



**O'ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI  
HUZURIDAGI PEDAGOG KADRLARNI  
QAYTA TAYYORLASH VA ULARNING  
MALAKASINI OSHIRISH TARMOQ  
(MINTAQAVIY) MARKAZI**

# **KO'RGAZMALI GEOMETRIYA**

**MODULI BO'YICHA  
O'QUV-USLUBIY  
MAJMUA**

**2024**

**OLIY TA'LIM, FAN VA INNOVATSIYALAR VAZIRLIGI**

**OLIY TA'LIM TIZIMI KADRLARINI QAYTA TAYYORLASH VA  
MALAKASINI OSHIRISH INSTITUTI**

**O'ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI HUZURIDAGI PEDAGOG  
KADRLARNI QAYTA TAYYORLASH VA ULARNING MALAKASINI  
OSHIRISH TARMOQ (MINTAQAVIY) MARKAZI**

**«KO'RGAZMALI GEOMETRIYA»**

**MODULI BO'YICHA**

**O'QUV- USLUBIY MAJMUA**

**Toshkent-2024**

**Mazkur o‘quv-uslubiy majmua Oliy ta’lim, fan va innovatsiyalar  
vazirligining 2023-yil 25-avgustdagi 391-sonli buyrug‘i bilan tasdiqlangan  
o‘quv reja va dastur asosida tayyorlandi.**

**Tuzuvchi:** O‘zMU, katta o‘qituvchisi, H.F.Parmonov

**Taqrizchi:** f.-m.f.n., dotsent, H.R.Rasulov

***O‘quv-uslubiy majmua O‘zbekiston Milliy universiteti Kengashining qarori  
bilannashrga tavsiya qilingan (2024-yil 20-yanvardagi № 4/2 -sonli bayonnomasi)***

## MUNDARIJA

- I. ISHCHI DASTUR .....**
- II. MODULNI O‘QITISHDA FOYDALANILADIGAN INTERFAOL  
TA’LIM METODLARI .....**
- III. NAZARIY MA’LUMOTLAR MATERIALLARI.....**
- IV. TEST TOPSHIRIQLARI .....**
- V. GLOSSARIY .....**
- VI. ADABIYOTLAR RO‘YXATI .....**
- VII. BITIRUV (LOYIHA) ISHLARI MAVZULARI.....**

## **Kirish**

Ushbu dastur O‘zbekiston Respublikasining 2020-yil 23-sentabrda tasdiqlangan “Ta’lim to‘g‘risida”gi Qonuni, O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2015 yil 12 iyundagi “Oliy ta’lim muassasalarining rahbar va pedagog kadrlarini qayta tayyorlash va malakasini oshirish tizimini yanada takomillashtirish to‘g‘risida”gi PF-4732-son, 2019-yil 27-avgustdagi “Oliy ta’lim muassasalari rahbar va pedagog kadrlarining uzluksiz malakasini oshirish tizimini joriy etish to‘g‘risida”gi PF-5789-son, 2019-yil 8-oktabrdagi “O‘zbekiston Respublikasi oliy ta’lim tizimini 2030 yilgacha rivojlantirish konsepsiyasini tasdiqlash to‘g‘risida”gi PF-5847-son, 2022-yil 28-yanvardagi “2022-2026 yillarga mo‘ljallangan Yangi O‘zbekistonning taraqqiyot strategiyasi to‘g‘risida”gi PF-60-son, 2023-yil 25-yanvardagi “Respublika ijro etuvchi hokimiyat organlari faoliyatini samarali yo‘lga qo‘yishga doir birinchi navbatdagi tashkiliy chora-tadbirlar to‘g‘risida”gi PF-14-son Farmonlari, shuningdek, O‘zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasining 2019-yil 23-sentabrdagi “Oliy ta’lim muassasalari rahbar va pedagog kadrlarining malakasini oshirish tizimini yanada takomillashtirish bo‘yicha qo‘shimcha chora-tadbirlar to‘g‘risida”gi 797-son Qarorida belgilangan ustuvor vazifalar mazmunidan kelib chiqqan holda tuzilgan bo‘lib, u oliy ta’lim muassasalari pedagog kadrlarining kasb mahorati hamda innovatsion kompetentligini rivojlantirish, sohaga oid ilg‘or xorijiy tajribalar, yangi bilim va malakalarni o‘zlashtirish, shuningdek amaliyotga joriy etish ko‘nikmalarini takomillashtirishni maqsad qiladi.

Dastur doirasida berilayotgan mavzular ta’lim sohasi bo‘yicha pedagog kadrlarni qayta tayyorlash va malakasini oshirish mazmuni, sifati va ularning tayyorgarligiga qo‘yiladigan umumiy malaka talablari va o‘quv rejalari asosida shakllantirilgan bo‘lib, uning mazmuni yangi O‘zbekistonning taraqqiyot strategiyasi va jamiyatning ma’naviy asoslarini yoritib berish, oliy ta’limning normativ-huquqiy asoslari bo‘yicha ta’lim-tarbiya jarayonlarini tashkil etish, pedagogik faoliyatda raqamli kompetensiyalarni rivojlantirish, ilmiy-innovatsion faoliyat darajasini oshirish, pedagogning kasbiy kompetensiyalarini rivojlantirish, ta’lim sifatini ta’minlashda baholash metodikalaridan samarali foydalanish, biologiya fanini o‘qitishda IT (information texnologiyalar) ma’lumot materiallaridan foydalanish, biologik makromolekulalar va

ularning axamiyatini ochib berish, organizmda energiya almashinuv jarayonlarini tahlil etish va baholash bo'yicha tegishli bilim, ko'nikma, malaka va kompetensiyalarni rivojlantirishga yo'naltirilgan.

Qayta tayyorlash va malaka oshirish kursining o'quv dasturi quyidagi modullar mazmunini o'z ichiga qamrab oladi:

### **Kursning maqsadi va vazifalari**

Oliy ta'lim muasasalari pedagog kadrlarini qayta tayyorlash va ularning malakasini oshirish kursining **maqsadi** pedagog kadrlarning innovatsion yondoshuvlar asosida o'quv-tarbiyaviy jarayonlarni yuksak ilmiy-metodik darajada loyihalashtirish, sohadagi ilg'or tajribalar, zamonaviy bilim va malakalarni o'zlashtirish va amaliyotga joriy etishlari uchun zarur bo'ladigan kasbiy bilim, ko'nikma va malakalarini takomillashtirish, shuningdek ularning ijodiy faolligini rivojlantirishdan iborat

Kursning **vazifalariga** quyidagilar kiradi:

“**Matematika**” yo'nalishida pedagog kadrlarning kasbiy bilim, ko'nikma, malakalarini takomillashtirish va rivojlantirish;

- pedagoglarning ijodiy-innovatsion faollik darajasini oshirish;

-pedagog kadrlar tomonidan zamonaviy axborot-kommunikatsiya texnologiyalari, zamonaviy ta'lim va innovatsion texnologiyalar sohasidagi ilg'or xorijiy tajribalarning o'zlashtirilishini ta'minlash;

- o'quv jarayonini tashkil etish va uning sifatini ta'minlash borasidagi ilg'or xorijiy tajribalar, zamonaviy yondashuvlarni o'zlashtirish;

- “**Matematika**” yo'nalishida qayta tayyorlash va malaka oshirish jarayonlarini fan va ishlab chiqarishdagi innovatsiyalar bilan o'zaro integratsiyasini ta'minlash.

### **Kurs yakunida tinglovchilarning bilim, ko'nikma va malakalari hamda kompetensiyalariga qo'yiladigan talablar:**

Qayta tayyorlash va malaka oshirish kursining o'quv modullari bo'yicha tinglovchilar quyidagi yangi bilim, ko'nikma, malaka hamda kompetensiyalarga ega bo'lishlari talab etiladi:

## **Tinglovchi:**

- 2022-2026 yillarga mo'ljallangan Yangi O'zbekistonning taraqqiyot strategiyasining davlat va jamiyat hayotini takomillashtirishdagi o'rni va ahamiyatini;
- O'zbekiston Respublikasi Konstitutsiyasining asosiy prinsiplarini;
- Oliy ta'lim sohasiga oid qonun hujjatlari va ularning mazmunini;
- O'zbekiston Respublikasi Prezidentining oliy ta'lim tizimiga oid farmonlari, qarorlarini;
- O'zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasining oliy ta'lim tizimiga tegishli qarorlarini;
- Oliy ta'lim, fan va innovatsiya vazirligining ta'lim jarayonlarini rejalashtirish va tashkil etishga oid buyruqlarini;
- Davlat ta'lim standartlari, ta'lim yo'nalishlari va magistratura mutaxassisliklarining Malaka talablari, o'quv rejalari, fan dasturlari va ularga qo'yiladigan talablarni, o'quv yuklamalarini rejalashtirish va ularning bajarilishini nazorat qilish usullarini;
- ta'lim jarayonini raqamli transformatsiyasini;
- raqamli ta'lim resurslari va dasturiy mahsulotlarini;
- raqamli ta'lim resursini pedagogik loyihalash texnologiyasini;
- mediasavodxonlik va xavfsizlik asoslarini;
- raqamli ta'lim resurslarini loyihalash uchun asosiy talablarni;
- jahonda oliy ta'lim rivojlanish tendensiyalari: umumiy trendlar va strategik yo'nalishlarni;
- zamonaviy ta'limning global trendlarini;
- inson kapitalining iqtisodiy o'sishning asosiy omili sifatida rivojlanishida ta'limning yoshdagi ahamiyatini;
- oliy ta'limning zamonaviy integratsiyasi: global va mintaqaviy makonda raqobatchilikdagi ustuvorliklari, universitetlarning xalqaro va milliy reytingini;
- xalqaro reyting turlari va ularning indikatorlarini;
- zamonaviy universitet jamiyatning faol, ko'pqirrali va samarali faoliyat

yurituvchi instituti sifatidagi uchta yirik vazifalarini;

- universitetlarning zamonaviy modellarini;
- zamonaviy kelajak universitetlarning beshta asosiy modellarini;
- tadbirkorlik universiteti faoliyatining muhim yoʻnalishlarini;
- pedagogning kasbiy kompetensiyalarini rivojlantirishning nazariy

asoslarini;

- innovatsion taʼlim muhiti sharoitida pedagogning kasbiy

kompetensiyalarini rivojlantirish yoʻllarini;

- kasbiy kompetensiyalarning mazmun va mohiyatini;
- kasbiy kompetensiyalar va ularning oʻziga xos xususiyatlarini;
- pedagogik texnikaning asosiy komponentlarini;
- pedagogik texnikani shakllantirish yoʻllarini;
- kasbiy kompetensiyalarni rivojlantirish jarayonini tashkil etishda

innovatsion, akmeologik, aksiologik, kreativ, reflektiv, texnologik, kompetentli, psixologik, andragogik yondashuvlar va xalqaro tajribalar hamda ularning kasbiy kompetensiyalarni rivojlantirishga taʼsirini;

- kasbiy kompetensiyalarni rivojlantirish jarayonida pedagogik deontologiyaning roli, ahamiyatini;

• kasbiy kompetensiyalarni rivojlantirishda uchraydigan toʻsiqlarni yechishda, toʻgʻri harakatlar qilishda pedagogning kompetentlik va kreativlik darajasi, pedagogik kvalimetriyasini;

- talabalar kasbiy tayyorgarlik sifatini kompleks baholashning nazariyasini;
- taʼlim sifatiga taʼsir etuvchi omillarni;
- kredit-modul tizimida talabalarning bilimi, koʻnikmasi, malakasi va

kompetensiyalarini nazorat qilish va baholashning oʻziga xos xususiyatlari, didaktik funksiyalarini;

- baholash turlari, tamoyillari va mezonlarini;
- kombinatorika va graflar nazariyasini;
- dekart koʻpaytma, oʻrinlashtirish, oʻrin almashtirishlarni;



- paskal uchburchagi, Nyuton binomini;
- takroriy kombinatsiyalarni;
- bo‘laklash kombinatorikasini;
- braflarning berilish usullari: geometrik ifodalanishi, ko‘phad yordamida berilishi, matritsalar yordamida berilishini;
- Eyler, Gamilton graflarini;
- grafning metrik xarakteristikalarini;
- planar graflarni;
- geometriya predmeti va usullarini;
- sirt ichki va tashqi geometriyani;
- soordinatalar sistemasi va uni geometriyadagi o‘rmini;
- geometriyaning zamonaviy yo‘nalishlari va muammolarini
- tekislikdagi geometriyaga doir masalalarni;
- ko‘pyoqliklar va ularning turlarini;
- ko‘pyoqlik yoyilmasini;
- vektorlar, vektor funksiyalarni *bilishi* kerak.

### **Tinglovchi:**

- 2022- 2026 yillarga mo‘ljallangan Yangi O‘zbekistonning taraqqiyot strategiyasining asosiy yo‘nalish va maqsadlarini tahlil etish va baholash;
- O‘zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasining Oliy ta’lim tizimiga tegishli qarorlari asosida ta’lim-tarbiya jarayonlarini tashkil etish;
- xorijiy tajribalar asosida malaka talablari, o‘quv rejalari va fan dasturlarini takomillashtirish;
- multimedia va infografika asosida interaktiv didaktik mayeriallar yaratish va bulut xizmatlarida saqlash;
- masofiviy ta’lim platformalari uchun video kontent yaratish;
- Internetda mualliflik huquqlarini himoya qilish usullaridan foydalanish;
- raqamli ta’lim resurslari sifatini baholash;

- OTMlarni reyting bo'yicha ranjirlash;
- jahon universitetlari reytingini tahlil etish va baholash;
- universitetlarni mustaqil baholash yondashuvlarini aniqlashtirish;
- tadbirkorlik universitetiga o'tish uchun zarur bo'ladigan o'zgarishlarni aniqlash;
- Universitet 1.0 dan Universitet 3.0 modeliga o'tish borasidagi muammolarni aniqlash;
- zamonaviy tadbirkorlik universiteti modeli tamoyillarini o'zlashtirish;
- pedagoglarning kreativ potentsiali tushunchasi va mohiyatini ochib berish;
- pedagoglar kasbiy kompetensiyalarini rivojlantirishning innovatsion texnologiyalarini qo'llash;
- o'qituvchi faoliyatida pedagogik texnikaning axamiyatini yoritib berish;
- tinglovchilar diqqatini o'ziga tortish usullaridan foydalanish;
- kasbiy kompetensiyalarni shakllantirish va rivojlantirish yo'llarini tahlil etish;
- kasbiy kompetensiyalarni rivojlantirish jarayonida uchraydigan to'siqlar, qiyinchiliklar va ularni bartaraf etish;
- talabalarning o'quv auditoriyadagi faoliyatini baholash;
- talabalarning kurs ishi, bitiruv malakaviy ishi, o'quv-malakaviy amaliyot (mehnat faoliyati)ni nazorat qilish;
- baholashning miqdor va sifat tahlilini amalga oshirish;
- hosil qiluvchi funksiyalar va ularning tadbiq etish;
- graflarning berilish usullarini amaliyotga tadbiq etish;
- koordinatalar sistemasi va uni geometriyadagi o'rnini yoritib berish;
- geometriyaning zamonaviy yo'nalishlari va muammolarini yechimini topish *ko'nikmalariga* ega bo'lishi lozim.

### **Tinglovchi:**

- “Yangi O‘zbekiston – ma’rifatli jamiyat” konsepsiyasining mazmun-mohiyatini yoritib berish;

- Oliy ta’lim, fan va innovatsiya vazirligining ta’lim-tarbiya jarayonini tashkil etishga oid buyruqlari, Davlat ta’lim standartlari, ta’lim yo‘nalishlarining va magistratura mutaxassisliklarining malaka talablari, o‘quv rejalar va fan dasturlarini takomillashtirish;

- o‘quv yuklamalarni rejalashtirish va ularning bajarilishini nazorat qilish;
- meyoriy uslubiy hujjatlarni ishlab chiqish amaliyotini takomillashtirish

mexanizmlarini tahlil etish;

- an’anaviy va raqamli ta’limda pedagogik dizaynning xususiyatlarini ochib berish;

- onlayn mashg‘ulotlarni tashkil etishda raqamli texnologiyalardan foydalanish;

- mediasavodxonlik va xavfsizlik asoslarini o‘zlashtirish;

- pedagogik faoliyatda raqamli kompetensiyalarni rivojlantirish;

- raqamli ta’lim resurslaridan foydalanish;

- xalqaro reyting turlari va ularning indikatorlarining ahamiyatini ochib berish;

- OTM reytingiga ta’sir etuvchi omillarni tahlil etish;

- universitetlarning zamonaviy modellarini o‘rganish;

- OTM bitiruvchilari va xodimlari tomonidan texnologiyalar transferiga litsenziyalar oluvchi startaplarni shakllantirish va yaratish;

- professor-o‘qituvchilarning tadqiqotchi sifatidagi nashr faolligini rivojlantirish istiqbollari tahlil etish;

- innovatsion ta’lim muhiti sharoitida pedagogning kasbiy kompetensiyalarini rivojlantirish;

- pedagog kasbiy kompetensiyalarini rivojlantirish hususiyatlarini tahlil etish va baholash;

- ijtimoiy va kasbiy tajribaga asoslangan intellektual mashqlarni ishlab chiqish;

- o‘quv jarayoni ishtirokchilarini bir-birlari bilan tanishtirish, samimiy do‘stona munosabat va ijodiy muhitni yuzaga keltirish, tinglovchilarning ijodiy imkoniyati va

shaxsiy sifatlarini ochish, tinglovchilarning hamkorlikda ishlashlari uchun qulay sharoitni vujudga keltirish;

- tinglovchilarning kasbiy kompetensiyalarini o‘rganish, tanishish;
- kasbiy kompetensiyalarni rivojlantirish jarayonida pedagogik deontologiyaning roli, ahamiyatini ochib berish;
- ta’lim sifatiga ta’sir etuvchi omillar (moddiy-texnik baza, professor-o‘qituvchilarning salohiyati va o‘quv-metodik ta’minot)ni tahlil etish va baholash;
- talabalarning o‘quv auditoriyadan tashqari faoliyatini baholash;
- talabalarning o‘quv auditoriyadan tashqari faoliyatini baholashda o‘quv topshiriqlari (reproduktiv, produktiv, qisman-izlanishli, kreativ (ijodiy) murakkablik)ni ishlab chiqish metodikasidan samarali foydalanish;
- Eyler, Gamilton graflarini qo‘llash;
- grafning metrik xarakteristikalarini o‘zlashtirish;
- elementar geometriyaning asosiy elementlari va unga doir masalalarni yechish;
- ko‘pyoqliklar bilan sirtga yaqinlashishga doir masalalarni yechish;
- sirtga metrikaga doir masalalarni tahlil etish va yechimini topish *malakalariga* ega bo‘lishi zarur.

### **Tinglovchi:**

- Yangi O‘zbekistonning taraqqiyot strategiyasi va jamiyatning ma’naviy asoslarini mazmun-mohiyatini yoritib berish;
- O‘zbekiston Respublikasi Oliy ta’lim, fan va innovatsiya vazirligining buyruqlari asosida ta’lim-tarbiya jarayonlarini tashkil etish;
- Davlat ta’lim standartlari, malaka talablari, o‘quv rejalar va fan dasturlar asosida fanning ishchi dasturini ishlab chiqish amal qilish va ularni ijrosini ta’minlash;
- raqamli ta’lim resurslari va dasturiy mahsulotlarini o‘quv jarayoniga faol tatbiq etilishini tashkil etish;
- raqamli ta’lim resursini pedagogik loyihalash texnologiyasi asoslarini

o'zlashtirish;

- raqamli ta'lim muhitida pedagogik dizaynga oid innovatsiyalarni amaliyotga tatbiq etish;

- universitetlarning xalqaro va milliy reytingini baholash;

- OTMlarda talim, ilmiy va innovatsion faoliyatni rivojlantirish, ilmiy tadqiqot natijalarni tijoratlashtirish yo'llarini tahlil etish va amaliyotga tatbiq etish;

- «Amaliyotchi professorlar» (PoP, Professor of Practice) modelini qo'llash;

- professor-o'qituvchilarning tadqiqotchi sifatidagi nashr faolligini rivojlantirish istiqbollarini yoritib berish;

- pedagogning kasbiy kompetensiyalarini rivojlantirishning nazariy asoslarini amaliyotga tatbiq etish;

- pedagogning kasbiy kompetensiyalarini rivojlantirishning pedagogik-psixologik trayektoriyalarini ishlab chiqish;

- kasbiy kompetensiyalarni rivojlantirish jarayonida uchraydigan to'siqlarning xilma-xilligi va o'ziga xos xususiyatlari, sabablarini amaliy tomonlarini yoritish, ularni yechish bosqichlarini guruh bilan birgalikda aniqlash;

- talabalar kasbiy tayyorgarlik sifatini kompleks baholash;

- talabalar kasbiy tayyorgarlik sifatini kompleks baholashning elektron monitoring tizimini yuritish;

- talabalarning ta'limiy (o'quv predmetlari), tarbiyaviy (ma'naviy-ma'rifiy tadbirlar) va rivojlantiruvchi (ilmiy-tadqiqot ishi, start-up loyihalar) maqsadlarini baholash;

- kombinatorika va graflar nazariyasini tahlil etish va baholash;

- tarmoqdagi oqimlarini bilish va ulardan foydalana olish;

- ko'rgazmali geometriya asoslarini o'zlashtirish;

- masofa, yuza va hajm tushunchalari bilan bog'liq masalalarni tahlil etish;

- noevklid geometriyasiga doir masalalarni yechimini topish

***kompetensiyalariga*** ega bo'lishi lozim.

### **Modulni tashkil etish va o‘tkazish bo‘yicha tavsiyalar**

- Modulni o‘qitish ma’ruza va amaliy mashg‘ulotlar shaklida olib boriladi.

- Modulni o‘qitish jarayonida ta’limning zamonaviy metodlari, pedagogik texnologiyalar va axborot-kommunikatsiya texnologiyalari qo‘llanilishi nazarda tutilgan:

- ma’ruza darslarida zamonaviy kompyuter texnologiyalari yordamida prezentatsion va elektron-didaktik texnologiyalardan;

- o‘tkaziladigan amaliy mashg‘ulotlarda texnik vositalardan, ekspress-so‘rovlar, test so‘rovlari, aqliy hujum, guruhli fikrlash, kichik guruhlar bilan ishlash, kollokvium o‘tkazish, va boshqa interaktiv ta’lim usullarini qo‘llash nazarda tutiladi.

### **Modulning o‘quv rejadagi boshqa modullar bilan bog‘liqligi va uzviyligi**

“Ko‘rgazmali geometriya” moduli mazmuni o‘quv rejadagi “Yangi O‘zbekistonning taraqqiyot strategiyasi va jamiyatning ma’naviy asoslari”, “Oliy ta’limning normativ-huquqiy asoslari”, “Pedagogik faoliyatda raqamli kompetensiyalar” “Ilmiy va innovatsion faoliyatni rivojlantirish”, “Pedagogning kasbiy kompetensiyalarini rivojlantirish” “Ta’lim sifatini ta’minlashda baholash metodikalari”, “Kombinatorika va graflar nazariyasi” mutaxassislik o‘quv modullari bilan uzviy bog‘langan holda pedagoglarning ta’lim jarayonida kasbiy pedagogik tayyorgarlik darajasini oshirishga xizmat qiladi.

### **Modulning oliy ta’limdagi o‘rni**

Modulni o‘zlashtirish orqali tinglovchilar ta’lim jarayonida genom tadqiq etishga, katta ma’lumotlar va nukleotid va oqsil ketma-ketliklar ma’lumotlar bazasi tizimlaridan foydalanish va amalda qo‘llashga doir kasbiy kompetentlikka ega bo‘ladilar.

### Modul bo'yicha soatlar taqsimoti

№	Modul mavzulari	Tinglovchining o'quv yuklamasi, soat			
		Hammasi	Auditoriya o'quv yuklamasi		
			Jami	jumladan	
				Nazariy mashg'ulot	Amaliy mashg'ulot
1.	<b>Elementar geometriyaning asosiy elementlari va unga doir masalalar</b>	4	4	2	2
2	<b>Vektor funksiya tushunchasi.</b>	4	4	2	2
3	<b>Geometriyaning zamonaviy yo'nalishlari va muammolari</b>	4	4	2	2
4	<b>Sirt tushunchasi. Sirtning ichki va tashqi geometriyasi</b>	4	4	2	2
5	<b>Yuza va hajm tushunchasi bilan bog'liq masalalar</b>	2	2		2
	<b>Jami</b>	<b>18</b>	<b>18</b>	<b>8</b>	<b>10</b>

## NAZARIY MASHG‘ULOTLAR MAZMUNI

- 1 – **Mavzu.** Elementar geometriyaning asosiy elementlari va unga doir masalalar
- 2 – **Mavzu.** Vektor funksiya tushunchasi.
- 3 – **Mavzu.** Geometriyaning zamonaviy yo‘nalishlari va muammolari.
- 4 – **Mavzu.** Sirt tushunchasi. Sirtning ichki va tashqi geometriyasi.

## AMALIY MASHG‘ULOTLAR MAZMUNI

- 1 – **Mavzu.** Elementar geometriyaning asosiy elementlari va unga doir masalalar
- 2 – **Mavzu.** Vektor funksiya tushunchasi.
- 3 – **Mavzu.** Geometriyaning zamonaviy yo‘nalishlari va muammolari.
- 4 – **Mavzu.** Sirt tushunchasi. Sirtning ichki va tashqi geometriyasi.
- 5 – **Mavzu.** Yuza va hajm tushunchasi bilan bog‘liq masalalar

## ADABIYOTLAR RO‘YXATI

- 1.
2. Avilova L.V., Bolotyuk V.A., Bolotyuk L.A. Analiticheskaya geometriya i lineynaya algebra// 2013. Izdanie: 1-ye izd. 421 s.
3. Aleksandrov A.D., Nesvetaev N.Yu. Geometriya, M.: Nauka, 1990. – 672 s.
4. Bobenko A.I. (Ed.) Advances in Discrete Differential Geometry// Springer, 2016. — 439 p. — (Mathematics). — ISBN: 3662504464
5. I. M. Rikhsiboev and N. S. Mohamed, Engineering Mathematics 2, Malaysia, 2019.
6. Manfredo P. Do Carmo. Differential geometry of Curves and surface // Dover publications, Inc. Mineola, New York, 2016. – 529 rr.
7. Matematik analiz./ Azlarov T., Mansurov H.: Universitet va ped. institutlar talabalari uchun darslik: 2 qisml. 1-q.— Qayta ishlangan va to‘ldirilgan 2-nashri.— T.: Uqituvchi, 1994.—416 b.
8. Sh.Murodov, L.Xakimov, A.Xolmurzayev, M.Jumayev, A.To‘xtayev. «Chizma geometriya». Oliy texnika o‘quv yurtlari uchun darslik. Toshkent, 2005.
9. [www.edu.uz](http://www.edu.uz).
10. [www.bimm.uz](http://www.bimm.uz)
11. [www.arxiv.org](http://www.arxiv.org)
12. [www.ams.mathscinet.org](http://www.ams.mathscinet.org)
13. <http://www.princeton.edu/main/>
14. <https://www.stanford.edu>
15. <http://mathins.uz>
16. <http://ziyonet.uz>
17. <http://dmvn.mexmat.net/>



## NAZARIY MASHG‘ULOT MATERIALLARI

**1 – Mavzu.** Elementar geometriyaning asosiy elementlari va unga doir masalalar

### Reja:

1. “Negizlar” asari haqida ma’lumot.
2. “Negizlar” asarida keltirilgan ta’riflar.
3. Evklidning “Negizlar” asarida keltirilgan postulat va aksiomalar.
4. Elementar geometriya aksiomalari.

**Tayanch iboralar:** ta’rif, postulat, aksioma, nuqta, to’g’ri chiziq, sirt, to’g’ri burchak, chegara.

Yevklidning hayoti haqidagi bizgacha juda kam ma’lumot yetib kelgan. U bizning eradan oldingi 300 yillarda yashagan. Uning ijodi

ellinistik madaniyat va fanning Aleksandriya davriga to’g’ri keladi. Aleksandr Makedonskiy (Iskandar Zulqamayn) vafotidan so’ng, uning g’oyat katta imperiyasi bo’linib ketgandan keyin iqtisodiy, siyosiy va madaniy mohiyatga ko’ra Misimning yangi poytaxti

Aleksandriya shahri birinchi o’ringa chiqib oldi. Yevklid mana shu davrdagi eng ko’zga ko’ringan matematik hisoblanadi. U shoh Ptolemey davrida Aleksandriyada matematika o’qitadi va Ptolemey asos solgan muzeyda matematika bo’limini tashkil qiladi. Yevklid haqida ba’zi bir afsonalar ham saqlanib qolgan. Ulardan biri quyidagicha:

kunlardan bir kun shoh Ptolemey Yevklidga «Geometriyani o’rganishning «Negizlar» da bayon etilganidan qisqaroq yo’l yo’qmi?» - deb so’ragan. Yevklid esa: «Geometriyada maxsus shohona yo’l yo’q» - deya javob bergan. Yevklidning «Negizlar» dan tashqari «Ma’lumotlar», «Figuralami bo’laklarga ajratish», «Optika» va bitta astronomik risolasi bizgacha yetib kelgan. Uning anchagina

asarlari bizgacha yetib kelmagan. Shunday asarlaridan biri «Konus kesimlari» deb atalgan.

«Negizlar» 13 ta kitobdan iborat. Ba'zan bu kitoblarga boshqa mualliflar yozgan, ammo mazmuniga ko'ra Yevklidning oxirgi kitoblariga o'xshab ketadigan 14-chi va 15-chi kitoblar ham qo'shiladi.

«Negizlar» ning I-VI kitoblari planimetriyaga bag'ishlangan, VII-IX arifimetika, X umumiy o'lchovsiz miqdorlar, XI-XIII stereometriyaga bag'ishlangan.

BIRINCHI KITOB kesmalar, uchburchakning tomonlari haqida, uchburchaklarni yasash, perpendikular va parallel to'g'ri chiziqlar, parallelogrammlar, uchburchaklar va parallelogrammlarning yuzlari, Pifagor teoremasi haqida.

IKKINCHI KITOB ning mazmuni butunlay birinchi kitobning natijalariga asoslanadi va geometrik algebra masalalariga bag'ishlangan.

