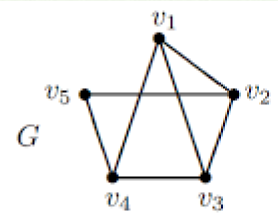
O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY TA’LIM, FAN VA INNOVATSIYALAR VAZIRLIGI

SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI HUZURIDAGI PEDAGOG KADRLARNI QAYTA TAYYORLASH VA ULARNING MALAKASINI OSHIRISH MINTAQAVIY MARKAZI

“Kombinatorika va graflar nazariyasi”

moduli bo‘yicha

O‘ Q U V –U S L U B I Y M A J M U A



$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \deg v_i \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{array}$$

SAMARQAND – 2024

Mazkur o‘quv-uslubiy majmua Oliy ta’lim, FAN VA INNOVATSIYLAR vazirligining 2023 yil 25 avgustdagiagi 391-sonli buyrug‘i bilan tasdiqlangan o‘quv reja va dastur asosida tayyorlandi.

Tuzuvchilar: SamDU dotsenti
H.X. Ro’zimuradov

Taqrizchi: Professor A. Soleev

Ўқув-услубий мажмуа СамДУ хузуридаги ПКҚТ ва УМОМ марказининг ишлаб чиқариш кенгашининг 2023 йил ________ - сонли қарори билан тасдиққа тавсия қилинган.

MUNDARIJA

I. ISHCHI DASTUR

O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY TA’LIM, FAN VA INNOVATSIYALAR VAZIRLIGI

Ro‘yxatga olindi
№ M02-18
2023-yil

Oliy ta’lim, fan va innovatsiyalar vazirining 2023-yil
“25” avgust dagi
391 - sonli buyrug‘i bilan
tasdiqlangan.

“MATEMATIKA”

yo‘nalishi bo‘yicha oliy ta’lim muassasalari pedagog kadrlarini qayta tayyorlash va malakasini oshirish kursining o‘quv dasturi

Toshkent – 2023

1.8. Ko'rgazmali geometriya.

Malakaviy attestatsiya

Kursning maqsadi va vazifalari

Oliy ta'lim muasasalari pedagog kadrlarini qayta tayyorlash va ularning malakasini oshirish kursining **maqsadi** pedagog kadrlarning innovatsion yondoshuvlar asosida o'quv-tarbiyaviy jarayonlarni yuksak ilmiy-metodik darajada loyihalashtirish, sohadagi ilg'or tajribalar, zamonaviy bilim va malakalarni o'zlashtirish va amaliyotga joriy etishlari uchun zarur bo'ladigan kasbiy bilim, ko'nikma va malakalarini takomillashtirish, shuningdek ularning ijodiy faolligini rivojlantirishdan iborat

Kursning **vazifalariga** quyidagilar kiradi:

"**Matematika**" yo'nalishida pedagog kadrlarning kasbiy bilim, ko'nikma, malakalarini takomillashtirish va rivojlantirish;

- pedagoglarning ijodiy-innovatsion faollik darajasini oshirish;

-pedagog kadrlar tomonidan zamonaviy axborot-kommunikatsiya texnologiyalari, zamonaviy ta'lim va innovatsion texnologiyalar sohasidagi ilg'or xorijiy tajribalarning o'zlashtirilishini ta'minlash;

— o'quv jarayonini tashkil etish va uning sifatini ta'minlash borasidagi ilg'or xorijiy tajribalar, zamonaviy yondashuvlarni o'zlashtirish;

"**Matematika**" yo'nalishida qayta tayyorlash va malaka oshirish jarayonlarini fan va ishlab chiqarishdagi innovatsiyalar bilan o'zaro integratsiyasini ta'minlash.

Kurs yakunida tinglovchilarning bilim, ko'nikma va malakalari hamda kompetensiyalariga qo'yiladigan talablar:

Qayta tayyorlash va malaka oshirish kursining o'quv modullari bo'yicha tinglovchilar quyidagi yangi bilim, ko'nikma, malaka hamda kompetensiyalarga ega bo'lishlari talab etiladi:

Tinglovchi:

- 2022-2026-yillarga mo'ljallangan Yangi O'zbekistonning taraqqiyot strategiyasining davlat va jamiyat hayotini takomillashtirishdagi o'rni va ahamiyatini;
- O'zbekiston Respublikasi Konstitutsiyasining asosiy prinsiplarini;
- Oliy ta'lim sohasiga oid qonun hujjatlari va ularning mazmunini;
- O'zbekiston Respublikasi Prezidentining oliy ta'lim tizimiga oid farmonlari, qarorlarini;
- O'zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasining oliy ta'lim tizimiga tegishli qarorlarini;
- Oliy ta'lim, fan va innovatsiya vazirligining ta'lim jarayonlarini rejalashtirish va tashkil etishga oid buyruqlarini;
- Davlat ta'lim standartlari, ta'lim yo'nalishlari va magistratura mutaxassisliklarining Malaka talablari, o'quv rejalari, fan dasturlari va ularga qo'yiladigan talablarni, o'quv yuklamalarini rejalashtirish va ularning bajarilishini

nazorat qilish usullarini;

- ta'lim jarayonini raqamli transformatsiyasini;
- raqamli ta'lim resurslari va dasturiy mahsulotlarini;
- raqamli ta'lim resursini pedagogik loyihalash texnologiyasini;
- mediasavodxonlik va xavfsizlik asoslarini;
- raqamli ta'lim resurslarini loyihalash uchun asosiy talablarni;
- jahonda oliy ta'lim rivojlanish tendensiyalari: umumiy trendlar va strategik yo'nalishlarni;
- zamonaviy ta'limning global trendlarini;
- inson kapitalining iqtisodiy o'sishning asosiy omili sifatida rivojlanishida ta'limning yoshdagi ahamiyatini;
- oliy ta'limning zamonaviy integratsiyasi: global va mintaqaviy makonda raqobatchilikdagi ustuvorliklari, universitetlarning xalqaro va milliy reytingini;
- xalqaro reyting turlari va ularning indikatorlarini;
- zamonaviy universitet jamiyatning faol, ko'pqirrali va samarali faoliyat yurituvchi instituti sifatidagi uchta yirik vazifalarini;
- universitetlarning zamonaviy modellarini;
- zamonaviy kelajak universitetlarning beshta asosiy modellarini;
- tadbirkorlik universiteti faoliyatining muhim yo'nalishlarini;
- pedagogning kasbiy kompetensiyalarini rivojlantirishning nazariy asoslarini;
- innovatsion ta'lim muhiti sharoitida pedagogning kasbiy kompetensiyalarini rivojlantirish yo'llarini;
- kasbiy kompetensiyalarning mazmun va mohiyatini;
- kasbiy kompetensiyalar va ularning o'ziga xos xususiyatlarini;
- pedagogik texnikaning asosiy komponentlarini;
- pedagogik texnikani shakllantirish yo'llarini;
- kasbiy kompetensiyalarni rivojlantirish jarayonini tashkil etishda innovatsion, akmeologik, aksiologik, kreativ, refleksiv, texnologik, kompetentli, psixologik, andragogik yondashuvlar va xalqaro tajribalar hamda ularning kasbiy kometensiyalarni rivojlantirishga ta'sirini;
- kasbiy kompetetnsiyalarni rivojlantirish jarayonida pedagogik deontologiyaning roli, ahamiyatini;
- kasbiy kompetensiyalarni rivojlantirishda uchraydigan to'siqlarni yechishda, to'g'ri harakatlar qilishda pedagogning kompetentlik va kreativlik darajasi, pedagogik kvalimetriyasini;
- talabalar kasbiy tayyorgarlik sifatini kompleks baholashning nazariyasini;
- ta'lim sifatiga ta'sir etuvchi omillarni;
- kredit-modul tizimida talabalarning bilimi, ko'nikmasi, malakasi va kompetensiyalarini nazorat qilish va baholashning o'ziga xos xususiyatlari, didaktik funksiyalarini;

O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI

OLIY TA’LIM, FAN VA INNOVATSIYALAR VAZIRLIGI

OLIY TA’LIM TIZIMI PEDAGOG VA RAHBAR KADRLARINI QAYTA TAYYORLASH VA ULARNING MALAKASINI OSHIRISHNI TASHKIL ETISH BOSH ILMIY — METODIK MARKAZI

O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI HUZURIDAGI PEDAGOG KADRLARNI QAYTA TAYYORLASH VA ULARNING MALAKASINI OSHIRISH TARMOQ (MINTAQAVIY) MARKAZI

Qayta tayyorlash va malaka oshirish kursining o‘quv dasturi Oliy, o‘rta maxsus va professional ta’lim yo‘nalishlari bo‘yicha o‘quv-uslubiy birlashmalar faoliyatini Muvofiqlashtiruvchi kengashining 2023-yil 11.08 dagi 4 - sonli bayonnomasi bilan ma’qullangan.

Tuzuvchilar:

“Yangi O‘zbekistonning taraqqiyot strategiyasi va jamiyatning ma’naviy asoslari” moduli: yu.f.b., PhD F.B.Maxmudov.

“Oliy ta’limning normativ-huquqiy asoslari” moduli: yu.f.n., prof. V.Topildiyev.

“Pedagogik faoliyatda raqamli kompetensiyalar” moduli: t.f.d., prof. D.Irgasheva, Sh.Adashboyev, p.f.b., PhD A.Obidov.

“Ilmiy va innovatsion faoliyatni rivojlantirish ” moduli: i.f.d., prof. R.Nurimbetov, p.f.b., PhD J.Kusherbayev.

“Pedagogning kasbiy kompetensiyalarini rivojlantirish” moduli: p.f.d., prof. N.A.Muslimov, p.f.d., prof. J.Tolipova.

“Ta’lim sifatini ta’minlashda baholash metodikalari” moduli: p.f.d., prof. N.A.Muslimov, p.f.b., PhD M.Innazarov.

“Kombinatorika va graflar nazariyasi” moduli: V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika instituti katta ilmiy xodimi, f.-m.f.d. E.T.Karimov.

“Ko‘rgazmali geometriya” moduli: Toshkent davlat transport universiteti “Oliy matematika” kafedrasi professori, f.-m.f.d. A.Artikbayev

Taqrizchilar: f.-m.f.d., akademik A.Sadullayev – O‘zbekiston Milliy universiteti.

Xorijiy ekspert: f.-m.f.d., professor V.K.Jarov – AFXTI (Rossiya), Fundamental va amaliy matematika kafedrasi mudiri.

O‘quv dasturi O‘zbekiston Milliy universiteti Kengashining qarori bilan tasdiqqa tavsiya qilingan (2023-yil ___________dagi _____- sonli bayonnoma).

Kirish

Ushbu dastur O‘zbekiston Respublikasining 2020-yil 23-sentabrda tasdiqlangan “Ta’lim to‘g‘risida”gi Qonuni, O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2015-yil 12-iyundagi “Oliy ta’lim muassasalarining rahbar va pedagog kadrlarini qayta tayyorlash va malakasini oshirish tizimini yanada takomillashtirish to‘g‘risida”gi PF-4732-son, 2019-yil 27-avgustdagi “Oliy ta’lim muassasalari rahbar va pedagog kadrlarining uzluksiz malakasini oshirish tizimini joriy etish to‘g‘risida”gi PF-5789-son, 2019-yil 8-oktabrdagi “O‘zbekiston Respublikasi oliy ta’lim tizimini 2030-yilgacha rivojlantirish konsepsiyasini tasdiqlash to‘g‘risida”gi PF-5847-son, 2022-yil 28- yanvardagi “2022- 2026-yillarga mo‘ljallangan Yangi O‘zbekistonning taraqqiyot strategiyasi to‘g‘risida”gi PF-60-son, 2023-yil 25-yanvardagi “Respublika ijro etuvchi hokimiyat organlari faoliyatini samarali yo‘lga qo‘yishga doir birinchi navbatdagi tashkiliy chora-tadbirlar to‘g‘risida”gi PF-14-son Farmonlari, shuningdek, O‘zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasining 2019-yil 23-sentabrdagi “Oliy ta’lim muassasalari rahbar va pedagog kadrlarining malakasini oshirish tizimini yanada takomillashtirish bo‘yicha qo‘shimcha chora-tadbirlar to‘g‘risida”gi 797-son Qarorida belgilangan ustuvor vazifalar mazmunidan kelib chiqqan holda tuzilgan bo‘lib, u oliy ta’lim muassasalari pedagog kadrlarining kasb mahorati hamda innovatsion kompetentligini rivojlantirish, sohaga oid ilg‘or xorijiy tajribalar, yangi bilim va malakalarni o‘zlashtirish, shuningdek amaliyotga joriy etish ko‘nikmalarini takomillashtirishni maqsad qiladi.

Dastur doirasida berilayotgan mavzular ta’lim sohasi bo‘yicha pedagog kadrlarni qayta tayyorlash va malakasini oshirish mazmuni, sifati va ularning tayyorgarligiga qo‘yiladigan umumiy malaka talablari va o‘quv rejalari asosida shakllantirilgan bo‘lib, uning mazmuni yangi O‘zbekistonning taraqqiyot strategiyasi va jamiyatning ma’naviy asoslarini yoritib berish, oliy ta’limning normativ-huquqiy asoslari bo‘yicha ta’lim-tarbiya jarayonlarini tashkil etish, pedagogik faoliyatda raqamli kompetensiyalarni rivojlantirish, ilmiy-innovatsion faoliyat darajasini oshirish, pedagogning kasbiy kompetensiyalarini rivojlantirish, ta’lim sifatini ta’minlashda baholash metodikalaridan samarali foydalanish, kombinatorika va graflar nazariyasi, zamonaviy matematik tizimlar bo‘yicha tegishli bilim, ko‘nikma, malaka va kompetensiyalarni rivojlantirishga yo‘naltirilgan.

Qayta tayyorlash va malaka oshirish kursining o‘quv dasturi quyidagi modullar mazmunini o‘z ichiga qamrab oladi:

1.1. Yangi O‘zbekistonning taraqqiyot strategiyasi va jamiyatning ma’naviy asoslari.

1.2. Oliy ta’limning normativ-huquqiy asoslari.

1.3. Pedagogik faoliyatda raqamli kompetensiyalar.

1.4. Ilmiy va innovatsion faoliyatni rivojlantirish.

1.5. Pedagogning kasbiy kompetensiyalarini rivojlantirish.

1.6. Ta’lim sifatini ta’minlashda baholash metodikalari.

1.7. Kombinatorika va graflar nazariyasi.

- baholash turlari,tamoyillari va mezonlarini;
- kombinatorika va graflar nazariyasini;
- dekart ko‘paytma, o‘rinlashtirish, o‘rin almashtirishlarni;
- paskal uchburchagi, Nyuton binomini;
- takroriy kombinatsiyalarni;
- bo‘laklash kombinatorikasini;
- braflarning berilish usullari: geometrik ifodalanishi, ko‘phad yordamida berilishi, matritsalar yordamida berilishini;
- Eyler,Gamilton graflarini;
- grafning metrik xarakteristikalarini;
- planar graflarni;
- geometriya predmeti va usullarini;
- sirt ichki va tashqi geometriyani;
- soordinatalar sistemasi va uni geometriyadagi o‘rnini;
- geometriyaning zamonaviy yo‘nalishlari va muammolarini
- tekislikdagi geometriyaga doir masalalarni;
- ko‘pyoqliklar va ularning turlarini;
- ko‘pyoqlik yoyilmasini;
- vektorlar, vektor funksiyalarni ***bilishi*** kerak.

Tinglovchi:

- 2022- 2026-yillarga mo‘ljallangan Yangi O‘zbekistonning taraqqiyot strategiyasining asosiy yo‘nalish va maqsadlarini tahlil etish va baholash;
- O‘zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasining Oliy ta’lim tizimiga tegishli qarorlari asosida ta’lim-tarbiya jarayonlarini tashkil etish;
- xorijiy tajribalar asosida malaka talablari, o‘quv rejalari va fan dasturlarini takomillashtirish;
- multimedia va infografika asosida interaktiv didaktik mayeriallar yaratish va bulut xizmatlarida saqlash;
- masofiviy ta’lim platformalari uchun video kontent yaratish;
- Internetda mualliflik huquqlarini himoya qilish usullaridan foydalanish;
- raqamli ta’lim resurslari sifatini baholash;
- OTMlarni reyting bo‘yicha ranjirlash;
- jahon universitetlari reytingini tahlil etish va baholash;
- universitetlarni mustaqil baholash yondashuvlarini aniqlashtirish;
- tadbirkorlik universitetiga o‘tish uchun zarur bo‘ladigan o‘zgarishlarni aniqlash;
- Universitet 1.0 dan Universitet 3.0 modeliga o‘tish borasidagi muammolarni aniqlash;
- zamonaviy tadbirkorlik universiteti modeli tamoyillarini o‘zlashtirish;
- pedagoglarning kreativ potensiali tushunchasi va mohiyatini ochib berish;

- pedagoglar kasbiy kompetensiyalarini rivojlantirishning innovatsion texnologiyalarini qo‘llash;
- o‘qituvchi faoliyatida pedagogik texnikaning axamiyatini yoritib berish;
- tinglovchilar diqqatini o‘ziga tortish usullaridan foydalanish;
- kasbiy kompetentsiyalarni shakllantirish va rivojlantirish yo‘llarini tahlil etish;
- kasbiy kompetensiyalarni rivojlantirish jarayonida uchraydigan to‘siqlar, qiyinchiliklar va ularni bartaraf etish;
- talabalarning o‘quv auditoriyadagi faoliyatini baholash;
- talabalarning kurs ishi, bitiruv malakaviy ishi, o‘quv-malakaviy amaliyot (mehnat faoliyati)ini nazorat qilish;
- baholashning miqdor va sifat tahlilini amalga oshirish;
- hosil qiluvchi funksiyalar va ularning tadbiq etish;
- graflarning berilish usullarini amaliyotga tadbiq etish;
- koordinatalar sistemasi va uni geometriyadagi o‘rnini yoritib berish;
- geometriyaning zamonaviy yo‘nalishlari va muammolarini yechimini topish ***ko‘nikmalariga*** ega bo‘lishi lozim.

Tinglovchi:

- “Yangi O‘zbekiston – ma’rifatli jamiyat” konsepsiyasining mazmun-mohiyatini yoritib berish;
- Oliy ta’lim, fan va innovatsiya vazirligining ta’lim-tarbiya jarayonini tashkil etishga oid buyruqlari, Davlat ta’lim standartlari, ta’lim yo‘nalishlarining va magistratura mutaxassisliklarining malaka talablari, o‘quv rejalar va fan dasturlarini takomillashtirish;
- o‘quv yuklamalarni rejalashtirish va ularning bajarilishini nazorat qilish;
- meyoriy uslubiy hujjatlarni ishlab chiqish amaliyotini takomillashtirish mexanizmlarini tahlil etish;
- an’anaviy va raqamli ta’limda pedagogik dizaynning xususiyatlarini ochib berish;
- onlayn mashg‘ulotlarni tashkil etishda raqamli texnologiyalardan foydalanish;
- mediasavodxonlik va xavfsizlik asoslarini o‘zlashtirish;
- pedagogik faoliyatda raqamli kompetensiyalarni rivojlantirish;
- raqamli ta’lim resurslaridan foydalanish;
- xalqaro reyting turlari va ularning indikatorlarining ahamiyatini ochib berish;
- OTM reytingiga ta’sir etuvchi omillarni tahlil etish;
- universitetlarning zamonaviy modellarini o‘rganish;
- OTM bitiruvchilari va xodimlari tomonidan texnologiyalar transferiga litsenziyalar oluvchi startaplarni shakllantirish va yaratish;

- professor-o‘qituvchilarning tadqiqotchi sifatidagi nashr faolligini rivojlantirish istiqbollarini tahlil etish;
- innovatsion ta’lim muhiti sharoitida pedagogning kasbiy kompetensiyalarini rivojlantirish;
- pedagog kasbiy kompetensiyalarini rivojlantirish hususiyatlarini tahlil etish va baholash;
- ijtimoiy va kasbiy tajribaga asoslangan intellektual mashqlarni ishlab chiqish;
- o‘quv jarayoni ishtirokchilarini bir-birlari bilan tanishtirish, samimiy do‘stona munosabat va ijodiy muhitni yuzaga keltirish, tinglovchilarning ijodiy imkoniyati va shaxsiy sifatlarini ochish, tinglovchilarning hamkorlikda ishlashlari uchun qulay sharoitni vujudga keltirish;
- tinglovchilarning kasbiy kompetensiyalarini o‘rganish, tanishish;
- kasbiy kompetetnsiyalarni rivojlantirish jarayonida pedagogik deontologiyaning roli, ahamiyatini ochib berish;
- ta’lim sifatiga ta’sir etuvchi omillar (moddiy-texnik baza, professor-o‘qituvchilarning salohiyati va o‘quv-metodik ta’minot)ni tahlil etish va baholash;
- talabalarning o‘quv auditoriyadan tashqari faoliyatini baholash;
- talabalarning o‘quv auditoriyadan tashqari faoliyatini baholashda o‘quv topshiriqlari (reproduktiv, produktiv, qisman-izlanishli, kreativ (ijodiy) murakkablik)ni ishlab chiqish metodikasidan samarali foydalanish;
- Eyler, Gamilton graflarini qo‘llash;
- grafning metrik xarakteristikalarini o‘zlashtirish;
- elementar geometriyaning asosiy elementlari va unga doir masalalarni yechish;
- ko‘pyoqliklar bilan sirtga yaqinlashishga doir masalalarni yechish;
- sirtda metrikaga doir masalalarni tahlil etish va yechimini topish ***malakalariga*** ega bo‘lishi zarur.

Tinglovchi:

- Yangi O‘zbekistonning taraqqiyot strategiyasi va jamiyatning ma’naviy asoslarini mazmun-mohiyatini yoritib berish:
- O‘zbekiston Respublikasi Oliy ta’lim, fan va innovatsiya vazirligining buyruqlari asosida ta’lim-tarbiya jarayonlarini tashkil etish;
- Davlat ta’lim standartlari, malaka talablari, o‘quv rejalar va fan dasturlar asosida fanning ishchi dasturini ishlab chiqish amal qilish va ularni ijrosini ta’minlash;
- raqamli ta’lim resurslari va dasturiy mahsulotlarini o‘quv jarayoniga faol tatbiq etilishini tashkil etish;
- raqamli ta’lim resursini pedagogik loyihalash texnologiyasi asoslarini o‘zlashtirish;
- raqamli ta’lim muhitida pedagogik dizaynga oid innovatsiyalarni amaliyotga tatbiq etish;

- universitetlarning xalqaro va milliy reytingini baholash;
- OTMlarda talim, ilmiy va innovatsion faoliyatni rivojlantirish, ilmiy tadqiqot natijalarni tijoratlashtirish yo‘llarini tahlil etish va amaliyotga tadbiq etish;
- “Amaliyotchi professorlar” (PoP,Professor of Practice) modelini qo‘llash;
- professor-o‘qituvchilarning tadqiqotchi sifatidagi nashr faolligini rivojlantirish istiqbollarini yoritib berish;
- pedagogning kasbiy kompetensiyalarini rivojlantirishning nazariy asoslarini amaliyotga tadbiq etish;
- pedagogning kasbiy kompetensiyalarini rivojlantirishning pedagogik-psixologik trayektoriyalarini ishlab chiqish;
- kasbiy kompetensiyalarni rivojlantirish jarayonida uchraydigan to‘siqlarning xilma-xilligi va o‘ziga xos xususiyatlari, sabablarini amaliy tomonlarini yoritish, ularni yechish bosqichlarini guruh bilan birgalikda aniqlash;
- talabalar kasbiy tayyorgarlik sifatini kompleks baholash;
- talabalar kasbiy tayyorgarlik sifatini kompleks baholashning elektron monitoring tizimini yuritish;
- talabalarning ta’limiy (o‘quv predmetlari), tarbiyaviy (ma’naviy-ma’rifiy tadbirlar) va rivojlantiruvchi (ilmiy-tadqiqot ishi, start-up loyihalar) maqsadlarini baholash;
- kombinatorika va graflar nazariyasini tahlil etish va baholash;
- tarmoqdagi oqimlarini bilish va ulardan foydalana olish;
- ko‘rgazmali geometriya asoslarini o‘zlashtirish;
- masofa, yuza va hajm tushunchalari bilan bog‘liq masalalarni tahlil etish;
- noevklid geometriyasiga doir masalalarni yechimini topish ***kompetensiyalariga*** ega bo‘lishi lozim.

Kurs hajmi

Qayta tayyorlash va malaka oshirish kursi 288 soatni tashkil etadi. Bunda o‘quv dasturining 144 soat hajmi ishdan ajralmagan mustaqil malaka oshirish shakllari asosida, 144 soati to‘g‘ridan-to‘g‘ri (bevosita) malaka oshirish shaklida ishdan ajragan holda amalga oshiriladi. Malaka oshirishning bevosita shaklida bir haftadagi o‘quv yuklamasining eng yuqori hajmi 36 soatni tashkil etadi. Attestatsiyadan muvaffaqiyatli o‘tgan kurs tinglovchilariga O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2015-yil 12-iyundagi PF-4732-son Farmoni 3-ilovasi bilan tasdiqlangan davlat namunasidagi malaka attestati beriladi.

“MATEMATIKA” YO‘NALISHI BO‘YICHA QAYTA TAYYORLASH VA MALAKA OSHIRISH KURSINING O‘QUV MODULLARINING MAZMUNI

1.1. Yangi O‘zbekistonning taraqqiyot strategiyasi va jamiyatning ma’naviy asoslari.

2022-2026-yillarga mo‘ljallangan Yangi O‘zbekistonning taraqqiyot strategiyasining davlat va jamiyat hayotini takomillashtirishdagi o‘rni va ahamiyati.

Yangi O‘zbekiston sharoitida davlat va jamiyat hayotida olib borilayotgan islohotlar mazmuni va mohiyati. 2022-2026-yillarga mo‘ljallangan Yangi O‘zbekistonning taraqqiyot strategiyasining o‘rni va ahamiyati. Yangi O‘zbekistonning taraqqiyot strategiyasida Yangi O‘zbekistonni barpo etishning siyosiy-huquqiy, ijtimoiy-iqtisodiy va ilmiy-ma’rifiy asoslari.

2022-2026-yillarga mo‘ljallangan Yangi O‘zbekistonning taraqqiyot strategiyasining asosiy yo‘nalish va maqsadlari.

Inson qadrini yuksaltirish va erkin fuqarolik jamiyatini yanada rivojlantirish orqali xalqparvar davlat barpo etish. Mamlakatimizda adolat va qonun ustuvorligi tamoyillarini taraqqiyotning eng asosiy va zarur shartiga aylantirish. Milliy iqtisodiyotni jadal rivojlantirish va yuqori o‘sish sur’atlarini ta’minlash. Adolatli ijtimoiy siyosat yuritish, inson kapitalini rivojlantirish. Ma’naviy taraqqiyotni ta’minlash va sohani yangi bosqichga olib chiqish. Milliy manfaatlardan kelib chiqqan holda umumbashariy muammolarga yondashish. Mamlakatimiz xavfsizligi va mudofaa salohiyatini kuchaytirish, ochiq, pragmatik va faol tashqi siyosat olib borish.

O‘zbekiston Respublikasining zamonaviy konstitutsionalizmi.

O‘zbekiston Respublikasi Konstitutsiyasining asosiy prinsiplari. O‘zbekiston Respublikasi Konstitutsiyasida inson va fuqaroning asosiy huquqlari, erkinliklari va burchlari. Jamiyatning iqtisodiy negizlari. O‘zbekiston Respublikasi Konstitutsiyasida ma’muriy-hududiy va davlat tuzilishi masalalari. Davlat hokimiyatining tashkil etilishining konstitutsiyaviy asoslari.

1.2. Oliy ta’limning normativ-huquqiy asoslari.

Oliy ta’lim sohasiga oid qonun hujjatlarining umumiy tavsifi.

Oliy ta’lim tizimini tartibga soluvchi normativ — huquqiy xujjatlar tushunchasi. Normativ-huquqiy xujjatlarning turlari. Normativ huquqiy xujjatlarga qo‘yiladigan talablar. O‘zbekiston Respublikasining Konstitutsiyasi, O‘zbekiston Respublikasining “Ta’lim to‘g‘risida”gi qonuni. Ta’lim jarayoni ishtirokchilarini ijtimoiy himoya qilish. Ta’lim to‘g‘risidagi qonun xujjatlarini buzganlik uchun javobgarlik.

Oliy ta’lim sohasiga oid qonunosti hujjatlari va ularning turlari.

O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining Oliy ta’lim tizimiga oid farmonlari va qarorlari: O‘zbekiston Respublikasi oliy ta’lim tizimini 2030-yilgacha rivojlantirish konsepsiyasi. 2022 — 2026-yillarga mo‘ljallangan yangi O‘zbekistonning taraqqiyot strategiyasi. Davlat oliy ta’lim muassasalarining akademik va tashkiliy-boshqaruv mustaqilligini ta’minlash bo‘yicha qo‘shimcha chora-tadbirlar. Davlat oliy ta’lim muassasalariga moliyaviy mustaqillik berish chora-tadbirlari.

Oliy ta’lim, fan va innovatsiyalar vazirligining buyruqlari.

O‘zbekiston Respublikasi Oliy ta’lim, fan va innovatsiya vazirligining ta’lim va tarbiya jarayonlarini tashkil etishga oid buyruqlari. Davlat ta’lim standartlari, ta’lim yo‘nalishlari va magistratura mutaxassisliklarining Malaka talablari, o‘quv rejalar, fan dasturlari va ularga qo‘yiladigan talablar. O‘quv yuklamalarini rejalashtirish va ularning bajarilishini nazorat qilish usullari. OTMlarning lokal xujjatlari (Ustav, Ichki tartib qoidalar).

Meyoriy uslubiy hujjatlarni ishlab chiqish amaliyotini takomillashtirish mexanizmlari. Ta’lim yo‘nalishlari va magistratura mutaxassisliklarining Malaka talablari, o‘quv rejalari va fan dasturlarini ishlab chiqish. Xorijiy tajribalar asosida Malaka talablari, o‘quv rejalari va fan dasturlarini takomillashtirish.

1.3. Pedagogik faoliyatda raqamli kompetensiyalar.

Ta’lim jarayonini raqamli transformatsiyasi.

Pedagogning raqamli kompetentligi va uning tarkibiy tuzilmasi. Raqamli didaktika va uning asosiy tamoyillari. Raqamli ta’lim resurslarini loyihalash uchun asosiy talablar. Raqamli ta’lim resurslari sifatini baholash.

Raqamli ta’lim muhitida pedagogik dizayn. Mediasavodxonlik va xavfsizlik.

An’anaviy va raqamli ta’limda pedagogik dizaynning xususiyatlari. Raqamli ta’lim resursini pedagogik loyihalash texnologiyasi. ADDIE pedagogik dizayn tushunchasi. UX-dizayn. Internetdagi turli manbalar bilan ishlashda maxsus norma va qoidalarga rioya qilish: mediasavodxonlik, mualliflik huquqi, axborot xavfsizligi. Internetda mualliflik huquqlarini himoya qilish usullari.

Raqamli ta’lim resurslari va dasturiy mahsulotlari.

Raqamli ta’lim resurslaridan (RTR) foydalanish. RTRni tanlash, elektron kutubxonalar bilan ishlash, ta’lim oluvchilarning ehtiyojlaridan kelib chiqqan holda ochiq o‘quv platformalarida ommaviy onlayn kurslarni tanlash.

Multimedia va infografika asosida interaktiv didaktik mayeriallar yaratish va bulut xizmatlarida saqlash.

Pedagogik faoliyatda bulutli xizmatlardan (Google, H5P, Canva, figma) foydalanish. Bulutli xizmatlardan foydalanib infografika, videoma’ruza va multimedia vositalarini o‘z ichiga qamrab olgan interaktiv taqdimot yaratish, animatsiya effektlarini o‘rnatish, giperhavolalar yordamida taqdimot namoyishini boshqarish.

