-1}, e_{k-1})},$$

qiymatlar kelib chiqadi.

Demak, juft-jufti bilan ortogonal bo‘lgan $e_1, e_2, ..., e_k$ vektorlarni hosil qilamiz. Endi e_k vektorni noldan farqli ekaniligini ko‘rsatamiz. Hosil qilingan e_k vektor $e_1, e_2, ..., e_{k-1}, f_k$ vektorlarning chiziqli kombinatsiyasidan iborat. O‘z navbatida e_{k-1} vektor $e_1, e_2, ..., e_{k-2}$ va f_{k-1} vektorlarning chiziqli kombinatsiyasidan va hokazo, e_2 vektor e_1 va f_2 vektorlarning chiziqli kombinatsiyasidan iborat. Bundan esa e_k quyidagi ko‘rinishda yozilish mumkinligi kelib chiqadi:

$$e_k = f_k + \alpha_{k-1} f_{k-1} + ... + \alpha_1 f_1.$$

$f_1, f_2, ..., f_k$ vektorlarning chiziqli erkli ekanligidan esa, $e_k \neq 0$ ekanligi kelib chiqadi.

Biz $e_1, e_2, ..., e_{k-1}$ hamda f_k vektorlardan e_k vektorni qurdik. Xuddi shunday qilib, $e_1, e_2, ..., e_k$ hamda f_{k+1} larga ko‘ra e_{k+1} ni quramiz. Bu jarayonni berilgan $f_1, f_2, ..., f_n$ vektorlargacha davom ettiriramiz. Natijada noldan faqli va o‘zaro ortogonal bo‘lgan n ta $e_1, e_2, ..., e_n$ vektorlarni, ya’ni ortogonal bazisni hosil qilamiz.

Ortogonal bazislar topishning yuqoridagi teorema isbotida keltirilgan jarayon *ortogonallashtirish jarayoni* deb ataladi. Bu jarayon ixtiyoriy $f_1, f_2, ..., f_n$ bazis bo‘yicha $e_1, e_2, ..., e_n$ ortogonal bazis yasash usulini beradi.

Agar e_k vektorlarni $e'_k = \dfrac{e_k}{|e_k|}$ vektorlar bilan almashtirsak, u holda uzunligi 1 ga teng bo‘lgan o‘zaro ortogonal vektorlar hosil bo‘lishini ko‘rish qiyin emas. Bu amal bilan ortonormal bazis hosil qilamiz.

Misol 3.2. $P_2(x)$ fazoda $(f(x), g(x)) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$ kabi aniqlangan skalyar ko‘paytmaga nisbatan ortogonal bazis quramiz. Ma’lumki, $P_2(x)$ fazoda $f_1 = 1,\ f_2 = x,\ f_3 = x^2$ bazis tashkil qiladi. Bu bazisdan ortogonallashtirish jarayoni yordamida e_1, e_2, e_3 ortogonal bazis hosil qilamiz:

$e_1 = f_1 = 1$ deb olib $e_2 = f_2 - \dfrac{(f_2, e_1)}{(e_1, e_1)} e_1$ ekanligidan e_2 vektorni aniqlaymiz.

$$(f_2,e_1)=\int_0^1 xdx=\frac{1}{2},\quad (e_1,e_1)=\int_0^1 dx=1$$ ekanligidan $e_2=x-\frac{1}{2}$ hosil bo‘ladi.

Endi $e_3=f_3-\frac{(f_3,e_2)}{(e_2,e_2)}e_2-\frac{(f_3,e_1)}{(e_1,e_1)}e_1$, hamda

$$(f_3,e_2)=\int_0^1 x^2(x-\frac{1}{2})dx=\frac{1}{12},$$

$$(e_2,e_2)=\int_0^1 (x-\frac{1}{2})^2dx=\frac{1}{12},$$

$$(f_3,e_1)=\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}$$

ekanligidan $e_3=x^2-x+\frac{1}{6}$ hosil bo’ladi. Demak, $P_2(x)$ fazoda ortogonal bazis $e_1=1,\ e_2=x-\frac{1}{2},\ e_3=x^2-x+\frac{1}{6}$ ko‘phadlardan iborat.

Yevklid fazosida $e_1, e_2, ..., e_n$ ortonormal bazis berilgan bo‘lsin. Shu bazisdagi koordinatalari bilan berilgan $x, y\in V$ vektorlaring skalyar ko‘paytmasi qanday ifodalanishini topaylik.

Aytaylik,

$$x=\xi_1e_1+\xi_2e_2+...+\xi_ne_n,\ \ y=\nu_1e_1+\nu_2e_2+...+\nu_ne_n$$

bo‘lsin, ya’ni x vektorning koordinatalari $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$, hamda y vektorning koordinatalari esa $\nu_1, \nu_2, ..., \nu_n$ bo‘lsin, u holda

$$(x,y)=\xi_1\nu_1+\xi_2\nu_2+...+\xi_n\nu_n$$

bo‘ladi.

Demak, ortonormal bazisda ikki vektorning skalyar ko‘paytmasi ularning mos koordinatalari ko‘paytmalarining yig‘indisiga teng.

Endi x vektorning ortonormal $e_1, e_2, ..., e_n$ bazisdagi koordinatalarini bazis vektorlar bilan qanday bog‘lanishga ega ekanligini ko‘rsatamiz.

$$x=\xi_1e_1+\xi_2e_2+...+\xi_ne_n$$

tenglikning ikkala tomonini e_1 ga skalyar ko‘paytirib,

$$(x,e_1)=\xi_1(e_1,e_1)+\xi_2(e_2,e_1)+...+\xi_n(e_n,e_1)=\xi_1$$

ekanini va xuddi shunday,

$$\xi_2=(x,e_2),\ \xi_3=(x,e_3),\ ...,\ \xi_n=(x,e_n)$$

ekanligini topamiz.

Shunday qilib, berilgan vektorning ortonormal bazisdagi koordinatalari shu vektor bilan mos bazis vektorlarining skalyar ko‘paytmalaridan iboratligini hosil qildik.

Ortogonal proyeksiya va ortogonal to‘ldiruvchi. Endi berilgan vektorning qandaydir qism fazoga ortogonal proyeksiyasi va ortogonal to‘ldiruvchisi tushunchalarini kiritamiz.

3.8-ta’rif. Bizga V fazoning qandaydir V' qism fazosi berilgan bo‘lsin. Agar $x\in V$ vektor V' qism fazoning ixtiyoriy vektoriga ortogonal bo‘lsa, u holda x vektor V' qism fazoga ortogonal deyiladi.

Ravshanki, agar x vektor $e_1,\ e_2,\ ...,\ e_n$ vektorlarga ortogonal bo‘lsa, u holda x bu vektorlarning istalgan chiziqli kombinatsiyasiga ham ortogonal bo‘ladi. Haqiqatdan ham, $(x,e_i)=0,\ 1\le i\le n$ ekanligidan $(x,\lambda_1e_1+\lambda_2e_2+...+\lambda_ne_n)=0$ bo‘lishi osongina kelib chiqadi. Shuning uchun berilgan x vektor V' qism fazoga ortogonal bo‘lishi uchun uning bazis vektorlarga ortogonal bo‘lishi zarur va yetarli.

Aytaylik, ixtiyoriy $z\in V$ vektor berilgan bo‘lib, bu vektor uchun shunday $y\in V'$ vektor topilsinki, natijada $z-y$ vektor V' qism fazoga ortogonal bo‘lsin. Ya’ni $z\in V$ vektorni $z=x+y$, $x\in V$, $y\in V'$ ko‘rinishida yozilsin, bu yerda x vektor V' qism fazoga ortogonal vektor.

3.9-ta’rif. Agar $z=x+y$, $x\in V$, $y\in V'$ ko‘rinishida ifodalangan bo‘lib, x vektor V' qism fazoga ortogonal bo‘lsa, y vektor z vektorning *ortogonal proyeksiyasi* x esa *ortogonal to‘ldiruvchisi* deyiladi.