UCHINCHI KITOB aylana va doira haqida, aylanaga o'tkazilgan urinma va kesuvchi, ular hosil qiladigan burchaklar haqida.

TO'RTINCHI KITOB ichki va tashqi chizilgan ko'pburchaklar haqida, muntazam to'rtburchak, beshburchak, oltiburchak va o'n besh burchak yasash haqida.

BESHINCHI KITOB nisbatlar nazariyasiga bag'ishlangan. Bu nazariya geometriyaga umumiy o'lchovsiz kesmalarni yoqlash uchun kiritilgan.

OLTINCHI KITOB nisbatlar nazariyasining o'xshashliklariga tatbiqi. Bu kitobda ana shu tatbiq geometrik algebraning sohasini biroz kengaytiradi.

«Negizlar» ning keyingi uch kitobi -VII, VIII va IX arifmetikaga bag'ishlangan.

YETTINCHI KITOB to'rtta guruhga bo'lingan: birinchi guruh ikki va uchta sonning eng katta umumiy bo'luvchisini topish, Yevklid algoritmi deb ataluvchi qoida mana shu guruhda. Ikkinchi guruh proporsiyalar nazariyasi va proporsiyaning ba'zi teoremlari haqida.

Masalan, 31-jumlasi quyidagicha: «Har qanday murakkab son biror boshlang'ich son bilan o'lchanadi». Bu jumlaning Yevklid mana bunday isbotlaydi: agar  $A$  murakkab son bo'lsa, u holda  $A$  ning bo'luvchisi bo'lgan  $V$  son mavjud. Agar  $V$  tub son bo'lsa, teorema isbot bo'ladi. Agar  $V$  ham murakkab son bo'lsa, u holda  $V$  ning bo'luvchisi bo'lgan  $S$  son mavjud. Agar  $S$  tub son bo'lsa, teorema isbot bo'ladi. Agar  $S$  ham murakkab bolsa, yuqoridagi jarayonni davom ettiramiz va  $A, V, S, \dots$ , sonlar ketma-ketligini hosil qilamiz, ular  $A > V > S \dots$  tartibda joylashadi. Ammo, ma'lum qadamdan so'ng, biz tub son bo'lgan  $R$  bo'luvchiga kelamiz va teorema isbot bo'ladi.

SAKKIZINCHI KITOB da 27 jumla bo'lib, u «uzluksiz proporsiyalar» deb ataladi, boshqacha aytganda, geometrik progressiyalarga bag'ishlangan.

O'N BIRINCHI KITOB 39 ta jumladan iborat. Odatdagi stereometriya darsliklari kabi to'g'ri chiziqlar va tekisliklarning perpendikularligi, parallelligi, tekisliklar va ular hosil qiladigan burchaklar bilan boshlanadi. So'ngra parallelepiped va prizma o'rganiladi.

O'N IKKINCHI KITOB da 18 ta jumla bor. Unda piramida, konus, silindr kabi jismlar hajmlarining nisbatini o'rganishga qamrash metodi tatbiq qilingan. Qizig'i shundaki, Yevklid hech yerda doira yuzini yoki shar hajmini hisoblashni keltirmaydi. Bundan Yevklid ulami hisoblashni bilmagan degan xulosa chiqmaydi. Bu ishlar geometriyaga emas, balki amaliy geodeziyaga taalluqli bo'lgan.

O'N UCHINCHI KITOB da 18 ta jumla bor. Bunda biroz IX kitob materiallari - muntazam ko'pburchaklarni doriaga ichki chizishga qaytadi, chunki bu materiallar unga muntazam ko'pyoqlilarni tushuntirish uchun zarur bo'ladi. Yevklid beshta muntazam ko'pyoqlilarni sferaga ichki chizilgan kabi qaraydi. Xulosa sifatida shularni aytish kerakki, «Negizlar» ning mazmuni bu asar qadimgi matematika asoslari sistemasidan iborat, u elementar geometriya, ratsional sonlar nazariyasi asoslari, miqdorlar nisbatan umumiy nazariyasi asoslari va unga asoslanuvchi

kvadrat va bikvadrat irratsionalliklar, geometrik algebra va qamrash metodlaridan iborat.

Evklidning har bir kitobi ta`rif va tushunchalardan boshlanadi. Birinchi kitobida 23 ta ta`rif keltirilgan. Bu ta`riflardan 8 tasini keltiramiz.

*1—ta`rif.* Nuqta—bo`laklarga ega emas.

*2—ta`rif.* Chiziq—ensiz uzunlik.

*3—ta`rif.* Chiziqning chegarasi — nuqtalardan iborat. *4—*

*ta`rif.* To`g`ri chiziq — o`zining barcha nuqtalariga nisbatan bir xil joylashgan chiziq.

*5—ta`rif.* Sirt— faqat uzunlikka va eng ega.

*6—ta`rif.* Sirtning chegaralari chiziqlardan iborat.

*7—ta`rif.* Tekislik — unda yotadigan barcha to`g`ri chiziqlarga nisbatan bir xil joylashgan sirt.

*8—ta`rif.* Yassi burchak —bir tekislikdagi ikkita kesishuvchi chiziqning bir —biridan og`ishi.

Yevklid ta`riflaridagi kamchiliklarni ko`rishimiz uchun, avvalo, ta`riflarga qo`yiladigan talablarni bilishimiz kerak.

Birinchi, geometrik tushunchalar ikki guruhga - asosiy va hosilaviy tushunchalarga bo`linishi lozim.

Ikkinchi, ta`rif ta`riflanadigan tushunchaning ma`nosini ochib berish bilan ta`riflanadigan tushunchaning boshqa hamma xossalarini mantiqiy chiqarish uchun tayanch bo`lishi kerak. Masalan, aylana diametrining ta`rifi diametr aylanani teng ikkiga bo`lishni isbotlash yoki diametriga tiralgan burchak to`g`ri burchakligini isbotlash imkonini beradi.

Uchinchidan, har bir ta'rif yangi tushunchani tanish tushunchaga keltirish bilan ma'lum mantiqiy prinsip, jins va turni ko'rsatish orqali tuziladi. Masalan, diametrning ta'rifini uni umumiyroq tushuncha vatarga keltiradi.

To'rtinchidan, ta'rif ortiqcha belgilarga ega bo'lmasligi lozim. Masalan, burchak bissektrisasi nuqtalari burchak tomonlaridan barobar uzoqlikda yotuvchi, burchakni teng ikkiga bo'luvchi to'g'ri chiziq deb ta'riflash ortiqcha belgilarga ega.

Beshinchidan, ayni bir tushunchaga ikki xil ta'rif berilsa, ularning teng kuchli ekanini isbotlash lozim.

Ana endi Yevklidning kamchiliklariga to'xtaylik: u asosiy tushunchalar ro'yxatini bermagan. Biz ta'riflanmaydigan tushunchalar - nuqta, to'g'ri chiziq, tekislik va sirtga ta'rif bergan.

Yevklid hamma geometrik tushunchalarni ta'riflashga uringan. Buning esa iloji yo'q, albatta. Masalan, u nuqta, to'g'ri chiziq, sirtni «qism», «uzluksiz», «kenglik» tushunchalari orqali ta'riflaydi. Boshqa joyda esa, chiziq va nuqtani «chegara» tushunchasi orqali ta'riflaydi. Ba'zi ta'riflari tushunarsiz. Masalan, to'g'ri chiziqning ta'rifini oling. Yevklidda hosilaviy tushunchalarning ta'riflari yaxshi, ammo ular ham ortiqchalikka ega. Masalan, «Doiraning diametri markaz orqali o'tuvchi ikki tomonidan doira aylanasi bilan chegaralangan to'g'ri chiziqdir, u doirani teng ikkiga bo'ladi». Ta'rifning ikkinchi qismi ortiqcha, uni teorema sifatida isbotlash mumkin.

Endi Yevklidning postulatlarini va aksiomalarini qaraylik.

## POSTULATLAR.

1. Har bir nuqtadan har qanday ikkinchi nuqtagacha to'g'ri chiziq o'tkazish mumkinligi talab qilinadi.
2. Va har bir chegaralangan to'g'ri chiziqni cheksiz davom ettirish mumkinligi talab qilinadi.
3. Va har qanday nuqtani markaz qilib, ixtiyoriy radiusli aylana chizish mumkinligi talab qilinadi.
4. Va hamma to'g'ri burchaklar o'zaro teng bo'lishi talab qilinadi.
5. Ikki to'g'ri chiziqni kesuvchi to'g'ri chiziq ular bilan ichki bir tomonli burchaklar hosil qiladi, bu ikki to'g'ri chiziq ichki bir tomonli burchaklar yig'indisi ikki to'g'ri burchakdan kichik bo'lgan tomonda kesishadi.

Aksiomalar bilan postulatalarning farqi bormi? Ba'zi matematiklarning fikriga qaraganda postulatlarda geometrik yasashlar qatnashadi. Lekin hozirgi zamon matematikasi nuqtai-nazaridan qaraganda aksiomalar bilan postulatlarning farqi yo'q, ularni aksiomalar deb atasa ham bo'ladi. Yevklid aksiomalar sistemasining eng muhim kamchiligi ularning to'liq emasligidir. Shu sababli ham u birinchi teoremlarini isbotlashdayoq

«O'z-o'zidan ravshan» tasdiqlardan foydalaniladi. Ular esa aksiomalar ro'yxatida yo'q. Bu esa matematikani tuzishdagi qat'iylik prinsipiga xilof. Bundan tashqari, Yevklidda aksiomalar sistemasi to'liq emas. Unda harakat aksiomasi, uzluksizlik va tartib aksiomalari yetishmaydi. Shu aytilganlardan, Yevklid birinchi bo'lib matematikani aksiomatik tuzishga uringanini va ma'lum muvafaqqiyatlarga erishganini ko'ramiz.

## Aksiomalar

- I. Bitta miqdorga teng miqdorlar o`zaro teng.
- II. Teng miqdorlarga teng miqdorlar qo`shilsa, teng miqdorlar hosil bo`ladi.
- III. Teng miqdordan teng miqdorni ayirsak, teng miqdorlar hosil bo`ladi.
- IV. Teng bo`lmagan miqdorga teng miqdorlarni qo`shsak, teng bo`lmagan miqdorlar hosil bo`ladi.
- V. Teng miqdorlarni ikkilantirsak, teng miqdorlar hosil bo`ladi.
- VI. Teng miqdorlarning yarimlari teng miqdorlar bo`ladi.
- VII. Ustma — ust tushuvchi miqdorlar teng.
- VIII. Butun miqdor qismdan katta.
- IX. Ikki to`g`ri chiziq fazoni chegaralay olmaydi.

Negizlar asarining ba`zi nashrlarida *IV*, *V* postulatlar aksioma deb olinadi. Shuning uchun *V* postulat *XI* aksioma deb ham yuritiladi. Hozircha Evklid aksioma va postulatni qaysi prinsipga asosan olganligi aniqmasligicha qolmoqda.

Evklid aksiomalardan so`ng teoremlarni mantiqiy bog`liqlik tartibini qat`iy etib joylashtirgan. Ya`ni, keltirilgan har bir teoremani oldin keltirilgan tasdiq, aksioma va postulatlariga tayangan holda isbotlash mumkin.

Barcha keyingi teoremlarni qat`iy mantiqiy isbotlash uchun yetarli bo`ladigan ta`rif va aksiomalarni keltirish geometriyani asoslash deyiladi.

Geometriyani asoslash masalasi Evklid tomonidan to`g`ri qo`yildi va o`zining «Negizlar» asarida o`sha davrga nisbatan to`liq yechildi.

Evklid «Negizlar» asarining zamonaviy matematika nuqtai nazaridan qaraganda, kamchiliklari mavjud. Baʼzi bir taʼriflari taʼriflanishi zarur boʻlgan tushunchalarga asoslanadi.

Masalan, «chegara», «uzunlik» va hokazo tushunchalar. I—VIII taʼriflardan birortasi teoremlar isbotlashda foydalanilmaydi. Bu taʼriflar kitobda keltirilgan boshqa materiallarga bogʻliq emas, yaʼni ularni tushirib qoldirsa ham kitobdagi keyingi mulohazalarga taʼsir qilmaydi. Bu taʼriflar faqat geometrik obʼyektlarni tasvirlash uchun kerak boʻlgan.

Postulat va aksiomalarga kelsak, umuman olganda ular muhim jumlar hisoblanadi. Juda koʻp jumalarni isbotlashda aksioma va postulatlardan foydalanishga toʻgʻri keladi. Masalan, toʻgʻri chiziq oʻzining ikkita nuqtasi bilan aniqlanadi, istalgan radiusli aylana mavjud va hokazo. Lekin Evklidning isbotsiz qabul qilgan jumalari qatʼiy mantiqqa asoslangan geometriyani qurish uchun juda kamlik qiladi. Evklid koʻproq chizmalarga asoslanib fikr yuritadi.

Elementar geometriya aksiomalari besh guruhga boʻlib oʻrganiladi.

**I guruh** sakkizta bogʻliqlik aksiomalarini oʻz ichiga oladi.

**II guruh** toʻrtta tartib aksiomalaridan iborat.

**III guruh** beshta kongruentlik aksiomalaridan tuzilgan.

**IV guruh** bitta uzluksizlik aksiomasidan tashkil topgan.

**V guruh** bitta parallellik aksiomasini oʻz ichiga oladi.

Bu paragrafda I guruh bogʻliqlik aksiomalari va ulardan kelib chiqadigan natijalar haqida toʻxtalamiz.

Bogʻliqlik aksiomalarida nuqta, toʻgʻri chiziq va tekisliklarni oʻzaro joylashishi xossalari haqida soʻz yuritiladi va “tegishli” soʻzi bilan ifodalanadi.

Bunda “ $A$  nuqta  $a$  toʻgʻri chiziqqa tegishli”, “ $A$  nuqta  $a$  toʻgʻri chiziqda yotadi” va “ $a$  toʻgʻri chiziq  $A$  nuqtadan oʻtadi” kabi jumlar teng kuchli. “ $A$  nuqta



$\alpha$  tekislikka tegishli”, . “  $A$  nuqta  $\alpha$  tekislikda yotadi” va “ $\alpha$  tekislik  $A$  nuqtadan o’tadi” kabi jumlar teng kuchli deb hisoblanadi. Agar  $C$  nuqta  $a$  va  $b$  to’g’ri chiziqchilarga tegishli bo’lsa,  $a$  va  $b$  to’g’ri chiziqchilar  $C$  **nuqtada kesishadi deyiladi**.  $a$  to’g’ri chiziqning barcha nuqtalari  $\alpha$  tekislikka tegishli bo’lsa,  $a$  to’g’ri chiziq  $\alpha$  tekislikda yotadi yoki  $\alpha$  tekislikka  $a$  to’g’ri chiziq orqali o’tadi deb ataladi.

**Ta’rif.**  $\alpha$  va  $\beta$  tekisliklarning har biri  $a$  to’g’ri chiziq orqali o’tsa,  $\alpha$  va  $\beta$  tekisliklar  $a$  to’g’ri chiziq bo’yicha kesishadi deyiladi.

**I<sub>1</sub> aksioma.**  $A$  va  $B$  nuqtalar qanday bo’lmasin, bu nuqtalarning har biridan o’tuvchi  $c$  to’g’ri chiziq mavjud.

**I<sub>2</sub> aksioma.** Turli  $A$  va  $B$  nuqtalar qanday bo’lmasin, bu nuqtalardan o’tuvchi bittadan ortiq bo’lmagan to’g’ri chiziq mavjud.

Bu ikki aksiomani quyidaicha ifodalash mumkin: Istalgan ikkita turli nuqtalar bu nuqtalardan o’tuvchi bitta va faqat bitta to’g’ri chiziqni aniqlaydi.

**I<sub>3</sub> aksioma.** Har bir to’g’ri chiziqda kamida ikkita nuqta yotadi. Bir to’g’ri chiziqda yotmaydigan kamida uchta nuqta mavjud.

**I<sub>4</sub> aksioma.**  $A$ ,  $B$ ,  $C$  nuqtalar qanday bo’lmasin, bu nuqtalarning har biridan o’tuvchi  $\pi$  tekislik mavjud. Har bir tekislikda kamida bitta nuqta yotadi.

**I<sub>5</sub> aksioma.** Bir to’g’ri chiziqda yotmaydigan  $A$ ,  $B$ ,  $C$  nuqtalar qanday bo’lmasin, bu nuqtalarning har biridan o’tuvchi bittadan ortiq bo’lmagan tekislik mavjud.

**I<sub>6</sub> aksioma.**  $d$  to’g’ri chiziqning  $A$  va  $B$  nuqtalari (ya’ni,  $d$  to’g’ri chiziqqa tegishli)  $\pi$  tekislikda yotsa,  $d$  to’g’ri chiziq  $\pi$  tekislikda yotadi.

**I<sub>7</sub> aksioma.**  $\alpha$  va  $\beta$  tekisliklar bitta umumiy  $C$  nuqtaga ega bo’lsa (tekislikning har birida yotuvchi nuqta), ularning yana kamida bitta umumiy  $D$  nuqtasi mavjud.

**I<sub>8</sub> aksioma.** Bir tekislikda yotmaydigan kamida to’rtta nuqta mavjud.

Bog'liqlik aksiomalaridan bir necha natijalar kelib chiqadi. Bu natijalardan ba'zilarini keltiramiz.

#### NAZORAT SAVOLLARI

1. Evklidning geometriya rivojiga qo'shgan hissasi?
2. Evklidning "Negizlar" asarida keltirilgan ta'riflardan bir nechtasini aytib bering?
3. Evklidning V postulatasini ayting?
4. Bog'liqlik aksiomalarini ayting.
5. Tartib va kongruentlik aksiomalari.
6. Uzluksizlik va parallelizm aksiomalari.
7. To'g'ri chiziqning berilishi haqidagi teoremani ayting.

## ADABIYOTLAR RO‘YXATI

1. Avilova L.V., Bolotyuk V.A., Bolotyuk L.A. Analiticheskaya geometriya i lineynaya algebra// 2013. Izdanie: 1-ye izd. 421 s.
2. Aleksandrov A.D., Nesvetaev N.Yu. Geometriya, M.: Nauka, 1990. – 672 s.
3. Bobenko A.I. (Ed.) Advances in Discrete Differential Geometry// Springer, 2016. — 439 p. — (Mathematics). — ISBN: 3662504464
4. I. M. Rikhsiboev and N. S. Mohamed, Engineering Mathematics 2, Malaysia, 2019.
5. Manfredo P. Do Carmo. Differential geometry of Curves and surface // Dover publications, Inc. Mineola, New York, 2016. – 529 rr.
6. Matematik analiz./ Azlarov T., Mansurov H.: Universitet va ped. institutlar talabalari uchun darslik: 2 qismli. 1-q.— Qayta ishlangan va to‘ldirilgan 2-nashri.— T.: Uqituvchi, 1994.—416 b.
7. Dodajonov N., Yunusmetov R., Abdullayev T. Geometriya, II qism.
8. Narmanov A. Differensial geometriya.
9. Sobirov M.A., Yusupov A.Yo. Differensial geometriya kursi.
10. Ergashev B. Evklid fazosida chiziqlar.
11. Ergashev B. Evklid fazosida sirtlar.
12. Belko I.V. i dr. Sbornik zadach po differensialnoy geometrii.
13. Sh.Murodov, L.Xakimov, A.Xolmurzayev, M.Jumayev, A.To‘xtayev. «Chizma geometriya». Oliy texnika o‘quv yurtlari uchun darslik. Toshkent, 2005.
14. A.Ya. Narmanov va A.S.Sharipov “Geometriya asoslari” Toshkent 2010

### Internet saytlar

1. [www.edu.uz](http://www.edu.uz).
2. [www.bimm.uz](http://www.bimm.uz)
3. [www.arxiv.org](http://www.arxiv.org)
4. [www.ams.mathscinet.org](http://www.ams.mathscinet.org)
5. <http://www.princeton.edu/main/>
6. <https://www.stanford.edu>
7. <http://mathins.uz>
8. <http://ziyonet.uz>
9. <http://dmvn.mexmat.net/>

## 2-Mavzu: Vektor funksiya tushunchasi.

### Reja:

1. Vektor funksiya tushunchasi.
2. Vektor funksiyalar uzluksizligi.
3. Vektor funksiya hosilasi va xossalari.
4. Vektor funksiya integrali va xossalari.

Bizga  $G$ - to'g'ri chiziqdagi, tekislik ( $R^2$ ) dagi yoki fazo ( $R^3$ ) dagi soha berilgan bo'lsin.

**1-ta'rif.** Agar  $G$  sohaning har bir  $t \in G$  nuqtasiga biror  $r(t) \in G^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) vektor mos qo'yilgan bo'lsa  $G$  sohada vektor funksiya aniqlangan deyiladi.

Huddi skalyar funksiyalar kabi vektor funksiyalarda ham limit, uzluksizlik, hosila va integral tushunchalarini kiritish mumkin.

**2-ta'rif.** Agar  $t \rightarrow t_0$  bo'lganda  $|r(t) - \bar{a}| \rightarrow 0$  intilsa  $\bar{a}$ ga  $r(t)$  vektor funksiyaning  $t \rightarrow t_0$  ga intilgandagi limiti deyiladi va quyidagicha belgilanadi:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} r(t) = \bar{a}$$

Skalyar funksiyalar uchun limitlar haqidagi teoremlar vektor funksiya uchun ham o'rinli bo'ladi.

Agar  $f(t)$  va  $g(t)$ -  $G$  da aniqlangan vektor funksiyalar,  $\lambda(t)$  esa  $G$  da aniqlangan skalyar funksiya hamda  $t \rightarrow t_0$  da  $\bar{f} \rightarrow \bar{a}$ ,  $\bar{g} \rightarrow \bar{b}$ ,  $\lambda(t) \rightarrow \lambda_0$  bo'lsin, u holda  $t \rightarrow t_0$  da quyidagi tasdiqlar o'rinlidir:

- 1)  $\lim_{t \rightarrow t_0} \lambda(t) \bar{f} = \lambda_0 \bar{a}$
- 2)  $\lim_{t \rightarrow t_0} (\bar{f} * \bar{g}) = (\bar{a} * \bar{b})$ ;
- 3)  $\lim_{t \rightarrow t_0} (\bar{f} \times \bar{g}) = (\bar{a} \times \bar{b})$ ;
- 4)  $\lim_{t \rightarrow t_0} (\bar{f} \pm \bar{g}) = (\bar{a} \pm \bar{b})$ ;

Endi **3 ta'sdiqni isbotlasak:**  $\|(\bar{f}(t) \times \bar{g}(t)) - (\bar{a} \times \bar{b})\| = \|(\bar{f}(t) - \bar{a}) \times (\bar{g}(t) - \bar{b}) + \bar{a} \times (\bar{g}(t) - \bar{b}) - (\bar{f}(t) - \bar{a}) \times \bar{b} - (\bar{f}(t) - \bar{a}) \times \bar{b} + (\bar{f}(t) - \bar{a}) \times \bar{b} - (\bar{a} \times \bar{b})\| \leq \|(\bar{f}(t) - \bar{a})\| * \|\bar{g}(t) - \bar{b}\| + \|\bar{a}\| * \|\bar{g}(t) - \bar{b}\| + \|(\bar{f}(t) - \bar{a})\| * \|\bar{b}\| + \|\bar{a}\| * \|\bar{b}\| * \|\bar{f}(t) - \bar{a}\|$

Bu tenglikda  $t \rightarrow t_0$  da limitga o'tsak,

$\|(\overline{f(t)} \times \overline{g(t)}) - (\overline{a} \times \overline{b})\| \rightarrow 0$  ekanligi kelib chiqadi.

**Bundan:**  $\lim_{t \rightarrow t_0} (\overline{f(t)} \times \overline{g(t)}) = (\overline{a} \times \overline{b})$ ;

Endi uzluksiz vektor funksiya ta'rifini keltiramiz:

$t \rightarrow t_0$  da  $\overrightarrow{f(t)} \rightarrow \overrightarrow{f(t_0)}$  bo'lsa  $\overrightarrow{f(t)}$  vektor funksiya  $t_0$  nuqtada uzluksiz deyiladi. Agar  $\overrightarrow{f(t)}$  va  $\overrightarrow{g(t)}$  vektor funksiyalar  $\lambda(t)$  skalyar funksiyalar  $t_0$  nuqtada uzluksiz bo'lsa  $\lambda(t) * \overrightarrow{f(t)}$ ,  $\overrightarrow{f(t)} \pm \overrightarrow{g(t)}$ ,  $\overrightarrow{f(t)} \times \overrightarrow{g(t)}$ ,  $\overrightarrow{f(t)} * \overrightarrow{g(t)}$  funksiyalar ham  $t_0$  nuqtada uzluksiz bo'ladi.

### Vektor funksiyani differensiallash.

Bizga  $t \in [a, b]$  da aniqlangan  $r(t)$  funksiya berilgan bo'lib,  $t$  uning tayinlangan funksiyasi bo'lsin.

Ta'rif: Agar

$$\frac{r(t+h) - r(t)}{h}$$

Ifodaning  $h \rightarrow 0$  dagi limiti  $r$  vektor funksiyaning  $t$  nuqtadagi hosilasi deyiladi va quyidagicha belgilanadi

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(t+h) - r(t)}{h} = r'(t) = \frac{dr}{dt}$$

Agar vektor funksiyaning  $G$  sohaning har bir nuqtasida hosilasi mavjud bo'lsa, vektor funksiya  $G$  sohada differensiallanuvchi deyiladi.

Agar  $\lambda(t)$  skalyar funksiya,  $r(t)$  va  $q(t)$  vektor funksiyalar differensiallanuvchi bo'lsa ular uchun quyidagi xossalar o'rinli

1<sup>o</sup>  $(r(t) \pm q(t))' = r'(t) \pm q'(t)$

2<sup>o</sup>  $(\lambda(t) * r(t))' = \lambda'(t) * r(t) + \lambda(t) * r'(t)$

3<sup>o</sup>  $(c * r(t))' = c * r'(t)$   $c = cons$

4<sup>o</sup>  $(r(t) * q(t))' = r'(t) * q(t) + r(t) * q'(t)$ ;

5<sup>o</sup>  $(r(t) \times q(t))' = r'(t) \times q(t) + r(t) \times q'(t)$ ;

Endi ba'zi birlarini isbotini ko'raylik:

4<sup>o</sup>  $(r(t) * q(t))' = r'(t) * q(t) + r(t) * q'(t)$ ;

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(t+h) - r(t)}{h} = r'(t) \quad \text{orttirma beramiz, u holda}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{q(t+h) - q(t)}{h} = q'(t);$$

$$\begin{aligned} (r(t) * q(t))' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(t+h)*q(t+h) - r(t)*q(t)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(t+h)*q(t+h) - r(t+h)q(t) + r(t+h)q(t) - r(t)*q(t)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{r(t+h)(q(t+h) - q(t))}{h} + \right. \\ &\quad \left. \frac{q(t)(r(t+h) - r(t))}{h} \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(t+h) - r(t)}{h} \lim_{h \rightarrow 0} r(t) \frac{q(t+h) - q(t)}{h} + \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} q(t) \frac{r(t+h) - r(t)}{h} = r(t) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(t+h) - r(t)}{h} + q(t) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(t+h) - r(t)}{h} = r'(t) * q(t) + \\ &\quad r(t) * q'(t); \blacksquare \end{aligned}$$

$r'(t)$  vektor funksiyaning hosilasiga  $r(t)$  funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi deyiladi. Huddi shunday 3,4,... yuqori tartibli hosilalarni ham aniqlash mumkin.

$i, j, k$  lar  $R^3$  dagi birlik o'zaro perpendikulyar vektorlar bo'lsin. U holda  $r(t)$  vektor funksiyaning berilishi 3 ta  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  skalyar funksiyalarning berilishiga teng kuchli ya'ni:

$r(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k$   $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  larga  $r(t)$  vektor funksiyaning koordinatalari deyiladi.

$r'(t) = x'(t)i + y'(t)j + z'(t)k$   $r(t) \in C^n[a, b]$  va  $x(t), y(t), z(t) \in C^n[a, b]$  bo'ladi.

Ikki o'zgaruvchili vektor funksiyalar uchun ham ya'ni  $r = r(u, v)$  uchun ham xususiy hosilalarni aniqlash mumkin.

$$r'_u = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(u+h; v) - r(u; v)}{h} = \frac{dr}{du}$$

$$r'_v = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(u; v+h) - r(u; v)}{h} = \frac{dr}{dv}$$

$r = r(u, v)$  ning to'la differensialni quyidagicha aniqlanadi:

$$dr = r'_u du + r'_v dv = \frac{\Delta r}{\Delta u} du + \frac{\Delta r}{\Delta v} dv;$$

Huddi shunday yuqori tartibli hosilalarni ham hisoblash mumkin.

### Vektor funksiyani integrallash:

Bizga  $r(t)$  vektor funksiya berilgan bo'lsin. Vector funksiyaning Riman ma'nosidagi integrali huddi skalyar funksiya kabi kiritiladi:

$$\int_a^b r(t)dt = \bar{i} \int_a^b x(t)dt + \bar{j} \int_a^b y(t)dt + \bar{k} \int_a^b z(t)dt$$

Vector funksiya integrali quyidagi xossalarga ega:

Agar  $f(t) \in C[a, b]$  va  $a < c < b$ , u holda

- 1)  $\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$
- 2)  $\int_a^b mf(t)dt = m \int_a^b f(t)dt; \quad m = \text{const.}$
- 3)  $\int_a^b (f(t) \pm g(t))dt = \int_a^b f(t)dt \pm \int_a^b g(t)dt ;$
- 4)  $\int_a^b f(t)dt = F(a) - F(b) \quad ;$

### Nazorat savollari.

1. Vektor nima
2. Vektor funksiya geometrik tasviri
3. Vektor funksiyaning hosilasi
4. Vektor funksiyaning differentsiallashtirish

### ADABIYOTLAR RO'YXATI

1. Avilova L.V., Bolotyuk V.A., Bolotyuk L.A. Analiticheskaya geometriya i lineynaya algebra// 2013. Izdanie: 1-ye izd. 421 s.
2. Aleksandrov A.D., Nesvetaev N.Yu. Geometriya, M.: Nauka, 1990. – 672 s.
3. Bobenko A.I. (Ed.) Advances in Discrete Differential Geometry// Springer, 2016. — 439 p. — (Mathematics). — ISBN: 3662504464
4. I. M. Rikhsiboev and N. S. Mohamed, Engineering Mathematics 2, Malaysia, 2019.
5. Manfredo P. Do Carmo. Differential geometry of Curves and surface // Dover publications, Inc. Mineola, New York, 2016. – 529 rr.
6. Matematik analiz./ Azlarov T., Mansurov H.: Universitet va ped. institutlar talabalari uchun darslik: 2 qismli. 1-q.— Qayta ishlangan va to'ldirilgan 2-nashri.— T.: Uqituvchi, 1994.—416 b.
7. Dodajonov N., Yunusmetov R., Abdullayev T. Geometriya, II qism.