Masofiviy ta’lim platformalariga videokontent yaratish: Onlayn video muharrirlardan (AdobePremiere Pro, Davici Resolve, FinalCut) foydalangan holda audio va video montaj qilish. Taklif etilgan muharrirdan foydalanib, tanlangan mavzu bo‘yicha video yozish, tahrirlash va saqlash.

Onlayn mashg‘ulotlarni tashkil etishda raqamli texnologiyalardan foydalanish.

Onlayn mashg‘ulotlarni tashkil etishda vebinar xizmatlari (Zoom, Yandeks.Telemost Google Meet va b.) bilan ishlash.

1.4. Ilmiy va innovatsion faoliyatni rivojlantirish.

Jahonda oliy ta’lim rivojlanish tendensiyalari: umumiy trendlar va strategik yo‘nalishlar.

Zamonaviy ta'limning global trendlari. Ta'limning globallashuvi, ta'limning oxirgi o'n yilliklarda butun dunyoda butun jahon iqtisodiy, siyosiy, madaniy integratsiyasi va unifikatsiyasi, kengaytirish jarayoni vazifasini bajarishi. Milliy ta'lim tizimlarining davlat chegaralaridan chiqib, ta'limning baynallminallashuvi va yagona ta'lim makoni va ta'lim xizmatlari bozorining shakllanishi. Ta'limning ommaviylashuvi. Ta'limning demokratlashuvi. Ta'lim texnologiyasi. Inson kapitalining iqtisodiy o'sishning asosiy omili sifatida rivojlanishida ta'limning yoshdagi ahamiyati. Uzluksiz va umr davomida ta'lim olish. Talantlar uchun raqobatchilikning kuchayishi.

Oliy ta'limning zamonaviy integratsiyasi: global va mintaqaviy makonda raqobatchilikdagi ustuvorliklari, universitetlarning xalqaro va milliy reytingi.

OTMlarni reyting bo'yicha ranjirlash. Xalqaro reyting turlari va ularning indikatorlari. Jahon universitetlari reytingi. Universitetlarni mustaqil baholash yondashuvlarini aniqlashtirish. Quacquarelli Symond(QS). Shanxay (Shanghai Jiao Tong University) universitetining oliy ta'lim instituti (Institute of Higher Education) tomonidan dunyoning 500 ta yetakchi universitetlari- ARWU-500 ro'yxati. Times Higher Education(THE) World University Ranking reytingi.

Oliy ta'limning zamonaviy integratsiyasi: global va mintaqaviy makonda raqobatchilikdagi ustuvorliklari, universitetlarning xalqaro va milliy reytingi.

OTM reytingiga ta'sir etuvchi omillar. OTMlarni reyting bo'yicha ranjirlash. Xalqaro reyting turlari va ularning indikatorlari. Jahon universitetlari reytingi. Universitetlarni mustaqil baholash yondashuvlarini aniqlashtirish. Quacquarelli Symond(QS). Shanxay (Shanghai Jiao Tong University) universitetining oliy ta'lim instituti (Institute of Higher Education) tomonidan dunyoning 500 ta yetakchi universitetlari- ARWU-500 ro'yxati. Times Higher Education(THE) World University Ranking reytingi.

OTM larda talim, ilmiy va innovatsion faoliyatni rivojlantirish, ilmiy tadqiqot natijalarni tijoratlashtirish.

Zamonaviy universitet jamiyatning faol, ko'pqirrali va samarali faoliyat yurituvchi instituti sifatidagi uchta yirik vazifalari. Universitetlarning zamonaviy modellari va ularning transformatsiyasi. Universitetlarning klassik modellari. Universitetlarning zamonaviy modellari. Zamonaviy kelajak universitetlarning beshta asosiy modellari. Universitet 1.0 dan universitet 3.0 modeliga o'tish borasidagi muammolar, yechimlar va istiqbollar. Tadbirkorlik universitetiga o'tish uchun zarur bo'ladigan o'zgarishlar. Tadbirkorlik universitetining asosiy vazifalari. Texnologiyalarni tijoratlashtirish. Akademik tadbirkorlik = "universitet spin-offi". Akademik spin-off — universitetga taalluqli bo'lgan texnologiyalar asosida universitet xodimlari yoki bitiruvchilari tomonidan yaratiladigan shu'ba tashkilot. OTM bitiruvchilari va xodimlari tomonidan texnologiyalar transferiga litsenziyalar oluvchi start-aplarni shakllantirish va yaratish. Zamonaviy tadbirkorlik universiteti modeli tamoyillari. Tadbirkorlik universiteti faoliyatining muhim yo'nalishlari. Universitet 4.0 kelajak universiteti sifatida. Kelajak universitetining asosiy konturlari.

Universitet 3.0 modelida professor — o'qituvchilar faoliyatini tashkil etish:

"amaliyotchi professorlar" (pop,professor of practice) modeli.

Universitetlarning an'anaviy vazifalari (transformatsiya): o'quv faoliyati (yangi o'quv predmetlarining paydo bo'lish, ta'limning innovatsion usullarining rivojlanishi); ilmiy faoliyat (yangi bilimlarni generatsiyalash; individual va fanlararodan guruhli tadqiqotlarga o'tish). universitetlarning yangi ("uchinchi") vazifasi: universitetlar bo'linmalarida olingan ilmiy natijalarni tijoratlashtirish (patentlashtirish, litsenziyalashtirish, kichik innovatsion kompaniyalarni yaratish va boshq.). Istitutsional sohalar kesishuvidagi innovatsiya. Uch qirrali spiral modeli: innovatsiyalar, kelishuvlar va bilimlar makoni. "Amaliyotchi professorlar" (PoP, Professor of Practice) modeli. "Amaliyotchi professorlar" (PoP, Professor of Practice) modeli asosida universitetga yuqori texnologiyaga asoslangan firmalarni yaratgan xodimlarni jalb etish mexanizmi.

Professor-o'qituvchilarning tadqiqotchi sifatidagi nashr faolligini rivojlantirish istiqbollari.

ORCID, JEL Classification (Code) va Mendeley, Grammarly, CorelDraw dasturlaridan foydalanib dissertatsiya ishi paragraflari, ilmiy maqolalar va biznes hisobotlarni IMRAD formatida rasmiylashtirish. Scopus xalqaro ilmiy bazasida Sifat ko'rsatkichlari: Quartile (kvartil); CiteScore (yiliga sitatalash soni); SJR (SCImago Journal Rank); SNIP (Source Normalized Impact per Paper); kvartillar va protsentillar; Scopusdagi jurnallarni tekshirish; Scopus, Web of Science yoki yuqori impakt faktorli (IF) jurnallarda maqola chop etish. Ilmiy maqolalarning turlari (nazariy) ilmiy maqoalalarning turlari (empirik/amaliy). Maqolaning tahririyatda o'tish protsedurasi. Mahsuldor va ko'p nashr ettiruvchi tadqiqotchi bo'lish yo'llari.

1.5. Pedagogning kasbiy kompetensiyalarini rivojlantirish.

Pedagogning kasbiy kompetensiyalarini rivojlantirishga yangicha yondashuv.

Kasbiy kompetensiyalarning mazmun va mohiyati. Kasbiy kompetensiyalar va ularning o'ziga xos xususiyatlari Kasbiy kompetensiyalarni rivojlantirish jarayonini tashkil etishda innovatsion, akmeologik, aksiologik, kreativ, refleksiv, texnologik, kompetentli, psixologik, andragogik yondashuvlar va xalqaro tajribalar hamda ularning kasbiy kometensiyalarni rivojlantirishga ta'siri.

Pedagogik texnika — kasbiy kompetensiyalar kompetensiyalarni rivojlantirishning asosiy omili sifatida.

Pedagogik texnika xakida tushuncha. Pedagogik texnika – pedagog xulkining boshkarish omili sifatida. O'qituvchi faoliyatida pedagogik texnikaning axamiyati. Pedagogik texnikaning asosiy komponentlari. Pedagogik texnikani shakllantirish yo'llari. Tinglovchilar dikkatini o'ziga tortish usullari. Auditoriyani boshqarish psixologiyasi, tinglovchilarga ta'sir etish va ishontirish usullari. Pedagog faoliyatiga qo'yiladigan baho darajasi – pedagogik kvalimetriya. Pedagogik deontologiya, pedagogik boshqaruv va texnika o'qituvchi faoliyatini samarali tashkil etishning asosiy shakli.

Kasbiy kompetentsiyalarni shakllantirish va rivojlantirish yo'llari.

Ijtimoiy va kasbiy tajribaga asoslangan intellektual mashq. O'quv jarayoni

ishtirokchilarini bir-birlari bilan tanishtirish, samimiy do'stona munosabat va ijodiy muhitni yuzaga keltirish, tinglovchilarning ijodiy imkoniyati va shaxsiy sifatlarini ochish, tinglovchilarning hamkorlikda ishlashlari uchun qulay sharoitni vujudga keltirish. Tinglovchilarning kasbiy kompetensiyalarini o'rganish, tanishish. Tarqatma materiallar bilan kichik guruhlarda ishlash. Guruhlar taqdimoti.

Kasbiy kompetetnsiyalarni rivojlantirish jarayonida pedagogik deontologiyaning roli, ahamiyati.

Pedagogik deontologiya – pedagogning odab ahloqi fani: mazmuni, mohiyati, ahamiyati. Pedagog obro'si va uni faoliyatda namoyon bulishi. Pedagog nafosati va odobini shakllantirish, rivojlantirish yo'llari xamda unga erishish shart-sharoitlari. Talabalarning o'quv-bilish faoliyati faolligini oshirish va mustaqil ta'limini tashkil etish. Pedagogning kasbiy kompetensiyalarini rivojlantirishning pedagogik-psixologik troyektoriyalarini ishlab chiqish.

Kasbiy kompetensiyalarni rivojlantirish jarayonida uchraydigan to'siqlar, qiyinchiliklar va ularni bartaraf etish yo'llari.

Pedagog faoliyatida uchraydigan to'siqlar va ularni yechish yo'llari. Yosh pedagoglar faoliyatida odatda yul qo'yiladigan xatolar va ularni yengish yo'llari. Kasbiy kompetensiyalarni rivojlantirish jarayonida uchraydigan to'siqlarning xilma-xilligi va o'ziga xos xususiyatlari, sabablarini amaliy tomonlarini yoritilishi, ularni yechish bosqichlarini guruh bilan birgalikda aniqlanishi. Kasbiy kompetensiyalarni rivojlantirishda uchraydigan to'siqlarni yechishda, to'g'ri harakatlar qilishda pedagogning kompetentlik va kreativlik darajasi, pedagogik kvalimetriyasi. Kichik guruhlarda tarqatma materiallar bilan ishlash. Guruhlar taqdimoti.

1.6. Ta'lim sifatini ta'minlashda baholash metodikalari.

Talabalar kasbiy tayyorgarlik sifatini kompleks baholashning nazariyasi.

Baholash, baholashning maqsadi va vazifalari. ta'lim sifatiga ta'sir etuvchi omillar (moddiy-texnik baza, professor-o'qituvchilarning salohiyati va o'quv-metodik ta'minot). Baholash turlari (joriy, oraliq, yakuniy va xalqaro). Baholash tamoyillari va mezonlari.

Talabalarning o'quv auditoriyadagi faoliyatini baholash.

Kredit-modul tizimida talabalarning bilimi, ko'nikmasi, malakasi va kompetensiyalarini nazorat qilish va baholashning o'ziga xos xususiyatlari, didaktik funksiyalari.

Talabalarning o'quv auditoriyadan tashqari faoliyatini baholash. Talabalarning kurs ishi, bitiruv malakaviy ishi, o'quv-malakaviy amaliyot (mehnat faoliyati)ini nazorat qilish. Talabalarning o'quv auditoriyadan tashqari faoliyatini baholashda o'quv topshiriqlari (reproduktiv, produktiv, qisman-izlanishli, kreativ (ijodiy) murakkablik)ni ishlab chiqish metodikasi.

Talabalar kasbiy tayyorgarlik sifatini kompleks baholashning elektron monitoring tizimi.

Talabalarning ta'limiy (o'quv predmetlari), tarbiyaviy (ma'naviy-ma'rifiy tadbirlar) va rivojlantiruvchi (ilmiy-tadqiqot ishi, start-up loyihalar) maqsadlarini baholash. Baholashning miqdor va sifat tahlili.

1.7. Kombinatorika va graflar nazariyasi.

Dekart ko'paytma, o'rinlashtirish, o'rin almashtirishlar, Paskal uchburchagi. Nyuton binomi. Takroriy kombinasiyalar.Fibonachchi sonlari. Bo'laklash kombinatorikasi. Hosil qiluvchi funksiyalar va ularning tadbiqi.

Graflarning berilish usullari: geometrik ifodalanishi, ko'phad yordamida berilishi, matrisalar yordamida berilishi. Eyler graflari. Gamilton graflari. Grafning metrik xarakteristikalari. Planar graflar. Tarmoqdagi oqimlarini bilishi va ulardan foydalana olishi.

1.8. Ko'rgazmali geometriya.

Geometriya predmeti va usullari. Ko'pyoqliklar. Sirt ichki va tashqi geometriyasi. Koordinatalar sistemasi va uni geometriyadagi o'rni. Geometriyaning zamonaviy yo'nalishlari va muammolari. Elementar geometriyaning asosiy elementlari va unga doir masalalar. Tekislikdagi geometriyaga doir masalalar. Ko'pyoqliklar va ularning turlari. Ko'pyoqlik yoyilmasi. Ko'pyoqliklar bilan sirtga yaqinlashishga doir masalalar. Masofa, yuza va hajm tushunchalari bilan bog'liq masalalar. Sirtda metrikaga doir masalalar. Vektorlar. Vektor funksiyalar. Noyevklid geometriyasiga doir masalalar.

Malakaviy attestatsiya

Tinglovchilarning malakaviy attestatsiyasi kasbiy, o'quv-metodik va ilmiy-metodik faoliyati natijalari (elektron portfolioda qayd etilgan ko'rsatkichlari), kursni tamomlagandan keyingi onlayn test sinovlari hamda Attestatsiya komissiyasida bitiruv ishini himoya qilish asosida o'tkaziladi.

Amaliy mashg'ulotlarni tashkil etish bo'yicha ko'rsatma va tavsiyalar

Amaliy mashg'ulotlarda tinglovchilar o'quv modullari doirasidagi ijodiy topshiriqlar, keyslar, o'quv loyihalari, texnologik jarayonlar bilan bog'liq vaziyatli masalalar asosida amaliy ishlarni bajaradilar.

Amaliy mashg'ulotlar zamonaviy ta'lim uslublari va innovatsion texnologiyalarga asoslangan holda o'tkaziladi. Bundan tashqari, mustaqil holda o'quv va ilmiy adabiyotlardan, elektron resurslardan, tarqatma materiallardan foydalanish tavsiya etiladi.

Mustaqil malaka oshirishni tashkil etish bo'yicha ko'rsatma va tavsiyalar

Mustaqil malaka oshirish quyidagi shakllarni o'z ichiga oladi: ochiq o'quv mashg'ulotlari va mahorat darslarini tashkil etish; iqtidorli va iste'dodli talabalar bilan ishlash; ilmiy konferensiyalarda ma'ruza bilan qatnashish; ilmiy jurnallarda maqolalar chop etish; ko'rgazma va tanlovlarda ishtirok etish; ilmiy loyihalarda ishtirok etish; xalqaro (impakt-faktorli) nashrlarda maqolalar e'lon qilish; ixtiro (patent), ratsionalizatorlik takliflari, innovatsion ishlanmalarga mualliflik qilish; monografiya, mualliflik ijodiy ishlar katalogini tayyorlash va nashrdan chiqarish; o'quv adabiyotlari (darslik, o'quv qo'llanma, metodik qo'llanma)ni tayyorlash va nashrdan chiqarish; falsafa doktori (PhD) darajasini olish uchun himoya qilingan dissertatsiyaga ilmiy rahbarlik qilish.

Pedagog kadrlarning mustaqil malaka oshirish natijalari elektron portfolio tizimida o'z aksini topadi.

Ko'chma mashg'ulotlarni tashkil etish bo'yicha ko'rsatma va tavsiyalar

Ko'chma mashg'ulotlar zamonaviy jihozlar hamda innovatsion texnologiyalarni qo'llab faoliyat yuritayotgan ishlab chiqarish korxona va tashkilotlari, oliy ta'lim muassasalari, iqtisodiyot tarmoqlari, ilmiy-tadqiqot va loyiha-konstruktorlik muassasalarida olib boriladi.

Dasturning axborot-metodik ta'minoti

Modullarni o'qitish jarayonida ishlab chiqilgan o'quv-metodik materiallar, tegishli soha bo'yicha ilmiy jurnallar, Internet resurslari, multimedia mahsulotlari va boshqa elektron va qog'oz variantdagi manbaalardan foydalaniladi.

ADABIYOTLAR

I. O'zbekiston Respublikasi Prezidentining asarlari

1. Mirziyoyev SH.M. Buyuk kelajagimizni mard va olijanob xalqimiz bilan birga quramiz. – T.: "O'zbekiston", 2017. – 488 b.
2. Mirziyoyev SH.M. Milliy taraqqiyot yo' limizni qat'iyat bilan davom ettirib, yangi bosqichga ko' taramiz. 1-jild. – T.: "O'zbekiston", 2017. – 592 b.
3. Mirziyoyev SH.M. Xalqimizning roziligi bizning faoliyatimizga berilgan eng oliy bahodir. 2-jild. T.: "O'zbekiston", 2018. – 507 b.
4. Mirziyoyev SH.M. Niyati ulug' xalqning ishi ham ulug', hayoti yorug' va kelajagi farovon bo' ladi. 3-jild.– T.: "O'zbekiston", 2019. – 400 b.
5. Mirziyoyev SH.M. Milliy tiklanishdan – milliy yuksalish sari. 4-jild.– T.: "O'zbekiston", 2020. – 400 b.

II. Normativ-huquqiy hujjatlar

1. O'zbekiston Respublikasining Konstitutsiyasi. – T.: O'zbekiston, 2023.
2. O'zbekiston Respublikasining 2020-yil 23-sentabrda qabul qilingan "Ta'lim to'g'risida"gi Qonuni.
3. O'zbekiston Respublikasining "Korrupsiyaga qarshi kurashish to'g'risida"gi Qonuni.
4. O'zbekiston Respublikasi Prezidentining 2015-yil 12-iyundagi "Oliy ta'lim muassasalarining rahbar va pedagog kadrlarini qayta tayyorlash va malakasini oshirish tizimini yanada takomillashtirish to'g'risida"gi PF-4732-sonli Farmoni.
5. O'zbekiston Respublikasi Prezidentining 2019-yil 27-maydagi "O'zbekiston Respublikasida korrupsiyaga qarshi kurashish tizimini yanada takomillashtirish chora-tadbirlari to'g'risida"gi PF-5729-son Farmoni.
6. O'zbekiston Respublikasi Prezidentining 2019-yil 27-avgustdagi "Oliy ta'lim muassasalari rahbar va pedagog kadrlarining uzluksiz malakasini oshirish tizimini joriy etish to'g'risida"gi PF-5789-sonli Farmoni.
7. O'zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasining 2019-yil 23 sentabrdagi "Oliy ta'lim muassasalari rahbar va pedagog kadrlarining malakasini oshirish tizimini yanada takomillashtirish bo'yicha qo'shimcha chora-tadbirlar to'g'risida"gi 797-sonli Qarori.
8. O'zbekiston Respublikasi Prezidentining 2019-yil 8-oktabrdagi "O'zbekiston Respublikasi oliy ta'lim tizimini 2030-yilgacha rivojlantirish konsepsiyasini tasdiqlash to'g'risida"gi PF-5847- sonli Farmoni.
9. O'zbekiston Respublikasi Prezidentining 2022-yil 28-yanvardagi "2022-2026-yillarga mo'ljallangan Yangi O'zbekistonning taraqqiyot strategiyasi to'g'risida"gi PF-60-son Farmoni.
10. O'zbekiston Respublikasi Prezidentining 2023-yil 25-yanvardagi "Respublika ijro etuvchi hokimiyat organlari faoliyatini samarali yo'lga qo'yishga doir birinchi navbatdagi tashkiliy chora-tadbirlar to'g'risida"gi PF-14-sonli Farmoni.

III. Maxsus adabiyotlar

1. Oliy ta'limning meyoriy — huquqiy xujjatlari to'plami. -T., 2013.
2. O'rinov V. O'zbekiston Respublikasi oliy ta'lim muassasalarida ECTS kredit-modul tizimi: asosiy tushunchalar va qoidalar. O'quv qo'llanma. Nyu Bransvik Universiteti, 2020.
3. The European Higher Education Area. — Joint Declaration of the Ministers of Education. — Bologna, 1999, 19 June.
4. Shaping our Own Future in the European Higher Education Area // Convention of European Higher Education Institutions. — Salamanca, 2001, 29-30 march.
5. Virtualnaya realnost kak novaya issledovatelskaya i obrazovatelnaya sreda. Serfuz D.n. i dr. // JURNAL Nauchno-analiticheskiy jurnal "Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta Gosudarstvennoy protivopojarnoy slujbi MCHS Rossii", 2015. – s.185-197.
6. Ibraymov A.YE. Masofaviy o'qitishning didaktik tizimi. Metodik qo'llanma. – T.: "Lesson press", 2020. -112 b.
7. Ignatova N. Y. Obrazovaniye v sifrovuyu epoxu: monografiya. M-vo obrazovaniya i nauki RF. – Nijniy Tagil: NTI (filial) UrFU, 2017. – 128 s. http://elar.urfu.ru/bitstream/10995/54216/1/978-5-9544-0083-0_2017.pdf
8. Kiryakova A.V, Olxovaya T.A., Mixaylova N.V., Zaporojko V.V. Internet-texnologii na baze LMS Moodle v kompetentnostno-oriyentirovannom obrazovanii: uchebno-metodicheskoye posobiye / A.V. Kiryakova, T.A. Olxovaya, N.V. Mixaylova, V.V. Zaporojko; Orenburgskiy gos. un-t. – Orenburg: OGU, 2011. – 116 s. http://www.osu.ru/docs/fpkp/kiryakova_internet_technologies.pdf
9. Kononyuk A.YE. Oblachniye vichisleniya. – Kiyev, 2018. – 621 s.
10. Oliy ta'lim tizimini raqamli avlodga moslashtirish konsepsiyasi. Yevropa Ittifoqi Erasmus+ dasturining ko'magida. https://hiedtec.ecs.uni-ruse.bg/pimages/34/3._UZBEKISTAN-CONCEPT-UZ.pdf
11. Emelyanova O. A. Ta'limda bulutli texnologiyalardan foydalanish // Yosh olim. — 2014. — № 3. — S. 907-909.
12. Moodle LMS tizimida masofaviy kurslar yaratish. O'quv-uslubiy qo'llanma. – T.: Toshkent farmatsevtika instituti, 2017.
13. Tendensi i razvitiya visshego obrazovaniya v mire i v Rosii. Analiticheskiy doklad-daydjest. — M., 2021.- 198 s.
14. A.S. Zikriyoyev. Dunyo universitetlari reytingidagi tadqiqotchi olimlar orasida o'zingizni kashf qiling. -T.: Navro'z,2020. ISBN.9789943659285
15. Sherzod Mustafakulov, Aziz Zikriyoev, Dilnoza Allanazarova, Tokhir Khasanov, Sokhibmalik Khomidov. Explore Yourself Among World – Class Researchers. Grand OLEditor, Tashkent 2019, ISBN: 8175 25766-0.
16. Ackoff, Russell L., Scientific Method, New York: John Wiley & Sons, 1962.
17. Barzun, Jacques & Graff. F. (1990). The Modern Researcher, Harcourt, Brace Publication: New York.
18. Muslimov N.A va boshqalar. Innovatsion ta'lim texnologiyalari. O'quv-metodik qo'llanma. – T.: "Sano-standart", 2015. – 208 b.

19. Muslimov N.A va boshqalar. Pedagogik kompetentlik va kreativ asoslari. O'quv-metodik qo'llanma. – T.: "Sano-standart", 2015. – 120 b.
20. Pecherkina, A. A. Razvitiye professionalnoy kompetentnosti pedagoga: teoriya i praktika [Tekst] : monografiya / A. A. Pecherkina, E. E. Simanyuk, YE. L. Umnikova : Ural. gos. ped. un-t. – Yekaterinburg : [b.i.], 2011. – 233 s.
21. O.S. Frolova. Formirovaniye innovatsionnoy kompetensii pedagoga v protsesse vnutrishkolnogo povisheniya kvalifikatsii. Diss.k.p.n. Voronej 2018.
22. Kompetensii pedagoga XXI veka [Elektronniy resurs]: sb. materialov resp. konferensii (Minsk, 25 noyab. 2021 g.) / M-vo obrazovaniya Resp. Belarus, GUO "Akad. poslediplom. obrazovaniya", OO "Belorus. ped. o-vo". – Minsk: APO, 2021.
23. Ishmuhamedov R.J., M.Mirsoliyeva. O'quv jarayonida innovatsion ta'lim texnologiyalari. – T.: "Fan va texnologiya", 2017, 60 b.
24. Ishmuhamedov R, Mirsoliyeva M, Akramov A. Rahbarning innovatsion faoliyati. – T.: "Fan va texnologiyalar", 2019.- 68 b.
25. Kodjaspirova G.M. Pedagogika v sxemax, tablitsax i opornix konspektax./ -M.:Ayris-press, 2016.
26. Natanzon E. Sh. Priyemi pedagogicheskogo vozdeystviya. — M, 2012. — 202 s.
27. Sergeyev I.S. Osnovi pedagogicheskoy deyatelnosti: Uchebnoye posobiye. – SPb.: Piter, 2014.
28. Margaret L. Lial, Thomas W. Hungerford, John P. Holcomb, Bernadette Mullins, Mathematics with Applications In the Management, Natural and Social Sciences (11th Edition), Pearsonb 2018.
29. Rao, M. M. Random and Vector Measures, Series on Multivariate Analysis, 9, World Scientific, 2012.
30. Steve Taylor "Destination" Vocabulary and grammar", Macmillan 2010.
31. Tao, Terence. An Introduction to Measure Theory. Providence, R.I.: American Mathematical Society, 2019.
32. Weaver, Nik Measure Theory and Functional Analysis. World Scientific, 2013, 423 p.
33. Avilova L.V., Bolotyuk V.A., Bolotyuk L.A. Analiticheskaya geometriya i lineynaya algebra// 2013. Izdaniye: 1-ye izd. 421 s.
34. Aleksandrov A.D., Netsvetayev N.Y. Geometriya, M.: Nauka, 1990. – 672 s.
35. Belogurov A.Y. Modernizatsiya protsessa podgotovki pedagoga v kontekste innovatsionnogo razvitiya obshestva: Monografiya. — M.: MAKS Press, 2016. — 116 s. ISBN 978-5-317-05412-0.
36. Gulobod Qudratulloh qizi, R.Ishmuhamedov, M.Normuhammedova. An'anaviy va noan'anaviy ta'lim. – Samarqand: "Imom Buxoriy xalqaro ilmiy-tadqiqot markazi" nashriyoti, 2019. 312 b.
37. Ibraymov A.YE. Masofaviy o'qitishning didaktik tizimi. metodik qo'llanma/ tuzuvchi. A.YE. Ibraymov. – Toshkent: "Lesson press", 2020. 112 bet.

38. Ishmuhamedov R.J., M.Mirsoliyeva. O‘quv jarayonida innovatsion ta’lim texnologiyalari. – T.: “Fan va texnologiya”, 2014. 60 b.

39. Kiryanov D. Mathcad 15/Mathcad Prime 1.0. — SPb.: BXV-Peterburg, 2012. — 432 s.

40. Muslimov N.A va boshqalar. Innovatsion ta’lim texnologiyalari. O‘quv-metodik qo‘llanma. – T.: “Sano-standart”, 2015. – 208 b.

41. Obrazovaniye v sifrovuyu epoxu: monografiya / N. Y. Ignatova; M-vo obrazovaniya i nauki RF; FGAOU VO “UrFU im. pervogo Prezidenta Rossii B.N.Yelsina”, Nijnetagil. texnol. in-t (fil.). – Nijniy Tagil: NTI (filial) UrFU, 2017. – 128 s. http://elar.urfu.ru/bitstream/10995/54216/1/978-5-9544-0083-0_2017.pdf

42. Oliy ta’lim tizimini raqamli avlodga moslashtirish konsepsiyasi. Yevropa Ittifoqi Erasmus+ dasturining ko‘magida. https://hiedtec.ecs.uni-ruse.bg/pimages/34/3._UZBEKISTAN-CONCEPT-UZ.pdf

43. Sovremenniye obrazovatelniye texnologii: pedagogika i psixologiya: monografiya. Kniga 16 / O.K. Asekretov, B.A. Borisov, N.Y. Bu-gakova i dr. – Novosibirsk: Izdatelstvo SRNS, 2015. – 318 s. http://science.vvsu.ru/files/5040BC65-273B-44BB-98C4-CB5092BE4460.pdf

44. Usmonov B.SH., Habibullayev R.A. Oliy o‘quv yurtlarida o‘quv jarayonini kredit-modul tizimida tashkil qilish.–T.: “TKTI” nashriyoti, 2019.

IV. Elektron ta’lim resurslari

1. www.edu.uz.
2. www.aci.uz.
3. www.ictcouncil.gov.uz.
4. www.lib.bimm.uz
5. www. Ziyonet. Uz
6. www.sciencedirect.com
7. www.acs.org
8. www.nature.com
9. http://www.kornienko-ev.ru/BCYD/index.html.

“ISHLAB CHIQILGAN”:

Oliy ta’lim tizimi pedagog va rahbar kadrlarni qayta tayyorlash va ularning malakasini oshirishni tashkil etish Bosh ilmiy-metodik markazi
Direktor ____________ T.T.Shoymardonov
“____” ____________ 2023-y.
M.O‘.

O‘zbekiston Milliy universiteti
Rektor ____________ I.U.Madjidov
“____” ____________ 2023-y.
M.O‘.

O‘zbekiston Milliy universiteti huzuridagi pedagog kadrlarni qayta tayyorlash va ularning malakasini oshirish tarmoq (mintaqaviy) markazi
Direktor ____________ O‘.G‘.Tilavov
“____” ____________ 2023-y.
M.O‘.

“KELISHILGAN”:

Kadrlarni malakasini oshirish va qayta tayyorlash bo‘limi boshlig‘i
____________ F.T.Esanboboyev
“____” ____________ 2023-y.
M.O‘.

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY TA'LIM, FAN VA INNOVATSIYALAR VAZIRLIGI

"Tasdiqlayman"
Oliy ta'lim, fan va
innovatsiyalar
vazirligi
« » 2023-yil.
№ ИЮ391-2-18
m.o'.

