Ўзбекистон Республикаси
Олий ва Ўрта Махсус таълим вазирлиги

Мирзо Улуғбек номидаги
Ўзбекистон Миллий Университети

Т.Т.Туйчиев, А.С.Бедарев

Анализнинг танланган боблари

Тошкент - 2006

Аннотация

Қўлланма «Анализнинг танланган боблари» фанининг ўқув дастури асосида тузилган бўлиб, ўқув адабиёти бакалаврлар учун Давлат таълим стандартининг “Математика“ йўналишига мос келади ва Университетларнинг 4-курс талабалари учун мўлжалланган.

Қўлланма 4 бобдан иборат бўлиб, у чекли вариацияли функциялар, Стилтьес интеграли ва унинг хоссалари, майдонлар назарияси элементлари, ортогонал функциялар ва қаторлар мавзуларини ўз ичига олади.

Муаллифлар:

Физ.-мат. фанлари номзоди, доц. **Туйчиев Т.Т.**
Физ.-мат. фанлари номзоди, доц. **Бедарев А.С.**

Масъул муҳаррир:

Физ.-мат. фанлари доктори **Шоимқулов Б.А.**

Мундарижа

I-БОБ. Чекли вариацияли функциялар

II-БОБ. Стилтьес интеграли

III-БОБ. Майдонлар назарияси элементлари

IV-БОБ. Ортогонал функциялар ва қаторлар

Сўз боши

Ўзбекистон Республикаси таълим тўғрисидаги Қонун ва Кадрлар тайёрлаш Миллий дастури талабларини амалга оширишда Ўзбекистон Миллий Университети механика – математика факультети математик анализ кафедраси жамоаси масъулиятини ҳис этган ҳолда илмий педагогик кадрлар тайёрлаш самарадорлигини ва сифатини ошириш мақсадларини кўзлаб ўз олдига қатор вазифаларни белгилади.

Белгиланган вазифалардан асосийлари сифатида таълим сифатини янада ошириш ва талабаларни ҳар томонлама замон талабларига мос келувчи, Давлат тилида ёзилган адабиётлар билан таъминлаш вазифаларини келтириш мумкин.

Шу вазифалар бажарилишининг исботи сифатида юзага келган ушбу қўлланма «Анализинг танланган боблари» фанидан ёзилган бўлиб, у шу фаннинг ўқув дастури асосида тузилган ва ўқув адабиёти бакалаврлар учун Давлат таълим стандартининг «Математика» йўналишига мос келади ва Университетларнинг 4-курс талабалари учун мўлжалланган.

Қўлланма тўрт бобдан иборат бўлиб, ҳар бир боб унда учрайдиган таянч иборалар билан бошланади ва талабанинг ўтилган мавзуни қай даражада ўзлаштирганини текшириш мақсадида келтирилган назорат саволлари билан тугайди.

Қўлланманинг биринчи боби аниқ интегралнинг умумлашмаси бўлган Стилтьес интегралини ўрганишда асосий вазифани бажариш билан бир қаторда математик анализнинг бошқа кўплаб масалаларида катта аҳамиятга эга бўлган ва фанга биринчи бўлиб С.Жордан томонидан киритилган чекли вариацияли функциялар билан танишишга бағишланган. Иккинчи бобда эса Риман интегралининг табиий умумлашмаси бўлган Стилтьес интеграли ва унинг хоссалари ўрганилади. Кўп ўзгарувчили функциялар назариясининг баъзи масалаларини майдонлар назариясининг элементлари ёрдамида физик нуқтаи назардан ўрганиш масаласи учинчи бобда амалга оширилган. Қўлланманинг охирги–тўртинчи бобида ортонормал системалар, бу системаларнинг Фурье қаторлари билан боғланиши, математик физика тенгламаларини интеграллашда учрайдиган функциялар синфларидан бири–Лаплас тенгламасининг ечими бўлган сферик функциялар синфи ва уларнинг хоссаларини ўрганиш билан шуғулланилган.

Муаллифлар қўлланма талабаларда билим олишга интилиш хиссининг шаклланишига хизмат қилади ҳамда у талабаларга «Анализнинг танланган боблари» фанининг келтирилган мавзулари бўйича билимларини мустаҳкамлашда ёрдам беради деб умид билдирадилар.

I-БОБ.
Чекли вариацияли функциялар

Чекли вариацияли функция.
Функциянинг тўлиқ вариацияси.
Чекли вариацияли функцияларнинг монотон функция билан боғланиши
Чекли вариацияли функциянинг узлуксиз функция билан боғланиши.
Чекли вариацияли функциянинг Липщиц шартини қаноатлантурувчи функция билан боғланиши.
Чекли вариацияли функциянинг дифференциаланувчи функция билан боғланиши.
Чекли вариацияли функциянинг абсолют интеграллашувчи функция билан богланиши. Мажоранта функция.
Тўғриланувчи чизиклар.
Жордан теоремаси.

Ушбу боб аниқ интегралнинг умумлашмаси бўлган Стилтьес интегралини ўрганишда асосий вазифани бажарадиган ва фанга биринчи бўлиб С.Жордан томонидан киритилган чекли вариацияли функциялар билан танишишга багишланган Чекли вариацияли функциялар фақатгина Стилтьес интегралини ўрганишда эмас, балки математик анализнинг бошқа кўплаб масалаларида катта аҳамиятга эга.

1-§. Чекли вариацияли функциялар ва уларнинг хоссалари.

1. Чекли вариацияли функциянинг таърифи.

Айтайлик, $f(x)$ функция чекли [a,b] ораликда аниқланган бўлсин. Бу ораликни ушбу

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_k < x_{k+1} < ... < x_n = b$$

тенгсизликларни қаноатлартирувчи ихтиёрий нуқталар ёрдамида n та оралиққа бўламиз ва қуйидаги йиғиндини тузамиз:

$$\vartheta_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left| f(x_{k+1}) - f(x_k) \right| \; . \qquad \textbf{(1)}$$

<u>1-таъриф.</u> *Агар (1)-йиғиндилар* $\forall n \in N$ *учун юқоридан текис чегараланган бўлса, унда* $f(x)$ *функция [a,b] кесмада **чекли вариацияга эга** ёки **ўзгариши чегараланган функция** дейилади. Шу йиғиндиларнинг аниқ юқори чегарасига **функциянинг тўлиқ вариацияси** ёки **тўлиқ ўзгариши** деб аталади ҳамда у* $\overset{b}{\underset{a}{V}} f(x)$ *каби белгиланади:*

$$\overset{b}{\underset{a}{V}} f(x) := Sup\{\vartheta_n\} \qquad \textbf{(2)}$$

Баъзи ҳолларда $f(x)$ функциянинг чексиз оралиқдаги (масалан, $[a,+\infty)$ оралиқдаги) вариацияси тўғрисида ҳам гапириш мумкин бўлади.

Фараз қилайлик, $f(x)$ функция $[a,+\infty)$ оралиқда берилган бўлсин.

<u>2-таъриф</u>. *Агар* $f(x)$ *функция* $\forall[a,A] \subset [a,+\infty)$ *ораликда чекли вариацияга эга бўлиб,* $\overset{A}{\underset{a}{V}} f(x)$ *тўлиқ вариациялар текис чегараланган бўлса, унда* $f(x)$ *функция* $[a,+\infty)$ *оралиқда чекли вариацияга эга деб аталади ҳамда*

$$\overset{+\infty}{\underset{a}{V}} f(x) = \underset{A>a}{Sup}\{\overset{A}{\underset{a}{V}} f(x)\} \qquad \textbf{(3)}$$

деб қабул қилинади.

<u>Изох</u>. $f(x)$ *функциянинг чекли вариацияга эга бўлишида унинг узлуксизлиги мутлақо аҳамиятга эга эмас.*

<u>Мисоллар</u>. 1*) [a,b] кесмада ихтиёрий чегараланган монотон функция чекли вариацияга эга бўлади*

◄**а)** [a,b] - чекли бўлсин. $\Rightarrow$

$\vartheta_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left| f(x_{k+1}) - f(x_k) \right|$ ((функция монотон бўлгани учун модуллар йиғиндиси йиғиндининг модулига тенг бўлади))

$$=\left|\sum_{k=0}^{n-1}[f(x_{k+1})-f(x_k)]\right|=|f(x_1)-f(x_0)+f(x_2)-f(x_1)+f(x_3)-f(x_2)+\ldots+f(x_n)-f(x_{n-1})|$$

$$=|f(x_n)-f(x_0)|=|f(b)-f(a)|\Rightarrow \overset{b}{\underset{a}{V}} f(x)=Sup\{\vartheta_n\}=|f(b)-f(a)|.$$

б) $f(x)$ функция $[a,+\infty)$ оралиқда берилган бўлсин. $\Rightarrow$

$$\overset{+\infty}{\underset{a}{V}} f(x):=\underset{A>a}{Sup}\left\{\overset{A}{\underset{a}{V}} f(x)\right\}=\underset{A>a}{Sup}\{|f(A)-f(a)|\}=|f(+\infty)-f(a)|,$$

бу ерда $f(+\infty)=\underset{A\to\infty}{\ell im}\, f(A)$.▶

2) *Энди узлуксиз, лекин чекли вариацияга эга бўлмаган функцияга мисол келтирамиз.*

◀Ушбу

$$f(x)=\begin{cases} x\cos\dfrac{\pi}{2x}, & \text{агар } x\neq 0 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x=0, \text{ бўлса} \end{cases}$$

функцияни [0;1] кесмада караймиз. Қуйидаги

$$0<\frac{1}{2n}<\frac{1}{2n-1}<\ldots<\frac{1}{3}<\frac{1}{2}<1$$

тенгсизликларни қаноатлантирувчи нуқталар ёрдамида [0;1] кесмани оралиқларга ажратамиз ва (1)-йиғиндини ҳисоблаймиз ҳамда ушбу тенгликка эга бўламиз:

$$\vartheta_n=\sum|f(x_{k+1})-f(x_k)|=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\ .\Rightarrow$$

$$\overset{1}{\underset{0}{V}} f(x)=Sup\{\vartheta_n\}=\underset{n}{Sup}\{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\}=+\infty\ .$$▶

2. Чекли вариацияли функциялар синфи.

Аввалги пунктда кўрганимиздек [a,b] кесмада ихтиёрий чегараланган монотон функция чекли вариацияга эга бўлади. Бу хоссадан фойдаланиб, чекли вариацияли функциялар синфини кенгайтириш мумкин.

1-теорема. *[a,b] кесмада берилган* $f(x)$ *функция шу кесмада бўлакли монотон бўлса, яъни*

$$[a,b]=\overset{m-1}{\underset{k=0}{U}}[a_k,a_{k+1}]\quad (a_0=a,\ a_m=b)$$

бўлиб, $f(x)$ *функция ҳар бир* $[a_k,a_{k+1}]$ *кесмада монотон бўлса, унда* $f(x)$ *функция* [a,b] *кесмада чекли вариацияга эга бўлади.*

◀[a,b] кесманинг ихтиёрий бўлинишини олиб

$$\vartheta_n=\sum_{k=0}^{n-1}|f(x_{k+1}-f(x_k)|$$

йиғинди тузамиз. Бу бўлинишга $a_k(k=\overline{0,m})$ нуқталарни қўшиб, [a,b] кесманинг янги бўлинишини оламиз. Янги бўлиниш учун

$$\overline{\vartheta}_{n(m)}=\sum_{k=0}^{m-1}\left|f(a_{k+1})-f(a_k)\right|=B$$

бўлиб, $\vartheta_n\le\overline{\vartheta}_{n(m)}$ тенгсизлик бажарилади $\Rightarrow$

$Sup\{\vartheta_n\}\le B\ \Rightarrow\ f(x)$ функция [a,b] кесмада чекли вариацияга эга.▶

2-теорема. *Агар* $f(x)$ *функция [a,b] кесмада Липщиц шартини қаноатлантирса, яъни шундай L>0 сон топилсаки, ихтиёрий* $x,\bar{x}\in[a,b]$ *нуқталар учун*

$$\left|f(\bar{x})-f(x)\right|\le L\cdot\left|\bar{x}-x\right| \qquad \textbf{(4)}$$

тенгсизлик бажарилса, унда $f(x)$ *функция [a,b] кесмада чекли вариацияли функция бўлади ва*

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}f(x)\le L\cdot(b-a)$$

тенгсизлик бажарилади.

◀ $\vartheta_n=\sum_{k=0}^{n-1}\left|f(x_{k+1})-f(x_k)\right|\overset{(4)}{\le}L\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)=L\cdot(b-a)$, $\forall n\in\mathrm{N}$ учун $\Rightarrow$ $\overset{b}{\underset{a}{V}}f(x)\le L\cdot(b-a)$.▶

3-теорема. *Агар* $f(x)$ *функция [a,b] кесмада чегараланган ҳосилага эга бўлса, унда* $f(x)$ *функция [a,b] кесмада чекли вариацияга эга бўлади.*

◀Теорема шартига кўра шундай ўзгармас $L>0$ сон топиладики, $\forall x\in[a,b]$ учун

$$\left|f'(x)\right|\le L$$

тенгсизлик бажарилади. $\forall x,\bar{x}\in[a,b]$ нуқталар олиб $[x,\bar{x}]$ (ёки $[\bar{x},x]$) кесмада Лагранжнинг чекли орттирмалар ҳақидаги теоремасидан фойдаланамиз:

$$\left|f(\bar{x})-f(x)\right|=\left|f'(\xi)\cdot(\bar{x}-x)\right|\le L\cdot\left|(\bar{x}-x)\right|.$$

Демак, $f(x)$ функция [a,b] кесмада Липщиц шартини қаноатлантирар экан. Унда 2-теоремага кўра у чекли вариацияга эга бўлади.▶

Мисол. *Ушбу*

$$f(x)=\begin{cases} x^2\ \sin\frac{\pi}{x}, & \text{агар } x\neq 0 \text{ бўлса},\\ 0, \text{ агар } x=0, \text{ бўлса} \end{cases}$$

функция ихтиёрий чекли [a,b] кесмада чекли вариацияга эга.

◀3-теоремадан фойдаланиб кўрсатамиз:

$x\neq 0$ да $f'(x)=2xSin\frac{\pi}{x}-\pi Cos\frac{\pi}{x}$ ва

$x=0$ да $f'(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta xSin\frac{\pi}{\Delta x}=0$

бўлгани учун ихтиёрий чекли [a,b] кесмада ушбу

$$|f'(x)|\leq 2\cdot|b|+\pi=L$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Унда 3-теоремага кўра $f(x)$ функция **[a,b]** да чекли вариацияга эга.▶

4-теорема. *Агар [a,b] кесмада аникланган* $f(x)$ *функцияни шу кесмада ушбу*

$$f(x)=c+\int_a^x\varphi(t)dt \qquad \textbf{(5)}$$

кўринишда ифодалаш мумкин бўлса, бу ерда $\varphi(t)$ *функция [a,b] кесмада абсолют интегралланувчи функция, у ҳолда* $f(x)$ *функция шу кесмада чекли вариацияга эга бўлиб,*

$$\overset{b}{\underset{a}{V}} f(x)\leq\overset{b}{\underset{a}{V}}|\varphi(t)|dt$$

тенгсизлик бажарилади.

◀Теореманинг исботи ушбу

$\vartheta_n=\sum\limits_{k=0}^{n-1}|f(x_{k+1})-f(x_k)|=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\left|\int_{x_k}^{x_{k+1}}\varphi(t)dt\right|\leq\sum\limits_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}|\varphi(t)|dt\leq\int_a^b|\varphi(t)|dt$ тенгсизликдан келиб чиқади.▶

3. Чекли вариацияли функцияларнинг хоссалари.

Айтайлик, чекли [a,b] кесма берилган бўлсин.

5-теорема. *[a,b] кесмадаги ихтиёрий чекли вариацияли функциялар шу кесмада чегараланган бўлади.*

◀ $\forall x'\in(a,b]$ нуқта оламиз. Унда шартга кўра

$$\vartheta_2=|f(x')-f(a)|+|f(b)-f(x')|\leq\overset{b}{\underset{a}{V}} f(x) \qquad \textbf{(6)}$$

бўлади. $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \left|f(x')\right| = \left|f(x') - f(a) + f(a)\right| \le \left|f(x') - f(a)\right| + \left|f(a)\right| \overset{(6)}{\le} \bigvee_a^b f(x) + \left|f(a)\right| = M \Rightarrow$$

$f(x)$ чегараланган.▶

<u>6- теорема</u>. *Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар [a,b] кесмада чекли вариацияли бўлса, унда*

а) $f(x) \pm g(x)$

ва

б) $f(x) \cdot g(x)$

функциялар ҳам шу кесмада чекли вариацияли бўлади.

◀**а)** $F(x) = f(x) \pm g(x)$ бўлсин. Унда

$$\left|F(x_{k+1}) - F(x_k)\right| = \left| \ [f(x_{k+1}) \pm g(x_{k+1})] - [f(x_k) \pm g(x_k)] \ \right| =$$

$$= \left| \ [f(x_{k-1}) - f(x_k)] \pm [g(x_{k+1}) - g(x_k)] \ \right| \le \left|f(x_{k-1}) - f(x_k)\right| +$$

$+\left|g(x_{k+1}) - g(x_k)\right|$ бўлади.$\Rightarrow$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1}\left|F(x_{k+1}) - F(x_k)\right| \le \sum_{k=0}^{n-1}\left|f(x_{k+1}) - f(x_k)\right| + \sum_{k=0}^{n-1}\left|g(x_{k+1}) - \right.$$

$$\left. - g(x_k)\right| \le \bigvee_a^b f(x) + \bigvee_a^b g(x). \Rightarrow \bigvee_a^b F(x) \le \bigvee_a^b f(x) + \bigvee_a^b g(x) \Rightarrow$$

$F(x)$ чекли вариацияли функция.

б) $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар [a,b] да чекли вариацияли бўлгани учун 5-теоремага кўра улар шу кесмада чегараланган бўлади, яъни $\exists K > 0$ ва $L > 0$ сонлар топиладики, $\forall x \in [a,b]$ учун

$$\left|f(x)\right| \le K \text{ ва } \left|g(x)\right| \le L$$

тенгсизликлар бажарилади.

Энди $\Phi(x) = f(x) \cdot g(x)$ деб белгилаймиз. У ҳолда қуйидаги муносабатлар бажарилади:

$$\left|\Phi(x_{k+1}) - \Phi(x_k)\right| = \left|f(x_{k+1})g(x_{k+1}) - f(x_k)g(x_k)\right| =$$

$$= \left|f(x_{k+1})g(x_{k+1}) - f(x_{k+1})g(x_k) + f(x_{k+1})g(x_k) - f(x_k)g(x_k)\right| \le$$

$$\le \left|f(x_{k+1})\right| \cdot \left|g(x_{k+1}) - g(x_k)\right| + \left|g(x_k)\right| \cdot \left|f(x_{k+1}) - f(x_k)\right| \le$$

$$\le K \cdot \left|g(x_{k+1}) - g(x_k)\right| + L \cdot \left|f(x_{k+1}) - f(x_k)\right|$$

Бу ердан

$$\bigvee_a^b \Phi(x) \le K \cdot \bigvee_a^b g(x) + L \cdot \bigvee_a^b f(x)$$

эканлиги ва $\Phi(x)$ - чекли функция бўлишини топамиз.▶

<u>7-теорема.</u> *Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар [a,b] кесмада чекли вариацияли бўлиб, шу кесмада $\left|g(x)\right| \ge c > 0$ бўлса, унда* $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

нисбат ҳам [a,b] кесмада чекли вариацияли бўлади.

◀ $h(x)=\dfrac{1}{g(x)}$ деб белгилаб, унинг чекли вариацияга эга бўлишини кўрсатамиз:

$$|h(x_{k+1})-h(x_k)|=\left|\frac{1}{g(x_{k+1})}-\frac{1}{g(x_k)}\right|=\frac{|g(x_{k+1})-g(x_k)|}{|g(x_k)\cdot g(x_{k+1})|}\le$$

$$\le\frac{1}{c^2}\cdot|g(x_{k+1})-g(x_{k+1})|\Rightarrow\mathop{V}_{a}^{b}h(x)\le\frac{1}{c^2}\cdot\mathop{V}_{a}^{b}g(x)\Rightarrow h(x)$$

- чекли вариацияли функция.

Унда 6-теоремага кўра $f(x)\cdot h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ функция ҳам **[a,b]** кесмада чекли вариацияли бўлади.▶

8-теорема. *Айтайлик,* $f(x)$ *функция [a,b] кесмада аниқланган ва* $c\in(a,b)$ *бўлсин. Агар* $f(x)$ *функция [a,b] да чекли вариацияли бўлса, унда у [a,c] ва [c,b] кесмаларнинг ҳар бирида чекли вариацияли бўлади ва аксинча. Шунингдек,*

$$\mathop{V}_{a}^{b}f(x)=\mathop{V}_{a}^{c}f(x)+\mathop{V}_{c}^{b}f(x)\qquad\textbf{(7)}$$

тенглик бажарилади.

◀Фараз қилайлик $f(x)$ функция [a,b] кесмада чекли вариацияли бўлсин [a,c] ва [c,b] ораликнинг ҳар бирини $\forall$ усул билан алохида кесмаларга ажратамиз:

$$a=y_0<y_1<y_2<\ldots y_m=c;\quad c=z_0<z_1<z_2<\ldots z_\ell=b\ .\qquad\textbf{(8)}$$

Натижада, бутун [a,b] кесма ҳам қисмларга ажралади. [a,c] ва [c,b] кесмалар учун қуйидаги йиғиндиларни тузамиз:

$$\vartheta_1^{(m)}=\sum_{\kappa=0}^{m-1}|f(y_{k+1})-f(y_k)|;\qquad\vartheta_2^{\ell}=\sum_{i=0}^{\ell-1}|f(z_{i+1})-f(z_i)|\ .$$

$\Rightarrow[a,b]$ учун $\vartheta_n=\vartheta_1^{(m)}+\vartheta_2^{\ell}$ бўлади. $\Rightarrow\vartheta_1^{(m)}+\vartheta_2^{(1)}=\vartheta_n\le\mathop{V}_{a}^{b}f(x)\Rightarrow\ \vartheta_1^{(m)}\le\mathop{V}_{a}^{b}f(x)$

ва $\vartheta_2^{(\ell)}\le\mathop{V}_{a}^{b}f(x)$.$\Rightarrow$ $f(x)$ функция [a,c] ва [c,b] кесмаларнинг ҳар бирида чекли вариацияга эга ва қуйидаги тенгсизлик бажарилади:

$$\mathop{V}_{a}^{c}f(x)+\mathop{V}_{c}^{b}f(x)\le\mathop{V}_{a}^{b}f(x)\ .\qquad\textbf{(9)}$$

Энди фараз қилайлик, $f(x)$ функция [a,c] ва [c,b] кесмаларнинг ҳар бирида чекли вариацияга эга бўлсин. [a,b] кесманинг ихтиёрий бўлинишини оламиз. Агар c нуқта бўлиниш нуқталарига кирмаса, унда с ни ҳам бўлиниш нуқталарига қўшамиз. Натижада, ϑ_n йиғинди фақат катталашиши мумкин:

$$\vartheta_n \le \vartheta_1^{(m)} + \vartheta_2^{\ell} \le \overset{c}{\underset{a}{V}} f(x) + \overset{b}{\underset{c}{V}} f(x) \Rightarrow$$

$\Rightarrow f(x)$ функция [a,b] кесмада чекли вариацияга эга ва

$$\overset{b}{\underset{a}{V}} f(x) \le \overset{c}{\underset{a}{V}} f(x) + \overset{b}{\underset{c}{V}} f(x) \qquad \textbf{(10)}$$

тенгсизлик бажарилади. (9)- ва (10)-тенгсизликлардан (7)-тенгсизлик келиб чиқади.▶

Бу теоремадан натижа сифатида қуйидаги хосса келиб чиқади.

<u>9-теорема.</u> *Агар* $f(x)$ *фукнция* [a,b] *кесмада чекли вариацияга эга бўлса, унда ихтиёрий* $x \in [a,b]$ *учун*

$$g(x) = \overset{x}{\underset{a}{V}} f(t)$$

тўлиқ вариация x *ўзгарувчининг монотон ўсувчи ва чегараланган фукцияси бўлади.*

◀Ихтиёрий $x', x'' \in [a,b](x' < x'')$ нуқталарни олсак, унда 8-теоремага кўра $\overset{x''}{\underset{a}{V}} f(t) = \overset{x'}{\underset{a}{V}} f(t) + \overset{x''}{\underset{x'}{V}} f(t)$ тенглик ўринли бўлади.

$$\Rightarrow \ g(x'') - g(x') =$$

$$= \overset{x''}{\underset{a}{V}} f(t) - \overset{x'}{\underset{a}{V}} f(t) = \overset{x''}{\underset{x'}{V}} f(t) \ge 0 \Rightarrow \ g(x'') \ge g(x') \Rightarrow g(x) \uparrow.$$ ▶

2-§ Чекли вариацияли фукциялар учун зарурий ва етарли шартлар.

4. Айтайлик, $f(x)$ функция [a,b] оралиқда аниқланган бўлсин. Бу параграфда биз берилган $f(x)$ функциянинг чекли вариацияга эга бўлиши мезонларини келтирамиз.

<u>10-теорема.</u> $f(x)$ *функциянинг [a,b] кесмада чекли вариацияга эга бўлиши учун шу кесмада монотон ўсувчи ва чегараланган шундай* $F(x)$ *функциянинг мавжуд бўлиб ихтиёрий* $[x', x''] \subset [a,b]$ *кесмада*

$$|f(x'') - f(x')| \le F(x'') - F(x') \qquad \textbf{(11)}$$

тенгсизликнинг бажарилиши зарур ва етарли.

Шундай хоссага эга бўлган $F(x)$ функцияга $f(x)$ функция учун **мажоранта** дейилади.

◄**Зарурлиги.** Фараз қилайлик, $f(x)$ функция чекли вариацияга эга бўлсин. Унда

$$F(x)=\overset{x}{\underset{a}{V}} f(t)$$

деб белгиласак, $F(x)$ функция [a,b] кесмада монотон ўсувчи ва чегараланган бўлади. Тўлиқ вариациянинг таърифига кўра

$$|f(x")-f(x')|\le \overset{x"}{\underset{x'}{V}} f(t)=F(x")-F(x')$$

тенгсизлик бажарилади.

Етарлилиги.

Айтайлик, (11)-тенгсизлик бажарилсин. Унда

$$\vartheta_n=\sum_{\kappa=0}^{n-1}|f(x_{\kappa+1})-f(x_\kappa)|\le\sum_{\kappa=0}^{n-1}[F(x_{\kappa+1})-F(x_\kappa)]=F(b)-F(a).\ \Rightarrow$$

$f(x)$ чекли вариацияли функция.►

11-теорема. *$f(x)$ функция [a,b] кесмада чекли вариацияга эга бўлиши учун уни шу оралиқда иккита монотон ўсувчи ва чегараланган функцияларнинг айирмаси кўринишида ифодалаш мумкин бўлиши зарур ва етарли:*

$$f(x)=g(x)-h(x). \qquad \mathbf{(12)}$$

◄**Зарурлиги.** Айтайлик, $f(x)$ функция [a,b] кесмада чекли вариацияга эга бўлсин. Унда 10-теоремага кўра шундай мажоранта $F(x)$ топиладики, унинг учун (11)- тенгсизлик бажарилади. Тузилишига кўра $F(x)$ функция монотон ўсувчи ва чегараланган. Агар

$$g(x)=F(x) \text{ ва } h(x)=F(x)-f(x)$$

деб белгиласак, $f(x)=g(x)-h(x)$ бўлади ҳамда қуйидаги муносабат бажарилади:

$$h(x'')-h(x')=[F(x'')-F(x')]-[f(x'')-f(x')]\overset{(11)}{\ge}0,$$

$x''\ge x$ ва $x'',x'\in[a,b]$ $\Rightarrow h(x)\uparrow$ ва чегараланган, чунки

$$|h(x)|\le|F(x)|+|f(x)|\le M.$$

Етарлилиги. Фараз қилайлик, $g(x)$ ва $h(x)$ функциялар [a,b] кесмада монотон ўсувчи ва (12)-тенгсизлик бажарилсин.

$$F(x)=g(x)+h(x)$$

деб олиб, унинг $f(x)$ учун мажоранта бўлишини кўрсатамиз:
$|f(x'')-f(x')|=|[g(x'')-g(x')]-[h(x'')-h(x')]|\leq|g(x'')-g(x')|+$
$+|h(x'')-h(x')|=[g(x'')-g(x'')]+[h(x'')-h(x')]=[g(x'')+h(x'')]-$
$-[g(x')+h(x')]=F(x'')-F(x')\;\Rightarrow\;F(x)$ – мажоранта. Унда 10-теоремага кўра $f(x)$ функция [a,b] кесмада чекли вариацияга эга бўлади.►

<u>Натижа</u>. *Агар $f(x)$ функция [a,b] кесмада чекли вариацияга эга бўлса,унда $\forall x_0\in[a,b]$ нуктада унинг чекли бир томонли лимитлари мавжуд:*

$$f(x_0-0)=\lim_{x\to x_0-0}f(x);\qquad f(x_0+0)=\lim_{x\to x_0+0}f(x)\quad \textbf{(13)}$$

◄11-теоремага кўра шундай ўсувчи ва чегараланган $g(x)$ ва $h(x)$ функциялар топиладики,

$$f(x)=g(x)-h(x)$$

тенглик бажарилади. Математик анализ курсидан маълумки,монотон функциялар учун чекли

$$\lim_{x\to x_0\pm0}g(x)=g(x_0\pm0)\ \text{ва}\ \lim_{x\to x_0\pm0}h(x)=h(x_0\pm0)$$

лар мавжуд $\Rightarrow$ **(13).►**

3-§ Чекли вариацияли узлуксиз функциялар. Жордан теоремаси.