8. Narmanov A. Differensial geometriya.
9. Sobirov M.A., Yusupov A.Yo. Differensial geometriya kursi.
10. Ergashev B. Evklid fazosida chiziqlar.
11. Ergashev B. Evklid fazosida sirtlar.
12. Belko I.V. i dr. Sbornik zadach po differensialnoy geometrii.
13. Sh.Murodov, L.Xakimov, A.Xolmurzayev, M.Jumayev, A.To‘xtayev. «Chizma geometriya». Oliy texnika o‘quv yurtlari uchun darslik. Toshkent, 2005.

### **Internet saytlar**

1. [www.edu.uz](http://www.edu.uz).
2. [www.bimm.uz](http://www.bimm.uz)
3. [www.arxiv.org](http://www.arxiv.org)
4. [www.ams.mathscinet.org](http://www.ams.mathscinet.org)
5. <http://www.princeton.edu/main/>
6. <https://www.stanford.edu>
7. <http://mathins.uz>
8. <http://ziyonet.uz>
9. <http://dmvn.mexmat.net/>



### **3 – Mavzu: : Geometriyaning zamonaviy yo'nalishlari va muammolari.**

#### **Reja:**

1. Geometriya faniga kirish va uning rivojlanish bosqichlari.
2. Yevklid geometriyasi
3. Lobachevskiy geometriyasi
4. Riman geometriyasi

**GEOMETRIYA** - (geo... va metriya) — mat. ning predmet shakllari va shakliy munosabatlarini o'rganadigan bo'limi. Yer o'lchash bilan bog'liq ravishda paydo bo'lgan. Nomi shundan. Mas, ochiq silindrsimon idishning shakli, hajmi, sirtining yuzi Geometriya o'rganish obyektlari, uning rangi yoki qanday moddadan yasalgani esa Geometriyani qiziqitirmaydi. Shuningdek, asosi doyra bo'lsa ham, shaklda ellips bilan tasvirlanishi Geometriyaga mansub munosabatdir. Geometriya tu-shunchalarni mavhumlashtirib, ideallashtirib o'rganadi. Mac, silindrsimon idishning asosi doiradan bir oz farq qilishi, yasovchisi to'ppa-to'g'ri bo'lmasligi mumkin, sirti qalinlikka ega, asosi bilan yon sirti tik tutashmay, silliqlangan bo'ladi, lekin Geometriyada bu kabi tafeilotlar soqit qilinadi. Shunday yo'l bilan o'lchamlarga ega bo'lmagan nuqta, har ikki tomonga cheksiz davom etuvchi to'g'ri chiziq kabi tushunchalar, parallellik, simmetriklik kabi munosabatlar hosil qilinadi. Buning evaziga tatbiq doirasi juda keng, ma'lum ma'noda mutlaq va universal tabiatli qonuniyatlar aniqlanadi.

Geometriyaga oid dastlabki ma'lumotlar Qad. Babil va Misrda kuzatuv yo'li (empirik usul) bilan to'plangan. Mas, bir juft parallel to'g'ri chiziqni uchinchi to'g'ri chiziq kesib o'tsa, hosil bo'lgan 8 ta burchakdan to'rttadani o'zaro teng; tomonlari 3, 4 va 5 birlik bo'lgan uchburchakning bir burchagi to'g'ri. Geometrik xossalarni to'plash yunonlar tomonidan davom ettirilgan. Bu muammo ustida mushohada ayrim dalillarni boshqalaridan sof mantiqiy yo'l bilan chiqarishga olib kelgan. Tayin geometrik xossani mantiqiy mushohada bilan keltirib chiqarish isbot, isbotlangan xossa esa teorema deb atala boshlagan. Dastlabki shunday dalillardan biri Fales (mil.

av. 625-548-y. lar) teoremasidir. Yunon faylasufi Pifagor akademiyasida mantiq va mat. muhim o‘rin tutib, muntazam teoremlar isbotini izlash bilan shug‘ullanishgan. Tabiiyki, bunda imkoni boricha oz dalildan boshqa barcha dalillarni keltirib chiqarishga urinilgan. Bu urinishlar yakuni sifatida Yevklid o‘zining mashhur «Negizlar» asarini yaratadi. Bu asar nafaqat mat. tarixida, balki umuman tafakkur taraqqiyotida beqiyos o‘rin tutib, 2000 yil davomida mantiqiy mushohada namunasi bo‘lib xizmat qildi. «Negizlar» da Yevklid nuqta, to‘g‘ri chiziq, tekislik, tenglik, to‘g‘ri chizik yoki tekislikning nuqtadan o‘tishi (insidentlik) kabi tushunchalarni asos qilib olib, kesma, burchak, ko‘pburchak, parallellik, perpendikulyarlik kabi tushunchalarga ta’rif beradi. Xuddi shu singari 10 ta geometrik dalilni isbotsiz qabul qiladi (ular aksiomalar va postulatlar deb atalgan) va birin-ketin teoremlarni keltirib chiqaradi.

Qad. Misr va Bobilda Geometriya amaliy ehtiyojlar: maydonlar yuzini o‘lchash, navigatsiya, astronomiya, me’morlik masalalarini hal qilish uchun vujudga kelgan bo‘lsa, Yunonistonda Geometriya san’at sifatida ham rivojlanib, yuksak natijalarga erishdi. Xususan, sirkul va chizg‘ich yordamida shakllar yasash rivoj topdi. Yunonlarning bu sohada erishgan darajasi shundan ham ko‘rinadiki, ular qo‘ygan muntazam ko‘pburchaklar yasash masalasi 1796-y. (K. F. Gauss), doyra kvadraturasi masalasi esa 1882-y. dagina (F. Lindemann) hal qilindi. Yunonlar doira va b. ayrim egri chizikli shakllar yuzlari, piramida, konus va shar hajmlarini hisoblashda integral hisob elementlari qo‘llaganlar (Arximed va b.). Pergalik Apolloniyga mansub konus kesimlari nazariyasini esa shubhasiz yunon Geometriya sining gultojisi deyish mumkin.

Mil. ning 3-asridan keyin yunon Geometriyasi umuman madaniyat bilan birga inqiroz tomon yuz tutdi, lekin Geometriya arab sharqi mamlakatlari, O‘rta Osiyo va Hindistonda taraqqiy qila bordi.

7—8-a. lar davomida Hindistonda Geometriyaga oid ayrim yutuqlar qo‘lga kiritilgan bo‘lsa ham (mas, aylanaga ichki chizilgan to‘rtburchak yuzi uchun

Brahmagupta formulasi), fan tarixidagi uygʻonish 9-a. dan arab tilida ijod qilgan Yaqin va Oʻrta Sharq, xususan, oʻrta osiyolik olimlar faoliyati bilan bogʻliq. Ahmad al Fargʻoniy stereografik proyeksiyaga oid Ptolemey qoldirgan teoremlarning isbotini berdi, tekislik trigonometriyasi va sferik trigonometriya yaratildi (Battoniy, Beruniy, Nasriddin Tusiy, Abul-Vafo va b.). Algebra geometriyaga va geometriya algebraga tatbiq qilina boshladi. Bu gʻoyalar 16-a. dan Yevropa olimlari tomonidan rivojlantirilib, analitik geometriyaga asos solindi, (P. Ferma, R. Dekart). Shu davrdan boshlab meʼmorlik va tasviriy sanʼat yuksalishi munosabati bilan perspektiv akslantirish xossalari oʻrganildi va proyektiv geometriya vujudga keldi. 18-a. da differensial va integral hisob ixtiro qilingach, Geometriya masalalarini yechishning standart usullari ishlab chiqildi va silliq chiziqlar hamda sirtlarni oʻrganuvchi differensial geometriya rivojlandi.

Ularni oʻrganishda differensial hisob usullari yetmas yoki ojizlik qilar edi. Mas, Myobius yaprogʻining faqat bitta tomoni borligi, uch yaproq tugunini yechib boʻlmasligi shunday xossalarga kiradi. Bu masalalar Geometriyaning yangi boʻlimi — topologiya tugʻilishiga olib keldi. U esa, oʻz navbatida, 20-a. mat. sini ifodalovchi Geometriya, algebra va funksiyalar nazariyasining sintezidan iborat yoʻnalish — xilma-xil fazolarni oʻrganishga poydevor boʻldi.

Yevklidning «Negizlari» 2000-yil davomida mantiqiy qatʼiylik namunasi boʻlib kelganligiga qaramay, uning ayrim oʻrinlariga tanqidiy nazar bilan qaralib takomillashtirilgan: boshlangʻich tushunchalar tarkibi qayta koʻrib chiqilgan, nuqtalarning tartibiga oid va uzluksizlik aksiomalari bilan toʻldirilgan, qator aksiomalar esa boshqalari orqali isbotlanib, teoremlar qatoriga oʻtkazilgan. Bu ish D. Gilbertning «Geometriya asoslari» asarida yakunlandi.

Deyarli Yevklid zamonidan boshlab uning 5-postulati yoki unga teng kuchli parallellik aksiomasini isbotlashga juda koʻp urinilgan (jumladan, Nasriddin Tusiy, Umar Xayyom, I. G. Lambert), chunki matematiklarda u teorema boʻlishi kerak degan ishonch hukm surgan, xilma-xil «isbotlar» ham taklif etilgan, lekin bu

isbotlarning barchasida mantiqiy nosozlik uchraydi — Yevklid aksiomasiga teng kuchli boshka tasdikdan (mas, uchburchak burchaklarining yigindisi  $180^\circ$  ga tengligidan) foydalanib ketilgan. Bu sohadagi izlanishlar avval Yevklid Geometriya sidan parallellik aksiomasi soqit qilingan mutlaq Geometriya, so'ng parallellik aksiomasi o'rniga uning inkori aksioma qilib olingan noyevklid Geometriya (Lobachevskiy geometriyasi, 1826-y.) ixtiro qilinishiga olib keldi. Yevklid Geometriyasi ham, noyevklid Geometriya ham bir xil darajada ziddiyatdan xoli ekanligini qat'iy isbotlagan F. Kleyn grupp tushunchasi yordamida Geometriya sohalari tasnifini berdi (Erlangen dasturi). Unga muvofiq har bir Geometriya o'zining geometrik almashtirishlar gruppasi bilan ifodalanadi. Shakllarning bunday almashtirishlarda o'zgarmay qoladigan (invariant) xossalari tegishli G. Sohalari o'rganish obyekti bo'ladi. Kleyn nuqtayi nazaridan maxsus nisbiylik nazariyasi Lorens gruppasiga mos keluvchi Geometriya dir. Shakllarning xossalarini o'rganishda ularning ko'lamiga qarab Geometriya yana ikki turga bo'linadi: shakllarning kichik (mahalliy) sohalari xossalarini o'rganuvchi sohalari geometriyasi va shakllarni yaxlit obyekt sifatida o'rganuvchi to'la (global) G. Hozirgi davrda Geometriya matematikaning barcha sohalari, shakl va holatlarga doir tushunchalarni tasavvur qilishda qo'llanilmoqda.

**YEVKLID GEOMETRIYASI** — mil. av. 3-a. da Yevklid izchil asoslagan geometriya. Parallellik aksiomasiga (to'g'ri chiziqda yotmagan nuqta orqali shu to'g'ri chiziq bilan kesishmaydigan faqat bitta to'g'ri chiziq o'tkazish mumkin, degan aksiomaga) hamda mutlaq geometriya aksiomalari sistemalari deb ataluvchi 5 guruh (bog'lanish, tartib, harakat, uzluksizlik, parallellikdan iborat) aksiomalarga asoslangan. Yevklid geometriyasi aksiomalar sistemalari nuqta, to'g'ri chiziq, tekislik, harakat va nuqta, to'g'ri chiziq va tekislik orasidagi munosabatlarga suyanadi. Yevklid geometriyasi birinchi marta izchil ravishda Yevklid «Negizlari»da bayon etilgan. Yevklid geometriyasidan farkli geometriyani birinchi marta rus geometri N. I. Lobachevskiy yaratdi. Yevklid geometriyasi o'rta maktabda o'qitiladi va «elementar geometriya» deb ataladi.

**LOBACHEVSKIY GEOMETRIYASI** — Yevklid geometriyasining aksiomalar sistemasidan faqat parallellik aksiomasi bilan farq qiladigan, aksiomalar sistemasiga asoslangan geometrik nazariya. L. g. da Yevklidning parallellik aksiomasi o'rniga quyidagi aksioma qabul qilinadi: agar to'g'ri chiziq va undan tashqarida nuqta berilgan bo'lsa, ularni o'z ichiga olgan tekislikda shu nuqtadan o'tuvchi, lekin berilgan to'g'ri chiziq bilan kesishmaydigan kamida ikkita to'g'ri chiziq o'tkazish mumkin.

Lobachevskiy geometriyasining manbai — Yevklidning «Negizlar» asarida ta'riflangan beshinchi postulatni isbotlash uchun Ibn al-Xaysam (10-a.), Umar Xayyom (12-a.), Nasriddin Tusiy (13-a.), Prokl (15-a.), Lejandr, Lambert va b. matematiklar tomonidan qilingan urinishlardir. 19-a. da beshinchi postulatni boshqa aksiomalar asosida isbotlab bo'lmaydi, ya'ni u mustaqil aksioma, degan fikr vujudga keldi. Agar beshinchi postulat aksioma sifatida qabul qilingan bo'lsa, uning inkori ham boshqa aksiomalarga zid bo'lmasligi kerak. Yevklidning beshinchi postulati o'rniga yuqoridagi aksiomaga asoslangan geometriyani birinchi marta 1826-y. da N. I. Lobachevskiy, undan keyinroq Ya. Bolyay taklif qildi.

Yevklid geometriyasining parallellik aksiomasiga asoslanmagan teoremlari Lobachevskiy geometriyasida ham o'rinli bo'ladi, parallellik aksiomaga asoslangan teoremlari esa Lobachevskiy geometriyasida o'rinli bo'lmaydi. Lobachevskiy geometriyasida uchburchakning ichki burchaklari yig'indisi  $180^\circ$  dan kichik.

Lobachevskiy geometriyasining mantiqiy ziddiyatsizligini birinchi marta italyan matematigi E. Beltrami 1868-y. da isbotladi. U psevdosferaning geodezik chiziqlari to'g'ri chiziq deb qaralsa, hosil bo'ladigan geometriya L. g. ekanligini ko'rsatdi. Bu fakt Lobachevskiy geometriyasining Beltrami interpretatsiyasi (izohi) deyiladi. Keyinchalik F. Kleyn va A. Puankare ham Lobachevskiy geometriyasining boshqa interpretatsiyalarini berdilar.

Lobachevskiy geometriyasi — mat., mexanika va fizikada keng tatbiq etiladigan nazariya. Shu bilan birga Lobachevskiy geometriyasining yaratilishi moddiy olam haqidagi tasavvurimizni boyitdi. Yevklid geometriyasi olamni to‘g‘ri aks ettiruvchi yagona geometriya emasligini ko‘rsatdi.

B. Rimanning elliptik geometriyasidan farqlash uchun Lobachevskiy geometriyasi ba‘zan noyevklid giperbolik geometriya ham deyiladi.

**RIMAN GEOMETRIYASI** - elliptik geometriya — noyevklid geometriyalaryagsh biri. Aksiomalari Yevklid geometriyasinkt aksiomalaridan farq qiladi. Uch o‘lchovli Riman geometriyasining asosiy obyektlari: nuqta, to‘g‘ri chiziq va tekisliklar; asosiy tushunchalari: mansublik tushunchasi (Mas, to‘g‘ri chiziqning tekislikka mansubligi), nuqtalarning to‘g‘ri chizikda joylashish tartibi va figuralarning kongruentligi. Riman geometriyasiga ko‘ra, har qanday 2 nuqta orqali 1 ta to‘g‘ri chiziq o‘tadi, bir tekislikdagi har qanday 2 to‘g‘ri chiziq 1 nuqtada kesishadi (ya’ni Riman geometriyasida «parallel» to‘g‘ri chiziklar mavjud emas), nuqtalarning to‘g‘ri chiziqda joylashish tartibi aylanadigan nuqtalarning joylashish tartibiga o‘xshash bo‘ladi. Riman tekisligida har qanday 2 to‘g‘ri chiziq bir nuqtada kesishadi, sferada esa to‘g‘ri chiziqlar rolini o‘taydigan har 2 katta doira 2 nuqtada kesishadi; tekislikda yotgan to‘g‘ri chiziq uni 2 sohaga ajratmaydi va h. k.

Riman geometriyasi haqidagi ma’lumot B. Riman tomonidan 1854-y. e’lon qilingan. Bu eng to‘la o‘rganilgan noyevklid geometriyadir.

### **Nazorat savollari.**

1. Yevklid geometriyasi nima
2. Lobachevskiy geometriyasi nima
3. Riman geometriyasi nima

## ADABIYOTLAR RO‘YXATI

1. Avilova L.V., Bolotyuk V.A., Bolotyuk L.A. Analiticheskaya geometriya i lineynaya algebra// 2013. Izdanie: 1-ye izd. 421 s.
2. Aleksandrov A.D., Nesvetaev N.Yu. Geometriya, M.: Nauka, 1990. – 672 s.
3. Bobenko A.I. (Ed.) Advances in Discrete Differential Geometry// Springer, 2016. — 439 p. — (Mathematics). — ISBN: 3662504464 M. Rikhsiboev and N. S. Mohamed, Engineering Mathematics 2, Malaysia, 2019.
4. Manfredo P. Do Carmo. Differential geometry of Curves and surface // Dover publications, Inc. Mineola, New York, 2016. – 529 rr.
5. Matematik analiz./ Azlarov T., Mansurov H.: Universitet va ped. institutlar talabalari uchun darslik: 2 qismli. 1-q.— Qayta ishlangan va to‘ldirilgan 2-nashri.— T.: Uqituvchi, 1994.—416 b.
6. Dodajonov N., Yunusmetov R., Abdullayev T. Geometriya, II qism.
7. Narmanov A. Differensial geometriya.
8. Sobirov M.A., Yusupov A.Yo. Differensial geometriya kursi.
9. Ergashev B. Evklid fazosida chiziqlar.
10. Ergashev B. Evklid fazosida sirtlar.
11. Belko I.V. i dr. Sbornik zadach po differensialnoy geometrii.
12. Sh.Murodov, L.Xakimov, A.Xolmurzayev, M.Jumayev, A.To‘xtayev. «Chizma geometriya». Oliy texnika o‘quv yurtlari uchun darslik. Toshkent, 2005.
13. A.Ya. Narmanov va A.S.Sharipov “Geometriya asoslari” Toshkent 2010

### Internet saytlar

1. [www.edu.uz](http://www.edu.uz).
2. [www.bimm.uz](http://www.bimm.uz)
3. [www.arxiv.org](http://www.arxiv.org)
4. [www.ams.mathscinet.org](http://www.ams.mathscinet.org)
5. <http://www.princeton.edu/main/>
6. <https://www.stanford.edu>
7. <http://mathins.uz>
8. <http://ziyonet.uz>
9. <http://dmvn.mexmat.net/>



## 4 – MAVZU: SIRT TUSHUNCHASI. SIRTNING ICHKI VA TASHQI GEOMETRIYASI.

### EVKLID FAZOSADA SIRTLAR. SIRT TUSHUNCHASI.

Elementar sirt, oddiy sirt, regulyar sirt, silliq sirt, sirt-ning egri chiziqli koordinatalari, sirtning parametrik tenglamalari, sirtning vektor tenglamasi, sirtning oshkor tenglamasi, sirtning oshkarmas tenglamasi, koordinat chiziqlar,  $u$  chiziqlar,  $v$  chiziqlar, koordinat to'ri, muntazam to'r.

Avvalo to'plamlar nazariyasidan ba'zi-bir tushunchalarni kel-tiramiz. Tekislikda nuqtalar to'plami  $G$  berilgan bo'lsin. Tekislikdagi  $M_0(x_0; y_0)$  nuqtaning “-atrofi” deb  $q$  munosabat bilan aniqlanuvchi  $M$  nuqtalar to'plamini tushunamiz.

Agar  $G$  to'plamning  $M_0$  nuqtasi biror atrofi bilan  $G$  to'plamga to'la tegishli bo'lsa,  $M_0$  nuqtani  $G$  to'plamning **ichki nuqtasi** deb ataymiz.

$G$  to'plam **ochiq** deyiladi, agarda uning har bir nuqtasi ichki nuqta bo'lsa.

$G$  to'plam **bog'lamli** deb ataladi, agarda uning istalgan ikki nuqtasini shu to'plamga tegishli siniq chiziq bilan tutashtirish mumkin bo'lsa.

$G$  to'plamni **soha** deb ataymiz, agarda u ochiq to'plam bo'lib, bog'lamli bo'lsa.

Masalan, doiraning, uni o'rab turgan aylana nuqtalaridan bosh-qa nuqtalari to'plami soha bo'ladi.

$G$  to'plam tekislikdagi soha bo'lsin, uni qisqacha **tekis soha** deb ataymiz.

Ta'rif. Tekis sohaning  $E_3$  fazodagi topologik aksiga **elementar sirt** deb ataymiz.

Ta'rif.  $E_3$  fazodagi nuqtalar to'plami  $Q$  bog'lamli to'plam bo'lib, uning har bir nuqtasi shunday fazoviy atrofga ega bo'lsaki, to'plamning bu atrofga tegishli qismi elementar sirt bo'lsa, u holda  $Q$  to'plamga **oddiy sirt** deb ataladi.

$F$  oddiy sirt  $G$  tekis sohani  $E_3$  fazoga topologik akslantirish natijasida hosil bo'lgan bo'lsin.

$G$  soha joylashgan tekislikda  $u, v$  dekart koordinatalar sistemasini kiritamiz (25-chizma).

U vaqtda  $G$  sohani  $F$  oddiy sirtga akslantiruvchi funksiyalar umumiy shaklda quyidagicha bo'ladi:

$$\left. \begin{aligned} x &= x(u, v), \\ y &= y(u, v), \\ z &= z(u, v) \end{aligned} \right\} (1).$$



Bu erda  $x(u, v)$ ,  $y(u, v)$ ,  $z(u, v)$  funksiyalar uzluksiz, bir qiymatli va ularga teskari funksiyalar ham uzluksizdir.

(1) tenglamalar sistemasiga  $F$  oddiy sirtning **parametrik tenglamalari** deyiladi.

$u$  va  $v$  sonlar jufti  $F$  sirdagi nuqtaning holatini to'la aniqlaydilar va ularga sirdagi nuqtaning **egri chizikli koor-dinatalari** yoki **gauss koordinatalari** deb ataladi.

### REGULYAR SIRTLAR.

Ta'rif.  $F$  oddiy sirtni **regulyar sirt** deb ataymiz, agarda u o'zining har bir nuqtasi atrofida  $x$  q  $x(u, v)$ ,  $y$  q  $y(u, v)$ ,  $z$  q  $z(u, v)$  parametrik tenglamalari bilan berilib,  $x(u, v)$ ,  $y(u, v)$ ,  $z(u, v)$  funk-tsiyalar  $k$  marta differensiallanuvchi ( $k \geq 1$ ) va ushbu

$$\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}$$

matritsaning rangi ikkiga teng bo'lsa.

Agar  $k \geq 1$  bo'lsa, sirtga **silliqlik sirt** deb ataymiz.

Teorema. Agar  $F$  silliqlik sirt  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$ ,  $z = z(u, v)$  parametrik tenglamalari bilan berilib, sirtning  $M_o(x_o; y_o; z_o)$  nuqtasida

$$\begin{vmatrix} x_u^o & y_u^o \\ x_v^o & y_v^o \end{vmatrix} \neq 0$$

shart bajarilsa, u vaqtda  $M_o$  nuqta atrofida  $F$  sirt tenglamasini

$$z = f(x, y) \tag{1}$$

shaklda yozish mumkin.

Isbot. Oshkormas funksiyalar haqidagi teorema asosan:

$$\begin{vmatrix} x_u^o & y_u^o \\ x_v^o & y_v^o \end{vmatrix} \neq 0$$

bo'lganda,  $x$  q  $x(u, v)$ ,  $y$  q  $y(u, v)$  tenglamalar sistemasini  $M_o(u_o; v_o)$  nuqta atrofida  $u, v$  larga nisbatan echish mumkin.

Natijada

$$u = \varphi(x, y), \quad v = \psi(x, y) \tag{2}$$

hosil bo'ladi.

$u$  va  $v$  larning bu qiymatlarini sirtning parametrik teng-lamalaridagi  $z = z(u, v)$  tenglamaga qo'ysak:

$$z = z(\varphi(x, y), \psi(x, y)) = f(x, y)$$

hosil bo'ladi. Teorema isbot bo'ldi.

(1) tenglamaga sirtning **oshkor tenglamasi** deb ataladi.

(1) tenglamani umumiy shaklda quyidagicha yozish mumkin:

$$F(x, y, z) = 0 \quad (3).$$

(3) tenglamaga sirtning **oshkormas tenglamasi** deb ataladi.

## KOORDINAT CHIZIQLAR.

Bizga  $F$  regulyar sirt

$$r = r(u, v) \quad (1)$$

vektor tenglamasi bilan berilsin.

(1) tenglamada  $v = v_0 = \text{const}$  deb olsak,

$$r = r(u, v_0)$$

vektor bitta  $u$  o'zgaruvchining funksiyasi bo'lib, u  $F$  sirt ustida yotuvchi qandaydir chiziqning vektor tenglamasi bo'ladi.

Agar  $v_0$  ga har xil qiymatlar qo'ysak, sirt ustida har xil chiziqlar hosil bo'la boradi va ular  $v_0$  parametrli chiziqlar oila-sini tashkil etadi. Bu chiziqlar oilasida  $u$  o'zgaruvchi bo'lgani uchun, ularni biz  **$u$  chiziqlar** ( $v = \text{const}$ ) deb ataymiz.

Xuddi shunga o'xshash (1) tenglamada  $u = u_0 = \text{const}$  deb olsak,  $F$  sirt ustida yotuvchi chiziqlarning  $u_0$  parametrli ikkinchi oilasini hosil qilamiz. Bu chiziqlar oilasini biz  **$v$  chiziqlar** ( $u = \text{const}$ ) deb ataymiz.

Koordinat chiziqlarning ikkala oilasini **koordinat to'ri** deb ataymiz.

Silliq sirtning har bir nuqtasidan koordinat to'riga te-gishli ikkita chiziq o'tadi.

Sirtida joylashgan biror sohaning har bir nuqtasidan ko-ordinat to'ri-ning faqat ikkita chizig'i o'tsa, bunday to'rga **muntazam to'r** deyiladi.

Silliq sirt ustidagi to'r muntazam bo'ladi.

$F$  sirtida  $M_0(u_0; v_0)$  nuqta berilsin. U vaqtda chiziqlar na-zariyasidan ma'lumki,  $\vec{r}_u(u_0, v_0)$  vektor  $u$  chiziqning  $M_0(u_0; v_0)$  nuqta-sidagi urinma

vektori bo'ladi.  $\vec{r}_v(u_0, v_0)$  vektor esa  $v$  chiziqning

$M_0(u_0; v_0)$  nuqtasidagi urinma vektori bo'ladi

$F$  sirt regulyar bo'lgani uchun,  $M_0(u_0; v_0)$  nuqta atrofida

matritsaning rangi ikkiga teng bo'ladi. Shu sababli  $M_0(u_0; v_0)$  nuqtada ushbu vektor noldan farqlidir:

Bu esa  $M_o(u_o; v_o)$  nuqtada  $(u_o, v_o)$  va  $(u_o, v_o)$  urinma vektorlar noldan farqliligini, hamda bu vektorlar kollinear emasligini ko'rsatadi. Demak, regulyar sirtning har bir nuq-tasida va urinma vektorlar kollinear bo'lmas ekan.

## SIRT ICHKI GEOMETRIYASI

**Ta'rif.** Sirt birinchi kvadratik formasining koeffitsiyent-lari bilan aniqlanuvchixossalarini o'rganuvchi bo'limga **sirt ichki geometriyasi** deb ataladi.

Ma'lumki sirt birinchi kvadratik formasining koeffitsiyentlari orqali sirt ustidagi chiziq yoyining uzunligi, sirt ustidagi ikki chiziq orasidagi burchak va sirt ustidagi sohaning yuzi aniqlanar edi. Demak, yuqoridagi ta'rifga asosan sirt ustidagi chiziq yoyining uzunligi, sirt ustidagi ikki chiziq orasidagi burchak va sirt ustidagi sohaning yuzi sirt ichki geometriyasining ob'ekti bo'ladi.

## GAUSS TEOREMASI.

**Teorema (Gauss teoremasi).** Sirtning to'la egriligi birinchi kvadratik forma koeffitsiyentlari va ularning birinchi hamda ik-kinchi tartibli hosilalari orqali ifodalanadi, ya'ni sirtning to'la egriligi sirt ichki geometriyasining ob'ekti bo'ladi.

Isbot. Ma'lumki, sirtning to'la egriligi ushbu formula bilan hisoblanar edi:

$$K = \frac{DD_2 - D^2}{EG - F^2}.$$

Bu erda

$$D \cdot D_2 = \frac{\begin{vmatrix} x_{uu} & y_{uu} & z_{uu} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_{vv} & y_{vv} & z_{vv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG - F^2} \cdot \sqrt{EG - F^2}} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{vmatrix} x_{uu} & y_{uu} & z_{uu} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_{vv} & y_{vv} & z_{vv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}.$$

Determinantlarni "sartlarni sartlarga" qoidasi bilan ko'paytirib, ushbu tengliklarni e'tiborga olsak

$$DD_2 = \frac{1}{EG - F^2} \begin{vmatrix} \vec{r}_{uu} \vec{r}_{vv} & \vec{r}_{uu} \vec{r}_u & \vec{r}_{uu} \vec{r}_v \\ \vec{r}_u \vec{r}_{vv} & E & F \\ \vec{r}_v \vec{r}_{vv} & F & G \end{vmatrix}$$

hosil bo'ladi.

