TOSHKENT DAVLAT PEDAGOGIKA UNIVERSITETI
HUZURIDAGI PEDAGOG KADRLARNI QAYTA
TAYYORLASH VA ULARNING MALAKASINI
OSHIRISH TARMOQ MARKAZI

MATEMATIKA O'QITISH METODIKASI

Matematikaning dolzarb muammolari va zamonaviy yutuqlari

MODULI BO'YICHA
O'QUV-USLUBIY MAJMUA

TOSHKENT

Mazkur o‘quv-uslubiy majmua Oliy ta’lim, fan va innovatsiyalar vazirligining 2023 yil “25” avgustdagi 391-sonli buyrug‘i bilan tasdiqlangan o‘quv reja va dastur asosida tayyorlandi.

Tuzuvchilar: **D.YUnusova -** pedagogika fanlari doktori, professor.
R.Turgunbayev–fizika-matematika fanlari nomzodi, professor**.**
D.Davletov- fizika-matematika fanlari nomzodi, dosent

Taqrizchilar: **R.Beshimov** - fizika-matematika fanlari doktori, professor.
M.Nurillayev - fizika-matematika fanlari nomzodi, dosent

O‘quv-uslubiy majmua TDPU Kengashining 2023 yil “ 27 ” iyundagi 11- sonli qarori bilan nashrga tavsiya qilingan.

MUNDARIJA

I. ISHCHI DASTUR

Kirish

O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017-yil 7 fevraldagi PF-4947-sonli Farmoni bilan tasdiqlangan “2017-2021-yillarda O‘zbekiston Respublikasini rivojlantirishning beshta ustuvor yo‘nalishi bo‘yicha Harakatlar Strategiyasi”da milliy kadrlarning raqobatbardoshligi va umumjahon amaliyotiga asoslangan oliy ta’lim milliy tizimining sifati oshishiga, Bolonya jarayoni ishtirokchi mamlakatlari diplomlarini o‘zaro tan olishga, o‘qituvchi va talabalar bilan almashuv dasturlarini amalga oshirishga ko‘maklashuvchi 1999 yil 19-iyundagi Bolonya deklarasiyasiga qo‘shilish masalasini ko‘rib chiqish belgilab qo‘yilgan.

O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2019 yil 8 oktyabrdagi PF-5847-son Farmoni bilan tasdiqlangan “O‘zbekiston Respublikasi Oliy ta’lim tizimini 2030 yilgacha rivojlantirish konsepsiyasi”da xalqaro standartlar asosida yuqori malakali, kreativ va tizimli fikrlaydigan, mustaqil qaror qabul qila oladigan kadrlar tayyorlash, oliy ta’lim jarayonlariga raqamli texnologiyalar va zamonaviy o‘qitish usullarni joriy etish, oliy ta’lim muassasalarida ilmiy-tadqiqot ishlari natijadorligini oshirish, yoshlarni ilmiy faoliyatga keng jalb etish, ilm-fanning innovasion infratuzilmasini shakllantirish, oliy ta’lim muassasalarida o‘quv jarayonini bosqichma-bosqich kredit-modul tizimiga o‘tkazish, o‘quv jarayonida kompetensiyalarni kuchaytirishga qaratilgan metodika va texnologiyalarni joriy etish, o‘quv jarayonini amaliy ko‘nikmalarni shakllantirishga yo‘naltirish, pedagogik ta’lim yo‘nalishlari va mutaxassisliklarida tahsil olayotgan talabalarda ta’lim jarayonida zamonaviy pedagogik texnologiyalarni qo‘llash ko‘nikmalarini shakllantirish, yuqori malakali professional pedagog kadrlarni etkazib berish bo‘yicha aniq vazifalar belgilab berilgan.

Respublikada ta’lim tizimini mustahkamlash, uni zamon talablari bilan uyg‘unlashtirishga katta ahamiyat berilmoqda. Bunda mutaxassis kadrlarni tayyorlash, ta’lim va tarbiya berish tizimi islohatlar talablari bilan hamoxang bo‘lishi muhim ahamiyat kasb etadi. Zamon talablariga javob bera oladigan mutaxassis kadrlarni tayyorlash, Davlat talablari asosida ta’lim va uning barcha tarkibiy tuzilmalarini takomillashtirib borish oldimizda turgan dolzarb masalalardan biridir.

Ushbu dasturda oliy ta’lim matematika o‘qituvchisining maxsus ilmiy-nazariy kompetentligining nazariy asoslari: pedagogika OTMda matematik analiz o‘quv fanining tezaurusi, oliy ta’limda abstrakt algebraning boshlangich kursi, OTMda geometriya mazmunini takomillashtirish masalalarini nazarda tutuvchi mazmun bayon etilgan

I.2. Modulning maqsadi va vazifalari

Modulning maqsadi: qayta tayyorlash va malaka oshirish kursi tinglovchilarining maxsus ilmiy-nazariy kompetensiyalarini rivojlantirishga oid yangi bilimlar, ko‘nikmalar hamda malakalarini tarkib toptirishdan iborat.

Modulning vazifalari:

- oliy ta’lim matematika o‘qituvchisi maxsus kompetentligining nazariy asoslarini tahlil qilish;
- matematika o‘qituvchisining matematik analiz va unga turdosh fanlarga oid nazariy bilim, ko‘nikma va malakalarini rivojlantirish;
- matematika o‘qituvchisining algebra va unga turdosh fanlarga oid nazariy bilim, ko‘nikma va malakalarini rivojlantirish;
- matematika o‘qituvchisining geometriya va unga turdosh fanlarga oid nazariy bilim, ko‘nikma va malakalarini rivojlantirish;
- tinglovchilarda maxsus kasbiy kompetensiyalarini rivojlantirish troektoriyalarini ishlab chiqish va amalda qo‘llash ko‘nikmasi va malakalarini shakllantirish.

I.3. Modul bo‘yicha tinglovchilarning bilimi, ko‘nikmasi, malakasi va kompetensiyalariga qo‘yiladigan talablar

“Matematikaning dolzarb muammolari va zamonaviy yutuqlari” modulini o‘zlashtirish jarayonida:

Tinglovchi:

- fanning o‘quv tezaurusi
- talabaning leksikoni
- o‘quv tezaurusi tarkibi
- matematik analiz fani modullarining o‘quv tezaurusi
- matematik leksikonni shakllantirishda standart topshiriqlar va masalalar sistemasi
- algebraik amal
- algebra va uning turlari
- algebralarlar gomomorfizmi
- Evklid geometriyasining zamonaviy aksiomatikasi
- noevklidiy geometriyalar

haqidagi **bilimlarga ega bo‘lishi**;

- matematik analiz fani mavzusi (moduli) bo‘yicha
- o‘quv tezaurusini tavsiflash
- talabaning matematik leksikonini tavsiflash
- masalalar sistemasini tuzish
- abstrakt algebralarni tatbiq etish;
- algebralarni qiyosiy tahlil qilish;
- matematik ob’ektlarni algebra tashkil etishini asoslash;
- matematikaning turli bo‘limlarida abstrakt algebralarni qo‘llash;
- Evklid geometriyasining zamonaviy aksiomatikasi natijalaridan foydalanish;
- tekislikda va fazoda geometrik yasashlarga oid masalalarni tasniflash;
- oliy ta’lim matematika fanlari o‘quv mashg‘ulotlarini zamonaviy yondashuvlar asosida tashkil etish;
- talabalar bilish faoliyatini rivojlantiruvchi topshiriqlarni loyihalash;
- oliy ta’lim matematika fanlari mazmunini tizimli tahlil qilish;

- oliy ta’lim o‘quv mashg‘ulotini tizimli tahlil qilish **ko‘nikma va malakalarini egallashi;**

- matematika fani va ta’limi yutuqlarini oliy ta’lim matematika fanlarini o‘qitish jarayoniga joriy etish **kompetensiyasini egallashi lozim.**

I.4. Modulni tashkil etish va o‘tkazish bo‘yicha tavsiyalar

“Matematikaning dolzarb muammolari va zamonaviy yutuqlari” moduli ma’ruza va amaliy mashg‘ulotlar shaklida olib boriladi.

Kursni o‘qitish jarayonida ta’limning zamonaviy metodlari, axborot-kommunikasiya texnologiyalari qo‘llanilishi, shuningdek, ma’ruza darslarida zamonaviy kompyuter texnologiyalari yordamida taqdimot va elektron-didaktik texnologiyalarni;

- o‘tkaziladigan amaliy mashg‘ulotlarda texnik vositalardan, blis-so‘rovlar, aqliy hujum, guruhli fikrlash, kichik guruhlar bilan ishlash, va boshqa interfaol ta’lim metodlarini qo‘llash nazarda tutiladi.

I.5. Modulning o‘quv rejadagi boshqa modullar bilan bog‘liqligi va uzviyligi

«Matematikaning dolzarb muammolari va zamonaviy yutuqlari» moduli bo‘yicha mashg‘ulotlar o‘quv rejasidagi “Ta’lim jarayoniga raqamli texnologiyalarni joriy etish”, “Kasbiy kompetensiyalarni rivojlantirish”, “Talabalar bilimini baholash” hamda “Matematikani o‘qitishda innovasion yondashuvlar” kabi modullar bilan uzviy aloqadorlikda olib boriladi.

I.6. Modulning uslubiy jihatdan uzviy ketma-ketligi

Modul bo‘yicha ma’ruza va amaliy mashg‘ulotlar mazmuni mantiqiy izchillikda mavzuni nazariy hamda amaliy yoritishga yo‘naltirilgan. Mashg‘ulotlarda modulni o‘qitishda qo‘llash rejalashtirilgan metod va vositalar mavzu, mashg‘ulot shakli, o‘quv axborotiga mos tanlanadi va ularning izchilligiga e’tibor qaratiladi.