5.Чекли вариацияли узлуксиз функциялар.

<u>12-теорема.</u> *$f(x)$ функция [a,b] кесмада чекли вариацияли функция бўлиб, $x_0\in[a,b]$ бўлсин. Агар $f(x)$ функция x_0 нуқтада узлуксиз бўлса, унда*

$$g(x)=\overset{x}{\underset{a}{V}}f(t)$$

функция ҳам x_0 нуктада узлуксиз бўлади.

◄ $x_0<b$ деб фараз қиламиз ва $g(x)$ функциянинг x_0 нуқтада ўнгдан узлуксиз эканлигини исботлаймиз. $\forall\varepsilon>0$сон олиб, $[x_0;b]$ кесмани ушбу

$$x_0<x_1<\ldots<x_n=b$$

тенгсизликни қаноатлантирувчи шундай нуқталар ёрдамида кесмаларга ажратамизки, натижада

$$\vartheta_n = \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| > \bigvee_{x_0}^{b} f(t) - \varepsilon \qquad \textbf{(14)}$$

тенгсизлик бажарилсин.

$f(x) \in C\{x_0\}$, бўлгани учун, x_1нуқтани x_0нуқтага шундай яқин олиш мумкинки,

$$|f(x_1) - f(x_0)| < \varepsilon$$

бўлсин. Унда (14) га кўра

$$\bigvee_{x_0}^{b} f(t) < \varepsilon + \vartheta_n = \varepsilon + \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| = \varepsilon + |f(x_1) - f(x_0)| +$$

$$+ \bigvee_{k=1}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| < \varepsilon + \varepsilon + \bigvee_{k=1}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \le 2\varepsilon + \bigvee_{x_1}^{b} |f(t)|$$

бўлади. Демак,

$$\bigvee_{x_0}^{b} f(t) - \bigvee_{x_1}^{b} f(t) < 2\varepsilon$$

ёки

$$\bigvee_{x_0}^{x_1} f(x) < 2\varepsilon$$

муносабат ўринли.$\Rightarrow$ $g(x_1) - g(x_0) < 2\varepsilon$. $g(x)$ функция ўсувчи бўлгани учун $\Rightarrow$

$$0 \le g(x_0 + 0) - g(x_0) < 2\varepsilon$$

Бу тенгсизлик ва ε нинг ихтиёрийлигидан фойдалансак,

$$g(x_0 + 0) = g(x_0)$$

тенгликни, яъни $g(x)$ функциянинг x_0 нуқтада ўнгдан узлуксиз эканлигини ҳосил қиламиз.

$x_0 > a$бўлган ҳолда $g(x)$ функциянинг x_0 нуқтада чапдан узлуксиз эканлиги ҳам шу каби кўрсатилади.►

Бу теоремадан қуйидаги натижа келиб чикади.

Натижа. *[a,b] кесмадаги чекли вариацияли узлуксиз $f(x)$ функцияни шу кесмада иккита узлуксиз, ўсувчи функциянинг айирмаси кўринишида ифодалаш мумкин:*

$$f(x) = g(x) - h(x).$$

◄Агар

$$g(x) = \bigvee_{a}^{x} f(t)$$

деб белгиласак, унда $g(x)$ ↑ ва 12-теоремага кўра $g(x) \in C[a,b]$ бўлади. Унда $h(x) = g(x) - f(x)$ функция ҳам [a,b] кесмада узлуксиз бўлади. Энди унинг $\uparrow$бўлишини кўрсатамиз. $\forall x'' > x',\ \ x', x'' \in [a,b]$ лар учун

$$h(x'') - h(x') = [g(x'') - g(x')] - [f(x'') - f(x')] =$$

$$= \overset{x''}{\underset{x'}{V}} f(t) - [f(x'') - f(x')] \geq 0$$

тенгсизлик бажарилади.$\Rightarrow$ $h(x)\uparrow$.▶

13-теорема. *Айтайлик,* $f(x) \in C[a,b]$ *бўлсин . [a,b] кесмани ушбу*

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

тенгсизликларни қаноатлантирувчи ихтиёрий нуқталар ёрдамида қисмларга ажратамиз ва

$$\vartheta_n = \sum_{k=0}^{n-1} [f(x_{k+1}) - f(x_k)]$$

йиғиндини оламиз. Унда, агар

$$\lambda = \max_{k=\overline{0,n-1}} (x_{k+1} - x_k)$$

бўлса, Ушбу

$$\lim_{\lambda \to 0} \vartheta_n = \overset{b}{\underset{a}{V}} f(x) \qquad \textbf{(15)}$$

тенглик ўринли бўлади .

◀Бизга маълумки,

$$\overset{b}{\underset{a}{V}} f(x) = Sup\{\vartheta_n\}$$

ва бўлиниш нуқталарига нисбатан $\{\vartheta_n\}\uparrow$. Демак, теоремани исботлаш учун ушбу

$$Sup\{\vartheta_n\} = \lim_{\lambda \to 0} \vartheta_n \qquad \textbf{(16)}$$

тенгликнинг бажарилишини кўрсатиш кифоя .

Фараз қилайлик,

$$Sup\{\vartheta_n\} = A \qquad \textbf{(17)}$$

бўлсин. Унда аниқ юқори чегаранинг таърифга кўра қуйидагиларни хосил қиламиз:

1) $\forall n \in N$ учун $\vartheta_n \leq A$

2) $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам $\exists n_0 \in N$ топиладики, $\vartheta_{n_0} > A - \varepsilon$ тенгсизлик бажарилади.

$\{\vartheta_n\}\uparrow$. $\Rightarrow$ $\forall n > n_0$ учун $\vartheta_n > A - \varepsilon$ булади.

Демак , $\forall n > n_0$ учун

$$A - \varepsilon < \vartheta_n \leq A < A + \varepsilon$$

экан. $\Rightarrow$ Кетма-кетлик лимитининг таърифига кўра

$$\ell im_{\lambda \to 0} \vartheta_n = A \qquad \textbf{(18)}$$

тенглик ўринли. (17) ва (18)дан $\Rightarrow$ (16).▶

6. Тўғриланувчи чизиқлар. Жордан теоремаси. Чекли вариацияли функция тушунчаси эгри чизиқнинг тўғриланувчилиги масаласида ўз татбиқини топган.

Айтайлик,

$$\overset{\cup}{AB} = (L): \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t), \ \ t \in [t_0;T] \end{cases} \qquad \textbf{(19)}$$

содда эгри чизиқ берилган бўлиб, $\varphi(t), \psi(t) \in C[t_0;T]$ бўлсин. Фараз қилайлик t параметр t_0 дан T га қараб ўзгарганда, унга L эгри чизиқда мос келувчи

$$(x, y) = (\varphi(x), \ \psi(x))$$

нуқта A нуқтадан B нуқтага қараб ўзгарсин.

$[t_0;T]$ кесмада ушбу $t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = T$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи ихтиёрий нуқталарни олиб, уларга (L) эгри чизиқда мос келган нуқталарни $A = A_0 < A_1 < A_2 < \ldots < A_n = B$ деб белгилаймиз. Бу нуқталарни кетма-кет туташтириш натижасида (L) эгри чизиққа чизилган синиқ чизиқни ҳосил қиламиз. Бу синиқ чизиқнинг периметри

$$P_n = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{[\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k)]^2 + [\psi(t_{k+1}) - \psi(t_k)]^2} \qquad \textbf{(20)}$$

тенглик ёрдамида ифодаланади.

3-таъриф. *Агар ушбу*

$$\ell im_{\lambda \to 0} P_n = L \qquad (\lambda = \underline{\max}_{k=0,n-1}(t_{k+1} - t_k))$$

лимит мавжуд ва чекли бўлса, унда (L) эгри чизиқ ***тўғриланувчи чизиқ*** *дейилади ҳамда лимитнинг қиймати L га унинг* ***узунлиги*** *деб аталади.*

14-теорема ***(Жордан теоремаси).*** *(19)-эгри чизиқнинг туғриланувчи бўлиши учун $\varphi(x)$ ва $\psi(x)$ фунцияларнинг $[t_0;T]$ оралиқда чекли вариацияга эга бўлиши зарур ва етарли.*

◀**Зарурлиги**. Фараз қилайлик, (19)-эгри чизиқ тўғриланувчи бўлсин. У ҳолда $[t_0;T]$ кесманинг ихтиёрий бўлиниши учун

$$P_n = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{[\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k)]^2 + [\psi(t_{k+1}) - \psi(t_k)]^2} \le M$$

тенгсизлик бажарилади. Унда

$$[\varphi(t_{k+1})-\varphi(t_k)]\le\sqrt{[\varphi(t_{k+1})-\varphi(t_k)]^2+[\psi(t_{k+1})-\psi(t_k)]^2}$$

га кўра

$$\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{[\varphi(t_{k+1})-\varphi(t_k)]}\le M$$

тенгсизлик ўринли бўлади, яъни $\varphi(x)$ – чекли вариацияли функция бўлади. Худди шу каби $\psi(x)$ функциянинг ҳам чекли вариацияли бўлишини ҳосил қиламиз.

Етарлилиги. Айтайлик, $\varphi(x)$ ва $\psi(x)$ функциялар чекли вариацияли функциялар бўлсин. Унда

$$P_n=\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{[\varphi(t_{k+1})-\varphi(t_k)]^2+[\psi(t_{k+1})-\psi(t_k)]^2}\le\sum_{k=0}^{n-1}[\varphi(t_{k+1})-\varphi(t_k)]+$$

$$+\sum_{k=0}^{n-1}[\psi(t_{k+1})-\psi(t_k)]\le\bigvee_{t_0}^{T}\psi(t)+\bigvee_{t_0}^{T}\psi(t)=M \quad\Rightarrow$$

(19) – тўғриланувчи эгри чизиқ.▶

Теорема исботидан кўриниб турибдики

$$L=\underset{n\to\infty}{\ell im}\,P_n\le\bigvee_{t_0}^{T}\varphi(t)+\bigvee_{t_0}^{T}\psi(t)$$

тенгсизлик бажарилади.

Эгри чизик ёйи узунлигини $L=L(t)$ деб уни $[t_0;t]$ ораликда қараймиз. Унда $L(t)\uparrow$ бўлади ва $\Delta t>0$ бўлганда $\Delta L=L(t+\Delta t)-L(t)$ учун

$$0<\Delta L<\bigvee_{t}^{t+\Delta t}\varphi(t)+\bigvee_{t}^{t+\Delta t}\psi(t)$$

тенгсизликлар бажарилади. $\Rightarrow$ Узлуксиз тўғриланувчи эгри чизиқ учун $L(t)$ функция t параметрининг узлуксиз функцияси бўлади.

Назорат саволлари.

1. **Чекли вариацияли функциянинг таърифи, мисоллар.**
2. **[a,b] кесмадаги ихтиёрий чегараланган, монотон ўсувчи функциянинг чекли вариацияга эга бўлиши кўрсатилсин.**
3. **[a,b] кесмада узлуксиз, лекин чекли вариацияга эга бўлмаган функцияга мисол келтирилсин.**
4. **[a,b] кесмадаги бўлакли монотон функциянинг чекли вариацияга эга бўлиши.**

5. [a,b] кесмада Липщиц шартини қаноатлантирувчи функциянинг чекли вариацияга эга бўлиши.

6. [a,b]да чегараланган ҳосилага эга бўлган функциянинг чекли вариацияга эга бўлиши.

7. Ушбу

$$f(x)=\begin{cases} x\cos\dfrac{\pi}{2x}, & агар \quad x\neq 0 \quad бўлса, \\ 0, & агар \quad x=0, \quad бўлса \end{cases}$$

функциянинг ихтиёрий кесмада чекли вариацияга эга бўлиши кўрсатилсин.

8. $f(x)=c+\int\limits_a^x \varphi(x)dt$ **кўринишидаги функциянинг чекли вариацияга эга бўлиши.**

9. Чекли вариацияли функциянинг чегараланганлиги ҳақидаги теорема.

10. Чекли вариацияли функциялар устида арифметик амаллар.

11.

12. $\overset{b}{\underset{a}{V}} f(x)=\overset{c}{\underset{a}{V}} f(x)+\overset{b}{\underset{c}{V}} f(x), \quad a>c>b$ **тенглик исботлансин.**

13. $f(x)$ **функция [a,b] да чекли вариацияга эга бўлса, унда**

$$g(x)=\overset{x}{\underset{a}{V}} f(t)$$

функциянинг [a,b] да ↑ ва чегараланган бўлиши исботлансин.

14. Чекли вариацияли функциялар учун зарурий ва етарли шартлар.

15. $f(x)$ **функция [a,b] да чекли вариацияли бўлиб,** $x\in[a,b]$ **бўлсин. Агар** $f(x)\in C\{x_0\}$ **бўлса, унда** $g(x)=\overset{x}{\underset{a}{V}} f(t)\in C\{x_0\}$ **бўлиши исботлансин.**

16. Чекли вариацияли узлуксиз функцияни иккита узлуксиз, ўсувчи функцияларнинг айирмаси кўринишида ифодалаш мумкинлиги исботлансин.

17. Агар $f(x)\in C[a,b]$ **ва** $\vartheta_n=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\left|f(x_{k+1})-f(x_k)\right|$ **бўлса,** $\lim\limits_{\lambda\to 0}\vartheta_n=\overset{b}{\underset{a}{V}} f(x)$ **бўлиши исботлансин.**

18. Тўғриланувчи чизиқлар ва Жордан теоремаси.

19. Тўғриланувчи бўлмаган чизиққа мисол келтирилсин.

II-БОБ.

Стилтьес интеграли

Стилтьеснинг интеграл йиғиндилари.
Стилтьес интеграли.
Стилтьес интеграли билан Риман интеграли орасидаги боғланиш.
Дарбу – Стилтьеснинг қуйи ва юқори йиғиндилари.
Стилтьес интегралининг мавжудлик шарти.
Стилтьес интеграли мавжуд бўлган функциялар синфи.
Стилтьес интеграли учун бўлаклаб интеграллаш формуласи.
Стилтьес интегралини ҳисоблаш усуллари.
Стилтьес интегралининг геометрик маъноси.
Стилтьес интеграли учун ўрта қиймат ҳақидаги теорема.
Стилтьес интегралини баҳолаш.
Стилтьес интеграли белгиси остида лимитга ўтиш.
Иккинчи тур эгри чизиқли интегрални Стилтьес интегралига келтириш.

1-§. Стилтьес интегралининг таърифи ва унинг мавжудлик шарти.

7. Стилтьес интегралининг таърифи.

Стилтьес интеграли Риман интегралининг табиий умумлашмаси бўлиб, қуйидагича аниқланади.

Айтайлик, [a,b] кесмада 2 та чегараланган $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар берилган бўлсин. [a,b] кесмани ушбу

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = \text{b}$$

тенгсизликларни қаноатлантирувчи ихтиёрий нуқталар ёрдамида n та $[x_k; x_{k+1}]$, $k = \overline{0,n-1}$, қисмларга ажратамиз. $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ ва $\lambda = \max\limits_{k=\overline{0,n-1}} \Delta x_k$ деб белгилаймиз. $\forall \xi_k \in [x_k; x_{k+1}]$ нуқта олиб, ушбу йиғиндини тузамиз:

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)[g(x_{k+1}) - g(x_k)] = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta g(x_k) \qquad \textbf{(1)}$$

(1)-йиғиндига **Стилтьеснинг интеграл йиғиндиси** дейилади.

<u>1-таъриф</u>. *Агар*

$$\ell im_{\lambda\to0}\sigma = I$$

мавжуд ва чекли бўлиб, унинг қиймати [a,b] кесманинг бўлиниш усулига ҳамда ундаги ξ_k *нуқталарнинг танланишига боғлиқ бўлмаса, унда шу сонга* $f(x)$ ***функциянинг*** $g(x)$ ***функция бўйича Стилтьес интеграли*** *дейилади ва*

$$(S)\int_a^b f(x)dg(x)$$

каби белгиланади.

Демак,

$$(S)\int_a^b f(x)dg(x) := \ell im_{\lambda\to0}\sigma = \ell im_{\lambda\to0}\sum_{\lambda=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta g(x_k). \qquad \textbf{(2)}$$

Агар (2) – интеграл мавжуд **бўлса**, унда $f(x)$ **функция** [a,b] **кесмада** $g(x)$ **функция бўйича интегралланувчи** деб аталади.

Изоҳ. *Риман интеграли Стилтьес интегралининг хусусий ҳоли бўлиб, Стилтьес интегралида* $g(x)=x$ *дейилса, ундан Риман интеграли келиб чиқади.*

Энди Стилтьес интегралининг мавжудлик шартини аниқлаймиз.

Фараз қилайлик, $g(x)$ функция монотон ўсувчи бўлсин. У ҳолда $\Delta x_k > 0$ бўлганда $\Delta g(x) > 0$ бўлади.

Қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$\begin{aligned} m_k &= \inf_{[x_k,x_{k+1}]}\{f(x)\}, & M_k &= Sup_{[x_k,x_{k+1}]}\{f(x)\}, \\ \underline{S} &= \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta g(x_k), & \overline{S} &= \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta g(x_k). \end{aligned} \qquad \textbf{(3)}$$

<u>2-таъриф</u>. $\underline{S}$ *ва* $\overline{S}$ *йиғиндилар мос равишда* ***Дарбу – Стилтьеснинг қуйи ва юқори йиғиндилари*** *деб аталади* **.**

Оддий Дарбу йиғиндилари каби бу йиғиндилар ҳам қуйидаги хоссаларга эга.

1^0**.** *Агар [a,b] кесманинг бўлиниш нуқталарига янгилари қўшилса, унда* $\underline{S}$ *фақат ортиши,* $\overline{S}$ *эса камайиши мумкин.*

Демак, $\{\underline{S}\}\uparrow$ ва $\{\overline{S}\}\downarrow$.

2^0. *Дарбу - Стилтьеснинг ихтиёрий қуйи йиғиндиси унинг ихтиёрий юкори йиғиндисидан катта бўла олмайди (агар у бошқа бўлинишга мос келса ҳам).*

Агар ушбу

$$I_* = Sup\{\underline{S}\} \text{ ва } I^* = \inf\{\overline{S}\}$$

тенгликлар ёрдамида Дарбу – Стилтьеснинг **қуйи ва юқори интегралларини** аниқласак, унда

$$\underline{S} \le I_* \le I^* \le \overline{S}$$

тенгсизликлар ўринли бўлади. Бу тенгсизликлар ва Дарбу - Стилтьес йигиндиларидан фойдаланиб, оддий Риман интеграли холидаги каби қуйидаги теорема осонгина исботланади.

1-теорема. *Стилтьес интегралининг мавжуд бўлиши учун ушбу*

$$\lim_{\lambda\to 0}(\overline{S} - \underline{S}) = 0$$

ёки

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k \Delta g(x_k) = 0 \qquad \textbf{(4)}$$

тенгликнинг бажарилиши зарур ва етарли $(\omega_k = M_k - m_k)$.

8. Стилтьес интеграли мавжуд бўлган фукциялар синфи.

2-теорема. *Агар* $f(x)\in C[a,b]$ *бўлиб,* $g(x)$ *функция [a,b] кесмада монотон ўсувчи бўлса, унда*

$$(S)\int_a^b f(x)dg(x) \qquad \textbf{(5)}$$

Стилтьес интеграли мавжуд бўлади.

◀ $f(x)\in C[a,b] \Rightarrow$ Кантор теоремасига кўра текис узлуксиз $\Rightarrow \forall\varepsilon>0$ учун шундай $\delta>0$ сон топиладики, [a,b] кесмани узунликлари δ дан кичик бўлган бўлакларга ажратилганда, $f(x)$ функциянинг шу бўлаклардаги тебраниши ω_k учун ушбу

$$\omega_k < \frac{\varepsilon}{g(b)-g(a)}$$

тенгсизлик бажарилади. Энди [a,b] кесмани узунликлари δ дан кичик бўлган қисмларга ажратамиз. $\Rightarrow \lambda<\delta$ ва $\omega_k < \frac{\varepsilon}{g(b)-g(a)}. \Rightarrow$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k\Delta g(x_k)<\frac{\varepsilon}{g(b)-g(a)}\sum_{k=0}^{n-1}\left[g(x_{k+1})-g(x_k)\right]=$$

$$=\frac{\varepsilon}{g(b)-g(a)}\cdot\left[g(b)-g(a\right]=\varepsilon\ \Rightarrow\ \ell im_{\lambda\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k\Delta g(x_k)=0\ \Rightarrow$$

(5)-интеграл мавжуд.►

<u>**3-теорема.**</u> *Агар* $f(x)$ *функция [a,b] кесмада Риман маъносида интегралланувчи бўлиб,* $g(x)$ *функция Липщиц шартини қаноатлантирса, яъни*

$$\left|g(\bar{x})-g(x)\right|\le L\cdot(\bar{x}-x)$$
$$(L=const, a\le x\le\bar{x}\le b) \qquad \textbf{(6)}$$

тенгсизлик бажарилса, унда (5)-Стилтьес интеграли мавжуд бўлади.

◄а) Аввал хоссани $g(x)$ функция (6)-шартни бажаришдан ташқари монотон ўсувчи бўлган ҳол учун исботлаймиз.

$$\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k\Delta g(x_k)<\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k\left[g(x_{k+1})-g(x_k)\right]\overset{(6)}{\le}L\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k(x_{\kappa+1}-x_k)=$$

$$=L\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k\Delta x_k\ . \qquad \textbf{(7)}$$

$f(x)$ функция [a,b] да Риман маъносида интегралланувчи бўлгани учун

$$\ell im_{\lambda\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k\Delta x_k=0$$

ва мос равишда (7)-тенгсизликка кўра

$$\ell im_{\lambda\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k\Delta g(x_k)=0$$

бўлади. $\Rightarrow$ (5)-интеграл мавжуд**.**

б) Умумий ҳол. Липщиц шартини каноатлантирувчи $g(x)$ функцияни қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$g(x)=L\cdot x-\left[L\cdot x-g(x)\right]=g_1(x)-g_2(x). \qquad \textbf{(8)}$$

(8)-тенгликдаги $g_1(x)=L\cdot x$ функция Липшиц шартини қаноатлантириши билан бир қаторда монотон ўсувчи ҳам бўлади. Шу шартларни $g_2(x)=L\cdot x-g(x)$ функция хам бажаради. Дарҳақиқат, $a\le x\le\bar{x}\le b$ учун

$$g_2(\bar{x})-g_2(x)=L(\bar{x}-x)-\left[g(\bar{x})-g(x)\right]\overset{(6)}{\ge}L\cdot(\bar{x}-x)-L\cdot(\bar{x}-x)=0\Rightarrow$$ ва

$$\Rightarrow\ \{g_2(x)\}\uparrow$$

$$\left|g_2(\bar{x})-g_2(x)\right| \le L(\bar{x}-x)+\left|g_2(\bar{x})-g_2(x)\right| \overset{(6)}{\le} L(\bar{x}-x)+L(\bar{x}-x)=$$
$$=2L(\bar{x}-x).$$

а) холга кўра $g_1(x)$ ва $g_2(x)$ лар учун (4) шарт бажарилади $\Rightarrow$ (4)-шарт $g(x)$ функция учун ҳам бажарилади $\Rightarrow$ (5)-интеграл мавжуд.►

4-теорема. *Агар $f(x)$ функция [a,b] кесмада Риман маъносида интегралланувчи бўлиб, $g(x)$ функцияни ушбу*

$$g(x)=c+\int_a^x \varphi(t)dt, \qquad \textbf{(9)}$$

бу ерда $\varphi(x)-[a,b]$ кесмада абсолют интегралланувчи функция, кўринишида ифодалаш мумкин бўлса, унда (5)-интеграл мавжуд бўлади.

◄Теорема шартига кўра $|\varphi(\text{t})|$ интегралланувчи $\Rightarrow|\varphi(\text{t})|$ - чегараланган, яъни $\exists L>0:\forall t\in[a,b]$ учун $|\varphi(\text{t})|\le L.$ Унда $a\le x<\bar{x}\le b$ учун ушбу

$$\left|g(\bar{x})-g(x)\right|=\left|c+\int_a^{\bar{x}}\varphi(t)dt-c-\int_a^{x}\varphi(t)dt\right|=\left|\int_x^{\bar{x}}\varphi(t)dt\right|\le\int_x^{\bar{x}}\left|\varphi(t)\right|dt\le L\cdot\int_x^{\bar{x}}dt=L\cdot(\bar{x}-x)$$

муносабатлар бажарилади, яъни $g(x)$ функция Липщиц шартини қаноатлантиради. У холда 3-теоремага кўра (5)-интеграл мавжуд.►

2-§. Стилтьес интегралининг хоссалари

9. Стилтьес интегралининг хоссалари

Стилтьес интегралининг таърифидан тўғридан туғри қуйидаги хоссалар келиб чиқади.

1^0. $(S)\int_a^b dg(x)=g(b)-g(a).$

2^0. $(S)\int_a^b [f_1(x)\pm f_2(x)]dg(x)=(S)\int_a^b f_1(x)dg(x)\pm(S)\int_a^b f_2(x)dg(x).$

3^0. $(S)\int_a^b f(x)d[g_1(x)\pm g_2(x)]=(S)\int_a^b f(x)dg_1(x)\pm(S)\int_a^b f(x)dg_2(x).$

4^0. $(S)\int_a^b k\cdot f(x)d(\ell\cdot g(x))=(S)k\cdot\ell\int_a^b f(x)dg(x).$

5^0. $(S)\int_a^b f(x)dg(x)=(S)\int_a^c f(x)dg(x)+(S)\int_c^b f(x)dg(x)\ \ (a<c<b)$

Изох. *5^0-хоссадаги* $(S)\int\limits_a^b f(x)dg(x)$ *интегралнинг мавжуд бўлишидан* $(S)\int\limits_a^c f(x)dg(x)$ *ва* $(S)\int\limits_c^b f(x)dg(x)$ *интегралларнинг ҳар бирининг мавжуд бўлиши келиб чиқади, акси эса ўринли бўлиши шарт эмас.*

Мисол. [-1;1] *кесмада берилган ушбу*

$$f(x)=\begin{cases}0, & агар\ \ -1\le x\le 0\ \ бўлса,\\ 1, & агар\ \ \ 0<x\le 1\ \ бўлса\end{cases}$$

ва

$$g(x)=\begin{cases}0, & агар\ \ -1\le x< 0\ \ бўлса,\\ 1, & агар\ \ \ 0\le x\le 1\ \ бўлса\end{cases}$$

функцияларни оламиз. Унда

$$(S)\int\limits_{-1}^{0} f(x)dg(x) \text{ ва } (S)\int\limits_{0}^{1} f(x)dg(x)$$

интеграллар мавжуд ва нолга тенг бўлади, чунки иккала ҳолда ҳам Стилтьес йиғиндисида қатнашган ҳадлар 0 га тенг.

Энди $(S)\int\limits_{-1}^{1} f(x)dg(x)$ интегралнинг мавжуд эмаслигини кўрсатамиз. Бунинг учун [-1;1] кесманинг шундай бўлинишини оламизки, 0 нуқта бўлиниш нуқтаси бўлмасин. Интеграл йиғиндини тузамиз:

$$\sigma\ =\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta g(x_k)=\Big((\text{айтайлик, } 0\in[x_k,x_{k+1}] \text{ бўлсин}$$

$\Rightarrow\ x_k<0<x_{k+1}\ \Rightarrow$ йиғиндидаги k-чи қўшилувчидан бошқа ҳаммаси нолга тенг бўлади, чунки $i\neq k$ да

$$\Delta g(x_i)=g(x_{i+1})-g(x_i)=0))=f(\xi_k)\cdot\big[g(x_{k+1})-g(x_k)\big]=f(\xi_k)\cdot(1-0)=$$

$$=f(\xi_k)=\begin{cases}0, & агар\ \ \xi_k\le 0\ \ бўлса,\\ 1, & агар\ \ \xi<0\ \ \ бўлса\end{cases}\Rightarrow \lim_{\lambda\to 0}\sigma-\nexists\Rightarrow(S)\int\limits_{-1}^{1} f(x)dg(x)-\nexists$$

10. Стилтьес интеграли учун бўлаклаб интеграллаш формуласи.