Xuddi shu yo'l bilan quyidagini hosil qilamiz:

$$D^2 = D D = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}} = \frac{1}{EG-F^2} \cdot \begin{pmatrix} \vec{r}_{uv} & \vec{r}_{uv} & \vec{r}_{uv} \\ \vec{r}_u & \vec{r}_u & \vec{r}_u \\ \vec{r}_v & \vec{r}_v & \vec{r}_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{r}_{uv} & \vec{r}_{uv} & \vec{r}_{uv} \\ \vec{r}_u & \vec{r}_u & \vec{r}_u \\ \vec{r}_v & \vec{r}_v & \vec{r}_v \end{pmatrix}.$$

Demak,

$$K = \frac{1}{(EG-F^2)^2} \begin{pmatrix} \vec{r}_{uv} & \vec{r}_{uv} & \vec{r}_{uv} \\ \vec{r}_u & \vec{r}_u & \vec{r}_u \\ \vec{r}_v & \vec{r}_v & \vec{r}_v \end{pmatrix}.$$

Bu ifodadagi ikkala determinantning ham birinchi ustun, bi-rinchi satr elementidan tuzilgan birinchi tartibli minorlarining qo'-shimcha minorlari bir xil bo'lgani uchun, uni quyidagicha yozish mumkin:

$$K = \frac{1}{(EG-F^2)^2} \begin{pmatrix} \vec{r}_{uv} & \vec{r}_{uv} & \vec{r}_{uv} \\ \vec{r}_u & \vec{r}_u & \vec{r}_u \\ \vec{r}_v & \vec{r}_v & \vec{r}_v \end{pmatrix} \quad (1).$$

Endi  $r_u = E$ ,  $r_{uv} = F$ ,  $r_v = G$  tengliklarni  $u$  va  $v$  larga nisbatan differensiallasak:

$$\begin{aligned} 2 \cdot r_u \cdot r_{uu} &= E_u, & \text{bu erdan} & \quad r_{uu} \cdot r_u = \frac{1}{2} E_u, \\ 2 \cdot r_u \cdot r_{uv} &= E_v, & \text{bu erdan} & \quad r_{uv} \cdot r_u = \frac{1}{2} E_v, \\ 2 \cdot r_v \cdot r_{uv} &= G_u, & \text{bu erdan} & \quad r_{uv} \cdot r_v = \frac{1}{2} G_u, \\ 2 \cdot r_v \cdot r_{vv} &= G_v, & \text{bu erdan} & \quad r_{vv} \cdot r_v = \frac{1}{2} G_v, \\ r_{uu} \cdot r_v + r_u \cdot r_{uv} &= F_u, & \text{bu erdan} & \quad r_{uu} \cdot r_v = F_u - \frac{1}{2} E_v, \\ r_{uv} \cdot r_v + r_u \cdot r_{vv} &= F_v, & \text{bu erdan} & \quad r_{vv} \cdot r_u = F_v - \frac{1}{2} G_u. \end{aligned}$$

Bu erda beshinchi tenglikni  $v$  bo'yicha, uchinchi tenglikni  $u$  bo'yicha differensiallab, ularni hadlab ayirsak

$$r_{uv} \cdot r_v + r_{uu} \cdot r_{vv} - r_{uv} \cdot r_v - r_{uv} \cdot r_{uv} = F_{uv} - \frac{1}{2} E_{vv} - \frac{1}{2} G_{uu}$$

yoki

$$r_{uu} \cdot r_{vv} - r_{uv} = -\frac{1}{2} G_{uu} + F_{uv} - \frac{1}{2} E_{vv}$$

hosil bo'ladi. Bu tengliklarni (1) ga qo'ysak:

$$K = \frac{1}{(EG-F^2)^2} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} G_{uu} + F_{uv} - \frac{1}{2} E_{vv} & \frac{1}{2} E_{vv} & F_{uv} - \frac{1}{2} E_{vv} \\ F_v - \frac{1}{2} G_u & E & F \\ \frac{1}{2} G_v & F & G \end{pmatrix} \quad (2).$$

Teorema isbot bo'ldi.

Shuni ham aytib o'tish kerakki, agarda sirtning birinchi kvadratlik formasi

$$\Phi_1 = du^2 + Gdv^2$$

ko'rinishda bo'lsa, u vaqtda (2) formulaga asosan, bu sirtning gauss egri-ligi quyidagiga teng bo'ladi:

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}}(\sqrt{G})_{uu}.$$

## SIRTNI EGISH.

Ta'rif. Sirt ustidagi chiziq yoyining uzunligini o'zgartir- masdan sirtning uzluksiz deformatsiyalashga **sirtning egish** deb ataladi.

Masalan, bir varaq qog'ozni o'rab, uni silindrga yoki konusga aylantirish qog'ozni **egish** demakdir.

**F** sirtning egish natijasida  $F^1$  sirt hosil qilingan bo'lsin. U vaqtda bu sirtlardagi bir-biriga mos yoylarning uzunligi tengdir:

$$\int_a^b \sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2} = \int_a^b \sqrt{E^1du^2 + 2F^1dudv + G^1dv^2}.$$

Bu tenglik chiziqlardagi istalgan  $M(t)$  nuqta, ya'ni istalgan  $t$  parametr uchun bajarilgani sababli, integral ostidagi ifodalar bir-biriga aynan tengdir:

$$Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 = E^1du^2 + 2F^1dudv + G^1dv^2.$$

Bu shart esa istalgan  $du:dv$  yo'nalish uchun bajarilgani sababli, kvadratik formalarning koeffitsiyentlari teng bo'ladi:

$$E = E^1, \quad F = F^1, \quad G = G^1.$$

Shunday qilib ushbu teorema keldik.

**Teorema.** Sirtning egishda uning birinchi kvadratik formasi-ning koeffitsiyentlari o'zgarmaydi.

Sirt ustidagi ikki chiziq orasidagi burchak, sirt ustidagi sohaning yuzi va sirtning to'la egriligi faqat birinchi kvadratik forma koeffitsiyentlariga bog'liq bo'lgani uchun, yuqoridagi teorema asosan ushbu natijaga kelamiz.

**Natija.** Sirtning egishda sirt ustidagi ikki chiziq orasidagi burchak, sirt ustidagi sohaning yuzi va sirtning to'la egriligi o'zgarmaydi.

## BIRINCHI KVADRATIK FORMASI

Bizga  $F$  sirt  $r = r(u, v)$  vektor tenglamasi bilan berilsin. Bu tenglamani differensiallaylik:

$$dr = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv.$$

Bu tenglikni kvadratga ko'taraylik:

$$dr^2 = r_u^2 du^2 + 2r_u r_v du dv + r_v^2 dv^2.$$

Yozishni soddalashtirish maqsadida

$$\vec{r}_u = \mathbf{E}, \quad r_u r_v = \mathbf{F}, \quad \vec{r}_v = \mathbf{G} \quad (1)$$

belgilashlarni kiritsak:

$$dr^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$$

hosil bo'ladi.

Ta'rif. Ushbu

$$dr^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$$

ifodaga sirtning **birinchi kvadratik formasi** deb ataymiz va  $F_1$  bilan belgilaymiz.

Demak,

$$F_1 = dr^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2 \quad (2).$$

Sirtning birinchi kvadratik formasini ba'zan sirtning **chiziqli elementi** deb ham ataladi.

$E, F, G$  larga sirt birinchi kvadratik formasining **koeffitsiyentlari** deb ataladi.

(1) belgilashlarga asosan,  $E$  va  $G$  ning har biri noldan katta bo'lib,  $F$  esa manfiy, nol va musbat qiymatlarni qabul qilishi mumkin.

$F_1 = dr^2$  bo'lgani uchun, sirtning birinchi kvadratik formasi har doim musbatdir.

Sirt  $x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v)$  parametrik tenglamalari bilan berilsa

$$\begin{aligned} \vec{r} &= x \cdot i + y \cdot j + z \cdot k, \\ r_u &= x_u \cdot i + y_u \cdot j + z_u \cdot k, \\ r_v &= x_v \cdot i + y_v \cdot j + z_v \cdot k \end{aligned}$$

bo'lgani uchun, sirt birinchi kvadratik formasining koeffitsiyentlari quyidagicha bo'ladi:

$$\left. \begin{aligned} E &= x_u^2 + y_u^2 + z_u^2, \\ F &= x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v, \\ G &= x_v^2 + y_v^2 + z_v^2 \end{aligned} \right\} \quad (3).$$

(3) formula parametrik tenglamalari bilan berilgan sirt birinchi kvadratik formasining koeffitsiyentlarini topish formulasi bo'ladi.

Agar sirt  $z = f(x, y)$  oshkor tenglamasi bilan berilsa,  $u = x, v = y$  belgilashlar kiritamiz. U vaqtda  $x_u = 1, x_v = 0, y_u = 0, y_v = 1$  bo'lgani uchun, (3) formulalarga asosan:

$$E = 1 + z_x^2,$$

$$F = z_x z_y,$$

$$G = 1 + z_y^2.$$

Bu erda  $z_x = p, z_y = q$  belgilashlarni kiritsak:

$$\left. \begin{aligned} E &= 1 + p^2, \\ F &= pq, \\ G &= 1 + q^2 \end{aligned} \right\} \quad (4).$$

(4) formula oshkor tenglamasi bilan berilgan sirt birinchi kvadratik formasining koeffitsiyentlarini topish formulasi bo'ladi.

1-misol.  $x = u \cos v$ ,  $y = u \sin v$ ,  $z = u^2$  aylanma paraboloidning birinchi kvadratik formasini toping.

Echish. Sirt parametrik tenglamalari bilan berilgan. Shuning uchun sirt birinchi kvadratik formasining koeffitsiyentlarini topish uchun (3) formuladan foydalanamiz. Sirtning berilgan parametrik tenglamalaridan xususiy hosilalar olamiz:

$$\begin{aligned} x_u &= \cos v, & y_u &= \sin v, & z_u &= 2u, \\ x_v &= -u \sin v, & y_v &= u \cos v, & z_v &= 0. \end{aligned}$$

Bu topilgan hosilalarni (3) formulalarga qo'yamiz:

$$E = \cos^2 v + \sin^2 v + 4u^2 = 1 + 4u^2,$$

$$F = -u \cos v \cdot \sin v + u \sin v \cdot \cos v = 0,$$

$$G = u^2 \sin^2 v + u^2 \cos^2 v = u^2.$$

$E$ ,  $F$ ,  $G$  larning bu qiymatlarini (2) formulaga qo'ysak, aylanma paraboloidning birinchi kvadratik formasi hosil bo'ladi:

$$\int_1 \int_2 \mathbf{F}_1 = (1 + 4u^2) du^2 + u^2 dv^2.$$

2-misol.  $z = \frac{1}{2}(ax + by)$  sirtning birinchi kvadratik forma-sini toping.

Echish. Sirt oshkor tenglamasi bilan berilgan. Shu sababli sirt birinchi kvadratik formasining koeffitsiyentlarini topishda (4) formuladan foydalanamiz. Sirtning berilgan tenglamasidan xususiy hosilalar olamiz:

$$p = z_x = ax, \quad q = z_y = by.$$

$p$  va  $q$  larning topilgan bu qiymatlarini (4) formulaga qo'yamiz:

$$E = 1 + a^2x^2,$$

$$F = abxy,$$

$$G = 1 + b^2y^2.$$

$E$ ,  $F$ ,  $G$  larning topilgan bu qiymatlarini (2) formulaga qo'ysak, sirtning birinchi kvadratik formasi hosil bo'ladi:

$$\mathbf{F}_1 = (1 + a^2x^2)dx^2 + 2abxydx dy + (1 + b^2y^2)dy^2.$$

## SIRT USTIDAGI CHIZIQ.

Sirt ustidagi chiziqning vektor tenglamasi, sirt ustidagi chi-ziqning parametrik tenglamalari, sirt ustidagi chiziqning egri chizikli koordinatalarga nisbatan tenglamalari, loksodrom, sirt ustidagi chiziq yoyining uzunligi.

Bizga  $\mathbf{F}$  regulyar sirt  $r = r(u, v)$  vektor tenglamasi bilan berilsin. Bu sirt ustida shunday nuqtalar to'plamini qaraylikki, ularning  $u$  va  $v$  egri chizikli koordinatalari biror  $t$  erkli o'zgaruvchining funksiyalari bo'lsin:

$$\left. \begin{aligned} u &= u(t), \\ v &= v(t) \end{aligned} \right\} \quad (1),$$

bunda  $u(t)$  va  $v(t)$  - uzluksiz va differensiullanuvchi funksiyalar bo'lsin. Bu tenglamalar berilgan sirtida yotuvchi qandaydir chiziqni ifodalaydi. Chunki sirtning  $r = r(u, v)$  vektor tenglamasiga (1) ifodalarni qo'ysak:

$$r = r(u, v) = r(u(t), v(t)) = r(t)$$

ya'ni

$$r = r(t) \quad (2)$$

tenglama hosil bo'lib, chiziqlar nazariyasidan ma'lumki, bu (2) tenglama chiziqning vektor tenglamasidir.

Shuning uchun (2) tenglamaga sirt ustidagi **chiziqning vektor tenglamasi** deb ataladi. (1) tenglamalar sistemasiga sirt ustidagi **chiziqning paramet-rik tenglamalari** deyiladi. (1) tenglamalardan  $t$  ni yo'qotish mumkin:

$$f(u, v) = 0 \quad (3).$$

Bu (3) tenglama sirt ustidagi chiziqning egri chizikli koor-dinatalarga nisbatan **oshkormas tenglamasi** deyiladi.

(3) tenglamani  $v$  ga nisbatan echsak:

$$v = v(u) \quad (4).$$

(4) tenglama sirt ustidagi chiziqning egri chizikli koor-dinatalarga nisbatan **oshkor tenglamasi** deyiladi.

Xususiyl holda:

$$u = const$$

$v$  chiziqning tenglamasi bo'ladi.

$$v = const$$

esa  $u$  chiziqning tenglamasi bo'ladi.

Sirtidagi chiziqning (2) tenglamasini  $t$  bo'yicha differentsiallasak ushbu

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = r_u \frac{du}{dt} + r_v \frac{dv}{dt} \quad (5)$$

vektor hosil bo'lib, u chiziq urinmasi bo'ylab yo'naladi.  $r_u$  va  $r_v$  vektorlar esa shu nuqtadan o'tuvchi koordinat chiziqlarning urinmalari bo'ylab yo'naladi.

Tekislikda chiziqning yo'nalishi  $dx:dy$  yoki  $dy:dx$  nisbat-larga bog'liq bo'lgani kabi, sirt ustidagi chiziqning yo'nalishi ham  $dv:du$  yoki  $du:dv$  nisbatlarga bog'liqdir. Haqiqatan, (5) tenglikdan ko'rinadiki,  $\frac{d\vec{r}}{dt}$  hosila

$\vec{r}_u$  va  $\vec{r}_v$  hamda  $\frac{du}{dt}$  va  $\frac{dv}{dt}$  larning funksiyasidir. Biroq  $\vec{r}_u$  va  $\vec{r}_v$

vektorlar berilgan nuqtada o'zgarmas vektorlar bo'ladi. Shu sababli  $\frac{d\vec{r}}{dt}$  hosila

$\frac{du}{dt}$  va  $\frac{dv}{dt}$  larning funksiyasi bo'ladi.  $\frac{du}{dt} : \frac{dv}{dt}$  nisbatni olsak  $du:dv$  hosil

bo'ladi, yoki  $\frac{dv}{dt} : \frac{du}{dt}$  nisbatni olsak  $dv:du$  hosil bo'ladi.

Endi sirt ustidagi chiziqqa misol keltiramiz.

**LOKSODROM.** Sferaning hamma meridianlarini bir xil burchak ostida kesib o'tuvchi chiziqqa **loksodrom** deb ataladi.

Uning tenglamasini topaylik.

Sferaning vektor tenglamasini qaraymiz:

$$r = \{R \cos u \cos v; R \cos u \sin v; R \sin u\} \quad (6).$$

Meridianning tenglamasi shu (6) tenglamada  $v = const$  bo'lgan holdir.



Meridianning urinmasi bo'ylab yo'naluvchi vektorni topamiz. U (6) dan  $v = const$  bo'lgan holda topiladi:

$$\vec{r}_u = \{-R \sin u \cos v; -R \sin u \sin v; R \cos u\} \quad (7).$$

Loksodromning tenglamasini  $v = v(u)$  shaklda izlaymiz. U vaqtda ta'rifga asosan:

$$\frac{\vec{r}_u \frac{d\vec{r}}{du}}{|\vec{r}_u| \left| \frac{d\vec{r}}{du} \right|} = \cos m \quad (8)$$

bo'ladi.  $v = v(u)$  deb,  $\frac{d\vec{r}}{du}$  ni (6) tenglikdan topamiz:

$$\frac{d\vec{r}}{du} = \{-R \sin u \cdot \cos v - R \cos u \cdot \sin v \frac{dv}{du}; -R \sin u \cdot \sin v + R \cos u \cdot \cos v \frac{dv}{du}; R \cos u\} \quad (9).$$

(7) dan

$$|\vec{r}_u| = \sqrt{R^2 \sin^2 u \cos^2 v + R^2 \sin^2 u \sin^2 v + R^2 \cos^2 u} = R,$$

(9) dan

$$\begin{aligned} \left| \frac{d\vec{r}}{du} \right| &= \sqrt{\left( R \sin u \cos v + R \cos u \sin v \frac{dv}{du} \right)^2 + \left( -R \sin u \sin v + R \cos u \cos v \frac{dv}{du} \right)^2 + R^2 \cos^2 u} = \\ &= \sqrt{R^2 \sin^2 u + R^2 \cos^2 u \left( \frac{dv}{du} \right)^2 + R^2 \cos^2 u} = R \cdot \left( \sqrt{1 + \cos^2 u \left( \frac{dv}{du} \right)^2} \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (7) \text{ va } (9) \text{ dan: } \vec{r}_u \frac{d\vec{r}}{du} &= R \sin u \cos v \left( R \sin u \cos v + R \cos u \sin v \frac{dv}{du} \right) + \\ &+ R \sin u \sin v \left( -R \sin u \sin v + R \cos u \cos v \frac{dv}{du} \right) + R^2 \cos^2 u = R^2. \end{aligned}$$

$|\vec{r}_u|, \left| \frac{d\vec{r}}{du} \right|$  va  $\vec{r}_u \frac{d\vec{r}}{du}$  larning qiymatlarini (8) ga qo'yib, uni ixchamlasak:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1 + \cos^2 u \left( \frac{dv}{du} \right)^2}} &= \cos m, \\ 1 + \cos^2 u \left( \frac{dv}{du} \right)^2 &= \frac{1}{\cos^2 m}, \\ \cos^2 u \left( \frac{dv}{du} \right)^2 &= \frac{\sin^2 m}{\cos^2 m}, \\ \cos u \frac{dv}{du} &= \pm \operatorname{tg} m, \\ \frac{\cos u}{du} &= \pm \frac{\operatorname{tgm}}{dv}, \\ \frac{du}{\cos u} &= \pm dv \cdot \operatorname{ctg} m \quad (10). \end{aligned}$$

(10) tenglama loksodromning *differensial tenglamasi* bo'ladi.

Agar (10) differensial tenglamani integrallasak:

$$\ln \left| \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{u}{2} \right) \right| = \pm v \operatorname{ctg} m + \ln C$$

yoki

$$\operatorname{tg} \left| \frac{\pi}{4} + \frac{u}{2} \right| = C e^{\pm v \cdot \operatorname{ctg} m} \quad (11).$$

(11) formula loksodromning **oshkormas tenglamasi** bo'ladi. Bu (11) tenglamadagi  $\pm$  ishorasi sferada ikkita loksodrom mavjudligini ko'rsatadi.

## SIRTNING IKKINCHI KVADRATIK FORMASI

Bizga  $F$  regulyar sirt  $r = r(u, v)$  vektor tenglamasi bilan berilgan bo'lsin.

Ta'rif.  $F$  sirtning berilgan  $M$  nuqtasidagi urinma tekis-ligiga perpendikulyar bo'lgan birlik vektorga sirtning shu nuqtasidagi **birlik normal vektori** deb ataymiz va  $n$  bilan belgilaymiz

Agar  $M(u; v)$  nuqta  $F$  sirt bo'ylab harakatlansa,  $u$  vaqtda sirtning shu nuqtasidagi birlik normal vektori  $n$  ham harakatlana boradi, ya'ni bu  $n$  vektor  $u$  va  $v$  o'zgaruvchilarning vektor funk-tsiyasi bo'ladi:

$$n = n(u, v) \quad (1).$$

Sirtning vektor tenglamasini va (1) tenglamani differentsiallaymiz:

$$dr = r_u du + r_v dv,$$

$$dn = \vec{n}_u du + \vec{n}_v dv.$$

Bu  $dr$  va  $dn$  vektorlarni skalyar ko'paytiraylik:

$$dr \cdot dn = (r_u du + r_v dv)(n_u du + n_v dv) = r_u n_u du^2 + (r_u n_v + r_v n_u) du dv + r_v n_v dv^2.$$

Ta'rif. Ushbu

$$F_2 = -d^r \cdot d^n = -r_u n_u du^2 - (r_u n_v + r_v n_u) du dv - r_v n_v dv^2 \quad (2)$$

ifodaga sirtning **ikkinchi kvadratik formasi** deb ataladi.

Sirtning ikkinchi kvadratik formasi uchun quyidagi belgi-lashlarni kiritamiz:

$$\left. \begin{aligned} -r_u n_u &= D_{11} \\ (r_u n_v + r_v n_u) &= 2D_{12} \\ -r_v n_v &= D_{22} \end{aligned} \right\} \quad (3).$$

U vaqtda ikkinchi kvadratik forma ushbu ko'rinishni oladi:

$$F_2 = D du^2 + 2 D_{12} du dv + D_2 dv^2 \quad (4).$$

Bizga ma'lumki  $\vec{r}_u$  va  $\vec{r}_v$  vektorlar sirtning urinma tekis-ligiga parallel bo'lar edi. Demak, bu vektorlarning chiziqli kombina-tsiyasi bo'lgan  $dr = r_u du + r_v dv$  vektor ham sirtning urinma tekisligiga parallel bo'ladi. Ta'rifga asosan  $n$  vektor urinma tekislikka perpendikulyardir. Shuning uchun  $dr$  va  $n$  vektorlar o'zaro perpendikulyar bo'lib, ularning skalyar ko'paytmasi nolga teng bo'ladi:

$$dr \cdot n = 0.$$

Bu tenglikni differentsiallaylik:

$$d(d\vec{r} \cdot \vec{n}) = d^2 \vec{r} \cdot \vec{n} + d\vec{r} \cdot d\vec{n} = 0.$$

(2) ga asosan:

$$d^2 \vec{r} \cdot \vec{n} = -d\vec{r} \cdot d\vec{n} = \mathbf{F}_2.$$

Demak,

$$\mathbf{F}_2 = d^2 \vec{r} \cdot \vec{n}.$$

Bu erda

$$\vec{d}_2 \vec{r} = d(d\vec{r}) = d(r_u du + r_v dv) = r_{uu} du^2 + 2r_{uv} dudv + r_{vv} dv^2 + r_u ndu + r_v ndv$$

bo'lib,  $r_u \perp \vec{n}$  va  $r_v \perp \vec{n}$  bo'lgani uchun:

$$\mathbf{F}_2 = d^2 \vec{r} \cdot \vec{n} = r_{uu} ndu^2 + 2r_{uv} ndudv + r_{vv} ndv^2 + r_u ndu + r_v ndv = r_{uu} ndu + 2r_{uv} ndudv + r_{vv} ndv.$$

Demak,

$$\mathbf{F}_2 = r_{uu} ndu + 2r_{uv} ndudv + r_{vv} ndv.$$

Bu tenglama bilan (4) ni taqqoslasak, quyidagilar kelib chiqadi:

$$D = r_{uu} n, \quad D_1 = r_{uv} n, \quad D_2 = r_{vv} n \quad (5).$$

Yuqorida aytdikki,  $\vec{r}_u$  va  $\vec{r}_v$  vektorlar sirtning urinma tekisligiga parallel bo'ladi. Shuning uchun bu vektorlarning vektor ko'paytmasi bo'lgan  $[\vec{r}_u \vec{r}_v]$

vektor sirtning normaliga parallel bo'ladi. Demak,  $\frac{[\vec{r}_u \vec{r}_v]}{[\vec{r}_u \vec{r}_v]}$  birlik vektor sirtning

normali bo'ylab yo'naladi. Shu sababli bu vektorni sirt normalining birlik vektori sifatida olish mumkin, ya'ni:

$$\vec{n} = \frac{[\vec{r}_u \vec{r}_v]}{[\vec{r}_u \vec{r}_v]} = \frac{[\vec{r}_u \vec{r}_v]}{\sqrt{[\vec{r}_u \vec{r}_v]^2}} = \frac{[\vec{r}_u \vec{r}_v]}{\sqrt{r_u^2 r_v^2 - (r_u r_v)^2}}.$$

$\vec{n}$  vektorning bu qiymatini (5) tengliklarga qo'ysak:

$$D = r_{uu} \frac{[\vec{r}_u \vec{r}_v]}{\sqrt{r_u^2 r_v^2 - (r_u r_v)^2}} = \frac{r_{uu} [\vec{r}_u \vec{r}_v]}{\sqrt{r_u^2 r_v^2 - (r_u r_v)^2}} = \frac{(r_{uu} \vec{r}_u \vec{r}_v)}{\sqrt{r_u^2 r_v^2 - (r_u r_v)^2}}.$$

$$D_1 = r_{uv} \frac{[\vec{r}_u \vec{r}_v]}{\sqrt{r_u^2 r_v^2 - (r_u r_v)^2}} = \frac{r_{uv} [\vec{r}_u \vec{r}_v]}{\sqrt{r_u^2 r_v^2 - (r_u r_v)^2}} = \frac{(r_{uv} \vec{r}_u \vec{r}_v)}{\sqrt{r_u^2 r_v^2 - (r_u r_v)^2}}.$$

$$D_2 = r_{vv} \frac{[\vec{r}_u \vec{r}_v]}{\sqrt{r_u^2 r_v^2 - (r_u r_v)^2}} = \frac{r_{vv} [\vec{r}_u \vec{r}_v]}{\sqrt{r_u^2 r_v^2 - (r_u r_v)^2}} = \frac{(r_{vv} \vec{r}_u \vec{r}_v)}{\sqrt{r_u^2 r_v^2 - (r_u r_v)^2}}.$$

Demak,

$$D = \frac{(r_{uu} \vec{r}_u \vec{r}_v)}{\sqrt{r_u^2 r_v^2 - (r_u r_v)^2}}, \quad D_1 = \frac{(r_{uv} \vec{r}_u \vec{r}_v)}{\sqrt{r_u^2 r_v^2 - (r_u r_v)^2}}, \quad D_2 = \frac{(r_{vv} \vec{r}_u \vec{r}_v)}{\sqrt{r_u^2 r_v^2 - (r_u r_v)^2}} \quad (6).$$

(3) va (6) formulalar vektor tenglamasi bilan berilgan sirt ikkinchi kvadrat formasining koeffitsiyentlarini topish formulari bo'ladi.

$\mathbf{F}$  regulyar sirt  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$ ,  $z = z(u, v)$  parametrik tenglamalari bilan berilsin. Bu vaqtda:

$$\vec{r}_u = x_u \vec{i} + y_u \vec{j} + z_u \vec{k}, \quad \vec{r}_v = x_v \vec{i} + y_v \vec{j} + z_v \vec{k},$$

$$\vec{r}_{uu} = x_{uu} \vec{i} + y_{uu} \vec{j} + z_{uu} \vec{k}, \quad \vec{r}_{uv} = x_{uv} \vec{i} + y_{uv} \vec{j} + z_{uv} \vec{k}, \quad \vec{r}_{vv} = x_{vv} \vec{i} + y_{vv} \vec{j} + z_{vv} \vec{k}$$

bo'lib, koordinatalari bilan berilgan uch vektorning aralash ko'payt-masi quyidagicha aniqlanar edi:

$$\vec{r}_{uu}, \vec{r}_{uv}, \vec{r}_v = \begin{vmatrix} x_{uu} & y_{uu} & z_{uu} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}, \quad \vec{r}_{uv}, \vec{r}_u, \vec{r}_v = \begin{vmatrix} x_{uv} & y_{uv} & z_{uv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}, \quad \vec{r}_{vv}, \vec{r}_u, \vec{r}_v = \begin{vmatrix} x_{vv} & y_{vv} & z_{vv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}.$$

Sirt birinchi kvadratik formasining koeffitsiyentlari:

$$E = r_u^2, \quad F = r_u r_v, \quad G = r_v^2.$$

Bu tengliklarni hisobga olib, (6) tengliklardan quyidagi ifodalarni yoza olamiz:

$$D = \frac{\begin{vmatrix} x_{uu} & y_{uu} & z_{uu} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG - F^2}}; \quad D_1 = \frac{\begin{vmatrix} x_{uv} & y_{uv} & z_{uv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG - F^2}}; \quad D_2 = \frac{\begin{vmatrix} x_{vv} & y_{vv} & z_{vv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG - F^2}} \quad (7).$$

Bu (7) formulalar parametrik tenglamalari bilan berilgan sirt ikkinchi kvadratik formasining koeffitsiyentlarini topish formulalari deyiladi.

Agar sirt  $z = f(x, y)$  oshkor tenglamasi bilan berilsa,  $x = u$ ,  $y = v$  almashtirishlarini olib, (7) formuladan quyidagi ifodalarni hosil qilamiz:

$$D = \frac{z_{xx}}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}; \quad D_1 = \frac{z_{xy}}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}; \quad D_2 = \frac{z_{yy}}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} \quad (8).$$

Bu (8) formulalar oshkor tenglamasi bilan berilgan sirt ikkinchi kvadratik formasining koeffitsiyentlarini topish formulalari deyiladi.