I.7. Modulning oliy ta’limdagi o‘rni

Modulni o‘zlashtirish orqali tinglovchilar OTMlarida matematik ta’lim va tarbiya jarayonlarini nazariy asoslarini o‘rganish, ularni tahlil etish, amalda qo‘llash va baholashga doir kasbiy kompetentlikka ega bo‘ladilar.

I.8.Modul bo‘yicha soatlar taqsimoti

№	Modul mavzulari	Auditoriya o‘quv yuklamasi		
		Jami	**Nazariy**	**Amaliy mashg‘ulot**
1.	Pedagogika OTMda matematik analiz o‘quv fanining tezaurusi	8	4	4
2.	Oliy ta’limda abstrakt algebraning boshlangich kursi	6	2	4
3.	OTMda geometriya mazmunini takomillashtirish masalalari	8	4	4
	Jami:	**22**	**10**	**12**

NAZARIY MASHG‘ULOTLAR MAZMUNI

1-MAVZU: PEDAGOGIKA OTMDA MATEMATIK ANALIZ O‘QUV FANINING TEZAURUSI (4 soat)

Tezaurus tushunchasi. O‘quv tezaurusi tarkibi va talabaning matematik leksikoni. Matematik analiz o‘quv fanining o‘quv tezaurusi. Talabaning matematik leksikonini shakllantirishda standart topshiriqlar va masalalar sistemasi.

2-MAVZU: OLIY TA’LIMDA ABSTRAKT ALGEBRANING BOSHLANGICH KURSI (2 soat)

Algebraik amal va uni aniqlash. Algebra va uning turlari. Algebralarlar gomomorfizmi. Matematikaning turli bo‘limlarida abstrakt algebralarning qo‘llanilishi.

3-MAVZU: OTMDA GEOMETRIYA MAZMUNINI TAKOMILLASHTIRISH MASALALARI (4 soat)

Evklid geometriyasining zamonaviy aksiomatikasi, Evklid va noevklid geometriyalarning qiyosiy tahlili, noevklid geometriyalari bo‘yicha ilmiy tadqiqotlar taxlili, tekislikda va fazoda geometrik yasashlar.

AMALIY MASHG‘ULOTLAR MAZMUNI

1-MAVZU: PEDAGOGIKA OTMDA MATEMATIK ANALIZ O‘QUV FANINING TEZAURUSI (4 soat)

Pedagogika OTM “Matematik analiz” o‘quv fanining o‘quv tezaurusi. Talabaning matematik leksikonini shakllantirishda standart topshiriqlar va masalalar sistemasi.

2-MAVZU: OLIY TA’LIMDA ABSTRAKT ALGEBRANING BOSHLANG‘ICH KURSI (4 soat)

Algebraik amal va uning turini aniqlash. Gruppa, xalqa, maydon v.b. algebralarni qurish. Algebralarlar gomomorfizmi turini aniqlash. Matematikaning turli bo‘limlarida abstrakt algebralarning qo‘llanilishini asoslash.

3-MAVZU: OTMDA GEOMETRIYA MAZMUNINI TAKOMILLASHTIRISH MASALALARI (4 soat)

Evklid va noevklid geometriyalarning qiyosiy tahlili, noevklid geometriyalarga oid ilmiy tadqiqotlar, tekislikda va fazoda geometrik yasashlar.

O‘QITISH SHAKLLARI

Mazkur modul bo‘yicha quyidagi o‘qitish shakllaridan foydalaniladi:

- ma’ruzalar, amaliy mashg‘ulotlar (ilmiy-nazariy ma’lumotlarni anglab olish, maxsus kompetensiyani takomillashtirish motivasiyasini rivojlantirish, nazariy bilimlarni mustahkamlash);
- davra suhbatlari (ko‘rilayotgan muammo echimlari bo‘yicha taklif berish qobiliyatini rivojlantirish, idrok qilish va mantiqiy xulosalar chiqarish);
- bahs va munozaralar (muammolar echimi bo‘yicha dalillar va asosli faktlarni taqdim qilish, muammolar echimini topish qobiliyatini rivojlantirish).
- trening mashg‘ulotlar (oliy ta’lim matematika fanlari o‘quv materiallarini takomillashtirish tajribasiga ega bo‘lish).

II. MODULNI O‘QITISHDA FOYDALANILADIGAN INTREFAOL TA’LIM METODLARI

“Aqliy hujum” metodi - biror muammo bo‘yicha ta’lim oluvchilar tomonidan bildirilgan erkin fikr va mulohazalarni to‘plab, ular orqali ma’lum bir echimga kelinadigan metoddir. “Aqliy hujum” metodining yozma va og‘zaki shakllari mavjud. Og‘zaki shaklida ta’lim beruvchi tomonidan berilgan savolga ta’lim oluvchilarning har biri o‘z fikrini og‘zaki bildiradi. Ta’lim oluvchilar o‘z javoblarini aniq va qisqa tarzda bayon etadilar. YOzma shaklida esa berilgan savolga ta’lim oluvchilar o‘z javoblarini qog‘oz kartochkalarga qisqa va barchaga ko‘rinarli tarzda yozadilar. Javoblar doskaga (magnitlar yordamida) yoki «pinbord» doskasiga (ignalar yordamida) mahkamlanadi. “Aqliy hujum” metodining yozma shaklida javoblarni ma’lum belgilar bo‘yicha guruhlab chiqish imkoniyati mavjuddir. Ushbu metod to‘g‘ri va ijobiy qo‘llanilganda shaxsni erkin, ijodiy va nostandart fikrlashga o‘rgatadi.

“Aqliy hujum” metodidan foydalanilganda ta’lim oluvchilarning barchasini jalb etish imkoniyati bo‘ladi, shu jumladan ta’lim oluvchilarda muloqot qilish va munozara olib borish madaniyati shakllanadi. Ta’lim oluvchilar o‘z fikrini faqat og‘zaki emas, balki yozma ravishda bayon etish mahorati, mantiqiy va tizimli fikr yuritish ko‘nikmasi rivojlanadi. Bildirilgan fikrlar baholanmasligi ta’lim oluvchilarda turli g‘oyalar shakllanishiga olib keladi. Bu metod ta’lim oluvchilarda ijodiy tafakkurni rivojlantirish uchun xizmat qiladi.

“Aqliy hujum” metodi ta’lim beruvchi tomonidan qo‘yilgan maqsadga qarab amalga oshiriladi:

1. Ta’lim oluvchilarning boshlang‘ich bilimlarini aniqlash maqsad qilib qo‘yilganda, bu metod darsning mavzuga kirish qismida amalga oshiriladi.

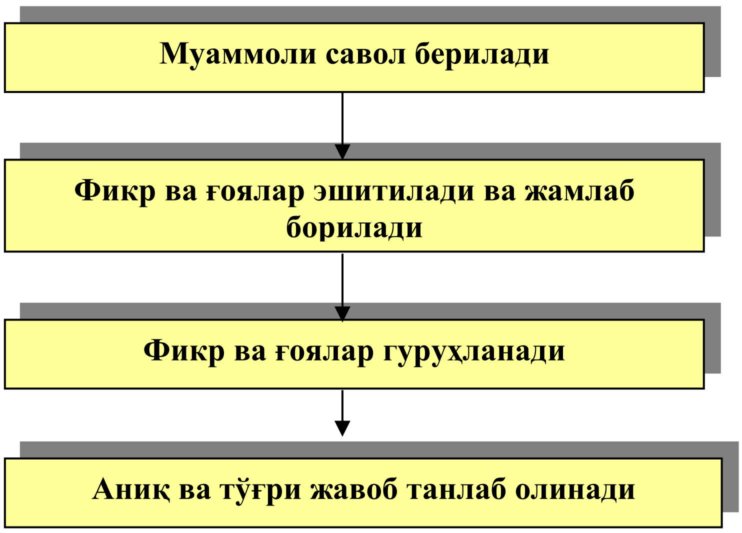
2. Mavzuni takrorlash yoki bir mavzuni keyingi mavzu bilan bog‘lash maqsad qilib qo‘yilganda –yangi mavzuga o‘tish qismida amalga oshiriladi.

3. O‘tilgan mavzuni mustahkamlash maqsad qilib qo‘yilganda-mavzudan

so‘ng, darsning mustahkamlash qismida amalga oshiriladi.

“Aqliy hujum” metodini qo‘llashdagi asosiy qoidalar:

1. Bildirilgan fikr-g‘oyalar muhokama qilinmaydi va baholanmaydi.
2. Bildirilgan har qanday fikr-g‘oyalar, ular hatto to‘g‘ri bo‘lmasa ham inobatga olinadi.
3. Har bir ta’lim oluvchi qatnashishi shart.



“Aqliy hujum” metodining tuzilmasi

“Aqliy hujum” metodining bosqichlari quyidagilardan iborat:

1. Ta’lim oluvchilarga savol tashlanadi va ularga shu savol bo‘yicha o‘z javoblarini (fikr, g‘oya va mulohaza) bildirishlarini so‘raladi;
2. Ta’lim oluvchilar savol bo‘yicha o‘z fikr-mulohazalarini bildirishadi;
3. Ta’lim oluvchilarning fikr-g‘oyalari (magnitafonga, videotasmaga, rangli qog‘ozlarga yoki doskaga) to‘planadi;
4. Fikr-g‘oyalar ma’lum belgilar bo‘yicha guruhlanadi;
5. YUqorida qo‘yilgan savolga aniq va to‘g‘ri javob tanlab olinadi.

“Aqliy hujum” metodining afzalliklari:

- natijalar baholanmasligi ta’lim oluvchilarda turli fikr-g‘oyalarning shakllanishiga olib keladi;
- ta’lim oluvchilarning barchasi ishtirok etadi;
- fikr-g‘oyalar vizuallashtirilib boriladi;

• ta'lim oluvchilarning boshlang'ich bilimlarini tekshirib ko'rish imkoniyati mavjud;

• ta'lim oluvchilarda mavzuga qiziqish uyg'otadi.