QAYTA TAYYORLASH VA MALAKA OSHIRISH KURSI O'QUV REJASI

Qayta tayyorlash va malaka oshirish yo'nalishi: **Matematika**

Tinglovchilar kontingenti: **Oliy ta'lim muassasalarining professor - o'qituvchilari**

Qayta tayyorlash va malaka oshirish kursi muddati: **maxsus reja grafik asosida (288 soat)**

№	O'quv modullari	Umumiy soat	Jami auditoriya soati	jumladan: nazariy	jumladan: amaliy	jumladan: ko'chma mashg'ulot	Mustaqil ta'lim	Haftalar bo'yicha soatlar taqsimoti: I	II	III	IV
								Kunlar bo'yicha soatlar taqsimoti			
								6	6	6	6
	MUSTAQIL MALAKA OSHIRISH	**144**					**144**				
I.	**Mustaqil malaka oshirish**	**144**					**144**				
1.1.	Ta'lim darajasi va sifatiga qo'yiladigan Davlat talablariga muvofiq yangi bilimlar, malaka va ko'nikmalarni pedagog kadrlar tomonidan mustaqil o'zlashtirish, o'zini-o'zi kasbiy rivojlantirish	144					144				
II.	**BEVOSITA MALAKA OSHIRISH**	**144**	**132**	**52**	**68**	**12**		**36**	**36**	**36**	**36**
1.1.	Yangi O'zbekistonning taraqqiyot strategiyasi va jamiyatning ma'naviy asoslari	12	12	4	8			8	4		
1.2.	Oliy ta'limning normativ-huquqiy asoslari	14	14	6	8			8	6		
1.3.	Pedagogik faoliyatda raqamli kompetensiyalar	14	14	6	8			8	6		
1.4.	Ilmiy va innovatsion faoliyatni rivojlantirish	16	16	6	10			8	8		
1.5.	Pedagogning kasbiy kompetensiyalarini rivojlantirish	16	16	8	8			4	12		
1.6.	Ta'lim sifatini ta'minlashda baholash metodikalari	14	14	6	8					8	6
1.7.	Kombinatorika va graflar nazariyasi	28	28	8	8	12				18	10
1.8.	Ko'rgazmali geometriya	18	18	8	10					10	8
III.	**Malakaviy attestasiya**	**12**					**12**				**12**
	Jami	**288**	**132**	**52**	**68**	**12**	**156**	**36**	**36**	**36**	**36**

NAZARIY MASHG‘ULOT MAZMUNI

1-мавзу: Kombinatorik masalalar va tartiblangan to‘plamlar.

Reja

1. **Kombinatorika predmeti va paydo bo‘lish tarixi.**
2. **Kombinatorik masalalar va ularni yechishda qo‘llaniladigan qoidalar.**
3. **Takrorsiz o‘rin almashtirishlar ва o‘rinlashtirishlar.**
4. **Takrorsiz guruhlashlar. Chekli to‘p lamning qism to‘p lamlari soni.**

   Ikkita chekli to‘plamning Dekart ko‘paytmasidagi juftliklarni hisoblash qoidasi va uni to‘plamlar *n* ta bo‘lgan hol uchun umumlashtirish kombinatorik masalalar deb ataluvchi masalalarni yechishda keng qo‘llaniladi.

2-mavzu: BINOMIAL KOEFFISIYENTLAR VA ULARGA OID AYNIYATLAR.

Reja

1. **Nyuton binomi haqida umumiy ma’lumotlar**.
2. **Binomial koeffisiyentlar ва уларнинг хоссалари.**

Ixtiyoriy *a* va *b* haqiqiy sonlar hamda *n* natural son uchun $(a+b)^n$ ifodaning ko‘phad shaklidagi yoyilmasi (tasvirlanishi) Nyuton binomi deb ataladi. Umuman olganda, “Nyuton binomi” iborasiga tanqidiy nuqtai nazardan yondashilsa, undagi ikkala so‘zga nisbatan ham shubha tug‘iladi: birinchidan, $(a+b)^n$ ifoda birdan katta natural *n* sonlar uchun binom (ya’ni ikkihad) emas; ikkinchidan, natural sonlar uchun bu ifodaning yoyilmasi Nyutongacha ma’lum edi.

3-mavzu: UMUMLASHGAN O‘RINLASHTIRISHLAR VA GURUHLASHLAR

Reja

1. **O‘rin almashtirishlar.**
2. **Guruhlashlar.**

Aslida “o‘rin almashtirish” iborasi to‘plam elementlarining o‘rinlarini o‘zgartirish harakatini anglatsada, bu yerda uni shu harakat natijasidagi hosil bo‘lgan tuzilma sifatida qo‘llaymiz. Bu iboradan uning asl ma’nosida ham foydalanamiz.

O‘rin almashtirishni ifodalashda uning elementlarini ajratuvchi belgi sifatida yuqorida “,” (vergul) belgisidan foydalaniladi. Ammo bu muhim emas, bu yerda boshqa belgidan ham foydalanish, hattoki, yozuvning ixchamligi maqsadida, elementlar orasidagi ajratuvchi belgilarni tushirib qoldirish ham mumkin. Bu eslatma bundan keyin bayon etiladigan boshqa kombinatorik tuzilmalar uchun ham o‘rinlidir.

To‘plam tushunchasiga asoslanib, bu yerda qaralayotgan o‘rin almashtirishlar tarkibida elementlarning takrorlanmasligini eslatib o‘tamiz. Shu sababli bunday o‘rin almashtirishlarni **betakror (takrorli emas) o‘rin almashtirishlar** deb ham atash mumkin.

4-mavzu: TAKRORLI O‘RINLASHTIRISHLAR, O‘RINLASHTIRISHLAR VA GURUHLASHLAR

Reja

1. **Takrorli o‘rin almashtirishlar.**
2. **Takrorli o‘rinlashtirishlar.**
3. **Takrorli guruhlashlar.**
4. **Ko‘phad formulasi.**

Kombinatorikada oldin qaralgan birlashmalardan tashqari tarkibidagi elementlari takrorlanishi mumkin bo‘lgan boshqa birlashmalar ham o‘rganiladi. Masalan, takrorlanuvchi elementlar qatnashgan o‘rin almashtirishlar, o‘rinlashtirishlar va guruhlashlar.

Avval o‘rganilgan o‘rin almashtirishlar shunday tuzilmalar ediki, ular tarkibidagi elementlar bir-biridan farq qilardi. Endi o‘rin almashtirishlar tarkibidagi elementlar takrorlanishi mumkin bo‘lgan holni qaraymiz. Tabiiyki, aynan bir xil elementlar o‘rinlari almashtirilishi natijasida yangi o‘rin almashtirish hosil bo‘lmaydi. Shuning uchun tarkibidagi elementlari soni o‘zgarmaganda elementlari takrorlanishi mumkin bo‘lgan o‘rin almashtirishlar soni turli elementlardan tashkil topgan o‘rin almashtirishlar soniga qaraganda kichik bo‘ladi.

5-mavzu - GRAFLAR NAZARIYASINING ELEMENTLARI

Reja:

1.Oddiy graflar. Ta’rif va misollar.
2.Graflarning izomorfligi.
3.Multigraflar.
4.Marshrutlar, zanjirlar, sikllar.

Bu maruzada **graflar nazariyasining elementlari** yoritilgan. Bu yerda oddiy graflar, graflarning izomorfligi, marshrutlar, zanjirlar, sikllar, bog‘liqlilik, daraxtlar, multigraflar, Eyler graflari, xromatik son va xromatik sinf, to‘rlar va to‘rdagi oqimlar, Ford-Falkerson teoremasi kabi masalalar qarab chiqilgan.

6-mavzu: EYLER GRAFLARI

Reja:

1.Eyler graflari.
2.Xromatik son va xromatik sinf.
3.To‘rlar va to‘rdagi oqimlar.

Bu maruzada **graflar nazariyasining elementlaridan** harakteristik vector, juft graf, Eyler sikli, Eyler grafi, siklomatik son kabi tushunchalar yoritilgan.

II. MODULNI O‘QITISHDA FOYDALANILADIGAN INTERFAOL TA’LIM METODLARI

Davra stolining tuzilmasi.

Yozma davra suhbatida stol-stullar aylana shaklida joylashtirilib, har bir ta’lim oluvchiga konvert qog‘ozi beriladi. Har bir ta’lim oluvchi konvert ustiga ma’lum bir mavzu bo‘yicha o‘z savolini beradi va “Javob varaqasi”ning biriga o‘z javobini yozib, konvert ichiga solib qo‘yadi. Shundan so‘ng konvertni soat yo‘nalishi bo‘yicha yonidagi ta’lim oluvchiga uzatadi. Konvertni olgan ta’lim oluvchi o‘z javobini “Javoblar varaqasi”ning biriga yozib, konvert ichiga solib qo‘yadi va yonidagi ta’lim oluvchiga uzatadi. Barcha konvertlar aylana bo‘ylab harakatlanadi. Yakuniy qismda barcha konvertlar yig‘ib olinib, tahlil qilinadi. Quyida “Davra suhbati” metodining tuzilmasi keltirilgan

“Davra suhbati” metodining afzalliklari:

- o‘tilgan materialining yaxshi esda qolishiga yordam beradi;
- barcha ta’lim oluvchilar ishtirok etadilar;
- har bir ta’lim oluvchi o‘zining baholanishi mas’uliyatini his etadi;

o‘z fikrini erkin ifoda etish uchun imkoniyat yaratiladi **“Keys-stadi” metodi**

«Keys-stadi» - inglizcha so‘z bo‘lib, («case» – aniq vaziyat, hodisa, «stadi» – o‘rganmoq, tahlil qilmoq) aniq vaziyatlarni o‘rganish, tahlil qilish asosida o‘qitishni amalga oshirishga qaratilgan metod hisoblanadi. Mazkur metod dastlab 1921 yil Garvard universitetida amaliy vaziyatlardan iqtisodiy boshqaruv fanlarini o‘rganishda foydalanish tartibida qo‘llanilgan. Keysda ochiq axborotlardan yoki aniq voqea-hodisadan vaziyat sifatida tahlil uchun foydalanish mumkin. Keys harakatlari o‘z ichiga quyidagilarni qamrab oladi: Kim (Who), Qachon (When), Qayerda (Where), Nima uchun (Why), Qanday/ Qanaqa (How), Nima-natija (What).

“Keys metodi” ni amalga oshirish bosqichlari.

Ish bosqichlari	Faoliyat shakli va mazmuni
1-bosqich: Keys va uning axborot ta’minoti bilan tanishtirish	✓ yakka tartibdagi audio-vizual ish; ✓ keys bilan tanishish(matnli, audio yoki media shaklda); ✓ axborotni umumlashtirish; ✓ axborot tahlili; ✓ muammolarni aniqlash
2-bosqich: Keysni aniqlashtirish va o‘quv topshirig‘ni belgilash	✓ individual va guruhda ishlash; ✓ muammolarni dolzarblik iyerarxiyasini aniqlash; ✓ asosiy muammoli vaziyatni belgilash
3-bosqich: Keysdagi asosiy muammoni tahlil etish orqali o‘quv topshirig‘ining yechimini izlash, hal etish yo‘llarini ishlab chiqish	✓ individual va guruhda ishlash; ✓ muqobil yechim yo‘llarini ishlab chiqish; ✓ har bir yechimning imkoniyatlari va to‘siqlarni tahlil qilish; ✓ muqobil yechimlarni tanlash
4-bosqich: Keys yechimini yechimini shakllantirish va asoslash, taqdimot.	✓ yakka va guruhda ishlash; ✓ muqobil variantlarni amalda qo‘llash imkoniyatlarini asoslash; ✓ ijodiy-loyiha taqdimotini tayyorlash; ✓ yakuniy xulosa va vaziyat yechimining amaliy aspektlarini yoritish

“Assesment” metodi.

Metodning maqsadi: mazkur metod ta’lim oluvchilarning bilim darajasini baholash, nazorat qilish, o‘zlashtirish ko‘rsatkichi va amaliy ko‘nikmalarini tekshirishga yo‘naltirilgan. Mazkur texnika orqali ta’lim oluvchilarning bilish faoliyati turli yo‘nalishlar (test, amaliy ko‘nikmalar, muammoli vaziyatlar mashqi, qiyosiy tahlil, simptomlarni aniqlash) bo‘yicha tashhis qilinadi va baholanadi.

Metodni amalga oshirish tartibi:

“Assesment”lardan ma’ruza mashg‘ulotlarida talabalarning yoki qatnashchilarning mavjud bilim darajasini o‘rganishda, yangi ma’lumotlarni bayon qilishda, seminar, amaliy mashg‘ulotlarda esa mavzu yoki ma’lumotlarni o‘zlashtirish darajasini baholash, shuningdek, o‘z-o‘zini baholash maqsadida individual shaklda foydalanish tavsiya etiladi. Shuningdek, o‘qituvchining ijodiy yondashuvi hamda o‘quv maqsadlaridan kelib chiqib, assesmentga qo‘shimcha topshiriqlarni kiritish mumkin.

III. NAZARIY MASHG‘ULOT MATERIALLARI

1.7. KOMBINATORIKA VA GARFLAR NAZARIYASI

1-maruza

1-§. Kombinatorik masalalar va tartiblangan to‘plamlar.

1. Kombinatorika predmeti va paydo bo‘lish tarixi. Matematikaning kombinatorik tahlil, kombinatorik matematika, birlashmalar nazariyasi, qisqacha, **kombinatorika** deb ataluvchi bo‘limida chekli yoki muayyan ma‘noda cheklilik shartini qanoatlantiruvchi to‘plamni (bu to‘plamning elementlari qanday bo‘lishining ahamiyati yo‘q: harflar, sonlar, hodisalar, qandaydir predmetlar va boshqalar) qismlarga ajratish, ularni o‘rinlash va o‘zaro joylash ya‘ni, **kombinatsiyalar**, **kombinatorik tuzilmalar** bilan bog‘liq masalalar o‘rganiladi. Hozirgi davrda kombinatorikaga oid ma‘lumotlar inson faoliyatining turli sohalarida qo‘llanilmoqda. Jumladan, matematika, kimyo, fizika, biologiya, lingvistika, axborot texnologiyalari va boshqa sohalar bilan ish ko‘ruvchi mutaxassislar kombinatorikaning xilma-xil masalalariga duch keladilar.

To‘plamlar nazariyasi iboralari bilan aytganda, kombinatorikada kortejlar va to‘plamlar, ularning birlashmalari va kesishmalari hamda kortejlar va qism to‘plamlarni turli usullar bilan tartiblash masalalari qaraladi. To‘plam yoki kortej elementlarining berilgan xossaga ega konfiguratsiyasi bor yoki yo‘qligini tekshirish, bor bo‘lsa, ularni tuzish va sonini topish usullarini o‘rganish hamda bu usullarni biror parametr bo‘yicha takomillashtirish kombinatorikaning asosiy masalalari hisoblanadi.

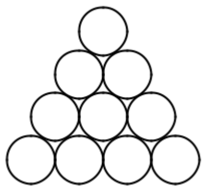
Kombinatorikaning ba’zi elementlari eramizdan oldingi II asrda hindistonliklarga ma‘lum edi. Ular hozirgi vaqtda gruppalashlar deb ataluvchi kombinatorik tushunchadan foydalanishgan. Eramizning XII asrida Bxaskara Acharya o‘zining ilmiy tadqiqotlarida gruppalash va o‘rin almashtirishlarni qo‘llagan. Tarixiy ma‘lumotlarga ko‘ra, hindistonlik olimlar kombinatorika elementlaridan, jumladan, birlashmalardan foydalanib, she‘riy asarlar tarkibiy tuzilishining mukammalligini tahlil qilishga uringanlar. O‘rta Osiyo va G‘arbiy Yevropada yashab ijod qilgan olimlarning kombinatorikaga oid ishlari haqida ushbu bobning 3 - paragrafida ma‘lumot keltirilgan.

Umuman olganda, kombinatorikaning dastlabki rivoji qimor o‘yinlarini tahlil qilish bilan bog‘liq. Ba‘zi atoqli matematiklar, masalan, B. Paskal, Ya. Bernulli, L. Eyler , P.L. Chebishev turli o‘yinlarda (tanga tashlash, soqqa tashlash, qarta o‘yinlari va shu kabilarda) ilmiy jihatdan asoslangan qarorlar qabul qilishda kombinatorikani qo‘llashgan.

XVII asrda kombinatorika matematikaning alohida bir ilmiy yo‘nalishi sifatida shakllana boshladi. B. Paskal o‘zining ―Arifmetik uchburchak haqida traktat‖ va ― Sonli tartiblar haqida traktat‖ (1665 y.) nomli asarlarida hozirgi vaqtda binomial koeffitsientlar deb ataluvchi sonlar haqidagi ma‘lumotlarni keltirgan. P. Ferma esa figurali sonlar bilan birlashmalar nazariyasi orasida bog‘lanish borligini bilgan.

Figurali sonlar quyidagicha aniqlanadi. Birinchi tartibli figurali sonlar: 1, 2, 3, 4, 5, … (ya‘ni, natural sonlar); ikkinchi tartibli figurali sonlar: 1-si 1ga teng, 2-si dastlabki ikkita natural sonlar yig‘indisi (3), 3-si dastlabki uchta natural sonlar yig‘indisi (6) va hokazo (1, 3, 6, 10, 15, …); uchinchi tartibli figurali sonlar: 1-si 1ga teng, 2-si birinchi ikkita ikkinchi tartibli figurali sonlarlar yig‘indisi (4), 3-si birinchi uchta ikkinchi tartibli figurali sonlarlar yig‘indisi (10) va hokazo (1, 4, 10, 20, 35, …); va hokazo.

1-misol. Tekislikda radiuslari o‘zaro teng bo‘lgan aylanalar bir- biriga uringan holda yuqoridan 1 - qatorda bitta, 2 - qatorda ikkita, 3 - qatorda



uchta va hokazo, joylashtirilgan bo‘lsin. Masalan, aylanalar bunday joylashuvining dastlabki to‘rt qatori 1 - shaklda tasvirlangan. Bu yerda qatorlardagi aylanalar sonlari ketma-ketligi birinchi tartibli figurali sonlarni tashkil qiladi. Bu tuzilmadan foydalanib, ikkinchi tartibli figurali sonlarni quyidagicha hosil qilish mumkin. Dastlab 1 - qatordagi aylanalar soni (1), keyin dastlabki ikkita qatordagi aylanalar soni (3), undan keyin dastlabki uchta qatordagi aylanalar soni (6), va hokazo. ■

Kombinatorika iborasi G. Leybnisning “Kombinatorik san‘at haqidagi mulohazalar” nomli asarida birinchi bor 1665-yilda keltirilgan. Bu asarda birlashmalar nazariyasi ilmiy jihatdan ilk bor asoslangan. O‘rinlashtirishlarni o‘rganish bilan birinchi bo‘lib Yakob Bernulli shug‘ullangan va bu haqdagi ma‘lumotlarni 1713 - yilda bosilib chiqqan “Ars conjectandi” (Bashorat qilish san‘ati) nomli kitobining ikkinchi qismida bayon qilgan. Hozirgi vaqtda kombinatorikada qo‘llanilayotgan belgilashlar XIX asrga kelib shakllandi.

2. Kombinatorik masalalar va ularni yechishda qo‘llaniladigan qoidalar.

Ikkita chekli to‘plamning Dekart ko‘paytmasidagi juftliklarni hisoblash qoidasi va uni to‘plamlar n ta bo‘lgan hol uchun umumlashtirish kombinatorik masalalar deb ataluvchi masalalarni yechishda keng qo‘llaniladi.

Kombinatorik masalalar – bu shunday masalalarki, ular chekli to‘plamlar elementlaridan turli-tuman kombinatsiya (birlashma)larning ba’zi qoidalari bo‘yicha tuziladi. Jumladan, “4, 5, 6 raqamlardan foydalanib, mumkin bo‘lgan barcha ikki xonali sonlarni shunday yozingki, sonning yozuvida ayni bir raqam takrorlanmasin” degan masalada 4, 5, 6 raqamlar bilan bajariladigan turli kombinatsiyalarni, bu kombinatsiyalarda raqamlar takrorlanmasligi shartida ko‘rib chiqish talab etiladi.

Hayotda ham kombinatorik masalalar ko‘plab uchraydi, bunda ob’yektlarning biror to‘plamidan uning qism to‘plamlarini tanlash, to‘plam elementlarini biron bir tartibda joylashtirish va hokazolar qaraladi. Masalan, fermer o‘z ishchilariga turli ishlarni bo‘lib berishi, katta jamoa ichidan delegatlar tanlash, shaxmat o‘yinida turli yurishlar seriyasidan eng ma’qulini tanlash kombinatorik masalalardan iboratdir.

Ko‘plab kombinatorik masalalarni yechishda qo‘shish va ko‘paytirish qoidalari qo‘l keladi:

a) qo‘shish qoidasi: agar X to‘plam m elementli, Y to‘plam esa n elementli bo‘lsa va ular o‘zaro kesishmasa, $X \cup Y$ to‘plamning elementlari soni $n+m$ ga teng, ya’ni agar $X \cap Y = \varnothing$ bo‘lsa, $n(X \cup Y) = n(X) + n(Y)$ bo‘ladi.

Umuman ixtiyoriy ikki X va Y to‘plamlar uchun $n(X \cup Y) = n(X) + n(Y) - n(X \cap Y)$ o‘rinli bo‘ladi.

b) ko‘paytirish qoidasi: agar X to‘plam m elementga, Y to‘plam n elementga ega bo‘lsa, u holda $X \times Y$ to‘plam (Dekart ko‘paytma) $m \times n$ elementga ega bo‘ladi.

Haqiqatdan, $X = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$, $Y = \{y_1, y_2, ..., y_n\}$ bo‘lsa, $X \times Y$ to‘plam ushbu mumkin bo‘lgan barcha juftliklardan tashkil topadi:

$$\begin{array}{l} (x_1, y_1),\ (x_1, y_2), ...,\ (x_1, y_n) \\ (x_2, y_1),\ (x_2, y_2), ...,\ (x_2, y_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (x_m, y_1),\ (x_m, y_2), ...,\ (x_m, y_n) \end{array}$$

Ko‘rinib turibdiki, bu juftliklar soni $m \times n$ ga teng. Buni qisqacha $n(X \times Y) = n(X) \times n(Y)$ ko‘rinishda ham yozish mumkin.

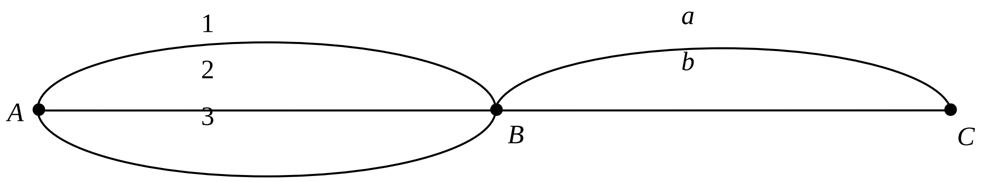
Umuman, n ta $x_1, x_2, ..., x_n$ to‘plamlar berilgan bo‘lsa, u holda

$$n(x_1 \times x_2 \times .... \times x_n) = n(x_1) \times n(x_2) \times .... \times n(x_n)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

2-misol. *A* shahardan *B* shaharga uchta yo‘l, *B* dan *C* ga esa 2 ta yo‘l olib boradi. *A* shahardan *C* shaharga necha xil usul bilan borish mumkin?

Yechish. *A* dan *B* ga 1-, 2- va 3-yo‘llar olib boradi. *B* shahardan *C* shaharga *a* va *b* yo‘llar olib boradi.



1-rasm.

U holda *A* dan *C* ga qo‘yiladigan usullar bilan borish mumkin: (1,*a*), (1,*b*), (2,*a*), (2,*b*), (3,*a*), (3,*b*). Buni boshqacha usul bilan ham hal qilsa bo‘ladi. *A* va *B* gacha boradigan yo‘llarki, tanlash usuli 3 ta, *B* dan *C* gacha boradigan yo‘llarni tanlash usuli esa 2 ta. Bunda ko‘paytma qoidasiga ko‘ra, yo‘llarning tartiblangan juftliklarini $3 \times 2 = 6$ usul bilan tanlash mumkinligi ko‘rinib turibdi.

Quyida kombinatorik masalalardan o‘rin almashtirishlar, takrorlanmaydigan o‘rin almashtirishlar, takrorlanmaydigan o‘rinlashtirishlar va guruhlashlarni ko‘rib chiqamiz.

3. Takrorsiz o‘rin almashtirishlar.

Agar chekli *X* to‘plamning elementlari qandaydir yo‘l bilan raqamlangan bo‘lsa, uni tartiblangan to‘plam deymiz: $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Kortej tushunchasidan farqli o‘laroq tartiblangan to‘plam elemetlari orasida o‘zaro tenglari bo‘lmaydi.

Masalan, (2,3,2,4,5) kortej tartiblangan to‘plam emas, (2,3,4,5) esa tartiblangan to‘plam bo‘ladi. Bitta to‘plamni turlicha tartiblash mumkin. *m* elementli *X* to‘plamni necha xil usul bilan tartiblash mumkin degan masalani qaraymiz.

Har bir tartiblash quyidagicha amalga oshiriladi. To‘plamning qaysi bir elementini 1-nomer bilan, qaysi birini 2-nomer bilan va hokazo qaysi bir elementini *m* nomer bilan belgilaymiz. Agar birinchi element tanlangan bo‘lsa, ikkinchi elementni tanlash (m–1) ta elementning ichidan olinadi. Demak, birinchi element *m* usul bilan, ikkinchisi esa (m–1) usul bilan tanlanadi. Uchinchi element (m–2) usul bilan va hokazo oxirgi element *m*-o‘rinni egallaydi. Masalan, {5,6,7} elementli to‘plam quyidagicha tartiblanadi 567, 657, 756 –

birinchi element 3 usul bilan olindi. 657, 756 – ikkinchi element 2 usul bilan tanlandi. Oxirgi tartiblash 765 bo‘ladi.

Umumiy holda ko‘paytirish qoidasiga asosan tartiblash usulining umumiy soni

$P_m = m(m-1)...1 = m!$ ga teng bo‘ladi. Bunday tartiblash *m* elementdan *takrorlanmaydigan o‘rin almashtirish* deyiladi. Bunda har bir tartiblangan to‘plamning elementlari turlicha bo‘ladi.

4. Takrorsiz o‘rinlashtirishlar.

Endi *m* elementli *X* to‘plam elementlaridan nechta *k* elementli tartiblangan to‘plamlar tuzish mumkin degan masalani qaraymiz.

Bu masalaning yuqoridagi masaladan farqi shundaki, bu yerda *k* elementli tartiblangan to‘plamni tuzish *k* ta elementni olish bilan tugallanadi. Bunday tartiblangan to‘plamlarning sonini topish uchun *k* ta *m*, *m*–1, *m*–2, …, *m*–*k*+1 sonlarni ko‘paytirish yetarli (chunki {*m*, *m*–1, *m*–2, …, *m*–*k*+1} to‘plamda *k* ta element mavjud).

Shunday qilib, *X* to‘plamdagi *k* elementli tartiblangan to‘plamlar soni $A_m^n = m(m-1)(m-2)...(m-k+1)$ ga teng bo‘ladi. Bunday tartiblangan to‘plamlarni *m* elementdan *k* tadan *takrorlanmaydigan o‘rinlashtirishlar* deyiladi. A_m^n ning ifodasini $1 \cdot 2...(m-k)$ ga ko‘paytirib va bo‘lib, uning ko‘rinishini o‘zgartirish mumkin:

$$A_m^k = \frac{m(m-1)(m-2)...(m-k+1)(m-k)...2 \cdot 1}{1 \cdot 2...(m-k)} = \frac{m!}{(m-k)!}$$

Bunda $A_m^m = P_m = m!$ bo‘ladi, bu yerda 0!=1 deb olinadi.

5. *Takrorlanuvchi o‘rinlashtirishlar.*

Bu yerda quyidagi masala qaraladi: *m* elementli *X* to‘plamdan nechta uzunligi *k* ga teng bo‘lgan kortejlar tuzish mumkin. Bu masalani hal qilish uchun $X \times X \times ... \times X$ dan iborat *k* ta ko‘paytuvchiga ega bo‘lgan Dekart ko‘paytmadagi kortejlar sonini topish yetarli. Bunda

$$n(X \times X \times ... \times X) = n(X)n(X)...n(X) = m \cdot m....m = m^k = \overline{A_m^k}$$

Demak, *m* elementli *X* to‘plamdan tuzilgan uzunligi *k* ga teng bo‘lgan kortejlar soni $\overline{A_m^k} = m^k$ ga teng.

m elementli *X* to‘plam elementlaridan tuzilgan uzunligi *k* ga teng bo‘lgan kortej, *m* elementdan *k* tadan tuzilgan *takrorlanadigan o‘rinlashtirish* deyiladi.

3-misol. $X = \{a, b, c\}$ uch elementli to‘plam elementlaridan uzunligi 2 ga teng bo‘lgan nechta kortej tuzish mumkin.

Yechish. Ular quyidagilardan iborat:

$$(a, a), (a, b), (a, c)$$
$$(b, a), (b, b), (b, c)$$
$$(c, a), (c, b), (c, c)$$

Ularning soni $\overline{A_3^2} = 3^2 = 9$ ta bo‘ladi.

4-misol. Agar sonning yozuvida raqamlarning takrorlanishi mumkin bo‘lsa, 1, 2, 3 raqamlardan foydalanib nechta 3 xonali son tuzish mumkin?

Yechish. Uch xonali sonlarning yozuvidagi har bir o‘ringa berilgan uchta raqamdan istalgan birini qo‘yish mumkin, ya’ni 1-raqamning tanlash usuli 3 ta, 2-raqamning tanlash usuli 3 ta, 3-raqamning tanlash usuli ham 3 ta. Demak, bu holda $3^3 = 27$ ta uch xonali son tuzish mumkin.

6. Takrorsiz guruhlashlar.

Endi biz kombinatorikaning quyidagi masalasini qaraymiz:

m elementli *X* elementlaridan nechta har biri *k* elementli qism to‘plamlar tuzish mumkin?

Bunday qism to‘plamlar *m* elementdan *k* tadan takrorlanmaydigan *guruhlashlar* deyiladi. Ularning soni C_m^k bilan belgilanadi.

Ko‘rsatish mumkinki,

$$C_m^k = \frac{m!}{(m-k)!k!}$$

bo‘ladi.

5-misol. 12 kishilik guruhdan nechta 5 kishilik (ishchilar) delegatsiya tuzish mumkin.

Yechish. $C_{12}^5 = \frac{12!}{7!5!} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 792$

7. Chekli to‘p lamning qism to‘p lamlari soni.

Chekli to‘plamlarning qism to‘plamlari soni. Umumiy holda chekli m elementli *X* to‘plamning barcha qism to‘plamlari sonini topish masalasini qaraymiz. Uni hal qilish uchun istalgan tarzda *X* to‘plamni tartiblaymiz. So‘ng har bir qism to‘plamni *m* o‘rinli kortej sifatida shifrlaymiz: qism to‘plamga kirgan element o‘rniga 1, kirmagan element o‘rniga 10 yozamiz. Shunda qism to‘plamlar soni 2 ta 50,1 elementdan tuzilgan barcha m o‘rinli kortejlar soniga teng bo‘ladi.

$A_2^k = 2^m$. Masalan, 2 element to‘plam ostilari soni 2^2=4, 3 elementli to‘plamning to‘p lam ostilari soni $2^3=8$ ga teng.

Savol va topshiriqlar

1. Fizika ma’ruzasiga 20 ta, astronomiya ma’ruzasiga 30 ta talaba qatnashdi. Fizika yoki astronomiya ma’ruzalariga necha talaba qatnashishini aniqlang, agar: a) ma’ruzalar bir vaqtda o‘tkazilsa; b) turli vaqtlarda o‘tkazilsa va 10 ta talaba har 2 ma’ruzaga qatnashsa.

2. 100 kishidan 85 tasi ingliz, 45 tasi nemis tilini o‘rgandi. Ikkala tilni o‘rganuvchilar soni nechta?

3. 100 kishidan 35 tasi ingliz, 45 tasi nemis tilini o‘rgansa, ikkala tilni o‘rganuvchilar soni nechta bo‘lishi mumkin? Ikkita tildan birortasini ham o‘rganmaydiganlar sonichi?

4. Uydan universitetga 3 yo‘l bilan, universitetdan korxonaga 2 yo‘l bilan borish mumkin bo‘lsa, undan universitet orqali necha xil yo‘l bilan boriladi?

5. 1, 2, 3, 4, 5 sonlaridan nechta ikki xonali son tuzish mumkin? Ularning nechtasida raqamlar takrorlanmaydi?

6. Uchburchak uchlarini lotin alifbosining katta harflari yordamida necha xil usul bilan belgilash mumkin?

7. 6 raqamli telefon raqamlarining nechtasida raqamlar takrorlanmaydi?