Bu holda sirtning ikkinchi kvadratik formasi ushbu ko'ri-nishni oladi:

$$F_2 = Ddx^2 + 2D_1dxdy + D_2dy^2 \quad (9).$$

1-misol.  $x = u \cos v$ ,  $y = u \sin v$ ,  $z = av$  to'g'ri gelikoidning ik-kinchi kvadratik formasini toping.

Echish. To'g'ri gelikoidning parametrik tenglamalaridan hosi-lalar olamiz:

$$\begin{aligned} x_u &= \cos v, & y_u &= \sin v, & z_u &= 0, \\ x_v &= -u \sin v, & y_v &= u \cos v, & z_v &= a, \\ x_{uu} &= 0, & y_{uu} &= 0, & z_{uu} &= 0, \\ x_{uv} &= -\sin v, & y_{uv} &= \cos v, & z_{uv} &= 0, \end{aligned}$$

$$x_{vv} = -u \cos v, \quad y_{vv} = -u \sin v, \quad z_{vv} = 0.$$

Sirt birinchi kvadratik formasining koeffitsiyentlarini topamiz:

$$E = \cos^2 v + \sin^2 v = 1,$$

$$F = -u \sin v \cos v + u \sin v \cos v = 0,$$

$$G = u^2 \sin^2 v + u^2 \cos^2 v + a^2 = u^2 + a^2.$$

Sirt ikkinchi kvadratik formasining koeffitsiyentlarini topamiz. Sirt parametrik tenglamalari bilan berilgani uchun (7) formulalardan foydalanamiz.

$$D = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u \sin v & u \cos v & a \end{vmatrix}}{\sqrt{u^2 + a^2}} = 0, \quad D_1 = \frac{\begin{vmatrix} -\sin v & \cos v & 0 \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u \sin v & u \cos v & a \end{vmatrix}}{\sqrt{u^2 + a^2}} = -\frac{a}{\sqrt{u^2 + a^2}},$$

$$D_2 = \frac{\begin{vmatrix} -u \cos v & -u \sin v & 0 \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u \sin v & u \cos v & a \end{vmatrix}}{\sqrt{u^2 + a^2}} = 0$$

Topilgan qiymatlarni (4) formulaga qo'yamiz:

$$\Phi_2 = -\frac{2adudv}{\sqrt{u^2 + a^2}}.$$

Bu to'g'ri gelikoidning ikkinchi kvadratik formasi bo'ladi.

2-misol.  $z = xy$  sirtning ikkinchi kvadratik formasini toping.

Echish. Sirt tenglamasidan xususiy hosilalar olamiz:

$$\begin{aligned} p = z_x = y, & & q = z_y = x, \\ z_{xx} = 0, & & z_{xy} = 1, & & z_{yy} = 0. \end{aligned}$$

Sirt oshkor tenglamasi bilan berilgani uchun (8) formula-lardan foydalanib, ikkinchi kvadratik formaning koeffitsiyentlarini topamiz:

$$D = \frac{0}{\sqrt{1+y^2+x^2}} = 0; \quad D_1 = \frac{1}{\sqrt{1+y^2+x^2}}; \quad D_2 = \frac{0}{\sqrt{1+y^2+x^2}} = 0.$$

Topilgan qiymatlarni (9) formulaga qo'yamiz:

$$F_2 = \frac{2dxdy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}.$$

## SIRT USTIDAGI CHIZIQNING EGRILIGI.

**Tayanch iboralar:** Sirt ustidagi chiziqning egriligi, normal kesim, normal kesimning egriligi, Mene formulasi, egrilik (Dyupen) indiktrisasi, indiktrisa tenglamasi, sirtning elliptik nuqta, sirtning giperbolik nuqta, sirtning parabolik nuqta, qo'shma yo'nalishlar, bosh yo'nalishlar, bosh egriliklar.

Sirt ikkinchi kvadratik forma tushunchasining kiritilishi, sirt ustidagi chiziqning egriligini aniqlashga imkon beradi.

Bizga  $\mathbf{F}$  regulyar sirt  $r = r(u, v)$  vektor tenglamasi bilan berilsin. Bu sirtta yotuvchi  $\gamma$  chiziqni qaraylik.  $\gamma$  chiziqqa  $s$  tabiiy parametrni kiritamiz. U vaqtda bu chiziq nuqtalarining  $u$  va  $v$  egri chiziqli koordinatalari  $s$  tabiiy parametrning funksiyalari bo'ladi:

$$u = u(s), \quad v = v(s).$$

Bu ifodalarni sirtning vektor tenglamasiga qo'ysak:

$$r = r(u, v) = r(u(s), v(s)) = r(s)$$

yoki

$$r = r(s) \tag{1}$$

hosil bo'ladi.

Bu (1) tenglama  $\mathbf{F}$  sirt ustidagi  $\gamma$  chiziqning tabiiy para-metrli vektor tenglamasi bo'ladi.

Chiziqlar nazariyasida ma'lumki

→ · →

$$r = kv .$$

Bu erda  $\vec{v}$  vektor  $\gamma$  chiziq bosh normalining birlik vektori,  $k$  esa chiziqning egriligi.

$\vec{r}$  vektor bilan sirt birlik normal vektori  $\vec{n}$  ning skalyar ko'paytmasini qaraylik:

$$\vec{r} \cdot \vec{n} = kv \vec{n} = k \cos \theta .$$

Demak,

$$\vec{r} \cdot \vec{n} = k \cos \theta , \quad (2)$$

bu erda  $\theta = \angle(\vec{v}, \vec{n})$

Ikkinchi tomondan:

$$\vec{r} = r_u \frac{du}{ds} + r_v \frac{dv}{ds}$$

va

$$\vec{r} = r_{uu} \frac{du^2}{ds^2} + 2r_{uv} \frac{du dv}{ds ds} + r_{vv} \frac{dv^2}{ds^2} + r_u \frac{d^2u}{ds^2} + r_v \frac{d^2v}{ds^2}$$

bo'lgani uchun

$$\begin{aligned} \vec{r} \cdot \vec{n} &= \left( r_{uu} \frac{du^2}{ds^2} + 2r_{uv} \frac{du dv}{ds ds} + r_{vv} \frac{dv^2}{ds^2} + r_u \frac{d^2u}{ds^2} + r_v \frac{d^2v}{ds^2} \right) \cdot \vec{n} = \\ &= r_{uu} n \frac{du^2}{ds^2} + 2r_{uv} n \frac{du dv}{ds ds} + r_{vv} n \frac{dv^2}{ds^2} + r_u n \frac{d^2u}{ds^2} + r_v n \frac{d^2v}{ds^2} . \end{aligned}$$

Bu erda  $\vec{r}_u \perp \vec{n}$  va  $\vec{r}_v \perp \vec{n}$  bo'lib,  $\vec{r}_u \cdot \vec{n} = 0$  va  $\vec{r}_v \cdot \vec{n} = 0$  bo'ladi.

Shuning uchun:

$$\begin{aligned} \vec{r} \cdot \vec{n} &= r_{uu} n \frac{du^2}{ds^2} + 2r_{uv} n \frac{du dv}{ds ds} + r_{vv} n \frac{dv^2}{ds^2} = D \frac{du^2}{ds^2} + 2D_1 \frac{du dv}{ds ds} + D_2 \frac{dv^2}{ds^2} = \\ &= \frac{D du^2 + 2D dudv + D dv^2}{ds^2} = \frac{\Phi}{\Phi_1} . \end{aligned}$$

Demak,

$$\vec{r} \cdot \vec{n} = \frac{\Phi_2}{\Phi_1} \quad (3).$$

(2) va (3) tengliklarga asosan:

$$k \cos \theta = \frac{\Phi_2}{\Phi_1} \quad (4).$$

Bu munosabat sirtlar nazariyasining asosiy formulalaridan biri bo'ladi. Uning o'ng tomoniga ikkala kvadratik formaning koeffi-tsiyentlari kiradi. Tayin  $M$  nuqta berilganda bu koefitsiyentlar o'zgarimas sonlar bo'ladi.

Demak,  $k \cos \theta$  ifoda faqatgina  $du:dv$  nisbatga, ya'ni  $\gamma$  chiziqning yo'nalishiga bog'liqdir. Shu sababli  $M$  nuqtada bitta urinmaga ega bo'lgan  $F$  sirtida yotuvchi hamma chiziqlar uchun  $k \cos \theta$  bir xil bo'ladi, ya'ni

$$k \cos \theta = const \quad (5).$$

Endi  $F$  sirdagi  $\gamma$  chiziq sifatida normal kesim deb ataluvchi chiziqni qaraymiz.

Ta'rif. Sirtning berilgan nuqtasidagi normalidan o'tuvchi tekislik bilan shu sirtni kesishdan hosil bo'lgan chiziqqa **normal kesim** deb ataladi. Normal kesimning bosh normal kesuvchi tekislikda yotgani uchun, bosh normalning birlik vektori  $\vec{v}$  va sirt normalining birlik vektori  $n$  bir to'g'ri chiziqda yotib, ular orasidagi burchak yoki  $0^\circ$ , yoki  $180^\circ$ , ya'ni  $\cos \theta = \pm 1$  bo'ladi. Shunday qilib, agar normal kesimning egriligini  $k_o$  deb belgilasak, (5) ga asosan

$$k \cos \theta = \pm k_o \quad (6)$$

hosil bo'ladi. Bu (6) tenglik **Mene formulasi** deb ataladi.

(4) va (6) ga asosan:

$$\frac{\Phi_2}{\Phi_1} = \pm k_o \quad (7)$$

bo'lishligi kelib chiqadi.

Bu formula sirtning birinchi va ikkinchi kvadratik formalari bilan sirt normal kesimining egriligi orasida bog'lanishni ifodalaydi.

### **Nazorat savollari.**

1. Sirtning qanday berilish usullari mavjud.
2. Sirtning birinchi va ikkinchi kvadratik formasining geometrik manosi
3. Sirtning ichki va tashqi geometriyasi nima

### **ADABIYOTLAR RO'YXATI**

1. Avilova L.V., Bolotyuk V.A., Bolotyuk L.A. Analiticheskaya geometriya i lineynaya algebra// 2013. Izdanie: 1-ye izd. 421 s.
2. Aleksandrov A.D., Nesvetaev N.Yu. Geometriya, M.: Nauka, 1990. – 672 s.
3. Bobenko A.I. (Ed.) Advances in Discrete Differential Geometry// Springer, 2016. — 439 p. — (Mathematics). — ISBN: 3662504464  
I. M. Rikhsiboev and N. S. Mohamed, Engineering Mathematics 2, Malaysia, 2019.
4. Manfredo P. Do Carmo. Differential geometry of Curves and surface // Dover publications, Inc. Mineola, New York, 2016. – 529 rr.
5. Matematik analiz./ Azlarov T., Mansurov H.: Universitet va ped. institutlar talabalari uchun darslik: 2 qismli. 1-q.— Qayta ishlangan va to'ldirilgan 2-nashri.— T.: Uqituvchi, 1994.—416 b.
6. Dodajonov N., Yunusmetov R., Abdullayev T. Geometriya, II qism.

7. Narmanov A. Differensial geometriya.
8. Sobirov M.A., Yusupov A.Yo. Differensial geometriya kursi.
9. Ergashev B. Evklid fazosida chiziqlar.
10. Ergashev B. Evklid fazosida sirtlar.
11. Belko I.V. i dr. Sbornik zadach po differensialnoy geometrii.
12. Sh.Murodov, L.Xakimov, A.Xolmurzayev, M.Jumayev, A.To‘xtayev. «Chizma geometriya». Oliy texnika o‘quv yurtlari uchun darslik. Toshkent, 2005.

### **Internet saytlar**

1. [www.edu.uz](http://www.edu.uz).
2. [www.bimm.uz](http://www.bimm.uz)
3. [www.arxiv.org](http://www.arxiv.org)
4. [www.ams.mathscinet.org](http://www.ams.mathscinet.org)
5. <http://www.princeton.edu/main/>
6. <https://www.stanford.edu>
7. <http://mathins.uz>
8. <http://ziyonet.uz>
9. <http://dmvn.mexmat.net/>



## AMALIY MASHG'ULOT MATERIALLARI.

### 1 – AMALIYOT. Elementar geometriyaning asosiy elementlari va unga doir masalalar

**1-teorema.** Ikkita to'g'ri chiziq bittadan ortiq bo'lmagan umumiy nuqtaga ega; ikkita tekislik yoki umumiy nuqtaga ega emas yoki umumiy to'g'ri chiziqqa ega; tekislik va unda yotmaydigan to'g'ri chiziq bittadan ortiq bo'lmagan umumiy nuqtaga ega.

**Isbot.** Birinchi tasdiqning isboti  $I_2$  aksiomadan kelib chiqadi. Ya'ni, teskarisini faraz qilamiz.  $a$  va  $b$  to'g'ri chiziqlar bir-biridan farqli bo'lib, umumiy  $C$  nuqtadan tashqari  $D$  nuqtaga ham ega bo'lsin. U holda,  $C, D$  nuqtalar  $a, b$  to'g'ri chiziq'larga tegishli ekani kelib chiqadi.  $C$  va  $D$  nuqtalar  $a, b$  to'g'ri chiziq'larga tegishliligidan  $I_2$  aksiomaga ko'ra  $a$  to'g'ri chiziq bilan  $b$  to'g'ri chiziq ustma-ust tushadi. Bu ziddiyat tasdiqni isbotlaydi.

**2-teorema.** Tog'ri chiziq va unda yotmaydigan nuqta, hamda ikkita kesishuvchi to'g'ri chiziqlar orqali bitta va faqat bitta tekislik o'tadi.

**Isbot.** Birinchi tasdiqni isbotlaymiz.  $B$  nuqta  $a$  to'g'ri chiziqqa tegishli emas deb faraz qilaylik.  $I_3$  aksiomaga ko'ra  $a$  to'g'ri chiziqda kamida ikkita nuqta mavjud. Bu nuqtalarni  $P$  va  $Q$  deb belgilaylik.  $I_4$  aksiomaga ko'ra  $B, P, Q$  nuqtadan o'tuvchi  $\pi$  tekislik mavjud.  $I_6$  aksiomaga ko'ra  $\pi$  tekislik  $a$  to'g'ri chiziq orqali o'tadi.  $I_5$  aksiomaga ko'ra bir to'g'ri chiziqda yotmaydigan  $B, P, Q$  nuqtadan o'tuvchi tekislik yagona ravishda aniqlanganligi uchun  $a$  to'g'ri chiziq va  $B$  nuqtadan o'tuvchi  $\pi$  dan boshqa tekislik mavjud emas.

Endi ikkinchi tasdiqni isbotlaymiz.  $a$  va  $b$  to'g'ri chiziqlar  $C$  nuqtada kesishadi deb faraz qilaylik.  $I_3$  aksiomaga ko'ra  $a$  to'g'ri chiziqda  $C$  dan farqli  $A$  nuqta  $b$  to'g'ri chiziqda  $C$  dan farqli  $B$  nuqta mavjud.  $A, B, C$  nuqtalar bir to'g'ri chiziqda yotmaydi.  $I_4$  aksiomaga ko'ra  $A, B, C$  larning har biridan o'tuvchi  $\pi$  tekislik mavjud.  $I_6$  aksiomaga ko'ra  $\pi$  tekislik  $a$  va  $b$  to'g'ri chiziq'lardan o'tadi.  $I_5$  aksiomaga ko'ra bu tekislik yagona. 5.2-teorema isbotlandi.

**3-teorema.**  $I_8$  aksiomaga ko'ra  $\pi$  tekislikda yotmaydigan  $B$  nuqta mavjud.  $I_3$  aksiomaga ko'ra  $AB$  to'g'ri chiziqdan tashqarida  $C$  nuqta mavjud.  $A$  nuqta  $ABC$  va  $\pi$  tekisliklarning umumiy nuqtasi ekanidan,  $I_7$  aksiomaga ko'ra ularning yana kamida bitta umumiy  $D$  nuqtasi bor. Shunday qilib,  $\pi$  tekislikda  $A$  nuqtadan tashqari  $D$  nuqta ham mavjud.  $I_8$  aksiomaga ko'ra  $ABD$  tekislikda yotmaydigan  $E$  nuqta mavjud.  $I_4$  aksiomaga ko'ra,  $ABE$  tekislik mavjud,  $I_7$  aksiomaga ko'ra,  $ABE$  va  $\pi$  tekisliklar  $A$  dan farqli umumiy  $F$  nuqtaga ( $I_6$  aksiomaga ko'ra  $F$  nuqta  $AB$  to'g'ri chiziqda yotmaydi).  $F$  va  $D$  nuqtalar  $AB$  to'g'ri chiziqda yotmasligidan, 1-teoremanin ikkinchi tasdig'iga ko'ra ular  $ABF$  va  $ABD$  tekisliklarning umumiy nuqtalari bo'la olmaydi, bu yerda  $D$  va  $F$  nuqtalar har xil ekani kelib chiqadi. Shunday qilib,  $\pi$  tekislikda uchta  $A$ ,  $D$ ,  $F$  turlicha nuqtalar mavjud ekan. 3-teorema isbotlandi.

### **Beshinchi postulat va undan kelib chiqadigan natijalar**

Ikki to'g'ri chiziqni kesuvchi to'g'ri chiziq ular bilan ichki bir tomonli burchaklar hosil qiladi, bu ikki to'g'ri chiziq ichki bir tomonli burchaklar yig'indisi ikki to'g'ri burchakdan kichik bo'lgan tomonda kesishadi.

Evklid aksiomalari tizimining, shu jumladan uning postulatlarining eng muhim kamchiliklari uning to'liq emasligi, ya'ni geometriyani qat'iy mantiqiy qurish uchun etarli emasligi bo'lib, unda har bir jumla, agar u aksiomalar ro'yxatida bo'lmasa, bo'lishi kerak oxirgilaridan mantiqiy ravishda xulosa qilingan. Shuning uchun Evklid teoremlarni isbotlashda har doim ham aksiomalarga asoslanmagan, balki sezgi, vizualizatsiya va "sezgi" idroklarga murojaat qilgan. Masalan, u "oraliq" tushunchasiga sof vizual xarakterni bergan; u aylananing ichki nuqtasidan o'tuvchi to'g'ri chiziq, albatta, uni ikkita tayoqcha kesib o'tishi kerak, deb so'zsiz taxmin qildi. Shu bilan birga, u mantiqqa emas, balki faqat ko'rinishga asoslangan edi; u hech qayerda bu haqiqatning isbotini keltirmagan va bera olmagan, chunki unda davomiylik aksiomalari yetishmagan. Unda boshqa ba'zi aksiomalar ham yo'q, ularsiz teoremlarni qat'iy mantiqiy isbotlash mumkin emas.

Ammo beshinchi postulatga kelsak, Evklid postulatlarining haqiqatiga hech kim shubha qilmadi. Ayni paytda, antik davrda, aynan parallellar postulati bir qator geometriyachilarning alohida e'tiborini tortdi, ular uni postulatlar qatoriga qo'yishni g'ayritabiiy deb hisoblashdi. Bu, ehtimol, V postulatning nisbatan kamroq ravshanligi va ravshanligi bilan bog'liq edi: bilvosita, u tekislikning istalgan, o'zboshimchalik bilan uzoq qismlariga erishish mumkinligini taxmin qiladi, faqat to'g'ri chiziqlar cheksiz ravishda uzaytirilganda topiladigan xususiyatni ifodalaydi.

Evklidning o'zi va ko'plab olimlar parallellar postulatinini isbotlashga harakat qilishdi. Ba'zilar parallellar postulatinini V postulatning o'zidan foydalanmasdan, faqat boshqa postulatlardan va undan chiqarish mumkin bo'lgan teoremlardan foydalangan holda isbotlashga harakat qilishdi. Bunday urinishlarning barchasi muvaffaqiyatsiz tugadi. Ularning umumiy kamchiligi shundan iboratki, isbotlanayotgan postulatga ekvivalent bo'lgan ba'zi bir taxmin isbotda bilvosita qo'llanilgan. Boshqalar parallel chiziqlarni qayta belgilashni yoki V postulatinini o'zlari aniqroq bo'lgan narsa bilan almashtirishni taklif qilishdi.

Ammo Evklidning beshinchi postulatinini isbotlashga bo'lgan ko'p asrlik urinishlar oxir-oqibat yangi geometriyaning paydo bo'lishiga olib keldi, bu beshinchi postulat unda bajarilmaganligi bilan ajralib turadi. Ushbu geometriya endi Evklid bo'lmagan deb nomlanadi va Rossiyada u taqdimoti bilan asarni birinchi marta nashr etgan Lobachevskiy nomi bilan ataladi.

N.I.Lobachevskiy (1792-1856) geometrik kashfiyotlarining zaruriy shartlaridan biri esa uning bilish muammolariga aynan materialistik yondashuvidir. Lobachevskiyning fikricha, u moddiy dunyoning ob'ektiv mavjudligiga va uni inson ongiga bog'liq bo'lmagan bilish imkoniyatiga qat'iy ishonch hosil qilgan. Lobachevskiy o'zining "Ta'limning eng muhim mavzulari to'g'risida" (Qozon, 1828) ma'ruzasida F.Bekonning so'zlarini hamdardlik bilan keltiradi: "Ularni behuda mehnat qilishlarini qoldiring, ulardan barcha donolikni yolg'iz o'zi tortib olishga harakat qiling; tabiatdan so'rang, u barcha haqiqatlarni saqlaydi va barcha savollaringizga qoniqarli va qoniqarli javob beradi. Lobachevskiy o'zi kashf etgan

geometriyaning birinchi nashri bo'lgan "Geometriya tamoyillari to'g'risida" inshosida shunday yozgan edi: "Har qanday fan boshlanadigan birinchi tushunchalar aniq bo'lishi va eng kichik songacha qisqartirilishi kerak. Shundagina ular ta'limot uchun mustahkam va yetarli asos bo'lib xizmat qilishi mumkin. Bunday tushunchalarni sezgilar egallaydi; tug'ma - ishonmaslik kerak.

Lobachevskiyning beshinchi postulatni isbotlashga birinchi urinishlari 1823 yilga to'g'ri keladi. 1826 yilga kelib, u beshinchi postulat Evklid geometriyasining qolgan aksiomalariga bog'liq emas degan xulosaga keldi va 1826 yil 11 (23) fevralda Qozon universiteti fakulteti yig'ilishida u ma'ruza qildi. Parallel teoremaning qat'iy isboti bilan geometriya tamoyillarining qisqacha taqdimoti, unda u tomonidan kashf etilgan, keyinchalik Evklid bo'lmagan geometriya deb nom olgan tizim deb atagan "xayoliy geometriya" ning boshlanishi tasvirlangan. . 1826 yilgi ma'ruza Lobachevskiyning Evklid bo'lmagan geometriyaga oid birinchi nashriga - 1829-1830 yillarda Qozon universitetining "Kazan Vestnik" jurnalida chop etilgan "Geometriya tamoyillari to'g'risida" maqolasiga kiritilgan. U tomonidan kashf etilgan geometriyaning keyingi rivojlanishi va qo'llanilishi "Ilmiy eslatmalar" da chop etilgan "Hayoliy geometriya", "Ba'zi integrallarga xayoliy geometriyaning qo'llanilishi" va "To'liq parallellik nazariyasi bilan geometriyaning yangi boshlanishi" xotiralariga bag'ishlangan.

Beshinchi postulat Yevklid aksiomalari tizimida alohida o'rin tutadi.  
Beshinchi postulatning

boshqa aksiomalar va postulatlardan farqi shundaki, u boshqalar kabi ko'rgazmalilik xususiyatidan xoli va dastlabki 28 ta teoremaning isbotida qo'llanilmaydi. Shu sababli, sharhlovchilar uni mustaqil teorema shaklida isbotlashga uringanlar. Agar ikkita A va B tasdiqdan biri ikkinchisini keltirib chiqarsa, ular teng kuchli deyiladi.

Beshinchi postulatni isbotlashga urinishlar natijalari unga teng kuchli tasdiqlar ochilishiga sabab bo'ldi:

1. a to'g'ri chiziqdan tashqarida yotgan A nuqta orqali a to'g'ri chiziqni kesib o'tmaydigan yagona to'g'ri chiziq o'tkazish mumkin.
2. Bitta to'g'ri chiziqqa o'tkazilgan perpendikular va og'malar kesishadi.
3. Ixtiyoriy uchburchak ichki burchaklarining yig'indisi ikkita to'g'ri burchakka teng.
4. Ikkita parallel to'g'ri chiziqdan birini kesib o'tuvchi to'g'ri chiziq ularning ikkinchisini ham kesib o'tadi.
5. Parallel to'g'ri chiziqlar orasidagi masofa o'zgarmasdir.

O'rta asr Sharqida parallel chiziqlar nazariyasi. O'rta asr Sharq olimlari parallel to'g'ri chiziqlar nazariyasiga alohida e'tibor berishgan. Al-Abbos ibn Said al-Javhariy, Forob (hozirgi Qozog'iston Respublikasi) shahri fuqarosi, Muhammad ibn Muso al-Xorazmiyning zamondoshi va ilmiy xodimi bo'lgan. U boshqa olimlar qatorida Al-Ma'munning astronomik jadvallarini yaratishda ishtirok etgan. Al-Javhariy parallel chiziqlar nazariyasini o'zining „Islohli kitob al-Usul“ („Negizlar“ kitobini takomillashtirish) nomli asarida bayon qilgan.

Al-Javhariy quyidagi teoremani isbotlagan:

“ Agar HF to'g'ri chiziq AB va CD to'g'ri chiziqni ular bilan teng burchaklar hosil qilgan holda kesib o'tsa, AB va CD to'g'ri chiziqlar paralleldir. Agar ular parallel bo'lsa, CD to'g'ri chiziqning mos nuqtasidan AB to'g'ri chiziqning ixtiyoriy nuqtasigacha bo'lgan masofa o'zgarmaydi”.

Ibn Qurra ketma-ket quyidagi teoremlarni isbotlagan:

- A.** EY chiziq AB va CD chiziq'larga shunday tushganki, AEY va EYD burchaklar tengdir. U holda AB va CD chiziqlar na AC tomonga, na BD tomonga qarab uzoqlashmaydilar va yaqinlashmaydilar, deb aytaman.

**B.** Ikkita AB va CD chiziq hech bir tomonga qarab uzoqlashmaydi ham, yaqinlashmaydi ham va ularga EY chiziq o'tkazilgan. Hosil bo'lgan AEY va EYD ichki almashinuvchi burchaklar teng bo'ladi, deb aytaman.

### **Mustaqil yechish uchun masalalar.**

**1-masala.** A va C nuqtalar qanday bo'lmasin, AC kesmaning ichida yotuvchi, hamda AC to'g'ri chiziqning AC kesmadan tashqarida yotuvchi nuqtalari mavjudligi isbotlansin.

**2-masala.** To'g'ri chiziqdagi uchta nuqtadan har doim bittasi va faqat bittasi qolgan ikkitasi orasida yotishini isbotlang.

**3-masala.** Bir to'g'ri chiziqda yotmaydigan A, B, C nuqtalarni tutashtirishdan hosil qilingan AB, BC, AC kesmalardan ikkitasini kesuvchi  $a$  to'g'ri chiziq uchinchisini kesib o'tmasligini isbotlang.

**4-masala.** B nuqta AC kesmada va C nuqta BD kesmada yotishi ma'lum bo'lsa, B va C nuqtalar AD kesmada yotishini isbotlang.

**5-masala.** C nuqta AD kesmada va B nuqta AC kesmada yotishi ma'lum bo'lsa, B nuqta AD kesmada va C nuqta BD kesmada yotishini isbotlang.

## ADABIYOTLAR RO‘YXATI

15. Avilova L.V., Bolotyuk V.A., Bolotyuk L.A. Analiticheskaya geometriya i lineynaya algebra// 2013. Izdanie: 1-ye izd. 421 s.
16. Aleksandrov A.D., Nesvetaev N.Yu. Geometriya, M.: Nauka, 1990. – 672 s.
17. Bobenko A.I. (Ed.) Advances in Discrete Differential Geometry// Springer, 2016. — 439 p. — (Mathematics). — ISBN: 3662504464
18. I. M. Rikhsiboev and N. S. Mohamed, Engineering Mathematics 2, Malaysia, 2019.
19. Manfredo P. Do Carmo. Differential geometry of Curves and surface // Dover publications, Inc. Mineola, New York, 2016. – 529 rr.
20. Matematik analiz./ Azlarov T., Mansurov H.: Universitet va ped. institutlar talabalari uchun darslik: 2 qismli. 1-q.— Qayta ishlangan va to‘ldirilgan 2-nashri.— T.: Uqituvchi, 1994.—416 b.
21. Dodajonov N., Yunusmetov R., Abdullayev T. Geometriya, II qism.
22. Narmanov A. Differensial geometriya.
23. Sobirov M.A., Yusupov A.Yo. Differensial geometriya kursi.
24. Ergashev B. Evklid fazosida chiziqlar.
25. Ergashev B. Evklid fazosida sirtlar.
26. Belko I.V. i dr. Sbornik zadach po differensialnoy geometrii.
27. Sh.Murodov, L.Xakimov, A.Xolmurzayev, M.Jumayev, A.To‘xtayev. «Chizma geometriya». Oliy texnika o‘quv yurtlari uchun darslik. Toshkent, 2005.

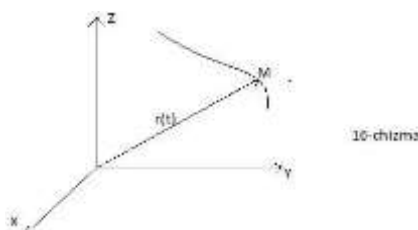
## Internet saytlar

10. [www.edu.uz](http://www.edu.uz).
11. [www.bimm.uz](http://www.bimm.uz)
12. [www.arxiv.org](http://www.arxiv.org)
13. [www.ams.mathscinet.org](http://www.ams.mathscinet.org)
14. <http://www.princeton.edu/main/>
15. <https://www.stanford.edu>
16. <http://mathins.uz>
17. <http://ziyonet.uz>
18. <http://dmvn.mexmat.net/>

## 2- AMALIYOT: VEKTOR FUNKSIYA.

### Vektor funksiyasining geometrik tasviri

$r(t)$  vektor funksiyaning mavjudlik sohasi  $a \leq t \leq b$  berilgan bo'lsin. Hamma  $r(t)$  vektorlarni ko'chirib ularning boshlarini biror  $O$  nuqtaga keltiramiz.  $t$  ning har bir qiymatida malum bir  $\overline{OM} = r(t)$  vektor mos keladi (16-chizma).  $t$  argument  $a$  dan  $b$  gacha uzluksiz o'zgarib borib,  $M$  nuqta fazoda nuqtalarning qandaydir geometrik o'rnini tashkil qiladi. Bu geometrik o'rin chiziq deb ataladi,  $r=r(t)$  esa chiziqning vektor shaklidagi parametric tenglamasi deyiladi.