"Aqliy hujum" metodining kamchiliklari:

• ta'lim beruvchi tomonidan savolni to'g'ri qo'ya olmaslik;

• ta'lim beruvchidan yuqori darajada eshitish qobiliyatining talab etilishi.

«FSMU» METODI. Texnologiyaning maqsadi: Mazkur texnologiya ishtirokchilardagi umumiy fikrlardan xususiy xulosalar chiqarish, aqqoslash, qiyoslash orqali axborotni o'zlashtirish, xulosalash, shuningdek, mustaqil ijodiy fikrlash ko'nikmalarini shakllantirishga xizmat qiladi. Mazkur texnologiyadan ma'ruza mashg'ulotlarida, mustahkamlashda, o'tilgan mavzuni so'rashda, uyga vazifa berishda hamda amaliy mashg'ulot natijalarini tahlil etishda foydalanish tavsiya etiladi.

Ф	• фикрингизни баён этинг
С	• фикрингизни баёнига сабаб кўрсатинг
М	• кўрсатган сабабингизни исботлаб мисол келтиринг
У	• фикрингизни умумлаштиринг

Texnologiyani amalga oshirish tartibi:

-qatnashchilarga mavzuga oid bo'lgan yakuniy xulosa yoki g'oya taklif etiladi;

-har bir ishtirokchiga FSMU texnologiyasining bosqichlari yozilgan qog'ozlarni tarqatiladi:

-ishtirokchilarning munosabatlari individual yoki guruhiy tartibda taqdimot qilinadi.

FSMU tahlili qatnashchilarda kasbiy-nazariy bilimlarni amaliy mashqlar va mavjud tajribalar asosida tezroq va muvaffaqiyatli o‘zlashtirilishiga asos bo‘ladi.

“INSERT” METODI. Metodning maqsadi: Mazkur metod o‘quvchilarda yangi axborotlar tizimini qabul qilish va bilmlarni o‘zlashtirilishini engillashtirish maqsadida qo‘llaniladi, shuningdek, bu metod o‘quvchilar uchun xotira mashqi vazifasini ham o‘taydi.

Metodni amalga oshirish tartibi:

- o‘qituvchi mashg‘ulotga qadar mavzuning asosiy tushunchalari mazmuni yoritilgan input-matnni tarqatma yoki taqdimot ko‘rinishida tayyorlaydi;
- yangi mavzu mohiyatini yorituvchi matn ta’lim oluvchilarga tarqatiladi yoki taqdimot ko‘rinishida namoyish etiladi;
- ta’lim oluvchilar individual tarzda matn bilan tanishib chiqib, o‘z shaxsiy qarashlarini maxsus belgilar orqali ifodalaydilar. Matn bilan ishlashda talabalar yoki qatnashchilarga quyidagi maxsus belgilardan foydalanish tavsiya etiladi:

Belgilar	**1-matn**	**2-matn**	**3-matn**
“V” – tanish ma’lumot.			
“?” – mazkur ma’lumotni tushunmadim, izoh kerak.			
“+” bu ma’lumot men uchun yangilik.			
“– ” bu fikr yoki mazkur ma’lumotga qarshiman?			

Belgilangan vaqt yakunlangach, ta’lim oluvchilar uchun notanish va tushunarsiz bo‘lgan ma’lumotlar o‘qituvchi tomonidan tahlil qilinib, izohlanadi, ularning mohiyati to‘liq yoritiladi. Savollarga javob beriladi va mashg‘ulot yakunlanadi.

“BAHS-MUNOZARA” METODI - biror mavzu bo‘yicha ta’lim oluvchilar bilan o‘zaro bahs, fikr almashinuv tarzida o‘tkaziladigan o‘qitish metodidir.

Har qanday mavzu va muammolar mavjud bilimlar va tajribalar asosida muhokama qilinishi nazarda tutilgan holda ushbu metod qo‘llaniladi. Bahs-munozarani boshqarib borish vazifasini ta’lim oluvchilarning biriga topshirishi yoki ta’lim beruvchining o‘zi olib borishi mumkin. Bahs-munozarani erkin holatda olib borish va har bir ta’lim oluvchini munozaraga jalb etishga harakat qilish lozim. Ushbu metod olib borilayotganda ta’lim oluvchilar orasida paydo bo‘ladigan nizolarni darhol bartaraf etishga harakat qilish kerak.

“Bahs-munozara” metodini o‘tkazishda quyidagi qoidalarga amal qilish kerak:

- ✓ barcha ta’lim oluvchilar ishtirok etishi uchun imkoniyat yaratish;
- ✓ “o‘ng qo‘l” qoidasi (qo‘lini ko‘tarib, ruhsat olgandan so‘ng so‘zlash)ga rioya qilish;
- ✓ fikr-g‘oyalarni tinglash madaniyati;
- ✓ bildirilgan fikr-g‘oyalarning takrorlanmasligi;
- ✓ bir-birlariga o‘zaro hurmat.

Quyida “Bahs-munozara” metodini o‘tkazish tuzilmasi berilgan.

“Bahs-munozara” metodining tuzilmasi

“Bahs-munozara” metodining bosqichlari quyidagilardan iborat:

1. Ta’lim beruvchi munozara mavzusini tanlaydi va shunga doir savollar ishlab chiqadi.

2. Ta’lim beruvchi ta’lim oluvchilarga muammo bo‘yicha savol beradi va ularni munozaraga taklif etadi.

3. Ta’lim beruvchi berilgan savolga bildirilgan javoblarni, ya’ni turli g‘oya va fikrlarni yozib boradi yoki bu vazifani bajarish uchun ta’lim oluvchilardan birini kotib etib tayinlaydi. Bu bosqichda ta’lim beruvchi ta’lim oluvchilarga o‘z fikrlarini erkin bildirishlariga sharoit yaratib beradi.

4. Ta’lim beruvchi ta’lim oluvchilar bilan birgalikda bildirilgan fikr va g‘oyalarni guruhlarga ajratadi, umumlashtiradi va tahlil qiladi.

5. Tahlil natijasida qo‘yilgan muammoning eng maqbul echimi tanlanadi.

TRENING. Trening zamonaviy ta’lim shakllaridan biri hisoblanib, u interfaol mashg‘ulotlarni amalga oshirishning o‘ziga xos ko‘rinishidir.

Treninglar o‘rganilishi lozim bo‘lgan nazariy g‘oya va fikrlarni amaliy ish hamda mashqlar davomida o‘zlashtirish imkoniyatini beradi va ta’lim oluvchilarda shaxslararo o‘zaro hamkorlikning samarali ko‘nikmasini shakllantirishga, shuningdek, mutaxassis kasbiy kompetentligining umumiy darajasini oshirishga yo‘naltiriladi.

Har qanday pedagogik treningni tashkil etish quyidagi bosqichlardan tashkil topadi:

1. Tashkiliy bosqich: guruhni yig‘ish yoki shakllantirish.

2. Boshlang‘ich bosqich: guruh me’yorlarini ishlab chiqish, tanishuv va mashg‘ulotdan kutuvlarni aniqlash.

3. Faoliyatli bosqich: trening turi va o‘tkazish metodikasini belgilash.

4. YAkuniy bosqich (refleksiya). Trening mobaynida talabalar nazariy ma’lumotlarni o‘zlashtirish bilan birga, ularda bilish, emmosional va xulq-atvor ko‘nikmalari ham rivojlanib boradi.

“DAVRA SUHBATI” METODI – aylana stol atrofida berilgan muammo yoki savollar yuzasidan ta’lim oluvchilar tomonidan o‘z fikrmulohazalarini bildirish orqali olib boriladigan o‘qitish metodidir.

“Davra suhbati” metodi qo‘llanilganda stol-stullarni doira shaklida joylashtirish kerak. Bu har bir ta’lim oluvchining bir-biri bilan “ko‘z aloqasi”ni o‘rnatib turishiga yordam beradi. Davra suhbatining og‘zaki va yozma shakllari mavjuddir. Og‘zaki davra suhbatida ta’lim beruvchi mavzuni boshlab beradi va ta’lim oluvchilardan ushbu savol bo‘yicha o‘z fikrmulohazalarini bildirishlarini so‘raydi va aylana bo‘ylab har bir ta’lim oluvchi o‘z fikr-mulohazalarini og‘zaki bayon etadilar. So‘zlayotgan ta’lim oluvchini barcha diqqat bilan tinglaydi, agar muhokama qilish lozim bo‘lsa, barcha fikr-mulohazalar tinglanib bo‘lingandan so‘ng muhokama qilinadi. Bu esa ta’lim oluvchilarning mustaqil fikrlashiga va nutq madaniyatining rivojlanishiga yordam beradi.

Davra stolining tuzilmasi

YOzma davra suhbatida ham stol-stullar aylana shaklida joylashtirilib, har bir ta’lim oluvchiga konvert qog‘ozi beriladi. Har bir ta’lim oluvchi konvert ustiga ma’lum bir mavzu bo‘yicha o‘z savolini beradi va “Javob varaqasi”ning biriga o‘z javobini yozib, konvert ichiga solib qo‘yadi. SHundan so‘ng konvertni soat yo‘nalishi bo‘yicha yonidagi ta’lim oluvchiga uzatadi. Konvertni olgan ta’lim oluvchi o‘z javobini “Javoblar varaqasi”ning biriga yozib, konvert ichiga solib qo‘yadi va yonidagi ta’lim oluvchiga uzatadi. Barcha konvertlar aylana bo‘ylab harakatlanadi. YAkuniy qismda barcha konvertlar yig‘ib olinib, tahlil qilinadi.