8. Savatchadagi 12 ta olmadan 5 tasini necha usul bilan tanlash mumkin?

9. Bir vaqtda 4 bemor shifokor qabuliga necha xil usul bilan navbatga turishi mumkin?

10. 12 ta fizik va 15 ta matematik olimdan 4 tadan kishi konferensiyaga necha xil usul bilan yuborish mumkin?

2-§. BINOMIAL KOEFFISIYENTLAR VA ULARGA OID AYNIYATLAR.

1. Nyuton binomi haqida umumiy ma’lumotlar. O‘rta maktab matematikasi kursidan quyidagi ikkita qisqa ko‘paytirish formulalarini eslaylik:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 - \text{yig‘indining kvadrati;}$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + a^3 - \text{yig‘indining kubi;}$$

Yig‘indining navbatdagi ikkita, ya’ni 4- va 5- darajalarini hisoblaymiz:

$$(a+b)^4 = (a+b)(a+b)^3 = (a+b)(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + a^3)$$
$$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a+b)^5 = (a+b)(a+b)^4 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

Shunday qilib, **yig‘indining bikvadrati** (ya’ni to‘rtinchi darajasi)

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

va yig‘indining beshinchi darajasi

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

formulalariga ega bo‘lamiz.

Yuqorida keltirilgan yig‘indining kvadrati, kubi, bikvadrati va beshinchi darajasi formulalari o‘ng tomonlaridagi ko‘phad koeffisiyentlari Paskal uchburchagining mos qatorlaridagi $C_n^m \quad (n = 2,3,4,5)$ sonlar ekanligini payqash qiyin emas.

2. Binomial koeffisiyentlar.

1-teorema. *Barcha haqiqiy a va b hamda natural n sonlar uchun*

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \cdots + C_n^{n-1} ab^{n-1} + b^n$$

formula o‘rinlidir.

Isbot. Matematik induksiya usulini qo‘llaymiz. Baza**:** $n = 1$ bo‘lganda fo‘rmula to‘g‘ri: $(a+b)^1 = a + b$.

Induksion o‘tish: isbotlanishi kerak bo‘lgan formula $n = k$ uchun to‘g‘ri bo‘lsin, ya’ni

$$(a+b)^k = a^k + C_k^1 a^{k-1}b + C_k^1 a^{k-2}b^2 + \cdots + C_k^{k-1} ab^{k-1} + b^k.$$

Formula $n = k + 1$ bo‘lganda ham to‘gri ekanligini isbotlaymiz. Haqiqatan ham, $C_{n+1}^{m+1} = C_n^m + C_n^{m+1}$ formuladan foydalanib, quyidagilarni hosil qilamiz:

$$
\begin{aligned}
(a+b)^{k+1} &= (a+b)(a+b)^k \\
&= (a+b)\left(a^k + C_k^1 a^{k-1} b + C_k^2 a^{k-2} b^2 + \cdots + C_k^{k-1} a\, b^{k-1} + b^k\right) \\
&= a^{k+1} + C_k^1 a^k b + C_k^2\, a^{k-1} b^2 + \cdots + C_k^k\, a\, b^k + C_k^0 a^k b \\
&+ C_k^1 a^{k-1}\, b^2 + \ldots + C_k^{k-1} a b^k + b^{k+1} \\
&= a^{k+1} + (C_k^0 + C_k^1)\, a^k b + (C_k^1 + C_k^2) a^{k-1} b^2 + \cdots + (C_k^{k-1} + C_k^k) a b^k \\
&+ b^{k+1} = a^{k+1} + C_{k+1}^1 a^k b + C_{k+1}^2\, a^{k-1} b^2 + \cdots + C_{k+1}^k a\, b^k + b^{k+1}.
\end{aligned}
$$

Ixtiyoriy *a* va *b* haqiqiy sonlar hamda *n* natural son uchun $(a+b)^n$ ifodaning ko‘phad shaklidagi yoyilmasi (tasvirlanishi) Nyuton binomi deb ataladi. Umuman olganda, “Nyuton binomi” iborasiga tanqidiy nuqtai nazardan yondashilsa, undagi ikkala so‘zga nisbatan ham shubha tug‘iladi: birinchidan, $(a+b)^n$ ifoda birdan katta natural *n* sonlar uchun binom (ya’ni ikkihad) emas; ikkinchidan, natural sonlar uchun bu ifodaning yoyilmasi Nyutongacha ma’lum edi.

Greklar $(a+b)^n$ ifodaning qatorga yoyilmasini *n* ning faqat *n=2* bo‘lgan holida (ya’ni, yig‘indi kvadratining formulasini) bilar edilar. Umar Hayyom va Ali Qushchi $(a+b)^n$ ifodani $n > 2$ bo‘lgan natural sonlar uchun ham qatorga yoya bilganlar. Nyuton esa 1767-yilda Nyuton binomi formulasini kasr *n* sonlar uchun isbotladi. K. Makloren esa bu formulani darajaning ratsional ko‘rsatkichlari uchun qo‘lladi. Nihoyat, 1825 yilda N. Abel daraja ko‘rsatkichining istalgan kompleks qiymatlari uchun binom haqidagi teoremani isbotladi. C_n^m sonlari bilan **binomial koeffitsientlar** deb ham atashadi. Bunda ta’rif bu koeffitsientlarning Nyuton binomi formulasida tutgan o‘rniga qarab berilgan bo‘lib, C_n^m son $(a+b)^n = \sum_{m=o}^{n} C_n^m a^{n-m}\, b^m$ yoyilmadagi $a^{n-m} b^m$ ifodaning koeffitsientidir.

2-teorema. *Barcha haqiqiy a va b hamda natural n sonlar uchun*

$$(a-b)^n = \sum_{m=o}^{n} (-1)^m C_n^m a^{n-m}$$

formula o‘rinli.

Isboti. Nyuton binomi formulasida *b* ni *(-b)* ga almashtirsak kerakli formulani hosil qilamiz.

1-misol. Oxirgi formuladan xususiy holda quyidagi qisqa ko‘paytirish formulalari kelib chiqadi:

n=2 bo‘lganda ayirmaning kvadrati formulasi

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2;$$

n=3 bo‘lganda ayirmaning kubi formulasi

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2 + 3ab^2 - b^2.$$

3. Binomial koeffitsientlarning xossalari. Binomial koeffisiyentlarning ba'zi xossalarini keltiramiz. Bu xossalar bevosita Guruhlashlarga oid bo'lib, tabiiyki, ular Paskal uchburchagining xossalarini ham ifodalaydi.

1-xossa. $\frac{C_n^{m+1}}{C_n^m} = \frac{n-m}{m+1}$ $(m = 0,1,2,\dots,n-1)$ tenglik o'rinlidir.

Haqiqatan ham,

$$\frac{C_n^{m+1}}{C_n^m} = \frac{\dfrac{n!}{(m+1)!(n-m-1)!}}{\dfrac{n!}{m!\,(n-m)!}} = \frac{m!\,(n-m)!}{(m+1)!\,(n-m-1)!} =$$

$$= \frac{m!\,(n-m-1)!\,(n-m)}{m!\,(m+1)(n-m-1)!} = \frac{n-m}{m+1}.$$

Bu xossa binomial koeffisiyentlar qatoridagi istalgan ketma-ket ikki elementning biri ma'lum bo'lsa, osonlik bilan hisoblash mumkinligini ko'rsatadi:

$$C_n^{m+1} = \frac{n-m}{m+1} C_n^m, C_n^m = \frac{m+1}{n-m} C_n^{m+1},$$

Bu yerda *m=0,1,2,…,n-1*.

2-xossa. Ixtiyoriy natural n son uchun barcha C_n^m $(m = \overline{0,n})$ binomial koeffitsientlar yig'indisi 2^n ga teng, ya'ni

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$$

Bu tenglik Nyuton binomi formulasida *a=b=1* deb olganda hosil bo'ladi.

3-xossa. Toq o'rinlarda turgan binomial koeffitsientlar yig'indisi juft o'rinlarda turgan binomial koeffitsientlar yig'indisiga teng.

Haqiqatan ham, Nyuton binomi formulasida *a=1* va *b=-1* deb olganda

$$0 = C_n^0 \text{-} C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \dots + (-1)^n C_n^n$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu tenglikdan xossadagi tasdiqning to'g'ri ekanligi kelib chiqadi. 2- va 3-xossalar asosida quyidagi xossani hosil qilamiz.

4-xossa. *n* natural sondan oshmaydigan eng katta toq *m* son uchun

$$C_n^1 + C_n^3 + \dots + C_n^m = 2^{n-1}$$

tenglik hamda *n* sondan oshmaydigan eng katta juft *m* son uchun

$$C_n^0 + C_n^2 + \dots + C_n^m = 2^{n-1}$$

tenglik o'rinli.

5-xossa. Toq *n* son uchun

$$C_n^0 < C_n^1 < \cdots < C_n^{\frac{n-1}{2}} = C_n^{\frac{n-1}{2}+1}, \qquad C_n^{\frac{n-1}{2}+1} > C_n^{\frac{n-1}{2}+2} > \cdots > C_n^n,$$

Juft *n* son uchun esa

$$C_n^0 < C_n^1 < \cdots < C_n^{\frac{n}{2}}, \; C_n^{\frac{n}{2}} > C_n^{\frac{n}{2}+1} > \cdots > C_n^n,$$

munosabatlar o‘rinlidir.

Binomial koeffitsientlarning 5-xossasi Paskal uchburchagining yuqorida keltirilgan xossalari tasdig‘i bo‘lib, unga ko‘ra binomial koeffitsientlar oldin $C_n^0 = 1$ dan $C_n^{\left(\frac{n}{2}\right)}$ gacha o‘sadi, keyin esa C_n^n =1 gacha kamayadi hamda *n* toq bo‘lganda binomial koeffitsientlar qatorining o‘rtasidagi ikkita hadi tengdir va *n* juft bo‘lganda uning o‘rtasidagi hadi eng katta va yagonadir.

Quyidagi 6-8-xossalar o‘rinlidir.

6-xossa. $C_n^n + C_{n+1}^n + \cdots + C_{n+k}^n = C_{n+k+1}^{n+1}$

7-xossa. $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \cdots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$

8-xossa. $C_n^0 C_m^k + C_n^1 C_m^{k-1} + \cdots + C_n^k C_m^0 = C_{n+m}^k$

Oxirgi tenglik **Koshi ayniyati** deb ataladi.

2-misol. Chekli A to‘plam 2^A bo‘lganining elementlari va bu elementlar soni bilan binomial koeffitsientlarning uzviy bog‘lanishi bor. Bu bog‘lanish quyidagicha ifodalashi mumkin. Chekli *A* toplam 2^A bo’lgani tarkibidagi elementlar *A* to‘plamning qism to‘plamlaridan iborat bolgani uchun, shu qism to‘plamlarni quvvatlari bo‘yicha $(|A| + 1)$ ta guruhlarga ajratish mumkin. Tushunarliki, bu yerda *k* raqamli guruh $(k = \overline{0, |A|})$ quvvati *k* ga teng bo‘lgan barcha qism to‘plamlardan tashkil topadi va undagi qism to‘plamlar soni C_n^k ga teng. Bu mulohazani hisobga olgan holda 2-xossa yordamida ushbu bobning 1-paragrafidagi 1-teoremaning boshqa bir isbotiga ega bo‘lamiz.

Nazorat uchun savollar:

1. Nyuton binomi formulasini qanday qo‘llash mumkin?
2. Nyuton binomi formulasini Isaak Nyutondan oldin kimlar qo‘llagan?
3. Nima uchun binomial koeffitsientlarning xossalari Paskal uchburchagining xossalari ham hisoblanadi?
4. Nyuton binomi formulasini kombinatorik tahlil yordamida isbot qilganda qanday tushunchalar qo‘llaniladi?

5. Koshi ayniyatining kombinatorik tushunchalarga asoslangan isbotini bilasizmi?
6. Nima uchun guruhlashlar sonlarini binomial koeffitsientlar deb ham atashadi?
7. Nima uchun 7-xossa 8- xossaning xususiy holi bo‘ladi?
8. Binomial koeffitsientlarning ushbu kitobda bayon etilmagan yana qanday xossalarini bilasiz?

3-§. UMUMLASHGAN O‘RINLASHTIRISHLAR VA GURUHLASHLAR

1. O‘rin almashtirishlar. Elementlari $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ bo‘lgan to‘plamni qaraymiz. Bu to‘plam elementlarini har xil tartibda joylashtirib (yozib), tuzilmalar (kombinatsiyalar) hosil qilish mumkin, masalan,

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n; \quad a_2, a_1, a_3, \ldots, a_n; \quad a_2, a_3, a_1, \ldots, a_n$$

Bu tuzilmalarning har birida berilgan to‘plamning barcha elementlari ishtirok etgan holda ular bir-biridan faqat elementlarning joylashish o‘rinlari bilan farq qiladi. Shu usul yordamida hosil qilingan kombinatsiyalarning har biri berilgan $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$ to‘plam elementlarining **o‘rin almashtirishi** deb ataladi.

Aslida “o‘rin almashtirish” iborasi to‘plam elementlarining o‘rinlarini o‘zgartirish harakatini anglatsada, bu yerda uni shu harakat natijasidagi hosil bo‘lgan tuzilma sifatida qo‘llaymiz. Bu iboradan uning asl ma’nosida ham foydalanamiz.

O‘rin almashtirishni ifodalashda uning elementlarini ajratuvchi belgi sifatida yuqorida “,” (vergul) belgisidan foydalaniladi. Ammo bu muhim emas, bu yerda boshqa belgidan ham foydalanish, hattoki, yozuvning ixchamligi maqsadida, elementlar orasidagi ajratuvchi belgilarni tushirib qoldirish ham mumkin. Bu eslatma bundan keyin bayon etiladigan boshqa kombinatorik tuzilmalar uchun ham o‘rinlidir.

To‘plam tushunchasiga asoslanib, bu yerda qaralayotgan o‘rin almashtirishlar tarkibida elementlarning takrorlanmasligini eslatib o‘tamiz. Shu sababli bunday o‘rin almashtirishlarni **betakror (takrorli emas) o‘rin almashtirishlar** deb ham atash mumkin.

Berilgan n ta elementli to‘plam uchun barcha o‘rin almashtirishlar sonini p_n bilan belgilash qabul qilingan.

Bitta elementli $\{a\}$ to‘plam uchun faqat bitta a ko‘rinishdagi o‘rin almashtirish ravshandir: p_1=1.

Ikkita elementli $\{a, b\}$ to‘plam elementlaridan o‘rin almashtirishlarni bitta elementli

$\{a\}$ to‘plam uchun *a* o‘rin almashtirishidan foydalanib quyidagicha tashkil qilamiz: *b* element *a* elementdan keyin yozilsa *a*,*b* o‘rin almashtirishga, oldin yozilsa esa *b*,*a* o‘rin almashtirishga ega bo‘lamiz. Demak, ko‘paytirish qoidasiga (ushbu bobning 1-paragrafiga qarang) binoan ikkita o‘rin almashtirish bor: p_2=2=$1 \cdot 2$.

Uchta elementli $\{a, b, c\}$ to‘plam uchun *ab* va *ba* o‘rin almashtirishlardan foydalanish mumkin. Berilgan to‘plamning *c* elementini *ab* va *ba* o‘rin almashtirishning har biriga uch xil usul bilan joylashtirish mumkin: ularning elementlaridan keyin, elementlarining orasiga va elementlaridan oldin. Ko‘paytirish qoidasini qo‘llasak, uchta elementli $\{a, b, c\}$ to‘plam uchun oltita (p_2=2=$1 \cdot 2 \cdot 3$) har xil o‘rin almashtirishlar hosil bo‘lishini aniqlaymiz. Ular quyidagilardir:

$$\{a, b, c\},\{a, c, b\},\{b, a, c\}, \{b, c, a\}, \{c, a, b\}, \{c, b, a\},$$

1-misol. Besh nafar tomoshabinlarning beshta o‘rinni egallash imkoniyatlari (variantlari) sonini toping.

Agar tomoshabinlarni a, b, c, d, e harflar bilan belgilasak, u holda $T = \{a, b, c, d, e\}$ tomoshabinlar to‘plamiga ega bo‘lamiz. Tomoshabinlarni o‘rinlarga joylashtirish imkoniyatlarining (variantlarining) har biriga tomoshabinlar *T* to‘plami elementlarining qandaydir o‘rin almashtirishi mos keladi. *T* to‘plam beshta elementli bo‘lgani uchun 1-teoremaga asosan, $p_5 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ bo‘ladi. Demak, besh nafar tomoshabinning beshta o‘rnini egallash imkoniyatlari soni 120 ga teng.

2-misol. Shaxmat bo‘yicha musobaqalar har birining tarkibida to‘rt nafar o‘yinchi bo‘lgan ikkita komanda ishtirok etmoqda. Har bir komanda rahbariga to‘rtta shaxmat taxtasida o‘yinlar o‘tkazish uchun o‘yinchilarning ixtiyoriy ravishda tartiblash imkoniyati berilgan. Musobaqa qatnashchilarining shaxmat taxtalarini egallash imkoniyatlari (variantlari) soni 24·24=576 bo‘ladi.

2. O‘rinlashtirishlar. *n* ta elementli $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$ to‘plam berilgan bo‘lsin. Shu to‘plamning ixtiyoriy *m* ta elementidan hosil qilingan tartiblangan $\{a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}, \ldots, a_{i_m}\}$ tuzilmaga (kombinatsiyaga) ***n* ta elementdan *m* tadan o‘rinlashtirish** deb ataladi**.**

Bu ta’rifdan ko‘rinib turibdiki, elementlari soni bir xil bo‘lgan ikkita har xil o‘rinlashtirishlar bir-biridan elementlari bilan yoki bu elementlarning joylashish tartibi bilan farq qiladi. Bundan tashqari, *n* ta elementdan *m* tadan o‘rinlashtirishlar uchun $m \leq n$ bo‘lishi ham ravshan. Bu yerda qaralayotgan o‘rinlashtirishlar tarkibidagi elementlarning takrorlanmasligini eslatib o‘tamiz. Shu sababli bunday o‘rinlashtirishlarni **betakror (takrorli emas) o‘rinlashtirishlar** deb ham atash mumkin. Ushbu bobning 4-paragrafida takrorli o‘rinlashtirishlar ko‘riladi.

Berilgan *n* ta elementdan *m* tadan o‘rinlashtirishlar soni, odatda, A_n^m bilan belgilanadi.

Ravshanki, berilgan *n* ta $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ elementlardan bittadan o‘rinlashtirishlar *n* ta bo‘ladi (bular $a_1; a_2;$ va hokazo $, a_n$) ya’ni, $A_n^1 = n$.

n ta elementdan bittadan o‘rinlashtirishlar yordamida *n* ta elementdan ikkitadan o‘rinlashtirishlarni quyidagicha tuzish mumkin: *n* ta elementdan bittadan o‘rinlashtirishlarning har biridagi elementdan keyin yoki oldin qolgan *(n-1)* ta elementlardan ixtiyoriy bittasini joylashtirsa bo‘ladi. Natijada, ko‘paytirish qoidasiga binoan, jami soni $A_n^2 = n(n-1)$ ta bo‘lgan *n* ta elementdan ikkitadan o‘rinlashtirishlarni hosil qilamiz.

Shu kabi, *n* ta elementdan uchtadan o‘rinlashtirishlarni hosil qilish uchun *n* ta elementdan ikkitadan o‘rinlashtirishlarga murojaat qilish mumkin. Bu yerda *n* ta elementdan ikkitadan o‘rinlashtirishlarning har biri uchun uni tashkil etuvchi ikkita elementlardan oldin, elementlar orasiga yoki elementlardan keyin qolgan *(n-2)* ta elementlardan ixtiyoriy bittasini joylashtirish imkoniyati bor. Ko‘paytirish qoidasiga ko‘ra natijada jami soni $A_n^3 = n(n-1)(n-2)$ ta bo‘lgan *n* ta elementdan uchtadan o‘rinlashtirishlarni hosil qilamiz.

Shunga o‘xshash mulohaza yuritib, *n* ta elementdan to‘rttadan, beshtadan va hokazo o‘rinlashtirishlar soni uchun mos ifodalarni aniqlash qiyin emas.

2-teorema. *n ta elementdan m tadan o‘rinlashtirishlar soni eng kattasi n ga teng bo‘lgan m ta ketma-ket natural sonlarning ko‘paytmasiga tengdir, ya’ni*

$$A_n^m = n(n-1)\dots(n-m+1).$$

3-misol. Guruh 25 nafar talabadan tashkil topgan bo‘lsin. Bu guruhda guruh sardori, guruh sardorining yordamchisi va kasaba uyushmasining guruh bo‘yicha vakilini saylash zarur. Har bir talaba bu vazifalardan faqat bittasini bajaradi deb hisoblansa, saylov natijalari uchun qancha imkoniyat mavjud?

Bu yerda 25 ta elementli talabalar to‘plamining tartiblangan 3 ta elementli (guruh sardori, guruh sardorining yordamchisi va kasaba uyushmasining guruh bo‘yicha vakili) qism to‘plamlari sonini aniqlash zarur. Bu esa 25 ta elementdan 3 tadan o‘rinlashtirishlar sonini topish demakdir. Qo‘yilgan savolga javob topish maqsadida 2-teoremadagi isbotlangan formulani n=25 va m=3 bo‘lgan holda qo‘llab, $A_{25}^3 = 25 \cdot 24 \cdot 23 = 13800$

ekanligini aniqlaymiz. Demak, guruhdagi saylov natijalari uchun 13800 ta imkoniyat mavjud.

$A_n^m = n(n-1)\dots(n-m+1)$ formulani $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$ ko‘rinishda ham yozish mumkin.

Haqiqatdan ham,

$$A_n^m = n(n-1)\dots(n-m+1) = \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)(n-m)!}{(n-m)!} = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Yuqorida ta’kidlaganidek, *n* ta elementdan *m* tadan o‘rinlashtirishlar *n* elementli to‘plamning bir-biridan tarkibi bilan ham, elementlarning joylashishi bilan ham farqlanadigan qism to‘plamlaridan iboratdir. Agar bu o‘rinlashtirishlarda *n* ta elementli to‘plamning barcha elementlari qatnashsa (ya’ni *m*=*n* bo‘lsa), *n* ta elementli to‘plam uchun barcha o‘rin almashtirishlar hosil bo‘lishi tabiiydir. Shu tufayli, o‘rin o‘rinlashtirishlarning oldin keltirilgan ta’rifiga ekvivalent quyidagi ta’rifni ham berish mumkin.

n ta elementli to‘plam uchun o‘rin almashtirishlar deb *n* ta elementdan *n* tadan o‘rinlashtirishlarga aytiladi. Bunda har bir element faqat bir marta qatnashadi va ular bir-biridan faqat o‘zaro joylashishlari bilan farq qiladilar.

O‘rin almashtirishlarning bu ta’rifiga asoslanib *n* ta elementli to‘plam uchun o‘rin almashtirishlar soni formulasini o‘rinlashtirishlar soni formulasi yordamida hosil qilish mumkin. Haqiqatan ham,

$$P_n = A_n^n = n(n-1)\dots(n-(n-1)) = n(n-1)\dots 2\cdot 1 = n!$$

yoki

$$p_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-m)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!.$$

3. Guruhlashlar. $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ to‘plam berilgan bo‘lsin. Bu *n* elementli to‘plamning elementlaridan *m* ta elementga ega qism to‘plamlarni shunday tashkil etamizki, ular bir-biridan elementlarning joylashish tartibi bilan emas, faqat tarkibi bilan farq qilsin. Bunday *m* ta elementli qism to‘plamlarning har biriga *n* **ta elementdan** *m* **tadan gruppalash** deb ataladi. *n* ta elementdan *m* tadan guruhlashlar sonini C_n^m bilan belgilaymiz.

Guruhlashlar sonini $\binom{m}{n}$ $yoki$ $\binom{n}{m}$ shaklda belgilashlar ham uchraydi. Gruppalash ta’rifidan $1 \le m \le n$ ekanligi va agar biror gruppalashda qandaydir usul bilan elementlar o‘rinlari almashtirilsa, u (gruppalash sifatida) o‘zgarmasligi kelib chiqadi. Bu yerda qaralayotgan gruppalash tarkibida elementlarning takrorlanmasligini eslatib o‘tamiz. Shu sababli bunday gruppalashni **betakror (takrorli emas) gruppalash** deb ham atash mumkin. Ushbu bobning 4-paragrafida takrorli Guruhlashlar o'rganiladi.

Bir *(n=1)* elementli $\{a\}$ to'plam uchun faqat bitta gruppalash mavjud bo'lsa bir *(m=1)* elementlidir: a. Demak, $C_1^1 = 1$.

Ikki *(n=2)* elementli $\{a, b\}$ to'plam uchun bittadan *(m=1)* guruhlashlar ikkita (*a* va *b*), ikkitadan *(m=2)* guruhlashlar esa faqat bitta *(ab)*. Demak, $C_2^1 = 2, C_2^2 = 1$.

Uch *(n=3)* elementli $\{a, b, c\}$ to'plam uchun guruhlashlar: bittadan *(m=1)* - *a*, *b* va *c* (uchta); ikkitadan *(m=2)* - *ab*, *ac*, *bc* (uchta); uchtadan *(m=3)* - *abc* (faqat bitta). Demak, $C_3^1 = 3, C_3^2 = 3 , C_3^3 = 3$.

To'rtta *(n=4)* elementdan tashkil topgan $\{a, b, c, d\}$ to'plam elementlaridan tuzilgan puruhlashlar: bittadan – *a, b, c* va *d* (to'rtta); ikkitadan – *ab, ac, ad, bc, cd* (oltita); uchtadan – *abc, abd, acd, bcd* (to'rtta); to'rttadan *abcd* (faqat bitta). Demak, $C_4^1 = 4, C_4^2 = 6 , C_4^3 = 4$, $C_4^4 = 1$.

Yuqoridagi mulohazalar, guruhlashlar sonini hisoblash formulasi qanday bo'lishiga to'liq oydinlik kiritmasada, dastlabki tahlil uchun muhimdir. Maslan, *n* ta elementdan barcha elementlarni o'z ichiga oladigan faqat bitta gruppalash tashkil etish mumkin degan yoki *n* ta elementdan bittadan *n* ta gruppalash bor degan xulosalar ustida o'ylab ko'rish mumkin.

C_n^m sonni hisoblash uchun formula topish maqsadida quyidagicha mulohaza yuritamiz. Ravshanki, agar *n* ta elementdan *m* tadan barcha guruhlashlarning har birida elementlarning o'rinlari imkoniyat boricha almashtirilsa, natijada *n* ta elementdan *m* tadan barcha o'rinlashtirishlar hosil bo'ladi. Bu yerda *n* ta elementdan mtadan tuzilgan C_n^m ta gruppalashning har biridagi *m* ta elementdan $P_m = m!$ ta o'rin almashtirishlar hosil qilish mumkin bo'lganligi tufayli, ko'paytirish qoidasiga asosan, $P_m C_n^m = A_n^m$ tenglik to'g'ridir. Demak,

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot m}$$

formula o'rinlidir. Shunday qilib, quyidagi teorema isbotlandi.

3-teorema. *n* ta elementdan *m* tadan guruhlashlar soni eng kattasi *n* ga teng *bolgan m* ta ket-maket *natural sonlar ko'paytmasining dastlabki m* ta natural sonlar ko'paytmasiga nisbati kabidir:

$$C_n^m = \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot m}$$

4-misol. Qurilish tashkilotining duradgorlar bo‘limida 15 nafar ishchi bor. Ko‘p qavatli uyning eshiklarini ta'mirlash uchun 3 nafar duradgorni tanlash zarur. Agar bo‘limdagi har bir duradgor bu topshiriqni bajarishga layoqatli bo‘lsa, bunday tanlash imkoniyatlari (variantlari) qancha?

Bo‘limdagi liar bir duradgor ta'mirlash ishini bajarishga layoqatli bo‘lgani uchun, bu masalani hal qilishda guruhlashlar sonini topish formulasidan foydalanish mumkin. Bu yerda n=15, m=3 va $C_{15}^3 = \frac{15\cdot 14\cdot 13}{1\cdot 2\cdot 3} = 455$. Demak, 15 nafar duradgorlar orasidan 3 nafarini tanlash imkoniyatlari soni 455 ekan.

Agar ta’rif sifatida $C_n^0 = 1$ qabul qilinsa, *n* ta elementdan *m* tadan guruhlashlar soni uchun yuqorida keltirilgan formula *m=0* bo‘lgan holda ham to‘g‘ri bo‘ladi: $C_n^0 = \frac{n!}{0!\,n!} = 1$ Tabiiyki, n ta elementdan barcha elementlarni o‘z ichiga oladigan faqat bitta guruhlash tashkil etish mumkin: $C_n^n = \frac{n!}{n!\,0!} = 1$

guruhlashlar sonini hisoblash uchun

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}, C_n^m = \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot m}$$

ko‘rinishdagi formulalardan ham foydalanish mumkin.

Nazorat uchun savollar:

1. O‘rin almashtirishlar sonini qanday hisoblash mumkin?
2. O‘rinlashtirishlar soni formulasini isbotlay olasizmi?
3. O‘rin almashtirish va o‘rinlashtirish orasida qanday farq bor?
4. Guruhlashlar tushunchasi va guruhlashlar soni formulasi.
5. Guruhlashlar sonining qanday xossalari bor?
6. O‘rin almashtirishlar, o‘rinlashtirishlar va guruhlashlar sonlari orasida qanday munosabatlarni bilasiz?

4-§. TAKRORLI O‘RINLASHTIRISHLAR, O‘RINLASHTIRISHLAR VA GURUHLASHLAR

1. Takrorli o‘rin almashtirishlar. Kombinatorikada oldin qaralgan birlashmalardan tashqari tarkibidagi elementlari takrorlanishi mumkin bo‘lgan boshqa birlashmalar ham o‘rganiladi. Masalan, takrorlanuvchi elementlar qatnashgan o‘rin almashtirishlar, o‘rinlashtirishlar va guruhlashlar.

Avval o‘rganilgan o‘rin almashtirishlar shunday tuzilmalar ediki, ular tarkibidagi elementlar bir-biridan farq qilardi. Endi o‘rin almashtirishlar tarkibidagi elementlar takrorlanishi mumkin bo‘lgan holni qaraymiz. Tabiiyki, aynan bir xil elementlar o‘rinlari almashtirilishi natijasida yangi o‘rin almashtirish hosil bo‘lmaydi. Shuning uchun tarkibidagi elementlari soni o‘zgarmaganda elementlari takrorlanishi mumkin bo‘lgan o‘rin almashtirishlar soni turli elementlardan tashkil topgan o‘rin almashtirishlar soniga qaraganda kichik bo‘ladi.

Faraz qilaylik, qandaydir kortejning *n* ta elementlari orasida bir xil (aynan bir xil) n_1 ta birinchi tur, bir xil n_2 ta ikkinchi tur, va hokazo, bir xil n_k ta *k* - tur elementlar bo‘lsin, bu yerda $n_1, n_2, \ldots, n_k$ - hech bo‘lmaganda bittasi 1 dan farqli natural sonlar. Bu *n* ta elementlarning o‘rinlarini imkoniyati boricha almashtirishlar natijasida hosil bo‘lgan kortejlar (kombinatsiyalar) **takrorlanuvchi elementlar qatnashgan o‘rin almashtirishlar** (qisqacha, **takrorli o‘rin almashtirishlar**) deb ataladi.

n ta elementlari orasida n_1 ta birinchi tur, n_2 ta ikkinchi tur va hokazo, n_k ta *k*- tur bir xil elementlar bo‘lgan takrorli o‘rin almashtirishlar sonini $C_n(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ bilan belgilaymiz.

1 - teorema*. Takrorli o‘rin almashtirishlar soni uchun*

$$C_n(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_k!}$$

formula o‘rinlidir, bu yerda $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$ *-elementlar soni, k - turlar soni.*

1 - misol. Ikkita *a*, bitta *b* va ikkita *s* harflardan tashkil topgan kortej uchun barcha takrorli o‘rin almashtirishlarni tuzing.