Boshi  $O$  nuqtada bo'lgan dekart sistemasini olsak  $r(t)$  ning kordinata o'qlaridagi  $i, j, k$  ortlar bo'yicha yoyish mumkin, ya'ni:  $r=r(t)=x(t)i+y(t)j+z(t)k$ .

Jumladan chiziqning biror  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  nuqtasida:  $r(t)=r(t_0)=x_0i + y_0j + z_0k$ .

Olingan chiziq  $XOY$  tekislikda yotsa:  $r(t)=x(t)i+y(t)j$ .  $\overline{OM}$  vektorning  $x(t), y(t), z(t)$  koordinatalari  $M$  nuqtaning koordinatalari bo'ladi, demak:  $M[x(t), y(t), z(t)]$ , ya'ni  $x(t)=x(t), y=y(t), a \leq t \leq b$ . (1)

Demak, chiziqni  $r=r(t)$  shakldagi vector tenglama yoki (1) shakildagi uchta tenglama bilan berish mumkin.

Vector-funksiyaga geometrik obraz sifatida mos kelgan chiziq shu vector funksiyasining godografi deb ataladi.

### Vektor funksiyasining hosilasi

**Ta'rif.** Agar funksiyaning  $\Delta r = r(t + \Delta t) - r(t)$  ortirmasiga bulishdan chiqqan nisbatning  $\Delta t \rightarrow 0$  dagi limiti, ya'ni  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t}$  mavjud bo'lib, hamon bitta limit vektorga intilsa, u holda bu limit  $r(t)$  vector funksiyaning  $t$  argument bo'yicha hosilasi deyiladi, funksiyaning o'zi esa  $t_0$  nuqtada differensiallovchi bo'ladi:



Bu yerda  $\Delta r = r(t + \Delta t) - r(t) = [x(t + \Delta t) - x(t)]i + [y(t + \Delta t) - y(t)]j + [z(t + \Delta t) - z(t)]k$ .

Shu sababli

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} i + \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} j + \frac{z(t + \Delta t) - z(t)}{\Delta t} k$$

bo'ladi.  $x=x(t)$ ,  $y=y(t)$ ,  $z=z(t)$  funksiyalarning har bir hosilasi bilan uzluksiz bo'lgani uchun quydagi natijani hosil qilamiz:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = x'(t)i + y'(t)j + z'(t)k$$

hosila  $\frac{dr}{dt}$  yoki  $r'(t)$  shaklida belgilanadi; boshqacha yozganda:

$$r'(t) = x'(t)i + y'(t)j + z'(t)k \text{ yoki qisqacha}$$

$r' = x'i + y'j + z'k$  bo'lada. Hosila  $t = t_0$  qiymatda olingan bo'lansa:

$$z'(t_0) = x'(t_0)i + y'(t_0)j + z'(t_0)k .$$

$r' = r'(t)$  funksiyadan yana hosila olish mumkin va hokazo; biz bu holda 2,3,... tartibli hosilalarga ega bo'lamiz, ya'ni:

$$\frac{dr'}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2} = r''; \frac{d^3r}{dt^3} = r'''; \dots$$

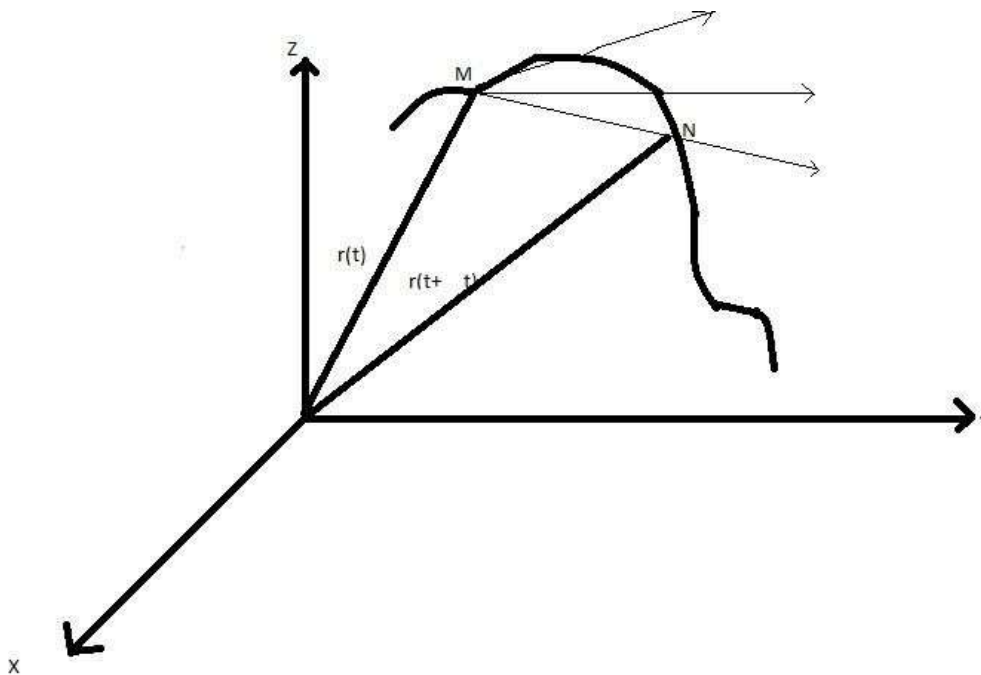
kelgusida biz o'zi va hodisalari doimo uzluksiz bo'lgan vector funksiyalar bilan ish ko'ramiz.

### Vektor-funksiyasi hosilasining geometrik ma'nosi

Vektor funksiyasining geometrik tasviri egri chiziqdan iborat ekanligini ko'rib o'tamiz. Endi, parametrning  $t$  va  $t + \Delta t$  qiymatlariga chiziqning  $M$  va  $N$  nuqtalari mos kelsin (17-rasm). U holda ayirma vektor  $r(t + \Delta t) - r(t) \equiv \Delta r = \overline{MN}$  bo'ladi.  $\overline{MN}$  vektorni  $\Delta t$  skalyar bo'lib,  $\frac{\overline{MN}}{\Delta t}$  ni hosil qilamiz.  $\overline{MN}$  va  $\frac{\overline{MN}}{\Delta t}$  vektorlar kesuvchi  $MN$  to'g'ri chiziq ustida yotadi.  $\Delta t$  nolga intilganda,  $N$  nuqta chiziq bo'ylab  $M$  ga intiladi.  $MN$  to'g'ri chiziq  $M$  nuqta atrofida aylanib, urinma vaziyatni oladi. Shartga ko'ra,  $r(t)$  uzluksiz hosilalarga ega bo'lgani uchun

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{r(t + \Delta t) - r(t)}{\Delta t} = r'(t)$$

mavjud bo'lib, bu hosila urinma to'g'ri chiziq bo'ylab yo'naladi, ya'ni urinma vektor bo'ylab yo'naladi.



M nuqtadan N nuqta tomon harakat qilganda  $\Delta t > 0$  bo'lsa, ya'ni  $t$  parametr o'sa borsa, MN kesuvchi bilan  $\vec{MN}$  vektorning yo'nalishi bir xil bo'ladi,  $\Delta t < 0$  da esa ularning yo'nalishlari teskari bo'ladi.

Demak,  $r'$  vektor urinma bo'ylab parametrning o'sa borish tomonga qarab yo'nalgan bo'ladi.  $t$  argumentni M nuqta harakatining boshlanishidan hisoblangan vaqt deb qarasa va  $r=r(t)$  tenglama M ning chiziq bo'ylab qilgan harakat qonunini ifodalasa, u holda  $r'(t)$  hosila nuqtaning  $t$  paytdagi tezlik vektori deyiladi.

### Vektorni differensialsh qoidalari

Bir necha vektor yig'indisining hosilasi shu vektorlar hosilalarining yig'indisiga teng.

Darhaqiqat, avvalo, ikki vektornig yig'indisi  $R(t)=r(t)+q(t)$  berilgan bo'lsin. Bu yerda  $\Delta R = r(t + \Delta t) - r(t) + q(t + \Delta t) - q(t) = \Delta r + \Delta q$  bo'ladi. Buning ikkala tomonini  $\Delta t$  ga bo'lib, limitga o'tamiz:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta R}{\Delta t} = \lim_{\Delta t} \frac{\Delta r}{\Delta t} + \lim_{\Delta t} \frac{\Delta q}{\Delta t} \quad \text{yoki} \quad R'(t) = r'(t) + q'(t).$$

Vektorlarning soni ikkidan ortiq bo'lganda ham bu xossa xuddi shu yo'l bilan isbotlanadi. Endi  $r'(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k$  vektorni differensiallasak, natijada:

$$r'(t) = x'(t)i + y'(t)j + z'(t)k$$

hosil bo'ladi. Xuddi shunga uxshash:

$$\frac{d}{dt}(r(t)q(t)) = \frac{dr}{dt}q + r\frac{dq}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}[r q] = \left[\frac{dr}{dt}q\right] + \left[r\frac{dq}{dt}\right].$$

Misol uchun bu tengliklardan ikkinchisini isbotlaymiz. Ushbu:

$\Delta[r q] = [(r + \Delta r)(q + \Delta q)] - [r q]$  ayirmani olib bir biriga teng, ammo ishoralari qarama –qarshi bo'lgan hadlar qushamiz:

$\Delta[r q] = [(r + \Delta r - r)(q + \Delta q)] + [r(q + \Delta q - q)] = [\Delta r(q + \Delta q)] + [r\Delta q]$   
 hosil bo'ladi. Endi, buni  $\Delta t$  ga bo'lib, limitga o'tamiz:

$$\lim_{\Delta t} \frac{\Delta[rq]}{\Delta t} = \left[\lim_{\Delta t} \frac{\Delta r}{\Delta t} \lim(q + \Delta q)\right] + \left[r \lim_{\Delta t} \frac{\Delta q}{\Delta t}\right] \text{ bo'ladi.}$$

Natijalar:

1. O'zgaruvchan birlik vektorning hosilasi shu vektorga perpendikulyar vektordir.  $\mathbf{m} \cdot \frac{d\mathbf{m}}{dt} = 0$  tenglikdan foydalanamiz. Uning ikki tomonidan hosila olamiz :

$$\frac{d\mathbf{m}}{dt} \cdot \mathbf{m} + \mathbf{m} \cdot \frac{d\mathbf{m}}{dt} = 0 \text{ yoki } 2\frac{d\mathbf{m}}{dt} \cdot \mathbf{m} = 0, \text{ bundan } \frac{d\mathbf{m}}{dt} \perp \mathbf{m} \text{ ekani kelib chiqadi.}$$

Bu natijaning geometrik ma'nosini quydagicha tushunish mumkin: o'zgaruvchan birlik  $\mathbf{m}$  vektorning oxiri aylana chizadi yoki sferaning radiusiga, ya'ni  $\mathbf{m}$  ga perpendikulyar buladi

2. O'zgaruvchan birlik vektorning hosilasi shu vektorga perpendikulyar vektordir. Haqiqatan, o'zgaruvchan birlik vektorni  $\mathbf{m}$  bilan belgilab,  $\mathbf{m} \cdot \frac{d\mathbf{m}}{dt} = 0$  tenglikdan foydalanamiz.

Uning ikki tomonidan hosila olamiz:  $\frac{d\mathbf{m}}{dt} \cdot \mathbf{m} + \mathbf{m} \cdot \frac{d\mathbf{m}}{dt} = 0$  yoki  $2\frac{d\mathbf{m}}{dt} \cdot \mathbf{m} = 0$ , bundan  $\frac{d\mathbf{m}}{dt} \perp \mathbf{m}$  ekani kielib chiqadi.

Bu natijaning geometrik ma'nosini quydagicha tushunish mumkin: o'zgaruvchan birlik  $\mathbf{m}$  vektorning oxiri aylana chizadi yoki sferada yotadigan chiziq chiza boradi.  $\frac{d\mathbf{m}}{dt}$  bu chiziqqa urinma bo'lgani uchun aylana yoki sferaning radiusiga, ya'ni  $\mathbf{m}$  ga perpendikulyar (18-chizma).

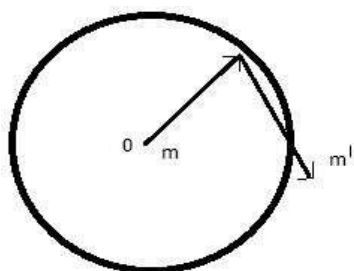
Uzunligi o'zgarmas boshqa vektorlar uchun ham xuddi shu natijani olamiz, ya'ni bunday vektorning hosilasi ham vector bo'lib, u berilgan vektorga perpendikulyardir.

2.  $\mathbf{m}$  ning koordinata o'qlari bilan tashkil qilgan burchaklarni  $\alpha, \beta, \gamma$  desak,  $m = icosa + jcos\beta + kcos\gamma$  bo'ladi.

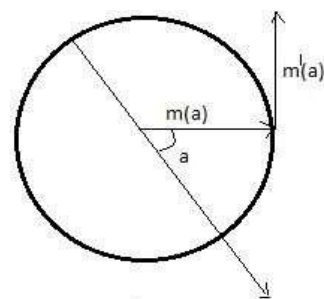
3. Birlik vector  $\mathbf{m}$  vector XOY tekislikda yotgan bo'lsa, uni  $\mathbf{m}=\mathbf{m}(\alpha)$  shaklida yozish mumkin,  $\alpha$  burchak 0 dan  $360^\circ$  gacha o'zgarganda,  $m(\alpha)$  ning godografi aylana bo'ladi

(19-chizma)

$$m(\alpha) = icosa + jcos(90^\circ - \alpha) = icosa + jsina$$



18-chizma



19-chizma

Uning  $m'(\alpha) = -isina + jcosa$  hosilasi  $m(\alpha)$  ga perpendikulyar bo'lgan  $m(\alpha + \frac{\pi}{2})$  vektordir. Bu vektorning yoyilmasi:

$$m(\alpha + \frac{\pi}{2}) = icos(\alpha + \frac{\pi}{2}) + jsin(\alpha + \frac{\pi}{2})$$

yoki

$$m(\alpha + \frac{\pi}{2}) = -isina + jcosa;$$

demak:

$$m(\alpha + \frac{\pi}{2}) * m(\alpha) = -sinacos\alpha + sinacos\alpha = 0, \text{ ya'ni:}$$

$m'(\alpha) \perp m(\alpha)$  bo'ladi.

4. Chiziq'larga nisbatan yuqorida quyilgan shartlarga binoan  $x(t), y(t), z(t)$  funksiyalar uzluksiz bo'lib, istalgan tartibgacha hosilalarga ega. Shuning uchun  $x(t), y(t), z(t)$  funksiyalarni teylor formulasi buyicha yoyib, ya'ni:

$$x(t + \Delta t) = x(t) + x'(t)\Delta t + x''(t) \frac{(\Delta t)^2}{2} + \dots + x^{(n-1)}(t) \frac{\Delta(t)^{n-1}}{(n-1)!} + x^{(n)}(t + \theta_1\Delta t) \frac{(\Delta t)^n}{n!};$$

$$x(t + \Delta t) = x(t) + x'(t)\Delta t + x''(t) \frac{(\Delta t)^2}{2} + \dots + x^{(n-1)}(t) \frac{\Delta(t)^{n-1}}{(n-1)!} + x^{(n)}(t + \theta_1\Delta t) \frac{(\Delta t)^n}{n!}$$

$$y(t + \Delta t) = y(t) + x'(t)\Delta t + y''(t) \frac{(\Delta t)^2}{2} + \dots + y^{(n-1)}(t) \frac{\Delta(t)^{n-1}}{(n-1)!} + y^{(n)}(t + \theta_1\Delta t) \frac{(\Delta t)^n}{n!};$$

$$z(t + \Delta t) = z(t) + z(t)\Delta t + z''(t) \frac{(\Delta t)^2}{2} + \dots + z^{(n-1)}(t) \frac{\Delta(t)^{n-1}}{(n-1)!} + z^{(n)}(t + \theta_1\Delta t) \frac{(\Delta t)^n}{n!};$$

*ularni birinchisini i ga, ikkinchisini j ga, uchinchisini k ga ko'paytrib, hadma-hd qushsak, natijada r(t) vector funksiyaning teylor formulasi buyicha yoyilmasi chiqadi.*

$$r(t + \Delta t) = r(t) + r'(t)\Delta t + r''(t) \frac{(\Delta t)^2}{2} + \dots + \frac{r^{(n-1)}(t)}{(n-1)!} (\Delta t)^{n-1} + R_n \frac{(\Delta t)^n}{n!}.$$

*Bu yerda  $R_n$  quydagi qiymatga ega :*

$$R_n = x^{(n)}(t + \theta_1\Delta t)i + y^{(n)}(t + \theta_2\Delta t)j + z^{(n)}(t + \theta_1\Delta t)k \quad (0 < \theta_i < 1).$$

**Ta'rif.** Agar  $r(t) = \frac{dR}{dt}$  bo'lsa,  $R(t) = \int r(t)dt$  ifoda  $r(t)$  vector funksiyaning aniqmas integrali deyiladi.

$\int_a^b r(t)dt = R(b) - R(a)$  ifoda  $r(t)$  vector funksiyaning aniq integrali bo'ladi.

*Vektor funksiyadan olingan integrallar matematik analizdagi integrallash qoidalaiga bo'ysunadi.*

Vektorlar nazaryasini yakunlab , vektorlarning yana ba'zi xossalari tuxtalib o'tamiz.

### Yo'nalishi o'zgaras bo'lgan o'zgaruvchi vektorning xossasi.

O'zgaruvchi vector funksiyaning o'nalishi o'zgaras bo'lsa va bu yunalishdagi birlik vektorni  $\xi$  bilan belgilasak, u holda  $r(t)$  vector-funksiyani  $r(t)=|r(t)|\xi = l\xi$  shaklda yozish mumkin. Bu vektorning hosilasini olamiz:

$\frac{dr}{dt} = \frac{dl}{dt} \xi + l \frac{d\xi}{dt}$ . Endi  $\frac{dl}{dt}$  ni  $\lambda$  bilan belgilasak  $\frac{dr}{dt} = \lambda r(t)$  bo'ladi. Bu esa  $\frac{dr}{dt}$  va  $r(t)$  vektorlarning koleniar ekanligini ko'rsatadi. Aksincha  $\frac{dr}{dt}$  va  $r(t)$  koleniar vektorlar bo'lsa,  $r(t)$  vector-funksiyaning yunalishi doimiy bo'ladi. Buni isbotlaymiz.  $r(t)$  ning yunalishi o'zgaradi deb faraz qilaylik. U vaqtda  $\xi$  ham o'zgaruvchan bo'ladi. Demak  $\frac{dr}{dt} = \frac{dl}{dt} \xi + l \frac{d\xi}{dt}$  bo'ladi. Endi  $\xi = \frac{r(t)}{l}$  ga binoan,  $\frac{dr(t)}{dt} = \frac{dl}{dt} \xi + l \frac{d\xi}{dt} = \frac{l'}{l} r(t) + l \frac{d\xi}{dt}$  bo'ladi. Bundan  $l \frac{d\xi}{dt} = 0$  yoki  $\frac{d\xi}{dt} = 0$  kelib chiqadi. Bu esa  $\xi$  vektorning doimiy ektor ekanligini isbotlaydi.

### O'zgaras tekislikka parallel vektor.

Agar  $r(t)$  vector funksiya ma'lum bir tekislikka parallel vaziyatda o'zgarsa, u holda  $r(t)$  vector tekislik normal vektoriga perpendikulyar, ya'ni  $r(t) \cdot n = 0$  bo'ladi. Bundan ikki marta hosila olamiz:  $r'(t) \cdot n = 0$ ,  $r''(t) \cdot n = 0$ . Bu uchta tenglikdan  $r(t), r'(t)$  va  $r''(t)$  ning har biri  $n$  vektorga perpendikulyar ekanligi kurinadi. Demak bularning uchulasi ham bir tekislikka parallel, ya'ni o'zaro komplanardir. shuning uchun bu uchala vektorning aralash ko'paytmasi noga teng.  $(r(t) \cdot r'(t) \cdot r''(t)) = 0$ . Aksincha  $(r(t) \cdot r'(t) \cdot r''(t)) = 0$  bo'lsa,  $r(t)$  doimo bir tekislikka parallel bo'ladi.

### ADABIYOTLAR RO'YXATI

1. Avilova L.V., Bolotyuk V.A., Bolotyuk L.A. Analiticheskaya geometriya i lineynaya algebra// 2013. Izdanie: 1-ye izd. 421 s.
2. Aleksandrov A.D., Nesvetaev N.Yu. Geometriya, M.: Nauka, 1990. – 672 s.
3. Bobenko A.I. (Ed.) Advances in Discrete Differential Geometry// Springer, 2016. — 439 p. — (Mathematics). — ISBN: 3662504464
4. I. M. Rikhsiboev and N. S. Mohamed, Engineering Mathematics 2, Malaysia, 2019.
5. Manfredo P. Do Carmo. Differential geometry of Curves and surface // Dover publications, Inc. Mineola, New York, 2016. – 529 rr.

6. Matematik analiz./ Azlarov T., Mansurov H.: Universitet va ped. institutlar talabalari uchun darslik: 2 qismli. 1-q.— Qayta ishlangan va to'ldirilgan 2-nashri.— T.: Uqituvchi, 1994.—416 b.
7. Dodajonov N., Yunusmetov R., Abdullayev T. Geometriya, II qism.
8. Narmanov A. Differensial geometriya.
9. Sobirov M.A., Yusupov A.Yo. Differensial geometriya kursi.
10. Ergashev B. Evklid fazosida chiziqlar.
11. Ergashev B. Evklid fazosida sirtlar.
12. Belko I.V. i dr. Sbornik zadach po differensialnoy geometrii.
13. Sh.Murodov, L.Xakimov, A.Xolmurzayev, M.Jumayev, A.To'xtayev. «Chizma geometriya». Oliy texnika o'quv yurtlari uchun darslik. Toshkent, 2005.
14. A.Ya. Narmanov va A.S.Sharipov "Geometriya asoslari" Toshkent 2010

#### Internet saytlar

10. [www.edu.uz](http://www.edu.uz).
11. [www.bimm.uz](http://www.bimm.uz)
12. [www.arxiv.org](http://www.arxiv.org)
13. [www.ams.mathscinet.org](http://www.ams.mathscinet.org)
14. <http://www.princeton.edu/main/>
15. <https://www.stanford.edu>
16. <http://mathins.uz>
17. <http://ziyonet.uz>
18. <http://dmvn.mexmat.net/>

### 3 - AMALIYOT. GEOMETRIYANING ZAMONAVIY YO'NALISHLARI VA MUAMMOLARI

Nemis matematigi **I o g a n n G y e n r i x L a m b y e r t** (1728-1777) ham bu postulatni isbotlashga urindi.

U quyidagicha yasashlarni bajardi. AV kesmaning uchlaridan ikkita perpendikulyar va teng kesmalar  $AAI$  va  $VVI$  ni ajratdi. So'ngra  $AAI$  kesmaning oxiridan  $A1$  nuqtaga yana bitta perpendikulyar tushirdi, uchta to'g'ri burchakli to'rtburchak hosil bo'ldi. Sakkeriga o'xshab u ham to'rtinchi burchak, o'tkir va o'tmas burchak farazlarini ilgari surdi. So'ngra to'g'ri burchak farazi beshinchi

postulatga teng kuchliligini hamda o'tmas burchak farazi qarama - qarshilikka uchrashini isbotladi.

Lambert keyinchalik, o'tkir burchak farazidan kelib chiqadigan fikrlarni rivojlantirishga harakat qildi, lekin bunda qarama-qarshilikni uchrata olmadi. Shunday qilib, V postulatni isbot qilish mumkin emas degan fikrga keldi. Bu bilan XIX asr boshigacha beshinchi postulat muammosi hal qilinmay qoldi.

Bu muammoning yechimini buyuk rus matematigi **Nikolay Ivanovich Lobachevskiy** (1792-1856) 1826 yil 23 fevral kuni Qozon Universiteti fizika-matematika bo'limiga taqdim etgan «Geometriya asoslarining qisqacha bayoni parallelar to'g'risidagi teoremaning qat'iy isboti bilan» asari qo'lyozmasida topdi.

Bu yangi geometriya to'g'risidati birinchi axborot edi va tarixga bu kun noyevklid geometriyasi yaratilgan kun bo'lib kirdi. Faqat uch yildan so'ng, 1829-1830 yillarda «Kazanskiy vestnik» jurnalida uning «Geometriya asoslari haqida» maqolasi bosilib, bu kashfiyot mazmuni bayon etildi. Lobachevskiy birinchi marta Yevklidning beshinchi postulati geometriyaning boshqa aksiomalariga bog'liq emasligini isbotladi.

Lobachevskiy Yevklid aksiomatikasida beshinchi postulatni qo'yidagi aksioma bilan almashtirdi: to'g'ri chiziqdan tashqarida tekislikda yotuvchi ular bilan kesishmaydigan ikkitadan kam bo'lmagan to'g'ri chiziq o'tkazish mumkin. Demak, Lobachevskiy aksiomasiga muvofiq A nuqtadan utuvchi  $a_1$  va  $a_2$  to'g'ri chiziqlar to'g'ri  $b$  chiziqni kesib o'tmaydi.

- Lobachevskiy o'zi yaratgan geometriyani rivojlantira borib, uni «faraz qilinuvchi» geometriya deb etadi hamda qat'iy mantiqiy sistemani yaratdi.
- Bu geometriya Yevklid geometriyasidan tamoman farq qilar edi. Lekin u mantiqiy qarama - qarshilikka (ziddiyatlikka) duch kelishi lozim edi, chunki - ikkita geometriyaning bir vaqtda mavjud bo'lishligi mumkin emas edi.
- Shunga qaramay, Lobachevskiy yangi natijalar keltirib chiqara berdi, ular mantiqiy qarama - qarshiliklarga uchramadi. Lobachevskiy bu natijalarni 1835 yilda Qozon Universiteti ilmiy ishlarida «Faraz qilinadigan geometriya», 1835- 1838 yillarda e'lon qilingan «Parallel to'g'ri chiziqlar



to'la nazariyasi va geometriyaning yangi asoslari» va 1885 yilda yana Qozon Universiteti ilmiy ishlarida chop etilgan «Pangeometriya» asarlarida bayon etdi. Yangi geometriya va Yevklid geometriyasida birinchi to'rtta guruh aksiomalar ustma-ust tushadi. Bu aksiomalar guruhlari va ularning natijalari absolyut geometriya deb atala boshladi.

- Lobachevskiy geometriyasida qarama - qarshilik yo'qligidan Yevklidning beshinchi postulatini isbotlash mumkin emas degan natija kelib chiqadi. Nima uchun? Nima uchun bu postulatni absolyut geometriyadan keltirib chiqarish mumkin emas? Mazkur savollarga javob berishga harakat qilib ko'raylik.
- Ma'lumki, absolyut geometriya bu ikkita geometriyaning umumiy qismidan tashkil topgan: agar absolyut geometriyaga Yevklidning beshinchi postulatini qo'shsak, Yevklid, geometriyasi; agarda absolyut geometriyaga Lobachevskiy aksiomasini qo'shsak, Lobachevskiy geometriyasi hosil bo'ladi.
- Shunday qilib, Yevklidning beshinchi postulatini (yoki unga teng kuchli bo'lgan ixtiyoriy mulohazani) isbot qilish, ya'ni absolyut geometriyadan mantiqiy keltirib chiqarish mumkin emas. Lobachevskiy geometriyasi kabi Yevklid reometriyasi qarama-qarshiliksizdir, Chunki arifmetikada qarama-qarshilik yo'k.
- Demak, ikkala geometriya ham mavjud bo'lish huquqiga ega. Lekin noyevklid geometriyasi (Lobachevskiy geometriyasi) Yevklid geometriyasidan jiddiy farq qiladi. Masalan, Lobachevskiy geometriyasida uchburchak ichki burchaklarining yig'indisi  $\pi$  dan kichik, unda o'xshash tengmas uchburchaklar mavjud emas, berilgan to'g'ri chiziqdan bir xil uzoqlashgan nuqtalar to'plami to'g'ri chiziq emas, balki egri chiziq hisoblanadi va x. k.
- Vilgelm Veber bilan birgalikda Karl Fridrix Gauss elektromagnit telegrafni kashf etdi. "Arifmetik tadqiqotlar", "Quyosh atrofida konik kesimlar bo'yicha aylanuvchi osmon jismlari harakati nazariyasi", "Egri sirtlar haqida umumiy tadqiqotlar" nomli asarlar muallifi.