5-теорема. ***Агар*** $(S)\int\limits_a^b f(x)dg(x)$ ***ва*** $(S)\int\limits_a^b g(x)dg(x)$ ***Стилтьес*** *интегралларидан бири мавжуд бўлса, унда иккинчиси ҳам мавжуд бўлади ва ушбу бўлаклаб интеграллаш формуласи ўринли:*

$$(S)\int\limits_a^b f(x)dg(x)=f(x)g(x)\Big|_a^b-(S)\int\limits_a^b g(x)df(x) \qquad \textbf{(10)}$$

◀Фараз қилайлик, $(S)\int\limits_a^b g(x)df(x)$ мавжуд бўлсин. [a,b] кесмани ихтиёрий усул билан $[x_k,x_{k+1}]$ $(k=\overline{0,n-1})$ қисмларга ажратамиз ва $\forall\xi_k\in[x_k,x_{k+1}]$ нуқталарни танлаймиз.

$(S)\int\limits_a^b f(x)dg(x)$ интеграл учун Стилтьес йиғиндисини оламиз:

$\sigma=\sum\limits_{r=0}^{n-1} f(\xi_k)[g(x_{k+1}-g(x_k)]=$((бу йиғиндини қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз)) =

$$=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_{k-1})g(x_k)-\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)g(x_k)=$$

$$=-[\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)g(x_k)-\sum_{k=1}^{n} f(\xi_{k-1})g(x_k)]=$$

$$=-\left\{ \mathrm{g(a)}\, f(\xi_0)+\sum_{k=1}^{n-1} g(x_x)\cdot\left[f(\xi_k)-f(\xi_{k-1})\right]-g(b)f(\xi_{n-1})\right\}=$$

$=((f(x)\cdot g(x)\Big|_a^b=f(b)\cdot g(b)-f(a)\cdot g(a)$

ифодани қўшиб айирамиз)) $=f(x)g(x)\ \Big|_a^b-\{g(a)\cdot[f(\xi_0)-f(a)]+$

$$+\sum_{k=1}^{n-1} g(x_x)\cdot\left[f(\xi_k)-f(\xi_{k-1})\right]+g(b)\cdot\left[f(b)-f(\xi_{n-1})\right]\Big\} \qquad \mathbf{(11)}$$

Бу тенгликдаги катта қавс (фигурали қавс) ичидаги ифода $(S)\int\limits_a^b g(x)df(x)$ Стилтьес интеграли учун интеграл йиғиндини беради.Бу йиғинди [a,b] кесмани $[\xi_k,\xi_{k+1}]$ кесмалар ёрдамида бўлинишига мос келади. Агар

$$\lambda=\max\Delta x_k \text{ ва } \lambda'=\max\Delta\xi_k$$

деб белгиласак, ($\lambda\to 0$)~($\lambda'\to 0$) бўлади. $\Rightarrow$ (11)-тенгликда $\lambda\to 0$ ($\lambda'\to 0$) да лимитга ўтсак, унда исбот қилишимиз керак бўлган (10)-формулани ҳосил қиламиз.▶

3-§. Стилтьес интегралини ҳисоблаш.

11. Стилтьес интегралини хисоблаш.

6-теорема. $f(x)$ *функция [a,b] кесмада Риман маъносида интегралланувчи бўлиб,* $g(x)$ *функция ушбу*

$$g(x)=c+\int_a^x \varphi(t)dt$$

кўринишда ифодалансин, бу ерда $\varphi(t)$ функция [a,b] кесмада абсолют интегралланувчи функция. У холда

$$(S)\int_a^b f(x)dg(x)=(R)\int_a^b f(x)\varphi(x)dx \qquad \textbf{(12)}$$

тенглик ўринли бўлади.

◄(12)-тенгликнинг ўнг томонидаги Риман интеграли теорема шартига кўра мавжуд. Стилтьес интеграли мавжудлиги эса 8-пунктдаги 4-теоремада исботланган. Энди фақат (12)-тенгликнинг ўринли эканлигини исботлаш керак.

Умумийликка зиён келтирмаган ҳолда $\varphi(x)>0$ деб фараз қиламиз, чунки ихтиёрий $\varphi(x)$ функцияни иккита мусбат $\varphi_1(x)$ ва $\varphi_2(x)$ функцияларнинг айирмаси кўринишида ифодалаш мумкин:

$$\varphi(x)=\varphi_1(x)-\varphi_2(x)$$

Бунинг учун

$$\varphi_1(x)=\frac{|\varphi(x)|+\varphi(x)}{2} \quad \text{ва} \quad \varphi_2(x)=\frac{|\varphi(x)|-\varphi(x)}{2}$$

деб олиш кифоя.

Одатдаги усул билан Стилтьес йиғиндисини тузамиз:

$$\sigma=\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\cdot[g(x_{k+1})-g(x_k)]=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(\xi_k)\varphi(x)dx \qquad \textbf{(13)}$$

Иккинчи томондан

$$(R)\int_a^b f(x)\varphi(x)dx=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx \qquad \textbf{(14)}$$

тенглик ўринли.(13) дан (14) ни айирамиз ва айирмани бахолаймиз:

$$\left|\sigma-(R)\int_a^b f(x)\varphi(x)dx\right|=\left|\sum_{k=0}^{n-1}[f(\xi_k)-f(x)]\varphi(x)dx\right|\le$$

$$\le\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}|f(\xi_k)-f(x)|\varphi(x)dx=((x\in[x_k,x_{k+1}]\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ |f(\xi_k)-f(x)|\le\omega_k))\le\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k\int_{x_k}^{x_{k+1}}\varphi(x)dx=\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k\Delta g(x_k) \qquad \textbf{(15)}$$

Шартга кўра $(S)\int_a^b f(x)dg(x)$ - мавжуд $\Rightarrow$

$$\Rightarrow\ \lim_{\lambda\to0}\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k\Delta g(x_k)=0\ \overset{(15)}{\Rightarrow}\lim_{\lambda\to0}\sigma=\int_a^b f(x)dx\Rightarrow \quad (12).►$$

Исботланган теоремадан фойдаланиб, қуйидаги теорема хам осон исботланади.

7-теорема. *Айтайлик,* $f(x)$ *функция [a,b] кесмада Риман маъносида интегралланувчи,* $g(x)\in C[a,b]$, $g(x)$ *функция учун [a,b] кесманинг чекли сондаги нуқталардан ташқари барча нуқталарида* $g'(x)$ *ҳосила мавжуд бўлиб,* $g'(x)$ *ҳосила [a,b] кесмада абсолют интегралланувчи бўлсин. Унда*

$$(S)\int_a^b f(x)dg(x)=(R)\int_a^b f(x)g'(x)dx \qquad \textbf{(16)}$$

бўлади.

◀Теорема шартини қаноатлантирувчи $g(x)$ функция учун

$$g(x)=g(a)+\int_a^x g'(t)dt$$

формула ўринли бўлади. Унда $\varphi(t)=g'(t)$ бўлган ҳолда 6-теоремага кўра (16)–тенгликни ҳосил қиламиз.▶

Энди $g(x)$ функция узилишга эга бўлган ҳолда Стилтьес интегралини хисоблашни ўрганамиз.

Уни узилишига эга бўлган **«стандарт»** $\rho(x)$ функциядан бошлаймиз.

$$\rho(x)=\begin{cases}0, & агар \quad x\le 0 \quad бўлса,\\ 1, & агар \quad x>0 \quad бўлса\end{cases}$$

$\rho(x)$ функция $x=0$ нуқтада 1-тур узилишга эга бўлиб, унинг шу нуқтадаги сакраши

$$\rho(+0)-\rho(0)=1$$

бўлади.

$\rho(x)$ функцияси каби, ушбу

$$\rho(x-c)=\begin{cases}0, & агар \quad x\le c \quad бўлса,\\ 1, & агар \quad x>c \quad бўлса\end{cases}$$

ва

$$\rho(c-x)=\begin{cases}0, & агар \quad x<c \quad бўлса,\\ 1, & агар \quad x\ge c \quad бўлса\end{cases}$$

функциялар ҳам $x=c$ нуқтада 1-тур узилишга эга бўлиб, уларнинг шу нуқтадаги сакраши мос равишда 1 ва –1 га тенг бўлади.

$f(x)$ функцияни $x=c$ нуктада узлуксиз деб фараз қиламиз ва

$$(S)\int_a^b f(x)d\rho(x-c)$$

интегрални ҳисоблаймиз. Бу ерда $a \le c < b$ ($c = b$ бўлганда интеграл $= 0$ бўлади).

Стилтьес йиғиндисини тузамиз:

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta\rho(x_i - c)$$

Фараз қилайлик, $c \in [x_k, x_{k+1}]$ $(x_k \le c < x_{k+1})$ бўлсин. Унда $i \ne k$ бўлганда $\Delta\rho(x_i - c) = 0$ ва $\Delta\rho(x_k - c) = 0$ бўлади. $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \sigma = f(\xi_k)\Delta\rho(x_k - c) = f(\xi_k) \Rightarrow (S)\int_a^b f(x)d\rho(x-c) = \lim_{\lambda\to 0}\sigma = \lim_{\lambda\to 0} f(\xi_k) = f(c).$$

Демак,

$$(S)\int_a^b f(x)d\rho(x-c) = f(c) \quad (a \le c < b) \qquad \textbf{(17)}$$

тенглик ўринли бўлар экан. Худди шу каби

$$(S)\int_a^b f(x)d\rho(c-x) = -f(c) \quad (a < c \le b) \qquad \textbf{(18)}$$

эканлигини хосил қиламиз ($c = a$ бўлганда бу интеграл $= 0$ бўлади).

Энди биз қайсидир маънода 7-теоремани умумлаштирувчи теоремани исботлаш имкониятига эгамиз.

8-теорема. *Фараз қилайлик,* $f(x)$ *ва* $g(x)$ *функциялар [a,b] кесмада берилган бўлиб, қуйидаги шартлар бажарилсин:*

1) $f(x) \in C[a,b]$,

2) $g(x) \in C\left([a,b] \setminus \bigcup_{k=1}^{m}\{c_k\}\right)$ *ва*

$a = c_0 < c_1 < \ldots < c_m = b$ *нуқталар* $g(x)$ *функциянинг 1- тур узилиш нуқталари,*

3) чекли сондаги нуқталардан ташқарида $g'(x)$ *ҳосила мавжуд,*

4) $g'(x)$ *ҳосила [a,b] кесмада абсолют интегралланувчи.*

У ҳолда $(S)\int_a^b f(x)dg(x)$ *Стилтьес интеграли мавжуд бўлади ва қуйидаги тенглик бажарилади*:

$$(S)\int_a^b f(x)dg(x) = (R)\int_a^b f(x)g^{'}(x)dx + f(a)\cdot[g(a+0)-g(a)] +$$

$$+\sum_{k=1}^{m-1} f(c_k)\cdot[g(c_k+0)-g(c_k-0)] + f(b)\cdot[g(b)-g(b-0)] \qquad \mathbf{(19)}$$

Изох. *Агар* $g(x)\in C[a,b]$ *бўлса, унда (19)- формула (16)-формулага айланади, яъни 8-теоремадан 7-теорема келиб чиқади.*

8-теореманинг исботи.

Ёзувни соддалаштириш учун қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$\alpha_k^+ = g(c_k+0)-g(c_k)\,,\quad (k=\overline{0,m-1})$$

$$\alpha_k^- = g(c_k)-g(c_k-0)\,,\quad (k=\overline{1,m})$$

Унда $1\le k\le m-1$ учун

$$\alpha_k^+ - \alpha_k^- = g(c_k+0)-g(c_k-0)$$

бўлади. Қуйидаги ёрдамчи функцияни оламиз:

$$g_1(x) = \sum_{k=0}^{m-1}\alpha_k^+\rho(x-c_k) - \sum_{k=1}^{m}\alpha_k^-\rho(c_k-x)$$

Аниқланган $g_1(x)$ функция $g(x)$ функциянинг барча узилишларини ўзида сақлайди ва

$$g_2(x) = g(x) - g_1(x)$$

функция узлуксиз функция бўлади.

Дархақиқат,

1) $x\ne c_k$ бўлса, $g_2(x)$ функция узлуксиз функцияларнинг айирмаси сифатида узлуксиз бўлади;

2) $x=c_k$ бўлсин. Аввал $g_2(x)$ функциянинг $c_k(k<m)$ нуқтада ўнгдан узлуксиз бўлишини кўрсатамиз. $x\in[c_k,c_k+0)$ бўлсин $\Rightarrow$

$$g_2(x) = g(x) - \alpha_k^+\rho(x-c_k) \Rightarrow$$

$$g_2(c_k) = g(c_k) - \alpha_k^+\underset{0}{\rho(0)} = g(c_k).$$

Иккинчи томондан,

$$\lim_{x\to c_k+0} g_2(x) = \lim_{x\to c_k+0}\left[g(x) - \alpha_k^+\underset{1}{\rho(x)} - c_k)\right] = g(c_k+0) - \alpha_k^+ =$$

$$= g(c_k+0) - [g(c_k+0) - g(c_k)] = g(c_k)\,.$$

$\Rightarrow$ $g_2(x)$ функция $x=c_k$ нуқтада ўнгдан узлуксиз. Худди шунга ўхшаш $g_2(x)$ функциянинг c_k $(k>0)$ нуқтада чапдан узлуксизлиги хам кўрсатилади. $\Rightarrow$

$g_2(x)\in C\{c_k\}$ $\Rightarrow$ $g_2(x)\in C[a,b]$.

Агар $x \neq c_k$ нуқта олинса, унда бу нуқтанинг бирор атрофида аниқланишига кўра $g_1(x)$ функция ўзгармас қийматни қабул қилади. $\Rightarrow$ $g'(x)=0$ $\Rightarrow$ $x \neq c_k$
нуқтада

$$g_2'(x)=g'(x)$$

бўлади (албатта бу тенглик $g'(x)$ мавжуд бўлган нуқталарда қаралади).

Узлуксиз бўлган $g_2(x)$ функция учун аввалги 7-теоремага кўра Стильтес интеграли мавжуд бўлади:

$$(S)\int_a^b f(x)dg_2(x)=(R)\int_a^b f(x)dg_2'(x)=(R)\int_a^b f(x)g'(x)dx \qquad \mathbf{(20)}$$

Энди (17) ва (18)-тенгликлардан фойдаланиб, куйидаги интегрални ҳисоблаймиз:

$$(S)\int_a^b f(x)dg_1(x)=\sum_{k=0}^{m-1}\alpha_k^+\cdot(S)\int_a^b f(x)d\rho(x-c_k)-$$

$$-\sum_{k=1}^{m}\alpha_k^-\cdot(S)\int_a^b f(x)d\rho(c_k-x)=\sum_{k=0}^{m-1}\alpha_k^+\cdot f(c_k)+\sum_{k=1}^{m}\alpha_k^-\cdot f(c_k)=$$

$$=f(a)\cdot[g(a+0)-g(a)]+\sum_{k=0}^{m-1}f(c_k)\cdot[g(c_k+0)-g(c_k-0)]+$$

$$+f(b)\cdot[g(b)-g(b-0)] \qquad \mathbf{(21)}$$

(20) ва (21)–тенгликларни хадлаб кўшиш ёрдамида исботлашимиз керак бўлган (19)–тенгликни хосил қиламиз.▶

12. Стилтьес интегралини ҳисоблашга доир мисоллар.

Аввалги пунктда кўрганимиздек, маълум шартлар бажарилганда Стильтес интегралини хисоблаш учун қуйидаги формулалар ўринли бўлади:

$$(S)\int_a^b f(x)dg(x)=(R)\int_a^b f(x)\varphi(x)dx, \qquad \mathbf{(22)}$$

$$(S)\int_a^b f(x)dg(x)=(R)\int_a^b f(x)g'(x)dx, \qquad \mathbf{(23)}$$

ва

$$(S)\int_a^b f(x)dg(x)=(R)\int_a^b f(x)g'(x)dx+f(a)\cdot\left[g(a+0)-g(0)\right]+$$

$$+\sum_{k=1}^{m-1}f(c_k)\cdot\left[g(c_k+0)-g(c_k-0)\right]+f(b)\cdot\left[g(b)-g(b-0)\right] \qquad \mathbf{(24)}$$

Шу формулалардан фойдаланиб мисоллар ечамиз.

1-мисол. *(22) ёки (23) – формулалардан фойдаланиб, қуйидаги Стилтьес интеграллари ҳисоблансин:*

а) $(S)\int\limits_0^2 x^2 d\ell n(1+x);$ *б)* $(S)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} xd\sin x;$ *в)* $(S)\int\limits_{-1}^{1} xdarctgx$.

◀**а)** $(S)\int\limits_0^2 x^2 d\ell n(1+x)$ =(((23) - формуладан фойдаланамиз))

$$=(R)\int\limits_0^2 \frac{x^2}{x+1}dx=\int\limits_0^2\left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)dx= =\left(\frac{x^2}{2}-x+\ell n|x+1|\right)\Bigg|_0^2=2-2+\ell n3=\ell n3.$$

б) $(S)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} xd\sin x=$ **((** (23) формуладан фойдаланамиз))=

$$(R)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos xdx==\left(\begin{pmatrix} u=x & \Rightarrow & du=dx \\ dv=\cos xdx & & v=\sin x\end{pmatrix}\right)=$$

$$=x\sin x\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx=\frac{\pi}{2}+\cos x\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}+0-1=\frac{\pi}{2}-1.$$

в) $(S)\int\limits_{-1}^{1} xdarctgx=$(((23)-формуладан фойдаланамиз))=

$$(R)\int\limits_{-1}^{1}\frac{x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\ell n(x^2+1)\Bigg|_{-1}^{1}=0.$$ ▶

2-мисол. *(24)-формуладан фойдаланиб қуйидаги Стилтьес интеграллари хисоблансин:*

а) $(S)\int\limits_{-1}^{3} xdg(x)$*, бу ерда*

$$g(x)=\begin{cases}0, & агар \quad x=-1 \quad бўлса,\\ 1, & агар \quad -1<x<2 \quad бўлса,\\ -1, & агар \quad 2\le x\le 3 \quad бўлса;\end{cases}$$

ва

б) $(S)\int\limits_0^2 x^2dg(x)$*, бу ерда*

$$g(x)=\begin{cases}-1, & агар \quad 0\le x<\frac{1}{2} \quad бўлса,\\ 0, & агар \quad \frac{1}{2}\le x<\frac{3}{2} \quad бўлса,\\ 2, & агар \quad x=\frac{3}{2} \quad бўлса,\\ -2, & агар \quad \frac{3}{2}<x\le 2 \quad бўлса.\end{cases}$$

◄**а)** $g(x)$ функциянинг $x=-1$ нуқтадаги сакраши 1га, $x=2$ нуқтадаги сакраши –2 га тенг хамда $x\neq -1;2$ нуқталарда $g'(x)=0$. Унда (24)-формулага кўра қуйидагига эга бўламиз:

$$(S)\int_{-1}^{3} xdg(x) = -1\cdot(1-0)+2(-1-1) = -1-4=-5$$

б) $g(x)$ функциянинг $x=\frac{1}{2}$ нуқтадаги сакраши 1га, $x=\frac{3}{2}$ нуқтадаги сакраши -2 га тенг ва $x\neq\frac{1}{2};\frac{3}{2}$ бўлганда $g^{'}(x)=0$. Интегрални (24) –формуладан фойдаланиб ҳисоблаймиз:

$(S)\int_{0}^{2} x^2dg(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot(0+1)+\left(\frac{3}{2}\right)^2\cdot(-2-0)=\frac{1}{4}-\frac{18}{4}=-\frac{17}{4}$.►

3-мисол. *(24)-формуладан фойдаланиб қуйидаги Стилтьес интеграллари хисоблансин:*

$$\textit{а)}\ (S)\int_{-2}^{2} xdg(x),\quad \textit{б)}\ (S)\int_{-2}^{2} x^2dg(x),\quad \textit{в)}\ (S)\int_{-2}^{2} (x^3+1)dg(x).$$

Бу ерда $g(x)=\begin{cases} x+2, & \textit{агар}\ -2\le x\le -1\ \textit{бўлса},\\ 2, & \textit{агар}\ -1< x< 0\ \textit{бўлса},\\ x^2+3, & \textit{агар}\ 0\le x\le 2\ \textit{бўлса}. \end{cases}$

◄ $g(x)$ функциянинг $x=-1$ ва $x=0$ нуқталаридаги сакраши 1 га тенг ҳамда

$$g'(x)=\begin{cases} 1, & \textit{агар}\ -2\le x< -1\ \textit{бўлса},\\ 0, & \textit{агар}\ -1< x< 0\ \textit{бўлса},\\ 2x, & \textit{агар}\ 0< x\le 2\ \textit{бўлса}. \end{cases}$$

а) $(S)\int_{-2}^{2} xdg(x) =$ **((**(24)-формуладан фойдаланамиз))$=\int_{-2}^{-1} xdx+\int_{0}^{2} x\cdot 2xdx+(-1)\cdot(2-1)+0\cdot(3-2)=$

$$=\left.\frac{x^2}{2}\right|_{-2}^{-1}+\left.\frac{2}{3}x^3\right|_{0}^{2}-1=\frac{1}{2}-2+\frac{16}{3}-1=\frac{17}{6}.$$

б) $(S)\int_{-2}^{2} x^2dg(x)\overset{(24)}{=}\int_{-2}^{-1} x^2dx+\int_{0}^{2} x^2\,2xdx+(-1)^2\cdot 1+$

$$+0\cdot 1=\left.\frac{x^3}{3}\right|_{-2}^{-1}+\left.\frac{x^4}{2}\right|_{0}^{2}+1=-\frac{1}{3}+\frac{8}{3}+8+1=11\frac{1}{3}.$$

в) $(S)\int_{-2}^{2}\left(x^3+1\right)dg(x)\overset{(24)}{=}\int_{-2}^{-1}\left(x^3+1\right)dx+\int_{0}^{2}\left(x^3+1\right)2xdx+$

$$+\left[(-1)^3+1\right]\cdot 1+\left(0^3+1\right)\cdot 1=\left(\frac{x^4}{4}+x\right)\Bigg|_{-2}^{-1}+2\left(\frac{x^5}{5}+\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{0}^{2}+0+1=$$

$$=\frac{1}{4}-1-4+2+\frac{64}{5}+4=15\frac{1}{20}\,.\blacktriangleright$$

4-мисол. *(22)–формуладан фойдаланиб, оддий Риман интегралидаги бўлаклаб интеграллаш формуласининг бир умумлашмасини келтирамиз:*

Айтайлик, $u(x)$ *ва* $\vartheta(x)$ *функциялар [a,b] кесмада абсолют интегралланувчи бўлиб,*

$U(x)=U(a)+\int\limits_a^x u(t)dt$ *ва* $V(t)=V(a)+\int\limits_a^x \vartheta(t)dt$ *бўлсин.*

Унда қуйидаги формула ўринли бўлади:

$$\int\limits_a^b U(x)\vartheta(x)dx=U(x)V(x)\Big|_a^b-\int\limits_a^b V(x)\cdot u(x)dx\,. \qquad \textbf{(25)}$$

$\blacktriangleleft=\int\limits_a^b U(x)\vartheta(x)dx$ (((22)-формуладан фойдаланамиз))= $(S)\int\limits_a^b U(x)dV(x)=$ ((Бўлаклаб интеграллаш формуласидан фойдаланамиз))= $U(x)V(x)\Big|_a^b-\int\limits_a^b V(x)\cdot u(x)dx\,.\blacktriangleright$

Изоҳ. *(25)-формуладаги* $u(x)$ *ва* $\vartheta(x)$ *функциялар* $U(x)$ *ва* $V(x)$ *функцияларнинг ҳосиласи бўлмаса хам, ҳосила вазифасини бажаряпти. Агар* $u(x),\vartheta(x)\in C[a,b]$ *бўлса, унда*

$$U'(x)=u(x) \text{ ва } V'(x)=\vartheta(x)$$

бўлиб, (25)-формула оддий бўлаклаб интеграллаш формуласига айланиб қолади.

4-§. Стилтьес интегралининг геометрик маъноси ва интегрални бахолаш.

13. Стилтьес интегралининг геометрик маъноси.

Айтайлик, $f(t)$ ва $g(t)$ функциялар бирор $T=[a,b]$ ораликда аниқланган бўлиб, қуйидаги шартларни қаноатлантирсин:

1) $f(t)\in C(T)$ **ва** $f(t)>0$**,**

2) $g(t)$ функция T да қатъий ўсувчи бўлиб, узилиш нуқталарига (сакрашларга) эга бўлиши ҳам мумкин.

Ушбу

$$(S)\int_a^b f(t)dg(t) \qquad \textbf{(26)}$$

Стилтьес интегралини қараймиз. Қуйидаги

$$\begin{cases} x = g(t), \\ y = f(t), \ \ t \in T \end{cases} \qquad \textbf{(27)}$$

параметрик тенгламалар текисликда бирор γ чизиқни, умуман олганда узилишга эга бўлган чизиқни аниқлайди.

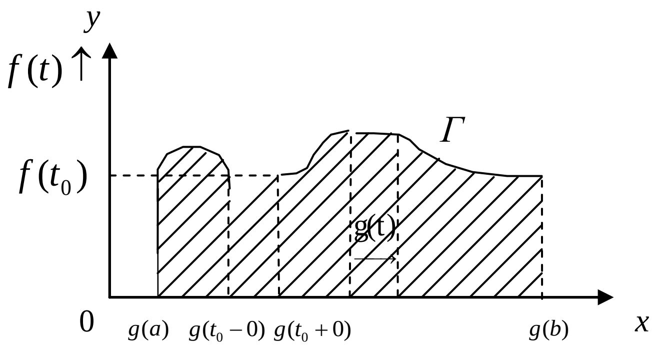
Агар бирор $t = t_0$ нуқтада $g(t)$ функция сакрашга эга бўлса,

$$g(t_0 - 0) < g(t_0 + 0)$$

бўлади. $g(t_0 - 0)$ ва $g(t_0 + 0)$ нуқталарга $y = f(t)$ функция ОУ ўқидаги 1 та $f(t_0)$ нуқтани мос қўяди.

$(g(t_0 - 0),\ f(t_0))$ **ва** $(g(t_0 + 0),\ f(t_0))$ нуқталарни кесма ёрдамида туташтирилса, бу кесма ОХ ўқига параллел бўлади ва γ чизиқни t_0 нуқтадаги сакрашидан қутиламиз.

Бошқа сакраш нуқталарида хам шу жараённи амалга оширсак, γ чизик узлуксиз чизиққа айланади. Хосил бўлган чизиқни Γ деб белгилаймиз. (1-чизма)



1-чизма.

Энди (26)-интегралнинг қиймати юқоридан Γ чизик, қуйидан ОХ ўки, ён ёқларидан $x = g(a)$ ва $x = g(b)$ вертикал чизиқлар билан чегараланган эгри чизиқли трапециянинг юзига тенг бўлишини кўрамиз.

◀ $T = [a,b]$ кесмани ушбу

$$a = t_0 < t_1 < ...t_k < t_{k+1} < ... < t_n = b$$

тенгсизликларни қаноатлантирувчи ихтиёрий нуқталар ёрдамида қисмларга ажратамиз. Натижада, OX уқидаги $[g(a);g(b)]$ кесма ҳам

$$g(a)<g(t_1)<...g(t_k)<g(t_{k+1})<...<g(b)$$

нуқталар ёрдамида қисмларга ажралади.

$$m_k=\inf_{[t_k,t_{k+1}]}\{f(t)\} \text{ ва } M_k=\underset{[t_k,t_{k+1}]}{Sup}\{f(t)\}$$

деб белгилаб, Стилтьес - Дарбунинг қуйи ва юқори йиғиндиларини тузамиз:

$$\underline{S}=\sum_{k=0}^{n-1}m_k\Delta g(t_k),\ \overline{S}=\sum_{k=0}^{n-1}M_k\Delta g(t_k)$$

Бу йиғиндиларнинг қийматлари мос равишда берилган шаклниниг ичида ётган ва уни ўз ичига олган кўпбурчакларнинг юзаларига тенг бўлади. (26)-интеграл яқинлашувчи бўлгани учун

$$\underset{\substack{n\to\infty\\(\lambda\to 0)}}{\ell im}\ \underline{S}=\underset{\substack{n\to\infty\\(\lambda\to 0)}}{\ell im}\ \overline{S}=S=(S)\int_a^b f(t)dg(t)$$

бўлади.►

14. Стилтьес интеграли учун ўрта киймат ҳақида теорема.

Фараз қилайлик, [a,b] кесмада берилган $f(x)$ функция чегараланган бўлсин:

$$m\le f(x)\le M.$$

<u>9- теорема.</u> *Агар [a,b] кесмада берилган* $f(x)$ *функция монотон ўсувчи бўлиб,* $(S)\int_a^b f(x)dg(x)$ *Стилтьес интеграли мавжуд бўлса, у холда ушбу*

$$(S)\int_a^b f(x)dg(x)=\mu\cdot[g(b)-g(a)] \qquad \textbf{(28)}$$

тенглик ўринли бўлади, бу ерда $m\le\mu\le M$.