Bu misolda uch turdagi *(k=3)* harflar soni beshga teng *(n=5)* bo‘lib, $n_1=2$ (ikkita *a*), $n_2=1$ (bitta *b*) va $n_3=2$ (ikkita *c*). Dastlabki ikkita harflarning (xuddi shuningdek, oxirgi ikkita harflarning ham) o‘rinlarini o‘zaro almashtirsak yangi o‘rin almashtirishlar hosil bo‘lmaydi. Barcha takrorli o‘rin almashtirishlar soni

$$C_5(2,1,2) = \frac{5!}{2!\,1!\,2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2} = 30$$

bo‘ladi. Bu o‘ttizta o‘rin alinashtirishlarning hammasi quyida keltirilgan:

$$aabcc, aacbc, aaccb, abacc, abcac, abcca,$$
$$acabc, acacb, acbac, acbca, accab, accba,$$
$$baacc, bacac, bacca, bcaac, bcaca, bccaa,$$
$$caabc, caacb, cabac, cabca, cacab, cacba,$$
$$cbaac, cbaca, cbcaa, ccaab, ccaba, ccbaa$$

2. Takrorli o‘rinlashtirishlar. *n* ta elementlardan tashkil topgan to‘plam berilgan bo‘lsin. Bu elementlardan foydalanib, *m* ta, elementdan tashkil topgan kortejlarni shunday tuzamizki, bu kortejlarga har bir element hohlagancha marta (albatta *m* dan oshmagan miqdorda) kirishi mumkin bo‘lsin va bu kortejlar bir-biridan ularni tashkil etuvchi elementlar turlari bilan yoki bu elementlarning joylashishlari bilan farq qilishsin. Shunday usul bilan tuzilgan kortejlarning har biri ***n* ta turli elementlardan takrorlanuvchi elementlar qatnashgan *m* tadan o‘rinlashtirish (qisqacha, takrorli o‘rinlashtirish) deb ataladi.**

n ta turli elementlardan *m* tadan takrorli o‘rinlashtirishlar sonini $\bar{A}_n^m$ bilan belgilaymiz.

***2-teorema**. n ta turli elementlardan m tadan takrorli o‘rinlashtirishlar soni* n^m *ga teng, ya’ni* $\bar{A}_n^m = n^m$.

2-misol. Oila a’zolari besh kishidan iborat bo‘lib, ular ikkita ishni bajarishlari zarur (masalan, non sotib olish va uni bo‘laklash), bunda oilaning har bir a’zosi ikkala ishni ham bajarish imkoniyatiga ega. Oila a’zolariga bu ishlarni taqsimlashda mumkin bo‘lgan imkoniyatlar soni aniqlansin.

Bu masalani hal qilish uchun oila a’zolarini *a*, *b*, *s*, *d* va *e* harflari bilan belgilab, ishlar ikkita bo‘lgani uchun beshta turli elementlardan ikkitadan barcha takrorli o‘rinlashtirishlani tuzamiz:

$$aa, ab, ac, ad, ae, ba, bb, bc, bd, be, ca, cb, cc,$$
$$cd, ce, da, db, dc, dd, de, ea, eb, ec, ed, ee$$

Hammasi bo‘lib 25 ta ($\bar{A}_5^2$=5^2=25) takrorli o‘rinlashtirishlar tuzildi. Demak, besh kishidan iborat oila a'zolariga ikkita ishlarni taqsimlashda mumkin bo‘**lgan** imkoniyatlar soni 25 dir. ■

3-misol. O‘zbekiston Respublikasi fuqarosi pasportining raqami ikki qismdan iborat: lotin alifbosining ikkita harfi va yetti xonali son. O‘zbekiston Respublikasi fuqarosi pasportining barcha mumkin bo‘lgan raqamlari sonini aniqlang.

Lotin alifbosidagi yigirma oltita turli harflar yordamida 676 ta (A_{26}^2=26^2=676) ikkitadan takrorli o‘rinlashtirishlar tashkil etish mumkin. O‘nta 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 va 9 raqamlardan esa 10.000.000 ta (A_{10}^7 =10^7 =10000000) turli yetti xonali raqamlarni (bu raqamlarda dastlabki nollar tashlab yuborilmaydi) hosil qilish mumkin. Shunday qilib, O‘zbekiston Respublikasi fuqarosi pasportining raqamlari soni 6760000000 ga (A_{26}^2 A_{10}^7=6760000000) teng.

3. Takrorli guruhlashlar. Har bir elementni birlashmaga istalgancha marta kiritiladigan va turli *n* ta elementlardan *m* tadan olinadigan hamda elementlar tartibi e'tiborga olinmaydigan birlashmalarni (kortejlarni) qaraymiz. Bunaqa birlashmalar ***n* ta turli elementlardan *m* tadan takrorlanuvchi elementlar qatnashgan guruhlashlar (**qisqacha, **takrorli guruhlashlar)** deb ataladi.

n ta elementlardan *m* tadan takrorlanuvchi elementlar qatnashgan guruhlashlar ta'rifidan ko‘rinib turibdiki, turli kombinatsiyalar bir-birlaridan hech bo‘lmasa bitta elementi bilan farq qiladi. *n* ta elementdan *m* tadan takrorli guruhlashlar sonini $\bar{C}_n^m$ deb belgilaymiz.

3-teorema. *n ta elementdan m tadan takrorli guruhlashlar soni* C_{n+m-1}^m *ga teng, ya’ni* $\bar{C}_n^m = C_{n+m-1}^m$.

4 - misol. Har birining yoqlariga 1,2,3,4, 5 va 6 sonlari yozilgan kub shaklidagi ikkita soqqalarni tashlaganda jami nechta sonlar juftligini hosil qilish mumkin?

Soqqalarni tashlaganda jami quyidagi 21 imkoniyatlardan biri ro‘y beradi:

<1,1>,<1,2>,<1,3>,<1,4>,<1,5>,<1,6>,<2,2>,

<2,3 , <2,4>, <2,5>, <2,6>, <3,3>, <3,4>, <3,5>,

<3,6>,<4,4>,<4,5>,<4,6>,<5,5>,<5,6>,<6,6>.

Bu juftliklar oltita elementdan ikkitadan takrorli guruhlashlarni tashkil etadi. Ularning soni 3- teoremaga asosan $\bar{C}_6^2 = C_{6+2-1}^2 = C_7^2$ =21 bo‘ladi.

4. Ko‘phad formulasi. Takrorli kombinatsiyalar vositasida Nyuton binomi tushunchasini umumlashtiramiz, ya’ni $(a_1 + a_2 + \cdots + a_m)^n$ ifodaning yoyilmasini topish muammosini qaraymiz.

4-teorema. *Ixtiyoriy haqiqiy* $a_1, a_2, \ldots, a_m$ *va natural n sonlar uchun*

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_m)^n = \sum C_n(n_1, n_2, \ldots, n_m) a_1^{n_1} a_2^{n_2} \ldots a_m^{n_m}$$

formula oriniidn, bu tormulaning o‘ng tomonidagi yig‘indi $n_1 + n_2 + \cdots + n_m = n$ *shartni qanoatlantiruvchi barcha manfiymas butun* $n_1, n_2, \ldots, n_m$ *sonlar uchun amalga oshiriladi.*

Isbotlangan oxirgi tenglik **ko‘phad formulasi** yoki **umumlashgan Nyuton binomi formulasi** deb ataladi. $C_n(n_1,n_2,\dots,n_m)$ sonlarni **ko‘phad koeffitsientlar** deb ataymiz.

C_n^k binomial koeffitsient $C_n(n_1,n_2,\dots,n_m)$ ko‘phad koeffitsientining $m=2$ bo‘lgandagi xususiy holidir. Haqiqatan ham, $n_1+n_2=n$ tenglikda $n_1=k$ deb olsak, u holda $n_2=n-n_1=n-k$ va $C_n(n_1,n_2)=\frac{n!}{n_1!n_2!}=\frac{n!}{k!(n-k)!}=C_n^k$ bo‘ladi.

5-misol. $(a+b+c)^3$ ifodaning yoyilmasini toping. Avvalo 3 sonini bo‘laklaymiz, ya'ni 3 ni mumkin bo‘lgan barcha imkoniyatlar bilan manfiymas butun sonlar yig‘indisi shaklida yozamiz:

3=3+0+0, 3= 2+1+0, 3=2+0+1, 3=1+2+0, 3=1+1+1, 3=1+2+0, 3=0+3+0, 3=0+2+l, 3=0+1+2, 3=0+0+3.

Demak, ko‘phad formulasiga ko‘ra,

$$(a+b+c)^3 = C_3(3,0,0)a^3+ S_3(2,1,0)a^2b + S_3(2,0,1)a^2c + C_3(1,2,0)ab^2 +C_3(1,1,1)abc + C_3(1,0,2)ac^2 +C_3(0,3,0)b^3 + C_3(0,2,1)b^2c + C_3(0,1,2)bc^2+ C_3(0,0,3)c^3.$$

Takrorli o‘rin almashtirishlar soni $C_n(n_1,n_2,\dots,n_k)=\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}$ formulasini qo‘llab quyidagi tenglikni hosil qilamiz:

$$(a+b+c)^3=a^3+3a^2b+3a^2c+3ab^2+6abc+3ac^2+b^3+3b^2c+3bc^2+c^3.$$

Ko‘phad yoyilmasining hadlarini yozganda shunga e'tibor berish kerakki, agar

$$n_1,n_2,\dots,n_m(n_1+n_2+\dots+n_m=n)$$

sonlar $k_1,k_2,\dots,k_m(k_1+k_2+\dots+k_m=n)$ sonlarning o‘rin almashtirishlari yordamida hosil qilinishi mumkin bo‘lsa, u holda $a_1^{n_1}a_2^{n_2}\dots a_m^{n_m}$ va $a_1^{k_1}a_2^{k_2}\dots a_m^{k_m}$ hadlarning koeffitsientlari o‘zaro teng bo‘ladi. Shuning uchun n sonining $n=n_1+n_2+\dots+n_m$ ko‘rinishda ifodalanishlaridan qandaydir shartni bajaradigan birortasini, masalan, $n_1\geq n_2\geq\dots\geq n_m$ (yoki $n_1\leq n_2\leq\dots\leq n_m$) shartni qanoatlantiradiganini topib, unga mos $a_1^{n_1}a_2^{n_2}\dots a_m^{n_m}$ ifodada daraja ko‘rsatgichlarini mumkin bo‘lgan barcha usullar bilan almashtirish kerak bo‘ladi.

Masalan, 5-misoldagi a^2b, a^2c, ab^2, ac^2, b^2c va bc^2 hadlarning ko‘phad koeffitsientlari o‘zaro tengdir. Yuqorida ko‘rsatilgan shart asosida 3 sonini manfiymas butun sonlar yigindisi ko‘rinisida bo‘laklashning 3 imkoniyati bor: 3=3+0+0, 3=2+1+0, 3=1+1+1. Shuning uchun, $(a+b+c)^3$ ifodaning yoyilmasida 3 xil turli koeffitsientlarga egamiz: $C_3(3,0,0)=1$, $C_3(2,1,0)=3$ *va* $C_3(1,1,1)=6$. Demak,

$$(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(a^2b+a^2c+ab^2+ac^2+b^2c+bc^2)+6abc.$$

Ko‘phad formulasi yordamida ko‘phad koeffitsientlarining, ya'ni $C_n(n_1, n_2, \ldots, n_m)$ sonlarning ba’zi xossalarini osonlik bilan isbotlash mumkin. Masalan,

$$\rangle \qquad C_n(n_1, n_2, \ldots, n_m)m^n$$

bu yerda yig‘indi $n_1 + n_2 + \cdots + n_m = n$ shartni qanoatlantiruvchi barcha manfiymas butun $n_1, n_2, \ldots, n_m$ sonlar uchun amalga oshiriladi va qo‘shiluvchilar tartibi e’tiborga olinadi.

Haqiqatan ham, agar ko‘phad formulasida $a_1 = a_2 = \cdots = a_m = 1$ deb olsak, kerakli tenglikni hosil qilamiz.

Nazorat uchun savollar:

1. Takrorli o‘rin almashtirishlar sonini qanday hisoblash mumkin?
2. Takrorli o‘rin almashtirish va takrorli o‘rinlashtirish orasida qanday farq bor?
3. Takrorli o‘rin almashtirishlar soni formulasidan foydalanib takrorlanishi bo‘lmagan guruhlashlar sonini hisoblash mumkinmi?
4. Ko‘phad formulasining Nyuton binomi formulasidan qanday farqi bor?
5. Ko‘phad koeffitsientlarning qanday xossalarini bilasiz?

1-§. Kombinatorikaning asosiy tushunchalari

2-maruza

1.1. Kombinatorika haqida tushuncha.

Nazariy ma'lumotlar

Ta'rif. Kombinatorika – ma'lum xossalarga ega bo'lgan elementlarning turli kombinatsiyalarini o'rganuvchi matematikaning bo'limi.

Kombinatorikaning asosiy masalasi – berilgan ob'ektlardan u yoki bu shartlarga bo'ysunuvchi bir nechta turli kombinatsiyalari tuzish mumkin.

To'plamlardan farqli elmentlar kombinatsiyalari bir xil (takroriy) elementlarni o'z ichiga olishi mumkin.

1.2. Faktorial tushunchasiga olib keluvchi masala

Faktorial ta'rifi

1. *p* ta turli raqamdan nechta turli *p* xonali son tuzish mumkin?

Yechish. Bitta raqam (1) dan faqat bitta bir xonali son olish mumkin: *1*.

Ikkita raqamdan *(1 va 2)* 2 ta ikki xonali son olish mumknim: *12* va *21*. Buni quyidagicha hosil qilish mumkin: oldingi holdagi 1 soni o'ng va chap tarafiga 2 raqamini yozish bilan hosil qilish mumkin, ya'ni oldingi holni 2 ga ko'paytirish lozim $(1\cdot 2)$.

3 ta raqam (1,2 va 3) dan 6 ta uch xonali son olish mumkin: *312, 132, 123, 321, 231, 213*. Buni quyidagicha hosil qilish mumkin: oldingi holdagi har bir ikki xonali son o'ng, chap tarafiga va o'rtasigav 3 raqamini yozish bilan hosil qilish mumkin, ya'ni oldingi holni 3 ko'paytirish lozim $(1\cdot 2\cdot 3)$.

Qiyin emaski, bunda quyidagi qonuniyatni sezish mumkin: har bir navbatdagi holda javob oldingisiga qaganda *p* marta ortiq bo'ladi. Ixtiyoriy *p* soni uchun formula olamiz: $1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n$.

Javob: $1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n$

Ta'rif. *1 dan p gacha barcha natural sonlar ko'paytmasi p-faktorial deb ataladi va p! deb belgilanadi.*

Shunday qilib: $p!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot p$. $0!=1$ deb hisoblanadi.

Manfiy sonning faktoriali mavjud emas.

Faktorialning asosiy xossasi: $p!=(p-1)!p$

IV. AMALIY MASHG‘ULOT MATERIALLARI

Namunaviy masalalar

2. Hisoblang:

a) 4!; b) $\frac{5!+4!}{3!}$; c) $\frac{7!\cdot 4!}{10!}\left(\frac{8!}{3!\cdot 5!}-\frac{9!}{7!\cdot 2!}\right)$.

a) $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4=24$;

b) $\frac{3!(4\cdot 5+4)}{3!}=24$

c) $\frac{5!\cdot 6\cdot 7\cdot 3!\cdot 4\cdot 8!}{8!\cdot 9\cdot 10\cdot 3!\cdot 5!}-\frac{7!\cdot 2!\cdot 3\cdot 4\cdot 9!}{9!\cdot 10\cdot 7!\cdot 2!}=\frac{28}{15}-\frac{6}{5}=\frac{2}{3}$

3. Ifodani soddalashtiring: $\frac{5!}{m(m+1)}\cdot\frac{(m+1)!}{(m-1)!\cdot 3!}$, bu erda $t\in N$

$\frac{3!\cdot 4\cdot 5}{m(m+1)}\cdot\frac{(m-1)!\cdot m\cdot(m+1)}{(m-1)!\cdot 3!}=20/$

4. Tenglamani yeching: $\frac{m!-(m-1)!}{(m+1)!}=\frac{1}{6}$, bu erda m $\in N$

$\frac{(m-1)!\cdot(m-1)}{(m-1)!\cdot m\cdot(m+1)}=\frac{1}{6}$; $6\cdot(m-1)=m^2+m$; $m^2-5m+6=0$; $m_1=2; m_2=3$.

1.2. Kombinatorikaning asosiy qoidalari

Nazariy ma’lumotlar

Kombinatorik masalalarni yechishda ko‘pincha ikkita asosiy qoida qo‘llaniladi.

Qo‘shish qoidasi: Agar biror *a* elementni *t* ta usul bilan, ikkinchi b elementni – *p* ta usul bilan tanlash mumkin bo‘lsa, u holda *a* yoki *b* elementni *(t+p)* ta usul bilan tanlash mumkin.

Qo‘shish qoidasidan foydalanishda *A* ob’ektni tanlashning hech qanday usuli *B* ob’ektni tanlash usuli bilan ustma-ust tushmasligi kerak. Agar bunday ustma-ust tushishlar bo‘lsa, u holda qo‘shish qoidasi o‘z kuchini yo‘qotadi va faqat tanlashning *(m+n-k)* ta usulini olish mumkin, bu erda k-ustma-ust tushishlar soni.

Ko‘paytirish qoidasi: Agar biror *a* elementni *t* ta usul bilan, ikkinchi *b* elementni – *p* ta usul bilan tanlash mumkin bo‘lsa, u holda *a* va *b* elementni *tp* ta usul bilan tanlash mumkin.

Qo‘shish va ko‘paytirish qoidalari ixtiyoriy sondagi chekli elementlar uchun o‘rinli.

Namunaviy masalalar

5. Guruhda 20 ta qiz va 5 ta o‘g‘il bola bor. Sardorni necha xil usul bilan tanlash mumkin ?

Yechish. Sardor sifatida 20 ta qizdan biri yoki 5 ta o‘g‘il boladan biri tanlanishi mumkin, demak, sardorni saylashning umumiy soni 20+5=25.

6. Maktabda 76 o‘qituvchi ishlaydi. Ulardan 49 tasi ingliz tilini, 32 tasi nemis tilini va 15 nafari ikkala tilni ham biladi. Necha o‘qituvchi na ingliz tilini, na nemis tilini biladi?

Yechish. Ingliz yoki nemis tilini 49+32–15=66 nafar o‘qituvchi biladi. Demak, bu ikkala tildan birortasini ham 76–66=10 o‘qituvchi bilmaydi.

7. Guruhda 30 kishi bor. Sardor va yoshlar ittifoqi etakchisini saylash lozim. Buni necha xil usul bilan amalga oshirish mumkin?

Yechish. Sardor bo‘lib 30 o‘quvchidan ixtiyoriysi saylanishi mumkin, ya’ni sardorni tanlashning 30 ta usuli mavjud. Sardor saylangandan so‘ng qolgan 29 o‘quvchidan yoshlar yetakchisini saylab olish mumkin. Shunday qilib, sardornin saylashning bir usuliga yoshlar etakchisini tanlashning 29 usuli mos keladi. Demak, sardor va yoshlar etakchisini tanlashning umumiy soni 30·29=870 ga teng.

8. Agar raqamlar takrorlanishi mumkin bo‘lsa, 0,1,2,3,4,5,6 raqamlaridan nechta uch xonali juft son tuzish mumkin?

Yechish. *abc* uch xonali sonni tuzishda berilgan raqamlardan *a* ning o‘rniga noldan tashqari, ixtiyoriy raqamni olish (6 ta imkoniyat), *b* ning o‘rniga ulardan ixtiyoriysini olish mumkin (7 imkoniyat), *c* ning o‘rniga 0,2,4,6 raqamlardan ixtiyoriysini olish mumkin (4 imkoniyat). Shunday qilib, ko‘paytirish qoidasiga ko‘ra masala shartini qanoatlantiruvchi sonni tuzishning 6·7·4=168 ta usuli mavjud ekan.

9. 1-navli 20 ta va 2-navli 30 ta buyum bor. Bir navdagi ikkita buyumni tanlash lozim. Buni necha xil usul bilan bajarish mumkin?

Yechish. Ko‘paytirish qodisaga ko‘ra 1-navli 2 ta buyumni 20·19=380 usul bilan tanlash mumkin. Shunga o‘xshash 2-navli 2 ta buyumni 30·29=870 usuli bilan tanlash mumkin. Masala shartigi ko‘ra bir xil navli ikkita buyumni tanlash lozim bo‘lgani uchun, qaysi navdan bo‘lishi muhim emas, bir xil navli 2 ta buyumni tanlashning umumiy soni 380+870=1250 ga teng bo‘ladi.

10. Agar raqamlar takrorlanishi mumkin bo‘lsa 0,1,2,3, raqamlaridan nechta bir xonali, ikki xonali va uch xonali juft sonlar tuzish mumkin?

Yechish. Ravshanki, berilgan raqamlardan faqat bitta birxonali juft son tuzish mumkin–2. Berilgan raqamlardan ikki xonali <u>*ab*</u> sonni tuzishda *a* ning o‘rniga noldan tashqari ixtiyoriy raqamni olish mumkin (3 imkoniyat), *b* ning o‘rniga 0 va 2 raqamlaridan ixtiyoriy raqamni olish mumkin (2 ta imknoiyat). Shunday qilib, ko‘paytirish qoidasiga asosan bizga kerak bo‘lgan sonni tuzishning 3·2=6 ta usuli mavjud.

Berilgan raqamlardan uch xonali <u>*abc*</u> sonni tuzishda *a* ning o‘rniga noldan tashqari ixtiyoriy raqamni olish mumkin (3 imkoniyat), *b* ning o‘rniga ulardan ixtiyoriysini olish mumkin (4 imkoniyat), c ning o‘rniga 0 va 2 raqamlaridan ixtiyoriy raqamni olish mumkin (2 ta imknoiyat). Shunday qilib, ko‘paytirish qoidasiga asosan bizga kerak bo‘lgan sonni tuzishning 3·4·2=24 ta usuli mavjud ekan. Qo‘shish qoidasini qo‘llab: 1+6+24=31 ga ega bo‘lamiz.

Tarixiy ma’lumotlar

Ba’zi kombinatorik masalalarni yechish bilan qadimgi Xitoyda, keyinchalik Rim imperiyasi davrida ham shug‘ullanganlar. Lekin matematikaning mustaqil bo‘limi sifatida faqat ehtimollar nazariyasi fani rivoji tufayli Evropada 18 asrdan boshlab tan olindi.

Figurali sonlar:

Qadimda hisoblashlarni osonlashtirish uchun toshlardan foydalanganlar. Bunda asosiy e’tibor muntazam figura shaklida tavsirlash mumkin bo‘lgan toshlar soniga qaratilar edi. Shunday qilib kvadrat sonlar (1,4,16,25,…) paydo bo‘ldi. 1-rasmda ularni hosil qilish qoidasi ko‘rsatilgan.

			0 0 0 0
		0 0 0	0 0 0 0
	0 0	0 0 0	0 0 0 0
0	0 0	0 0 0	0 0 0 0
1	$2*2=2^2=4$,	$3*3=3^2=9$,	$4*4=4^2=16$,

1-rasm.

Ixtiyoriy *p*-chi tartibli kvadrat son $N=n^2$ formula bo‘yicha hisoblanadi. Uchburchak sonlar (1, 3, 6, 10,15, . . .) va beshburchak (1, 5, 12,22,) sonlar ham tuzilgan. 2 va 3-rasmlarda bu sonlarni hosil qilish usuli ko‘rsatilgan.

Ixtiyoriy *p*-chi tartibli uchburchak son $N=n(n+1)/2$ formula bo‘yicha hisoblanadi.

Ixtiyoriy *p*-chi tartibli beshburchak $N=n+3n(n-1)/2$ formula bo‘yicha hisoblanadi.

0 0 0

0 0 0 0 0 0

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

1, 1+2=3, 1+2+3=6, 1+2+3+4=10, 1+2+3+4+5=15,

2-rasm.

0

0 0

0 0 0

1, 2+3*(2*(2-1)/2)=5, . . .

3-rasm

11. Yettinchi tartibli: 1) kvadrat sonni; 2) uchburchak sonni; 3) beshburchak sonni toping.

Yechish. 1) $N=n^2$ formulaga ko‘ra $n=7$ da $N=7^2=49$.

2) $N=n(n+1)/2$ formulaga ko‘ra $n=7$ da $N=7*(7+1)/2=28$.

3) $N=n+3*(n-1)/2$ formulaga ko‘ra $n=7$ da $N =7+3*7*(7-1)/2=70$.

12. n-chi tartibli kvadrat sonni yozing: 1) $n=20$; 2) $n=25$; 3) $n=31$; 4) $n=50$.

13. Quyidagi kvadrat sonlar tartibini aniqlang:

1) 169; 2) 225; 3) 324; 4)3600?

14. n-chi tartibli uchburchak sonni yozing, agar: 1) $n=20$; 2) $n=33$ bo‘lsa.

15. n-chi tartibli beshburchak sonni yozing, agar: 1) $n=5$; 2) $n=6$ bo‘lsa.

Mavzuni mustahkamlash uchun savollar

1. «Kombinatorika» atamasi lotincha qanday ma’noni anglatadi? (guruhlash, birlashtirish).

2. Binomial koeffitsientlar haqidagi ta’limotni birinchi bo‘lib kim bayon etgan? [B. Paskal]

3. «Kombinatorika» atamasi qachonda boshlab ishtila boshlagan? [1666 y.]

4. (!) belgisi kim tomonidan birinchi bo‘lib kiritilgan va qaysi yilda? [1808 y., Krampa]

5. 0! nimaga teng ? [1]

6. S_m^0 nimaga teng ? [1]

7. Qaysi olim ehtimollar nazariyasini oldinga olib chiqqan? [Bernulli].

8. Qaysi o‘zbek olimlari ehtimollar nazariyasiga katta hissa qo‘shgan? [Sarimsoqov, Sirojiddinov, Azlarov, Farmonov].

9. *P(A)* ehtimol qaysi chegaralarda joylashgan? [0 dan 1 gacha].

«Variantlar daraxti»

Nazariy ma’lumotlar

Kundalik hayotda bizning oldimizga bitta emas, yechishning bir nechta varianti mavjud bo‘lgan muammolar paydo bo‘ladi. To‘g‘ri tanlashni amalga oshirish uchun ulardan hech birini qo‘ldan chiqarmaslik lozim. Buning uchun barcha mumkin bo‘lgan variantlarni tanlashni amalga oshirish lozim. Bunday masalalar ham kombinatorik masalalarga kiradi.

3, 4 va h.k. sondagi sinovlar uchun ko‘paytirish qoidasi tekislikdan chiqmasdan geometrik rasm (model) yordamida tushuntirish mumkin. Uni mumkin bo‘lgan variantlar daraxti deb ataydilar. U birinchidan har qanday rasm kabi ko‘rgazmali, ikkinchidan, hech narsani qoldirmasdan hisobga olishga imkon beradi

Namunaviy masalalar

16. 1, 4 va 7 raqamlaridan foydalanib nechta ikki xonali son tuzish mumkin?

Yechish. O‘tkazib yubormaslik va takrorlamslik uchun o‘sish tartibida yozamiz 11, 14, 17, 41, 44, 47, 71, 74, 77. Shunday qilib, 9 ta son bo‘ladi. Ko‘rinadiki, bu masalalar umumiy ko‘paytirish qoidasiga taaluqli.

Ikkita *A* va *B* sinovni bog‘liq bo‘lmasdan o‘tkazish uchun barcha mumkin bo‘lgan natijalar sonini topish uchun *A* sinovning barcha natijalari sonini *B* sinovning barcha natijalari soniga ko‘paytirish lozim.

17. Agar raqamlar takrorlanishi mumkin bo‘lsa, 0,1,2,3,4,5,6 raqamlaridan nechta uch xonali juft sonlar tuzish mumkin?

Yechish. Masalan, *abc* sonida *a* o‘rniga ixtiyoriy raqamni (0 dan tashqari), ya’ni 6 ta imkoniyat, *b* ning o‘rniga 7 ta raqam, *c* ning o‘rniga faqat 2,4,6,0 raqamlarini olish mumkin, ya’ni 4 ta imkoniyat bo‘ladi. 6*7*4=168 ta songa ega bo‘lamiz.

Javob: 168.

18. 1) 1,3,5,7,9 raqamlaridan nechta ikki xonali son tuzish mumkin? ([25],2) Ulardan nechtasi beshga karrali? ([5])

19. Bir nechta davlat o‘zlarining davlat bayroqlari uchun turli rangdagi – oq, ko‘k, qizil, yashil rangdagi to‘rtta vertikal bir xil kenglikdagi yo‘lli bayroqdan foydalanishga qaror qildilar. Har bir mamlkatning o‘z bayrog‘i bor. a) Nechta mamlakat shunday bayroqlarga ega bo‘lishi mumkin? [24]. b) Nechta mamlakat birinchisi oq bo‘lgan bayroqqa ega bo‘lishi mumkin? [6]

20. Oilada 6 kishi, stol atrofida 6 ta stul bor. Oila har kuni kechqurun ovqatlanishda bu 6 ta stulga yangicha o‘tirishga qaror qildi. Necha kun oila a’zolari takrorlamasdan bu ishni amalga oshirishlari mumkin ?

Yechish. Qulaylik uchun stullarni nomerlaymiz. Bunda oila a’zolari navbatma-navbat o‘tiriadilar deb hisoblaymiz. Oldin 6 ta variant, keyin 5 ta so‘ngra 4,3,2, 1 ta variant bo‘ladi. Ko‘paytirish qoidasiga ko‘ra 6*5*4*3*2*1=720. Shunday qilib, oila deyarli 2 yil almashib o‘tirishlari mumkin. Javob:720.

21. 10 ta turli xat bittadan 10 ta koverta joylashtiriladi. Nechta joylashtirish usuli bo‘lishi mumkin? [3628800]

22. Guruh talabalari rasmlarni bir-birlari bilan almashtirish qaror qildilar. Agar guruhda 24 nafar talaba bo‘lsa, nechta buning uchun rasm talab etiladi? [552]

23. Doniyor, Alisher va Nilufar basketbol savatiga to‘p tushirishni mashq qilish uchun yig‘ildilar. Ularda bitta to‘p bor va ular kim kimdan keyin to‘pni tashlashni kelishib olishlari lozim. Ular necha xil usul bilan navbatga turishlari mumkin? [6] (daraxt yasang)

Faktorial tushunchasi

Nazariy ma’lumotlar

Ta’rif. Birinchi *p* ta natural son ko‘paytmasi *n!* deb belgilanadi va “EN FAKTORIAL” deb ataladi: $n!=1*2*3*...(n-2)(n-1)n$. (inglizchasiga «factor» so‘zining ma’nolaridan biri, tarjimasi ko‘paytuvchi). $0!=1$ deb hisoblanadi. *n!* ning birinchi bir nechta qiymatlarini keltiramiz:

1!=1, 2!=1*2=2, 3!=1*2*3=6, 4!=1*2*3*4=24, 5!=1*2*3*4*5=24*5=4!*5=120 va h.k..

TEOREMA. *n ta turli elementli to‘plamni 1 dan n gacha nomerlar bilan turlicha usul bilan nomerlash mumkin.*

1 dan *n* gacha nomerlashning har bir usuli berilgan *n* elementli to‘plamning o‘rin almashtirishi deb ataladi. Haqiqatan, har bir bunday nomerlash to‘plamning barcha elementlarini biror tartibda joylashtiradi yoki o‘rnini almashtiradi.

n elementli to‘plamning o‘rin almashtirishlar soni P_n deb belgilanadi. Demak, keltirilgan teoremani $P_n=n!$ formula ko‘rinishida yozish mumkin.