“Davra suhbati” metodining bosqichlari quyidagilardan iborat:

1.Mashg‘ulot mavzusi e’lon qilinadi.

2. Ta’lim beruvchi ta’lim oluvchilarni mashg‘ulotni o‘tkazish tartibi bilan tanishtiradi.

3. Har bir ta’lim oluvchiga bittadan konvert va javoblar yozish uchun guruhda necha ta’lim oluvchi bo‘lsa, shunchadan “Javoblar varaqalari”ni tarqatilib, har bir javobni yozish uchun ajratilgan vaqt belgilab qo‘yiladi. Ta’lim oluvchi konvertga va “Javoblar varaqalari”ga o‘z ismi-sharifini yozadi.

4. Ta’lim oluvchi konvert ustiga mavzu bo‘yicha o‘z savolini yozadi va “Javoblar varaqasi”ga o‘z javobini yozib, konvert ichiga solib qo‘yadi.

5. Konvertga savol yozgan ta’lim oluvchi konvertni soat yo‘nalishi bo‘yicha yonidagi ta’lim oluvchiga uzatadi.

6. Konvertni olgan ta’lim oluvchi konvert ustidagi savolga “Javoblar varaqalari”dan biriga javob yozadi va konvert ichiga solib qo‘yadi hamda yonidagi ta’lim oluvchiga uzatadi.

7. Konvert davra stoli bo‘ylab aylanib, yana savol yozgan ta’lim oluvchining o‘ziga qaytib keladi. Savol yozgan ta’lim oluvchi konvertdagi “Javoblar varaqalari”ni baholaydi.

8. Barcha konvertlar yig‘ib olinadi va tahlil qilinadi.

Ushbu metod orqali ta’lim oluvchilar berilgan mavzu bo‘yicha o‘zlarining bilimlarini qisqa va aniq ifoda eta oladilar. Bundan tashqari ushbu metod orqali ta’lim oluvchilarni muayyan mavzu bo‘yicha baholash imkoniyati yaratiladi. Bunda ta’lim oluvchilar o‘zlari bergan savollariga guruhdagi boshqa ta’lim oluvchilar bergan javoblarini baholashlari va ta’lim beruvchi ham ta’lim oluvchilarni ob’ektiv baholashi mumkin.

“MUAMMOLI VAZIYAT” METODI - ta’lim oluvchilarda muammoli vaziyatlarning sabab va oqibatlarini tahlil qilish hamda ularning echimini topish bo‘yicha ko‘nikmalarini shakllantirishga qaratilgan metoddir.

“Muammoli vaziyat” metodi uchun tanlangan muammoning murakkabligi ta’lim oluvchilarning bilim darajalariga mos kelishi kerak. Ular qo‘yilgan muammoning echimini topishga qodir bo‘lishlari kerak, aks holda echimni topa olmagach, ta’lim oluvchilarning qiziqishlari so‘nishiga, o‘zlariga bo‘lgan ishonchlarining yo‘qolishiga olib keladi. «Muammoli vaziyat» metodi qo‘llanilganda ta’lim oluvchilar mustaqil fikr yuritishni, muammoning sabab va oqibatlarini tahlil qilishni, uning echimini topishni o‘rganadilar.

“Muammoli vaziyat” metodining bosqichlari quyidagilardan iborat:

1.Ta’lim beruvchi mavzu bo‘yicha muammoli vaziyatni tanlaydi, maqsad va vazifalarni aniqlaydi. Ta’lim beruvchi ta’lim oluvchilarga muammoni bayon qiladi.

2. Ta’lim beruvchi ta’lim oluvchilarni topshiriqning maqsad, vazifalari va shartlari bilan tanishtiradi.

3. Ta’lim beruvchi ta’lim oluvchilarni kichik guruhlarga ajratadi.

4. Kichik guruhlar berilgan muammoli vaziyatni o‘rganadilar. Muammoning kelib chiqish sabablarini aniqlaydilar va har bir guruh taqdimot qiladi. Barcha taqdimotdan so‘ng bir xil fikrlar jamlanadi.

5. Bu bosqichda berilgan vaqt mobaynida muammoning oqibatlari to‘g‘risida fikr-mulohazalarini taqdimot qiladilar. Taqdimotdan so‘ng bir xil fikrlar jamlanadi.

6. Muammoni echishning turli imkoniyatlarini muhokama qiladilar, ularni tahlil qiladilar. Muammoli vaziyatni echish yo‘llarini ishlab chiqadilar.

7. Kichik guruhlar muammoli vaziyatning echimi bo‘yicha taqdimot qiladilar va o‘z variantlarini taklif etadilar.

8. Barcha taqdimotdan so‘ng bir xil echimlar jamlanadi. Guruh ta’lim beruvchi bilan birgalikda muammoli vaziyatni echish yo‘llarining eng maqbul variantlarini tanlab oladi.

“SWOT-TAHLIL” METODI. Metodning maqsadi: mavjud nazariy bilimlar va amaliy tajribalarni tahlil qilish, taqqoslash orqali muammoni hal etish yo‘llarni topishga, bilimlarni mustahkamlash, takrorlash, baholashga, mustaqil, tanqidiy fikrlashni, nostandart tafakkurni shakllantirishga xizmat qiladi.

S – (strength)	• кучли томонлари
W – (weakness)	• заиф, кучсиз томонлари
O – (opportunity)	• имкониятлари
T – (threat)	• тўсиқлар

XULOSALASH» (REZYUME, VEER) METODI. Metodning maqsadi: Bu metod murakkab, ko‘ptarmoqli, mumkin qadar, muammoli xarakteridagi mavzularni o‘rganishga qaratilgan. Metodning mohiyati shundan iboratki, bunda mavzuning turli tarmoqlari bo‘yicha bir xil axborot beriladi va ayni paytda, ularning har biri alohida aspektlarda muhokama etiladi. Masalan, muammo ijobiy va salbiy tomonlari, afzallik, fazilat va kamchiliklari, foyda va zararlari bo‘yicha o‘rganiladi. Bu interfaol metod tanqidiy, tahliliy, aniq mantiqiy fikrlashni muvaffaqiyatli rivojlantirishga hamda o‘quvchilarning mustaqil g‘oyalari, fikrlarini yozma va og‘zaki shaklda tizimli bayon etish, himoya qilishga imkoniyat yaratadi. “Xulosalash” metodidan ma’ruza mashg‘ulotlarida individual va juftliklardagi ish shaklida, amaliy va seminar mashg‘ulotlarida kichik guruhlardagi ish shaklida mavzu yuzasidan bilimlarni mustahkamlash, tahlili qilish va taqqoslash maqsadida foydalanish mumkin.

Metodni amalga oshirish tartibi:

• trener-o‘qituvchi ishtirokchilarni 5-6 kishidan iborat kichik guruhlarga ajratadi;

• trening maqsadi, shartlari va tartibi bilan ishtirokchilarni tanishtirgach, har bir guruhga umumiy muammoni tahlil qilinishi zarur
bo‘lgan qismlari tushirilgan tarqatma materiallarni tarqatadi;

• har bir guruh o‘ziga berilgan muammoni atroflicha tahlil qilib, o‘z mulohazalarini tavsiya etilayotgan sxema bo‘yicha tarqatmaga yozma bayon qiladi;

• navbatdagi bosqichda barcha guruhlar o‘z taqdimotlarini o‘tkazadilar. SHundan so‘ng, trener tomonidan tahlillar umumlashtiriladi, zaruriy axborotlr bilan to‘ldiriladi va mavzu yakunlanadi.

O‘ZARO O‘RIN ALMASHINUVCHI JUFTLIKLAR VA GURUHLAR

Maqsadi:

- tinglovchilarni materialning tuzilishi, asosiy fikrlarni belgilay olish, esda saqlab qolish mumkin bo‘lgan shaklda ularni tasavvur eta olishga o‘rgatish;
- nutq madaniyatini rivojlantirish;
- fasilitatorlik qobiliyatini tarkib toptirish.

1. Birinchi bosqichda pedagog asosiy fikrlarni tasavvur etishning turli shakllari haqida hikoya qilib beradi.

Asosiy fikrlarni tasavvur etishning birinchi turi oddiy – bu asosiy fikrlarni so‘z yoki qisqa gaplar tarzida tasavvur etishdir. Mazkur so‘z yoki gaplar ustunlar tarzida nomer qo‘yish orqali yoziladi.

Asosiy fikrlarni tasavvur qilishning ikkinchi shaklida o‘zak belgilab olinadi va ana shu o‘zak atrofida asosiy fikrlar jamlanadi.

Asosiy fikrlarni shakllantirishning uchichnchi shakli – bu ularni qisqartirish yoki shartli belgilar bilan almashtirishdir.

2. Ikkinchi bosqichda tinglovchilar kichik guruhlarga birlashadilar. Har bir kichik guruh o‘ziga berilgan matnni oladi va uni o‘qiydi. Matnlar hammada har xil.

3. SHundan so‘ng guruhda har bir tinglovchi mustaqil ravishda mazkur matnga doir tayanch konspektni tuzishadi.

4. Navbatdagi bosqichda tinglovchilar juftliklarda o‘zlarining tayanch konspektlari haqida fikr almashishadi. Mazkur bosqichda o‘zining tayanch konspektini o‘zgartirish imkoniyati mavjud.

5. Navbatdagi bosqichda tayanch konspekt guruhiy muhokama etiladi. Guruh o‘zaro kelishgan holda qandaydir yaratilgan tayanch konspektni qabul qiladi. Mazkur bosqichda guruh butun jamoaning oldida “ovoz chiqarib” aytib beruvchi tinglovchini aniqlab olishi kerak.

6. Mazkur bosqichda guruhning bir a’zosi aniqlangan tayanch konspekt bo‘yicha chiqish qiladi va o‘qilgan matnning mazmunini bayon etadi. Barcha

tinglovchilar eshitishlari kerak. Mazkur davrda me’yorlarning bajarilishini ta’minlaydigan texnik ekspertning majburiyati namoyon bo‘ladi.