◄[a,b] кесмани оралиқларга бўлиб, Стилтьеснинг интеграл йиғиндисини тузамиз:

$$\sigma=\sum_{k=0}^{n-1}f(\xi_k)\Delta g(x_k).$$

Бу тенглик ва $m\le f(x)\le M$ тенгсизликдан фойдалансак, қуйидаги тенгсизликка келамиз:

$$m\cdot[g(b)-g(a)]\le\sigma\le M[g(b)-g(a)]$$

Бу тенгсизликда $\lambda\to 0$ да лимитга ўтиб

$$m\cdot[g(b)-g(a)]\le(S)\int_a^b f(x)dg(x)\le M\cdot[g(b)-g(a)]$$

ёки

$$m\le\frac{(S)\int_a^b f(x)dg(x)}{g(b)-g(a)}\le M$$

эканлигини топамиз. Агар

$$\mu=\frac{(S)\int_a^b f(x)dg(x)}{g(b)-g(a)}$$

деб белгиласак, $m\le\mu\le M$ бўлиб, охирги тенгликдан исбот қилишимиз керак булган (28)–тенглик келиб чиқади.▶

<u>Натижа</u>. Агар 9-теоремада $f(x)\in C[a,b]$ бўлса, унда шундай $c\in[a,b]$ нуқта топиладики,

$$(S)\int_a^b f(x)dg(x)=f(c)\cdot[g(b)-g(a)]$$

тенглик бажарилади.

15. Стилтьес интегралини бахолаш.

Стильтес интегралини ўрганиш жараёнида амалиётда $f(x)$ функция узлуксиз ва $g(x)$ функция чекли вариацияга эга бўлган хол мухим ахамиятга эга. Бундай ҳолда Стилтьес интегралини қуйидагича бахолаш мумкин.

<u>10-теорема.</u> *Агар* $f(x)\in C[a,b]$ *ва* $g(x)$ *чекли вариацияли функция бўлса, унда*

$$\left|(S)\int_a^b f(x)dg(x)\right|\le M\cdot V \qquad \textbf{(29)}$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

Бу ерда

$$M=\max_{a\le x\le b}|f(x)|,\qquad V=\bigvee_a^b g(x).$$

◀Стилтьес йиғиндисини тузиб, уни баҳолаймиз:

$$|\sigma|=\left|\sum_{k=0}^{n-1}f(\xi_k)\Delta g(x_k)\right|=\sum_{k=0}^{n-1}|f(\xi_k)|\cdot|\Delta g(x_{k\cdot})|\le$$

$$\le M\sum_{k=0}^{n-1}|g(x_{k+1})-g(x_k)|\le M\bigvee_a^b g(x)=M\cdot V\underset{\lambda\to0}{\Rightarrow}\quad(29).$$ ▶

11-теорема. $f(x)\in C[a,b],\ g(x)$ *- чекли вариацияли функция ва* $I=(S)\int\limits_a^b f(x)dg(x)$ *бўлсин. Унда* $\forall\varepsilon>0$ *учун* $\exists\delta>0:\ \lambda<\delta$ *бўлганда*

$$|\sigma-I|\le\varepsilon\cdot\bigvee_a^b g(x) \qquad \textbf{(30)}$$

бўлади.

◀ $$\left.\begin{array}{l}\sigma=\sum\limits_{k=0}^{n-1}f(\xi_k)\Delta g(x_k)=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}f(\xi_k)dg(x),\\ I=(S)\int\limits_a^b f(x)dg(x)=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}f(x)dg(x)\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow|\sigma-I|=\left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}[f(\xi_k)-f(x)]dg(x)\right|\le$$

$\le\sum\limits_{k=0}^{n-1}\omega_k\left|\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}dg(x)\right|\le\sum\limits_{k=0}^{n-1}\omega_k\bigvee\limits_{x_k}^{x_{r+1}}g(x)=$ (($f(x)\in C[a,b]$ бўлгани учун Кантор теоремасига кўра $\forall\varepsilon>0$ учун $\exists\delta>0:\ \lambda<\delta$ бўлганда $\omega_k<\varepsilon$ бўлади))

$\le\varepsilon\sum\limits_{k=0}^{n-1}\bigvee\limits_{x_k}^{x_{k+1}}g(x)=\varepsilon\cdot\bigvee\limits_a^b g(x)$.▶

5-§. Стилтьес интеграли белгиси остида лимитга ўтиш.

16. **12-теорема.** *Фараз қилайлик,* [a,b] *кесмада* $\{f_n(x)\}\ (n=1,2,...)$ *функционал кетма-кетлик берилган бўлиб,*

$$\ell im_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$$

бўлсин. Агар

1) $f_n(x)\in C[a,b]$,

2) $n\to\infty$ *да* $f_n(x)\rightrightarrows f(x)$,

3) $g(x)$*-чекли вариацияли функция бўлса, у ҳолда*

$$\ell im_{n\to\infty}(S)\int_a^b f_n(x)dg(x)=(S)\int_a^b \ell im_{n\to\infty}f_n(x)dg(x)=(S)\int_a^b f(x)dg(x) \qquad \textbf{(31)}$$

бўлади.

◀ $n\to\infty$ да $f_n(x)\rightrightarrows f(x)$, бўлгани учун $\forall\varepsilon>0$ олинганда ҳам шундай $n_0\in N$ сон топиладики $\forall n>n_0$ ва барча $x\in[a,b]$ лар учун

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$

тенгсизлик бажарилади. Унда 15-пунктдаги (29)-тенгсизликка кўра $n > n_0$ бўлганда қуйидаги муносабатни ҳосил қиламиз:

$$\left|(S)\int_a^b f_n(x)dg(x) - (S)\int_a^b f(x)dg(x)\right| =$$

$$= \left|(S)\int_a^b [f_n(x) - f(x)]dg(x)\right| \le \varepsilon \cdot \overset{b}{\underset{a}{V}} g(x) \underset{\varepsilon\to 0}{\Rightarrow} \qquad \textbf{(31)}.\blacktriangleright$$

13-теорема. *Фараз қилайлик,* $[a,b]$ *кесмада* $f(x)$ *функция ва* $\{g_n(x)\}$ $(n=1,2,...)$ *функционал кетма-кетлик берилган бўлиб, қуйидаги шартлар бажарилсин:*

1) $f(x) \in C[a,b]$,

2) $g_n(x)$ $(n=1,2,...)$ *-чекли вариацияли функциялар,*

3) $\overset{b}{\underset{a}{V}} g_n(x) \le V \quad (n=1,2,...)$,

4) $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = g(x)$.

У ҳолда

$$\lim_{n\to\infty}(S)\int_a^b f(x)dg_n(x) = (S)\int_a^b f(xdg(x) \qquad \textbf{(32)}$$

бўлади.

◀Аввал лимит функция $g(x)$ нинг чекли вариацияга эга бўлишини кўрсатамиз: бунинг учун [a,b] кесмани ушбу

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_m = b$$

тенгсизликларни қаноатлантирувчи ихтиёрий нуқталар ёрдамида қисмларга ажратиб, $\forall n \in N$ учун

$$\sum_{k=0}^{m-1}|g_n(x_{k+1}) - g_n(x_k)| \le \overset{b}{\underset{a}{V}} g_n(x) \le V$$

тенгсизликка эга бўламиз.Бу тенгсизликда $n \to \infty$ да лимитга ўтамиз:

$$\sum_{k=0}^{m-1}|g_n(x_{k+1}) - g_n(x_k)| \le \overset{b}{\underset{a}{V}} g(x) \le V \;\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $g(x)$-чекли вариацияли функция .

Энди (32)-тенгликни исботлашга ўтамиз. Стилтьес йиғиндисини тузамиз:

$$\sigma = \sum_{k=0}^{m-1} f(x_k)\Delta g(x_k), \qquad \sigma_n = \sum_{k=0}^{m-1} f(x_k)\Delta g_n(x_k).$$

$\forall\varepsilon > 0$ сон олиб, ораликни шундай кичик бўлакларга бўламизки, $f(x)$ функциянинг ҳар бир ораликдаги тебраниши $\omega_k < \varepsilon$ бўлади.

Унда (11)-теоремага кўра қуйидаги тенгсизликларга эга бўламиз:

$$\begin{cases} \left|\sigma - (S)\int_a^b f(x)dg(x)\right| \le \varepsilon \cdot V \\ \left|\sigma_n - (S)\int_a^b f(x)dg_n(x)\right| \le \varepsilon \cdot V \end{cases} \quad \textbf{(33)}$$

Иккинчи томондан, $n \to \infty$ да $\sigma_n \to \sigma \Rightarrow$

$\exists n_0 \in N:\ \forall n > n_0$ да

$$|\sigma_n - \sigma| < \varepsilon \quad \textbf{(34)}$$

бўлади. Унда $n > n_0$ бўлганда (33) ва (34)- тенгсизликлардан қуйидагиларни хосил қиламиз:

$$\left|(S)\int_a^b f(x)dg_n(x) - (S)\int_a^b f(x)dg(x)\right| \le \left|(S)\int_a^b f(x)dg_n(x) - \sigma_n\right| +$$

$$+|\sigma_n - \sigma| + \left|\sigma - (S)\int_a^b f(x)dg(x)\right| < \varepsilon \cdot V + \varepsilon + \varepsilon \cdot V = (2V+1)\cdot\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0}{\Rightarrow} 32 \blacktriangleright$$

6-§. Иккинчи тур эгри чизиқли интегрални Стилтьес интегралига келтириш.

17. Айтайлик,

$$\int_{\overset{\cup}{AB}} f(x,y)dx \text{ ёки } \left(\int_{\overset{\cup}{AB}} f(x,y)dy\right) \quad \textbf{(35)}$$

2- тур эгри чизиқли интеграл берилган бўлиб,

$$\overset{\cup}{AB}: \begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \alpha \le t \le \beta \end{cases}$$

бўлсин ва t параметр α дан β га қараб ҳаракатланганда унга мос ($(\varphi(t),\ \psi(t))$ нуқта A дан B га қараб харакатлансин.

$[\alpha,\beta]$ кесмани ушбу

$$\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta$$

нуқталар ёрдамидаги ихтиёрий бўлинишини олиб, $A_k = (\ \varphi(t_k)$, $\psi(t_k)$) деб белгилаймиз.

$\forall\tau_k \in [t_k, t_{k+1}]$ нуқталарга мос келувчи нуқтани M_k деб белгилаб

$$\int\limits_{\overset{\cup}{AB}} f(x,y)dx$$

учун интеграл йигиндини тузсак, у қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\sigma=\sum_{k=0}^{n-1} f(M_k)\Delta(x_k)=\sum_{k=0}^{n-1} f\left[\varphi(\tau_k),\psi(\tau_k)\right]\Delta\varphi(t_k).$$

Табиийки, тенгликнинг ўнг томонидаги ифода Стилтьес интеграли учун интеграл йиғинди бўлади ва бу тенгликдан $\lambda\to$ о да қуйидаги тенглик келиб чиқади:

$$\int\limits_{\overset{\cup}{AB}} f(x,y)dx=(S)\int_{\alpha}^{\beta} f\left[\varphi(t),\psi(t)\right]d\varphi(t). \qquad \textbf{(36)}$$

Худди шу каби ушбу

$$\int\limits_{\overset{\cup}{AB}} f(x,y)dy=(S)\int_{a}^{\beta} f\left[\varphi(t),\psi(t)\right]d\psi(t). \qquad \textbf{(37)}$$

тенглик ҳам ўринли.

(36)- ва (37)-тенгликлардан (35)-эгри чизиқли интегралнинг мавжудлиги ҳакида қуйидаги теорема келиб чиқади:

Агар $f(x,y)$ *функция узлуксиз ва* $\varphi(t)$ *(ёки* $\psi(t)$*) функция чекли варацияли функция бўлса, у ҳолда (35)-интеграл мавжуд бўлади.*

Хусусан, $\overset{\cup}{AB}$ *эгри чизиқ тўғриланувчи, P(x,y) ва Q(x,y) функциялар узлуксиз бўлса, унда*

$$\int\limits_{\overset{\cup}{AB}} P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

интеграл яқинлашувчи бўлади ҳамда қуйидаги тенглик бажарилади:

$$\int\limits_{\overset{\cup}{AB}} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=(S)\int_{a}^{\beta} P\left[\varphi(t),\psi(t)\right]d\varphi(t)+(S)\int_{a}^{\beta} Q\left[\varphi(t),\psi(t)\right]d\psi(t).$$

Назорат саволлари.

1. **Стилтьес интеграли тушунчаси.**
2. **Дарбу – Стилтьеснинг қуйи ва юқори йигиндилари ҳамда уларнинг хосслари**
3. **Стильес интегралининг мавжудлик шарти.**

4. $f(x)\in C[a,b]$ **ва** $g(x)\uparrow$ **бўлса,** $(S)\int\limits_a^b f(x)dg(x)$ **мавжуд эканлиги исботлансин.**

5. $f(x)$ **функция** $[a,b]$ **да** R**-интегралланувчи,** $g(x)$ **функция Липщиц шартини қаноатлантирса,** $(S)\int\limits_a^b f(x)dg(x)$ **мавжуд эканлиги исботлансин.**

6. $f(x)$ **функция** $[a,b]$ **да** R**-интегралланувчи,**

$$g(x)=c+\int\limits_a^x \varphi(t)dt$$

($\varphi(t)$ **функция [a,b] да абсолют интегралланувчи) бўлса,** $(S)\int\limits_a^b f(x)dg(x)$ **мавжуд эканлиги исботлансин.**

7. **Стилтьес интегралининг хоссалари.**

8. $(S)\int\limits_c^b f(x)dg(x)$ **ва** $(S)\int\limits_a^c f(x)dg(x)$ $(a<b<c)$ **интегралларнинг мавжуд бўлишидан** $(S)\int\limits_a^b f(x)dg(x)$ **интегралнинг мавжуд бўлиши келиб чиқиши шарт эмаслигини кўрсатувчи мисол.**

9. **Стилтьес интеграли учун бўлаклаб интеграллаш формуласи.**

10. $f(x)$ **функция** $[a,b]$**да R-интегралланувчи,**

$$g(x)=c+\int\limits_a^x \varphi(t)dt$$

($\varphi(t)$ **функция** $[a,b]$**да абсолют интегралланувчи) бўлса,** $(S)\int\limits_a^b f(x)dg(x)$ **Стилтьес интегралини ҳисоблаш (6-теорема).**

11. **Стилтьес интегралини хисоблаш (7-теорема).**

12. **Агар** $f(x)\in C[a,b]$ **бўлса,** $(S)\int\limits_a^b f(x)d\rho(x)$ **ҳисоблансин.**

13. **Агар** $f(x)\in C[a,b]$ **бўлса,** $(S)\int\limits_a^b f(x)d\rho(x-c)$ **ҳисоблансин.**

14. **Агар** $f(x)\in C[a,b]$ **булса,** $(S)\int\limits_a^b f(x)d\rho(c-x)$ **ҳисоблансин.**

15. **Стилтьес интегралини умумий ҳолда ҳисоблаш (8-теорема).**
16. **Стилтьес интегралини хисоблашга доир мисоллар.**
17. **Бўлаклаб интеграллаш формуласининг умумлашмаси.**
18. **Стилтьес интегралининг геометрик маъноси.**
19. **Стилтьес интеграли учун ўрта қиймат ҳақидаги теорема.**
20. **Стилтьес интегралини бахолаш.**
21. **Стилтьес интеграли белгиси остида лимитга ўтиш.**
22. **Иккинчи тур эгри чизиқли интегрални Стилтьес интегралига келтириш.**

III-БОБ.
Майдонлар назарияси элементлари.

Скаляр майдон тушунчаси.
Майдон функцияси.
Сатҳ сиртлари ва сатҳ чизиқлари.
Йўналиш бўйича ҳосила.
Скаляр майдон градиенти.
Сиртнинг уринма текислиги ва нормали.
Вектор майдон тушунчаси.
Суюкликнинг оқими ҳақидаги масала.
Стационар оқим.
Вектор майдоннинг оқими.
Вектор майдоннинг дивергенцияси.
Остроградский – Гаусс формуласининг вектор кўриниши.
Ротор, циркуляция ва Стокс формуласи.
Потенциал майдон.
Гамильтон оператори.

Бу бобда биз кўп ўзгарувчили функциялар назариясининг баъзи масалаларини физик нуқтаи назардан ўрганамиз.

1-§. Скаляр майдон ва уни геометрик ифодалаш. Йўналиш бўйича ҳосила.

18. Скаляр майдон ва уни геометрик ифодалаш.

1-таъриф. *Агар фазо ёки фазо қисмининг ҳар бир нуқтаси Р га бирор скаляр* $u(P)$ *қиймат мос қўйилса, у ҳолда берилган фазога* ***скаляр майдон****,* $u = F(P)$ *функцияга эса* ***майдон функцияси*** *деб аталади.*

Масалан, бир жинсли бўлмаган жисмнинг ҳар бир нуқтасига шу нуқтадаги зичликни мос қўйиш ёрдамида уни скаляр майдон деб қараш мумкин. Бошқа скаляр майдон сифатида жисмдаги температуранинг тарқалишини кўриш мумкин ва хоказо.

Агар фазода $Oxyz$ кординаталар системасини киритсак, унда майдон функциясини

$$u = u(P) = F(x, y, z)$$

дейиш мумкин ва аксинча, ҳар бир $u = F(x, y, z)$ функция бирор скаляр майдонни аниқлайди.

Скаляр майдон кўпинча геометрик куринишда сатҳ сиртлари ёрдамида ифодаланади.

$u = F(x, y, z)$ майдон функцияси ёрдамида аниқланган скаляр майдоннинг **сатҳ сиртлари**

$$F(x, y, z) = c$$

тенглик ёрдамида аниқланади. Параметр c га ҳар хил қийматларни бериш ёрдамида сатҳ сиртлари оиласини ҳосил қиламиз.

Масалан, $u = x^2 + y^2 + z^2$ *нинг сатҳ сиртлари бўлиб, маркази кординаталар бошида жойлашган*

$$x^2 + y^2 + z^2 = c$$

сфералар оиласи хизмат қилади.

Фазодаги скаляр майдон билан бир қаторда текисликдаги скаляр майдонларни ҳам кўриш мумкин: $z = f(x, y)$ - **майдон функцияси,** $f(x, y) = c$ - **сатҳ чизиқлари.**

Масалан, $z = x^2 - y^2$ *учун сатҳ чизиқлари бўлиб,* $c \neq 0$ *да* $\{x^2 - y^2 = c\}$ *тенг томонли гиперболалар,* $c = 0$ *да эса* $y = \pm x$ *тўгри чизиқлар хизмат қилади.*

19.Йўналиш бўйича ҳосила.

Айтайлик, дифференциалланувчи $u = F(x, y, z)$ майдон функцияси берилган бўлсин.

Скаляр майдонда ихтиёрий P нуқта оламиз ва $\underline{P}$ нуқтадан чиқиб,

$$\vec{1} = \cos\alpha \cdot \vec{i} + \cos\beta \cdot \vec{j} + \cos\gamma \cdot \vec{k}$$

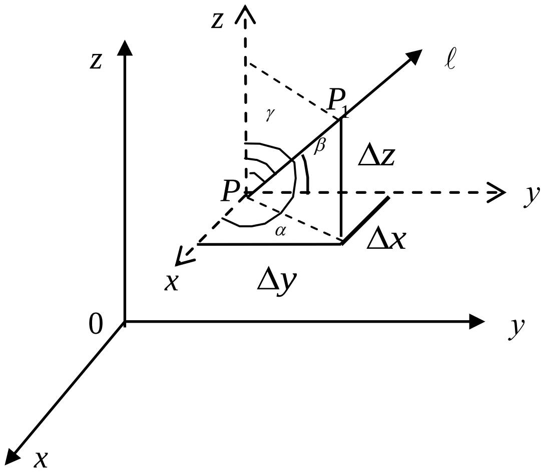
бирлик вектор бўйлаб йўналган ℓ нурни қараймиз. Фараз қилайлик, $P_1(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ нуқта ℓ нурдаги бошқа нуқта бўлсин.

$$\Delta_\ell(u) = F(P_1) - F(P) = F(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - F(x, y, z)$$

ва

$$\Delta\ell = |PP_1|$$

деб белгилаймиз.



2-чизма.

2- таъриф. Агар $\underset{\Delta\ell\to0}{}\frac{\Delta_\ell u}{\Delta\ell}$ *- мавжуд ва чекли бўлса, у ҳолда шу лимитнинг қийматига* $u=F(x,y,z)$ *функциядан* ℓ ***йўналиш бўйича ҳосиланинг*** P ***нуқтадаги қиймати*** *дейилади ва* $\frac{\partial u(P)}{\partial\ell}$ *каби белгиланади.*

Демак,

$$\frac{\partial u}{\partial\ell}:=\underset{\Delta\ell\to0}{\ell im}\frac{\Delta_\ell u}{\Delta\ell}=\underset{\Delta\ell\to0}{\ell im}\frac{F(x+\Delta x,y+\Delta y,z+\Delta z)-F(z,y,z)}{\Delta\ell}. \qquad \mathbf{(1)}$$

1-теорема. *Агар* $u=F(x,y,z)$ *функция* $P(x,y,z)$ *нуқтанинг бирор атрофида дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда бу функциянинг* P *нуқтадан ўтган ихтиёрий* $\ell(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ *йўналиш бўйича ҳосиласи мавжуд бўлиб, қуйидаги тенглик бажарилади:*

$$\frac{\partial u}{\partial\ell}=F_x'(x,y,z)\cdot\cos\alpha+F_y'(x,y,z)\cdot\cos\beta+F_z'(x,y,z)\cdot\cos\gamma. \qquad \mathbf{(2)}$$

◄2-чизмадан кўринадики,

$$\cos\alpha=\frac{\Delta x}{\Delta\ell},\qquad \cos\beta=\frac{\Delta y}{\Delta\ell},\qquad \cos\gamma=\frac{\Delta z}{\Delta\ell}$$

тенгликлар ўринли. $\Rightarrow$

$$\Delta x=\Delta\ell\cdot\cos\alpha,\qquad \Delta y=\Delta\ell\cdot\cos\beta,\qquad \Delta z=\Delta\ell\cdot\cos\gamma. \qquad \mathbf{(3)}$$

$\Delta_\ell u=F(x+\Delta x,y+\Delta y,z+\Delta z)-F(z,y,z)$ = (($F(x,y,z)$ функциянинг дифференциалланувчи эканлигидан фойдаланамиз))= $F_x^{'}(x,y,z)\Delta x+F_y^{'}(x,y,z)\Delta y+F_z^{'}(x,y,z)\Delta z+$

$$+o(\rho)=((\rho=\Delta\ell=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}))\overset{(3)}{=}F_x'(x,y,z)\Delta\ell.$$

$$\cos\alpha+F_y'(x,y,z)\cdot\Delta\ell\cos\beta+F_z'(x,y,z)\cdot\Delta\ell\cos\gamma+o(\rho)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial\ell}=\underset{\Delta\ell\to0}{\ell im}\frac{\Delta_\ell u}{\Delta\ell}=F_x'(x,y,z)\cos\alpha+F_y'(x,y,z)\cos\beta+$$

$$+F_z'(x,y,z)\cos\gamma+\underset{\Delta\ell\to0}{\ell im}\frac{o(\rho)}{\Delta\ell}=F_x'(x,y,z)\cos\alpha+$$

$$+F_y'(x,y,z)\cos\beta+F_z'(x,y,z)\cos\gamma\ .\blacktriangleright$$

Мисоллар. **1)** $u=x^2-2xz+y^2$, $P_1(1;2;-1)$, $P_2(2;4;-3)$ *ва* $\ell=\overrightarrow{P_1P_2}$ *бўлса,* $\frac{\partial u(P_1)}{\partial\ell}$ *ҳисоблансин.*

$$\blacktriangleleft\ \overrightarrow{P_1P_2}=(2-1)\cdot\vec{i}+(4-2)\cdot\vec{j}+(-3+1)\cdot\vec{k}=\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k}\,.$$

Энди $\overrightarrow{P_1P_2}$ га мос бирлик векторни топамиз:

$$\vec{1}=\frac{\overrightarrow{P_1P_2}}{\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right|}=\frac{\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k}}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=\frac{1}{3}\vec{i}+\frac{2}{3}\vec{j}-\frac{2}{3}\vec{k}=$$

$$\cos\alpha\cdot\vec{i}+\cos\beta\cdot\vec{i}+\cos\gamma\cdot\vec{k}\Rightarrow\cos\alpha=\frac{1}{3};\quad\cos\beta=\frac{2}{3};\quad\cos\gamma=-\frac{2}{3}.$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial\ell}\right|_{P_1}=(2x-2z)_{P_1}=2+2=4;\quad\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{P_1}=2y\Big|_{P_1}=4;\quad\left.\frac{\partial u}{\partial \text{я}}\right|_{P_1}=-2x\Big|_{P_1}=-2.$$

(2)–формулага олиб бориб қўйиб топамиз :

$$\frac{\partial u(P)_1}{\partial\ell}=4\cdot\frac{1}{3}+4\cdot\frac{2}{3}-2(-\frac{2}{3})=\frac{16}{3}\,.\blacktriangleright$$

2) $z=\ell n(x+2y)$, $P_1(1;\frac{1}{2})$ *ва* ℓ *тўғри чизиқ* $y=\frac{x^2}{2}$ *параболанинг* P_1 *нуқтасига ўтказилган уринма бўлса,* $\left.\frac{\partial z}{\partial\ell}\right|_{P_1}$ *топилсин.*

Аввал уринманинг бурчак коэффициентини топамиз:

$$tg\alpha=y'(1)=\left.\frac{2x}{2}\right|_{x=1}=1\Rightarrow\alpha=45^\circ\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\beta=90^\circ-\alpha=45^\circ\Rightarrow\cos\alpha=\cos\beta=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{P_1}=\left.\frac{1}{x+2y}\right|_{P_1}=\frac{1}{2};\qquad\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{P_1}=\left.\frac{2}{x+2y}\right|_{P_1}=1.$$

(2)-формулага олиб бориб қўйиб топамиз:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial\ell}\right|_{P_1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{4}.\blacktriangleright$$

2-§. Скаляр майдоннинг градиенти. Сиртнинг уринма текислиги ва нормали.

20. Скаляр майдоннинг градиенти.

Скаляр майдонларни ўрганиш жараёнида $u = F(x, y, z)$ майдон функцияси билан бир қаторда скаляр майдоннинг градиенти деб аталувчи вектор хам ўрганилади.

3-таъриф. $u = F(x, y, z)$ *майдон функцияси ёрдамида аниқланган скаляр майдоннинг* $P(x, y, z)$ *нуқтасида аниқланган ушбу*

$$F'_x(x, y, z)\cdot \vec{i} + F'_y(x, y, z)\cdot \vec{j} + F'_z(x, y, z)\cdot \vec{k}$$

векторга ***скаляр майдоннинг градиенти*** *деб аталади ва у* $grad\ \ F(x, y, z)$ *каби белгиланади.*

Демак,

$$grad\ \ F(x, y, z) := F'_x(x, y, z)\cdot \vec{i} + F'_y(x, y, z)\cdot \vec{j} + F'_z(x, y, z)\cdot \vec{k} \qquad \textbf{(4)}$$

ёки қисқача

$$gradu := \frac{\partial u}{\partial x}\cdot \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot \vec{k} \qquad \textbf{(4')}$$

экан.

$u = F(x, y, z)$ функциянинг градиенти ва $\frac{\partial u}{\partial \ell}$ йўналиш бўйича ҳосила орасидаги боғланиш қуйидаги теорема ёрдамида ифодаланади.

2-теорема. *Агар*

$$\vec{\ell} = \vec{1} = \cos\alpha\ \vec{i} + \cos\beta\cdot \vec{j} + \cos\gamma\cdot \vec{k}$$

бўлса, унда

$$np_\ell\ \ gradu = \frac{\partial u}{\partial \ell} \qquad \textbf{(5)}$$

бўлади.

◀Фараз қилайлик, $u = F(x, y, z)$ бўлсин.

Векторлар алгебрасидан маълумки,

$$np_l\ \ gradu = (gradu, \vec{1})$$

тенглик ўринли $\Rightarrow$ $np_l\ \ gradu = (gradu, \vec{1}) =$

$$= (F'_x(x, y, z)\cdot \vec{i} + F'_y(x, y, z)\cdot \vec{j} + F'_z(x, y, z)\cdot \vec{k};$$

$\cos\alpha\cdot\vec{i}+\cos\beta\cdot\vec{j}+\cos\gamma\cdot\vec{k})=F'_x(x,y,z)\cdot\cos\alpha+$

$=F'_y(x,y,z)\cdot\cos\beta+F'_z(x,y,z)\cdot\cos\gamma=\dfrac{\partial u}{\partial\ell}$. ▶

Йўналиш бўйича ҳосиланинг таърифидан кўринадики, $\dfrac{\partial u}{\partial\ell}>0$ $\left(\dfrac{\partial u}{\partial\ell}<0\right)$ бўлса, унда $u=F(x,y,z)$ функция $\vec{\ell}$ йўналиши бўйича ўсади (камаяди). $\Rightarrow$ $\dfrac{\partial u}{\partial\ell}$ ҳосила функциянинг $\vec{\ell}$ йўналиш бўйича ўзгариш тезлигини беради. Бу факт ва (5)-тенгликдан $np_l\ \ gradu$ катталик $u=F(x,y,z)$ скаляр майдоннинг $\vec{\ell}$ йўналиш бўйича ўзгариш тезлигини беришини ҳосил қиламиз.