- Karl Fridrix Gauss Braunshveygda 1777 yil 30 aprelda tug'ilgan. Yetti yoshida Yekaterinin xalq maktabiga o'qishga kirdi. 1788 yilda Gauss gimnaziya o'tdi, u yerda tillarni o'rgandi. 1791 yilda Karl Gaussni gersog Karl Vilgelmu Ferdinandga tanishtirishdi. U saroyda bo'lib, saroy ahli bilan hisoblash san'ati bo'yicha mashg'ulotlar olib bordi.
- 1795 yil oktyabrida Karl Fridrix Gauss Gettingen universitetiga o'qishga kirdi. U ko'p vaqtini filologiyaga qaratdi. 1795 yilda Karl Fridrix Gauss butun sonlar bilan shug'ullana boshladi. 1796 yil 30 martigacha Gauss "boshlang'ich" ildizlar nazariyasini o'ylab topdi, shu asosda o'nettiburchak (birdan p-chi darajali ildizlar p ta ekanligidan) yasashga muvaffaq bo'ldi. 1796 yil 8 aprelda Karl Gauss o'zarolikning kvadratik qonuni teoremasini isbotladi, uni «oltin» teorema deb atadi.
- Gelmshtadtda 1798 yilda Karl Fridrix Gauss "Algebraning asosiy teoremasini" – har qanday p-chi darajali algebraik tenglama p ta ildizga (haqiqiy yoki mavhum) ega ekanligi haqidagi tasdiq isbotiga bag'ishlangan dissertasiyani tayyorladi.
- 1801 yilda Karl Gaussning "Arifmetik tadqiqotlar" (yetti qismdan iborat, sakkizinchisini nashr etish uchun mablag' yetishmagan) asari chop etildi. Bu kitobni u gersog Karl Vilgelma Ferdinand mablag'lari hisobiga chiqargan va unga bag'ishlagan.
- Astronomiya bilan shug'ullanib, Gauss faraz qilinayotgan yangi katta sayyoraning trayektoriyasini hisobladi.. Nemis astronomi Olbers, Gaussning hisoblariga suyanib, sayyorani topdi (uni Serera deb atadi). 1802 yil 25 martda Olbers yana bita sayyorani – Palladani kashf etdi.
- 1809 yilda Karl Fridrix Gauss "Quyosh atrofida konik kesimlar bo'yicha aylanuvchi osmon jismlari harakat nazariyasi" nomli asarini nashr etdi, unda orbitalarni hisoblashning o'z usullarini bayon etdi. O'z usulining kuchiga ishonch hosil qilish uchun Eyler uch kun hisoblagan 1769 yil kometasi orbitasini qaytadan hisoblab chiqdi.

- Gaussning noyevklid geometriya bo'yicha tadqiqotlari uning vafotidan so'ng ma'lum bo'ldi. U Yanoshning otasiga (u ham matematik edi) yozgan xatida, bu geometriya sistemasiga juda avval uchraganligini (bu fikrga u 1818 yillarda kelgan), lekin, uni hayotligi davrida e'lon qilmaslikka qaror qilganligini (tushunmovchiliklarga sabab bo'lishidan xavfsirab) ta'kidlagan edi. Ichki qarshilik va unga bog'liq yangi geometriya mavjudligi haqidagi shubhalar Gaussning qat'iy fikrga kelishiga, bu sohada tadqiqotlar o'tkazishiga va ishlarini chop etishga xalaqit berdi. U N. I. Lobachevskiy ishlariga katta e'tibor bilan qaradi, uni Gettingen fanlar akademiyasiga muxbir-a'zo qilib saylash tashabbuskori edi; ammo bu kashfiyotga oid o'z fikrini e'lon qilmadi.
- Lobachevskiy geometriyasi modelini mashhur fransuz matematigi **Jyul Anri Puankare** (1854-1912) 1882 yilda yaratdi. Yevklid geometriyasini olamiz - va unda gorizonta  $a$  to'g'ri chiziqni o'tkazamiz, u tekislikni ikkita yarim tekislikka ajratadi. Yuqorigi yarim tekislik nuqtalarini noyevklid nuqtalari (to'g'ri chiziq nuqtalari bunga kirmaydi) deb ataymiz. Noyevklid to'g'ri chiziqlar deb esa markazlari  $a$  to'g'ri chiziqda yotuvchi yarim aylanalarni ataymiz. Noyevklid to'g'ri chiziqlarga  $a$  to'g'ri chiziqqa perpendikulyar nurlarni ham kiritamiz.
- Bundan oldinroq, 1871 yilda nemis matematigi **Feliks Xristian Kleyn** (1849-1925) proyektiv metrika g'oyasi asosida Lobachevskiy geometriyasi tavsifini bergan edi.
- U o'zining geometrik tadqiqotlarini 1872 yilda nashr qilingan «Yangi geometrik tadqiqotlarga taqqoslama nazar» («Erlangen: dasturi») asarida har qanday geometriya almashtirishlar maxsus guruhining invariantlar nazariyasi bo'lib xisoblanishini ko'rsatdi. Guruhni kengaytirib yoki qisqartirib, bir turdagi geometriyadan ikkinchi turdagi geometriyaga o'tish mumkin.
- Yevklid geometriyasi - metrik guruhlarining invariantlari haqidagi fan, proyektiv geometriya - proyektiv guruhlarining invariantlari haqidagi fandir. Almashtirishlar guruhini sinflarga ajratib geometriyalarni sinflarga ajratishga

- olib keladi. Har bir guruhlarining algebraik va differensial invariantlari nazariyasi geometriyaning analitik tuzilishini beradi.
- Keyinchalik Kleyn Yevklid geometriyasining modelini proyektiv metrika orkali tuzish mumkinligini ko'rsatdi. Bunda u ingliz matematigi Artur Keli (1821- 1895) 1859 yilda kiritgan proyektiv metrika tushunchasiga asoslandi.
  - ▮ Lobachevskiy, agar real fazo yevklid geometriyasi qonunlariga buysunmasa, u holda kosmosda uchburchak burchaklarining yig'indisi  $\pi$  dan kichik, deb faraz qildi. U fazoning noyevklidligiga ishonar edi. Agar olam o'lchovlarining bizga ko'rinarli qismini qisqartirgan holda qarajak, u xolda Lobachevskiy geometriyasi o'rinli bo'ladi.
  - 1863 yilda italyan matematigi **Eujenio Beltrami** (1835-1900) va nemis matematigi **Berixard Riman** (1826-1866) yangi geometriya tavsifi bo'yicha katta ishlar qildilar.
  - Beltrami «Noyevklid geometriyasini tavsiflash tajribasi» kitobida sirtida Lobachevskiy geometriyasi bajariladigan real jismlar mavjudligini ko'rsatdi. U o'zgarmas manfiy egrilikka ega bo'lgan sirtlarda (psevdosfera) noyevklid geometriyasi bajarilishini isbotladi, shuningdek, Lobachevskiy geometriyasi mantiqiy qarama-qarshiliksiz ekanligini ko'rsatdi.
  - ▮ Yevklid real fazosida noyevklid xususiyatiga ega bo'lgan jismlardan birini quyidagicha yasash mumkin.
  - $b$  va  $c$  chiziqlar  $A$  nuqtadan o'tadi va  $a$  ga parallel psevdosfera o'zgarmas manfiy egrilikka ega bo'lgan sirt deb ham ataladi. Agar egri chiziqli uchburchak burchaklarining yig'indisi  $2d$  dan kichik bo'lsa, sirt manfiy egrilikka ega bo'ladi. Agar Lobachevskiy tekisligida uchburchak (psevdosferada) yasajak, uning burchaklari yig'indisi  $2d$  dan kichik ekanligi ko'rinadi.
  - ▮ Musbat egrilikka ega bo'lgan sirtlar ham mavjud, ularning sirtida uchburchak burchaklarining yig'indisi  $\pi$  dan katta. Bunga misol sifatida shar sirtini olish mumkin. Sferada to'g'ri chiziq deb ixtiyoriy katta doira aylanasini hisoblash

mumkin, ya'ni shar markazidan o'tuvchi tekislik bilan sfera kesishishidan hosil bo'lgan aylana.

- ▮ Sferada barcha to'g'ri chiziqlar kesishadi.
- ▮ Demak, sferada na Yevklid geometriyasi, na Lobachevskiy geometriyasi amal qiladi. Bunda uchburchak burchaklarining yigindisi  $\pi$  dan katta. Bazi hollarda u  $3d$  ga ham teng bo'lishi mumkin. Bulardan ko'rinadiki, Yevklid tekisligi nol egrilikka ega.

### ADABIYOTLAR RO'YXATI

1. Avilova L.V., Bolotyuk V.A., Bolotyuk L.A. Analiticheskaya geometriya i lineynaya algebra// 2013. Izdanie: 1-ye izd. 421 s.
2. Aleksandrov A.D., Nesvetaev N.Yu. Geometriya, M.: Nauka, 1990. – 672 s.
3. Bobenko A.I. (Ed.) Advances in Discrete Differential Geometry// Springer, 2016. — 439 p. — (Mathematics). — ISBN: 3662504464
4. I. M. Rikhsiboev and N. S. Mohamed, Engineering Mathematics 2, Malaysia, 2019.
5. Manfredo P. Do Carmo. Differential geometry of Curves and surface // Dover publications, Inc. Mineola, New York, 2016. – 529 rr.
6. Matematik analiz./ Azlarov T., Mansurov H.: Universitet va ped. institutlar talabalari uchun darslik: 2 qismli. 1-q.— Qayta ishlangan va to'ldirilgan 2-nashri.— T.: Uqituvchi, 1994.—416 b.
7. Dodajonov N., Yunusmetov R., Abdullayev T. Geometriya, II qism.
8. Narmanov A. Differensial geometriya.
9. Sobirov M.A., Yusupov A.Yo. Differensial geometriya kursi.
10. Ergashev B. Evklid fazosida chiziqlar.
11. Ergashev B. Evklid fazosida sirtlar.
12. Belko I.V. i dr. Sbornik zadach po differentsialnoy geometrii.
13. Sh.Murodov, L.Xakimov, A.Xolmurzayev, M.Jumayev, A.To'xtayev. «Chizma geometriya». Oliy texnika o'quv yurtlari uchun darslik. Toshkent, 2005.
14. A.Ya. Narmanov va A.S.Sharipov “Geometriya asoslari” Toshkent 2010

## Internet saytlar

10. [www.edu.uz](http://www.edu.uz).
11. [www.bimm.uz](http://www.bimm.uz)
12. [www.arxiv.org](http://www.arxiv.org)
13. [www.ams.mathscinet.org](http://www.ams.mathscinet.org)
14. <http://www.princeton.edu/main/>
15. <https://www.stanford.edu>
16. <http://mathins.uz>
17. <http://ziyonet.uz>
18. <http://dmvn.mexmat.net/>

## 4 – AMALIY: SIRT TUSHUNCHASI. SIRTNING ICHKI VA TASHQI GEOMETRIYASI

Bizga  $F$  regulyar sirt  $r = r(u, v)$  vektor tenglamasi bilan berilgan bo'lsin.

Ta'rif.  $F$  sirtning berilgan  $M$  nuqtasidagi urinma tekis-ligiga perpendikulyar bo'lgan birlik vektorga sirtning shu nuqtasidagi **birlik normal vektori** deb ataymiz va  $n$  bilan belgilaymiz

Agar  $M(u; v)$  nuqta  $F$  sirt bo'ylab harakatlansa, u vaqtda sirtning shu nuqtasidagi birlik normal vektori  $n$  ham harakatlana boradi, ya'ni bu  $n$  vektor  $u$  va  $v$  o'zgaruvchilarning vektor funk-tsiyasi bo'ladi:

$$n = n(u, v) \quad (1).$$

Sirtning vektor tenglamasini va (1) tenglamani differen-tsiiallaymiz:

$$dr = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv,$$

$$dn = \vec{n}_u du + \vec{n}_v dv.$$

Bu  $dr$  va  $dn$  vektorlarni skalyar ko'paytiraylik:

$$d^r \cdot d^n = (\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv)(\vec{n}_u du + \vec{n}_v dv) = r_u n_u du^2 + (r_u n_v + r_v n_u) dudv + r_v n_v dv^2.$$

Ta'rif. Ushbu

$$F_2 = -d^r \cdot d^n = -r_u n_u du^2 - (r_u n_v + r_v n_u) dudv - r_v n_v dv^2 \quad (2)$$

ifodaga sirtning **ikkinchi kvadratik formasi** deb ataladi.

Sirtning ikkinchi kvadratik formasi uchun quyidagi belgi-lashlarni kiritamiz:

$$\left. \begin{aligned} -\vec{r}_u \vec{n}_u &= D_2, \\ (r_u n_v + r_v n_u) &= 2D_1, \\ -\vec{r}_v \vec{n}_v &= D_2 \end{aligned} \right\} \quad (3).$$

U vaqtda ikkinchi kvadratik forma ushbu ko'rinishni oladi:

$$\mathbf{F}_2 = D du^2 + 2 D_1 du dv + D_2 dv^2 \quad (4).$$

Bizga ma'lumki  $\vec{r}_u$  va  $\vec{r}_v$  vektorlar sirtning urinma tekis-ligiga parallel bo'lar edi. Demak, bu vektorlarning chiziqli kombina-tsiyasi bo'lgan  $dr = r_u du + r_v dv$  vektor ham sirtning urinma tekisligiga parallel bo'ladi. Ta'rifga asosan  $n$  vektor urinma tekislikka per-pendikulyardir. Shuning uchun  $dr$  va  $n$  vektorlar o'zaro perpendikulyar bo'lib, ularning skalyar ko'paytmasi nolga teng bo'ladi:

$$dr \cdot n = 0.$$

Bu tenglikni differensiallaylik:

$$d(dr \cdot n) = d^2 r \cdot n + dr \cdot dn = 0.$$

(2) ga asosan:

$$d^2 r \cdot n = -dr \cdot dn = \mathbf{F}_2.$$

Demak,

$$\mathbf{F}_2 = d^2 r \cdot n.$$

Bu erda

$$d^2 r = d(d \vec{r}) = d(r_u du + r_v dv) = r_{uu} du^2 + 2r_{uv} dudv + r_{vv} dv^2 + r_u du + r_v dv$$

bo'lib,  $r_u \perp n$  va  $r_v \perp n$  bo'lgani uchun:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_2 = d^2 r \cdot n &= r_{uu} ndu + 2r_{uv} ndudv + r_{vv} ndv + r_u ndu + r_v ndv = \\ &= r_{uu} ndu + 2r_{uv} ndudv + r_{vv} ndv. \end{aligned}$$

Demak,

$$\mathbf{F}_2 = r_{uu} ndu + 2r_{uv} ndudv + r_{vv} ndv.$$

Bu tenglama bilan (4) ni taqqoslasak, quyidagilar kelib chiqadi:

$$D = r_{uu} n, \quad D_1 = r_{uv} n, \quad D_2 = r_{vv} n \quad (5).$$

Yuqorida aytdikki,  $r_u$  va  $r_v$  vektorlar sirtning urinma tekisligiga parallel bo'ladi. Shuning uchun bu vektorlarning vektor ko'paytmasi bo'lgan

$[\vec{r}_u \vec{r}_v]$  vektor sirtning normaliga parallel bo'ladi. Demak,  $\frac{[\vec{r}_u \vec{r}_v]}{|\vec{r}_u \vec{r}_v|}$  birlik vektor

sirtning normali bo'ylab yo'naladi. Shu sababli bu vektorni sirt normalining birlik vektori sifatida olish mumkin, ya'ni:

$$n = \frac{[\vec{r}_u \vec{r}_v]}{|\vec{r}_u \vec{r}_v|} = \frac{[\vec{r}_u \vec{r}_v]}{\sqrt{[\vec{r}_u \vec{r}_v]^2}} = \frac{[\vec{r}_u \vec{r}_v]}{\sqrt{r_u^2 r_v^2 - (r_u r_v)^2}}.$$

$n$  vektorning bu qiymatini (5) tengliklarga qo'ysak:

$$D = \vec{r}_{uu} \frac{[\vec{r}_u \vec{r}_v]}{\sqrt{r_u^2 r_v^2 - (r_u r_v)^2}} = \frac{\vec{r}_{uu} [\vec{r}_u \vec{r}_v]}{\sqrt{r_u^2 r_v^2 - (r_u r_v)^2}} = \frac{(\vec{r}_{uu} \vec{r}_u \vec{r}_v)}{\sqrt{r_u^2 r_v^2 - (r_u r_v)^2}}.$$

$$D_1 = \vec{r}_{uw} \frac{[\vec{r}_u \vec{r}_v]}{\sqrt{r_u^2 r_v^2 - (r_u r_v)^2}} = \frac{\vec{r}_{uw} [\vec{r}_u \vec{r}_v]}{\sqrt{r_u^2 r_v^2 - (r_u r_v)^2}} = \frac{(\vec{r}_{uw} \vec{r}_u \vec{r}_v)}{\sqrt{r_u^2 r_v^2 - (r_u r_v)^2}}.$$

$$D_2 = \vec{r}_{vv} \frac{[\vec{r}_u \vec{r}_v]}{\sqrt{r_u^2 r_v^2 - (r_u r_v)^2}} = \frac{\vec{r}_{vv} [\vec{r}_u \vec{r}_v]}{\sqrt{r_u^2 r_v^2 - (r_u r_v)^2}} = \frac{(\vec{r}_{vv} \vec{r}_u \vec{r}_v)}{\sqrt{r_u^2 r_v^2 - (r_u r_v)^2}}$$

Demak,

$$D = \frac{(\vec{r}_{uu} \vec{r}_u \vec{r}_v)}{\sqrt{r_u^2 r_v^2 - (r_u r_v)^2}}, \quad D_1 = \frac{(\vec{r}_{uw} \vec{r}_u \vec{r}_v)}{\sqrt{r_u^2 r_v^2 - (r_u r_v)^2}}, \quad D_2 = \frac{(\vec{r}_{vv} \vec{r}_u \vec{r}_v)}{\sqrt{r_u^2 r_v^2 - (r_u r_v)^2}} \quad (6).$$

(3) va (6) formulalar vektor tenglamasi bilan berilgan sirt ikkinchi kvadratik formasining koeffitsiyentlarini topish formulalari bo'ladi.

**F** regulyar sirt  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$ ,  $z = z(u, v)$  parametrik tenglamalari bilan berilsin. Bu vaqtda:

$$\vec{r}_u = x_u \vec{i} + y_u \vec{j} + z_u \vec{k}, \quad \vec{r}_v = x_v \vec{i} + y_v \vec{j} + z_v \vec{k},$$

$$\vec{r}_{uu} = x_{uu} \vec{i} + y_{uu} \vec{j} + z_{uu} \vec{k}, \quad \vec{r}_{uv} = x_{uv} \vec{i} + y_{uv} \vec{j} + z_{uv} \vec{k}, \quad \vec{r}_{vv} = x_{vv} \vec{i} + y_{vv} \vec{j} + z_{vv} \vec{k}$$

bo'lib, koordinatalari bilan berilgan uch vektorning aralash ko'payt-masi quyidagicha aniqlanar edi:

$$(\vec{r}_{uu} \vec{r}_{uv} \vec{r}_v) = \begin{vmatrix} x_{uu} & y_{uu} & z_{uu} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}, \quad (\vec{r}_{uv} \vec{r}_u \vec{r}_v) = \begin{vmatrix} x_{uv} & y_{uv} & z_{uv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}, \quad (\vec{r}_{vv} \vec{r}_u \vec{r}_v) = \begin{vmatrix} x_{vv} & y_{vv} & z_{vv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}.$$

Sirt birinchi kvadratik formasining koeffitsiyentlari:

$$E = \vec{r}_u^2, \quad F = \vec{r}_u \vec{r}_v, \quad G = \vec{r}_v^2.$$



Bu tengliklarni hisobga olib, (6) tengliklardan quyidagi ifodalarni yoza olamiz:

$$D = \frac{\begin{vmatrix} x_{uu} & y_{uu} & z_{uu} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG - F^2}} ; \quad D_1 = \frac{\begin{vmatrix} x_{uv} & y_{uv} & z_{uv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG - F^2}} ; \quad D_2 = \frac{\begin{vmatrix} x_{vv} & y_{vv} & z_{vv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG - F^2}} \quad (7).$$

Bu (7) formulalar parametrik tenglamalari bilan berilgan sirt ikkinchi kvadratik formasining koeffitsiyentlarini topish formulalari deyiladi.

Agar sirt  $z = f(x, y)$  oshkor tenglamasi bilan berilsa,  $x = u$ ,  $y = v$  almashtirishlarini olib, (7) formuladan quyidagi ifodalarni hosil qilamiz:

$$D = \frac{z_{xx}}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} ; \quad D_1 = \frac{z_{xy}}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} ; \quad D_2 = \frac{z_{yy}}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} \quad (8).$$

Bu (8) formulalar oshkor tenglamasi bilan berilgan sirt ikkinchi kvadratik formasining koeffitsiyentlarini topish formulalari deyiladi.

Bu holda sirtning ikkinchi kvadratik formasi ushbu ko'ri-nishni oladi:

$$F_2 = Ddx^2 + 2D_1dxdy + D_2dy^2 \quad (9).$$

1-misol.  $x = u \cos v$ ,  $y = u \sin v$ ,  $z = av$  to'g'ri gelikoidning ikkinchi kvadratik formasini toping.

Echish. To'g'ri gelikoidning parametrik tenglamalaridan hosi-lalar olamiz:

$$\begin{aligned} x_u &= \cos v, & y_u &= \sin v, & z_u &= 0, \\ x_v &= -u \sin v, & y_v &= u \cos v, & z_v &= a, \\ x_{uu} &= 0, & y_{uu} &= 0, & z_{uu} &= 0, \\ x_{uv} &= -\sin v, & y_{uv} &= \cos v, & z_{uv} &= 0, \\ x_{vv} &= -u \cos v, & y_{vv} &= -u \sin v, & z_{vv} &= 0. \end{aligned}$$

Sirt birinchi kvadratik formasining koeffitsiyentlarini topamiz:

$$E = \cos^2 v + \sin^2 v = 1,$$

$$F = -u \sin v \cos v + u \sin v \cos v = 0,$$

$$G = u^2 \sin^2 v + u^2 \cos^2 v + a^2 = u^2 + a^2.$$

Sirt ikkinchi kvadratik formasining koeffitsiyentlarini topamiz. Sirt parametrik tenglamalari bilan berilgani uchun (7) formulalardan foydalanamiz.

$$D = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u \sin v & u \cos v & a \end{vmatrix}}{\sqrt{u^2 + a^2}} = 0, \quad D_1 = \frac{\begin{vmatrix} -\sin v & \cos v & 0 \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u \sin v & u \cos v & a \end{vmatrix}}{\sqrt{u^2 + a^2}} = -\frac{a}{\sqrt{u^2 + a^2}},$$

$$D_2 = \frac{\begin{vmatrix} -u \cos v & -u \sin v & 0 \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u \sin v & u \cos v & a \end{vmatrix}}{\sqrt{u^2 + a^2}} = 0$$

Topilgan qiymatlarni (4) formulaga qo'yamiz:

$$\Phi_2 = -\frac{2adudv}{\sqrt{u^2 + a^2}}.$$

Bu to'g'ri gelikoidning ikkinchi kvadratik formasi bo'ladi.

2-misol.  $z = xy$  sirtning ikkinchi kvadratik formasini toping.

yechish. Sirt tenglamasidan xususiy hosilalar olamiz:

$$p = z_x = y, \quad q = z_y = x, \\ z_{xx} = 0, \quad z_{xy} = 1, \quad z_{yy} = 0.$$

Sirt oshkor tenglamasi bilan berilgani uchun (8) formula-lardan foydalanib, ikkinchi kvadratik formaning koeffitsiyentlarini topamiz:

$$D = \frac{0}{\sqrt{1 + y^2 + x^2}} = 0; \quad D_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + y^2 + x^2}}; \quad D_2 = \frac{0}{\sqrt{1 + y^2 + x^2}} = 0.$$

Topilgan qiymatlarni (9) formulaga qo'yamiz:

$$F_2 = \frac{2xdy}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}.$$

1-ta'rif. Sirtning berilgan nuqtasidagi bosh egrilikla-rining ko'paytmasiga sirtning shu nuqtasidagi **to'la egriligi** deb, unga ba'zan **gauss egriligi** deb ham ataladi va  $K$  orqali belgilanadi.

Demak,

$$K = k_1 k_2.$$

2-ta'rif. Sirtning berilgan nuqtasidagi bosh egriliklar yarimlarining yig'indisiga sirtning shu nuqtasidagi **o'rta egriligi** deb ataladi va  $H$  bilan belgilanadi.

Demak,

$$H = \frac{1}{2} (k_1 + k_2).$$

Bu erda

$$k_1 k_2 = \frac{DD_2 - D_1^2}{EG - F^2} \quad \text{va} \quad k_1 + k_2 = \frac{ED_2 - 2FD_1 + GD_1}{EG - F^2}$$

bo'lgani uchun

$$K = \frac{DD_2 - D_1^2}{EG - F^2} \quad (1),$$

$$H = \frac{ED_2 - 2FD_1 + GD_1}{2(EG - F^2)} \quad (2).$$

(1) va (2) formulalar mos ravishda sirtning **gauss va o'rta egriliklarini hisoblash formulalari** deyiladi.

Sirt  $z = f(x, y)$  oshkor tenglamasi bilan berilsa, uning bi-rinchi va ikkinchi kvadratik formalarining koeffitsiyentlari quyidagicha aniqlanar edi:

$$E = 1 + p^2, \quad F = pq, \quad G = 1 + q^2,$$

$$D = \frac{z_{xx}}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}; \quad D_1 = \frac{z_{xy}}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}; \quad D_2 = \frac{z_{yy}}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

bu erda  $p = z_x$ ,  $q = z_y$ .

$E, F, G, D, D_1, D_2$  larning bu qiymatlarini (1) va (2) formulalarga qo'ysak:

$$K = \frac{z_{xx} z_{yy} - z_{xy}^2}{(1 + p^2 + q^2)^2} \quad (3),$$

$$H = \frac{(1 + q^2) z_{xx} - 2pq z_{xy} + (1 + p^2) z_{yy}}{2(1 + p^2 + q^2)^{3/2}} \quad (4).$$

(3) va (4) formulalar oshkor tenglamasi bilan berilgan sirtning gauss va o'rta egriliklarini topish formulalari deb ataladi.

(1) formuladan ushbu xulosalarga kelamiz:

1. Sirtning elliptik nuqtasida  $K > 0$ .
2. Sirtning giperbolik nuqtasida  $K < 0$ .
3. Sirtning parabolik nuqtasida  $K = 0$ .

Ba'zi sirtlarning to'la va o'rta egriliklarini hisoblaymiz.

1-misol. Tekislikning ixtiyoriy nuqtasidagi to'la va o'rta egriliklarini hisoblang.

Echish. Tekislikning umumiy tenglamasini olamiz:

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Agar  $C \neq 0$  bo'lsa

$$z = ax + by + c \quad (5)$$

bo'lib, bu erda

$$a = -\frac{A}{C}, \quad b = -\frac{B}{C}, \quad c = -\frac{D}{C}.$$

(5) tenglamadan

$$p = z_x = a, \quad q = z_y = b, \quad z_{xx} = 0, \quad z_{xy} = 0, \quad z_{yy} = 0.$$

Topilgan bu qiymatlarni (3) va (4) formulalarga qo'ysak

$$K = 0, \quad H = 0.$$

Demak, tekislikning barcha nuqtalarida to'la va o'rta egriliklari nolga teng ekan.

2-misol.  $x = R \cos u \cdot \cos v$ ,  $y = R \cos u \cdot \sin v$ ,  $z = R \sin u$  sferaning ixtiyoriy nuqtasidagi to'la va o'rta egriliklarini toping.

Echish. Sfera parametrik tenglamalari bilan berilgan. Uning bu tenglamalaridan birinchi va ikkinchi tartibli xususiy hosilalar olamiz:

$$x_u = -R \sin u \cdot \cos v, \quad y_u = -R \sin u \cdot \sin v, \quad z_u = R \cos u,$$

$$x_v = -R \cos u \cdot \sin v, \quad y_v = R \cos u \cdot \cos v, \quad z_v = 0,$$

$$x_{uu} = -R \cos u \cdot \cos v, \quad y_{uu} = -R \cos u \cdot \sin v, \quad z_{uu} = -R \sin u,$$

$$x_{uv} = R \sin u \cdot \sin v, \quad y_{uv} = -R \sin u \cdot \cos v, \quad z_{uv} = 0,$$

$$x_{vv} = -R \cos u \cdot \cos v, \quad y_{vv} = -R \cos u \cdot \sin v, \quad z_{vv} = 0.$$

Bularga asosan sferaning birinchi va ikkinchi kvadratik formalarining koeffitsiyentlarini topamiz:

$$E = (-R \sin u \cos v)^2 + (-R \sin u \sin v)^2 + (R \cos u)^2 = R^2.$$

$$F = (-R \sin u \cos v)(-R \cos u \sin v) + (-R \sin u \sin v)(R \cos u \cos v) + (R \cos u) \cdot 0 = 0.$$

$$G = (-R \cos u \sin v)^2 + (R \cos u \cos v)^2 + 0^2 = R^2 \cos^2 u,$$

$$D = \frac{\begin{vmatrix} -R \cos u \cos v & -R \cos u \sin v & -R \sin u \\ -R \sin u \cos v & -R \sin u \sin v & R \cos u \\ -R \cos u \sin v & R \cos u \cos v & 0 \end{vmatrix}}{\sqrt{R^2 R^2 \cos^2 u - 0^2}} = R,$$

$$D_1 = \frac{\begin{vmatrix} R \sin u \sin v & -R \sin u \cos v & 0 \\ -R \sin u \cos v & -R \sin u \sin v & R \cos u \\ -R \cos u \sin v & R \cos u \cos v & 0 \end{vmatrix}}{\sqrt{R^2 R^2 \cos^2 u - 0^2}} = 0,$$

$$D_2 = \frac{\begin{vmatrix} -R \cos u \cos v & -R \cos u \sin v & 0 \\ -R \sin u \cos v & -R \sin u \sin v & R \cos u \\ -R \cos u \sin v & R \cos u \cos v & 0 \end{vmatrix}}{\sqrt{R^2 R^2 \cos^2 u - 0^2}} = R \cos^2 u.$$

$E, F, G, D, D_1$  va  $D_2$  larning topilgan bu qiymatlarini (1) va (2) formulalarga qo'ysak, sferaning to'la va o'rta egriliklari kelib chiqadi:

$$K = \frac{R \cdot R \cos^2 u - 0^2}{R^2 R^2 \cos^2 u - 0^2} = \frac{1}{R^2}; \quad H = \frac{R^2 R \cos^2 u - 2 \cdot 0 \cdot 0 + (R^2 \cos^2 u) R}{2(R^2 R^2 \cos^2 u - 0^2)} = \frac{1}{R}.$$

Demak, sferaning barcha nuqtalarida to'la va o'rta egri-liklari o'zgarmas bo'lib, to'la egriligi  $\frac{1}{R^2}$ , o'rta egriligi  $\frac{1}{R}$  ga teng ekan.

3-misol.  $x = a \sin u \cdot \cos v$ ,  $y = a \sin u \cdot \sin v$ ,  $z = a \left( \ln \operatorname{tg} \frac{u}{2} + \cos u \right)$  psevdosferaning ixtiyoriy nuqtasidagi to'la va o'rta egriliklarini toping.