7. Birinchi guruh a’zosi chiqishini tugatgandan so‘ng boshqa guruh savol berishi mumkin. Savollarga javob beriladi. Mazkur turdagi ish baholanishi mumkin (ballar jadvalda qo‘yiladi). Savollarning navbat bilan berilishini texnik ekspert yo‘lga qo‘yadi.

8. Sakkizinchi bosqichda boshqa guruhning vakili agar asosi mavjud bo‘lsa, qilingan chiqishni to‘ldiradi.

9. To‘qqiznichi bosqichda boshqa guruh vakili chiqish, savollarga javoblar bo‘yicha noroziligini ifoda etadi.

Ana shu erda birinchi matn bilan ishlash yakunlanadi. Pedagog yoki ilmiy ekspert yakunlarni chiqaradi.

Keyingi bosqichda boshqa guruh vakili o‘zining tayanch konspektini namoyish etadi. Mazkur harakat hamma chiqishlar tugaguncha davom etadi.

Inssenirovka yakunlarni chiqarish bilan tugallanadi. Har bir guruh to‘plagan ballarni hisoblash va jami ballar ustuniga yozib qo‘yilishi kerak. Ana shu asosdan kelib chiqib, o‘rinlarni ham belgilash mumkin.

T-CHIZMA. T-chizma munozara vaqtida qo‘shaloq javoblar (ha/yo‘q, tarafdor/qarshi) yoki taqqoslash-zid javoblarni yozish uchun universal grafik organayzer hisoblanadi. Masalan, “Pedagogik loyihalash shakllari” matnini “tarafdor va qarshi” tamoyiliga asoslanib o‘qilganidan so‘ng, bir juft tinglovchi quyida keltirilganidek, T-chizmani tuzishi va besh daqiqadan keyin, chizmaning chap tomonida pedagogik loyihalash shakllarining afzalliklarini yozishi mumkin. So‘ngra besh daqiqa mobaynida ular bu fikrga qarshi iloji boricha ko‘p sababni keltirishlari kerak. Ana shu vaqt oxirida ular yana besh daqiqa mobaynida o‘z T-chizmalarini boshqa juftlik chizmalari bilan taqqoslashlari mumkin.

Pedagogik loyihalash shakllarining afzalliklari	Pedagogik loyihalash shakllarining kamchiliklari

“KICHIK GURUHLARDA ISHLASH” METODI - ta’lim oluvchilarni faollashtirish maqsadida ularni kichik guruhlarga ajratgan holda o‘quv materialini o‘rganish yoki berilgan topshiriqni bajarishga qaratilgan darsdagi ijodiy ish.

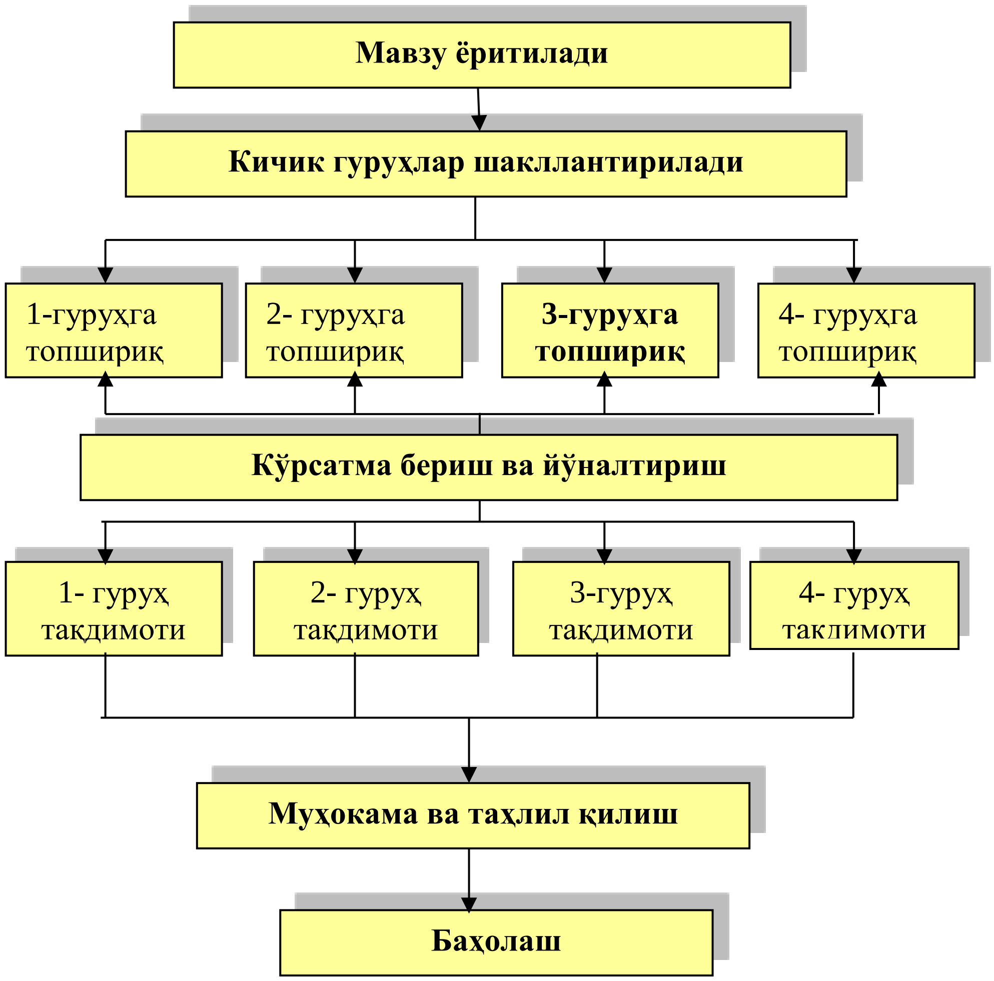
Ushbu metod qo‘llanilganda ta’lim oluvchi kichik guruhlarda ishlab, darsda faol ishtirok etish huquqiga, boshlovchi rolida bo‘lishga, bir-biridan o‘rganishga va turli nuqtai- nazarlarni qadrlash imkoniga ega bo‘ladi.

“Kichik guruhlarda ishlash” metodi qo‘llanilganda ta’lim beruvchi boshqa interfaol metodlarga qaraganda vaqtni tejash imkoniyatiga ega bo‘ladi. CHunki ta’lim beruvchi bir vaqtning o‘zida barcha ta’lim oluvchilarni mavzuga jalb eta oladi va baholay oladi.

“Kichik guruhlarda ishlash” metodining bosqichlari quyidagilardan iborat:

1. Faoliyat yo‘nalishi aniqlanadi. Mavzu bo‘yicha bir-biriga bog‘liq bo‘lgan masalalar belgilanadi.
2. Kichik guruhlar belgilanadi. Ta’lim oluvchilar guruhlarga 3-6 kishidan bo‘linishlari mumkin.
3. Kichik guruhlar topshiriqni bajarishga kirishadilar.
4. Ta’lim beruvchi tomonidan aniq ko‘rsatmalar beriladi va yo‘naltirib turiladi.
5. Kichik guruhlar taqdimot qiladilar.
6. Bajarilgan topshiriqlar muhokama va tahlil qilinadi.

7. Kichik guruhlar baholanadi.



“Kichik guruhlarda ishlash” metodining tuzilmasi

«Kichik guruhlarda ishlash» metodining afzalligi:

- o‘qitish mazmunini yaxshi o‘zlashtirishga olib keladi;
- muloqotga kirishish ko‘nikmasining takomillashishiga olib keladi;
- vaqtni tejash imkoniyati mavjud;
- barcha ta’lim oluvchilar jalb etiladi;
- o‘z-o‘zini va guruhlararo baholash imkoniyati mavjud bo‘ladi.

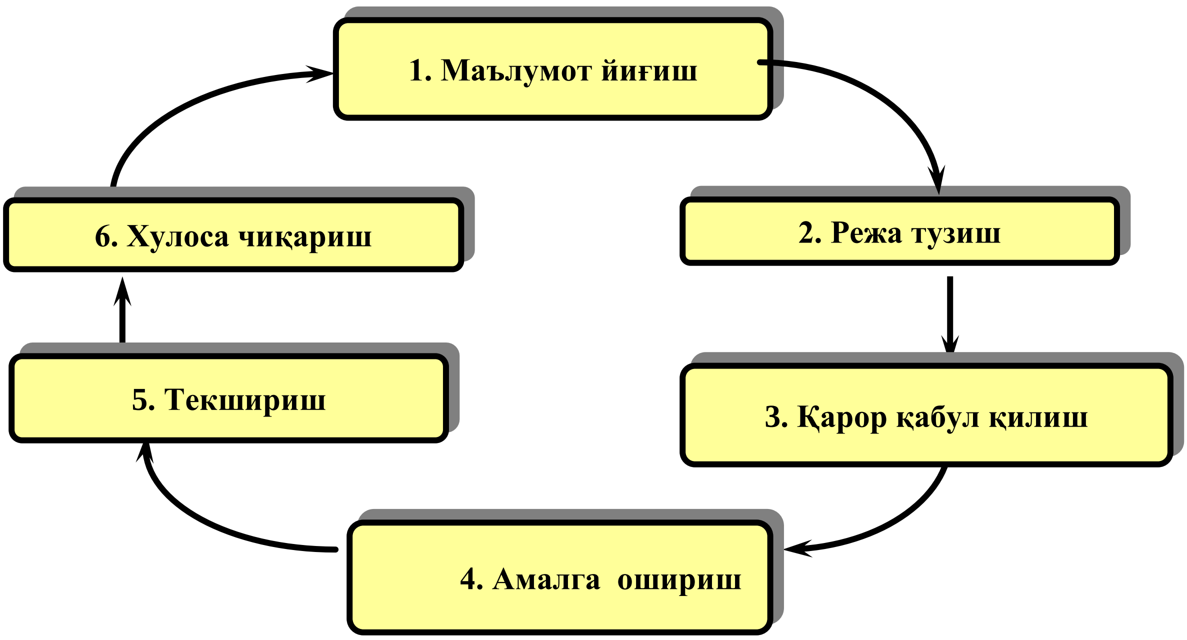
«Kichik guruhlarda ishlash» metodining kamchiliklari:

- ba’zi kichik guruhlarda kuchsiz ta’lim oluvchilar bo‘lganligi sababli kuchli ta’lim oluvchilarning ham past baho olish ehtimoli bor;
- barcha ta’lim oluvchilarni nazorat qilish imkoniyati past bo‘ladi;

- guruhlararo o‘zaro salbiy raqobatlar paydo bo‘lib qolishi mumkin;
- guruh ichida o‘zaro nizo paydo bo‘lishi mumkin.