Quyidagi tasdiqda ortogonal proyeksiya va ortogonal to‘ldiruvchi har doim mavjud va yagona ekanligini ko‘rsatamiz. Umuman olganda berilgan vektorning ortogonal proyeksiyasi mavjudligidan ortogonal to‘ldiruvchining mavjudligi ham o‘z-o‘zidan kelib chiqadi.

3.10-tasdiq. $z\in V$ vektorning chekli o‘lchamli V' qism fazoga ortogonal proyeksiyasi mavjud va yagona.

Isbot. Aytaylik, $\dim V'=n$ bo‘lib, V' qism fazonig bazisi $e_1,\ e_2,\ ...,\ e_n$ bo‘lsin. Ortogonal proyeksiyani $y=\lambda_1e_1+\lambda_2e_2+...+\lambda_ne_n$ ko‘rinishida izlaymiz.

$z-y$ vektor V' qism fazoga ortogonal bo‘lishi uchun, uning bazis vektorlarga ortogonal bo‘lishi zarur va yetarli ekanligidan

$$(z-y,e_i)=0,\ 1\le i\le n$$

tenglikka ega bo‘lamiz, ya’ni

$$(z,e_i)=(\lambda_1 e_1+\lambda_2 e_2+...+\lambda_n e_n,e_i),\ 1\le i\le n.$$

Bu tenglikdan ko‘rinadiki, ortogonal proyeksiyani topish masalasi, biror bazisda $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ noma’lumlarga nisdatan quyidagi chiziqli tenglamalar sistemasini yechish masalasiga keltirildi:

$$\begin{cases}\lambda_1(e_1,e_1)+\lambda_2(e_2,e_1)+...+\lambda_n(e_n,e_1)=(z,e_1),\\ \lambda_1(e_1,e_2)+\lambda_2(e_2,e_2)+...+\lambda_n(e_n,e_2)=(z,e_2),\\ ....,\\ \lambda_1(e_1,e_n)+\lambda_2(e_2,e_n)+...+\lambda_n(e_n,e_n)=(z,e_n),\end{cases} \tag{3.2}$$

Ixtiyoriy n-o‘lchamli fazoda ortonormal bazis mavjud ekanligidan foydalanib, $e_1,e_2,...,e_n$ bazisni ortonormal deb faraz qilishimiz mumkin. U holda (3.2) sistemaning yechimi $\lambda_i=(z,e_i),\ 1\le i\le n$ ko‘rinishida bo‘ladi. Ya’ni sistema yagona yechimga ega. Demak, $y=\lambda_1 e_1+\lambda_2 e_2+...+\lambda_n e_n$ ortogonal proyeksiya ham mavjud va yagona.

Ta’kidlash joizki, yuqoridagi tasdiqning isbotida biz $e_1,e_2,...,e_n$ ortonormal bazisdan foydalandik. Umuman olganda ixtiyoriy bazis uchun ham (3.2) sistema yagona yechimga ega bo‘ladi. Chunki, ushbu sistemaning asosiy determinanti quyidagicha bo‘lib,

$$\begin{vmatrix}(e_1,e_1) & (e_2,e_1) & ... & (e_n,e_1)\\ (e_1,e_2) & (e_2,e_2) & ... & (e_n,e_2)\\ ... & ... & ... & ...\\ (e_1,e_n) & (e_2,e_n) & ... & (e_n,e_n)\end{vmatrix}$$

bu determinant noldan farqli. Ushbu determinantga *Gram determinanti* deb ataladi.

Demak, V' qism fazo berilgan bo‘lib, $e_1,e_2,...,e_n$ uning bazisi bo‘lsa, $z\in V$ vektorning V' qism fazoga ortogonal proyeksiyasi $y=\lambda_1 e_1+\lambda_2 e_2+...+\lambda_n e_n$ ko‘rinishida bo‘ladi, bu yerda $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ (3.2) chiziqli tenglamalar sistemasining yechimi. $x=z-y$ vektor esa ortogonal to‘ldiruvchi bo‘ladi.

3-amaliy mashg‘ulot: Chiziqli almashtirishlar va ularning matritsalarini graflar nazariyasi. (2 soat)

Chiziqli almashtirishlar va ularning matritsalarini graflar nazariyasi va information texnologiyalar sohasida qo‘llanilishi.

Yevklid fazosida chiziqli almashtirishlar bilan bichiziqli formalar orasidagi bog‘lanish. Biz avvalgi mavzularda chiziqli fazoda bichiziqli formalar va chiziqli almashtirishlarni o‘rganib chiqdik. Ushbu mavzuda Yevklid fazosidagi bichiziqli formalar va chiziqli almashtirishlar orasidagi bog‘lanishni keltiramiz.

V kompleks Yevklid fazosi va $A(x,y)$ bichiziqli forma berilgan bo‘lsin. V fazoda biror $e_1, e_2, ..., e_n$ ortonormal bazis tanlab olamiz.

Agar

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + ... + \xi_n e_n \text{ va } y = \nu_1 e_1 + \nu_2 e_2 + ... + \nu_n e_n$$

bo‘lsa, u holda $A(x,y)$ bichiziqli formani quyidagi ko‘rinishda yozish mumkin:

$$\begin{aligned} A(x,y) = a_{1,1}\xi_1\bar{\nu}_1 + a_{1,2}\xi_1\bar{\nu}_2 + ... + a_{1,n}\xi_1\bar{\nu}_n + \\ + a_{2,1}\xi_1\bar{\nu}_1 + a_{2,2}\xi_1\bar{\nu}_2 + ... + a_{2,n}\xi_1\bar{\nu}_n + \\ + ... + \\ + a_{n,1}\xi_1\bar{\nu}_1 + a_{n,2}\xi_1\bar{\nu}_2 + ... + a_{n,n}\xi_n\bar{\nu}_n. \end{aligned} \tag{9.1}$$

Biz $A(x,y)$ bichiziqli formani biror skalyar ko‘paytma ko‘rinishida ifodalashga harakat qilamiz. Buning uchun uni quyidagi ko‘rinishda yozib olamiz:

$$\begin{aligned} A(x,y) = (a_{1,1}\xi_1 + a_{2,1}\xi_2 + ... + a_{n,1}\xi_n)\bar{\nu}_1 + \\ + (a_{1,2}\xi_1 + a_{2,2}\xi_2 + ... + a_{n,2}\xi_n)\bar{\nu}_2 + \\ + ... + \\ (a_{1,n}\xi_1 + a_{2,n}\xi_2 + ... + a_{n,n}\xi_n)\bar{\nu}_n. \end{aligned}$$

Endi $A: V \to V$ chiziqli almashtirishni aniqlaymiz. Buning uchun berilgan $x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + ... + \xi_n e_n$ vektorga

$$z = (a_{1,1}\xi_1 + a_{2,1}\xi_2 + ... + a_{n,1}\xi_n)e_1 + (a_{1,2}\xi_1 + a_{2,2}\xi_2 + ... + a_{n,2}\xi_n)e_2 +$$

$$+\ldots+(a_{1,n}\xi_1+a_{2,n}\xi_2+\ldots+a_{n,n}\xi_n)e_n$$

vektorni mos qo‘yamiz. Natijada matritsasi $A(x,y)$ bichiziqli forma matritsasining transponirlanganiga teng bo‘lgan $A:V\to V$ chiziqli almashtirish hosil bo‘ladi. Demak, biz quyidagi tenglikni hosil qildik:

$$A(x,y)=\varsigma_1\overline{v}_1+\varsigma_2\overline{v}_2+\ldots+\varsigma_n\overline{v}_n=(z,y)=(Ax,y),$$

bu yerda $\varsigma_k=a_{1,k}\xi_1+a_{2,k}\xi_2+\ldots+a_{n,k}\xi_n$.