$\vec{\ell}$ бирлик вектор ва $gradu$ векторлар орасидаги бурчакни φ деб белгиласак,

$$np_l\ \ gradu=(gradu,\ \vec{\ell})=|gradu|\cdot\underset{1}{\underset{\parallel}{\left|\vec{\ell}\right|}}\cos\varphi=|gradu|\cdot\cos\varphi\,.$$

бўлади. Унда (5)-тенгликка кўра

$$\frac{\partial u}{\partial\ell}=|gradu|\cdot\cos\varphi \qquad \textbf{(6)}$$

тенгликни ҳосил қиламиз $\Rightarrow$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial\ell}\right)_{\max}=|gradu|\,.$$

Охирги тенгликдан қуйидаги хулоса келиб чиқади: $gradu$ *шундай векторки, унинг йўналиши майдоннинг энг катта ўсиш йўналиши билан,* $|gradu|$ *эса ўсиш тезлиги билан устма уст тушади.*

Энди майдоннинг $P_0(x_0,y_0,z_0)$ нуқтасидаги $gradu=grad\ \ F(x,y,z)$ вектори ва P_0 нуқтадан ўтувчи сатҳ сиртларини қандай жойлашганлигини аниқлаймиз.

Айтайлик, P_0 нуқтадан ўтувчи сатҳ сирти

$$F(x,y,z)=c_0 \text{ ёки } F(x,y,z)-c_0=0 \qquad \textbf{(7)}$$

бўлсин. L эгри чизиқ эса (7)-сиртда ётувчи ва P_0 нуқтадан ўтувчи эгри чизиқ бўлиб, унинг тенгламаси

$$\begin{cases} x=x(t),\\ y=y(t),\\ z=z(t)\end{cases}$$

параметрик кўринишда берилган бўлсин. Бунда $x(t),\ y(t),\ z(t)$ - дифференциалланувчи функциялар ва $x_0 = x(t_0),\ y_0 = y(t_0),\ z_0 = z(t_0)$. Бу чизиқ сиртда ётгани учун

$$F[x(t),\ y(t),\ z(t)] - c_0 = 0$$

бўлади. Бу тенгликда t параметр бўйича дифференциаллаб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\cdot x'(t) + \frac{\partial F}{\partial y}\cdot y'(t) + \frac{\partial F}{\partial z}\cdot x'(t) = 0.$$

Агар $t = t_0$ десак, унда

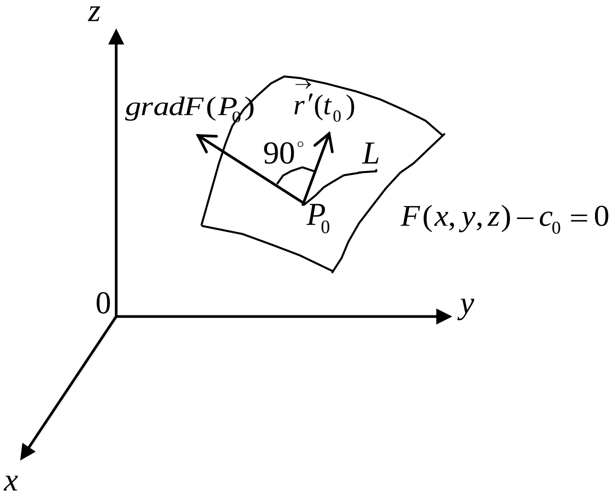
$$F_x'(x_0, y_0, z_0)\cdot x'(t_0) + F_y'(x_0, y_0, z_0)\cdot y'(t_0) + F_x'(x_0, y_0, z_0)\cdot z'(t_0) = 0$$

бўлади. Бу тенгликни чап томони иккита

$grad\ \ F(P_0) = F_x^{'}(x_0, y_0, z_0)\cdot \bar{i} + F_y^{'}(x_0, y_0, z_0)\cdot \bar{j} + F_z^{'}(x_0, y_0, z_0)\cdot \bar{k}$ ва

$\vec{r}\,'(t_0) = x'(t_0)\cdot \vec{i} + y'(t_0)\cdot \vec{j} + z'(t_0)\cdot \vec{k}$

векторларнинг скаляр кўпайтмасига тенг. $\vec{r}\,'(t_0)$ вектор L эгри чизиқнинг уринмаси бўйлаб йўналган (3-чизма).



3-чизма.

Демак,

$$gradu(P_0)\cdot \vec{r}\,'(t_0) = 0. \qquad \textbf{(8)}$$

Агар $gradu(P_0) \neq 0$ бўлса, унда (8)-тенгликка кўра

$$gradu(P_0) \perp \vec{r}\,'(t_0)$$

бўлади.$\Rightarrow$ Эгри чизиқ ихтиёрий бўлгани учун $gradu(P_0)$ *вектор сиртнинг сатҳ сирти устидаги* P_0 *нуқтасига ўтказилган барча уринмаларига* $\perp$ *бўлади.*

21.Сиртнинг уринма текислиги ва нормали.

Айтайлик, сирт

$$F(x,y,z)=0 \qquad \textbf{(9)}$$

тенглама ёрдамида берилган бўлиб, $P_0(x_0,y_0,z_0)$нуқта шу сиртдаги нуқта ва $gradF(P_0)\neq 0$ бўлсин. Унда (9)-сиртнинг P_0 нуқтасига ўтказилган барча уринмалар битта $gradF(P_0)$ векторга $\perp$ бўлган текисликда ётади. Шу текисликка (9)-сиртнинг $P_0(x_0,y_0,z_0)$ нуқтасига ўтказилган **уринма текислик** дейилади.

Уринма текисликнинг тенгламасини топамиз. Уни

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \qquad \textbf{(10)}$$

умумий кўринишда қидирамиз.

$$gradF(P_0)=F'_x(x_0,y_0,z_0)\cdot\vec{i}+F'_y(x_0,y_0,z_0)\cdot\vec{j}+F'_z(x_0,y_0,z_0)\cdot\vec{k}$$

вектор бу текисликка $\perp$ бўлгани учун, уни уринма текисликнинг нормал вектори деб қабул қилиш мумкин.$\Rightarrow$

$$A=F'_x(x_0,y_0,z_0),\quad B=F'_y(x_0,y_0,z_0),\quad C=F'_z(x_0,y_0,z_0).$$

Демак, уринма текислик ва нормалнинг каноник тенгламалари мос равишда қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$F'_x(x_0,y_0,z_0)\cdot(x-x_0)+F'_y(x_0,y_0,z_0)\cdot(y-y_0)+F'_z(x_0,y_0,z_0)\cdot(z-z_0)=0 \qquad \textbf{(11)}$$

$$\frac{x-x_0}{F'_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(x_0,y_0,z_0)} \qquad \textbf{(12)}$$

Мисоллар. 1) $x^2+2y-z^2-5=0$ *бир паллали гиперболоиднинг Р$_0$(2;-1;π1) нуқтасига ўтказилган уринма текислик ва нормал тенгламалари топилсин.*

◀ $F(x,y,z)=x^2+2y-z^2-5;\ x_0=2;\ y_0=-1;\ z_0=1.$

$$F'_x=2x,\ F'_y=4y,\ F'_z=-2z\Rightarrow\ F'_x(P_0)=4;\ F'_y(P_0)=-4;\ F'_z(P_0)=-2.$$

(11)-тенгликка кўра уринма текислик тенгламаси

$$4(x-2)-4(y+1)-2(z-1)=0 \text{ ёки } 2x-2y-z=5$$

(12)-тенгликка кўра эса нормал тенгламаси

$$\frac{x-4}{4}=\frac{y+1}{-4}=\frac{z-1}{-2} \text{ ёки } \frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-1}{-1}$$

бўлишини топамиз.▶

2) $z=x^2+\frac{y^2}{2}$ *эллиптик параболоиднинг* $P_0(1;-2;3)$ *нуқтасига ўтказилган уринма текислик ва нормал тенгламалари топилсин.*

◀ $F(x,y,z)=x^2+\frac{y^2}{2}-z;\ \ x_0=1;\ \ y_0=-2\ \ x_0=3\ \ \Rightarrow$

$\Rightarrow F'_x(P_0)=2x\big|_{P_0}=2;\ \ F_y{}'(P_0)=y\Big|_{P_0}=-2;\ \ F'_z(P_0)=-1.\Rightarrow$ Уринма текислик тенгламаси:

$$2(x-1)-2(y+2)-(z-3)=0\ \Rightarrow\ 2x-2y-z-3=0$$

Нормал тенгламаси:

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z-3}{-1}.$$ ▶

$gradF(P_0)$ вектор нормалнинг йўналтирувчи вектори бўлгани учун бирлик нормал вектор $\vec{n}$ қуйидаги формула ёрдамида топилади:

$$\vec{n}=\frac{gradF(P_0)}{|gradF(P_0)|}=\frac{F'_x(P_0)\cdot\vec{i}+F'_y(P_0)\cdot\vec{j}+F'_z(P_0)\cdot\vec{k}}{\sqrt{[F'_x(P_0)]^2+[F'_y(P_0)]^2+[F'_z(P_0)]^2}}.\ \ \textbf{(13)}$$

3-§. Вектор майдон.
Суюқликнинг оқими ҳақидаги масала.

22. **<u>4-таъриф.</u>** *Агар фазо ёки фазо қисмининг хар бир нуқтаси* M *га бирор* $\vec{\Phi}(M)$ *вектор мос қўйилса, у ҳолда берилган фазога* ***<u>вектор майдон</u>*** *дейилади.*

$\overline{\Phi}$ векторнинг координата ўқларига проекциялари P,Q,R лар M нуқта кординаталарининг функциялари бўлади:

$$P=P(x,y,z),\ \ Q=Q(x,y,z)\ \ R=R(x,y,z).$$

Демак,

$$\vec{\Phi}=\vec{\Phi}(M)=P(x,y,z)\cdot\vec{i}+Q(x,y,z)\cdot\vec{j}+R(x,y,z)\cdot\vec{k}$$

Хусусан, майдон текисликда берилган бўлса

$$\vec{\Phi}=P(x,y)\cdot\vec{i}+Q(x,y)\cdot\vec{j}$$

бўлади.

Энди **суюқликнинг оқими ҳақидаги масалани** кўрамиз.

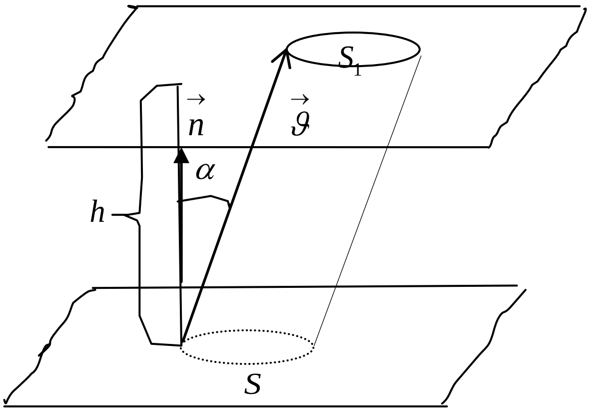
Суюқликнинг фазодаги оқими масалани қараймиз. Айтайлик, фазодаги $M(x,y,z)$ нуқтадан ўтувчи заррачанинг тезлиги $\vec{\vartheta}$ бўлиб, у фақат шу нуқтага боғлиқ ва вақтга боғлиқ бўлмасин. Бу шартни қаноатлантирувчи оқимга **стационар оқим** дейилади. Унда

$$\vec{\vartheta} = \vartheta_x(x,y,z)\cdot\vec{i} + \vartheta_y(x,y,z)\cdot\vec{j} + \vartheta_z(x,y,z)\cdot\vec{k}$$

бўлади, бу ерда $\vartheta_x, \vartheta_y, \vartheta_z$ лар тезликнинг координата ўқларига проекциялари. Суюқликнинг зичлигини $\rho = 1$ деб олиб, S сиртдан ўтувчи суюқликнинг оқимини, яъни бир вақт бирлиги оралигида шу сиртдан оқиб ўтувчи суюқлик оқимининг миқдорини ҳисоблаймиз.

1-ҳол. *Аввал хусусий ҳолни кўрамиз.*

Фараз қилайлик, $\vec{\vartheta}$ *тезлик барча нуқталарда бир хил ва* S *сирт текис шаклдан иборат бўлсин.*



4-чизма.

Бир вақт бирлиги оралиғида S сирт устидаги суюқлик заррачалари $\vec{\vartheta}$ вектор йўналиши бўйлаб, унинг узунлигига тенг узоқликдаги S_1 сирт устига ўтади. Бир вақт оралиғида S сиртдан ўтган суюқлик миқдорини $П$ десак, у сон жихатидан асоси S га ва ясовчиси $\vec{\vartheta}$ га тенг бўлган цилиндрнинг хажмига тенг бўлади. Бу цилиндрнинг баландлигини h десак,

$$П = S\cdot h$$

тенгликка эга бўламиз.

Айтайлик, $\vec{n} - S$ сиртнинг бирлик вектори, φ эса $\vec{n}$ ва $\vec{\vartheta}$ векторлар орасидаги бурчак бўлсин.

Унда

$$h = \left|\vec{\vartheta}\right|\cdot Cos\varphi = \left|\vec{\vartheta}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|\cdot Cos\varphi = (\vec{\vartheta}, \vec{n})$$

бўлади.

Демак,

$$\Pi = (\vec{\vartheta} \cdot \vec{n}) \cdot S \qquad \textbf{(14)}$$

тенглик ўринли экан.

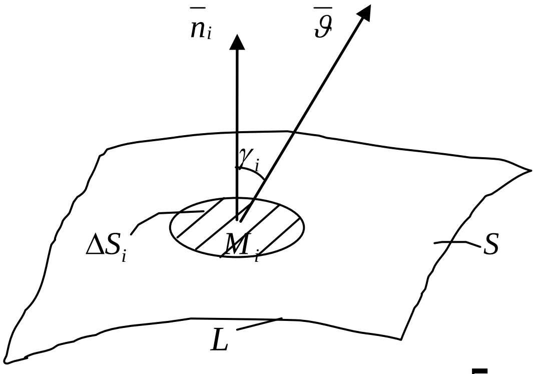
<u>2-ҳол</u>. *Энди умумий ҳолни кўрамиз. Айтайлик, фазода суюқликнинг тезлиги хосил қилган*

$$\vec{\vartheta} = \vartheta_x(x, y, z) \cdot \vec{i} + \vartheta_y(x, y, z) \cdot \vec{j} + \vartheta_z(x, y, z) \cdot \vec{k}$$

вектор майдон ва L *фазовий чизиқ билан чегараланган* S *сирт берилган бўлсин.* Фараз қилайлик, ҳар бир $M \in S$ нуқтада

$$\vec{n} = Cos\alpha \cdot \vec{i} + Cos\beta \cdot \vec{j} + Cos\gamma \cdot \vec{k}$$

бирлик нормал вектор аниқланган ва унинг йўналтирувчи косинуслари (x, y, z) координаталарнинг функцияси сифатида узлуксиз бўлсин. Бир вақт оралиғида шу S сиртдан оқиб ўтган суюқлик миқдори Π ни хисоблаймиз.



<u>5-чизма.</u>

Бу ҳолда $\bar{\vartheta}$ тезлик нуқтага боғлиқ равишда ўзгаргани ва S сирт текис шаклдан иборат бўлмаганлиги сабабли (14)-формулани тўғридан тўғри қўллаб бўлмайди.

Умумий ҳолда Π ни хисоблаш учун қуйидаги ишларни бажарамиз:

S сиртни ихтиёрий усул билан n та кичик

$$\Delta S_1, \Delta S_2, \ldots \Delta S_n$$

сиртларга ажратамиз ва хар бир ΔS_i да ихтиёрий $M_i(x_i, y_i, z_i)$ нуқта олиб, M_i нуқтадаги S сиртга ўтказилган бирлик нормал векторни

n_i $(\vec{n}_i = Cos\alpha_i \cdot \vec{i} + Cos\beta_i \cdot \vec{j} + Cos\gamma_i \cdot \vec{k})$ деб белгилаймиз. Унда (14) га кўра

$$П = \sum_{i=1}^{n} \Delta П_i \approx \sum_{i=1}^{n} (\overline{\vartheta}_i \cdot \overline{n}_i) \cdot \Delta S_i \qquad \textbf{(15)}$$

бўлади. Бу ерда

$$\overrightarrow{\vartheta_i} = \vartheta_x(x_i, y_i, z_i) \cdot \vec{i} + \vartheta_y(x_i, y_i, z_i) \cdot \vec{j} + \vartheta_z(x_i, y_i, z_i) \cdot \vec{k}$$

ва $\Delta П_i - \Delta S_i$ сиртдан ўтган суюқлик оқими миқдори. Агар $\lambda = \max\limits_{i=\overline{1,n}} \ diam(\Delta S_i)$ деб белгиласак, қуйидаги тенгликларни ҳосил қиламиз:

$$П = \ell im_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} (\overrightarrow{\vartheta_i} \cdot \overrightarrow{n_i}) \Delta S_i = \ell im_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \left[\vartheta_x(x_i y_i z_i) \cdot Cos\alpha_i + \right.$$

$$\left. \vartheta_y(x_i y_i z_i) \cdot Cos\beta_i + \vartheta_z(x_i y_i z_i) \cdot Cos\gamma \ \right] \cdot \Delta S_i =$$

$$= \iint_S (\vartheta_x Cos\alpha + \vartheta_y Cos\beta + \vartheta_z Cos\gamma) ds = \iint_S (\vec{\vartheta} \cdot \vec{n}) dS \ .$$

Шундай қилиб, S сиртдан оқиб ўтган суюқлик миқдори $П$ биринчи тур сирт интеграли ёрдамида ҳисобланар экан:

$$П = \iint_S (\vec{\vartheta} \cdot \vec{n}) dS = \iint_S (\vartheta_x Cos\alpha + \vartheta_y Cos\beta + \vartheta_z Cos\gamma) ds \ . \quad \textbf{(16)}$$

4-§. Вектор майдоннинг оқими. Мисоллар.

23. Вектор майдоннинг оқими.

Айтайлик,

$$\vec{Ф} = P(x, y, z) \cdot \vec{i} + Q(x, y, z) \cdot \vec{j} + R(x, y, z) \cdot \vec{j}$$

вектор майдон ва S сирт берилган бўлсин. Фараз қилайлик, S сиртнинг ҳар бир нуқтасида

$$\vec{n} = \cos\alpha \cdot \vec{i} + \cos\beta \cdot \vec{j} + \cos\gamma \cdot \vec{k}$$

бирлик нормал вектор аниқланган ва йўналтирувчи косинуслар (x, y, z) координаталарнинг функцияси сифатида узлуксиз бўлсин. Олдинги мавзудаги (16)-формуладан фойдаланиб қуйидаги таърифни берамиз.

5-таъриф. *Ушбу*

$$П = \iint_S (\vec{Ф} \cdot \vec{n}) dS . \iint_S (PCos\alpha + QCos\beta + RCos\gamma) ds \qquad \textbf{(17)}$$

сирт интегралига $\vec{Ф}$ ***вектор майдоннинг оқими дейилади.***

<u>Изох</u>. *Агар* $S=\{z=\varphi(x,y)\}$ *бўлса ва* $f(x,y,z)=\overline{\Phi}\cdot\overline{n}$ *белгилашни киритсак, унда (17)-сирт интеграли*

$$\iint\limits_{S} f(x,y,z)dS=\iint\limits_{D_{xy}} f[x,y,\varphi(x,y)]\cdot\sqrt{1+\left[\varphi'_x(x,y)\right]^2+\left[\varphi'_y(x,y)\right]^2}dxdy \qquad \textbf{(18)}$$

формуладан фойдаланиш ёрдамида икки каррали интегралга келтириш йўли билан ҳисобланади. Бу ерда $D_{xy}-S$ *сиртнинг* Oxy *текисликдаги проекцияси.*

Хусусий ҳолда, $\vec{\Phi}=R(x,y,z)\cdot\vec{k}$ бўлиб, $\gamma-$ўткир бурчак бўлса, унда

$$\Pi\overset{(17)}{=}\iint\limits_{S}R(x,y,z)Cos\gamma ds=((Cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{1+(\varphi'_x)^2+(\varphi'_y)^2}}$$

ва $ds=\sqrt{1+(\varphi'_x)^2+(\varphi'_y)^2}dxdy))=\iint\limits_{Dxy}R\left[x,y,\varphi(x,y)\right]dxdy$ **(19)**

бўлади. Агар γ-ўтмас бурчак бўлса, унда $Cos\gamma<0$ бўлиб

$$\Pi=-\iint\limits_{D_{xy}}R\left[x,y,\varphi(x,y)\right]dy \qquad \textbf{(20)}$$

тенглик ўринли бўлади.

24. Мисоллар.

<u>1-мисол</u>. *Агар S:* $z=x^2+y^2$ *айланма параболоиднинг* $x^2+y^2=4$ *цилиндр билан қирқилган қисмидан иборат сирт ва*

$$\vec{\Phi}=xy^2\cdot\vec{i}+\frac{yz}{2}\cdot\vec{j}+x^2z\cdot\vec{k}$$

вектор функция берилган бўлса, вектор майдоннинг оқими Π *топилсин (бунда* γ *- ўткир бурчак бўлсин*).

◀ $S:z=\varphi(x,y)=x^2+y^2;\qquad D_{xy}=\{x^2+y^2\le 4\}$.

Бизга маълумки,

$$\vec{n}=\frac{-\varphi'_x\cdot\vec{i}+\varphi'_y\cdot\vec{j}+\vec{k}}{\sqrt{1+(\varphi'_x)^2+(\varphi'_y)^2}}=\frac{-2x\cdot\vec{i}-2y\cdot\vec{j}+\vec{k}}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}.$$

(17)-формуладан фойдаланиб топамиз:

$$\Pi=\iint\limits_{S}(\vec{\Phi}\cdot\vec{n})dS.\iint\limits_{S}\frac{-2x^2y^2-y^2z+x^2z}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}})ds\overset{(18)}{=}$$

$$((ds=\sqrt{1+(\varphi'_x)^2+(\varphi'_y)^2}dxdy=\sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy))=$$

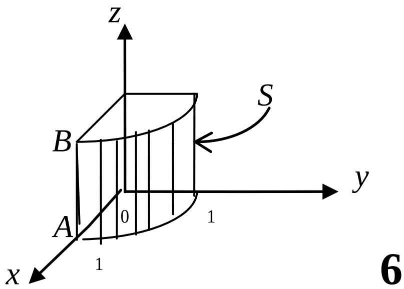
$$=\iint\limits_{x^2+y^2\le 4}\frac{-2x^2y^2-y^2(x^2+y^2)+x^2(x^2+y^2)}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}\cdot\sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy=$$

$$= \iint\limits_{x^2+y^2\le 4}\left[-2x^2y^2+(x^2+y^2)(x^2-y^2)\right]\,dxdy \;= \Bigg(\Bigg(\begin{matrix} x=r\cos\varphi\\ y=r\sin\varphi\end{matrix}\Bigg\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow |I| = \Bigg(r,\ \begin{matrix}0\le\varphi\le 2\pi\\ 0\le r\le 2\end{matrix}\Bigg)\Bigg) = \int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{2}\Big[-2r^2\cos^2\varphi\cdot\sin^2\varphi+$$

$$+r^4(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)\Big]rdr = \int_0^{2\pi}\Big(-\frac{\sin^2 2\varphi}{2}+\cos 2\varphi\Big)d\varphi\int_0^{2\pi} r^5dr = -\frac{16\pi}{3}$$ ▶

2-мисол. $\vec{\Phi}=yz\cdot\vec{j}$ *ва* $S: x^2+y^2=1$ *сиртнинг биринчи октантдаги* $x=0,\ y=0,\ z=1$ *текисликлар билан чегараланган қисми ҳамда* β*–ўткир бурчак бўлса, вектор майдоннинг оқими* Π *топилсин.*



6-чизма.

◀Цилиндрик сиртнинг бирлик нормал векторини топамиз. Бунинг учун сиртнинг тенгламасини

$$x^2+y^2-1=0$$

деб оламиз ва $F(x,y,z)=x^2+y^2-1$ деб белгилаймиз.

Унда қуйидагига эга бўламиз:

$$n=\frac{grad\,\vec{F}}{\left|grad\,\vec{F}\right|}=\frac{F'_x\cdot\bar{i}+F'_y\cdot\vec{j}+F'_z\cdot\vec{k}}{\sqrt{(F'_x)^2+(F'_y)^2+(F'_z)^2}}=\frac{2x\cdot\vec{i}+2y\cdot\vec{j}}{\sqrt{4x^2+4y^2}}=$$

$$\frac{x\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}}{\sqrt{x^2+y^2}}=((S\ \text{сиртда}\ x^2+y^2=1))=x\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}.$$

Энди (17)-формуладан фойдаланамиз:

$$\Pi=\iint\limits_S(\vec{\Phi}\cdot\vec{n})dS=\iint\limits_S y^2zdS=((S: y=\varphi(x,z)=\sqrt{1-x^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow dS=\sqrt{1+(\varphi'_x)^2+(\varphi'_z)^2}\,dxdz=\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}dxdz=\frac{dxdz}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$D_{xz}=\{(x,z):\ \ 0\le x\le 1;\ \ 0\le z\le 1;\}))=\iint\limits_{D_{xz}}(\sqrt{1-x^2})^2z\frac{dxdz}{\sqrt{1-x^2}}=$$

$$= \iint_{D_{xz}} (z\sqrt{1-x^2})dxdz = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx\int_0^1 zdz = \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx =$$

$$= \frac{1}{4}(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{8}) . \blacktriangleright$$

5-§. Вектор майдоннинг дивергенцияси. Остроградский – Гаусс формуласининг вектор кўриниши.

25. Айтайлик, ёпиқ s сирт билан чегараланган v соҳа берилган бўлсин. Математик анализнинг умумий курсидан бизга ушбу Остроградский–Гаусс теоремаси маълум.

3-теорема. *Агар* $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ *функцияларнинг ўзи ва уларнинг биринчи тартибли хусусий хосилалари ёпиқ* v *соҳада узлуксиз бўлса, у ҳолда қуйидаги формула ўринли бўлади:*

$$\oiint_S [P(x,y,z)\cdot\cos\alpha + Q(x,y,z)\cdot\cos\beta + R(x,y,z)\cdot\cos\gamma]dS = \iiint_V (\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z})dV \qquad \textbf{(21)}$$

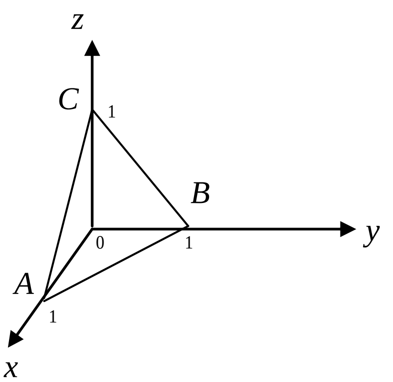
Бу тенгликда $\vec{n}$ *бирлик вектор* s *сиртнинг ташқи томонида олинган.*

Бизга маълумки, (21)-интеграл вектор майдоннинг оқимига тенг бўлиб, оқим ҳам s сиртнинг ташқи томони бўйлаб олинган.

Мисол. *Агар* s *сирт* $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $y=0$ *текисликлар билан чегараланган пирамиданинг ташқи томони бўлса, унда Остроградский–Гаусс формуласидан фойдаланиб*

$$\vec{\Phi} = 3x\cdot\vec{i} + 2y\cdot\vec{j} - 4z\cdot\vec{k}$$

вектор майдоннинг оқими хисоблансин.



7-чизма.

$$\vec{\Phi} = x\cdot\vec{i} + 2y\cdot\vec{j} - 4z\cdot\vec{k} = P(x,y,z)\cdot\vec{i} + Q(x,y,z)\cdot\vec{j} + R(x,y,z)\cdot\vec{k} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ P = 3x; \ Q = 2y; \ R = -4z. \ \Rightarrow \ \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} = 3 + 2 - 4 = 1.$$

Бу тенглик ва Остроградский–Гаусс формуласидан фойдаланиб топамиз:

$$\Pi = \iint\limits_S (3x\cos\alpha + 2y\cos\beta - 4z\cos\gamma)dS \overset{(21)}{=} \iiint\limits_V dV = V = \frac{1}{3}\cdot S_{\Delta AOB}\cdot OC = \frac{1}{3}\cdot\frac{1\cdot 1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{6}. \blacktriangleright$$

Энди Остроградский–Гаусс формуласининг вектор кўринишини келтирамиз.

Айтайлик,

$$\vec{\Phi} = P(x,y,z)\cdot\vec{i} + Q(x,y,z)\cdot\vec{j} + R(x,y,z)\cdot\vec{k}$$

вектор ёрдамида аниқланган вектор майдон берилган бўлсин. Унда маълумки,

$$\Pi = \iint\limits_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS = \iint\limits_S (\vec{\Phi}\cdot\vec{n})dS$$

тенглик ўринли. Бу тенгликдан кўринадики, Остроградский–Гаусс формуласининг чап томонида турган ифода координаталар системасига боғлиқ бўлмаган ҳолда маънога эга.

Остроградский–Гаусс формуласининг ўнг томонидаги ифодани кўрамиз. Фараз қилайлик,

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} = \varphi(x,y,z)$$

бўлсин.