Namunaviy masalalar

24. Hisoblang: a) 7! ; b) 8! ; c) 6!-5; d) 5! 5 [5040,40320,600,24]

25. 11!; a) 64 ga; b) 25 ga; c) 81 ga; d) 49 ga bo‘linadimi? [ha, ha, ha, yo‘q]

26. Quyidagi sonlar nechta nol bilan tugaydi: a)10!; b) 12!; c) 15!;
d) 26! [2, 2, 3, 6]

27. Kasrni qisqartiring: a) *n!/(n-1)!*; b) *n!/2!(n-2)!*;
c) *(2n+1)!/((2n-1)! [n, n(n-1)/2, 2k(2k+1)]*

28. Ifodani soddalashtiring :

a) $\dfrac{(n+2)!(n^2-9)}{(n+4)!}$ b) $\dfrac{25n^5-n^3 * (5*(5n-2)!)}{(5n+1)!}$

29. Tenglamani natural sonlarda yeching:

a) n!=7(n-1)! b) (n-10)!=77(n-11)! [7, 87]

Guruhlar bo‘yicha mustaqil ish uchun topshiriqlar:

1) Hisoblang: a)(7!-5!)/6!; b) 5!/ 3!+4!

1) Hisoblang: a) (6!-4!)/3! b) 5!*3!/ 6!

2) Ifodani soddalashtiring:

a) $\dfrac{(n+1)!\,/\,n!\cdot n!\,/\,n(n-1)}{1/n!-1/(n+1)!}$ a) $\dfrac{(n-1)!\,/(n+2)!\cdot n!/(n-2)!}{1/(n-1)!-1/n!}$

Mustaqil yechish uchun mashqlar:

1) Hisoblang: a) 10!/5!; b) 11!/5!*6!; c)51!/49!.[30240, 462, 2550]

2) Kasrni qisqartiring: *(4n-1)!/(4n-3)! [(4n-1)(4n-2)]*

3) Tenglamani natural sonlarda yeching: *(n+17)!=420(n+15)! [4]*

31. Zamonaviy beshkurashchilar ikki kun davomida sportning 5 ta turi bo‘yicha musobaqalashadilar: otlarda kros, qilichbozlik, suzish, o‘q otish, yugurish. Musobaqa turlarini o‘tkazishni nechta varianti mavjud. [5*4*3*2=120]. Agar oxirgi tur yugurish lozim bo‘lsa, nechta variant bo‘ladi? [4*3*2=24]

32. Hisoblang: a) 14!/(7!3!4!)
b) 7!4!/10! c)8!/(3!5!)-9!/(2!7!)

33. Tenglamani yeching: *m!-(m-1)!/(m+1)!=1/6. [2,3]*

Test

1-variant.

1) 1,5,6,7 raqamlaridan nechta barcha to‘rt xonali sonlar tuzish mumkin, agar raqamlar takrorlanishi mumkin bo‘lsa? a) 250; b) 256; c) 300.

2) Hisoblang: 17!/(5!*9!).

3) Tenglamani yeching: $7(n-1)!=n!$

2-variant

1) 0,1,2,3,4,5,6, raqamlaridan nechta barcha uch xonali sonlar tuzish mumkin, agar raqamlar takrorlanishi mumkin bo‘lsa? a) 168 b) 178 c) 2004)

2) Hisoblang: 14!/(6!*8!)

3) Tenglamani yeching: $(n-9)!=(n-10)!$

Takrorsiz o‘rin almashtirishlar.

Nazariy ma’lumotlar

Ta’rif. *Bir-biridan elementlarning joylashish tartibi bilan farq qiluvchi barcha mumkin bo‘lgan kombinatsiyalar n elementdan o‘rin almashtirishlar deb ataladi.*

n elementdan barcha mumkin bo‘lgan o‘rin almashtirishlar soni P_n deb belgilanadi (*P*-fransuzcha permutation – o‘rin almashtirish so‘zining birinchi harfi). «*n* elementdan o‘rin almashtirishlar soni” yoki «En dan pe» deb qiladi.

Ko‘paytirish qoidasiga ko‘ra P_n=n*(n-1)*…***3***2*1 ekanligini asoslash mumkin.

Ko‘paytirishning o‘rin almashtirish qonunini qo‘llagandan so‘ng formula $P_n=1*2*3*...*(n-1)*n$ ko‘rinishga keladi.

Birinchi *p* ta natural sonlar ko‘paytmasini qisqacha yozish uchun *n!* faktorial belgisidan foydalaniladi: $P_n= n!$

Namunaviy masalalar

34. Azim, Bexzod, Vali va Guli tennis stoliga o‘ynash uchun navbatga turishdi. Ular stol tennisi o‘ynash uchun necha xil usul bilan navbatga turishlari mumkin?

Yechish. Ko‘paytirish qoidasiga ko‘ra 4*3*2*1=24 ta usul bilan.

Masalada biri-biridan ulardagi joylashish tartibi bilan farq qiluvchi barcha mumkin bo‘lgan kombinatsiyalar soni hisoblab chiqildi. Bunday kombinatsiyalar bir nechta elementdan o‘rin almashtirishlar deb ataladi.

35. Chipta sotish oynasiga: 1) 3 kishi; 2) 5 kishi gncha xil usul bilan turishlari mumkin ?

Yechish: 1) $P_n= 3!=6$ 2) $P_n=5!=120$

36. 4, 5, 6, 7 va 8 raqamlari yordamida barcha raqamlari turlicha bo‘lgan nechta besh xonali son yozish mumkin.

Yechish: $P_n=5!=120$

37. 8 ta kitobni javonga nechdaa xil usul joylashtirish mumkin, agar ular orasida har qanday joylashishda bir qator turish lozim bo‘lgan bir muallifning ikkita kitobi bo‘lsa?

Yechish: Agar bir muallifning 2 ta kitobini bitta kitob deb hisoblasak, u holda 7 elementdan o‘rin almashtirishlar soni $P_n=7!=5040$ ga teng, lekin bu o‘rin almashtirishning har birida bir muallifning kitoblari 5040*2=10080 usul bilan almashinadi.

38. 30 va 210 sonlarining tub ko‘paytuvchilarga ajrting. Sonning tub ko‘paytuvchilar ko‘paytmasini nech xil usul bilan yozish mumkin?

Yechish: 30=1*2*3*5, P_4=4!=24; 210=1*2*3*5*7 , P_5=5!=120

39. 6 ta stulni mato bilan necha xil usul bilan o‘rash mumkin, agar olti xil rangdagi mato bo‘lib, barcha stullar turlicha rangda mato bilan o‘raladigan bo‘lsa? [6!=720]

40. Ozoda dugonasi telefon raqami 5, 7, 8 raqamlari bilan tugashini eslaydi, lekin ular qanday tartibda joylashganini esdan chiqargan. Uning dugonasiga telefon qilishi uchun eng ko‘p sondagi variantlar sonini toping? [3!=6]

41. 6 ta qafasdan 2 tasini qizil, qolganlari oq, qora, yashil, ko‘k rangga necha xil usul bo‘yash mumkin? [5!=120]

Mustaqil yechish uchun mashqlar:

1. Sonning tub ko‘paytuvchilar ko‘paytmasini necha xil usul bilan yozish mumkin? a) 12 b) 24 c)120 [3!=6, 3!=6, 4!=24]

2. Necha xil usul bilan 8 ta xatni turli konvertlarga joylashtirish mumkin? [8!=40320]

3. 5 ta turli xil rangdagi gul bor. Ularni 2, 3, 4, 5 raqamlar bilan belgilaymiz. *N* ta guldan quyidagi guldastalar tayyorlash talab etiladi: 123, 124, 125, 134, 135, 145, 234, 245, 245, 345. Bular bilan biz 5 ta elementdan barcha mumkin bo‘lgan guruhlashlarni tuzish usullarini ko‘rsatdik.

Guruhlashlar

Nazariy ma’lumotlar

Ta’rif. *n elementdan k ta elementni ularning tartibini hisobga olmasdan barcha tanlashlar soni* C_n^k *deb belgilanadi va n elementdan k tadan guruhlashlar soni deb ataladi.*

C_n^k belgi “*p* dan *k* bo‘yicha *se*“ deb o‘qiladi. *n* elementdan *k* tadan guruhlashlar soni uchun

$$C_n^k=n!/k!(n-k)!$$

formula o‘rinli.

Namunaviy masalalar

42. 15 nafardan iborat sayyohlar guruhidan 3 ta navbatchini tanlash lozim. Bu tanlashni necha xil usul bilan amalga oshirish mumkin?

Yechish. 15 elementdan 3 tadan guruhlash soni haqida gap borayapti. Shuning uchun C_{15}^3=15!/3!(15-3)!=455.

43. Meva solingan vazada 9 ta olma va 6 ta nok bor. 3 ta olma va 2 ta nokni tanlash kerak. Bunday tanlashni necha xil usul bilan qilish mumkin?

Yechish: 9 ta olmadan 3 ta olmani C_9^3 usul bilan, 6 ta nokdan 2 tasini C_6^2 usul bilan tanlash mumkin. Ko‘paytirish qoidasiga asosan 3 ta olma va 2 ta nokni $C_9^3C_6^2=9!/3!(9-3)!\ 6!/2!(6-2)!=1260$ usul bilan tanlash mumkin.

44. Guruhda 7 nafar matematika bilan muvaffaqiyatli shug‘ullanadi. olimpiadada qatnashish uchun Ulardan ikkitasini necha xil usul bilan tanlash mumkin

Yechish: 7 nafardan 2 tasini tanlash lozim, ya’ni

$$C_7^2= (7!)/(2!(7-2)!) =21$$

45. Ta’tilda o‘qish uchun o‘quvchilarga 10 ta kitob taklif etildi. O‘quvchi ulardan 6 tasini necha xil usul bilan tanlashi mumkin?

Yechish. Bu 10 ta elementdan 6 tadan guruhlashlar soni. Shuning uchun formulaga ko‘ra $C_{10}^6=10!/6!\cdot 4!=210.$

Mustaqil yechish uchun masala:

46. Sinfda 16 nafar o‘g‘il bola va 12 nafar qiz bola o‘qiydi. Maktab hududini tozalash hashariga qatnashish uchun 4 ta o‘g‘il bola va 3 ta qiz bola talab qilinadi. Buni necha xil usul bilan amalga oshirish mumkin? [400400]

Takrorlanuvchi guruhlashlar

Nazariy ma'lumotlar

Ta'rif. *n elementdan k ta element bo'yicha takrorlanuvchi guruhlashlar deb bu k elementlarning har biri n tipdagi elementlarning biri bo'lgan ixtiyoriy tartiblanmagan k elementlar jamlanmasiga aytiladi. Takrorlanuvchi guruhlashlarni hisoblash uchun* $\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$ *formuladan foydalaniladi.*

Namunaviy masalalar

47. Agar har bir qirrasi uzunligi 1 dan 10 gacha bo'lgan butun son bilan ifodalanishi mumkin bo'lsa, nechta turli xil to'g'riburchakli parallelepiped yasash mumkin?

Yechish. Jami bo'lib 10 elementdan 3 tadan guruhlashlar soniga teng bo'ladi: $C_{10}^3 = C^3_{10+3-1} = C_{12}^3 = 220$.

48. Gul do'konida 6 ta turdagi gul sotilmoqda. Agar gullarning joylashishini hisobga olmasak 10 ta guldan iborat nechta turli xil guldasta tuzish mumkin?

Yechish. Bu takrorlanuvchi guruhlashlar soni $C_6^{10} = C^{10}_{6+10-1} = C_{15}^{10} = 3003$.

Mustaqil yechish uchun mashqlar

49. Tomonlarining uzunliklar quyidagi 4, 5, 6, 7 sm qiymatlaridan biri qabul qiluvchi nechta uchburchak mavjud? [20]

50. Matematik olimpiadada mukofot uchun bir kitobning 3 ta nusxasi, ikkinchi kitobning 2 nusxasi va uchinchi kitobning bir nusxasi ajratildi. Agar olimpiada ishtirokchilari 20 nafar bo'lsa necha xil usul bilan mukofotlarni berish mumkin bo'ladi? [177100]

51. Kafeda menyuga 3 ta birinchi, 5 ta ikkinchi va 4 ta uchinchi ovqatlar kiritilgan. Bitta birinchi, bitta ikkinchi va bitta uchinchi ovqatdan iborat kafe taklif etgan menyudan tushlikning nechta variantini tuzish mumkin?

Yechish. Ko'paytirish qoidasiga ko'ra 3*5*4=60

52. 6 ta turdagi poliz mahsuloti mavjud. 3 xil salat tayyorlashga qaror qilindi. Nechta salat variantini tayyorlash mumkin?

Yechish. Ko'paytirish qoidasiga ko'ra 6*5*4=120

53. 1 va 2 raqamlari yordamida nechta turli uch xonali son tuzish mumkin? Variantlar daraxtini tuzing? [27]

54. Hisoblang: 1) 13!/11! [156];   2) (6!·14)/8!; [1/4]; 3) 6!-5!   [600]

55. Tenglamani yeching: *(x-10)!=77(x-11)!* [87]

56. Shaxmat musobaqasining 8 ta ishtirokchi 6 stolda o‘ynayapti. Agar barcha partiyalar ishtirokchilari oldindan ma’lum bo‘lsa, shaxmatchilarni stollar atrofida necha xil usul bilan joylashtirish mumkin? [$P_4=4!=24$]

Barcha turdagi to‘plamlarni tartiblashga doir masalalar yechish

Namunaviy masalalar

57. Ifoda qiymatini toping: a) 8!/(6!*2!)=28; b) 12!/(9!*3!)=220.

58. 2 233 344455 sonining raqamlarini o‘rnini almashtirib nechta turli son hosil qilish mumkin?

Yechish. $P_{10}(2,3,3,2)=10!/2!*3!*3!*2!=25200$.

59. Logarifm so‘zidagi harflarining o‘rinlari shunday o‘zgartirildiki, ikkinchi, to‘rtinchi va oltinchi o‘rinlarda undosh harflar turgan bo‘ladi. Bunday nechta o‘rin almashtirishlar mavjud?

Yechish: $P_5(1,2,3)=5!/1!2!3!$

60. Sexda 8 nafar ishchi ishlaydi. Uchta turli ko‘rinishdagi detallarni (har biridan bittadan) ularning uchtasiga necha xil usul bilan topshirish mumkin?

Yechish: $A_8^3=8!/(8-5)!=336$

61. Kasaba uyushma qo‘mitasiga 9 kishi saylandi. Ulardan rais, uning muovini, kotibi va madaniy ishlar tashkilotchisini saylash lozim. Buni necha xil usul bilan amalga oshirish mumkin

Yechish: $A_9^4=9!/(9-4)!=9!/5!=3024$.

62. 12 ta turli detalni 3 ta qutiga necha xil usul bilan joylashtirish mumkin?

Yechish. Jami 12 ta uzunlikdagi 3 ta element mavjud: $A_3^{12}=3^{12}$

63. Supermarketda 3 xil nomdagi konfet bor. Konfetlar 3 xil ko‘rinishdagi paketlarga joylashtirilgan – har bir uchun o‘zining paketi mavjud. 5 ta paketdan iborat jamlanmani nechta usul bilan buyurtma qilish mumkin?

Yechish. Jami 7 ta, (5,2) tarkibga ega. Demak, P(5,2)=7!/5!*2!=21.

64. 1, 2, 3, 4 va 5 raqamlaridan nechta turli uch xonali son tuzish mumkin, agar bitta raqam bir necha marta takrorlanishi mumkin bo‘lsa?

Yechish. Takrorlanuvchi o‘rinlashtirishlar $A_n^k=n^k=5^3=125$.

Mustaqil yechish uchun mashqlar

65. Faraz qilaylik, futbol bo‘yicha superligada 18 ta jamoa qatnashyapti. Oltin, kumush va bronza medallari uchun kurash borayotgan bo‘lsin. Medallar jamoalar orasida necha xil usul bilan taqsimlanishi mumkin? *[A^3_{18}=18!/(18-3)!=18*17*16=4896]*.

66. Ona 2 ta olma, 3 ta nok va 4 ta apelsin sotib olib, 9 kun davomida o‘g‘liga bittaden meva berib bordi. Necha xil usul bilan u bolasiga meva beradi? [jami 9 ta, (2, 3, 4) P(2, 3, 4)=9!/(2!*3!*4!)=1260].

Mavzuni o‘zlashtirish uchun savollar:

1. Takrorsiz o‘rinlashtirishlar formulasini yozing. [$A^k_n=n!/(n-k)!$].

2. Takrorsiz o‘rin almashtirishlar formulasini yozing [$P_n=n!$].

3. Takrorsiz guruhlashlar formulasini yozing [$C_n^k=n!/k!(n-k)!$].

4. Takrorlanuvchi guruhlashlar formulasini yozing [$C_n^k=C^k_{n+k-1}$].

5. Takrorlanuvchi o‘rin almashtirishlar formulasini yozing

[$P_n(k_1, k_2, .., k_n)=n!/k_1!\cdot k_2!\ldots\cdot k_n!$].

6. Takrorlanuvchi o‘rinlashtirishlar formulasini yozing [$A_m^k=m^k$].

7. Kasrni qisqartiring: (4n-1)!/(4n-3)!

a) (4n+1)(4n-2) b)(4n+3)   c) (4n-1)(4n-2)

8. Kasrni qisqartiring: *(2n+1)!/(2n-1)!*

a) *2n(2n+1)*   b) *2n(2n-1)*   c) *2n*

9. Mashqlarda 12 nafar basketbolchi qatnashmoqda. Nechta turli boshlang‘ich beshliklar tuzilishi mumkin? [C_{12}^5=792]

10. Shaxmat taxtasida 8 ta ruxni bir-birini urmaydigan qilib necha xil usul bilan joylashtirish mumkin? [8 xil pozitsiyada $P_8=8!=40320$]

11. Agar xatlarni 3 ta kurer tarqatadigan va oldindan ular kimga berilishi ma’lum bo‘lsa bo‘lsa, 6 ta xatni necha xil usul bilan jo‘natish mumkin? [729].

2-§. Kombinatorikaning ehtimollar nazariyasiga tadbiqlari

1. Ishonchli, mumkin bo‘lmagan va tasodifiy hodisalar

Nazariy ma’lumotlar

Ko‘pgina o‘yinlarda o‘yin kubigidan foydalaniladi. Kubikda 6 ta yoq bo‘lib, har bir yoqqa 1 dan 6 gacha sonda bo‘lgan nuqtalar belgilangan. O‘yinchi kubikni tashlaydi va tushgan yoqda (kubikning yuqorida joylashgan yoqidagi) nechta nuqta borligiga qaraydi.

Ko‘pincha kubikning yoqlaridagi nuqtalar mos raqamlar bilan almashtiriladi va 1,2,….,6 raqamlarning tushgani haqida gapirishadi. Kubikni tashlashni tajriba, eksperiment, sinov (hatto o‘yin ham deb), olingan natijani – sinov, tajriba yoki elementar hodisa deb hisoblash mumkin. Odamlarga u yoki bu hodisani ro‘y berishini topish, uning natijasini bashorat qilish qiziqarli. O‘yin kubigini tashlaganda ular qanday bashoratlar qilishi mumkin? Masalan, bunday: *A* hodisa 1,2,3,4,5 yoki 6 raqami tushishi; *B* hodisa –7, 8 yoki 9 raqami tushishi; *C* hodisa–1 raqami tushishi.

Hodisalar – kuzatish yoki tajriba natijasi.

Birinchi holda bashorat qilingan *A* hodisa albatta ro‘y beradi. Berilgan tajribada albatta ro‘y beradigan hodisa ishonchli hodisa deyiladi. Masalan, suv to‘la stakan to‘nkarilsa, u holda suv to‘kiladi.

Ikkinchi holda bashorat qilingan *B* hodisa hech qachon ro‘y bermaydi, bu mumkin emas. Berilgan tajribada ro‘y berishi mumkin bo‘lmagan hodisa mumkin bo‘lmagan hodisa deb ataladi.

Uchinchi holda bashorat qilingan *C* hodisa haqida nima deyishimiz mumkin, ro‘y beradimi yoki ro‘y bermaydimi? Bu savolga to‘la ishonch bilan javob bera olmaymiz, chunki 1 raqami tushishi ham, tushmasligi ham mumkin. Berilgan tajribada ro‘y berishi ham, ro‘y bermasligi ham mumkin bo‘lgan hodisaga tasodifiy hodisa deyiladi. Masalan, kishi ko‘chada tanishlarini uchratdi.

Namunaviy masalalar

67. Barcha ikki xonali sonlar qog‘ozchalarga yozilgan. Po‘lat tasodifiy ravishda bitta qog‘ozchani tanladi. Quyidagi hodisalarni ishonchli, mumkin bo‘lmagan va tasodifiy hodisalar sifatida qanday hodisa ekanligini aniqlang:

a) *A* hodisa – tanlangan qog‘ozchada tub son yozilgan bo‘lishi ;

b) *B* hodisa – tanlangan qog‘ozchada murakkab son yozilgan bo‘lishi;

c) *C* hodisa – tanlangan qog‘ozchada tub ham murakkab ham bo‘lmagan son yozilgan bo‘lishi;

d) *D* hodisa – tanlangan qog‘ozchada toq yoki juft son yozilgan bo‘lishi.

Yechish. *A* va *B* hodisalar - tasodifiy, *C* - mumkin bo‘lmagan hodisa, *D* –ishonchli hodisa.

68. Quyidagi hodisalardan qaysi biri ishonchli:

A – uchta o‘q otishda ikki marta nishonga tegish; B – uchta o‘yin kubigini tashlaganda 18 ta ochkodan ko‘p ochko chiqmasligi; D – tasodifan tashlangan uch xonali soning 1000 dan katta bo‘lmasligi; E – 1,2,3 raqamlaridan takrorsiz tuzilgan tasodifan tanlangan sonning 400 dan kichik bo‘lishligi;

Yechish. B, D va E – ishonchli hodisalar.

69. Quyidagi hodisalardan qaysi biri mumkin bo‘lmagan hodisa A – Toshkent tezyurar poezdining shanba kunlari kechikishi; B –3 ta o‘yin kubigini tashlaganda 17 ochkoning chiqishi; C –o,n,a harflar jamlanmasini tasodifan terganda ona so‘zining chiqishi; D – 1,2,3,7,8 raqamlardan tuzilgan va 9 ga karrali sonning ko‘rsatilgan raqamlarni bir marta tasodifan terganda chiqishi.

Yechish: D – mumkin bo‘lmagan hodisa.

70. Siz kitobni ixtiyoriiy betini ochdingiz va birinch uchragan so‘zni tanladingiz. Hodisa quyidagidan iborat: a) so‘zning yozuvida unli harf bor;
b) so‘zda o harfi bor; c) so‘zda unli harf yo‘q; g) so‘zda ayirish belgisi bor. Bu hodisalardan qaysiri ishonchli, mumkin bo‘lmagan va tasodifiy hodisa?

Yechish. a) – ishonchli; b), g) –tasodifiy; c) – mumkin bo‘lmagan hodisalar.

Mustaqil yechish uchun mashqlar

71. (0;1) va (5;10) ikki oraliq berilgan; birinchisidan a sonini, ikkinchisidan c soni tanlanadi: a) a soni c dan kichik; b) a soni c sonidan katta; b) $a+c$ soni (5;10) oraliqqa tegishli; g) $a+c$ soni (5;10) oraliqqa tegishli emas. Bu hodisalar qanday hodisalar bo‘ladi?

72. Qopda 10 ta shar bor: 3 ta ko‘k, 3 ta oq va 4 ta qizil. Quyidagi hodisalar turini ayting: a) qopdan 4 ta shar olindi va ularning barchasi ko‘k b) qopdan 4 ta shar olindi va ularning barchasi qizil; b) qopdan 4 ta shar olindi va ularning barchasi turli xil rangda; g) qopdan 4 ta shar olindi va ular orasida qora shar chiqmadi.

73. Ishonchli va mumkin bo‘lmagan hodisalarni ko‘rsating: A – ikkita o‘yin kubigini bir marta tashlaganda 12 ochkodan ziyod ochko chiqmasligi; B aeroport ustida 3 ta samolyotning birdaniga paydo bo‘lishi; C 3 ta o‘q otishda nishonga tegish; D –1,2,3 raqamlaridan iborat va 5 ga karrali sonning sanagich oynasida paydo bo‘lishi; [*A*- ishonchli, *D*- mumkin bo‘lmagan hodisa, qolganlari tasodifiy hodisalar].

74. Ikkita qutida turli xil oq, ko‘k, qizil, sariq va yashil rangli 5 tadan shar bor. Qutilarda 1 tadan shar olinadi. Quyidagilar qanday hodisalar bo‘ladi: a) sharlar turli rangli [i], b) bir xil rangli [t], c) 1 ta qora va 1 ta oq [m].

GRAFLAR NAZARIYASINING ELEMENTLARI

3-maruza

REJA:

1.Oddiy graflar. Ta'rif va misollar.
2.Graflarning izomorfligi.
3.Multigraflar.
4.Marshrutlar, zanjirlar, sikllar. Bog'likli-

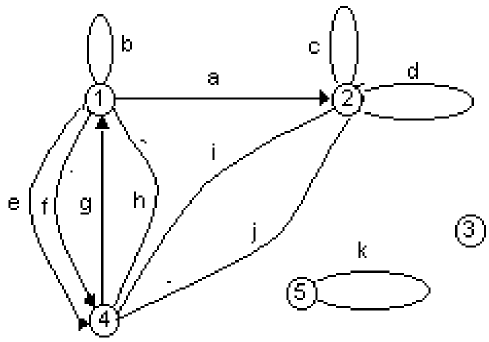
Bu bobda **graflar nazariyasining elementlari** yoritilgan. Bu yerda oddiy graflar, graflarning izomorfligi, marshrutlar, zanjirlar, sikllar, bog'liqlilik, daraxtlar, multigraflar, Eyler graflari, xromatik son va xromatik sinf, to'rlar va to'rdagi oqimlar, Ford-Falkerson teoremasi kabi masalalar qarab chiqilgan.

1-§. Oddiy graflar. Ta'rif va misollar

Graf. –Qirralar. –Uchlar. –Yo'naltirilgan, yo'naltirilmagan qirra. –Insident. –Oddiy

graflar. –Grafning to'ldiruvchisi. –Qism graf. –Sugraf.

Graflar nazariyasi hozirgi zamon matematikasining asosiy qismlaridan biridir. Keyingi paytlarda turli xil ASU va diskret harakterga ega bo'lgan hisoblash qurilmalarni loyihalashda (yasashda) graflarning roli yanada oshdi.



1-shakl.

Grafning o'zi nima? Ta'rif berishdan avval quyidagi misolda tushuntiramiz.

1-shaklda uchlari 1,2,3,4,5 raqamlar bilan belgilangan doirachalardan, qirralari esa *a,b,k,d,ye,f,g,h,i,j,k* (yo'nalishga ega yoki yo'nalishsiz) bu doirachalarni ba'zi birlarini tutashtiruvchi chiziqlardan iborat. Qirra *a* yo'naltirilgan bo'lib 1 va 2 uchlarni tutashtiradi (lekin 2 va 1 uchlarni tutashtirmaydi); yoylar deb ataluvchi bu qirralarga *e,f,g* lar ham misol bo'la oladi. Qirra *h* yo'naltirilmagan bo'lib, u 1 va 4, hamda 4 va 1 uchlarni tutashtiradi; zvenolar deb ataluvchi bunday qirralarga *i* va *j* lar ham kiradi. Nihoyat *b,k,d,k* qirralar sirtmoqlar deb ataladi va ba'zi uchni uning o'zi bilan tutashtiradi (bu qirralar ham yo‘nalishga ega emas).

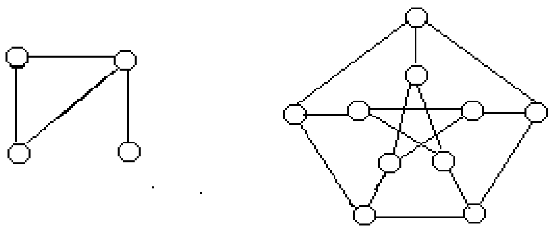
Odatda *a,b,ye,f,g,h* qirralarni 1 uchga insident deb ataydilar, o‘z navbatida bu uch shu qirralarning har biriga insidentdir.Shu bilan birga *a,ye,f* yoylar 1 uchdan 4 ga qarab yo‘naltirilgan, *g* esa aksincha 4 dan 1 ga qarata yo‘naltirilgandir. Uchinchi va beshinchi uchlar yakkalangan deyiladi (ular ko‘pi bilan sirtmoqlarga insident bo‘lishi mumkin).

Bu misoldagi graf cheklidir: {1,2,3,4,5} uchlar va *{a,b,k,d,ye,f,g,h,i,j,k}* qirralar to‘plamlarining ikkalasi ham chekli.

Kelgusida oddiy graflar muhim o‘rin tutadi. Bu sinfning graflari quyidagi xossalarga ega: u chekli, barcha qirralari oriyentirlanmagan, sirtmoqlari va karrali qirralari yo‘q (istalgan ikkita uchlar bittadan ko‘p zveno bilan tutashtirilmaydi).

Bunday graflarga quyidagilar misol bo‘la oladi.

Petersen nomi bilan ataluvchi o‘ng tomondagi graf qirralarining doirachalar bilan belgilanmagan kesishgan joylari uning uchlari emasdir.



2-shakl.

1-ta’rif. *Bo‘sh bo‘lmagan* X *uchlar to‘plami va* $U \subseteq X^{[2]}$ *qirralar to‘plamidan tuzilgan tartiblangan* $G = (X, U)$ *juftlik oddiy graf deyiladi.*

Agar $x, y \in X$ *uchlar uchun* $xy \in U$ *bo‘lsa, uchlar qo‘shni, agar* $xy \notin U$ *bo‘lsa bu uchlar qo‘shnimas deyiladi.*

Ta’rifdan bevosita ko‘rinadiki, agar uchlar soni $|X| = n(G)$ bo‘lsa, u holda qirralar soni $m(G)$ uchun quyidagi tengsizlik o‘rinlidir

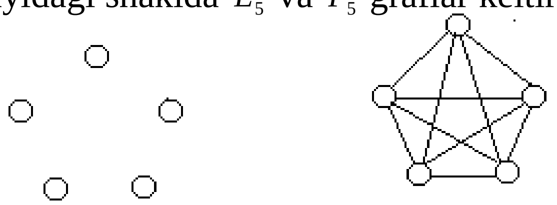
$$0 \le m(G) \le \binom{n(G)}{2}$$

Oddiy graflarning quyidagi ikkita holini alohida aytib o‘tamiz:

E_n - n uchli bo‘sh graf - $U(E_n) = \varnothing$;

F_n - n uchli to‘liq graf - $U(F_n) = X^{[2]}$

Quyidagi shaklda E_5 va F_5 graflar keltirilgan



3-shakl.

2-ta’rif. *Uchlari* $G = (X, U)$ *grafning uchlaridan, qirralari esa* $\bar{U} = X^{[2]} \setminus U$

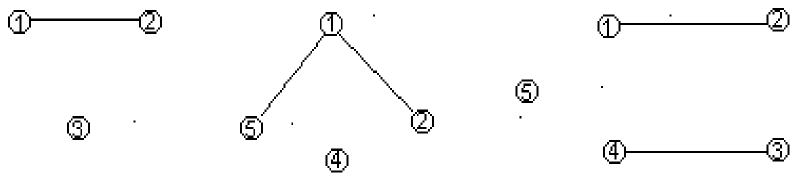
to'plamdan iborat bo'lgan $\overline{G} = (X, \overline{U})$ *berilgan grafning to'ldiruvchisi deyiladi.*

Ravshanki, $\overline{\overline{G}} = G$. E_5 va F_5, bir-birini to'ldiruvchi graflardir. Ularga yana misol keltiramiz.