Shunday qilib, Yevklid fazosida xar qanday $A(x,y)$ bichiziqli formaga

$$A(x,y)=(Ax,y)$$

shartni qanoatlantiruvchi A chiziqli almashtirish to‘g‘ri keladi, va aksincha xar qanday A chiziqli almashtirishga $A(x,y)$ bichiziqli forma mos keladi.

Haqiqatdan ham, $A(x,y)=(Ax,y)$ kabi aniqlangan funksiya bichiziqli formaning shartlarini qanoatlantiradi.

$$A(x_1+x_2,y)=(A(x_1+x_2),y)=(Ax_1+Ax_2,y)=$$

$$=(Ax_1,y)+(Ax_2,y)=A(x_1,y)+A(x_2,y),$$

$$A(\lambda x,y)=(A(\lambda x),y)=(\lambda Ax,y)=\lambda(Ax,y)=\lambda A(x,y),$$

$$A(x,y_1+y_2)=(Ax,y_1+y_2)=(Ax,y_1)+(Ax,y_2)=A(x,y_1)+A(x,y_2),$$

$$A(x,\mu y)=(Ax,\mu y)=\overline{\mu}(Ax,y)=\overline{\mu}A(x,y).$$

Endi A chiziqli almashtirishga $A(x,y)$ bichiziqli formani mos qo‘yish o‘zaro-bir qiymatli moslik ekanligini ko‘rsatamiz. Faraz qilaylik,

$$A(x,y)=(Ax,y) \text{ va } A(x,y)=(Bx,y)$$

bo‘lsin. U holda ixtiyoriy y vektor uchun

$$(Ax-Bx,y)=0$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi. Ammo bu, $Ax-Bx=0$ ekanligini bildiradi, demak, $Ax=Bx.$ Qaralayotgan x vektorning ixtiyoriyligidan $A=B$ kelib chiqadi.

Xulosa sifatida ushbu teoremani keltiramiz.

9.1-teorema. Yevklid fazosida bichiziqli formalar bilan chiziqli almashtirishlar orasida aniqlangan

$$A(x,y)=(Ax,y)$$

ko‘rinishida moslik bir qiymatli moslik bo‘ladi.

Bichiziqli formalar bilan chiziqli almashtirishlar orasida boshqa usul bilan ham moslik o‘rnatish mumkin. Masalan, $A(x,y)=(x,A^{*}y)$ ko‘rinishidagi moslik o‘rnatamiz. Buning uchun $A(x,y)$ bichiziqli formaning berilgan bazisdagi ko‘rinishini quyidagicha ifodalaymiz:

$$A(x,y)=A(\xi_1e_1+\xi_2e_2+...+\xi_ne_n,\nu_1e_1+\nu_2e_2+...+\nu_ne_n)=$$

$$=a_{1,1}\xi_1\overline{\nu}_1+a_{1,2}\xi_1\overline{\nu}_2+...+a_{1,n}\xi_1\overline{\nu}_n+$$

$$+a_{2,1}\xi_2\overline{\nu}_1+a_{2,2}\xi_2\overline{\nu}_2+...+a_{2,n}\xi_2\overline{\nu}_n+$$

$$+..+$$

$$+a_{n,1}\xi_n\overline{\nu}_1+a_{n,2}\xi_n\overline{\nu}_2+...+a_{n,n}\xi_n\overline{\nu}_n.$$

Endi yuqoridagidan farqli ravishda, bu ifodani $\xi_1,\ \xi_2,\ ...,\ \xi_n$ o‘zgaruvchilar bo‘yicha yig‘ib ixchamlasak, berilgan ifoda

$$A(x,y)=\xi_1(a_{1,1}\overline{\nu}_1+a_{1,2}\overline{\nu}_2+...+a_{1,n}\overline{\nu}_n)+$$

$$+\xi_1(a_{2,1}\overline{\nu}_1+a_{2,2}\overline{\nu}_2+...+a_{2,n}\overline{\nu}_n)+$$

$$+..+$$

$$+\xi_n(a_{n,1}\overline{\nu}_1+a_{n,2}\overline{\nu}_2+...+a_{n,n}\overline{\nu}_n)=$$

$$=\xi_1\overline{(\overline{a}_{1,1}\nu_1+\overline{a}_{1,2}\nu_2+...+\overline{a}_{1,n}\nu_n)}+$$

$$+\xi_2\overline{(\overline{a}_{2,1}\nu_1+\overline{a}_{2,2}\nu_2+...+\overline{a}_{2,n}\nu_n)}+$$

$$+..+$$

$$+\xi_n\overline{(\overline{a}_{n,1}\nu_1+\overline{a}_{n,2}\nu_2+...+\overline{a}_{n,n}\nu_n)}$$

ko‘rinishga keladi.

Endi $y = v_1 e_1 + v_2 e_2 + \ldots + v_n e_n$ vektorga

$$z = (\overline{a}_{1,1} v_1 + \overline{a}_{1,2} v_2 + \ldots + \overline{a}_{1,n} v_n) e_1 + (\overline{a}_{2,1} v_1 + \overline{a}_{2,2} v_2 + \ldots + \overline{a}_{2,n} v_n) e_2 +$$

$$+ \ldots + (\overline{a}_{n,1} v_1 + \overline{a}_{n,2} v_2 + \ldots + \overline{a}_{n,n} v_n) e_n$$

vektorni mos qo‘yuvchi $A^* : V \to V$ chiziqli almashtirishni qaraymiz. A^* almashtirishning matritsasi A almashtirish matritsasini transpo-nirlab, xar bir elementining qo‘shmasini olish natijasida hosil bo‘ladi. Ya’ni,

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots. & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n} \end{pmatrix} \text{ bo‘lsa, } A^* = \begin{pmatrix} \overline{a}_{1,1} & \overline{a}_{2,1} & \ldots & \overline{a}_{n,1} \\ \overline{a}_{1,2} & \overline{a}_{2,2} & \ldots & \overline{a}_{n,2} \\ \ldots & \ldots. & \ldots & \ldots \\ \overline{a}_{1,n} & \overline{a}_{2,n} & \ldots & \overline{a}_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Shuni ta’kidlab o‘tish joizki, ortogonal bo‘lmagan bazisda berilgan A va A^* almashtirishlarning matritsalari orasidagi munosabat ancha murakkab bo‘ladi.

9.2-ta’rif. Kompleks Yevklid fazosida berilgan A chiziqli almashtirishning qo‘shmasi deb,

$$(Ax, y) = (x, A^* y),$$

shartni qanoatlantiruvchi A^* almashtirishga aytiladi.

9.3-teorema. Yevklid fazosida xar qanday chiziqli almashtirishning yagona qo‘shma almashtirishi mavjud.

Isbot. 9.1-teoremaga ko‘ra xar qanday chiziqli A chiziqli almashtirish $A(x, y) = (Ax, y)$ shartni qanoatlantiruvchi bichiziqli formaga mos kelib, bu moslik bir qiymatlidir. Ikkinchi tomondan esa, $A(x, y)$ bichiziqli formani $A(x, y) = (x, A^* y)$ ko‘rinishida ham ifoda-lash mumkin. Bundan esa,

$$(Ax, y) = A(x, y) = (x, A^* y)$$

tenglikka ega bo‘lamiz. □

9.4-xossa. Chiqiziqli almashtirishning qo‘shma almashtirishi chiziqli almashtirishlarni qo‘shish va ko‘paytirish amallari bilan quyidagi xossalarga ega bo‘ladi:

a) $(AB)^* = B^* A^*$;

b) $(A^*)^* = A$;

c) $(A+B)^* = A^* + B^*$;

d) $(\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^*$;

e) $E^* = E$.

Bu xossalarning ikkitasini isbotini keltiraylik.

Isbot. a) $(ABx, y) = (Bx, A^* y) = (x, B^* A^* y)$. Ammo ikkinchi tomondan $(AB)^*$ ta’rifiga muvofiq $(ABx, y) = (x, (AB)^* y)$.