“LOYIHA” METODI - bu ta’lim oluvchilarning individual yoki guruhlarda belgilangan vaqt davomida, belgilangan mavzu bo‘yicha axborot yig‘ish, tadqiqot o‘tkazish va amalga oshirish ishlarini olib borishidir. Bu metodda ta’lim oluvchilar rejalashtirish, qaror qabul qilish, amalga oshirish, tekshirish va xulosa chiqarish va natijalarni baholash jarayonlarida ishtirok etadilar. Loyiha ishlab chiqish yakka tartibda yoki guruhiy bo‘lishi mumkin, lekin har bir loyiha o‘quv guruhining birgalikdagi faoliyatining muvofiqlashtirilgan natijasidir.

Loyiha o‘rganishga xizmat qilishi, nazariy bilimlarni amaliyotga tadbiq etishi, ta’lim oluvchilar tomonidan mustaqil rejalashtirish, tashkillashtirish va amalga oshirish imkoniyatini yarata oladigan bo‘lishi kerak. Quyidagi chizmada “Loyiha” metodining bosqichlari keltirilgan.



“Loyiha” metodining bosqichlari

“Loyiha” metodining bosqichlari quyidagilardan iborat:

1. Muhandis-pedagog loyiha ishi bo‘yicha topshiriqlarni ishlab chiqadi.

Ta’lim oluvchilar mustaqil ravishda darslik, sxemalar, tarqatma materiallar asosida topshiriqqa oid ma’lumotlar yig‘adilar.

2. Ta’lim oluvchilar mustaqil ravishda ish rejasini ishlab chiqadilar. Ish rejasida ta’lim oluvchilar ish bosqichlarini, ularga ajratilgan vaqt va texnologik ketma-ketligini, material, asbob-uskunalarni rejalashtirishlari lozim.

3. Kichik guruhlar ish rejalarini taqdimot qiladilar. Ta’lim oluvchilar ish rejasiga asosan topshiriqni bajarish bo‘yicha qaror qabul qiladilar. Ta’lim oluvchilar muhandis-pedagog bilan birgalikda qabul qilingan qarorlar bo‘yicha erishiladigan natijalarni muhokama qilishadi. Bunda har xil qarorlar taqqoslanib, eng maqbul variant tanlab olinadi. Muhandis-pedagog ta’lim oluvchilar bilan birgalikda “Baholash varaqasi”ni ishlab chiqadi.

4. Ta’lim oluvchilar topshiriqni ish rejasi asosida mustaqil ravishda amalga oshiradilar. Ular individual yoki kichik guruhlarda ishlashlari mumkin.

5. Ta’lim oluvchilar ish natijalarini o‘zlarini tekshiradilar. Bundan tashqari kichik guruhlar bir-birlarining ish natijalarini tekshirishga ham jalb etiladilar. Tekshiruv natijalarini “Baholash varaqasi”da qayd etiladi.

6. Muhandis-pedagog va ta’lim oluvchilar ish jarayonini va natijalarni birgalikda yakuniy suhbat davomida tahlil qilishadi. O‘quv amaliyoti mashg‘ulotlarida erishilgan ko‘rsatkichlarni me’yoriy ko‘rsatkichlar bilan taqqoslaydi. Agarda me’yoriy ko‘rsatkichlarga erisha olinmagan bo‘lsa, uning sabablari aniqlanadi.

“ASSESMENT” METODI. Metodning maqsadi: mazkur metod ta’lim oluvchilarning bilim darajasini baholash, nazorat qilish, o‘zlashtirish ko‘rsatkichi va amaliy ko‘nikmalarini tekshirishga yo‘naltirilgan. Mazkur texnika orqali ta’lim oluvchilarning bilish faoliyati turli yo‘nalishlar (test, amaliy ko‘nikmalar, muammoli vaziyatlar mashqi, qiyosiy tahlil, simptomlarni aniqlash) bo‘yicha tashhis qilinadi va baholanadi.

Metodni amalga oshirish tartibi: “Assesment” lardan ma’ruza mashg‘ulotlarida talabalarning yoki qatnashchilarning mavjud bilim darajasini o‘rganishda, yangi ma’lumotlarni bayon qilishda, seminar, amaliy mashg‘ulotlarda esa mavzu yoki ma’lumotlarni o‘zlashtirish darajasini baholash, shuningdek, o‘z-o‘zini baholash maqsadida individual shaklda foydalanish tavsiya etiladi. SHuningdek, o‘qituvchining ijodiy yondashuvi hamda o‘quv maqsadlaridan kelib chiqib, assesmentga qo‘shimcha topshiriqlarni kiritish mumkin.

Namuna. Har bir katakdagi to‘g‘ri javob 5 ball yoki 1-5 balgacha baholanishi mumkin.

Тест

Ҳар қандай ҳалқа ...
А) Алгебраик система
В) Алгебра
С) Майдон.
Д) Коммутатив

Қиёсий таҳлил

Арифметик вектор фазо ва чизиқли вектор фазо тушунчалари ўртасидаги ўхшашлик ва фарқли жиҳатларни таҳлил этинг.

Таъриф

Арифметик вектор фазо ...

Амалий кўникма

R тўпламнинг майдон ташкил этишини текшириш алгоритмини тузинг.

III. NAZARIY MATERIALLAR

1-mavzu: Pedagogika OTMda matematik analiz o‘quv fanining tezaurusi

Reja:

1. Tezaurus tushunchasi.
2. O‘quv tezaurusi tarkibi va talabaning matematik leksikoni.
3. Matematik analiz o‘quv fanining o‘quv tezaurusi.
4. Talabaning matematik leksikonini shakllantirishda standart topshiriqlar va masalalar sistemasi.

Tayanch iboralar: tezaurus, o‘quv tezaurusi, matematik leksikon, standart topshiriq.

1. “Tezaurus” (thēsaurós) so‘zi uzoq tarixga ega: qadimgi YUnonistonda “zaxira”, “xazina” degan ma’nolarni bildirgan. Umumiy ma’noda tezaurus deganda biror narsalarning to‘plamini tushunilgan. Agar so‘zning turli ilmiy sohalarda (tilshunoslik, madaniyatshunoslik, informatika, kibernetika, semiotika, pedagogika va boshqalar) zamonaviy talqiniga nazar tashlasak, atamaning asl ma’nosi bugungi kungacha saqlanib qolgan degan xulosaga kelishimiz mumkin: tezaurus so‘zlar, tushunchalar, bilimlar va shunga o‘xshash narsalarning tartiblangan to‘plamidir.

Atrofimizdagi dunyoni tasvirlashga xizmat qiladigan tabiiy tilning barcha tushunchalari bizning bilimlarimizning butun olamini aks ettiruvchi dunyoning universal tezaurusidir. Umumiy tezaurusni ierarxik darajasiga qarab bir hil tushunchalar to‘plamini ajratib ko‘rsatish yoki dunyoning istalgan qismini tasvirlab beradigan tushunchalarni ajratib ko‘rsatish orqali xususiy tezaurusga bo‘lish mumkin. SHunday qilib, umumiy tezaurus asosida ilm-fan va texnikaning turli sohalari bo‘yicha, individual muammolar va vazifalar bo‘yicha cheksiz ko‘p tezauruslar tuzish mumkin.

Tadqiqotchilar "tezaurus" tushunchasining ma’nosini turlicha tushunishlariga qaramay, ko‘pchilik mualliflar tezaurus tushunchalar va ular o‘rtasidagi semantik munosabatlarning ma’lum bir tizimi ekanligini ta’kidlaydilar.

Quyida tezaurus tushunchasini turli ilmiy kontekstlar nuqtai nazaridan ko‘rib chiqamiz.

1. Tezaurus atamasining tilshunoslik (lingvistika)dagi talqini.

Tilshunoslik til haqidagi fan sifatida “tezaurus” atamasini ikki ma’noda qo‘llaydi. Birinchi ma’no so‘zlarning maksimal sonini, ulardan foydalanishning mumkin bo‘lgan misollarini o‘z ichiga olgan lug‘atni anglatadi. Hozirgi vaqtda tezaurusning bunday qo‘llanilishi asosan faqat o‘lik tillarga (masalan, lotin tiliga) nisbatan qo‘llaniladi, chunki hozirgi ("tirik") til dinamik tuzilma bo‘lib, doimiy ravishda rivojlanib, doimiy ravishda turli ma’nolarga ega bo‘lgan yangi so‘zlar bilan to‘ldiriladi. SHu sababli, harakatdagi tilning lug‘atini tuzish mumkin emas.

Ikkinchi ma’no tezaurusni ideografik lug‘at sifatida tushunish bilan bog‘liq bo‘lib, unda tushunchalar ma’no bo‘yicha tartiblanadi. Ko‘pincha bunday lug‘atdagi leksik birliklar o‘zaro semantik munosabatlar (sinonim, umumiy va boshqalar) bilan bog‘lanadi.