4-shakl.

3-ta'rif. *Agar* $G = (X, U)$ *va* $G' = (X', U')$ *graflar uchun* $X' \subseteq X$, $U' \subseteq U$ *bo'lsa, u holda* G' *graf* G *ning bo'lagi deyiladi.*

Masalan,



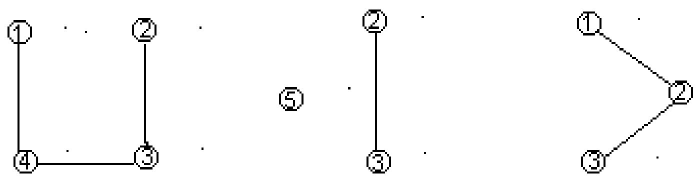
5-shakl.

graflar 4-shakldagi birinchi grafning bo'laklaridir.

4-ta'rif. *Agar* $G = (X, U)$ *grafning bo'lagi* $G' = (X', U')$ *uchun* $U' = \{xy / x, y \in X'\}$ *bo'lsa, u holda u qism graf deyiladi.*

Boshqacha qilib aytganda qism grafni hosil qilish uchun $X \setminus X'$ uchlar to'plami bilan ularning kamida bittasiga insident bo'lgan qirralar olib tashlanadi.

Masalan, yuqoridagi (4-shaklda) keltirilgan grafning qismlaridan ba'zilari

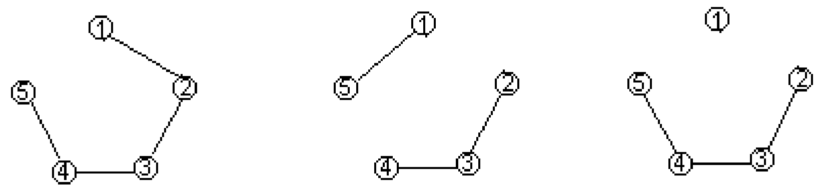


6-shakl.

shulardan iborat.

5-ta'rif. *Agar* $G=(X,U)$ *grafning bo'lagi* $G'=(X,U')$ *uchun* $X'=X$ *bo'lsa, u holda u sugraf deyiladi, ya'ni sugraflarni hosil qilish uchun faqat qirralarni olib tashlash kifoya.*

Yana 4-shakldagi misolga murojaat qilamiz. Quyidagi



7-shakl.

graflar uning sugraflaridir.

2-§. Graflarning izomorfligi

Graflar izomorfizmi. –Izomorf graflar. –Qo'shnilik munosabati.

$G=(X,U)$ va $G'=(X,U')$ graflar berilgan bo'lsin. Qaysi holda ular ikkalasi bitta grafni ifodalaydi degan savolga javob berishga urinamiz.

Bu masala graflarning izomorfizmi tushunchasi bilan chambarchas bog'likdir.

Ta'rif. *Agar* G *va* G' *graflarning uchlari to'plamlari* X *va* X' *orasida o'zaro bir qiymatli va uchlarning qo'shnilik munosabatini saqlaydigan moslikni* $(\Leftrightarrow)$ *o'rnatish mumkin bo'lsa, ya'ni* $\forall x,y\in X$ *va ularga mos bo'lgan* $x',y'\in X'(x\Leftrightarrow x', y\Leftrightarrow y')$ *uchun* $xy\in U\Leftrightarrow x'y'\in U'$ *bo'lsa, u holda bu graflar izomorf deyiladi.*

Quyidagi graflar berilgan bo'lsin

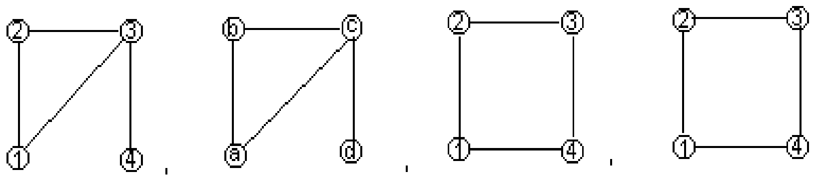
$G_i=(X_i,U_i)$, $(i=1,2,3,4)$, bu yerda

$X_1=\{1, 2, 3, 4\}$, $U_1\{12, 13, 23, 34\}$;

$X_2=\{a,b,c,d\}$, $U_2=\{ab,ac,bc,cd\}$;

$X_3=\{1, 2, 3, 4\}$, $U_3\{12, 23, 34, 14\}$;

$X_4=\{1, 2, 3, 4\}$, $U_4\{13, 23, 14, 24\}$.



G_1 G_2 G_3 G_4

8-shakl.

Umuman olganda bu graflarning to‘rtalasi har xildir. $G_1 \neq G_2$, chunki $X_1 \neq X_2$; $G_3 \neq G_4$, chunki $U_3 \neq U_4$. Lekin ko‘rinib turibdiki, G_1 va G_2 bir xil tuzilishga (strukturaga) ega, shu jumladan, G_3 va G_4 ham bir xil tuzilishga ega. Agar izomorflikni $\approx$ va izomorf emaslikni $\approx$ belgilasak: $G_1 \approx G_2$, $G_3 \approx G_4$, $G_1 \approx G_3$, $G_1 \approx G_4$, $G_2 \approx G_3$, $G_2 \approx G_4$ ekanligini ko‘ramiz.

Masalan, $G_1 \approx G_2$ ni quyidagicha aniqlash mumkin

$$1 \Leftrightarrow a, \quad 2 \Leftrightarrow b, \quad 3 \Leftrightarrow c, \quad 4 \Leftrightarrow d;$$

u holda

$$12 \in U_1 \quad \text{va} \quad ab \in U_2, \quad 13 \in U_1 \text{ va } ac \in U_2,$$
$$14 \notin U_1 \quad \text{va} \quad ad \notin U_2, \quad 23 \in U_1 \text{ va } bc \in U_2,$$
$$24 \notin U_1 \quad \text{va} \quad bd \notin U_2, \quad 34 \in U_1 \text{ va } cd \in U_2,$$

ya’ni $xy \in U_1 \Leftrightarrow x'y' \in U_2$ shart bajariladi.

O‘quvchiga

$$1 \Leftrightarrow b, \quad 2 \Leftrightarrow a, \quad 3 \Leftrightarrow c, \quad 4 \Leftrightarrow d$$

moslik ham G_1 va G_2 graflarning izomorfizmi ekanligini tekshirishni tavsiya qilamiz. Shu bilan birga uchlarning qolgan 4!- 2=22 mosliklarni izomorfizm emasligini aytib o‘tamiz.

G_3 va G_4 graflarning izomorfizmini masalan, quyidagicha o‘rnatish mumkin

$$\begin{array}{cccccl} 1 & 2 & 3 & 4 & - & G_3 \text{ grafda} \\ \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow & & \\ 1 & 3 & 2 & 4 & - & G_4 \text{ grafda} \end{array}$$

(bu graflarning boshqa izomorfizmlarini aniqlang).

$G_1 \approx G_3$ ekanligini osongina aniqlash mumkin: Masalan, G_1 grafning 4 uchi faqat bitta uch bilan qo‘shni, G_3 da esa bunday uch umuman yo‘q.

3-§. Multigraflar

Parallel qirralar. –Sirtmoq. -Insidentlik matritsasi. –Multigraf.

Endi umumiy holda chekli, oriyentirlashtirilmagan graflarni kiritamiz.

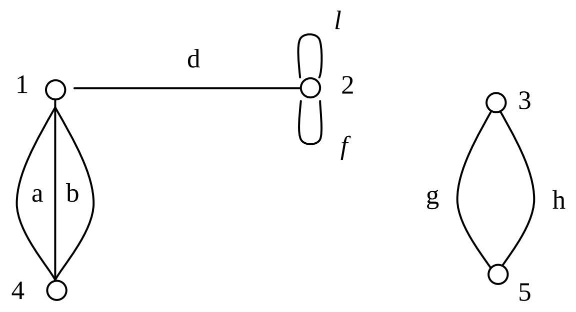
Ta’rif. *Graf deb* $G = (X, U, \psi)$ *tartiblangan uchlikga aytiladi, bu yerda* $X \neq \phi$ *- uchlar to‘plami,* U *- qirralar to‘plami (ikkalasi ham chekli) va* $\psi : U \Rightarrow X^2$ *akslantirish har bir* $u \in U$ *qirra uchun uning* $x, y \in X$ *uchlariga tartiblanmagan* $\psi(u) = xy$ *juftlikni mos qo‘yadi. Agar* $\psi(u) = xx$ *bo‘lsa, u holda* u *qirra* x *uchdagi sirtmoq,* $\psi(u) = x, y \wedge x \neq y$ *bo‘lsa u zveno deyiladi. Agar* x *va* y *uchlarning ikkalasi kamida bitta umumiy insident qirraga ega bo‘lsa ular qo‘shni deyiladi. Xususiy holda, agar* x *uchda kamida bitta sirtmoq bo‘lsa, u o‘z-o‘zi bilan qo‘shnidir.*

Agar u va v qirralar uchun $u \neq v \wedge \psi(u) = \psi(v)$ bo‘lsa, u holda ular parallel (karrali) deyiladi.

Agar grafning uchlari $X = \{1, 2, ..., n\}$ kabi tartiblangan bo‘lsa, u holda uni $A(G) = (\alpha_{ij})$ qo‘shnilik matritsasi yordamida berish mumkin, bu yerda α_{ij} i va j uchlarni tutashtiruvchi qirralar soni. Albatta bu matritsa grafning uchlarini tartiblanishiga bog‘liq va uni parallel qirralarni joylashish tartibi aniqligina tiklaydi. Insidentlik matritsasi $B(G) = (\beta_{ij})_m^n$ bo‘yicha grafni yagona ravishda tiklash mumkin:

$$\beta_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ агар } i \text{ уч ва } j \text{ кирра инцидент булса}, \\ 0, \text{ акс холда.} \end{cases}$$

Bu yerda $i = 1, 2, ..., n$; $j = 1, 2, ..., m$ va qirralar ham tartiblangan deb hisoblanadi $U = \{u_1, u_2, ..., u_m\}$.



9-shakl

Yuqoridagi shaklda uchlari $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, qirralari $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ bo‘lgan $G = (X, U, \psi)$ graf (multigraf) berilgan. Akslantirish ψ esa quyidagicha aniqlangan: $\psi(a) = \psi(b) = \psi(c) = 14$, $\psi(d) = 12$, $\psi(e) = \psi(f) = 22$, $\psi(g) = \psi(h) = 35$.

Bu graf uchun

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B(G) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4-§. Marshrutlar, zanjirlar, sikllar. Bog‘liklilik

Marshrut. –Siklik marshrut. –Zanjir. –Sikl. –Sodda zanjir. –Tutashtirilgan uchlar.

–Bog‘liqli graf. –Qo‘shnilik matritsasi. –Takomillashtirilgan qo‘shnilik matritsasi.

1-ta’rif. *Oddiy* $G = (X, U)$ *grafdagi*

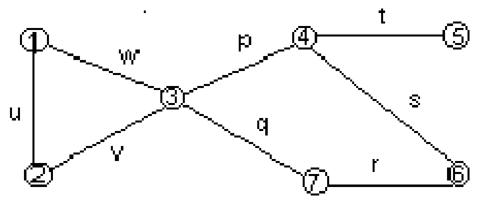
$$x_0\ u_1 x_1\ u_2\ x_2 u_3\ x_3 .....x_{l-1}\ u_l x_l$$

ketma-ketlik (bu yerda $x_0, x_1, ...x_l \in X$ *;* $u_1 u_2, ..., u_l \in U$*) uzunligi* l *teng bo‘lgan va* x_0, x_1 *uchlarni tutashtiruvchi marshrut deyiladi.*

Agar $x_0 = x_l$ va $l \geq 1$ bo‘lsa, marshrut siklik deyiladi. $l = 0$ marshrut bitta x_0 uchdan iborat bo‘ladi va u siklik hisoblanmaydi.

Marshrutda uchlar va qirralarning har xil bo‘lishi talab qilinmaydi. Bitta uch yoki qirra bir necha marta takrorlanishi mumkin.

2-ta'rif. *Qirralari har xil bo'lgan marshrut zanjir deb ataladi. Siklik zanjir esa sikl deyiladi. Agar zanjirda (siklda)* x_0 *va* x_1 *lardan tashqari barcha uchlari har xil bo'lsa, u holda sodda zanjir (sikl) deyiladi.*



10-shakl.

Yuqoridagi grafda (10-shakl) *3v2u1v3p4t5t4t5* va *3v1u2v3p4t5t4t5* marshrutlar bir xil elementlardan tuzilgan bo'lsada, lekin har xildir. Ular siklik emas va zanjir ham emasdir. *3v1u2v3p4* marshrut zanjir, lekin sodda emas va siklni tashkil etmaydi. *3v1u2v3p4s6r7g3* va *3v2u1v3p4s6r7g3* har xil sodda bo'lmagan sikllar. *3g7r6s4p3* - marshrut sodda sikldir. *1u3v2* ketma-ketlik umuman marshrut emas.

3-ta'rif. *Agar* G *grafning* x *va* y *uchlari orasida hech bo'lmaganda bitta zanjir mavjud bo'lsa, u holda ular tutashtirilgan deyiladi.*

Ravshanki, grafning uchlari to'plamida berilgan "tutashtirilganlik" munosabati refleksivlik, simmetriklik, tranzitivlik xossalariga ega. Demak, bu munosabat ekvivalentlikdir va grafning X uchlari to'plamini $X_1, X_2,..., X_k$ sinflarga ajratadi. Har bir sinfga tegishli bo'lgan uchlar o'zaro tutashtirilgandir (turli sinflarga tegishli bo'lgan uchlar orasida zanjirlar yo'q).

$G=(X,U)$ grafning $G_i=(X_i,V_i)$ $(i=1,2,...,k)$ qism grafi uning bog'liqli komponentasi deyiladi. Agar $k(G)=1$ bo'lsa, graf bog'likli deyiladi.

Bog'liqli G grafning uchlari to'plami X da masofa tushunchasini kiritish mumkin: i va j uchlar orasidagi masofa deb

$$d(i,j)=\min l_{[i,j]}$$

ga aytiladi, bu yerda $l_{[i,j]}$ $[i,j]$ zanjirning uzunligi va minimum barcha $[i,j]$ zanjirlar bo'yicha olinadi (albatta bu minimum sodda zanjirlarda erishiladi).

Kiritilgan $d(i,j)$ uchun masofaning barcha xossalari (aksiomalari) bajariladi:

1) $d(i,i)=0;\quad d(i,j)>0\quad (i\neq j);$

2) $d(i,j)=d(j,i);$

3) $d(i,j)+d(j,k)\geq d(i,k)$.

Demak, X to'plam metrik fazoni tashkil etadi.

$G=(X,U,\psi)$ multigraf berilgan bo'lsin, bu yerda $X=\{x_1,x_2,...,x_n\}$, $U=\{u_1,u_2,...,u_m\}$ va $A(G)=(\alpha_{ij})$ qo'shnilik matritsasi.

Grafning x_i va x_j uchlarini tutashtiruvchi uzunligi $l\geq 1$ bo'lgan turli xil marshrutlar sonini va o'zlarini aniqlash masalasini qaraymiz. Bu son $[A(G)]^l=(\alpha_{ij}^{(l)})$ matritsaning $\alpha_{ij}^{(l)}$ elementiga teng.

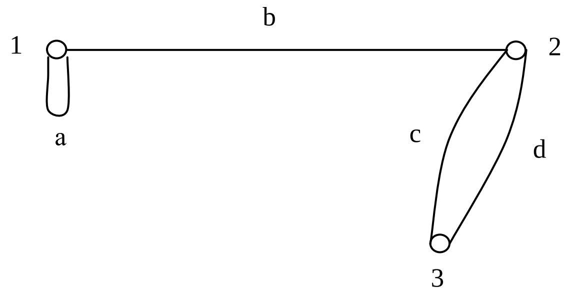
Haqiqatan ham $l=1$ bo'lganda o'z-o'zidan ravshan. Faraz qilaylik $\alpha_{ik}^{(l)}$ uzunlikdagi l teng x_i va x_k uchlarni tutashtiruchi marshrutlar soni bo'lsin. Unda x_i va x_j uchlarni tutashtiruvchi uzunliklari $l+1$ (oxiridan oldingi x_k uchni tanlab olgan holda) marshrutlar soni $\alpha_{ik}^{(l)}\ \alpha_{kj}$ ga teng, umumiy holda esa barcha marshrutlar soni matritsalar ko'paytmasi qoidasiga asosan $\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ik}^{(l)}\alpha_{kj} = \alpha_{ij}^{(l+1)}$ ga teng.

Ushbu graf uchun

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 6 & 3 & 0 \\ 0 & 14 & 1 & 3 & 0 \\ 6 & 1 & 5 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 42 & 3 & 9 & 0 \\ 42 & 15 & 31 & 18 & 0 \\ 3 & 31 & 5 & 9 & 0 \\ 9 & 18 & 9 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}, \ldots;$$

masalan, x_1 uch bilan x_4 tutashtiruvchi uzunliklari 2ga teng bo‘lgan uchta marshrut $(x_1 u_1 x_2\ u_8 x_4,\ x_1 u_2 x_2 u_8 x_4,\ x_1 u_3 x_2 u_8 x_4)$ bor va bu uchlarni tutashtiruvchi uzunliklari 3ga teng to‘qqizta marshrut $(x_1 u_1 x_2\ u_4 x_3 u_6 x_4, x_1,u_1 x_2\ u_5 x_3 u_6 x_4,\ x_1 u_2 x_2 u_4 x_3\ u_6 x_4,\ x_1 u_2 x_2 u_5 x_3 u_6 x_4,$ $x_1 u_3 x_2\ u_4 x_3 u_6 x_4,\ x_1 u_3 x_2 u_5 x_3 u_6 x_4,\ x_1 u_1 x_2 u_8 x_4 u_7 x_4,\ x_1 u_2 x_2\ u_8 x_4 u_7 x_4,\ x_1 u_3 x_2 u_8 x_4 u_7 x_4)$ mavjud, x_5 uchni o‘zi bilan bog‘lovchi uzunligi 2ga teng to‘rtta marshrut $(x_5 u_9 x_5 u_9 x_5,$ $x_5 u_9 x_5 u_{10} x_5,\ x_5 u_{10} x_5 u_9 x_5,\ x_5 u_{10} x_5 u_{10} x_5)$ bor va hokazo.

Marshrutlarni o‘zlarini aniqlash usulini (hisoblashlari ko‘pligi sababli) sodda misolda ko‘rsatamiz.



12-shakl.

Bu grafning takomillashtirilgan qo‘shnilik matritsasini tuzamiz

$$A(u) = (a_{ij}(u)) = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & 0 & c+d \\ 0 & c+d & 0 \end{pmatrix},$$

bu yerda $a_{ij}(u)$ i va j uchlarni tutashtiruvchi qirralarning shartli yig‘indisi. Qirralar belgilarini (a,b,c,d) nokommutativ (lekin assotsiativ) yarim xalqaning yasovchilari deb qabul qilamiz.

$A(u)$ matritsaning ketma-ket darajalarini topamiz

$$[A(U)]^2 = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ab & bc+bd \\ ba & b^2+c^2+d^2+cd+dc & 0 \\ cb+db & 0 & c^2+d^2+cd+dc \end{pmatrix},$$

$$[A(U)]^3=\begin{pmatrix} a^3+b^2a+ab^2 & \begin{matrix} a^2b+b^3+bc^2+ \\ +bcd+bdc+bd^2 \end{matrix} & abc+abd \\ \begin{matrix} ba^2+b^3+c^2b+ \\ +d^2b+cdb+dcb \end{matrix} & bab & \begin{matrix} b^2c+c^3+d^2c+cdc+ \\ +dc^2+b^2d+c^2d+ \\ +d^3+cd^2+dcd \end{matrix} \\ cba+dba & \begin{matrix} cb^2+db^2+c^3+d^2c+ \\ +cdc+dc^2+c^2d+ \\ +d^3+cd^2+dcd \end{matrix} & 0 \end{pmatrix}\ldots$$

Masalan, $[A(U)]^3$ matritsaning $\alpha_{21}^{(3)}(U)=ba^2+b^3+c^2b+d^2b+cdb+dcb$ elementi x_2 bilan x_1 tutashtiruvchi oltita uzunligi 3ga teng bo‘lgan marshrutlarni aniqlaydi: $x_2bx_1ax_1ax_1$, $x_2bx_1bx_2bx_1$, $x_2cx_3cx_2bx_1$,
$x_2dx_3dx_2bx_1$, $x_2cx_3dx_2bx_1$, $x_2dx_3cx_2bx_1$.

Agar bizni x_i dan x_j ga l qadamlar bilan o‘tish masalasi qiziqtirsa, butun musbat sonlar yarim xalqasiga $2=1$ bul munosabatini kiritamiz. U holda, agar x_i dan x_j gacha kamida bitta uzunligi l ga teng bo‘lgan marshrut bo‘lsa $[A(G)]^l$ matritsaning $\alpha_{ij}^{(l)}$ elementi 1, aks holda 0 ga teng.

11-shakldagi graf uchun

$$A=\begin{pmatrix} 0&1&0&0&0 \\ 1&0&1&1&0 \\ 0&1&0&1&0 \\ 0&1&1&1&0 \\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix},\quad A^2=\begin{pmatrix} 1&0&1&1&0 \\ 0&1&1&1&0 \\ 1&1&1&1&0 \\ 1&1&1&1&0 \\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix},\quad A^3=\begin{pmatrix} 0&1&1&1&0 \\ 1&1&1&1&0 \\ 1&1&1&1&0 \\ 1&1&1&1&0 \\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix},$$

$$A^4=A^5=\ldots=\begin{pmatrix} 1&1&1&1&0 \\ 1&1&1&1&0 \\ 1&1&1&1&0 \\ 1&1&1&1&0 \\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix}.$$

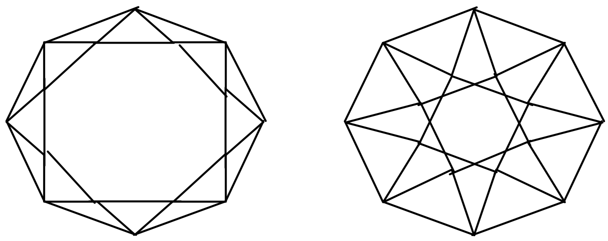
Agar x_i dan x_j gacha l dan ko‘p bo‘lmagan qadamlar bilan o‘tish masalasini ko‘rsak, u holda $A+E(E=E_n^n$ birlik matritsa) matritsaning darajalarini qaraymiz. Yuqoridagi misolda

$$A+E=\begin{pmatrix} 1&1&0&0&0 \\ 1&1&1&1&0 \\ 0&1&1&1&0 \\ 0&1&1&1&0 \\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix},\quad (A+E)^2=(A+E)^3=\ldots=\begin{pmatrix} 1&1&1&1&0 \\ 1&1&1&1&0 \\ 1&1&1&1&0 \\ 1&1&1&1&0 \\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix}.$$

Bu usul bilan grafning barcha bog‘liqli komponentlarini ham topish mumkin.

Muammoli masala va topshiriqlar

1. 13-shaklda ko'rsatilgan ikkita grafning izomorfligini isbotlang.



13-shakl

2. Bir-biri bilan arazlagan uchta hamsoyaning uchta umumiy quduqlari bor. Har bir uydan har bir quduqqa bir-biri bilan kesishmaydigan yo'l o'tkazish mumkinmi? Javobingizni izohlang.

3. Beshta to'g'ri ko'pqirrali graflar uchlarining soni va darajasini aniqlang.

4. To'g'ri ko'pqirrali graflar uchun qo'shnilik va insidentlik matritsalarini tuzing.

Mustaqil ishlash uchun savollar:

1.Oddiy graflar. Qirralar, uchlar. Yo'naltiril-gan va yo'naltirilmagan qirralar. Insident.
2.Grafning to'ldiruvchisi. Qism graf. Sugraf.
3.Graflar izomorfizmi. Izomorf graflar. Qo'shnilik munosabati.
4.Multigraflar.
5.Marshrutlar, zanjirlar, sikllar. Bog'liklilik.

5-§. Daraxtlar

Siklik va atsiklik qirra. –Siklomatik son. –Daraxt. –Pog‘ona uchlari. –Grafning asosi.

–Vatar. –Chekli daraxtda qirralar soni uchlar sonidan bitta

kamligi haqida.

1-ta’rif. *Agar G grafning u qirrasi kamida bitta siklga tegishli bo‘lsa, u siklik, aks holda atsiklik qirra deyiladi.*

G graf uchun

$$\lambda(G) = m(G) - n(G) + k(G)$$

(bu yerda $m(G) - G$ ning qirralari soni, $n(G)$ - uchlari koni va $k(G)$ komponentalari soni) ifoda uning siklomatik soni deyiladi.

Osongina ko‘rsatish mumkinki:

$$K(G\setminus u) = \begin{cases} K(G), & \text{агар } u \text{ циклик кирра булса;} \\ K(G)+1, & \text{агар } u \text{ ациклик кирра булса;} \end{cases}$$

$$\lambda(G|u) = \begin{cases} \lambda(G)-1, & \text{агар } u \text{ циклик кирра булса;} \\ \lambda(G), & \text{агар } u \text{ ациклик кирра булса.} \end{cases}$$

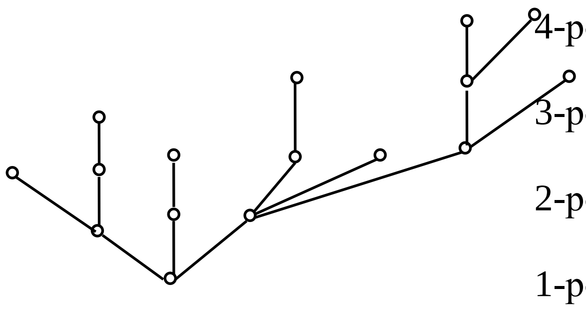
O‘z-o‘zidan ravshanki,

$$n(G\setminus u) = n(G), \quad m(G\setminus u) = m(G) - 1,$$

$\lambda(G) \geq 0$ va faqat sikllari bo‘lmagan graf uchun $\lambda(G) = 0$.

2-ta’rif. *Barcha qirralari atsiklik bo‘lgan bog‘liqli graf daraxt deyiladi.*

Daraxtning istalgan ikkita uchlari yagona zanjir bilan bog‘langandir. Daraxtning istalgan x_0 uchini tanlab olib uning ildizi yoki nolinchi pog‘onali uch deb ataymiz. x_0 ga qo‘shni bo‘lgan barcha uchlarni birinchi pog‘ona uchlari deymiz va hokazo - $i-1$ pog‘onadagi uchlarga qo‘shni (boshqa pog‘onalarga tegishli bo‘lmagan) uchlarni i pog‘ona uchlari deb ataymiz (14-shakl).



4-pog‘ona,

3-pog‘ona,

2-pog‘ona,

1-pog‘ona,

0-pog‘ona.

14-shakl

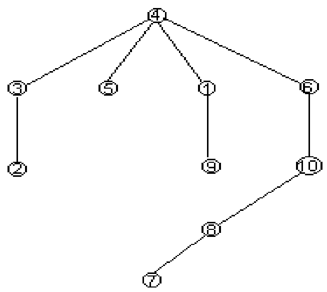
Daraxtning bunday tasvirlanishidan kelib chiqadiki, u chetki (faqat bitta qirraga insident bo‘lgan) uchlarga ega. Masalan, oxirgi pog‘onaning uchlari.

Bog‘likli G grafdan ketma-ket barcha siklik qirralarni olib tashlaymiz. Natijada, hamma qirralari atsiklik bo‘lgan bog‘likli H grafni-daraxtni hosil qilamiz. Bu daraxt G grafning asosi deyiladi. Grafning asosi yagona tanlanmaydi, lekin barcha atsiklik qirralar istalgan asosga kiradi. H asosga nisbatan $G \setminus H$ bo‘lakning barcha qirralari - vatarlar deb ataladi.

H daraxtdan chetki uchni (avtomatik tarzda bitta qirrani) olib tashlasak, yana daraxtni hosil qilamiz. Agar H chekli bo‘lsa, $n(H)-2$ qadamlardan keyin bitta qirra va ikkita uchga ega daraxtni hosil qilamiz. Daraxtdan olib tashlangan uchlar va qirralar soni bir xil bo‘lganligi sababli quyidagi xulosaga kelamiz: har qanday chekli daraxtda qirralar soni uchlar sonidan bitta kam. Aksinchasi ham o‘rinlidir, ya’ni

Teorema. *Chekli bog‘likli G graf daraxt bo‘lishi uchun, uning qirralari soni uchlari sonidan bittaga kam bo‘lishi zarur va yetarli.*

Uchlari $1,2,3,...,n$ raqamlar bilan tartiblangan n uchli daraxt berilgan bo‘lsin. Daraxtning chetki uchlari orasidagi eng kichik nomerlisi i_1 va u bilan qo‘shni bo‘lgan yagona uch j_1 bo‘lsin. Daraxtdan i_1 uchni, demak $i_1 j_1$ qirrani olib tashlaymiz. Hosil bo‘lgan daraxtda eng kichik nomerli chetki i_2 uchni va $i_2 j_2$ qirrani olib tashlaymiz va hokazo. Bu protsessni $n-2$ marta takrorlab ikki uch va bitta qirrali daraxtni hosil qilamiz. Olib tashlangan uchlarni $I=\{i_1,i_2,......,i_{n-2}\}$ va $J=(j_1,j_2,......,j_{n-2})$ lar bilan belgilaymiz. Bu ikkala I va J majmualar berilgan daraxt bo‘yicha yagona ravishda aniqlanadi, shu bilan birga I ning barcha sonlari har xil, J niki esa har xil bo‘lishi shart emas (15-shakl).



15-shakl.

Bu daraxt uchun $I=\{2,3,5,7,8,9,1,4\}$ va $J=(3,4,4,8,10,1,4,6)$.

$\mathrm{I}=\{i_1,i_2,...,i_{n-2}\}$ va $J=\{j_1,j_2,...,j_{n-2}\}$ uchlar majmualari berilgan daraxt bo‘yicha yagona aniqlanadi, shu bilan birga birinchi majmuaning barcha uchlari har xil, ikkinchisiniki esa har xil bo‘lishi shart emas. Shu bilan birga har qanday $J=\{j_1,j_2,...,j_{n-2}\}$ $(1\le j_k \le n)$ majmua bitta daraxtga mos keladi. Uni quyidagicha qurish mumkin.

$N=\{1, 2,..., n\}$ to‘plamning J da qatnashmagan sonlarining eng kichigini i_1 bilan belgilaymiz (bunday son hamma vaqt mavjud, chunki J da $n-2$ sonlar bor). Qirra bilan i_1 va j_1 uchlarni tutashtiramiz, j_1 ni J dan, i_1 ni esa N dan o‘chiramiz va protsessni takrorlaymiz: $J_1=\{j_2,j_3,...,j_{n-2}\}$ majmuada qatnashmagan $N_1=N\setminus\{i_1\}$ ning eng kichik sonini i_2 bilan belgilaymiz; i_2, j_2 uchlarni qirra bilan tutashtiramiz va ularni mos ravishda N_1 va J_1 lardan o‘chiramiz va hokazo. Oxirida N_{n-2} da qolgan ikkita uchlarni qirra bilan tutashtiramiz.

Bundan ko‘rinadiki, har qanday $k=1, 2,..., n-2$ uchun k qadamdan keyin yasalgan qirralar ichida i_k ga insident bo‘lganlari yo‘q, lekin j_k ga insident bo‘lgan kamida bitta qirra mavjud. Buni nazarda tutgan holda, protsessni teskari tartibda bajarib, k bo‘yicha induksiyani qo‘llab haqiqatan ham daraxt hosil bo‘lishini ko‘rsatamiz (chunki har gal bitta qirra yangi, chetki uch bilan qo‘shiladi).