Chiziqli almashtirishning mos bichiziqli forma bilan bir qiymatli aniqlanishini hisobga olib, bu tengliklarning o‘ng tomonlarini taqqoslasak $(AB)^* = B^* A^*$ kelib chiqadi.

b) Qo‘shma almashtirish ta’rifiga muvofiq $(Ax, y) = (x, A^* y)$. A^* ni vaqtincha C bilan belgilaymiz. U holda $(Ax, y) = (x, Cy)$, bundan

$$(y, Ax) = \overline{(Ax, y)} = \overline{(x, Cy)} = (Cy, x).$$

tenglik kelib chiqadi. Ushbu tenglikda y ni x bilan, x ni esa y bilan almashtirsak

$$(Cx, y) = (x, Ay)$$

ifoda hosil bo‘ladi. Demak, $C^* = A$ va $C = A^*$ bo‘lganligi uchun $(A^*)^* = A$.

□

4-amaliy mashg‘ulot: Yevklid fazosi. Ortogonal basizlar va ularning tatbiqlari. (2 soat)

Yevklid fazosi. Ortogonal va ortonormal bazislar, ularni toppish usullari. Ortogonal bazislarni geometrik masalalar yechishdagi hamda matritsalarni turli normal shakllarini topishdagi tatbiqlari.

Biz ushbu mavzuda haqiqiy fazodagi chiziqli almashtirishlarni batafsil o‘rganamiz. Biror V haqiqiy chiziqli fazo va A chiziqli almashtirish berilgan bo‘lsin.

11.1-teorema. Haqiqiy chiziqli fazodagi xar qanday chiziqli almashtirish uchun bir yoki ikki o‘lchamli invariant qism fazo mavjud.

Isbot. Aytaylik, V chiziqli fazoda $e_1, e_2, ..., e_n$ bazis berilgan bo‘lib, A chiziqli almashtirishning ushbu bazisdagi matritsasi $(a_{i,k})$ bo‘lsin.

Quyidagi tenglamalar sistemasini qaraymiz:

$$\begin{cases} a_{1,1}\xi_1 + a_{1,2}\xi_2 + ... + a_{1,n}\xi_n = \lambda\xi_1, \\ a_{2,1}\xi_1 + a_{2,2}\xi_2 + ... + a_{2,n}\xi_n = \lambda\xi_2, \\ ...., \\ a_{n,1}\xi_1 + a_{n,2}\xi_2 + ... + a_{n,n}\xi_n = \lambda\xi_n. \end{cases} \tag{11.1}$$

Bu sistemaning noldan farqli $(\xi_1^0, \xi_2^0, ..., \xi_n^0)$ yechimini izlaymiz. Ma’lumki, sistemaning noldan farqli yechimi

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{1,1} - \lambda & a_{1,2} & ... & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} - \lambda & ... & a_{2,n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n,1} & a_{n,2} & ... & a_{n,n} - \lambda \end{vmatrix}$$

determinant faqat nolga teng bo‘lgan holdagina mavjud.

Bu determinantni nolga tenglab, λ ga nisbatan n-darajali, haqiqiy koeffitsientli tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglama haqiqiy ildizga ega bo‘lishi yoki ega bo‘lmasligi mumkin. Agar tenglama haqiqiy ildizga ega bo‘lmasa, ixtiyoriy ko‘phad kamida bitta kompleks ildizga ega bo‘lganligi uchun bu tenglama ham kompleks ildizga ega bo‘ladi. Demak, biz quyidagi ikkita holni ko‘rib chiqamiz.

a) $P(\lambda)$ ko‘phad haqiqiy ildizga ega bo‘lib, λ_0 uning haqiqiy ildizi bo‘lsin. Bu holda (11.1) sistemaning noldan farqli $(\xi_1^0, \xi_2^0, ..., \xi_n^0)$ yechimi mavjud bo‘ladi.

Koordinatalari $\xi_1^0, \xi_2^0, ..., \xi_n^0$ sonlardan iborat bo‘lgan $x = \xi_1^0 e_1 + \xi_2^0 e_2 + ... + \xi_n^0 e_n$ vektorni tanlasak, bu vektor uchun

$$Ax = \lambda_0 x$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi. Demak, $V_1 = < x >$ fazo bir o‘lchamli invariant qism fazo bo‘ladi.

b) $P(\lambda)$ ko‘phad haqiqiy ildizga ega bo‘lmasin, u holda bu ko‘phad $\lambda_0 = \alpha + i\beta$ kompleks ildizga ega. U holda (11.1) chiziqli tenglamalar sistemasi ham noldan farqli kompleks ildizga ega bo‘ladi. Aytaylik,

$$\xi_1 + i\nu_1,\ \xi_2 + i\nu_2,\ ...,\ \xi_n + i\nu_n$$

kompleks sonlar (11.1) sistemaning noldan farqli yechimi bo‘lsin. Bu sonlarni sistemaga qo‘yib, sistemadagi xar bir tenglamaning haqiqiy va mavhum qismlarini ajratsak, mos ravishda quyidagi sistemalarga ega bo‘lamiz:

$$\begin{cases} a_{1,1}\xi_1 + a_{1,2}\xi_2 + ... + a_{1,n}\xi_n = \alpha\xi_1 - \beta\nu_1, \\ a_{2,1}\xi_1 + a_{2,2}\xi_2 + ... + a_{2,n}\xi_n = \alpha\xi_2 - \beta\nu_2, \\ .... \\ a_{n,1}\xi_1 + a_{n,2}\xi_2 + ... + a_{n,n}\xi_n = \alpha\xi_n - \beta\nu_n \end{cases} \qquad (11.2)$$

va

$$\begin{cases} a_{1,1}\nu_1 + a_{1,2}\nu_2 + ... + a_{1,n}\nu_n = \alpha\nu_1 + \beta\xi_1, \\ a_{2,1}\nu_1 + a_{2,2}\nu_2 + ... + a_{2,n}\nu_n = \alpha\nu_2 + \beta\xi_2, \\ ...., \\ a_{n,1}\nu_1 + a_{n,2}\nu_2 + ... + a_{n,n}\nu_n = \alpha\nu_n + \beta\xi_n. \end{cases} \qquad (11.3)$$

Endi koordinatalari mos ravishda $(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ va $(\nu_1, \nu_2, ..., \nu_n)$ lardan iborat bo‘lgan x va y vektorlarni qaraymiz. U holda (11.2) va (11.3) munosabatlarni quyidagicha yozish mumkin:

$$\begin{aligned} Ax &= \alpha x - \beta y, \\ Ay &= \alpha y + \beta x. \end{aligned} \qquad (11.4)$$

Bu tenglikdan x va y vektorlardan tashkil topgan ikki o‘lchamli qism fazo A ga nisbatan invariant ekanligini ko‘rish mumkin. □

Yuqoridagi teoremadan o‘lchami toq songa teng bo‘lgan haqiqiy fazoda ixtiyoriy chiziqli almashtirish bir o‘lchamli invariant qism fazoga ega ekanligi kelib chiqadi.

Endi haqiqiy Yevklid fazosida o‘z-o‘ziga qo‘shma almashtirish tushunchasini kiritamiz.

11.2-ta’ rif. Agar ixtiyoriy x va y vektorlar uchun

$$(Ax, y) = (x, Ay)$$

shart bajarilsa, A haqiqiy chiziqli almashtirish o‘z-o‘ziga qo‘shma almashtirish deyiladi.

Haqiqiy Yevklid fazosida $e_1, e_2, ..., e_n$ ortonormal bazis berilgan bo‘lib, bu bazisda A o‘z-o‘ziga qo‘shma chiziqli almashtirishning matritsasi $(a_{i,k})$ bo‘lsin.