Бу функциянинг координаталар системасининг танланишига боғлиқ эмаслигини кўрсатамиз. Ихтиёрий $M(x,y,z)\in V$ нуқта олиб Остроградский-Гаусс формуласидан фойдаланамиз:

$\iint\limits_x (\vec{\Phi}\cdot\vec{n})dS = \iiint\limits_V \varphi(x,y,z)dV$=((ўрта қиймат ҳақидаги теоремага кўра шундай $M_0(x_0,y_0,z_0)\in V$ нуқта топиладики))=$\varphi(M_0)\cdot V \Rightarrow$

$$\varphi(M_0) = \frac{\iint\limits_S (\vec{\Phi}\cdot\vec{n})dS}{V} \ \Rightarrow \ \underset{V\to 0}{\ell im}(M_0) = \underset{V\to 0}{\ell im}\frac{\iint\limits_S (\vec{\Phi}\cdot\vec{n})dS}{V}.$$

Табиийки, $V\to 0 \Rightarrow M_0 \to M$.

$$\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial P}{\partial z} \in C\{M\} \ \Rightarrow \underset{V\to 0}{\ell im}\,\varphi(M_0) = \underset{V\to 0}{\ell im}\,\varphi(M) = \varphi(x,y,z) = = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}.$$

Демак, $M(x,y,z)$ нуқтада қуйидаги тенглик ўринли

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial z}=\lim_{V\to 0}\frac{\iint\limits_{S}(\vec{\Phi}\cdot\vec{n})dS}{V} \qquad \textbf{(22)}$$

(22)-тенгликнинг ўнг томони координаталар системасининг танланишига боғлиқ бўлмаган ҳолда маънога эга бўлгани учун, унинг чап томони, яъни $\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial z}$ ҳам координаталар системасига боглиқ бўлмаган ҳолда битта қийматни қабул қилади.

Майдонлар назариясида мухим аҳамиятга эга бўлган қуйидаги таърифни келтирамиз.

<u>6-таъриф</u>. *Ушбу*

$$\lim_{V\to 0}\frac{\Pi}{V}$$

лимитга $\vec{\Phi}=P(x,y,z)\cdot\vec{i}+Q(x,y,z)\cdot\vec{j}+R(x,y,z)\cdot\vec{k}$ *вектор майдоннинг М нуқтадаги* ***дивергенцияси*** *деб аталади ҳамда у* $\mathrm{div}\,\vec{\Phi}$ *каби белгиланади.*

Бу лимитда $V\to 0$да V соҳа M нуқтага тортилади.

Шундай қилиб,

$$div\ \vec{\Phi}:=\lim_{V\to 0}\frac{\Pi}{V} \qquad \textbf{(23)}$$

Дивергенция скаляр катталик бўлиб, (22)-тенгликка кўра

$$div\ \vec{\Phi}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z} \qquad \textbf{(24)}$$

бўлади.

Дивергенция тушунчасидан фойдаланиб, Остроградский–Гаусс формуласини ушбу вектор кўринишида ёзиш мумкин:

$$\iint\limits_{(S)}(\vec{\Phi}\cdot\vec{n})ds=\iiint\limits_{V} div\,\vec{\Phi}\cdot dV \qquad \textbf{(25)}$$

(25)-тенгликнинг физик маъносини аниқлаймиз: $\vec{n}$ тезлик билан харакатланаётган суюқлик хосил қилган вектор майдонни қараймиз (суюқликнинг зичлиги $\rho=1$ бўлсин). Ёпик S сирт билан чегараланган W соҳани оламиз. Бу ҳол учун (25)-формула ушбу кўринишни олади:

$$\iint\limits_{S}(\vec{\vartheta}\cdot\vec{n})dS=\iiint\limits_{W} div\,\vec{\vartheta}\,dW \qquad \textbf{(26)}$$

Бизга маълумки, $\iint\limits_{S} (\vec{\vartheta}\cdot\vec{n})dS$ оқим бир вақт оралиғида S сиртдан оқиб ўтувчи суюқлик миқдорини билдиради. $\Rightarrow \iint\limits_{(S)} (\vec{\vartheta}\cdot\vec{n})S > 0$ бўлса, унда W соҳадан оқиб чиқган суюқлик миқдори унга оқиб кирган суюқлик миқдоридан кўп бўлади. Агар $\iint\limits_{S} (\vec{\vartheta}\cdot\vec{n})dS < 0$ бўлса эса акси бўлади.

Фараз қилайлик, бирор M нуқтада $\vec{\vartheta}$ тезликнинг дивергенцияси мусбат, яъни $div\ \vec{\vartheta} > 0$ бўлсин. Хусусий хосилаларнинг узлуксизлигига кўра маркази шу M нуқтада бўлган шундай W шар $(\partial W = S)$ топиладики, шу шарнинг барча нуқталарида $div\ \vec{\vartheta} > 0$ бўлади.

$$\iiint\limits_{V} \mathrm{div}\,\vec{\vartheta}\cdot \mathrm{dw} > 0 \overset{(26)}{\Rightarrow} \iint\limits_{S} (\vec{\vartheta}\cdot\vec{n})dS > 0,$$

яъни W шарнинг чегараси бўлган S сферадан оқиб чиққан суюқлик миқдори унга оқиб кирган суюқлик миқдоридан кўп бўлади. Шунинг учун M нуқтани **манба** ёки **тарқатувчи (источник)** дейилади.

Агар $div\ \vec{\vartheta} < 0$ бўлса, унда юқоридагининг акси бўлиб, S сферадан кўпрок суюқлик оқиб киради. Шунинг учун M нуқтани **йиғувчи (сток)** деб аталади.

Ва ниҳоят, М нуқтада $div\ \vec{\vartheta} = 0$ бўлса, унда (26)-тенгликка кўра оқим миқдори 0 га тенг бўлиб, сиртдан қанча суюқлик оқиб чиқса, шунча суюқлик оқиб қиради.

Ҳар бир нуқтасида $div\ \vec{\Phi} = 0$ бўлган вектор майдонга **соленидал** (ёки **трубасимон**) вектор майдон дейилади.

6-§. Ротор, циркуляция ва Стокс формуласи.

26. Бизга маълумки, Стокс формуласи фазовий L эгри чизиқ бўйича олинган эгри чизиқли интегрални шу эгри чизиқ билан чегараланган S сирт бўйича олинган сирт интеграли ёрдамида ҳисоблаш имконини беради.

4-теорема. *Агар $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ функцияларнинг ўзи ва уларнинг 1-тартибли хусусий хосилалари s сиртда узлуксиз бўлса, унда ушбу*

$$\oint_L Pdx+Qdy+Rdz=\iint_S\left[(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})\cos\alpha+\right.$$

$$\left.+(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x})\cos\beta+(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})\cos\gamma\right]dS \qquad \mathbf{(27)}$$

***Стокс формуласи** ўринли бўлади.*

Айтайлик,

$$\vec{\Phi}=P(x,y,z)\cdot\vec{i}+Q(x,y,z)\cdot\vec{j}+R(x,y,z)\cdot\vec{k}$$

вектор майдон берилган бўлсин.

7- таъриф. *Ушбу*

$$rot\ \vec{\Phi}:=(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})\,\vec{i}+(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x})\,\vec{j}+(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})\,\vec{k}$$

*векторга вектор майдоннинг **ротори** (ёки **уюрмаси**) дейилади.*

(28)–тенгликни эслаб қолиш осонроқ бўлган қуйидаги кўринишда ҳам ёзиш мумкин:

$$rot\ \vec{\Phi}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix} \qquad \mathbf{(29)}$$

Аввалги мавзуда кўрсатилганига ўхшаш $rot\ \vec{\Phi}$нинг ҳам кординаталар системасининг танланишига боғлиқ бўлмай, фақат берилган вектор майдон ёрдамида аниқланишини кўрсатиш мумкин. Берилган $\vec{\Phi}$ вектор майдонга янги вектор майдон $rot\ \vec{\Phi}$-унинг уюрмалари майдони мос келади.

8-таъриф. *Ушбу*

$$\oint P(x,y,z)\cdot\vec{i}+Q(x,y,z)\cdot\vec{j}+R(x,y,z)dz$$

эгри чизиқли интегралга

$$\vec{\Phi}=P(x,y,z)\cdot\vec{i}+Q(x,y,z)\cdot\vec{j}+R(x,y,z)\cdot\vec{k}$$

*вектор майдоннинг L ёпиқ контур бўйича олинган **циркуляцияси** деб аталади ва $\oint_L \vec{\Phi}d\vec{r}$ каби белгиланади.*

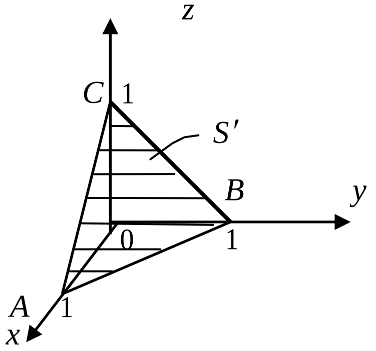
7-таърифдан келиб чиқадики, Стокс формуласининг ўнг томонидаги ифода векторнинг оқимига тенг

$\iint\limits_{S}\left[(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})\cos\alpha + (\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x})\cos\beta + (\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})\cos\gamma \right] = \iint\limits_{(S)} (rot\ \vec{\Phi}\cdot\vec{n})dS$. Чап томондаги ифода эса $\vec{\Phi}$ векторнинг $\oint\limits_{L}\vec{\Phi}d\vec{r}$ циркуляциясига тенг.

Демак, Стокс формуласи қуйидаги вектор кўринишига эга экан:

$$\oint\limits_{L}\overline{\Phi}\cdot d\overline{r} = \iint\limits_{(s)}(rot\overline{\Phi}\cdot\overline{n})dS. \qquad \textbf{(30)}$$

Мисол. $\vec{\Phi} = y^2\cdot\vec{i} + z^2\cdot\vec{j} + x^2\cdot\vec{k}$ *вектор майдоннинг учлари* $A(1;0;0)$, $B(0;1;0)$, $C(0;0;1)$ *нуқталарда бўлган учбурчакнинг чегараси* $ABCA$ *бўйича олинган циркуляциясини Стокс формуласидан фойдаланиб ҳисоблансин.*



8-чизма.

(29)-формуладан фойдаланиб топамиз:

$$rot\ \vec{\Phi} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 & z^2 & x^2 \end{vmatrix} = -2z\cdot\vec{i} - 2x\cdot\vec{j} - 2y\cdot\vec{k}.$$

АВС учбурчак ётган текислик тенгламаси $x+y+z=1$ бўлган учун бирлик нормал вектор ушбу

$$\vec{n} = \frac{\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}}{\sqrt{3}}$$

кўринишга эга бўлади. $\Rightarrow$ $(rot\ \vec{\Phi}\cdot\vec{n}) = -\frac{2}{\sqrt{3}}(x+y+z)$.

(30)-формуладан фойдаланиб, $\vec{\Phi}$ векторнинг циркуляциясини топамиз:

$$\oint\limits_{ABCA}\vec{\Phi}\cdot d\vec{r} = \iint\limits_{S}(rot\ \vec{\Phi}\cdot\vec{n})ds = -\frac{2}{\sqrt{3}}\iint\limits_{S}(x+y+z)dS =$$

$=((S: z = 1-x-y;\ 0\le x\le 1;\ 0\le y\le 1-x \Rightarrow$

$dS = \sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}dxdy = \sqrt{1+1+1}dxdy = \sqrt{3}dxdy$))=

$$=-\frac{2}{\sqrt{3}}\iint_{D_{xy}}(x+y+1-x-y)\cdot\sqrt{3}dxdy=-2\iint_{D_{xy}}dxdy=-2\cdot\frac{1\cdot1}{2}=-1.$$ ▶

Бизга математик анализнинг умумий курсидан маълумки,

$$\int_L Pdx+Qdy+Rdz \qquad \textbf{(31)}$$

эгри чизиқли интегралнинг интеграллаш йўлига боғлиқ бўлмаслиги учун ушбу

$$\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z};\qquad \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x};\qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y} \qquad \textbf{(32)}$$

тенгликларнинг бажарилиши зарур ва етарли.

(28) ва (32)-тенгликлардан қуйидаги теорема келиб чиқади.

5-теорема. (31)-*интегралнинг қиймати интеграллаш йўлига боғлиқ бўлмаслиги учун*

$$rot\ \vec{\Phi}=0$$

тенгликнинг бажарилиш зарур ва етарли.

7-§. Потенциал майдон. Гамильтон оператори.

27. Потенциал майдон.

9-таъриф. *Агар*

$$\vec{\Phi}=P(x,y,z)\cdot\vec{i}+Q(x,y,z)\cdot\vec{j}\cdot R(x,y,z)\cdot\vec{k}$$

вектор майдон учун $rot\ \vec{\Phi}=0$ *бўлса, унда берилган майдон* ***уюрмасиз майдон*** *дейилади.*

$$rot\ \vec{\Phi}=0\Rightarrow\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z};\qquad \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x};\qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}.\Rightarrow$$

$\Rightarrow rot\ \vec{\Phi}=0$ бўлган соҳа бир боғламли соҳа бўлса, унда $Pdx+Qdy+Rdz$ ифода $U(x,y,z)$ бошланғич функцияга эга, яъни

$$Pdx+Qdy+Rdz=dU$$

тенглик ўринли бўлади.

Иккинчи томондан,

$$dU=\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy+\frac{\partial U}{\partial z}dz$$

бўлгани учун

$$P=\frac{\partial U}{\partial x},\qquad Q=\frac{\partial U}{\partial y},\qquad R=\frac{\partial U}{\partial z}$$

бўлади. Бу тенглик ва

$$gradU\frac{\partial U}{\partial x}\cdot \vec{i}+\frac{\partial U}{\partial y}\cdot \vec{j}+\frac{\partial U}{\partial z}\cdot \vec{k}$$

эканлигидан

$$gradU=P\cdot \vec{i}+Q\cdot \vec{j}+R\cdot \vec{k}$$

тенгликни ҳосил қиламиз. *Демак, уюрмасиз майдон бирор функцияниинг градиент майдони бўлар экан:*

$$\vec{\Phi}=gradU\,.$$

10-таъриф. *Градиенти $\vec{\Phi}$ векторга тенг бўлган $U(x,y,z)$ функцияга $\vec{\Phi}$ майдоннинг* ***потенциал функцияси*** *(ёки* ***потенциали*** *) дейилади. Потенциал функцияга эга бўлган майдон эса* ***потенциал майдон*** *деб аталади.*

6-теорема. *Ихтиёрий бир боғламли уюрмасиз майдон потенциал майдон бўлади ва аксинча.*

◄ $\Rightarrow$ юқорида исботланди.

$\Leftarrow$ Ихтиёрий майдон уюрмасиз майдон бўлишини кўрсатамиз. Бунинг учун

$$rot\ \ gradU=0$$

эканлигини кўрсатиш кифоя.

Дарҳақиқат, шартга кўра

$$\vec{\Phi}=P\cdot \vec{i}+Q\cdot \vec{j}+R\cdot \vec{k}=gradU=\frac{\partial U}{\partial x}\cdot \vec{i}+\frac{\partial U}{\partial y}\cdot \vec{j}+\frac{\partial U}{\partial z}\cdot \vec{k}$$

тенглик ўринли. $\Rightarrow$

$$P=\frac{\partial U}{\partial x},\qquad Q=\frac{\partial U}{\partial y},\qquad R=\frac{\partial U}{\partial z}$$

$rot\ \ gradU=0$ эканлигни кўрсатиш учун

$$\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z},\qquad \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x},\qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}\qquad\qquad \textbf{(33)}$$

тенгликларни бажарилишини кўрсатиш лозим.

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial R}{\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial z}(\dfrac{\partial U}{\partial z})=\dfrac{\partial^2 U}{\partial y\partial z}\\ \dfrac{\partial Q}{\partial z}=\dfrac{\partial}{\partial z}(\dfrac{\partial U}{\partial y})=\dfrac{\partial^2 U}{\partial z\partial y}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z}.$$

(33) нинг қолган тенгликлари хам шу каби кўрсатилади.►

28. Гамильтон оператори.

Майдонлар назариясининг тушунчалари - градиент, дивергенция ва ротор тушунчалари билан биз олдинги мавзуларда танишдик. Агар Гамильтон оператори деб аталмиш белгидан фойдалансак, бу катталикларни янада қисқароқ ёзиш имконияти пайдо бўлади.

<u>11-таъриф.</u> *Ушбу*

$$\vec{\nabla}=\frac{\partial}{\partial x}\cdot\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\cdot\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\cdot\vec{k} \qquad \textbf{(34)}$$

белгига ***Гамильтон оператори*** *ёки* ***набла оператори*** *деб аталади.*

Бу операторни шартли равишда вектор деб қараб амалларни бажарамиз.

1^0. Фараз қилайлик, $u(x,y,z)$–скаляр функция бўлсин.

$$\vec{\nabla}u=\left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\cdot\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\cdot\vec{k}\right)u=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\vec{k}\,. \Rightarrow$$

$$\vec{\nabla}u=grad u\,. \qquad \textbf{(35)}$$

Шундай қилиб, $\vec{\nabla}$ *векторни формал равишда скаляр функцияга кўпайтирилса, унда шу функциянинг градиенти ҳосил бўлади.*

2^0. $\vec{\nabla}$ вектор билан $\vec{\Phi}=P\cdot\vec{i}+Q\cdot\vec{j}+R\cdot\vec{k}$ вектор функциянинг скаляр кўпайтмаси деганда ушбу катталик тушунилади:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\Phi}=\left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\cdot\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\cdot\vec{k}+\right)\cdot\left(P\cdot\vec{i}+Q\cdot\vec{j}+R\cdot\vec{k}\right)=\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}\Rightarrow$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\Phi}=div\vec{\Phi} \qquad \textbf{(36)}$$

3^0. Нихоят, $\vec{\nabla}$ вектор билан $\vec{\Phi}=P\cdot\vec{i}+Q\cdot\vec{j}+R\cdot\vec{k}$ вектор функциянинг вектор кўпайтмасини кўрамиз:

$$\vec{\nabla}\times\vec{\Phi}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cdot\vec{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cdot\vec{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cdot\vec{k}\Rightarrow$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{\Phi}=rot\vec{\Phi}\,.$$

Назорат саволлари.

1. Скаляр майдон ва уни геометрик ифодалаш.
2. Йўналиш бўйича ҳосила, мисоллар.
3. Скаляр майдоннинг градиенти.
4. Градиентнинг геометрик маъноси.
5. Сиртнинг уринма текислиги ва нормали.

6. Ушбу $x^2+2y^2-z^2-5=0$ бир паллали гиперболоиднинг $P_0(1;-2;3)$ нуқтасига ўтказилган уринма текислик ва нормал тенгламалари топилсин.

7. Ушбу $z=x^2+\frac{y^2}{2}$ эллиптик параболоиднинг $P_0(2;-1;1)$ нуқтасига ўтказилган уринма текислик ва нормал тенгламалари топилсин.

8. Вектор майдон тушунчаси.

9. Суюқликнинг оқими ҳақидаги масала.

10. Вектор майдоннинг оқими ва уни хисоблаш.

11. Агар $S: z=x^2+y^2$ айланма параболоиднинг $x^2+y^2=4$ цилиндр билан қирқилган кисмидан иборат сирт ва

$$\vec{\Phi}=xy^2\cdot\vec{i}+\frac{yz}{2}\cdot\vec{j}+x^2z\cdot\vec{k}$$

вектор функция берилган бўлса, унда вектор майдоннинг оқими $\varPi$ топилсин (бунда $\gamma-$ўткир бурчак бўлсин).

12. Агар $\vec{\Phi}=yz\cdot\vec{j}$ ва $S: x^2+y^2=1$ сиртнинг биринчи октантдаги $x=0$, $y=0$, $z=0$, $z=1$ текисликлар билан чегараланган қисми хамда $\beta-$ўткир бурчак бўлса, вектор майдоннинг оқими $\varPi$ топилсин.

13. Агар S сирт $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ текисликлар билан чегараланган пирамиданинг ташқи томони бўлса, унда Остроградский-Гаусс формуласидан фойдаланиб

$$\vec{\Phi}=3x\cdot\vec{i}+2y\cdot\vec{j}-4z\cdot\vec{k}$$

векторнинг майдоннинг оқими хисоблансин.

14. Векторнинг майдон дивергенцияси.

15. Остроградский-Гаусс формуласининг вектор кўриниши.

16. $\iint\limits_S(\vec{\Phi}\cdot\vec{n})dS=\iiint\limits_V div\vec{\Phi}\cdot dV$ тенгликнинг физик маъноси (тарқатувчи. йиғувчи, соленоидал вектор майдон тушунчалари).

17. Ротор ва циркуляция тушунчалари.

18. Стокс формуласининг вектор кўриниши.

19. **Ушбу**

$$\vec{\Phi} = y \cdot \vec{i} + z^2 \cdot \vec{j} - x^2 \cdot \vec{k}$$

вектор майдоннинг учлари $A(1;0;0)$**,** $B(0;1;0)$**,** $C(0;0;1)$ **нуқталарда бўлган учбурчакнинг чегараси** $ABCA$ **бўйича олинган циркуляциясини Стокс формуласидан фойдаланиб ҳисоблансин.**

20. **Потенциал майдон тушунчаси.**
21. **Ихтиёрий майдоннинг бир боғламли уюрмасиз майдон бўлиши учун унинг потенциал майдон бўлиши зарур ва етарли эканлиги исботлансин.**
22. **Гамильтон оператори ва унинг хоссалари.**

IV-БОБ.
Ортогонал функциялар ва қаторлар.

Ортонормал системалар.
Грамм детерминанти.
Тригонометрик системалар.
Лежандр кўпҳадлари.
Ортогоналлаштириш.
Фурье қаторлари.
Тўла ортогонал системалар.
Парсеваль тенглиги.
Ёпик ортогонал системалар.
Сферик функциялар.
Сферик функцияларнинг ошкор кўринишлари.
Сферик функцияларнинг ортогоналлик хоссалари.

Ушбу бобда биз ортонормал системалар, математик физика тенгламаларини интеграллашда учрайдиган махсус функциялар синфларидан бири-сферик функциялар синфини ўрганиш билан шуғулланамиз.

1-§. Ортонормал системалар. Мисоллар (тригонометрик системалар ва Лежандр кўпҳадлари).

29. Ортонормал системалар.

Чизиқли фазо ва скаляр кўпайтма тушунчалари функционал анализнинг умумий курсидан маълум.

1-таъриф. *Скаляр кўпайтма киритилган ҳар қандай чизиқли фазога **Гильбертолди фазоси** дейилади.*

Айтайлик. R- Гильбертолди фазоси берилган бўлсин.

2-таъриф. *Агар $x \in R$ ва $y \in R$ элементлар учун $(x, y) = 0$ тенглик бажарилса, у ҳолда x ва y элементлар **ортогонал дейилади** ва $x \perp y$ каби белгиланади.*

3-таъриф. *Агар R фазонинг $\{x_\alpha\}$, $x \in R$ (A-индексларнинг бирор тўплами) элементлари тўплами берилган бўлиб, ундаги* *ихтиёрий 2 та элементлар ўзаро ортогонал бўлса, унда* $\{x_\alpha\}$ *система* ***ортогонал система*** *дейилади. Ундан ташқари ҳар бир элементнинг нормаси 1 га тенг, яъни* $\|x_\alpha\|=1,\ \alpha\in A$, *бўлса. Унда* $\{x_\alpha\}$*-**<u>ортонормал система</u>** деб аталади.*

Агар $\{x_\alpha,\ \alpha\in A\}$ система ортогонал ва барча $\alpha\in A$ лар учун $x_\alpha\neq 0$ бўлса, унда бу системани **«нормаллаштириш»** мумкин.

◄Дархақиқат, берилган системанинг ҳар бир элементини унинг нормасига бўлиш ёрдамида янги ортонормаллашган

$$\left\{\frac{x_\alpha}{\|x_\alpha\|},\ \alpha\in A\right\}$$

системани ҳосил қиламиз.►

<u>1-лемма.</u> *Агар* R *фазонинг* $\{x_\alpha,\alpha\in A\}$ *(*A*-индексларнинг бирор тўплами) элементлар системаси ортогонал бўлиб, барча* $\alpha\in A$ *лар учун* $x_\alpha\neq 0$ *бўлса, у ҳолда бу система чизиқли эркли система бўлади.*

◄Фараз қилайлик, баъзи

$$x_{\alpha_k},\ \alpha_k\in A,\ k=1,2,...,n$$

элементлар учун

$$\lambda_1 x_{\alpha_1}+\lambda_2 x_{\alpha_2}+...+\lambda_n x_{\alpha_n}=0$$

тенглик бажарилсин. Фиксирланган k учун $(k=1,2,...,n)$ тенгликнинг иккала томонини x_{α_k} га скаляр кўпайтириб,

$$(\lambda_k x_{\alpha_k},x_{\alpha_k})=0 \qquad \textbf{(1)}$$

бўлишини топамиз, чунки системанинг ортогоналлик шартига кўра $j\neq k$ да $(x_{\alpha_j},x_{\alpha_k})=0$. Шартга кўра $x_{\alpha_k}\neq 0$ бўлгани учун, $(x_{\alpha_j},x_{\alpha_k})\neq 0$ ва (1)-тенгликка кўра $\lambda_k=0,\ k=1,2,...,n$.

Берилган $\{x_\alpha,\alpha\in A\}$ системанинг чизиқли эркли эканлиги исботланди.►

<u>2-лемма.</u> *Агар* R *фазонинг* $x_1,...,x_n$ *элементлари системаси учун ушбу*

$$G(x_1,...,x_n)=\begin{vmatrix}(x_1,x_1)&(x_1,x_2)...(x_1,x_n)\\(x_2,x_1)&(x_2,x_2)...(x_2,x_n)\\ \multicolumn{2}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots}\\(x_n,x_1)&(x_n,x_2)...(x_n,x_n)\end{vmatrix} \qquad \textbf{(2)}$$

детерминантнинг қиймати 0 *га тенг бўлса, унда берилган система чизиқли боғлиқ бўлади.*

$G(x_1,...,x_n)$ *детерминантга берилган системанинг* ***Грамм детерминанти*** *дейилади.*

Исботи.

n та $\lambda_i,\ i=1,2,...,n$, номаълумли n та чизиқли тенгламалар системасини қараймиз:

$$(\lambda_1 x_1+...+\lambda_n x_n, x_i)=0, \qquad i=\overline{1,n} \qquad \textbf{(3)}$$

$$\lambda_1(x_1,x_i)+...+\lambda_{n1}(x_1,x_i)=0, \qquad i=\overline{1,n}$$

Бу системанинг детерминанти Грамм детерминантининг транспонирланганига тенг ва шартга кўра унинг қиймати 0 га тенг. Бир жинсли тенгламанинг асосий детерминанти 0 га тенг бўлгани учун. (3)-система тривиал бўлмаган ечимга эга бўлади, яъни $\lambda_1,...,\lambda_n$ ларнинг ҳаммаси бир вақтда 0 га тенг бўла олмайди.

Энди (3) тенгликни λ_i га кўпайтирамиз ва барча i $(i=1,...,n)$ лар бўйича тенгликларни қўшиб чиқамиз:

$$(\lambda_1 x_1+...+\lambda_n x_n, \lambda_1 x_1+...+\lambda_n x_n)=0$$

Бу ердан ушбу

$$\lambda_1 x_1+...+\lambda_n x_n=0,$$

тенгликни, яъни $x_1,...,x_n$ системанинг чизиқли боғлиқ эканлигини ҳосил қиламиз.►

30. Тригонометрик функциялар системаси

Ушбу

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, ..., \cos nx, \sin nx... \qquad \textbf{(4)}$$

тригонометрик функциялар системаси $L_2[-\pi;\pi]$ *фазода ортогонал система бўлади.*

◄Тригонометрик функциялар учун қуйидаги

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \cos mxdx = 0, \ \ n \neq m,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \sin mxdx = 0, \ \ n \neq m,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \sin mxdx = 0, \ \ m,n = 0,1,2...; \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nxdx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nxdx = \pi, \ \ n=1,2,....$$

тенгликларнинг бажарилишини текшириш қийин эмас. $\Rightarrow$ (4)-система ортогонал.►

(5)- формулалардан

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\pi}, \quad \|\cos nx\| = \sqrt{\pi}, \quad n = 1,2,...,$$

эканлигини топамиз. Демак, (4)-ортогонал системага мос келувчи ортонормал система ушбу

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, ..., \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx, ...$$

кўринишга эга бўлар экан.

31. Лежандр кўпҳадлари.

__4-тариф.__ *Қуйидаги*

$$P_0(x) = 1, \quad P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n}, n = 1,2... \quad \textbf{(6)}$$

тенгликлар ёрдамида аниқланган кўпҳадларга ***Лежандр кўпҳадлари*** *дейилади.*

(6)-формуладан кўринадики. $P_n(x) - n$ даражали кўпҳад бўлади:

$$P_n(x) = \frac{(2n-1)!!}{n!} x^n + ...$$

Энди (6)-Лежандр кўпҳадлари системасининг $L_2[-1;1]$ фазода ортогонал система бўлишини кўрсатамиз; айнан $P_n(x) -$ Лежандр кўпҳадининг ихтиёрий m-даражали кўпҳад $(m < n)$ $Q_m(x)$ га ортогонал бўлишини исботлаймиз.