Ushbu turdagi birinchi tezaurus P. Rojening ideografik (semantik) lug‘ati bo‘lib, keyinchalik uning yaratuvchisi nomi bilan atalgan. P. Roje ingliz tilidagi barcha so‘zlarni guruhlardan biriga tayinlagan sakkizta tematik sinflarni ajratib ko‘rsatdi: mavhum munosabatlar, materiya, fizika, hissiyotlar, hislar, istaklar, fazo, aql. Ushbu lug‘atning o‘ziga xos xususiyati quyidagicha: yuqoridagi 8 ta sinf 24 ta qismsinfni o‘z ichiga oladigan tarzda joylashtirilgan va tashkil etilgan. Ular o‘z navbatida 1000 ta semantik guruhni tashkil etadi. Bunday holda, sinflar, qismsinflar va guruhlarning kesishishi mumkin.

Axborot texnologiyalarining rivojlanishi tufayli P. Rojening tezaurusi endi raqamli shaklga ega bo‘ldi. Uning zamonaviy versiyasini http://www.thesaurus.com rasmiy veb-saytida topish mumkin. Saytning qidiruv qatori biron bir inglizcha so‘zni u yoki bu semantik guruhga murojaat qilib topishga imkon beradi: masalan, teacher (o‘qituvchi) bir vaqtning o‘zida 24 guruhga kiritilgan, shu jumladan: "personal", "kasb", "murabbiy", “intizom", "tarbiyachi ", "usta" va boshqalar.

Biroq, to‘liq ideografik lug‘atlarni tuzish ham zamonaviy til uchun deyarli imkonsiz vazifadir, chunki tushunchaning barcha mavjud aloqalarini aniqlash uning konseptual maydoniga kiritilgan so‘zlarning ma’nosini turli xil talqin qilish bilan murakkablashadi

2. Tezaurusning informatikadagi talqini.

Informatikada (axborotni saqlash, uzatish, qayta ishlash, shu jumladan kompyuter texnologiyalaridan foydalanish bilan shug‘ullanadigan fan) tezaurus deganda tizimning yoki foydalanuvchining ixtiyorida bo‘lgan ma’lumotlar to‘plami tushuniladi. Aslida, so‘z axborot-qidiruv tili haqida boradi, uning yordamida muallif terminologiyasi (ona tilida so‘zlashuvchining tushunchaviy apparati) va tizim terminologiyasi (tizimda qo‘llaniladigan tushunchalar va atamalar) o‘rtasidagi muvofiqlikni o‘rnatish muammosi. axborot-qidiruv hujjatlari) hal qilinadi

Bunday tizim zarur ma’lumotlarni qidirishni osonlashtirish va optimallashtirish, shuningdek, mehnat faoliyati samaradorligini oshirish uchun mo‘ljallangan. Axborot-qidiruv tilini avtomatlashtirish tufayli tizim nafaqat odamni qiziqtiradigan sohaga oid atamalarni, balki ularning boshqa sohadagi atamalar bilan semantik munosabatlarni ham ko‘rsatishga qodir. SHunday qilib, tezaurus turli predmet sohalarini bog‘lashga asoslangan avtonom axborot tizimidir.

3. Tezaurus atamasining kibernetikadagi talqini.

Kibernetika ham informatika kabi axborotni o‘rganish va rivojlantirish bilan shug‘ullanadi. Ammo, kibernetik tizimlarga nafaqat elektron hisoblash mashinalari, balki sutemizuvchilarning miyasi (shu jumladan odamlar), shuningdek, jamiyat, sun’iy intellekt va boshqalar misol bo‘ladi.

Kibernetikada tezaurus tushunchasi o‘z chegaralarini kengaytirdi: tezaurus birinchi marta “dunyo” – “bolalar dunyosi”, “kattalar dunyosi” ma’nolarida tilga olinadi; "talabalar dunyosi", "o‘qituvchi dunyosi". "Dunyo" -

bu sub’ektga tegishli bo‘lgan narsa, uning o‘zi, boshqa odamlar, atrofdagi voqelik va boshq. haqidagi tasavvurlari bilan o‘zaroaloqadagi aqliy etukligi.

Bundan tashqari, kibernetikada tezaurus talaba va o‘qituvchi o‘rtasida tezaurus almashinuvi mumkinligini tushunish bilan bog‘liq mutlaqo yangi funksiyaga ega. Bunda nafaqat axborot almashinuvi, balki muloqot faoliyatining ta’limiy tomoni haqida ham gap boradi. Bundan tashqari, bunday muloqot intellektual xususiyatga ega bo‘ladi, chunki bir kishining tezaurusi boshqasining tezaurusiga ta’sir qiladi va shu bilan o‘z chegaralarini o‘zgartiradi va kengaytiradi

4. “Tezaurus” atamasining gumanitar fanlardagi talqini.

Sosiologiya, madaniyatshunoslik, antropologiya kabi gumanitar fanlar “tezaurus” atamasini tushunishda kibernetik ma’noga asoslanadi. Biroq, atamaning ma’nosi uning asosiy xususiyatlarini tushunishda hali ham ba’zi o‘zgarishlarga duch keladi. Bunda mental tuzilmalar haqida gap boradi, ular bitta sub’ektning psixik tuzilmasi bo‘lib, ular sub’ektga tashqaridan ma’lumot olish imkonini beradi. SHunday qilib, har bir insonga xos bo‘lgan aqliy (mental) tajriba, qadriyatli-yo‘naltirilgan tuzilmalar nuqtai nazaridan kiruvchi axborotlarni tanlash bilan bog‘liq bo‘lgan shaxs intellekti darajasini va sifatini belgilaydi.

Aslida, bu holda aqliy tajriba "tezaurus" tushunchasining sinonimi bo‘lib, shaxsning dunyoga va o‘ziga nisbatan bilim va qadriyatli munosabatlari to‘plamidir. Bundan tashqari, aqliy tuzilmalar yordamida nafaqat tashqi muhitdan axborot olish, balki uni tahlil qilish, shuningdek, "tushunish" va "ko‘nikma" kabi tushunchalar bilan bog‘liq holda ishlash.

Bunda M.I.Ilinskiy tomonidan taklif qilingan “bilim – tushunish – ko‘nikma” triadasi axborot bilan ishlashning barcha bosqichlarini aks ettirgani uchun har qachongidan ham dolzarbroqdir. An’anaviy (va barcha o‘qituvchilarga ma’lum) "bilim - ko‘nikma - malakalar" formulasi (o‘sha mashhur BKM), afsuski, axborot bilan ishlashning muhim bosqichini, ya’ni uni tushunishni e’tiborga olmaydi. SHunday qilib, M.I.Ilinskiy triadasi nafaqat ta’limning nazariy jihatini, balki uning amaliy yo‘nalishini ham aks ettiradi.

5. Pedagogika fanida tezaurus tushunchasi

Pedagogikada tezaurus tushunchasi L.T.Turbovich tomonidan tavsiya etilgan o‘qitishning axborotli-semantik modelida paydo bo‘lgan. Muallif ushbu modelda tezaurusni shaxs xotirasida mujassamlangan va saqlab qolingan tushunchalar, baholash va me’yorlar, shu jumladan, harakatlar sxemasi zaxirasi deb ta’riflaydi. Ushbu modelga muvofiq, shaxsning ongini shakllantirish uning tushunchaviy psixologik tezaurusini shakllantirish bilan ayniylashtiriladi. Tezaurusga yangi ma’lumot kiritilganda uning kengayishi muallif tomonidan o‘qitish kabi sharhlanadi.

Har bir o‘qituvchi uzoq vaqt davomida turli omillar ta’sirida shakllanadigan va o‘quvchilar uchun axborot salohiyati bo‘lgan etarlicha tushunchaviy- psixologik tezaurusga ega deb taxmin qilinadi. Biroq, talabalar o‘zlarining tushunchaviy-psixologik tezaurusini, agar ularga ma’lumot murakkabligi bo‘yicha tushunarli bo‘lsa, ya’ni ularning kasbiy rivojlanish darajasiga to‘g‘ri keladigan bo‘lsagina kengaytirishi mumkin.

Semantik tomonni rasmiylashtirishga bir vaqtning o‘zida (70-yillar) yana bir yondashuv axborotning semantik nazariyasini ishlab chiquvchi YU A. SHreyder tomonidan taklif qilingan. Ushbu nazariyaning asosiy g‘oyasi quyidagi holatga keltiriladi: har qanday yangi ma’lumotni "qabul qiluvchi" (shaxs) tomonidan "sof" shaklida idrok qilinmaydi, u sifat jihatidan hajmini va strukturasini o‘zgartirgan holda tezaurusning yangi tizimiga aylanadi. SHunday qilib, axborot uzatuvchining maqsadi "qabul qiluvchi" tezaurusini kengaytirishdan iborat, axborot oluvchisi oldida esa o‘z navbatida, shaxsiy tezaurusini kengaytirish masalasi gavdalanadi.

A.A.Miroshnichenko “fanlar tezaurusi” (fanning konseptual apparati) va “modullar tezaurusi” (modul fanning ajralmas qismi sifatidagi) tushunchalarini kiritadi.

Universitetda o‘qish boshlanishi bilan talaba mutaxassislik tezaurusining nolinchi darajasiga ega, ammo fanlarni o‘rganish jarayonida talaba asta-sekin mutaxassislikning shaxsiy tezaurusini rivojlantiradi va takomillashtiradi. Ayni paytda, A. A. Miroshnichenkoning fikriga ko‘ra, "akmeologik tezaurus" - bu professional mukammallikning cho‘qqisi.