Yevklid fazosidan

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + ... + \xi_n e_n, \; y = \nu_1 e_1 + \nu_2 e_2 + ... + \nu_n e_n$$

vektorlarni olib, quyidagi skalyar ko‘paytmani qaryamiz,

$$(Ax, y) = (\sum_{k=1}^{n} a_{1,k}\xi_k e_1 + ... + \sum_{k=1}^{n} a_{n,k}\xi_k e_n, \nu_1 e_1 + ... + \nu_n e_n) =$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{1,k}\xi_k \nu_1 + \sum_{k=1}^{n} a_{2,k}\xi_k \nu_2 + ... + \sum_{k=1}^{n} a_{n,k}\xi_k \nu_n = \sum_{i,k=1}^{n} a_{i,k}\xi_k \nu_i.$$

Xuddi shunga o‘xshab,

$$(x, Ay) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{i,k}\xi_i \nu_k$$

tenglikni hosil qilamiz. $(Ax, y) = (x, Ay)$ shartdan esa

$$a_{i,k} = a_{k,i}$$

ekanligi kelib chiqadi.

Demak, chiziqli almashtirish o‘z-o‘ziga qo‘shma bo‘lishi uchun uning ortonormal bazisdagi matritsasi simmetrik bo‘lishi zarur va yetarlidir.

Bizga $A(x, y)$ simmetrik bichiziqli forma berilgan bo‘lib, biror bazisda quyidagi ko‘rinishga ega bo‘lsin

$$A(x, y) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{i,k}\xi_i \nu_k.$$

Bichiziqli formaning simmetrikligidan $a_{i,k} = a_{k,i}$ ekanligi kelib chiqadi. Bundan esa, ixtiyoriy $A(x, y)$ simmetrik bichiziqli forma uchun

$$A(x, y) = (Ax, y)$$

munosabatni qanoatlantiradigan o‘z-o‘ziga qo‘shma almashtirish mavjud degan xulosaga kelishimiz mumkin.

11.3-lemma. Ixtiyoriy o‘z-o‘ziga qo‘shma almashtirish uchun bir o‘lchamli invariant qism fazo mavjud.

Isbot. Lemmani isbotlash uchun $P(\lambda)$ xarakteristik ko‘phadning haqiqiy ildizi mavjud ekanligini ko‘rsatish kifoya. Chunki, 11.1-teoremaga muvofiq, λ haqiqiy xos songa bir o‘lchamli invariant qism fazo mos keladi.

Faraz qilaylik, $P(\lambda)$ xarakteristik ko‘phad faqat kompleks ildizlarga ega bo‘lib, $\lambda = \alpha + i\beta$ uning kompleks ildizlaridan biri bo‘lsin.

11.1-teoremani isbot qilishda λ uchun ikkita x va y vektorlar hosil qilinib, bu vektorlar uchun

$$Ax = \alpha x - \beta y,$$

$$Ay = \beta x + \alpha y$$

tengliklar o‘rinli bo‘lishi ko‘rsatilgan edi.

Quyidagi tengliklarni qaraylik.

$$(Ax, y) = \alpha(x, y) - \beta(y, y),$$

$$(x, Ay) = \beta(x, x) + \alpha(x, y).$$

$(Ax, y) = (x, Ay)$ ekanligini hisobga olib, bu tengliklarning ikkinchisidan birinchisini ayirsak,

$$0 = 2\beta[(x, x) + (y, y)]$$

hosil bo‘ladi. $(x, x) + (y, y) \neq 0$ bo‘lganligi uchun $\beta = 0$ ekanligi kelib chiqadi, bu esa λ ildiz haqiqiy son ekanligini bildiradi. □

11.4-lemma. A o‘z-o‘ziga qo‘shma almashtirish, e esa uning xos vektori bo‘lsin. U holda $V' = \{x \in V \mid (x, e) = 0\}$, ya’ni e ga ortogonal bo‘lgan vektorlar to‘plami $(n-1)$ o‘lchamli invariant qism fazo tashkil qiladi.

Isbot. Berilgan e xos vektorga ortogonal bo‘lgan V' vektorlar to‘plami $(n-1)$ o‘lchamli qism fazo tashkil etishi ravshan. Biz V' qism fazo A almashtirishga nisbatan invariant ekanligini ko‘rsatamiz.

Aytaylik, $x \in V'$, ya’ni $(x, e_1) = 0$ bo‘lsin, u holda

$$(Ax,e_1)=(x,Ae_1)=(x,\lambda e_1)=\lambda(x,e_1)=0,$$

ya'ni $Ax\in V'$. □

11.5-teorema. Ixtiyoriy o'z-o'ziga qo'shma chiziqli almashtirish uchun shunday ortonormal bazis mavjudki, bu bazisda almash-tirishning matritsasi diagonal shaklda bo'ladi.

Isbot. Aytaylik, A o'z-o'ziga qo'shma chiziqli almashtirish bo'lsin. 11.3-lemmaga asosan, A almashtirish kamida bitta $e_1\in V$ xos vektorga ega. e_1 xos vektorga ortogonal bo'lgan vektorlardan iborat V' qism fazo A almashtirishga nisbatan invariant bo'lgaligi uchun, bu qism fazoda yotuvchi $e_2\in V'$ xos vektor mavjud. Bu jarayonni n marotaba davom ettirish natijasida, juft-jufti bilan ortogonal bo'lgan $e_1, e_2, ..., e_n$ xos vektorlarni hosil qilamiz. Ularni V fazodagi bazis sifatida olsak, u holda

$$Ae_i=\lambda_i e_i,\ 1\le i\le n$$

bo'lgaligi uchun, bu bazisda A almashtirish matritsasi

$$\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n\end{pmatrix}$$

ko'rinishda bo'ladi. □

Ortogonal bazisda kvadratik formani kvadratlar yig'indisiga keltirish. Bizga n o'lchamli V Yevklid fazosida $A(x,y)$ simmetrik bichiziqli forma berilgan bo'lsin. Yuqorida ko'rsatilganidek, xar bir $A(x,y)$ simmetrik bichiziqli formaga $A(x,y)=(Ax,y)$ munosabatni qanoatlantiruvchi o'z-o'ziga qo'shma A chiziqli almashtirish mos keladi.

11.5-teoremaga asosan, A almashtirishning xos vektoridan iborat bo'lgan $e_1, e_2, ..., e_n$ ortonormal bazis mavjud. Bu bazisda simmetrik bichiziqli forma quyidagi ko'rinishga keladi:

$$A(x,y)=(Ax,y)=(A(\xi_1e_1+\xi_2e_2+...+\xi_ne_n),\nu_1e_1+\nu_2e_2+...+\nu_ne_n)=$$

$$=(\lambda_1\xi_1e_1+\lambda_2\xi_2e_2+...+\lambda_n\xi_ne_n,\nu_1e_1+\nu_2e_2+...+\nu_ne_n)=$$

$$= \lambda_1 \xi_1 \nu_1 + \lambda_2 \xi_2 \nu_2 + \ldots + \lambda_n \xi_n \nu_n.$$

Agar $y = x$ deb olsak,

$$A(x,x) = \lambda_1 \xi_1^2 + \lambda_2 \xi_2^2 + \ldots + \lambda_n \xi_n^2$$

tenglikka ega bo‘lamiz. Demak, biz quyidagi xulosaga kelishimiz mumkin.

11.6-teorema. Yevklid fazosida berilgan ixtiyoriy $A(x,x)$ kvadratik forma uchun shunday ortonormal bazis mavjudki, bu bazisda kvadratik forma quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$A(x,x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \xi_i^2.$$

Ushbu kanonik ko‘rinishdagi $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ koeffitsientlar A chiziqli almashtirishning xos qiymatlari bo‘lgaligi uchun, ularni $(a_{i,k})$ matritsa xarakteristik tenglamasining ildizlaridan iborat bo‘ladi. Demak, kvadratik formani kanonik ko‘rinishga keltirish uchun uning matritsasi xarakteristik tenglamasi ildizlarini topish yetarli ekan.

Endi ikkita kvadratik formani bir vaqtning o‘zida kanonik ko‘rinishga keltiruvchi bazis haqida gaplashamiz. n o‘lchamli V fazoda ikkita $A(x,x)$ va $B(x,x)$ kvadratik formalar berilgan bo‘lsin.