Бунинг учун ушбу

$$\frac{d^k (x^2-1)^n}{dx^k}$$

ифоданинг $k = 0,1,2,...,n-1$ учун $x = -1$ ва $x = 1$ нуқталарда нолга айланишини эслатиб ўтамиз.

$\int\limits_{-1}^{1} Q_m(x) \cdot \frac{d^n (x^2-1)^n}{dx} dx =$ ((бўлаклаб интеграллаш формуласидан фойдаланамиз))= $Q_m(x) \cdot \frac{d^{n-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}}\Big|_{-1}^{1} - \int\limits_{-1}^{1} Q'_m(x) \cdot \frac{d^{n-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}} dx =$

$= -\int\limits_{-1}^{1} Q'_m(x) \cdot \frac{d^{n-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}} dx =$ ((бўлаклаб интеграллаш формуласидан фойдаланамиз))=

$$-Q'_m(x) \cdot \frac{d^{n-2}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}}\Big|_{-1}^{1} + \int\limits_{-1}^{1} Q''_m(x) \cdot \frac{d^{n-2}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}} dx = ...$$

$$= (-1)^m \cdot Q_m^{(m)}(x) \cdot \frac{d^{n-m-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-m-1}}\Big|_{-1}^{1} = 0.$$

Шундай қилиб,

$$\int_{-1}^{1} Q_m(x)\cdot P_n(x)dx = 0, \quad m < n\,,$$

тенглик, хусусан

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)\cdot P_n(x)dx = 0, \quad m \neq n$$

тенглик ўринли бўлади. Бу эса $\{P_n(x)\}$ системанинг ортогонал эканлигини англатади.

Энди Лежандр кўпҳадининг нормасини ҳисоблаймиз. Бунинг учун Лежандр кўпҳадини

$$P_n(x) = \frac{(2n-1)!!}{n!}x^n + Q_{n-1}(x)$$

кўринишда ифодалаб оламиз, бу ерда $Q_{n-1}(x)$- даражаси $(n-1)$ дан катта бўлмаган кўпҳад ва $P_n(x)$ кўпҳаднинг даражаси n дан кичик булган ихтиёрий кўпҳадга ортогонал бўлишидан фойдаланиб топамиз:

$$\int_{-1}^{1} P_n{}^2(x)dx = \int_{-1}^{1} P_m(x)\cdot[\frac{(2n-1)!!}{n!}x^n + Q_{n-1}(x)]dx =$$

$$= \frac{(2n-1)!!}{n!}\int_{-1}^{1} P_n(x)\cdot x^n dx + \int_{-1}^{1} P_n(x)\cdot Q_{n-1}(x)dx =$$

$$= \frac{(2n-1)!!}{n!}\int_{-1}^{1} P_n(x)\cdot x^n dx = \frac{(2n-1)!!}{n!}\int_{-1}^{1} \frac{1}{2^n\cdot n!}\cdot\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}x^n dx =$$

=(($2^n\cdot n! = (2n)!!$))= $\frac{(2n-1)!!}{n!(2n)!!}\int_{-1}^{1}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}x^n dx =$

=((Бир неча марта бўлаклаб интеграллаш формуласидан фойдаланамиз))= $(-1)^{n-1}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\int_{-1}^{1} xd(x^2-1)^n =$

$$= (-1)^{n-1}\frac{(2n-1)!!}{(2n-2)!!}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^{n-1}x^2 dx =$$

$$= (-1)^{n-1}\frac{(2n-1)!!}{(2n-2)!!}\cdot\frac{1}{3}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^{n-1}dx^3 = \ldots = \int_{-1}^{1} x^{2n}dx = \frac{2}{2n+1}\,.$$

Шундай қилиб,

$$\|P_n(x)\| = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}$$

экан.

(4)-тригонометрик функциялар системаси ва (6)-Лежандр кўпҳадлари системасининг ортогоналлигидан бу системаларнинг *чизиқли эркли* эканлиги келиб чиқади.

2-§. Ортогоналлаштириш.

32. Фараз қилайлик, R яна Гильбертолди фазоси бўлсин. Қуйидаги масалани кўриб чиқамиз.

R фазода саноқли элементдан ташкил топган чизиқли эркли

$$\{x_n,\ n=1,2...\}$$

система берилган бўлсин. Чекли сондаги чизиқли комбинацияларни амалга ошириш натижасида берилган системадан ортогонал системани ҳосил қилиш лозим бўлсин. Қўйилган масала ҳар доим ечимга эга бўлиб, у қуйидаги теорема ёрдамида ифодаланади.

1-теорема. *Айтайлик,*

$$\{x_n,\ n=1,2...\} \qquad \textbf{(7)}$$

система R фазонинг чизиқли эркли элементлари системаси бўлсин. Унда R фазонинг шундай

$$\{y_{n,}y_n \neq 0, n=1,2,...\}$$

ортогонал системаси топиладики, бу системанинг ҳар бир $y_{n,}n=1,2,...,$ элементи (7)-система биринчи n та элементининг чизиқли комбинациясидан иборат бўлади:

$$y_{n,}=\alpha_{n,1}x_1+\alpha_{n,2}x_2+...+\alpha_{n,n}x_n. \qquad \textbf{(8)}$$

(8)-кўринишдаги ортогонал $\{y_n\}$ системани ҳосил қилишга одатда $\{x_n\}$ системани **ортогоналлаштириш жараёни** дейилади.

Исботи.

$y_1=x_1$ деб оламиз. (7)-система чизиқли эркли бўлгани учун, $y_1\neq 0$ бўлади.

Фараз қилайлик, (8)-шартни қаноатлантирувчи ўзаро ортогонал бўлган $y_n\neq 0, \quad n=1,2...,k, \quad k\geq 1$, элементлар мавжуд бўлсин. Унда барча $y_1,...,y_k$ элементларга ортогонал бўлган y_{k+1} элементни ушбу

$$y_{k+1}=\beta_{k+1,1}y_1+...+\beta_{k+1,k}y_k-x_{k+1} \qquad \textbf{(9)}$$

кўринишда қидирамиз. Ортогоналлик шартига кўра

$$(y_1,y_{k+1})=...=(y_k,y_{k+1})=0 \qquad \textbf{(10)}$$

тенгликлар бажарилиши керак. Бу шартлардан ва (9)-тенгликдан фойдаланиб,

$(y_1, y_1)\beta_{k+1,1} = (y_1, x_{k+1}), \dots, (y_k, y_k)\beta_{k+1,k} = (y_k, x_{k+1})$ **(11)**
бўлишини топамиз. Бу тенгликлардан эса

$$\beta_{k+1,i}, \quad i = 1,2,\dots,k$$

коэффицентлар бир қийматли топилади.

Энди (9)-тенгликдаги коэффицентлар ўрнига унинг қийматларини, $y_1,\dots,y_к$ лар ўрнига уларнинг (8)-кўринишдаги ифодаларини қўйиб ва соддалаштиргандан сўнг

$$y_{k+1} = \alpha_{k+1,1} x_1 + \dots + \alpha_{k+1,k} x_k - x_{k+1} \qquad \textbf{(12)}$$

эканлигини ҳосил қиламиз. Бу тенгликка кўра $y_{k+1} \neq 0$ бўлади, чунки акс ҳолда

$$x_1, x_2, \dots, x_{k+1}$$

система чизиқли боғлиқ бўлиб қолар эди. Теорема исботланди.▶

<u>Мисол.</u> *Ушбу*

$$1, x, x^2, \dots, x^n \qquad \textbf{(13)}$$

элементлари x нинг даражаларидан иборат бўлган системени қараймиз. Бу система ихтиёрий (чекли ёки чексиз) оралиқда чизиқли эркли бўлади.

◀Дархақиқат, агар

$$\lambda_0 + \lambda_1 x + \dots + \lambda_n x^n \equiv 0 \qquad \textbf{(14)}$$

бўлса, унда бу айниятни n марта дифференцияллаш ёрдамида

$$n!\lambda_n = 0$$

тенгликни, ёки $\lambda_n = 0$ эканлигини топамиз.

Унда (14)- айният

$$\lambda_0 + \lambda_1 x + \dots + \lambda_{n-1} x^{n-1} \equiv 0$$

айниятга айланади ва юқоридаги каби $(n-1)$ марта диффернциаллаш йўли билан $\lambda_{n-1} = 0$ бўлиши кўрсатилади. Жараённи давом эттириш натижасида $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ бўлишини ҳосил қиламиз. Бу эса берилган (13)-системанинг чизиқли эркли эканлигини англатади.▶

Агар (13)–системани [-1;1] кесмада қараб, унга ортогоналлаштириш жараённини қўлласак, унда даражалари мос равишда 0,1,2,… га тенг бўлган ортогонал кўпхадлар кетма-кетлигини ҳосил қиламиз.

3-§.Фурье каторлари.

33.Фурье қаторлари ва уларнинг хоссалари.

Фараз қилайлик, R аввалгидек Гильбертолди фазоси бўлсин. Қуйидаги масалани кўрамиз: R ***фазонинг*** n ***та чизиқли эркли*** $e_1,e_2,...,e_n$ ***векторлари системаси берилган бўлиб,*** $y\in R$ ***бирорта фиксирланган вектор бўлсин. Шундай***

$$a_1e_1+a_2e_2+...+a_ne_n \qquad \textbf{(15)}$$

чизиқли комбинацияни топиш лозим бўлсинки,

$$\|y-(a_1e_1+...+a_ne_n)\| \qquad \textbf{(16)}$$

ифода минимум қийматга эришсин. Бу эса $a_1,...,a_n$ ***ўзгарувчили ушбу***

$$\left\|y-\sum_{k=1}^{n}a_ke_k\right\|^2=(y-\sum_{k=1}^{n}a_ke_k,y-\sum_{k=1}^{n}a_ke_k) \qquad \textbf{(17)}$$

функциянинг минимумга эришишга тенг кучлидир.

Агар R фазо n-ўлчамли бўлиб, $e_1,...,e_n$ векторлар бу фазода базис ташкил қилса, унда $a_k,k=1,2,...,n,$ коэфицентларни шундай танлаш мумкинки

$$y=a_1e_1+...+a_ne_n \qquad \textbf{(18)}$$

тенглик бажарилади ва ўз навбатида, (16)-ифода 0 га айланади. Агар R фазонинг ўлчами чекли бўлмаса ёки чекли бўлганда ҳам n дан катта бўлса, унда умуман олганда, (18)-тенгликни бажариш мумкин эмас ва масала (16)-ифодага минимал қийматни берадиган (15)-чизиқли комбинацияни топишдан иборат бўлади.

Агар лозим бўлса ортогоналлаштириш жараёнидан фойдаланиш натижасида $e_1,...,e_n$ системани нолдан фарқли бўлган векторлардан ташкил топган ортогонал система билан алмаштириш мумкин. Шунинг учун

$$e_k\neq 0,\ \ (e_ke_j)=0,\ \ k\neq j,\quad k,j=\overline{1,n}$$

деб фараз қиламиз. Ортогоналлик шартидан фойдаланиб (17)-функциянинг кўринишини ўзгартирамиз:

$$\left\|y-\sum_{k=1}^{n}a_ke_k\right\|^2=(y,y)+\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_ka_j(e_k,e_j)-2\sum_{k=1}^{n}a_k(y,e_k)=\|y\|^2+\sum_{k=1}^{n}a_k^2\cdot\|e_k\|^2-$$

$$-2\sum_{k=1}^{n}(y,e_k)=\|y\|^2+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cdot\|e_k\|-\frac{(y,e_k)}{\|e_k\|}\right)^2-\sum_{k=1}^{n}\frac{(y,e_k)^2}{\|e_k\|^2}. \quad \textbf{(19)}$$

Бу тенгликдан кўринадики,

$$a_k\cdot\|e_k\|-\frac{(y,e_k)}{\|e_k\|}=0, \quad k=\overline{1,n}$$

бўлганда, яъни

$$a_k=\frac{(y,e_k)}{\|e_k\|^2} \quad \textbf{(20)}$$

тенглик бажарилганда (16)-ифода минимумга эришади.

5-таъриф. *(20)- формула ёрдамида аниқланган* a_k *сонлар y элементнинг* $e_1,...,e_n$ *система бўйича* ***Фурье коэффицентлари*** *дейилади.*

Агар $e_1,...,e_n$ система ортонормал бўлса, унда (20)-формула соддароқ кўринишга келади:

$$a_k=(y,e_k) \quad \textbf{(21)}$$

Энди (19)-ифодага қайтамиз. Агар у ерда $a_1,...,a_n$ лар сифатида (20)-Фурье коэффицентларини олсак, у ҳолда

$$\|y\|^2-\sum_{k=1}^{n}a_k^2\cdot\|e_k\|^2=\left\|y-\sum_{k=1}^{n}a_ke_k\right\|^2\geq 0 \quad \textbf{(22)}$$

тенгсизлик, бу тенгсизликдан эса

$$\sum_{k=1}^{n}a_k^2\cdot\|e_k\|^2\leq\|y\|^2 \quad \textbf{(23)}$$

ҳосил бўлади.

Шундай қилиб, қуйидаги теорема исботланди.

2-теорема. *Айтайлик,* $\{e_k, e_k\neq 0, k=\overline{1,n}\}$ *система* R *Гильбертолди фазосининг ортогонал векторлари системаси бўлсин. Унда* $y\in R$ *вектор учун* α_k *лар Фурье коэффицентларига тенг бўлганда, яъни* $\alpha_k=a_k, k=1,2,...,n,$ *тенглик бажарилганда,* $\sum_{k=1}^{n}\alpha_ke_k$ *чизиқли комбинация* y *векторнинг энг яхши яқинлашишини беради. Бунда*

$$\inf_{\alpha_1,..,\alpha_n}\left\|y-\sum_{k=1}^{n}\alpha_ke_k\right\|^2=\left\|y-\sum_{k=1}^{n}a_ke_k\right\|^2=\|y\|^2-\sum_{k=1}^{n}a_k^2\|e_k\|^2\geq 0$$

муносабат бажарилади.

Энди фараз қилайлик,

$$e_k(e_k\neq 0)\ \ k=1,2,..., \quad \textbf{(24)}$$

элементлар кетма-кетлиги берилган бўлиб, у R фазода ортогонал системани ташкил этсин. Бу ҳолда ҳам y элементнинг (24)-система бўйича **Фурье коэффицентларини** (20)-формула ёрдамида аниқлаймиз.

6-таъриф. *Агар* $a_k,\ k=1,2,...,$ *лар* y *элементнинг (24)-система бўйича Фурье коэффицентлари бўлса, унда*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k \tag{25}$$

қаторга y *элементнинг (24)-система бўйича* ***Фурье қатори*** *дейилади. Бу ҳолда*

$$y \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k$$

каби ёзилади.

7-таъриф. *Ушбу*

$$E_n(y) = \inf_{\alpha_1,..,\alpha_n} \left\| y - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right\|, \quad n = 1,2,...$$

катталикка y *элементнинг* $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$ *(*n*-фиксирланган) чизиқли комбинациялар ёрдамидаги* ***энг яхши яқинлашиши*** *дейилади. Бу ерда инфимум* $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$ *кўринишдаги мумкин бўлган барча чизиқли комбинацияларнинг* $\alpha_1,...,\alpha_n$ *коэффицентлари бўйича олинган.*

Бу таърифдан кўринадики

$$E_{n+1}(y) \le E_n(y) \tag{26}$$

тенглик ўринли.

2-теоремадан қуйидаги муносабатнинг бажарилиши келиб чиқади:

$$E_n(y) = \inf_{\alpha_1,..,\alpha_n} \left\| y - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right\| = \left\| y - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \right\| = \sqrt{\|y\|^2 - \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \|e_k\|^2}\ ,$$

$$a_k = \frac{(y, e_k)}{(e_k, e_k)}, \quad k = 1,2,.... \tag{27}$$

Ҳосил қилинган тасдиқни 2- теореманинг натижаси сифатида келтирамиз.

1-натижа. $y \in R$ *элемент Фурье қаторининг*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k e_k$$

қисмий йиғиндилари $y \in R$ *элементнинг*

$$\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n$$

чизикли комбинациялар бўйича энг яхши яқинлашишини беради.

2-теоремадан шунингдек қуйидаги натижалар келиб чиқади.

<u>2-натижа.</u> *Ушбу*

$$\|y - S_{n+1}\| \le \|y - S_n\|, \quad n = 1,2,\ldots, \qquad \textbf{(28)}$$

тенгсизлик ўринли.

(28)-тенгсизлик (26) ва (27)-муносабатлардан тўғридан тўғри келиб чиқади.

<u>3-натижа.</u> $y \in R$ *элементнинг Фурье коэфицентлари* $a_n, \ n = 1,2,\ldots,$ *лар учун ушбу*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \|e_n\|^2 \le \|y\|^2$$

Бессель тенгсизлиги *ўринли*

Бессель тенгсизлиги (23)-тенгсизликдан $n \to \infty$ да келиб чиқади.

<u>4-натижа.</u> *Агар шундай* $c > 0$ *ўзгармас топилиб,* $\|e_k\| \ge c,$ $k = 1,2,\ldots,$ *тенгсизлик бажарилса, хусусан (24) система ортонормал бўлса (бу ҳолда* $c = 1$ *деб олиш мумкин), у ҳолда Фурье коэффицентлари* $k \to \infty$ *да нолга интилади.*

$$\lim_{k\to\infty} a_k = 0. \qquad \textbf{(30)}$$

$$◀ \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\|e_k\|^2} \cdot a_k^2 \cdot \|e_k\|^2 \le \frac{1}{c^2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \|e_k\|^2 \overset{(29)}{\le} \frac{\|y\|^2}{c^2} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$$

қатор яқинлашувчи. Унда қатор яқинлашишнинг зарурий шартига кўра

$$\lim_{k\to\infty} a_k^2 = 0 \Rightarrow \lim_{k\to\infty} a_k = 0 . ▶$$

Табиий савол туғилади: *қандай шартлар бажарилганда* y *элементнинг Фурье қатори яқинлашувчи бўлади ?*

Бу саволга жавоб беришдан олдин қуйидаги таърифларни келтирамиз.

<u>8-таъриф.</u> *Агар* R *метрик фазода ихтиёрий фундаментал кетма-кетлик яқинлашувчи бўлса, унда* R *га* ***тўла метрик фазо*** *дейилади.*

9-таъриф. *Скаляр кўпайтма киритилган хар қандай тўла чизиқли фазога* ***Гильберт фазоси*** *дейилади.*

Фурье қаторининг яқинлашиши ҳақидаги саволга қуйидаги теорема жавоб беради.

3-теорема. *Агар* R *- Гильберт фазоси бўлса, у ҳолда* $y \in R$ *элементнинг ихтиёрий ортогонал (24)-система бўйича Фурье қатори яқинлашувчи бўлади, ва агар*

$$y_0 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k \qquad \textbf{(31)}$$

бўлса, унда $y - y_0$ *элемент (24)-системанинг барча элементларига ортогонал бўлади.*

Исботи.

Айтайлик,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k e_k, \quad n = 1,2,...$$

(25)-Фурье қаторининг қисмий йиғиндилари бўлсин. Унда

$$\left\| S_{n+p} - S_n \right\|^2 = \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k e_k \right\|^2 = \left(\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k e_k, \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k e_k \right) = \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k^2 \left\| e_k \right\|^2,$$

$$n = 1,2,..., \quad p = 1,2,... \qquad \textbf{(32)}$$

бўлади. (29)-Бессель тенгсизлигига кўра

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \left\| e_k \right\|^2$$

қатор яқинлашувчи $\Rightarrow$ қатор яқинлашиши учун Коши критериясига кўра $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай $n_\varepsilon \in N$ номер топиладики $\forall n \ge n_\varepsilon$ ва $p \in N$

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k^2 \left\| e_k \right\|^2 < \varepsilon^2$$

тенгсизлик бажарилади.$\Rightarrow$ (32)-тенгликка кўра $\forall n \ge n_\varepsilon$ ва $p \in N$ учун

$$\left\| S_{n+p} - S_n \right\| < \varepsilon,$$

яъни $\{S_n\}$ кетма-кетлик R фазода фундаментал бўлади. R тўла бўлгани учун $\{S_n\}$ яқинлашувчи.

Фараз қилайлик, $\{S_n\}$ кетма- кетлик R фазонинг y_0 элементига яқинлашсин. Уҳолда (31)ва (20)-формулалардан фойдаланиб, қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$(y-y_0,e_k)=(y,e_k)-(y_0,e_k)\overset{(31)}{=}(y,e_k)-\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cdot(e_n,e_k)=$$

$$=(y,e_k)-a_k\cdot\|e_k\|^2\overset{(20)}{=}(y,e_k)-\frac{(y,e_k)}{\|e_k\|^2}\cdot\|e_k\|^2=(y,e_k)-(y,e_k)=0$$

Теорема исботланди.

34. Тўла ортогонал системалар ва уларнинг Фурье қатори билан боғланиши.

Саноқли система учун тўлалик тушунчасини киритамиз. *Айтайлик,*

$$e_n\in R,\ \ n=1,2,...$$

система берилган бўлсин. Агар бу система элементларининг чизиқли комбинациялари тўплами R *фазода зич бўлса, яъни хар бир* $x\in R$ *элемент ва* $\forall\varepsilon>0$ *сон учун шундай* $n=n(\varepsilon,x)$ *номер ва* $\lambda_1,...,\lambda_n$ *сонлар топилсаки.*

$$\|x-(\lambda_1e_1+...+\lambda_ne_n)\|<\varepsilon \qquad \textbf{(33)}$$

тенгсизлик бажарилса, унда берилган система R *фазода* ***тўла система*** *дейилади.*

4-теорема. R*-Гильбертолди фазосидаги (24)-ортогонал системанинг шу фазода тўла бўлиши учун қуйидаги шартнинг бажарилиши зарур ва етарлидир: ихтиёрий* $y\in R$ *элемент учун унинг Фурье қатори айнан шу элементга яқинлашади, яъни*

$$y=\sum_{k=1}^{\infty}a_ke_k\text{, бу ерда }\ a_k=\frac{(y,e_k)}{\|e_k\|^2},\ \ k=1,2,...$$

ёки

$$\ell im_{n\to\infty}\left\|y-\sum_{k=1}^{n}a_ke_k\right\|=0 \qquad \textbf{(35)}$$

тенглик бажарилади.

◄**Етарлилиги.** Агар (35)-тенглик бажарилса, унда $\forall\varepsilon>0$ учун (34) - Фурье қаторининг шундай

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_ke_k$$

қисмий кетма-кетлиги топиладики,

$$\|y-S_n\|<\varepsilon \qquad \textbf{(36)}$$

тенгсизлик, яъни (33)-шарт бажарилади.

Зарурлиги. Агар (33)-шарт бирор $\lambda_1,...,\lambda_n$ лар учун бажарилса, унда 2-теоремага кўра бу шарт

$$\lambda_1 = a_1, ..., \lambda_n = a_n$$

бўлганда ҳам бажарилади, яъни берилган $\varepsilon > 0$ сон учун (36)-тенгсизлик бирорта n да ва табиийки барча $m > n$ ларда бажарилади. Бу эса (35)-шартнинг бажарилишига тенг кучлидир.►

5-теорема. *Гильбертолди фазоси y элементнинг (25)-Фурье қатори шу элементга яқинлашиши учун ушбу*

$$\|y\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \|e_k\|^2$$

***Парсеваль тенглигининг** бажарилиши зарур ва етарлидир, бу ерда $a_к$ y элементнинг (24)-система бўйича Фурье коэффицентлари.*

Бу теоремадан системанинг тўла бўлиши ҳақидаги яна бир критерий келиб чиқади.

Натижа. *R-Гильбертолди фазосидаги (24)-ортогонал системанинг шу фазода тўла бўлиши учун ихтиёрий $y \in R$ элемент олинганда ҳам Парсеваль тенглигини бажарилиши зарур ва етарлидир.*

Агар (24)-тўла система ортонормал бўлса, унда Парсеваль тенглиги соддароқ кўринишга келади:

$$\|y\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2, \ a_k = (y, e_k), \ k = 1,2,...,$$

ва уни чексиз ўлчовли фазолар учун **Пифагор теоремасининг умумлашмаси** сифатида қараш мумкин.

5-теореманинг исботи.

(22)-тенгликка кўра ушбу

$$\left\| y - \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k \right\|^2 = \|y\|^2 - \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \|e_k\|^2$$

тенглик ўринли эди. Бу ерда $n \to \infty$ қуйидаги 2 та

$$\lim_{n\to\infty} \left\| y - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \right\| = 0 \qquad \textbf{(38)}$$

ва

$$\lim_{n\to\infty} \left(\|y\|^2 - \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \|e_k\|^2 \right) = 0,$$

яъни

$$\|y\|^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \|e_k\|^2 \qquad \textbf{(39)}$$

шартларнинг тенг кучли эканлигини ҳосил қиламиз. Бу ердан ва 4-теоремадан 5-теорема келиб чиқади.►

Юқоридаги натижа 4- ва 5 –теоремалардан тўғридан тўғри келиб чиқади.

Энди $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k e_k$ Фурье қаторига мос келувчи элементнинг ягоналиги масаласини ўрганамиз.

<u>6-теорема.</u> *Агар* R- *Гильбертолди фазосидаги (24)-ортогонал система шу фазода тўла бўлса ва* $y\in R$ *элементнинг (24)-система бўйича барча Фурье коэффицентлари* 0 *га тенг бўлса, унда* y *элементнинг ўзи ҳам* 0 *га тенг бўлади.*

◄Шартга кўра $a_k=0$. Унда (37)-Парсеваль тенглигига кўра $\|y\|=0$ бўлади.$\Rightarrow y=0$.►

<u>Натижа.</u> *Агар* $y_1\in R$ *ва* $y_2\in R$ *элементларнинг (24)-тўла ортогонал система бўйича барча Фурье коэффицентлари ўзаро тенг бўлса, у ҳолда* $y_1=y_2$ *бўлади.*

◄ y_1ва y_2 элементларнинг Фурье коэфицентлари учун

$$\frac{(y_1,e_k)}{\|e_k\|^2}=\frac{(y_2,e_k)}{\|e_k\|^2},\ k=1,2,...,$$

тенглик бажарилади.$\Rightarrow$ $y=y_1-y_2$ элементнинг барча Фурье коэффицентлари 0 га тенг бўлади:

$$\frac{(y,e_k)}{\|e_k\|^2}=\frac{(y_1-y_2,e_k)}{\|e_k\|^2}=\frac{(y_1,e_k)}{\|e_k\|^2}-\frac{(y_2,e_k)}{\|e_k\|^2}=0,\ k=1,2,.... \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ 6-теоремага кўра $y=0\Rightarrow y_1=y_2$.►

4-§. Сферик функциялар.

35.Сферик функциянинг таърифи.

Биз математик физика тенгламаларини интеграллашда учрайдиган махсус функциялар синфларини ўрганиш билан шуғулланамиз. Одатда бу функцияларнинг барчаси ўзгарувчан коэффицентли баъзи чизиқли тенгламаларнинг ечимлари сифатида аниқланади.

Биз ўрганишни Лаплас тенгламаси билан чамбарчас боғланган **сферик фукнциялар** деб аталувчи функциялардан бошлаймиз. Лаплас тенгламаси Декарт координаталар системасида

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 \qquad \textbf{(40)}$$

кўринишга эга.

Бу тенгламанинг шундай ечимларини қидирамизки, улар x, y ва z ўзгарувчиларга нисбатан бир жинсли кўпҳад кўринишига эга бўлсин.

Содда хусусий ҳолларни ўрганишдан бошлаймиз. 0-*тартибли бир жинсли кўпҳад ўзгармас* a га тенг бўлиб, у (40)-тенгламани қаноатлантиради. *1-тартибли бир жинсли кўпҳаднинг* умумий кўриниши

$$U_1 = ax + by + cz$$

каби бўлиб, ихтиёрий ўзгармас a,b ва c коэффициентлар олинганда ҳам U_1 кўпҳад (40)-тенгламанинг ечими бўлади. *2-тартибли бир жинсли*

$$U_2 = ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + eyz + fzx$$

кўпҳадни оламиз. U ни (40)-тенгламага олиб бориб қўйиб, коэффицентлар учун битта

$$a + b + c = 0$$

муносабатни ҳосил қиламиз. Бу тенгликдан фойдаланиб, масалан $c = -a - b$ дейишимиз мумкин. Унда (40)-тенгламани қаноатлантирувчи 2-тартибли бир жинсли кўпҳад ушбу

$$U_2 = a(x^2 - z^2) + b(y^2 - z^2) + dxy + eyz + fzx$$

умумий кўринишга эга бўлади.

Бу ерда биз 5 та чизиқли эркли

$$(x^2 - z^2),\ (y^2 - z^2),\ \ xy,\ \ yz \text{ ва } zx$$

ечимларга эга бўлиб, уларнинг ихтёрий ўзгармас коэффицентлар ёрдамидаги чизиқли комбинацияси (40)-тенгламанинг умумий ечимини бериб, у 2- тартибли бир жинсли кўпҳад кўринишида ифодаланади.