Echish. Psevdosferaning parametrik tenglamalaridan xususiy hosilalar olamiz:

$$x_u = a \cos u \cdot \cos v, \quad y_u = a \cos u \cdot \sin v, \quad z_u = a \cos u \cdot \operatorname{ctg} u,$$

$$x_v = -a \sin u \cdot \sin v, \quad y_v = a \sin u \cdot \cos v, \quad z_v = 0,$$

$$x_{uu} = -a \sin u \cdot \cos v, \quad y_{uu} = -a \sin u \cdot \sin v,$$

$$z_{uu} = -a \cos u \cdot (2 + \operatorname{ctg}^2 u),$$

$$x_{uv} = -a \cos u \cdot \sin v, \quad y_{uv} = a \cos u \cdot \cos v, \quad z_{uv} = 0,$$

$$x_{vv} = -a \sin u \cdot \cos v, \quad y_{vv} = -a \sin u \cdot \sin v, \quad z_{vv} = 0.$$

Bularga asosan psevdosferaning birinchi va ikkinchi kvad-ratik formalarining koeffitsiyentlarini topamiz:

$$\begin{aligned} E &= a^2 \operatorname{ctg}^2 u, & F &= 0, & G &= a^2 \sin^2 u, \\ D &= -a \operatorname{ctg} u, & D_1 &= 0, & D_2 &= a \sin u \cdot \cos u. \end{aligned}$$

Bularni (1) va (2) ga qo'ysak:

$$\begin{aligned} K &= \frac{(-a \operatorname{ctg} u)(a \sin u \cos u) - 0^2}{(a^2 \operatorname{ctg}^2 u)(a^2 \sin^2 u) - 0^2} = -\frac{1}{a^2}, \\ H &= \frac{(a^2 \operatorname{ctg}^2 u)(a \sin u \cos u) - 2 \cdot 0 \cdot 0 + (a^2 \sin^2 u)(-a \operatorname{ctg} u)}{2[(a^2 \operatorname{ctg}^2 u)(a^2 \sin^2 u) - 0^2]} = \frac{2}{a} \operatorname{ctg} 2u. \end{aligned}$$

Demak, psevdosferaning barcha nuqtalarida to'la egriligi o'z-garmas bo'lib,  $-\frac{1}{a^2}$  ga teng ekan.

$a_1^1, a_1^2, a_2^1, a_2^2$  noma'lumlarni topamiz. Buning uchun (4) teng-lamalar sistemasidagi har bir tenglamani navbat bilan  $\vec{r}_1$  va  $\vec{r}_2$  vektorlarga skalyar ko'paytiramiz:

$$\begin{aligned} \vec{n}_i \cdot \vec{r}_1 &= a_i^1 g_{11} + a_i^2 g_{12}, \\ \vec{n}_i \cdot \vec{r}_2 &= a_i^1 g_{21} + a_i^2 g_{22}. \end{aligned}$$

Bu erda  $\vec{n}_i \cdot \vec{r}_k = -b_{ik}$  bo'lgani uchun:

$$\left. \begin{aligned} a_i^1 g_{11} + a_i^2 g_{12} &= -b_{i1} \\ a_i^1 g_{21} + a_i^2 g_{22} &= -b_{i2} \end{aligned} \right\} \quad (5).$$

(5) tenglamalar sistemasini  $a_i^1$  va  $a_i^2$  ga nisbatan echib, quyida-gilarni hosil qilamiz:

$$a_i^1 = -\frac{g_{22}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} b_{i1} + \frac{g_{12}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} b_{i2} \quad (6),$$

$$a_i^2 = \frac{g_{21}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} b_{i1} - \frac{g_{11}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} b_{i2} \quad (7).$$

Demak, izlangan munosabatlar quyidagicha yoziladi:

$$\vec{n}_i = a_i^1 \vec{r}_1 + a_i^2 \vec{r}_2, \quad (8),$$

bu erdagi  $a_i^1$  va  $a_i^2$  lar (6) va (7) formulalardan topiladi.

(8) formula  $\vec{n}_1, \vec{n}_2$  hosilalarning yoyilmasini berib, bular-ga **ikkinchi gruppada derivatsion formulalar** yoki **Veyngarten formulalari** deyiladi.

Gauss va Veyngarten formulalarini birlashtirib yozsak:

$$\left. \begin{aligned} \vec{r}_{ik} &= \Gamma_{ik}^1 \vec{r}_1 + \Gamma_{ik}^2 \vec{r}_2 + b_{ik} \vec{n}, \\ \vec{n}_i &= a_i \vec{r}_1 + a_i \vec{r}_2 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Bu (9) derivatsion formulalar sirtlar nazariyasining asosiy formulalaridir. Ularda  $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{n}$  vektorlardan olingan xususiy hosilalar shu vektorlarning o'zlari orqali ifodalangan.

Fazodagi chiziqlar uchun Frene formulalari qanday rol o'ynasa, sirtlar uchun bu formulalar o'sha rolni o'ynaydi. Jumladan, bu formulalar  $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{n}$  vektorlarning istalgan tartibli xususiy hosilalarini yana shu  $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{n}$  vektorlar hamda  $g_{ik}$  va  $b_{ik}$  koeffitsiyentlar orqali, shu-ningdek, ularning  $u^1, u^2$  bo'yicha olingan xususiy hosilalari orqali ifodalash imkonini beradi.

(9) tenglamalar sistemasi  $r_{11}, r_{12}, r_{22}, n_1, n_2$  vektorlarga nisbatan xususiy hosilali beshta differensial tenglamalar sistemasidir. Koordinatalarga o'tganda, xususiy hosilali o'n beshta differensial tenglamalardan iborat sistema vujudga keladi.

### EGRILIK INDIKATRISASI.

Bizga  $\mathbf{F}$  sirt  $r = r(u, v)$  vektor tenglamasi bilan berilib, uni  $M$  nuqtasidagi normalidan o'tuvchi tekislik bilan kesib, normal kesim hosil qilingan bo'lsin.

Agar normal kesimni hosil qiladigan kesuvchi tekislikni  $M$  nuqtasidagi normal atrofida aylantirsak, hosil bo'lgan normal kesimlarning  $k_0$  egriliklari o'zgarib boradi. Biz shu o'zgarishning xarakterini o'rganamiz. Buning uchun sirtning  $M$  nuqtasidagi urinma tekisligida har bir normal kesimning urinmasiga

$$MP = \frac{1}{\sqrt{|k_0|}} \quad (1)$$

kesmani mos qo'yamiz. Ta'rif. Sirtning berilgan  $M$  nuqtasidagi urinma tekislikdagi (1) tenglikni qanoatlantiruvchi  $P$  nuqtalar to'plamiga **egrilik indikatrisasi** deb ataladi, ba'zan uni **Dyupen indikatrisasi** deb ham aytiladi.

Silliq sirtning har bir nuqtasida aniq bir egrilik indikat-risa mavjuddir. Dyupen indikatrisasi qanday figuradan iborat ekanligini aniqlaylik.

Buning uchun urinma tekislikda shunday affin koordinatalar sistemasini quramizki, bunda  $M$  urinish nuqtasini koordinatalar boshi,  $\vec{r}_u$  va  $\vec{r}_v$  vektorlar bo'ylab yo'nalgan to'g'ri chiziqlarni  $Ox$  va  $Oy$  o'qlari,  $r_u$  va  $r_v$  vektorlarni bazis vektorlar deb olamiz (33-chizma).

Tanlangan koordinatalar sistemasiga nisbatan  $P$  nuqtaning koordinatalarini  $x$ ,  $y$  deb belgilasak

$$\overline{MP} = x\vec{r}_u + y\vec{r}_v \quad (2)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Chiziqlar nazariyasidan ma'lumki normal kesim urinmasining birlik vektori  $\vec{\tau}$  orqali belgilanar edi. Shuning uchun

$$\overline{MP} = [\overline{MP}]\vec{\tau}$$

yoki (1) ga asosan

$$\overline{MP} = \frac{1}{\sqrt{|k_0|}} \vec{\tau}$$

Bu erda

$$\vec{\tau} = \vec{r} = r_u \frac{du}{ds} + r_v \frac{dv}{ds}$$

bo'lgani uchun

$$\overline{MP} = \frac{1}{\sqrt{|k_0|}} \left( r_u \frac{du}{ds} + r_v \frac{dv}{ds} \right)$$

Agar (2) ni hisobga olsak:

$$x r_u + y r_v = \frac{1}{\sqrt{|k_0|}} \left( r_u \frac{du}{ds} + r_v \frac{dv}{ds} \right)$$

Bu erda  $r_u$  va  $r_v$  vektorlar kollinear bo'lmagani uchun

$$x = \frac{1}{\sqrt{|k_0|}} \cdot \frac{du}{ds}, \quad y = \frac{1}{\sqrt{|k_0|}} \cdot \frac{dv}{ds}$$

$$\text{yoki} \quad \frac{du}{ds} = x \sqrt{|k_0|}, \quad \frac{dv}{ds} = y \sqrt{|k_0|} \quad (3).$$

Ma'lumki

$$\pm k_0 = \frac{\Phi_2}{\Phi_1}$$

edi, yoki

$$\pm k_0 = \frac{Ddu^2 + 2D dudv + D dv^2}{ds^2} = D \left( \frac{du}{ds} \right)^2 + 2D_1 \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + D_2 \left( \frac{dv}{ds} \right)^2$$

(3) ni e'tiborga olsak:

$$\pm k_0 = Dx^2 |k_0| + 2D_1 xy |k_0| + D_2 y^2 |k_0|$$

yoki

$$Dx^2 + 2D_1 xy + D_2 y^2 = \pm 1 \quad (4).$$



Hosil bo'lgan (4) formula **egrilik indikatriza tenglamasi** deyiladi. Bu tenglama  $x$  va  $y$  ga nisbatan ikkinchi tartibli tenglamadir. Demak, indikatriza ikkinchi tartibli chiziq ekan.

Bizga ma'lumki ikkinchi tartibli chiziq uch xil bo'ladi. Shu sababli indikatrizar ham uch xil bo'ladi.

Agar  $DD_2 - D_1^2 > 0$  bo'lsa, indikatriza ellipsdan iborat bo'lib, sirtning  $M$  nuqtasi **elliptik nuqta** deb ataladi.

Agar  $DD_2 - D_1^2 < 0$  bo'lsa, indikatriza ikkita qo'shma giperboladan iborat bo'lib,  $M$  nuqtaga **giperbolik nuqta** deyiladi.

Agar  $DD_2 - D_1^2 = 0$  bo'lsa, indikatriza ikkita parallel to'g'ri chiziqdan iborat bo'lib,  $M$  nuqtaga **parabolik nuqta** deb ataladi.

Misol.  $x = u^2 + v^2$ ,  $y = u^2 - v^2$ ,  $z = uv$  sirtning  $P(u = 1; v = 1)$  nuqtasidagi egrilik indikatrizasining tenglamasini tuzing.

Echish. Sirtning parametrik tenglamalaridan xususiy hosil-lar olamiz:

$$\begin{array}{lll} x_u = 2u, & y_u = 2u, & z_u = v, \\ x_v = 2v, & y_v = -2v, & z_v = u, \\ x_{uu} = 2, & y_{uu} = 2, & z_{uu} = 0, \\ x_{uv} = 0, & y_{uv} = 0, & z_{uv} = 1, \\ x_{vv} = 2, & y_{vv} = -2, & z_{vv} = 0. \end{array}$$

$E, F, G, D, D_1, D_2$  koeffitsiyentlarning  $P(u = 1; v = 1)$  nuqtadagi qiymatlarini topamiz.

$$E = 4u^2 + 4u^2 + v^2 = 8u^2 + v^2, \quad E = 8 \cdot 1^2 + 1^2 = 9.$$

$$F = 4uv - 4uv + uv = uv, \quad F = 1 \cdot 1 = 1.$$

$$G = 4v^2 + 4v^2 + u^2 = 8v^2 + u^2, \quad G = 8 \cdot 1^2 + 1^2 = 9.$$

$$D = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{\sqrt{9 \cdot 9 - 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}};$$

$$D_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{\sqrt{9 \cdot 9 - 1^2}} = -\frac{2}{\sqrt{5}}; \quad D_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{\sqrt{9 \cdot 9 - 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Demak, egrilik indikatriza tenglamasi

$$\frac{2}{\sqrt{5}}x^2 - \frac{4}{\sqrt{5}}xy + \frac{2}{\sqrt{5}}y^2 = \pm 1$$

## Mustaqil yechish uchun misollar

1. Ushbu konik  $x = av \cos u, y = bv \sin u, z = v$  sirtning birinchi kvadratik formasini toping.
2. Ushbu konik  $x = av \cos u, y = bv \sin u, z = v$  sirtning ikkinchisi kvadratik formasini toping.
3.  $z=xy$  sirtning ikkinchi kvadratik formasini toping.
4.  $x = u^2 - v^2, y = u^2 + v^2, z = uv$  sirtning  $P(u = 1; v = 1)$  nuqtasidagi egrilik indikatriyasining tenglamasini tuzing.

## ADABIYOTLAR RO‘YXATI

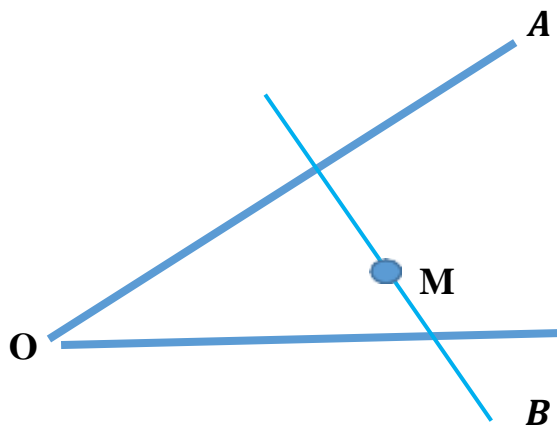
13. Avilova L.V., Bolotyuk V.A., Bolotyuk L.A. Analiticheskaya geometriya i lineynaya algebra// 2013. Izdanie: 1-ye izd. 421 s.
14. Aleksandrov A.D., Nesvetaev N.Yu. Geometriya, M.: Nauka, 1990. – 672 s.
15. Bobenko A.I. (Ed.) Advances in Discrete Differential Geometry// Springer, 2016. — 439 p. — (Mathematics). — ISBN: 3662504464  
II. M. Rikhsiboev and N. S. Mohamed, Engineering Mathematics 2, Malaysia, 2019.
16. Manfredo P. Do Carmo. Differential geometry of Curves and surface // Dover publications, Inc. Mineola, New York, 2016. – 529 rr.
17. Matematik analiz./ Azlarov T., Mansurov H.: Universitet va ped. institutlar talabalari uchun darslik: 2 qismli. 1-q.— Qayta ishlangan va to‘ldirilgan 2-nashri.— T.: Uqituvchi, 1994.—416 b.
18. Dodajonov N., Yunusmetov R., Abdullayev T. Geometriya, II qism.
19. Narmanov A. Differensial geometriya.
20. Sobirov M.A., Yusupov A.Yo. Differensial geometriya kursi.
21. Ergashev B. Evklid fazosida chiziqlar.
22. Ergashev B. Evklid fazosida sirtlar.
23. Belko I.V. i dr. Sbornik zadach po differensialnoy geometrii.
24. Sh.Murodov, L.Xakimov, A.Xolmurzayev, M.Jumayev, A.To‘xtayev. «Chizma geometriya». Oliy texnika o‘quv yurtlari uchun darslik. Toshkent, 2005.

## Internet saytlar

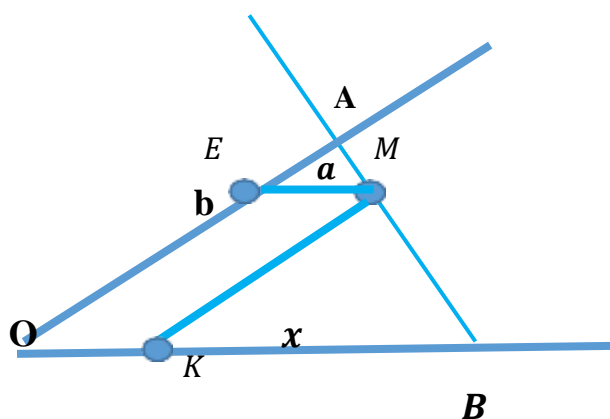
10. [www.edu.uz](http://www.edu.uz).
11. [www.bimm.uz](http://www.bimm.uz)
12. [www.arxiv.org](http://www.arxiv.org)
13. [www.ams.mathscinet.org](http://www.ams.mathscinet.org)
14. <http://www.princeton.edu/main/>
15. <https://www.stanford.edu>
16. <http://mathins.uz>
17. <http://ziyonet.uz>
18. <http://dmvn.mexmat.net/>

## 5 – AMALIYOT: Yuza va hajmga doir masalalar

1- **Masala** AOB burchakning ichidan olingan ixtiyoriy M nuqtadan shunday to'g'ri chiziq o'tkazingki bu to'g'ri chiziq burchak tomonlarini kesib o'tadi va hosil bo'lgan uchburchak eng kichik yuzaga ega bo'lsin



- $\angle AOB = \alpha$  bo'lsin. M nuqtadan burchak tomonlariga parallel to'g'ri chiziqlar o'tkazamiz, hosil bo'lgan parallelogramning tomonlarini a va b deb olamiz.
- I bosqich.  $S(AOB) = S$



- II bosqich.  $KB = x, a \leq x < \infty$
- III bosqich.  $S = \frac{1}{2} AO \cdot OB \cdot \sin \alpha, OB = a + x, AE = y$
- $\triangle AME \sim \triangle AOB \Rightarrow \frac{EM}{OB} = \frac{AE}{AO} \Rightarrow \frac{a}{a+x} = \frac{y}{b+y} \Rightarrow y = \frac{ab}{x}$

$$S = \frac{1}{2} \left( \frac{ab}{x} + b \right) (a + x) \sin \alpha = \frac{b}{2x} (a + x)^2 \sin \alpha = |b \sin \alpha = h|$$

$$= \frac{h(a + x)^2}{2x}$$

- $S = \frac{h(a+x)^2}{2x} \Rightarrow S' = \frac{h}{x^2} \cdot (a+x)(x-a)$
- $x_1 = a, x_2 = -a$ , shartga ko'ra  $x \in [a, \infty)$ , demak  $x = a$
- V bosqich. Xulosa  $x=a$  bo'lganda izlanayotgan yuz  $S = 4ah$  bo'ladi.  $X=a$  bo'lsa K nuqta OB ning o'rtasi berilgan M nuqta bo'yicha shunday to'g'ri chiziq o'tkazish mumkinki M nuqta to'g'ri chiziq o'rtasida bo'lishi kerak.

### Mustaqil bajarish uchun masallalar.

1. Muntazam to'rtburchakli piramidaning yon yog'i berilgan yuzaga ega bo'lib u asos tekisligi bilan  $\alpha$  burchak hosil qiladi.  $\alpha$  ning qanday qiymatida piramida hajmi eng katta bo'ladi.
2. qirradi 5 ga teng kubning biror uchiga qoshni uchta uchi orqali o'tuvchi tekislik bilan ikki bo'lakka bo'lingan. Kichik bo'lakning hajmini toping.
3. Uchburchakli piramidaning asosi tomonlari 4; 4 va 2 ga teng bo'lgan uchburchakdan iborat. Piramidaning barcha yon yoqlari asos tekisligi bilan  $60^\circ$ li burchak tashkil etadi. Piramidaning hajmini toping.
4. Piramidaning asosi kvadratdan iborat. Kvadratning diagonali 6 ga teng. Piramidaning yon qirralaridan biri uning asosiga perpendikulyar. Piramidaning katta yon qirradi va asos tekisligi orasidagi burchak  $45^\circ$  ga teng. Piramidaning hajmini toping.
5. Muntazam uchburchakli piramidaning yon qirradi  $l$  ga teng va asos tekisligi bilan  $\alpha$  burchak hosil qiladi. Piramidaning hajmini toping.
6. To'g'ri to'rtburchakni uning biror tomoni atrofida aylantirish natijasida silindr hosil qilingan. Silindr hajmini shu to'rtburchak yuzi  $S$  va asos aylanasining uzunligi  $C$  orqali ifodalang
7. Silindr va unga tashqi chizilgan muntazam to'rtburchakli perallelepipedning balandligi 3 ga, perallelepiped asosining tomoni 4 ga teng. Silindrning hajmini toping.
8. Kubning ostki asosidagi tomonlarining o'rtalari ketma ket tutashtirildi. Hosil bo'lgan to'rtburchakning uchlari kub ustki asosining markazi bilan

- tutashtirildi. Agar kubning qirrasi  $a$  ga teng bo'lsa, hosil bo'lgan piramidaning to'la sirtini toping.
9. Muntazam uchburchakli piramidaga konus ichki chizilgan. Agar piramidaning yon yoqlari bilan asosi  $60^\circ$  li burchak hosil qilib, piramidaning asosiga ichki chizilgan aylananing radiusi  $16$  ga teng bo'lsa, konusning yon sirtini toping.
  10. Kesik konusga shar ichki chizilgan. Agar kesik konus asoslarining yuzlari  $\pi$  va  $4\pi$  ga teng bo'lsa, shu konus yon sirtining yuzini toping.
  11. Radiusi  $\sqrt{\frac{3}{2}}$  ga teng yarim sharga kub ichki chizilgan bo'lib uning to'rtta uchi yarim shar asosida, qolgan to'rttasi shar sirtida yotadi. Kubning hajmini toping.
  12. Yon tomoniga o'tkazilgan mediananing uzunligi o'zgarmas bo'lgan teng yonli uchburchaklar orasida eng katta yuzli uchburchakning uchidagi burchagining kosinusini toping.
  13. Muntazam to'rtburchakli piramidaning yon yog'i berilgan yuzga ega bo'lib, u asos tekisligiga kattaligi  $a$  ga teng bo'lgan burchak ostidagi og'ma.  $a$  ning qanday qiymatida piramidaning hajmi eng katta bo'ladi?
  14. Hajmi o'zgarmas bo'lgan konusga piramida ichki chizilgan piramidaning asosi uchidagi burchagining kattaligi  $a$  ga teng bo'lgan teng yonli burchak yotadi.  $a$  ning qanday qiymatida piramidaning hajmi eng katta bo'ladi?

## ADABIYOTLAR RO'YXATI

1. Avilova L.V., Bolotyuk V.A., Bolotyuk L.A. Analiticheskaya geometriya i lineynaya algebra// 2013. Izdanie: 1-ye izd. 421 s.
2. Aleksandrov A.D., Nesvetaev N.Yu. Geometriya, M.: Nauka, 1990. – 672 s.
3. Bobenko A.I. (Ed.) Advances in Discrete Differential Geometry// Springer, 2016. — 439 p. — (Mathematics). — ISBN: 3662504464 M. Rikhsiboev and N. S. Mohamed, Engineering Mathematics 2, Malaysia, 2019.
4. Manfredo P. Do Carmo. Differential geometry of Curves and surface // Dover publications, Inc. Mineola, New York, 2016. – 529 rr.
5. Matematik analiz./ Azlarov T., Mansurov H.: Universitet va ped. institutlar talabalari uchun darslik: 2 qismli. 1-q.— Qayta ishlangan va to'ldirilgan 2-nashri.— T.: Uqituvchi, 1994.—416 b.
6. Dodajonov N., Yunusmetov R., Abdullayev T. Geometriya, II qism.

7. Narmanov A. Differensial geometriya.
8. Sobirov M.A., Yusupov A.Yo. Differensial geometriya kursi.
9. Ergashev B. Evklid fazosida chiziqlar.
10. Ergashev B. Evklid fazosida sirtlar.
11. Belko I.V. i dr. Sbornik zadach po differensialnoy geometri.
12. Sh. Murodov, L. Xakimov, A. Xolmurzayev, M. Jumayev, A. To‘xtayev. «Chizma geometriya». Oliy texnika o‘quv yurtlari uchun darslik. Toshkent, 2005.

### Internet saytlar

1. [www.edu.uz](http://www.edu.uz).
2. [www.bimm.uz](http://www.bimm.uz)
3. [www.arxiv.org](http://www.arxiv.org)
4. [www.ams.mathscinet.org](http://www.ams.mathscinet.org)
5. <http://www.princeton.edu/main/>
6. <https://www.stanford.edu>
7. <http://mathins.uz>
8. <http://ziyonet.uz>
9. <http://dmvn.mexmat.net/>

### GLOSSARIY

Termin	O‘zbek tilidagi sharhi
<b>Argument</b>	erkli o‘zgaruvchi
<b>Eyler</b>	( Euler Leonhard, 1707 - 1783) fransuz matematiki Peterburg FA a’zosi.
<b>Koshi</b>	(Cauchy Augustin Luis, 1789 - 1857) fransuz matematiki
<b>Umumiy yechim</b>	tenglama yechimi oshkor ko‘rinishda

<b>Belgi</b>	<b>Atalishi</b>	<b>Kim kiritgan?</b>	<b>Qachon kiritgan?</b>
+	qo‘shish	Ya. Vidman	XV asr oxiri
-	qo‘shish	Ya. Vidman	XV asr oxiri
*	ko‘paytirsh	Outred	1631
.	ko‘paytirish	G. Leybnis	1698
:	bo‘lish	G. Leybnis	1684
$a^n$	daraja	R. Dekart	1637
$\sqrt{\quad}$	ildiz	X.Rudolf, A.Jiror	1525, 1629
$\log_a x$	logarifm	I.Kepler	1624
$\sin x$	sinus	B.Kavaleri	1632
$\cos x$	kosinus	A.Eyler	1748
$tgx$	tangens	A.Eyler	1753
$\arcsin x, arctgx$	Arksinus, arktangens	J.Lagranj	1772
$dx, d^2x, \dots$	Differensial	G. Leybnis	1675



$\int f(x)dx$	Integral	G.Leybnis	1675
$y'(x)$	Xosila	G.Leybnis	1675
$\int_a^b f(x)dx$	Aniq integral	J.Fure	1819-1822
$\Sigma$	Yig'indi	L.Eyler	1755
$k!$	Faktorial	X.Kramp	1803
lim	Limit	U.Gamilton	1853
$f(x)$	Funksiya	I.Bernulli, L.Eyler	1718, 1734
$i$	Kompleks son	L.Eyler	1777
$x, y, z$	O'zgaruvchilar	R.Dekart	1637
$\rightarrow$	Vektor	O.Koshi	1853
$=$	Tenglik	R.Rekord	1557
$\gg$	Katta, kichik	T.Garriot	1631
$\equiv$	Tenglik	K.Gauss	1801
$\parallel$	Parallellik	U.Outred	1677

$\perp$	Pperpendikulyarlik	P.Erigon	1634
Arab raqamlari	Matematik belgilar	Hind matematiklari	V asr
$\mathbb{H}$	Modul	K.Veershtrass	
Rim raqamlari	Matematik belgilar	Rus matematiklari	Eramizdan V asr avval
$\leq \geq$	Noqat'iy tengsizliklar	P.Buge	1734
[ ]	Kvadrat qavs	R.Bombelli	1550
( )	Qavs	N.Tartalya	1556
{ }	Sistemali qavs	F.Viet	1593
$e$	Natural logarifm asosi	L.Eyler	1736
$\equiv$	Tenglik belgisi	B.Riman	1857
$\cap$	Kesishma	Dj.Peano	1895

## ADABIYOTLAR RO‘YXATI

1. Avilova L.V., Bolotyuk V.A., Bolotyuk L.A. Analiticheskaya geometriya i lineynaya algebra// 2013. Izdanie: 1-ye izd. 421 s.
2. Aleksandrov A.D., Nesvetaev N.Yu. Geometriya, M.: Nauka, 1990. – 672 s.
3. Bobenko A.I. (Ed.) Advances in Discrete Differential Geometry// Springer, 2016. — 439 p. — (Mathematics). — ISBN: 3662504464 M. Rikhsiboev and N. S. Mohamed, Engineering Mathematics 2, Malaysia, 2019.
4. Manfredo P. Do Carmo. Differential geometry of Curves and surface // Dover publications, Inc. Mineola, New York, 2016. – 529 rr.
5. Matematik analiz./ Azlarov T., Mansurov H.: Universitet va ped. institutlar talabalari uchun darslik: 2 qismli. 1-q.— Qayta ishlangan va to‘ldirilgan 2-nashri.— T.: Uqituvchi, 1994.—416 b.
6. Dodajonov N., Yunusmetov R., Abdullayev T. Geometriya, II qism.
7. Narmanov A. Differensial geometriya.
8. Sobirov M.A., Yusupov A.Yo. Differensial geometriya kursi.
9. Ergashev B. Evklid fazosida chiziqlar.
10. Ergashev B. Evklid fazosida sirtlar.
11. Belko I.V. i dr. Sbornik zadach po differensialnoy geometri.
12. Sh.Murodov, L.Xakimov, A.Xolmurzayev, M.Jumayev, A.To‘xtayev. «Chizma geometriya». Oliy texnika o‘quv yurtlari uchun darslik. Toshkent, 2005.

### Internet saytlar

1. [www.edu.uz](http://www.edu.uz).
2. [www.bimm.uz](http://www.bimm.uz)
3. [www.arxiv.org](http://www.arxiv.org)
4. [www.ams.mathscinet.org](http://www.ams.mathscinet.org)
5. <http://www.princeton.edu/main/>
6. <https://www.stanford.edu>
7. <http://mathins.uz>
8. <http://ziyonet.uz>
9. <http://dmvn.mexmat.net/>

## **BITIRUV (LOYIHA) ISHLARI MAVZULARI**

1. Sirt tushunchasi sirtning ichki va tashqi geometriyasi.
2. Ko'pyoqliklar va uning turlari. Ko'pyoqlik yoyilmasi.
3. Sath sirlari geometriyasi.
4. Sirtlarni izometrik akslantirishlar va ularning xossalari.
5. Yevklidning "Negizlar" asarida geometrik yasashlar nazariyasining bayoni.
6. Vektor funksiya tushunchasi.
7. Masofa, yuza va hajm tushunchalari bilan bog'liq masalalar.
8. Elementar geometriya aksiomalari va ulardan kelib chiqadigan natijalar.
9. Yevklid va Noyevklid geometriyasi.