11.7-teorema. Agar $A(x,x)$ va $B(x,x)$ kvadratik formalarning bittasi musbat aniqlangan bo‘lsa, bu kvadratik formalarni xar ikkalasini bir vaqtda kanonik ko‘rinishga keltiruvchi bazis mavjud.

Isbot. Faraz qilaylik, $B(x,x)$ kvadratik forma musbat aniqlangan bo‘lsin. Bu kvadratik formaga mos bo‘lgan $B(x,y)$ simmetrik bichiziqli formani qarab,

$$(x,y) = B(x,y)$$

formula orqali V fazoda skalyar ko‘paytma aniqlaymiz.

11.7-teoremagaga ko‘ra, V da shunday $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ortonormal bazis mavjudki, bu bazisda $A(x,x)$ kvadratik forma kanonik ko‘rinishga keladi, ya’ni

$$A(x,x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \xi_i^2.$$

Ortonormal bazisda skalyar ko‘paytma

$$(x,x) = B(x,x) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2$$

ko‘rinishga ega bo‘lganligi uchun $e_1, e_2, \ldots, e_n$ bazisda ikkala kvadratik forma ham kanonik ko‘rinishda yoziladi.

V. KO‘CHMA MASHG‘ULOT MAZMUNI

Ko‘chma mashg‘ulotlar “Zamonaviy algebraning hozirgi kundagi dolzarb masalalari” (6 soat) hamda “Chiziqli almashtirishlar va chiziqli formalar” (6 soat) mavzulari yuzasidan zamonaviy jihozlar hamda innovatsion texnologiyalarni qo‘llab faoliyat yuritayotgan ishlab chiqarish korxona va tashkilotlari, oliy ta’lim muassasalari, iqtisodiyot tarmoqlari, ilmiy-tadqiqot va loyiha-konstruktorlik muassasalarida olib boriladi.

1-ko‘chma mashg‘ulot: Zamonaviy algebraning hozirgi kundagi dolzarb masalalari (6 soat)

Zamonaviy algebra – matematikaning tez rivojlanayotgan sohalaridan biri bo‘lib, uning natijalari nafaqat sof matematikada, balki fizika, informatika, kriptografiya, sun’iy intellekt, biologiya va iqtisodiyot kabi turli fan sohalarida ham qo‘llanilmoqda. Hozirgi kunda zamonaviy algebra quyidagi asosiy dolzarb masalalar bilan shug‘ullanmoqda:

1. **Kriptografik algoritmlar va kodlash nazariyasi**
   Algebraik strukturalar (guruhlar, halqalar, maydonlar) kriptografiya va axborot xavfsizligini ta’minlashda muhim rol o‘ynaydi. Ayniqsa, eliptik egri chiziqlar asosidagi kriptografiya va kodlash nazariyasida algebraik metodlardan keng foydalanilmoqda.
2. **Sun’iy intellekt va algebraik geometriya**
   Mashinani o‘rganish (machine learning) va sun’iy intellekt tizimlarida algebraik geometriyaning usullari ma’lumotlarni modellashtirishda, o‘lchamlarni kamaytirishda hamda neyron tarmoqlarni samarali qurishda qo‘llanilmoqda.
3. **Kvanт hisoblash uchun algebraik strukturalar**
   Kvant kompyuterlar rivojlanishi bilan algebraik metodlar, ayniqsa, kvant algoritmlarni yaratishda (masalan, Shor algoritmi) va kvant holatlarini kodlashda muhim ahamiyat kasb etmoqda.
4. **Algebraik kombinatorika va tarmoq nazariyasi**
   Graf nazariyasi va algebraik kombinatorika ma’lumotlar bazalarini optimallashtirish, internet tarmoqlarining samaradorligini oshirish va sun’iy intellektga asoslangan algoritmlarni takomillashtirish uchun ishlatilmoqda.

5. **Matematik fizika va simmetriya guruhlari** Fizikadagi ko‘plab modellar algebraik metodlarga asoslangan bo‘lib, guruh nazariyasi kvant mexanikasi, string nazariyasi va boshqa zamonaviy fizikada asosiy o‘rin tutmoqda.
6. **Algebraik topologiya va ma’lumotlar tahlili** Algebraik topologiya usullari katta hajmdagi ma’lumotlarni (big data) tahlil qilishda va ularning tuzilishini aniqlashda muhim vosita sifatida foydalanilmoqda.

Zamonaviy algebra nafaqat nazariy tadqiqotlar uchun, balki texnologik va ilmiy innovatsiyalarni rivojlantirishda ham katta ahamiyatga ega.

2-ko‘chma mashg‘ulot: Chiziqli almashtirishlar va chiziqli formalar” (6 soat)

Chiziqli almashtirishlar va **chiziqli formalar** chiziqli algebra va zamonaviy matematik analizning muhim tushunchalaridan hisoblanadi. Ular vektor fazolari, matritsalar, differensial tenglamalar va fizikada keng qo‘llaniladi.

1. Chiziqli almashtirishlar

Chiziqli almashtirish – bu bir vektor fazodan boshqa vektor fazoga yoki o‘ziga chiziqli bog‘liqlikni saqlagan holda o‘tkazuvchi funksiya. Agar V va W – ikkita vektor fazo bo‘lsa, unda chiziqli almashtirish

T:V⟶W

shunday xossalarga ega:

- **Qo‘shish bo‘yicha chiziqlilik**:
  $$T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2), \quad \forall v_1, v_2 \in V.$$
-
- **Skalyar ko‘paytirish bo‘yicha chiziqlilik**:
  $$T(\lambda v) = \lambda T(v), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, v \in V.$$
-
- Chiziqli almashtirishlar odatda matritsalar yordamida ifodalanadi.

Agar *T* –*n*-o‘lchovli fazodan mmm-o‘lchovli fazoga chiziqli almashtirish bo‘lsa, uni m×nm \times nm×n o‘lchamli matritsa yordamida ifodalash mumkin.

Misol:

Agar *T(x,y)=(2x+y,x−y)*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

bo‘lsa, u holda uning matritsasi:

2. Chiziqli forma

Chiziqli forma – bu vektor fazodan skalyar maydonga (odatda, haqiqiy yoki kompleks sonlar to‘plamiga) chiziqli o‘tkazuvchi funksiya. Ya’ni, agar VVV vektor fazo bo‘lsa, chiziqli forma

$$f : V \to \mathbb{R} \quad \text{yoki} \quad f : V \to \mathbb{C}$$

shunday xossalarga ega:

- **Qo‘shish bo‘yicha chiziqlilik**: $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2).$
-
- **Skalyar ko‘paytirish bo‘yicha chiziqlilik**

$$f(\lambda v) = \lambda f(v).$$

-
- Misol:

Ikki o‘lchovli fazoda V=R^2 uchun chiziqli forma quyidagicha bo‘lishi mumkin:

$$f(x, y) = 3x - 2y.$$

Bu holda fff funksiyasi vektorlarni haqiqiy songa moslab beradi.

Amaliy qo‘llanilishi

- **Grafikada va kompyuter vizualizatsiyasida**: Vektorlarni burish, masshtablash va siljitishda chiziqli almashtirishlar ishlatiladi.
- **Fizika va muhandislikda**: Kuch va maydon ta’sirlarini modellashtirishda.
- **Ma’lumotlar tahlili va sun’iy intellektda**: Chiziqli formalar regressiya va tahliliy modellashtirishda ishlatiladi.

Chiziqli almashtirishlar va chiziqli formalar algebra, analiz va amaliy matematikada muhim o‘rin tutadi va ko‘plab ilmiy-texnik sohalarda qo‘llaniladi.