Ихтиёрий 3-тартибли бир жинсли кўпҳад оламиз: $U_3 = ax^3 + by^3 + cz^3 + dx^2y + ex^2z + fy^2x + gy^2z + hz^2x + kz^2x + \ell xyz$. U_3 ни (40)-тенгламага олиб бориб қўямиз:

$$6(ax + by + cz) + 2dy + 2ex + 2fx + 2gz + 2hx + 2ky = 0.$$

Бу тенгликни соддалаштириб, x, y, z лар олдидаги коэффицентларни 0 га тенглаш ёрдамида қуйидаги тенгликларни ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} 3a + f + h = 0, \\ 3b + d + k = 0, \\ 3c + e + g = 0. \end{cases} \quad \text{ёки} \quad \begin{cases} a = -\frac{1}{3}(f + h), \\ b = -\frac{1}{3}(d + k), \\ c = -\frac{1}{3}(e + g). \end{cases}$$

Демак, (40)-тенгламанинг 3-тартибли бир жинсли кўпҳад кўринишидаги умумий ечими

$$U_3 = d(x^2y - \frac{1}{3}y^3) + e(x^2z - \frac{1}{3}z^3) + f(y^2x - \frac{1}{3}x^3) +$$

$$+ g(y^2z - \frac{1}{3}z^3) + h(z^2z - \frac{1}{3}x^3) + k(z^2y - \frac{1}{3}y^3) + \ell xyz$$

бўлар экан.

Бу ҳолда биз 7 та чизиқли эркли ечимларга эга бўлдик.

7-теорема. *(40)- Лаплас тенгламаси* $(2n+1)$ *та* n*-тартибли бир жинсли кўпҳадлардан иборат бўлган чизиқли эркли ечимларга эга.*

◄Бир жинсли кўпҳаднинг коэффицентлари сони ва бу кўпҳад қаноатлантириши керак бўлган тенгламалар сонини ҳисоблаймиз. Ушбу

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + ... + a_ny^n$$

икки ўзгарувчили n-тартибли бир жинсли кўпҳад $(n+1)$ коэффициентга эга. Уч ўзгарувчили n-тартибли бир жинсли кўпҳадни

$$a_0z^n + \varphi_1(x,y)z^{n-1} + ... + \varphi_{n-1}(x,y)z + \varphi_n(x,y) \quad \textbf{(41)}$$

кўринишида ёзиш мумкин, бу ерда $\varphi_k(x,y)$ лар k-тартибли бир жинсли кўпҳадлар. Демак, (41)-бир жинсли кўпҳаднинг коэффициентларининг умумий сони

$$1 + 2 + ... + n + n(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

та бўлади. Агар (41)-кўпҳадни (40)-тенгламанинг чап томонига олиб бориб қўйилса, унда $(n-2)$-тартибли бир жинсли кўпҳад ҳосил бўлиб $\frac{(n-1)n}{2}$ та ҳадга эга. Шундай қилиб, (41)-кўпҳаднинг $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ та коэффицентлари $\frac{(n-1)n}{2}$ та бир жинсли тенгламалар ёрдамида боғланар экан. Агар бу тенгламалар эркли бўлса, унда эркин қолган коэффицентлар сони

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2}-\frac{(n-1)n}{2}=2n+1$$

та бўлади. Исбот қилишимиз керак бўлган нарсани ҳосил қилдик. Фақат бу ерда юқорида айтилган тенгламалар ҳақикатан ҳам эркли бўладими деган саволга жавоб ноаниқ қолди. Шу муносабат билан теореманинг бошқа тўлиқ исботини келтирамиз.

(41)-кўпҳадни қуйидаги кўринишда ёзиб олишимиз мумкин:

$$U_n = \sum_{p+q+r=n} a_{pqr} x^p y^q z^r .$$

Бу тенгламадан

$$a_{pqr}=\frac{1}{p!\cdot q!\cdot r!}\frac{\partial^{p+q+r}U_n}{\partial x^p\cdot\partial y^q\cdot\partial z^r} \qquad \textbf{(42)}$$

эканлигини кўриш қийин эмас.

(40)-тенгламани

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=-\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$$

кўринишда ёзиб оламиз ва бу тенгликдан фойдаланиб (42)-ифодалардаги z бўйича 1-тартибли ҳосилалардан юқори бўлган ҳосилалардан қутулишимиз мумкин. Масалан,

$$\frac{\partial^6 U}{\partial x\partial y\partial z^4}=-\frac{\partial^4}{\partial x\partial y\partial z^2}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)=\frac{\partial^4}{\partial x^3\partial y}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)+$$

$$+\frac{\partial^4}{\partial x\partial y^3}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)=\frac{\partial^6 U}{\partial x^5\partial y}+2\frac{\partial^6 U}{\partial x^3\partial y^3}+\frac{\partial^6 U}{\partial x\partial y^5}$$

Шундай қилиб, эркли коэффицентлар сифатида шундай a_{pqr} коэффицентлар қолдики, уларда z бўйича дифференциаллаш ёки умуман йўқ ёки бир марта дифференциалланади. Шу коэффицентлар сонини ҳисоблаймиз: $a_{pq0}(p+q=n)$ ёки $a_{pq1}(p+q=n-1)$ ва уларнинг умумий сони роппа-роса $(2n+1)$ та бўлади. Исбот қилишимиз лозим бўлган тасдиқ исботланди.▶

36. Сферик функцияларнинг ошкор кўриниши.

Аввалги пунктда кўрилган бир жинсли кўпҳадларнинг ошкор кўринишларини топамиз. Сферик координаталар системасини киритамиз:

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cdot\cos\varphi, \\ y = r\sin\theta\cdot\sin\varphi, \\ z = r\cos\theta. \end{cases} \qquad \textbf{(43)}$$

Бу ҳолда n*-тартибли бир жинсли гармоник кўпҳад*

$$U_n(x,y,z) = r^n\cdot У_n(\theta,\varphi) \qquad \textbf{(44)}$$

кўринишида ифодаланади.

(40)-тенгламанинг ечими бўлган бундай кўпҳадга одатда **ҳажмий сферик функция**, $У_n(\theta,\varphi)$ кўпайтувчига эса **сирт сферик функцияси** ёки содда қилиб, n**-тартибли сферик функция** деб аталади. Бизнинг вазифамиз чизиқли эркли бўлган $(2n+1)$ та сферик функцияларларни топишдан иборат.

Аввал (40)-тенгламанинг ечими билан боғлиқ бўлган содда бир фактни келтирамиз. x,y,z параметрларга боғлиқ бўлган

$$U(x,y,z) = \int_{-\pi}^{\pi} f(z+ix\cos t+iy\sin t,t)dt \qquad \textbf{(45)}$$

интегрални оламиз ва бу интегрални интеграл остида x,y ва z ўзгарувчилар бўйича дифференциаллаш мумкин деб фараз қиламиз. Унда

$$\Delta U(x,y,z) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial я^2} = \int_{-\pi}^{\pi}(1-\cos^2 t-\sin^2 t).$$

$$f''(z+ix\cos t+ty\sin t,t)dt = 0$$

бўлади. Бу ерда $f''(\tau,t)$ деб $f(\tau,t)$ функциядан τ бўйича 2-тартибли ҳосилани белгиладик. Шундай қилиб, $U(x,y,z)$ функция $f(\tau,t)$ функциянинг қандай олинишидан қатъий назар (40)-Лаплас тенгламасини қаноатлантирар экан. Энди (45)-тенгликдан фойдаланиб (40)-тенгламани қаноатлантирувчи $(2n+1)$ та n-тартибли бир жинсли кўпҳадларни қуриш мумкин.

Уларни қуйидаги кўринишда ёзамиз;

$$\int_{-\pi}^{\pi}(z+ix\cos t+iy\sin t)^n\cdot\cos mtdt \qquad (m=0,1,2,...,n), \quad \textbf{(46)}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}(z+ix\cos t+iy\sin t)^n\cdot\sin mtdt \qquad (m=0,1,2,...,n).\qquad \textbf{(47)}$$

Сферик координаталарни киритиш ва (46)-интегралдан фойдаланиш ёрдамида сферик функциялар учун қуйидаги ифодани ҳосил қиламиз:

$$\int_{-\pi}^{\pi}[\cos\theta+i\sin\theta\cos(t-\varphi)]^n\cdot\cos mtdt= ((t-\varphi=\psi \text{ деб белгилаймиз}))=$$

$$=\int_{-\pi-\varphi}^{\pi-\varphi}(\cos\theta+i\sin\theta\cos\psi)^n\cdot\cos m(\varphi+\psi)d\psi=\int_{-\pi}^{\pi}(\cos\theta+i\sin\theta\cos\psi)^n\cdot\cos m(\varphi+\psi)d\psi\,.$$

$\cos m(\varphi+\psi)$ ни очиб юбориб ва $\sin m\varphi$ функциянинг тоқлигидан фойдаланиб бу сферик функцияни қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$\cos m\varphi\int_{-\pi}^{\pi}(\cos\theta+i\sin\theta\cos\psi)^n\cdot\cos m\psi d\psi \quad (m=0,1,2,...n).\qquad \textbf{(48)}$$

Худди шунга ўхшаш (47)-интеграл бизни қуйидаги сферик функцияларга олиб келади:

$$\sin m\varphi\int_{-\pi}^{\pi}(\cos\theta+i\sin\theta\cos\psi)^n\cdot\cos m\psi d\psi \quad (m=0,1,2,...n).\ \textbf{(49)}$$

$\cos m\varphi$ ва $\sin m\varphi$ функциялар $(-\pi;\pi)$ оралиқда ўзаро ортогонал бўлгани учун улар чизиқли эркли$\Rightarrow$(48) ва(49) сферик функциялар чизиқли эркли. Шундай қилиб, биз $(2n+1)$ та чизиқли эркли n-тартибли сферик функцияларни қуриб олдик. Шуни таъкидлаш лозимки, (48) ва (49) формулалардаги $\cos m\varphi$ ва $\sin m\varphi$ лар олдидаги коэффициентлар бир хил. Уларни Лежандр кўпҳадлари ёрдамида ифодалаймиз. Маълумки, Лежандр кўпҳадлари ушбу

$$P_n(x)=\frac{1}{n!\cdot2^n}\cdot\frac{d^n}{dx^n}\cdot\left[(x^2-1)^n\right]\qquad \textbf{(50)}$$

кўринишга эга эди. Ундан фойдаланиб, қуйидаги функцияни киритамиз:

$$P_{n,m}(x)=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^mP_n(x)}{dx^m}=\frac{(1-x^2)^{\frac{m}{2}}}{n!\cdot2^n}\cdot\frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}}\left[(x^2-1)^n\right]\ \textbf{(51)}$$

Бундан буён биз x ни $[-1;1]$ кесмада ўзгаради деб қараймиз ва $x=\cos\theta,\ \ 0\le\theta\le\pi$ деб оламиз. Бунда $P_{n,m}(\cos\theta)$ ифодадаги $(1-\cos^2\theta)^{\frac{m}{2}}$ кўпайтмани $\sin^m\theta$ га тенг деймиз, чунки $0\le\theta\le\pi$.

Энди $P_n(x)$ ва $P_{n,m}(x)$лар учун бошқа ифодаларни киритамиз. Кошининг интеграл формуласига кўра

$$(x^2-1)^n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{(z^2-1)^n}{z-x}dz$$

тенглик ўринли, бу ерда γ - $z=x$ нуқтани ўз ичига олувчи ихтиёрий мусбат йўналишли ёпиқ чизиқ. Бу ердан (50)-тенгликка кўра

$$P_n(x)=\frac{1}{2^{n+1}\pi i}\int_{\gamma}\frac{(z-1)^n\cdot(z+1)^n}{(z-x)^{n+1}}dz \qquad \textbf{(52)}$$

тенгликни ҳосил қиламиз. γ контур сифатида маркази $z=x$ нуқтада ва радиуси $\left|x^2-1\right|^{\frac{1}{2}}$ га тенг бўлган айланани оламиз ($x\neq\pm1$ деб ҳисобланади). Бунда z ўзгарувчини

$$z=x+(x^2-1)^{\frac{1}{2}}e^{i\psi}$$

деб ёзиш мумкин бўлади, ψ ни $-\pi$ дан π гача ўзгаради деб ҳисоблаймиз. (52)-интегралда ўзгарувчиларни алмаштириб

$$P_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\frac{\left[x-1+(x^2-1)^{\frac{1}{2}}e^{i\psi}\right]\cdot\left[x+1+(x^2-1)^{\frac{1}{2}}e^{i\psi}\right]}{2(x^2-1)^{\frac{1}{2}}e^{i\psi}}\right\}^n d\psi$$

тенгликни ва элементар ҳисоб-китобни амалга ошириб ҳамда интеграл остидаги функциянинг жуфтлигидан фойдалансак, қуйидаги формулани ҳосил қиламиз:

$$P_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[x+(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\psi\right]^n d\psi=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left[x+(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\psi\right]^n d\psi\,. \qquad \textbf{(53)}$$

Агар тенгликнинг ўнг томонидаги $\left[x+(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\psi\right]^n$ ифодани Ньютон биномидан фойдаланиб даражага кўтарсак ва $\cos\psi$ нинг тоқ даражаларидан $(-\pi;\pi)$ оралиқ бўйича олинган интеграл 0 га тенг бўлишидан фойдалансак, унда $(x^2-1)^{\frac{1}{2}}$ нинг тоқ даражалари қатнашган барча ҳадларининг 0 га айланишини ҳосил қиламиз.

Юқоридаги каби ҳисоблашларни $P_{n,m}(x)$ учун бажарамиз. Унда (52) нинг ўрнига

$$P_{n,m}(x)=\frac{(1-x^2)^{\frac{m}{2}}(n+1)(n+2)...(n+m)}{2^{n+1}\pi i}\int_{\gamma}\frac{(z^2-1)^n}{(z-x)^{n+m+1}}dz$$

бўлади.

Аниқлик учун $-1<x<1$ деб ҳисоблаймиз. Юқоридаги каби $z=x+(x^2-1)^{\frac{1}{2}}e^{i\psi}$ алмаштириш бажарамиз ва $(x^2-1)^{\frac{1}{2}}=pi,\ p>0$ деб ҳисоблаб

$$P_{n,m}(x)=i^m\cdot\frac{(n+1)(n+2)...(n+m)}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[x+(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\psi\right]^n e^{-im\psi}d\psi$$

тенглик ёки $\sin m\psi$ функциянинг тоқлигидан фойдалансак

$$P_{n,m}(x)=i^m\cdot\frac{(n+1)(n+2)...(n+m)}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[x+(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\psi\right]^n\cos m\psi d\psi \qquad \mathbf{(54)}$$

тенглик келиб чиқади. Агар (53) ёки (54)-интегралларда $x=\cos\theta$ десак, унда (48) ва (49)-формулалардаги интеграллар ҳосил бўлади.

Гармоник кўпҳад ёки сферик функцияларда ўзгармас кўпайтувчининг аҳамиятга эга эмаслигини эътиборга олиб қуйидаги ҳулосага келамиз:

$(2n+1)$ **та** n**-тартибли сферик функциялар**

$$P_n(\cos\theta),\ P_{n,m}(\cos\theta)\cos m\varphi,\ P_{n,m}(\cos\theta)\sin m\varphi \qquad \mathbf{(55)}$$
$$(m=1,2,...,n)$$

кўринишида ифодаланади, бу ерда $P_n(x)-$ *(50)- формула ёрдамида аниқланувчи Лежандр кўпҳадлари,* $P_{n,m}(x)$ *лар эса (51)-формула ёрдамида аниқланади.*

Шуни эслатиб ўтамизки, $(1-x^2)^{\frac{m}{2}}$ кўпайтувчи $x=\cos\theta$ алмаштиришдан сўнг $\sin^m\theta$ га тенг деб ҳисобланади. (55)-ечимларни ихтиёрий ўзгармасларга кўпайтириш ва қўшиш ёрдамида n-тартибли сферик функциянинг умумий кўринишини топамиз:

$$У_n(\theta,\varphi)=a_0P_n(\cos\theta)+\sum_{m=1}^{n}(a_m\cos m\varphi+b_m\sin m\varphi)P_{n,m}(\cos\theta) \qquad \mathbf{(56)}$$

Шундай қилиб, қуйидаги теорема исботланди.

8-теорема. *Лаплас тенгламасини қаноатлантирувчи* n*-тартибли бир жинсли кўпҳаднинг умумий кўриниши* $r^n\cdot У_n(\theta,\varphi)$ *каби бўлади, бу ерда* $У_n(\theta,\varphi)$ *(56)-формула ёрдамида аниқланади.*

Изох. *(55)-ечимларнинг чизиқли комбинациясини олиш йўли билан тригонометрик функцияларнинг ўрнига кўрсаткичли функцияларни олиш мумкин. Унда (55) -* n*-тартибли сферик функциялар тўплами ўрнига қуйидаги* n*-тартибли сферик функциялар тўпламини ҳосил қиламиз:*

$$P_n(\cos\theta), P_{n,m}(\cos\theta)e^{im\varphi},..., P_{n,m}(\cos\theta)e^{im\varphi} \qquad \mathbf{(57)}$$

$$(m=1,2,...,n).$$

37. Ортогоналлик хоссалари.

Энди (55)-сферик функцияларнинг бирлик сферада ортогонал бўлишини исботлаймиз ва бу функциялар квадратларининг бирлик сфера бўйича интегралларини ҳисоблаймиз. Аввал ушбу

$$I_m=\int_{-1}^{1}[P_{n,m}(x)]^2dx$$

интегрални ҳисоблаш билан шуғулланамиз.

$P_{n,m}(x)$ функциянинг таърифига кўра

$$I_m=\int_{-1}^{1}\left[P_{n,m}(x)\right]^2dx=\int_{-1}^{1}(1-x^2)^m\cdot\frac{d^mP_n(x)}{dx^m}\cdot\frac{d^mP_n(x)}{dx^m}dx$$

бўлади. Агар $m=0$ бўлса $P_{n,0}(x)=P_n(x)$ бўлиб,

$$I_0=\int_{-1}^{1}[P_{n,m}(x)]^2dx=\frac{2}{2n+1} \qquad \mathbf{(58)}$$

тенглик ўринли бўлади (31-пунктга қаранг).

Бўлаклаб интеграллаш усулидан фойдаланиб қуйидаги тенгликни ёзиш мумкин:

$$I_m=(1-x^2)^m\cdot\frac{d^mP_n(x)}{dx^m}\cdot\frac{d^{m-1}P_n(x)}{dx^{m-1}}\Bigg|_{x=-1}^{x=1}-\int_{-1}^{1}\frac{d^{m-1}P_n(x)}{dx^{m-1}}\cdot\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)^m\frac{d^mP_n(x)}{dx^m}\right]dx$$

ёки

$$I_m=-\int_{-1}^{1}\frac{d^{m-1}P_n(x)}{dx^{m-1}}\cdot\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)^m\frac{d^mP_n(x)}{dx^m}\right]dx \qquad \mathbf{(59)}$$

Лекин

$$z=\frac{d^{m-1}P_n(x)}{dx^{m-1}}=\frac{1}{2^n\cdot n!}\frac{d^{n+m-1}(x^2-1)^n}{dx^{n+m-1}}$$

функциянинг ушбу

$$(1-x^2)\frac{d^{m+1}P_n(x)}{dx^{m+1}}-2mx\frac{d^mP_n(x)}{dx^m}+(n+m)(n-m+1)\frac{d^{m-1}P_n(x)}{dx^{m-1}}=0$$

тенгламани қаноатлантиришини текшириш қийин эмас.

Бу тенгликни $(1-x^2)^{m-1}$га кўпайтириб, уни қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин.

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)^m\frac{d^mP_n(x)}{dx^m}\right]=-(n+m)(n-m+1)(1-x^2)^{m-1}\frac{d^{m-1}P_n(x)}{dx^{m-1}}.$$

Буни (59)-формулага олиб бориб қўйсак,

$$I_m=(n+m)(n-m+1)\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{m-1}\frac{d^{m-1}P_n(x)}{dx^{m-1}}\frac{d^{m-1}P_n(x)}{dx^{m-1}}dx$$

ёки

$$I_m=(n+m)(n-m+1)I_{m-1}$$

реккурент формула ҳосил бўлади.

Реккурент формуладан кетма-кет фойдалансак

$$I_m=(n+m)(n-m+1)I_{m-1}=(n+m)(n-m+1)(n+m-1).$$

$$(n-m+2)I_{m-2}=...=(n+m)(n-m+1)(n+m-1).$$

$$(n-m+2)...(n+1)nI_0=(n+m)(n+m-1)(n+m-2)...$$

$$(n-m+1)I_0=\frac{(n+m)!}{(n-m)!}I_0$$

эканлиги келиб чиқади

Бу ердан ва (58)-тенгликдан

$$\int_{-1}^{1}[P_{n,m}(x)]^2dx=\frac{2}{2n+1}\cdot\frac{(n+m)!}{(n-m)!}$$

формулани ҳосил қиламиз.

Юқоридаги натижалардан фойдаланиб $У_n(\theta,\varphi)$ сферик функциядан бирлик сфера бўйича интегрални ҳисоблаш мумкин. θ ва φ лар сферадаги нуқтанинг оддий географик координаталари бўлади: $\{\varphi=const\}$ - меридианлар ва $\{\theta=const\}$ - параллеллар. Координат чизиқларнинг бундай танланишида сирт юзасининг элементи ушбу

$$d\sigma=\sin\theta\cdot d\theta d\varphi \qquad \textbf{(61)}$$

формула ёрдамида ҳисобланади.

Биринчи навбатда $У_p(\theta,\varphi)$ ва $У_q(\theta,\varphi)$ функцияларнинг $p\neq q$ бўлганда ортогонал бўлишини, яъни

$$\iint_{ss}У_p(\theta,\varphi)У_q(\theta,\varphi)d\sigma=0 \qquad \textbf{(62)}$$

тенгликнинг бажарилишини исботлаймиз.

Айтайлик, ϑ–сфера билан чегараланган хажм, S–сфера сирти бўлсин. Унда

$$U_p=r^pУ_p(\theta,\varphi) \text{ ва } U_q=r^qУ_q(\theta,\varphi) \qquad \textbf{(63)}$$

гармоник функциялар учун Грин формуласини қўллаймиз

$$\iint\limits_{s} (U_p \frac{\partial U_q}{\partial n} - U_q \frac{\partial U_p}{\partial n}) d\sigma = \iiint\limits_{\vartheta} (U_p \Delta U_q - U_q \Delta U_p) d\vartheta =$$

$$= ((\Delta U_p = \Delta U_q = 0)) = 0 .$$

Бу ҳолда нормал бўйича ҳосила r радиус бўйича ҳосила билан устма-уст тушади. Унда охирги формула ва (63)-формуладан

$$\iint\limits_{s} [qУ_p(\theta,\varphi) \cdot У_q(\theta,\varphi) - pУ_q(\theta,\varphi) \cdot У_p(\theta,\varphi)] = 0$$

тенглик, бу ердан эса тўғридан-тўғри (62)-формула келиб чиқади.

n нинг 1 та қийматига мос келувчи (55)-сферик функциялар ҳам ўзаро ортогонал бўлади.

Дарҳақиқат, бирлик сфера бўйича интеграллаш φ бўйича $(0,2\pi)$ оралиқда интеграллашга келтирилади. Лекин, (55)-функциялар φ га боғлиқ бўлган

$1, \cos\varphi, \sin\varphi, \cos 2\varphi, \sin 2\varphi, \ldots, \cos n\varphi, \sin n\varphi$

кўпайтувчиларни ўзида сақлайди ва бу кўпайтувчиларнинг ихтиёрий иккитасини кўпайтмасининг $(0;2\pi)$ оралиқ бўйича интреграли 0 га тенг. Худди шу каби (57)-функцияларнинг ҳам ортогонал система ҳосил қилишини кўриш мумкин.

Энди $P_n(\cos\theta) - \varphi$ га боғлиқ бўлмаган сферик функцияни оламиз ва $P_n^2(\cos\theta)$ функциядан бирлик сфера бўйича интегрални ҳисоблаймиз:

$\iint\limits_{S} P_n^2(\cos\theta) d\sigma =$(((61)-га кўра $d\sigma = \sin\theta \cdot d\theta d\varphi$))=

$$= \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} P_n^2(\cos\theta) \sin\theta \cdot d\theta d\varphi = 2\pi \int_0^{2\pi} P_n^2(\cos\theta) \sin\theta d\theta =$$

=(($\cos\theta = x$ алмаштириш бажарамиз))= $2\pi \int_{-1}^{1} P_n^2(x) dx = (($(58)-тенгликка кўра $\int_{-1}^{1} P_n^2(x) dx = \frac{2}{2n+1})) = \frac{4\pi}{2n+1}$.

Худди шу каби бошқа функцияларга нисбатан

$$\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} [P_{n,m}(\cos\theta)]^2 \sin^2 m\varphi \cdot \sin\theta d\theta d\varphi = \pi \int_{-1}^{1} [P_{n,m}(x)]^2 dx$$

тенглик ҳосил бўлади. Бу тенглик ва (60)-формуладан фойдаланиб қуйидаги муносабатларни ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} \iint\limits_S [P_n(\cos\theta)]^2 d\sigma = \dfrac{4\pi}{2n+1}, \\ \iint\limits_S [P_{n,m}(\cos\theta)\cos m\varphi]^2 d\sigma = \dfrac{2\pi}{2n+1}\dfrac{(n+m)!}{(n-m)!}, \\ \iint\limits_S [P_{n,m}(\cos\theta)\sin m\varphi]^2 d\sigma = \dfrac{2\pi}{2n+1}\dfrac{(n+m)!}{(n-m)!} \end{cases} \qquad \textbf{(64)}$$

Бу формулалардан сфера сиртида берилган ихтиёрий функцияни сферик функциялар бўйича ёйиш масалаларида фойдаланилади.

Назорат саволлари.

1. **Ортогонал система тушунчаси.**
2. **Ортогонал системанинг чизиқли эркли система бўлиши исботлансин.**
3. **Грамм детерминанти билан чизиқли боғлиқ система орасидаги боғланиш.**
4. $1, \cos x, \sin x,\ \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots$ **тригонометрик функциялар системасининг** $L_2[-\pi;\pi]$ **фазода ортогонал бўлиши исботлансин.**
5. **Лежандр кўпҳадларининг** $L_2[-1;1]$ **фазода ортогонал система ташкил қилиши исботлансин.**
6. **Гильбертолди фазосининг чекли элементлари системаси чизиқли боғлиқ бўлса, у ҳолда Грамм детерминантининг нолга тенг бўлиши исботлансин.**
7. **Ушбу**

$$\sin(2n+1)\frac{x}{2}, \quad n = 1,2,\ldots$$

функциялар кетма-кетлиги $[0;\pi]$ **кесмада ортогонал система ташкил қилиши кўрсатилсин.**

8. **Лежандр кўпҳадининг нормаси ҳисоблансин.**
9. **Берилган чизиқли эркли системани ортогоналлаштириш.**
10. **Ушбу**

$$1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots$$

системанинг ихтиёрий ораликда чизиқли эркли бўлиши исботлансин.

11. **Фурье қаторининг таърифи.**
12. **Бессель тенгсизлиги.**

13. **Фурье коэффицентларининг нолга интилиши ҳақидаги тасдиқ келтирилсин ва исботлансин.**
14. **Фурье қаторининг яқинлашиши.**
15. **Тўла ортогонал системалар ва уларнинг Фурье қатори билан боғланиши.**
16. **Парсеваль тенглиги.**
17. **Фурье қаторига мос келувчи элементнинг ягоналиги ҳақидаги теорема исботлансин.**
18. **Сферик функциянинг таърифи.**
19. **Лаплас тенгламасининг n-тартибли бир жинсли кўпҳадардан иборат бўлган чизиқли эркли ечимлари ҳақида теорема келтирилсин ва исботлансин.**
20. **Сферик функцияларнинг ошкор кўриниши.**
21. $P_n(x)$ **ва** $P_{n,m}(x)$ **функциялар ҳамда уларнинг хоссалари.**
22. **Лаплас тенгламасини қаноатлантирувчи n-тартибли бир жинсли кўпҳаднинг умумий кўриниши ҳақидаги теорема келтирилсин ва исботлансин.**
23. **Ушбу**

$$\int_{-1}^{1}[P_{n,m}(x)]^2 dx = \frac{2}{2n+1}\cdot\frac{(n+m)!}{(n-m)!}$$

тенглик исботлансин.

24. **Сферик функцияларнинг ортогоналлик хоссаси.**

Адабиётлар.

1. **Фихтенгольц Г.М.** *«Курс дифференциального и интегрального исчисления», т. 3, М.: «Наука» 1969.*
2. **Шнейдер В.Е., Слуцкий А.И., Шумов А.С.** *«Краткий курс высшей математики», т.2, М.: «Высшая школа», 1980.*
3. **ЕфимовА.В.,Золотарёв Ю.Г., Тернигорева В.М.,** *«Математический анализ. Специальные разделы», т.2, М.: «Высшая школа»,1980.*
4. **Кудрявцев Л.Д.** *«Математический анализ», т.2,М.: «Высшая школа»,1973.*
5. **Рудин У**. *«Основы математического анализа», М.: «Мир»,1964.*
6. **Смирнов В.И**. *«Курс высшей математики», т.3,ч.2. М.: «Наука»1974.*
7. **Лаврентьев М.А., Шабат Б.В**. «*Методы теории функций комплексного переменного», М.: «Наука»,1973*.
8. **Титчмарш Е**. *«Теория функций», М.: «Наука», 1980.*