Shunga o‘xshash induksiya bo‘yicha, lekin to‘g‘ri tartibda qurib isbotlash mumkinki ushbu daraxtga aynan J majmua mos keladi.

Yuqoridagi protsessdan ko‘rinadiki har xil daraxtlarga turli xil (I, J) juftliklar mos keladi. Agar $\mathrm{I}' \neq \mathrm{I}''$ bo‘lsa, u holda $J' \neq J''$. Haqiqatan ham, $i_k^{'} \neq i_k^{''}$ va $i_k^{'} < i_k^{''}$ bo‘lsa, u holda $i_k^{'}(j_k^{'},..., j_{n-2}^{'})$ ga kirmaydi, lekin u $(j_k^{''},..., j_{n-2}^{''})$ ga kiradi. Shuning uchun har xil daraxtlarga har xil J ko‘rinishdagi majmualar mos keladi.

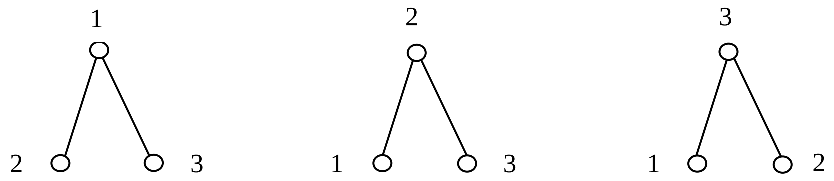
Shunday qilib, quyidagi teorema isbot qilindi.

Teorema (Keli). *Uchlar soni tartiblangan* n *ta bo‘lgan daraxtlar soni* n^{n-2} *ga teng.*

(n *ta elementlardan* $n-2$ *tadan tuzilgan barcha takroriy o‘rinlashtirishlar soni).*

Albatta bular ichida ko‘plari o‘zaro izomorfdir.

Masalan, $n=3$ bo‘lganda, uchala daraxtlar ham o‘zaro izomorfdir



16 - шакл

EYLER GRAFLARI

4-maruza

REJA:

1.Eyler graflari.
2.Xromatik son va xromatik sinf.
3.To‘rlar va to‘rdagi oqimlar.

Harakteristik vektor. –Juft graf. –Eyler sikli. –Eyler grafi. – Siklomatik son.

G grafning barcha uchlarini o‘z ichida saqlovchi qism graflarini qaraymiz. G ning barcha qirralari $u_1, u_2, ..., u_m$ kabi tartiblangan bo‘lsin. G grafning har qanday $H \subseteq G$ qismiga 0 va 1 lardan iborat $(a_1, a_2, ..., a_m)$ m o‘lchovli vektorni mos qo‘yamiz:

$$a_i = \begin{cases} 1, \text{ агар } u_i \in H, \\ 0, \text{ агар } u_i \notin H. \end{cases}$$

(N ning harakteristik vektori). Bu moslik o‘zaro bir qiymatlidir, shu bilan birga qism graflarning 2 modul bo‘yicha yig‘indisiga ularning harakteristik vektorlarining yig‘indisi mos keladi. Barcha qism graflar to‘plami yig‘indi amaliga nisbatan abel gruppasini tashkil etadi. Bu gruppa $\{0,1\}$ koeffiitsentlar maydoni ustida chiziqli fazoni tashkil etadi (istalgan N qism grafning 1 ga ko‘paytmasi N ni beradi, 0 ga ko‘paytmasi esa bo‘sh grafdir).

Ko‘rinib turibdiki G graf qismlarining fazosi ularning harakteristik vektorlarining fazosiga izomorf va m o‘lchovli.

Agar grafning barcha uchlarining darajalari (ya’ni ularga insident bo‘lgan qirralar soni) juft bo‘lsa, graf ham juft deyiladi.

Juft grafda istalgan sodda zanjirni (sikldan farqli) unga kirmagan qirra bilan davom ettirish mumkin. Haqiqatan ham, zanjirda oxirgi uchning darajasi 1 ga teng, lekin graf juft bo‘lganligi sababli bu uchga insident bo‘lgan kamida bitta qirra mavjud. Agar graf chekli bo‘lsa, zanjirni ketma-ket davom ettirib, avval bosib o‘tgan uchlarning biriga kelamiz, ya’ni sodda siklni hosil qilamiz. Bu siklning barcha qirralarini grafdan olib tashlaymiz. Uning qolgan qismi yana juft grafdir, chunki uchlarning darajalari 2 ga kamayadi (agar undan zanjir o‘tsa) yoki o‘zgarmaydi (agar zanjir o‘tmasa). Bu grafda yana siklni ajratamiz va hokazo. Yuqoridagi protsessni yana davom etamiz, toki unda birorta ham sikl qolmasin (ya’ni bo‘sh graf hosil bo‘lguncha). Shunday qilib, chekli juft graf o‘zaro qirralar bo‘yicha kesishmaydigan sodda sikllar yig‘indisiga yoyiladi. Bundan uning barcha qirralari siklik ekanligi kelib chiqadi.

Agar chekli juft graf bog‘liqli bo‘lsa, u holda osongina ko‘rsatish (sodda sikllar soni bo‘yicha induksiyani qo‘llab) mumkinki unda barcha qirralarini o‘z ichiga olgan sodda sikl mavjud. Bunday sikl **Eyler sikli**, grafning o‘zi esa **Eyler grafi** deyiladi.

Yuqorida aytilganlardan quyidagi teorema kelib chiqadi.

Teorema. *Chekli bog‘liqli graf Eyler grafi bo‘lishi uchun u juft bo‘lishi zarur va yetarli.*

Istalgan chekli juft grafning har bir bog‘liqli komponentasi Eyler grafidir.

Ixtiyoriy grafning har qanday ikkita N_1 va N_2 juft qism graflarining yig‘indisi yana juft qism grafdir. Haqiqatan ham, α uchning darajasi $S(\alpha)$ N_1+N_2 qism grafda $s_1+s_2-2s_{12}$ ga teng. Bu yerda s_1 va s_2 α uchning mos ravishda N_1 va N_2 lardagi darajalari, s_{12} esa α ning ularning $N_1 \cap N_2$ kesishmasidagi darajasi. Shunday qilib, juft qism graflar to‘plami barcha qism graflar fazosining qism fazosidir. Bu qism fazoning o‘lchovi ν ni aniqlaymiz.

G bog‘liqli, m qirrali, n uchli graf D uning xtiyoriy asosi bo‘lsin. Vatarlar soni $m-n+1$ ga teng. Har bir $\alpha\beta$ vatar yagona sodda $[\alpha,\beta]\subseteq D$ zanjir bilan sodda siklni hosil qiladi. Barcha sikllarning vektorlari bog‘liqmas Σ sistemani hosil qiladi. Chunki har bir sikl sistemaning boshqa sikllariga tegishli bo‘lmagan qirraga (o‘zining vatariga) ega. Demak $\nu \geq m-n+1$.

Ikkinchi tomondan har qanday juft qism graf, xususiy holda istalgan sodda sikl Σ sistemaning sikllari orqali ifodalanadi. Haqiqatan ham juft N qism grafga vatarlari unga tegishli Σ sistemaning sikllarini qo‘shamiz. Hosil bo‘lgan yig‘indi birorta ham vatarga ega emas. Demak, bu yig‘indi D daraxtning qism grafi, ya’ni u bo‘sh grafdir. Aks holda sodda sikllarga ega juft qism graf (N va sikllarning yig‘indisi) daraxtning qism grafi bo‘lar edi. Bundan $\nu \leq m-n+1$ kelib chiqadi va yuqoridagi tengsizlikni inobatga olgan holda $\nu = m-n+1$.

Bog‘liqli bo‘lmagan k komponentali grafning juft qism graflari fazosining bazisi uning barcha bog‘liqli komponentalari bazislarining yig‘indisidan iborat. Qirralar va uchlar soni ham komponentalar bo‘yicha qo‘shiladi. Agar i komponenta m_i qirralarga va n_i uchlarga ega bo‘lsa, u holda

$$\nu = m-n+k, \quad m=\sum_{i=1}^{k} m_i, \quad n=\sum_{i=1}^{k} n_i .$$

Demak, juft qism graflar qism fazosining o‘lchovi ν grafning siklomatik soni $\lambda(G)$ ga teng.

Istalgan graf uchun $\nu \geq 0$ bo‘lganligi sababli $k \geq n-m$.

Siklomatik soni nolga teng bo‘lgan bog‘liqli graflar – daraxtlardir.

7-§. Xromatik son va xromatik sinf

To‘g‘ri bo‘yalgan graf. –Xromatik son. –Xromatik sinf. –Bixromatik graf. –Bixromatik bo‘lishning yetarli va zaruriy sharti. –Bruks teoremasi.

Cirtmoqsiz G grafning har bir uchiga (qirrasiga) berilgan ranglardan bittasini mos qo‘yamiz. Agar qo‘shni uchlarga (qo‘shni qirralarga) turli xil ranglar mos qo‘yilgan bo‘lsa, u holda G graf to‘g‘ri bo‘yalgan deyiladi.

G grafning uchlarini (qirralarini) to‘g‘ri bo‘yash uchun kerak bo‘lgan eng kam miqdordagi turli xil ranglar soni $\chi(G)$ mos ravishda $\chi^{©}(G)$ uning xromatik soni (xromatik sinfi) deyiladi.

Har qanday oddiy G graf uchun $\chi(G) \leq n$ $(\chi(En)=1)$. Tenglik faqat *Fn* uchun bajariladi.

Agar grafda kamida bitta qirra bo‘lsa, $\chi(G) \geq 2$. Demak, $2 \leq \chi(G) \leq n(G)$ tengsizlik o‘rinli.

Ta’rif. *Agar G graf uchun $\chi(G)=2$ bo‘lsa, u holda G bixromatik deyiladi.*

1-teorema. *Kamida bitta qirraga ega bo‘lgan graf bixromatik bo‘lishi uchun unda uzunliklari toq sodda sikllarning bo‘lmasligi zarur va yetarli.*

Agar G graf to‘liq χ uchli F_χ qismlarga ega bo‘lsa, uning xromatik soni $\chi(G) \geq \chi$. Lekin teskarisi to‘g‘ri emas.

Shunday graflar mavjudki, ularda hattoki F_3 (uchburchak) bo‘lmasada istalgancha katta xromatik songa ega.

Xromatik son va graf uchlarining darajalari (uchga insident bo‘lgan qirralar soni) orasidagi bog‘lanishni o‘rganamiz. G graf uchlarining maksimal darajasi $S(G)$ bo‘lsin. Γ_s bilan $S(G) \leq S$ bo‘lgan oddiy graflarning sinfini belgilaymiz.

Har qanday $G \in \Gamma_s$ graf uchun $\chi(G) \leq S+1$ ekanligini uchlar soni bo‘yicha induksiya usuli bilan isbotlash mumkin. Yagona F_s graf uchun $\chi(F_s) = S+1$.

2-teorema. *Kamida bitta qirraga ega bo‘lgan graf bixromatik bo‘lishi uchun unda uzunliklari toq sonlarga teng sodda sikllarning bo‘lmasligi zarur va yetarlidir.*

Zaruriyligi. Grafni to‘g‘ri bo‘yalganda sikl uchlarining ranglari almashib keladi, demak uzunligi toq bo‘lgan sodda siklni to‘g‘ri bo‘yash uchun ikki rang yetarli emas. Bunday siklni o‘zida saqlagan graf ham bixromatik bo‘la olmaydi.

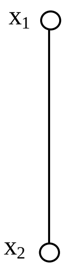
Yetarliligi. Avvalo shuni ta’kidlaymizki, har qanday daraxt bixromatik grafdir. Haqiqatan ham, daraxtning juft pog‘onalaridagi barcha uchlarini bitta rangga bo‘yaymiz, toq pog‘onalardagi uchlarni esa ikkinchi rangga bo‘yaymiz. Natijada u to‘g‘ri bo‘yalgan bo‘ladi, chunki daraxtning qirralari faqat qo‘shni pog‘onalardagi uchlarni tutashtiradi.

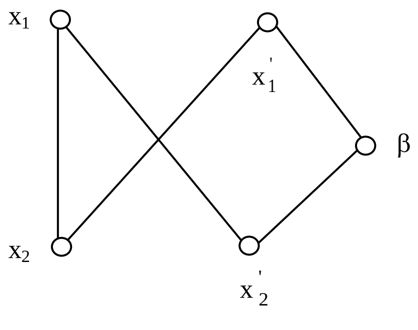
Daraxtda i va j pog‘onalar uchlarini tutashtiruvchi sodda zanjirning uzunligining juft-toqligi $i-j$ sonning juft toqligi bilan bir xil. Xususiy holda, bir xil juftlikdagi pog‘onalarning uchlari uzunligi juft sodda zanjir bilan bog‘langandir.

Uzunligi toq songa teng sodda zanjirga ega bo‘lmagan G grafda istalgan asosni tanlab olamiz. Bu asosga nisbatan barcha vatarlar turli xil juftliklarga ega bo‘lgan pog‘onalarning uchlarini tutashtiradi, aks holda unda uzunligi toq sodda zanjirlar bo‘lar edi. Demak, asosning ikki rang bilan to‘g‘ri bo‘yalgani butun grafning ham to‘g‘ri bo‘yalganidir.

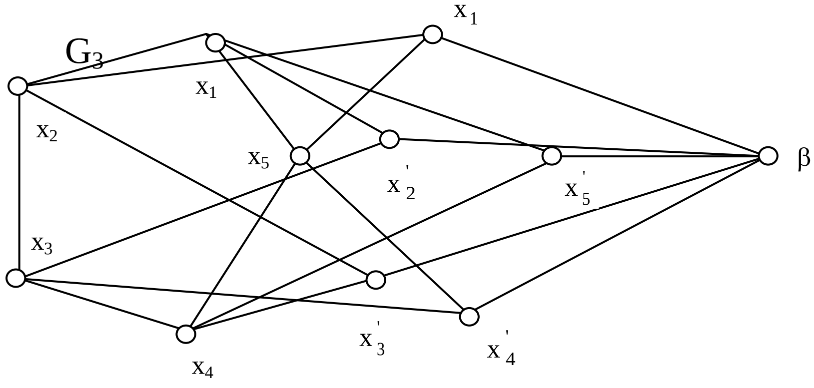
Agar G grafda χ uchli to‘liq F_χ qism graf mavjud bo‘lsa, u holda $\chi(G) \geq \chi$. Teskarisi esa to‘g‘ri emas, shunday graflar mavjudki, ularda hatto uch uchli to‘liq qism graflari (uchburchaklar) yo‘q, lekin xromatik soni istalgancha katta.

Bunda G_χ graf induktiv ravishda yasaladi. G_2 bitta qirradan iborat.

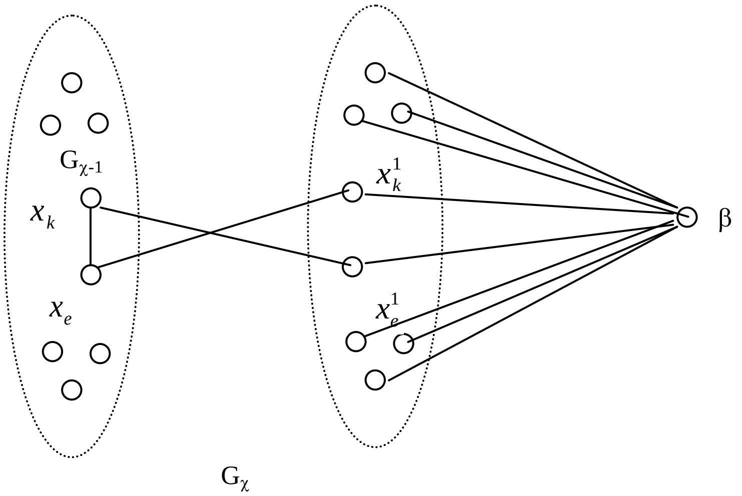




G2 G3



G4



17-shakl.

Faraz qilaylik $X=\{x_1,x_2,...,x_n\}$ uchlar to‘plamida $G_{\chi\text{-}1}$ graf qurilgan bo‘lsin. $G_{\chi\text{-}1}$ grafga $X'=\{x_1^{'},x_2^{'},...,x_n^{'}\}$ uchlar to‘plamini va β uchni qo‘shamiz. Har bir $x_i^{'}$ uchni β hamda $G_{\chi\text{-}1}$ grafda x_i bilan qo‘shni bo‘lgan uchlari bilan tutashtiramiz (1-shakl). Hosil bo‘lgan G_χ grafda uchburchaklar yo‘qligini ko‘rsatamiz. Induksiya faraziga $G_{\chi\text{-}1}$ grafda uchburchaklar yo‘q. Agar uchburchak mavjud bo‘lsa, u holda X' to‘plamdagi uchlar bir-biri bilan tutashtirilmaganligi sababli, unga bu uchlarning ko‘pi bilan bittasi tegishli; β ham birorta uchburchakga tegishli emas, chunki u faqat X' dagi uchlar bilan tutashtirilgan.

Agar $[x_i,x_j,x_k^{'}]$ uchburchak bo‘lsa, u holda $[x_i,x_j,x_k]$ uchburchak ham mavjud bo‘lar edi (chunki $x_k^{'}$ va x_k uchlar X da bir xil qo‘shni uchlarga ega). Bu esa induksiya farazimizga zid.

Endi $\chi(G_\chi)=\chi$ ekanligini ko‘rsatamiz.

Ravshanki $\chi(G_2)=2$. Faraz qilaylik $\chi(G_{\chi-1})=\chi-1$. U holda G_χ grafni χ ranglar bilan to‘g‘ri bo‘yash mumkin: masalan, $G_{\chi\text{-}1}$ grafni χ-1 ranglar bilan to‘g‘ri bo‘yaganimizdan keyin har bir $x_i^{'}$ uchni x_i ning rangiga bo‘yaymiz va β uchga qolgan χ rangni beramiz.

G_χ grafni χ-1 ranglar bilan to‘g‘ri bo‘yash mumkin emasligini ko‘rsatamiz. Teskarisini faraz qilamiz, ya’ni G_χ graf χ-1 ranglar bilan to‘g‘ri bo‘yaladi va β uchga l rang to‘g‘ri keladi. Bunda X' to‘plamning uchlari l dan farqli ranglarga bo‘yalgan. $A\subseteq X$ l rangga bo‘yalgan uchlar qism to‘plami bo‘lsin. Har bir $x_i\in A$ uchni $x_i^{'}$ uchning rangiga qaytadan bo‘yaymiz. Bu holda $G_{\chi-1}\subseteq G_\chi$ grafning barcha uchlari χ-2 rang bilan to‘g‘ri bo‘yalgan bo‘ladi. Haqiqatan ham $\tilde{x}_i\tilde{x}_j$ $G_{\chi\text{-}1}$ grafning istalgan qirrasi bo‘lsin. G_χ grafda x_i va x_j turli ranglarga bo‘yalganligi sababli ularning ikkalasi birdaniga A ga tegishli emas. Agar $x_i\notin A,\ x_j\notin A$ bo‘lsa grafni qayta bo‘yaganimizda ularning ranglari o‘zgarmaydi va turli xil bo‘lganligicha qoladi. Shunday qilib $G_{\chi\text{-}1}$ graf induksiya farazimizga zid ravishda χ-2 ranglar bilan to‘g‘ri bo‘yaladi.

Xromatik son va graf uchlarining darajalari orasidagi bog‘lanishni aniqlaymiz. $s(G)$ bilan G graf uchlari darajalarining eng kattasini belgilaymiz, G_s esa parallel qirralarga ega bo‘lmagan va $s(G) \leq s$ graflar sinfi.

Uchlar soni bo‘yicha induksiyani qo‘llab osongina ko‘rsatish mumkinki, har qanday $G \leq \Gamma_s$ uchun $\chi(G) \leq s+1$. Haqiqatan ham, agar grafda uchlar soni $s+1$ dan oshmasa $\chi(G) \leq s+1$. Faraz qilaylik bu tengsizlik G dan kam uchlarga ega G_s ning barcha graflari uchun o‘rinli bo‘lsin. G grafdan istalgan x uchni olib tashlaymiz (unga insident bo‘lgan barcha qirralar bilan birgalikda). Induktiv farazimizga asosan $G \setminus \{x\}$ grafni $s+1$ ranglar bilan to‘g‘ri bo‘yaymiz. G grafda x uchga ko‘pi bilan s ta qo‘shni uchlar mavjud, shuning uchsun kamida bitta rang topiladiki unga x ga qo‘shni bo‘lgan uchlarning hech biri bo‘yalmagan. Shu rangga x uchni bo‘yaymiz va graf G $s+1$ ranglar bilan to‘g‘ri bo‘yalgan bo‘ladi.

Quyidagi teoremadan kelib chiqadiki G_s sinf graflari ichida xromatik soni $S+1$ teng bo‘lgan yagona to‘liq $s+1$ uchli F_{s+1} grafdir.

Teorema (Bruks). *Agar* $s \geq 3$, $G \in \Gamma_s$ *va* $G \neq F_{s+1}$ *bo‘lsa, u holda* $\chi(G) \leq s$.

8-§. To‘rlar va to‘rdagi oqimlar

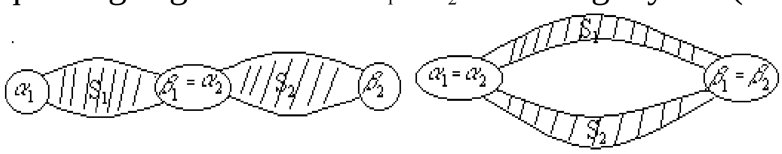
To‘r. –To‘rning qutblari. –Qutbli qirra. –Ichki qirra. –π-to‘rlar. –To‘rdagi oqim. –To‘rning kesimi. –Kesimning o‘tkazuvchanlik qobiliyati. –Ford-Falkerson teoremasi.

Ba’zi bir uchlari tanlab olingan graf to‘r deb ataladi. Tanlab olingan uchlar to‘rning qutblari deyiladi. Masalan, daraxtni bir qutbli to‘r deb qarash mumkin (uning ildizi qutbdir).

To‘rning qutblaridan farqli uchlari uning ichki uchlari deyiladi. Kamida bitta qutbga insident bo‘lgan qirra qutbli, boshqalari esa ichki qirralar deyiladi.

Ikkita sinflarga ajratilgan: k ta kirish va l ta chiqish qutblarga bo‘lingan to‘r (k,l)-qutblilik deyiladi.(1,1) - qutblilik to‘r ikki qutbli to‘r deyiladi.

Umumiy elementlarga ega bo‘lmagan S_1 va S_2 to‘rlarning qutblari mos ravishda α_1, β_1 va α_2, β_2 bo‘lsin. S_1 va S_2 to‘rlarning ketma-ket ulanishidan hosil qilingan α_1, β_2 qutblarga ega bo‘lgan to‘rni $S_1 S_2$ kabi belgilaymiz. S_1 va S_2 to‘rlarning parallel ulanishidan hosil bo‘lgan α_1, β_1 qutblarga ega to‘rni esa $S_1 \vee S_2$ kabi belgilaymiz (18-shakl).



18-shakl.

Yuqoridagiga o‘xshash $S_1 \cdot S_2 \cdot \dots \cdot S_n$ va $S_1 \vee S_2 \vee \dots \vee S_n$ to‘rlarni aniqlash mumkin.

Bir qirrali to‘rlardan parallel va ketma-ket ulash natijasida hosil bo‘lgan to‘r parallel-ketma-ket deyiladi. Bunday to‘rlarni π-to‘rlar deb ataymiz. π-to‘rlar induktiv ravishda aniqlanadi:

1. Bir qirrali to‘r π-to‘rdir;
2. Agar S_1 va S_2 π-to‘rlar bo‘lsa, u holda, $S_1 S_2$ va $S_1 \vee S_2$ lar ham π-to‘rlardir.

S-qisman oriyentirlashtirilgan to‘rning har bir u qirrasiga o‘tkazuvchanlik qobiliyati deb ataluvchi manfiy bo‘lmagan $C(u)$ son mos qo‘yilgan bo‘lsin.

1-ta’rif. *Quyidagi shartlarni qanoatlantiradigan* (f,ω) *juftlik* S *to‘rdagi oqim deyiladi:*

1. ω *-to‘rning barcha zvenolarini biror oriyentirlashti-rilishi;*

2. $f(u)$ *-qirralar to‘plamida aniqlangan qiymat-lari manfiy emas va* u *ning o‘tkazuvchanlik qobiliyatidan katta bo‘lmagan funksiya. Shu bilan birga barcha ichki uchlarda Kirxgof qonuni bajariladi, ya’ni* α *uchga kiruvchi barcha qirralar bo‘yicha oqimlarning yig‘indisi, undan chiquvchi qirralar bo‘yicha oqimlarning yig‘indisiga teng.*

Boshqacha qilib aytganda:

1) $0 \le f(u) \le C(u)$ - to‘rning barcha qirralari uchun;

2) $R(\alpha) = 0$ - barcha ichki uchlar uchun, bu erda

$$R(\alpha) = \sum f(u) - \sum f(u), \quad \alpha \in \Gamma(\alpha) \quad \alpha \in \Gamma^{э}(\alpha),$$

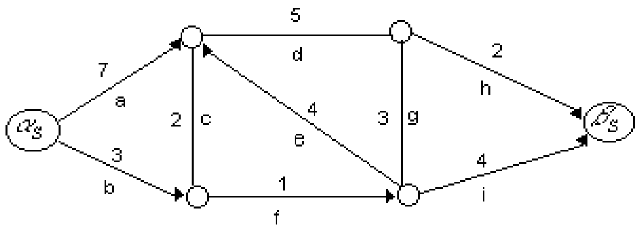
$\Gamma(\alpha)\ (\Gamma'(\alpha))$ ω- oriyentirlashtirilishda α uchdan chiquvchi (mos ravishda α ga kiruvchi) qirralar to‘plami.

Ravshanki, to‘rning barcha uchlari bo‘yicha (qutblarni ham inobatga olgan taqdirda) $R(\alpha)$ larning yig‘indisi nolga teng (chunki har bir qirra biror uchdan chiqib boshqasiga kiradi). Shuning uchun $R(\alpha_s) = -R(\beta_s)$.

$R = R(\alpha_s)$ ning qiymati to‘rdagi oqimning miqdori deyiladi.

Qirralarning berilgan o‘tkazuvchanlik qobiliyatlarida S to‘rdan o‘tuvchi maksimal $R_{\max}$ oqimning miqdorini aniqlash masalasini ko‘ramiz. Bu masalaning yechimi to‘rdagi kesimlar bilan bog‘liqdir.

2-ta’rif. *Agar to‘rning ba’zi bir qirralarini olib tashlaganimizda, u bog‘likli bo‘lmay qutblari turli komponentlariga tushib qolsa, bu qirralar to‘plami to‘rning kesimi deyiladi.*



19-shakl.

Yuqoridagi rasmda berilgan to‘r uchun $\{d,e,f\}$, $\{b,c,e,g,h\}$, $\{d,g,h,i\}$ qirralar to‘plamlari kesimlardir.

Agar kesimdan istalgan qirrasini olib tashlaganda kesim bo‘lmay qolsa, u sodda deyiladi. Masalan, $\{d,e,f\}$, $\{b,c,e,g,h\}$ kesimlar sodda, $\{d,g,h,i\}$ esa sodda emas.

Bog‘likli to‘rning sodda kesimi uni ikkita: α_s qutbni o‘zida saqlovchi chap va β_s qutbni o‘zida saqlovchi o‘ng qismlarga ajratadi. Kesimning har bir qirrasi turli qismlarga tegishli bo‘lgan uchlarni tutashtiradi. Agar kesimning qirrasi zveno bo‘lsa, yoki chapdan o‘ngga qarab yo‘naltirilgan bo‘lsa, u to‘g‘ri, aks holda teskari deyiladi.

3-ta’rif. *Sodda* ω *kesimning o‘tkazuvchanlik qobiliyati* $C(\omega)$ *deb uning barcha to‘g‘ri qirralarining o‘tkazuvchanlik qobiliyatlarining yig‘indisiga aytiladi.*

Masalan, $\{d,e,f\}$ kesimning o‘tkazuvchanlik qobiliyati 5+1=6 teng, $\{b,c,e,g,h\}$-kesimniki esa 3+2+3+2=10. Agar to‘r bog‘liqli bo‘lmay qutblari turli komponentlariga tegishli bo‘lsa, u holda yagona sodda kesim bo‘sh to‘plam, uning o‘tkazuvchanlik qobiliyati esa nolga teng.

Teorema (Ford-Falkerson). *S to‘rdan o‘tuvchi oqimning maksimal qiymati $R_{\max}$ uning sodda kesimlarining minimal o‘tkazuvchanlik qobiliyati $C_{\min}$ ga teng.*

Muammoli masala va topshiriqlar

1. T daraxtning ikkita T_1 va T_2 qism daraxtlarining $T_1 \cap T_2$ kesishmasi daraxt bo‘lishini isbotlang.

2. Agar i komponenta m_i qirralarga va n_i uchlarga ega bo‘lsa, u holda

$$\nu = m - n + k, \quad m = \sum_{i=1}^{k} m_i, \quad n = \sum_{i=1}^{k} n_i$$

bo‘lishini isbotlang.

ADABIYOTLAR RO‘YXATI

Maxsus adabiyotlar.

1. Narmanov A.Ya. Analitik geometriya. T., “O‘zbekiston faylasuflari milliy jamiyati nashriyoti”, 2008 y.
2. Izu Vaisman.Analytical geometry.World scientific.2007.
3. D. Gromoll, G. Walschap. Metric Foliations and Curvature. Progress in Mathematics Volume 268, 2009, ISBN: 978-3-7643-8714-3 , 1-80 betlar
4. Narmanov A.Ya. Differensial geometriya. T. Universitet, 2003
5. Narmanov A.Ya., Sharipov A.S.,Aslonov J.Differensial geometriya va topologiya fanidan dan mashq va masalar to‘plami. T. Universitet, 2014
6. Materiali mejdunaorodnoy konferensii «Geometriya v Odesse-2014». Odessa, Ukraina. 2014
7. Coxeter H.S. Introduction to Geometry.Sydney-Toronto,2001
8. Mishenko A.S., Fomenko A.T. Kurs differensialnoy geometrii i topologii. M., izd. MGU,2004
9. Baxvalov S.V., Modenov P.S., Parxomenko A.S. Analitik geomet-riyadan masalalar to‘plami. T,Universitet, 2006
10. Blyashke V. Vvedeniye v differensialnuyu geometriyu. - 2-ye izd., ispravl. - Ijevsk: Izdatelskiy dom «Udmurtskiy universitet». 2000 -212 s.
11. Taymanov I. A. Leksii po differensialnoy geometrii. — Ijevsk: Institut kompyuternix issledovaniy, 2002. - 176 str. ISBN 5-93972-105-2
12. Mishenko A. S, Solovev Yu. P., Fomenko A. T. Sbornik zadach po differensialnoy geometrii i topologii: Ucheb. posobiye dlya vuzov.— 2-ye izd.
13. Suberbiller O. N. Zadachi i uprajneniya po analiticheskoy geometrii. 31-ye izd., ster. — SPb.: Izdatelstvo «Lan», 2003. — 336s. il. — Uchebnik dlya vuzov.
14. Xalikulov S.I., Quljonov O‘., Ostonov Q. Kombinatorika elemementlari. Uslubiy qo‘llanma.- Samarqand: SamDU nashri, 2020.- 78 bet.
15. H. TO‘RAYEV, I. AZIZOV, S. OTAQULOV. KOMBINATORIKA VA

16 GRAFLAR NAZARIYASI. -Toshkent. 2009. Xalikulov S.I., Quljonov O‘., Ostonov Q. Kombinatorika elemementlari. Uslubiy qo‘llanma.- Samarqand: SamDU nashri, 2020.- 78 bet.

17 H. TO‘RAYEV, I. AZIZOV, S. OTAQULOV. KOMBINATORIKA VA

GRAFLAR NAZARIYASI. -Toshkent. 2009.