VI.GLOSSARI

- **Chiziqli tenglamalar tizimi** – Bir yoki bir nechta chiziqli tenglamalardan iborat tizim bo‘lib, iqtisodiyot, fizika va muhandislikda muhim masalalarni hal qilish uchun ishlatiladi.
- **Matritsa** – Sonlar yoki ifodalarning to‘rtburchak shakldagi jadvali bo‘lib, grafik transformatsiyalar, ma’lumotlar tahlili va kriptografiyada qo‘llaniladi.
- **Determinant** – Kvadrat matritsaga mos keladigan skalyar qiymat bo‘lib, chiziqli tenglamalar tizimining yechimlari mavjudligini aniqlashda ishlatiladi.
- **Vektor fazo** – Vektorlar va ularning ustida bajariladigan algebraik amallardan tashkil topgan matematik tuzilma bo‘lib, fizika va hisoblash texnologiyalarida keng qo‘llaniladi.
- **O‘z qiymatlar va o‘z vektorlar** – Chiziqli almashtirishning muhim xususiyatlarini aniqlashga yordam beruvchi tushunchalar bo‘lib, mashinani o‘rganish, kvant hisoblash va tebranish sistemalarida ishlatiladi.
- **Egrilik va sirtlar** – Chiziqli algebra usullari geometriyada, ayniqsa differensial geometriya va fizik modellashtirishda qo‘llaniladi.
- **Graf nazariyasi** – Grafik strukturalarni tadqiq qilishda chiziqli algebra vositalaridan foydalaniladi, masalan, tarmoqlardagi yo‘llarni topishda.
- **Fourier va Laplas transformatsiyalari** – Signal va tasvirlarni qayta ishlashda qo‘llaniladigan algebraik usullar bo‘lib, chiziqli algebra vositalari yordamida tahlil qilinadi.
- **Kriptografiya** – Matritsalar va vektor fazolaridan foydalangan holda ma’lumotlarni himoya qilish tizimlari ishlab chiqiladi.
- **Mashinali o‘rganish** – Neyron tarmoqlar, asosiy komponentalar tahlili (PCA) kabi sohalarda chiziqli algebra ma’lumotlarni o‘zgartirish va tahlil qilish uchun ishlatiladi.
- **Komp’yuter grafikasi** – 3D modellashtirish va animatsiyalarda ob’ektlarning transformatsiyasi, burilishi, masshtablashida chiziqli algebra qo‘llaniladi.

- **Fizika va muhandislik** – Elektr maydonlari, kvant mexanikasi va elastiklik nazariyasi kabi fanlarda chiziqli algebra asosiy vosita sifatida ishlatiladi.
- **Optimallashtirish** – Lineer (chiziqli) dasturlash usullari biznes jarayonlarini samarali boshqarish va resurslarni optimal taqsimlashda qo‘llaniladi.
- **Sun’iy intellekt va neyron tarmoqlar** – Chiziqli algebra neyron tarmoqlarning vaznlarini hisoblash, aktivatsiya funksiyalarini o‘zgartirish va algoritmlarni samarali bajarishda ishlatiladi.
- **Iqtisodiy modellashtirish** – Chiziqli algebra moliyaviy tahlil, iqtisodiy prognoz va resurslarni taqsimlash jarayonlarida keng qo‘llaniladi.

VII.ADABIYOTLAR RO‘YXATI

I. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining asarlari

1. Mirziyoyev Sh.M. Buyuk kelajagimizni mard va olijanob xalqimiz bilan birga quramiz. – T.: “O‘zbekiston”, 2017. – 488 b.

2. Mirziyoyev Sh.M. Milliy taraqqiyot yo‘ limizni qat’iyat bilan davom ettirib, yangi bosqichga ko‘ taramiz. 1-jild. – T.: “O‘zbekiston”, 2017. – 592 b.

3. Mirziyoyev Sh.M. Xalqimizning roziligi bizning faoliyatimizga berilgan eng oliy bahodir. 2-jild. T.: “O‘zbekiston”, 2018. – 507 b.

4. Mirziyoyev Sh.M. Niyati ulug‘ xalqning ishi ham ulug‘, hayoti yorug‘ va kelajagi farovon bo‘ ladi. 3-jild.– T.: “O‘zbekiston”, 2019. – 400 b.

5. Mirziyoyev Sh.M. Milliy tiklanishdan – milliy yuksalish sari. 4-jild.– T.: “O‘zbekiston”, 2020. – 400 b.

II. Normativ-huquqiy hujjatlar

15. O‘zbekiston Respublikasining Konstitutsiyasi. – T.: O‘zbekiston, 2023.

16. O‘zbekiston Respublikasining 2020-yil 23-sentabrda qabul qilingan “Ta’lim to‘g‘risida”gi Qonuni.

17. O‘zbekiston Respublikasining “Korrupsiyaga qarshi kurashish to‘g‘risida”gi Qonuni.

18. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2015-yil 12-iyundagi “Oliy ta’lim muassasalarining rahbar va pedagog kadrlarini qayta tayyorlash va malakasini oshirish tizimini yanada takomillashtirish to‘g‘risida”gi PF-4732-sonli Farmoni.

19. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2019-yil 27-maydagi “O‘zbekiston Respublikasida korrupsiyaga qarshi kurashish tizimini yanada takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi PF-5729-son Farmoni.

20. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2019-yil 27-avgustdagi “Oliy ta’lim muassasalari rahbar va pedagog kadrlarining uzluksiz malakasini oshirish tizimini joriy etish to‘g‘risida”gi PF-5789-sonli Farmoni.

21. O‘zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasining 2019-yil 23-sentabrdagi “Oliy ta’lim muassasalari rahbar va pedagog kadrlarining malakasini oshirish tizimini yanada takomillashtirish bo‘yicha qo‘shimcha chora-tadbirlar to‘g‘risida”gi 797-sonli Qarori.

22. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2019-yil 8-oktabrdagi “O‘zbekiston Respublikasi oliy ta’lim tizimini 2030-yilgacha rivojlantirish konsepsiyasini tasdiqlash to‘g‘risida”gi PF-5847- sonli Farmoni.

23. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2020-yil 29-oktabr “Ilm-fanni 2030 yilgacha rivojlantirish konsepsiyasini tasdiqlash to‘g‘risida”gi PF-6097-sonli Farmoni.

24. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2021-yil 17-fevraldagi “Sun’iy intellekt texnologiyalarini jadal joriy etish uchun shart-sharoitlar yaratish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi PQ-4996-son Qarori.

25. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2022-yil 28-yanvardagi “2022-2026 yillarga mo‘ljallangan Yangi O‘zbekistonning taraqqiyot strategiyasi to‘g‘risida”gi PF-60-son Farmoni.

26. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2023-yil 25-yanvardagi “Respublika ijro etuvchi hokimiyat organlari faoliyatini samarali yo‘lga qo‘yishga doir birinchi navbatdagi tashkiliy chora-tadbirlar to‘g‘risida”gi PF-14-sonli Farmoni.

27. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2023-yil 11-sentabrdagi ““O‘zbekiston - 2030” strategiyasi to‘g‘risida”gi PF-158-son Farmoni.

28. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2024-yil 21-iyundagi “Aholi va davlat xizmatchilarining korrupsiyaga qarshi kurashish sohasidagi bilimlarini uzluksiz oshirish tizimini joriy qilish chora-tadbirlari to‘g‘risida” PQ-228-son Qarori.

III. Maxsus adabiyotlar

47. Oliy ta’limning meyoriy - huquqiy xujjatlari to‘plami. -T., 2013.

48. B.I.Ismailov, I.I.Nasriyev Korrupsiyaga qarshi kurashish bo‘yicha idoraviy chora-tadbirlarning samaradorligini oshirish masalalari//O‘quv-uslubiy qo‘llanma. - T.:O‘zbekiston Respublikasi Bosh prokuraturasi Akademiyasi, O‘zbekiston Respublikasi Sudyalar oliy kengashi. Sudyalar oliy maktabi, 2020.-272 b.

49. Юсуфжанов О., Усманова С. Зарубежный опыт противодействия коррупции. // -Т.: Адвокат, 2016. №5 - 59-62б.

50. O‘rinov V. O‘zbekiston Respublikasi oliy ta’lim muassasalarida ECTS kredit-modul tizimi: asosiy tushunchalar va qoidalar. O‘quv qo‘llanma. Nyu Bransvik Universiteti, 2020.

51. The European Higher Education Area. - Joint Declaration of the Ministers of Education. - Bologna, 1999, 19 June.

52. Shaping our Own Future in the European Higher Education Area // Convention of European Higher Education Institutions. - Salamanca, 2001, 29-30 march.

53. Виртуальная реальность как новая исследовательская и образовательная среда. Серфуз Д.н. и др. // ЖУРНАЛ Научно-аналитический журнал «Вестник Санкт-Петербургского университета Государственной противопожарной службы МЧС России», 2015. – с.185-197.

54. Ibraymov A.YE. Masofaviy o‘qitishning didaktik tizimi. Metodik qo‘llanma. – T.: “Lesson press”, 2020. -112 b.

55. Игнатова Н. Й. Образование в цифровую эпоху: монография. М-во образования и науки РФ. – Нижний Тагил: НТИ (филиал) УрФУ, 2017. – 128 с. http://elar.urfu.ru/bitstream/10995/54216/1/978-5-9544-0083-0_2017.pdf

56. Кирякова А.В, Олховая Т.А., Михайлова Н.В., Запорожко В.В. Интернет-технологии на базе ЛMS Моодле в компетентностно-ориентированном образовании: учебно-методическое пособие / А.В. Кирякова, Т.А. Олховая, Н.В. Михайлова, В.В. Запорожко; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург: ОГУ, 2011. – 116 с. http://www.osu.ru/docs/fpkp/kiryakova_internet_technologies.pdf

57. Кононюк А.Е. Облачние вичисления. – Киев, 2018. – 621 с.

58. Oliy ta’lim tizimini raqamli avlodga moslashtirish konsepsiyasi. Yevropa Ittifoqi Erasmus+ dasturining ko‘magida. https://hiedtec.ecs.uni-ruse.bg/pimages/34/3._UZBEKISTAN-CONCEPT-UZ.pdf

59. Emelyanova O. A. Ta’limda bulutli texnologiyalardan foydalanish // Yosh olim. - 2014. - № 3. - S. 907-909.

60. Moodle LMS tizimida masofaviy kurslar yaratish. O‘quv-uslubiy qo‘llanma. – T.: Toshkent farmatsevtika instituti, 2017.

61. M.Xurramov. Oliy ta’lim muassasalari faoliyatiga sun’iy intellekt texnologiyasini joriy etish [Matn]: metodik qo‘llanma / M.Xurramov. K.Xalmuratova. – T.: “Yetakchi nashriyoti”, 2024. – 28 b.

62. Тенденции и развития высшего образования в мире и в России. Аналитический доклад-дайджест. - М., 2021.- 198 с.

63. A.S. Zikriyoyev. Dunyo universitetlari reytingidagi tadqiqotchi olimlar orasida o‘zingizni kashf qiling. -T.: Navro‘z,2020. ISBN.9789943659285

64. Sherzod Mustafakulov, Aziz Zikriyoev, Dilnoza Allanazarova, Tokhir Khasanov, Sokhibmalik Khomidov. Explore Yourself Among World – Class Researchers. Grand OLEditor, Tashkent 2019, ISBN: 8175 25766-0.

65. Ackoff, Russell L., Scientific Method, New York: John Wiley & Sons, 1962.

66. Barzun, Jacques & Graff. F. (1990). The Modern Researcher, Harcourt, Brace Publication: New York.

67. Muslimov N.A va boshqalar. Innovatsion ta’lim texnologiyalari. O‘quv-metodik qo‘llanma. – T.: “Sano-standart”, 2015. – 208 b.

68. Muslimov N.A va boshqalar. Pedagogik kompetentlik va kreativ asoslari. O‘quv-metodik qo‘llanma. – T.: “Sano-standart”, 2015. – 120 b.

69. Печеркина, А. А. Развитие профессиональной компетентности педагога: теория и практика [Текст] : монография / А. А. Печеркина, Э. Э. Симанюк, Е. Л. Умникова : Урал. гос. пед. ун-т. – Екатеринбург : [б.и.], 2011. – 233 с.

70. О.С. Фролова. Формирование инновационной компетенции педагога в процессе внутришкольного повышения квалификации. Дисс.к.п.н. Воронеж, 2018.

71. Компетенции педагога XXИ века [Электронний ресурс]: сб. материалов респ. конференции (Минск, 25 нояб. 2021 г.) / М-во образования Респ. Беларус,

ГУО «Акад. последиплом. образования», ОО «Белорус. пед. о-во». – Минск: АПО, 2021.
72. Ishmuhamedov R.J., M.Mirsoliyeva. O‘quv jarayonida innovatsion ta’lim texnologiyalari. – T.: «Fan va texnologiya», 2017, 60 b.
73. Ishmuhamedov R, Mirsoliyeva M, Akramov A. Rahbarning innovatsion faoliyati. – T.: “Fan va texnologiyalar”, 2019.- 68 b.
74. Коджаспирова Г.М. Педагогика в схемах, таблицах и опорних конспектах./ -М.:Айрис-пресс, 2016.
75. Натанзон Э. Ш. Приёмы педагогического воздействия. М, 2012.-202 с.
76. Сергеев И.С. Основы педагогической деятельности: Учебное пособие. – СПб.: Питер, 2014.
77. To’rayev X., Azizov I., Otaqulov S. Kombinatorika va graflar nazariyasi. Toshkent – 2009. 184 bю
78. Harris J., Hirst J.L., Mossinghoff M. Combinatorics and Graph Theory. Springer 2008. 381 p.
79. Kenneth H. Rosen. Discrete Mathematics and Its Applications. New York – 2012. 1017 p.
80. Ерош И.Л. Дискретная математика, Комбинаторика. Учебное пособие. Санкт Петербург – 2001. 37 ст.
81. Ильинская И.П., Ильинский А.И. Дискретная математика, Сборник задач, Комбинаторика, графы, вероятность. Учебное пособие. Харьков – 2008. 104 ст.
82. Носов В.А. Комбинаторика и теория графов. Москва – 1999. 112 ст.
83. Gilbert Strang “Introduction to Linear Algebra”, USA, Cambridge press, 5 nd Edition, 2016.
84. Grewal B.S. “Higher Engineering Mathematics”, Delhi, Khanna publishers, 42 nd Edition, 2012.
85. . Raxmatov R.R., Adizov A.A., Tadjibayeva Sh.E., Shoimardonov S.K. Chiziqli algebra va analitik geometriya. O‘quv qollanma. T., 2020.
86. Raxmatov R.R., Adizov A.A. “Chiziqli fazo va chiziqli operatorlar” O‘quv uslubiy qollanma. TATU, T., 2019.
87. Музафаров Х.А., Баклушин М.Б., Абдураимов М.Г. Математическое моделирование. Ташкент, Университет. 2002.
88. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование. М., Наука, 2005.
89. Xaydarov A., Kabiljanova F.A., Matyakubov A.S. Matematik modellashtirish asoslari. O‘quv qo‘llanma. Toshkent. 2023. 172 b.
90. Хайдаров А., Жумаев Ж., Шафиев Т.Р. Основы математического моделирования. Учебник. Бухара. 2022. 216 с.

91. O‘runbayev E., Murodov F. Kompyuter algebrasi tizimlarining amaliy tatbiqlari. – SamDU nashri – Samarqand, 2003, 96 b.

92. Usmonov B.SH., Habibullayev R.A. Oliy o‘quv yurtlarida o‘quv jarayonini kredit-modul tizimida tashkil qilish. O‘quv qo‘llanma. T.: “Tafakkur” nashriyoti, 2020 y. 120 b.

IV. Elektron ta’lim resurslari

10.www.edu.uz.
11.www.aci.uz.
12.www.ictcouncil.gov.uz.
13.www.lib.bimm.uz
14.www. Ziyonet. Uz
15.www.sciencedirect.com
16.www.acs.org
17.www.nature.com
18.http://www.kornienko-ev.ru/BCYD/index.html.