Matematikani o‘qitish metodikasida tezaurus tushunchasi. T.P.Pushkareva va uning maslakdoshlari tadqiqotlarida uchraydi.

Matematika o‘qitishda tezaurusdan foydalanish masalasi V.K.Jarovning ishlarida ham kuzatishimiz mumkin. U qadimiy Xitoy matematikasi tarixini o‘rganib, xitoy matematiklarining masalalarni echish metodikasini tahlil qiladi va u xitoy matematikasidagi asosiy tushunchalar va operasiyalarni, masala echish metodlarini klassifikasiyalaydi. Tadqiqotchi B.Rasselning g‘oyalariga asoslanib, horijiy talabalarga matematikani rus tilida o‘rgatishni chekli sondagi atomar tushunchalar va yordamchi so‘zlardan boshlash, ular yordamida matematikaning qolgan qismini o‘rgatish mumkinligini ta’kidlaydi.

2. Ma’lumot, axborot va bilim tushunchalari orasidagi munosabatdan quyidagi xulosani aytishimiz mumkin: o‘quv tezaurusi – bu ma’lumotlar to‘plamidir. Bu ma’lumotlarni qayta ishlash, izohlash, sharhlash orqali axborot shaklida talabaga uzatish o‘quv adabiyotini muallifi yoki o‘qituvchining shaxsiy tezaurusi-leksikoniga bog‘liq. Bu axborot o‘quv matni (yozma, og‘zaki) shaklida uzatiladi.

Biror fan yoki uning biror modulining o‘quv tezaurusi tarkibini o‘quv fanining tayanch tushunchalari – deskriptorlar bilan bir qatorda o‘quv faoliyat usullari (umumo‘quv faoliyat usullari, umummatematik faoliyat usullari), har bir mavzu bo‘yicha asosiy masalalar tizimi va bu masalalarni echish bo‘yicha faoliyat usullaridan iborat deb qarash maqsadga muvofiq bo‘ladi. CHunki, yuqorida aytilgan usullar ko‘nikma, malakalar asosini tashkil qiladi, bu usullarni so‘zlar bilan ifodalash mumkin va ular yangi bilimlarni, ko‘nikma va malakalarni o‘zlashtirish uchun xizmat qiladi.

Bu ta’rifdan o‘quv tezaurusi va o‘quvchi leksikoninig yana bir farqini ko‘rishimiz mumkin: o‘quv tezaurusi malaka talablar, fan dasturlariga bog‘liq bo‘lgan yopiq tizim tashkil qilsa, o‘quvchi leksikoni esa ochiq tizim.

O‘quv tezaurusi va talaba leksikioni farqini o‘qitish va o‘qish vositalari nuqtai nazardan ham farqlash mumkin. O‘quv tezaurusi bu moddiy o‘qitish vositasi, aniqrog‘i o‘quv adabiyotlaridagi, o‘qituvi uzatadigan o‘quv axborotining asosini tashkil qiladi. Talabaning leksikoni esa o‘qishning ideal vositasi, uning yordamida talaba o‘quv tezaurusini o‘zlashtiradi.

Talabaning shaxsiy tezaurusi – leksikoni – bu bilimlarni, tajribalarini o‘z ichiga oladi, talaba o‘zlashtirgan axborotlar va avval shakllangan bilimlari ustida aqliy operasiyalarni bajarish natijasida yangi bilimlar, ko‘nikmalar va malakalar hosil qiladi, ularni baholaydi, talaba ijodiy faoliyat tajribasiga ega bo‘ladi.

Talabanning matematik leksikoniga quyidagicha ta’rif berish mumkin. O‘quvchining matematik leksikoni – bu uning matematik bilimlari, ko‘nikmalari, malakalari, qobiliyatlari tajribalari hamda o‘quv-biluv qadriyatlari va matematik madaniyatining ochiq tizimi. U uzluksiz matematik ta’lim yoki mustaqil bilim olish jarayoni natijasi hisoblanadi.

SHunday qilib, talabaning leksikoni tarkibiga uning bilimlari, ko‘nikmalari va malakalari, qobiliyatlari, shakllangan kompetensiyalari kiradi.

Quyida Matematik analiz o‘quv fanining “Haqiqiy sonlar to‘plami va uning xossalari” mavzusi misolida o‘quv tezaurusni shakllantiramiz. Albatta, o‘quv tezaurusini shakllantirish haqiqiy sonlarni qanday kiritishimizga bog‘liq. 60110600-matematika va informatika bakalavriat ta’lim yo‘nalishi uchun matematik analiz o‘quv fani dasturida haqiqiy son tushunchasini rasional sonlar to‘plamidagi kesim tushunchasi orqali kiritish rejalashtirilganini eslatib o‘tamiz. Quyida yuqorida aytilgan mavzu tezaurusini tuzishda tayanch tushunchalar, asosiy masalalar, asosiy masalalarni echish bo‘yicha faoliyat usullarini keltirish bilan cheklanamiz. Umumo‘quv faoliyat usullari, umummatematik faoliyat usullari [Episheva O.B. Texnologiya obucheniya matematike na osnove deyatelnostnogo podxoda. M.:Prosвещenie.2003.-223s., Turgunbaev R.M., Abduraxmanova SH.Matematikani faoliyatli yondashuv asosida o‘qitishning didaktik asoslari. Metodik qo‘llanma/T.:TDPU.-2012.-67 b.] adabiyotlarda keltirilgan. Lekin matematika fanlarini va xususan matematik analizni o‘zlashtirishda muhim ahamiyatga ega bo‘lgan umummatematik faoliyat usullarini sanab o‘tamiz: tushunchani ta’riflash sxemasini tuzish, tushunchaga keladigan ob’ektlar to‘plamini tuzish, tushunchalar orasidagi munosabatlar sxemasini tuzish; muayyan turdagi masalani echish uchun yo‘riqnoma tuzish; teoremani isbotini sxemasini tuzish; matematik matn bilan ishlash (axborotli sxemani tuzish).

“Haqiqiy sonlar to‘plami” mavzusi tezaurusi

1. **Asosiy tushunchalar**: rasional sonlar to‘plami; rasional sonlar to‘plamining arifmetik amallarga nisbatan yopiqligi; rasional sonlar to‘plamining tartiblanganligi; rasional sonlar to‘plamining zichligi; rasional sonlarni sonlar o‘qida tasvirlash; kvadrati 2 ga teng rasional sonning mavjudmasligi; rasional sonlar to‘plamida kesim; quyi sinf; yuqori sinf; quyi sinfning eng katta elementi; yuqori sinfning eng kichik elementi; kesim turlari; rasional kesim; irrasional kesim; haqiqiy son; haqiqiy sonlar to‘plami; irrasional sonlar to‘plami; haqiqiy sonlar to‘plamida “teng”, “katta”, “kichik” munosabatlari; haqiqiy sonlar to‘plamining tartiblanganligi; haqiqiy sonlar to‘plamining zichligi; haqiqiy sonlar to‘plamida kesim; haqiqiy sonlar to‘plamining uzluksizligi; haqiqiy sonlarni o‘nli kasrlar bilan ifodalash; cheksiz davriy o‘nli kasr, cheksiz nodavriy o‘nli kasr.

2. **Asosiy masalalar**:

1-masala. Rasional sonlar to‘plamining arifmetik amallarga nisbatan yopiqligini isbotlash.

2-masala. Rasional sonlar to‘plamining tartiblanganlik xossasini isbotlash.

3-masala. Rasional sonlar to‘plamining zichlik xossasini isbotlash.

4-masala. Sonlar o‘qida berilgan rasional songa mos nuqtani yasash.

5-masala. Berilgan sonning rasional emasligini isbotlash.

6-masala. Rasional sonni aniqlaydigan kesim tuzish.

7-masala. Irrasional sonni aniqlaydigan kesim tuzish.

8-masala. Haqiqiy sonlar to‘plamining tartiblanganligini isbotlash.

9-masala. Haqiqiy sonlar to‘plamining zichligini isbotlash.

10-masala. Haqiqiy sonlar to‘plamining uzluksizligini isbotlash.

3. **Asosiy masalalarni echish bo‘yicha faoliyat usullari**: faoliyat usulini uning tarkibidagi harakatlar yordamida bayon qilamiz. 1-3-masalalar, hamda 8-10 masalalar darslik, o‘quv qo‘llanmalarda isbotlangan. Faoliyat usullari shu isbotni bajarishdagi harakatlar bilan ifodalanadi.

Masalan, 9-masala (haqiqiy sonlarning zichlik xossaini isbotlash)ni echishni faoliyat usuli tarkibidagi harakatlar quyidagicha:

1) Ixtiyoriy ikkita teng bo‘lmagan haqiqiy sonlarni x va u bilan belgilash; 2) x va u ni rasional sonlar to‘plamining kesimlari yordamida yozish: x=(A,B), y=(C,D); 3) faraz qilib, x<y tengsizlikni yozish; 4) x<y tengsizlikni kesimlar tilida yozish: $A \subset C, A \neq C$; 5) $A \subset C, A \neq C$ ekanidan S ga tegishli, lekin A ga tegishli bo‘lmagan r rasional sonning mavjudligini asoslash; 6) r rasional son A sinfga tegishli emas, V sinfga tegishli, bundan $x < r$ tengsizlikni yozish; 7) r rasional son S sinfga tegishli, D sinfga tegishli emas, bundan $r < y$ tengsizlikni yozish; 8) 6 va 7 dan $x < \ r < y$ tengsizlikni yozish, xulosalash.

Endi 6-masalani echish bo‘yicha faoliyat usulini tavsiflaymiz. 1) r rasional sondan katta bo‘lmagan rasional sonlarni A quyi sinfga kiritish ($A = \{x \in Q : x \leq r\}$); 2) r rasional sondan katta bo‘lgan rasional sonlarni V yuqori sinfga kiritish ($B = \{x \in Q : x > r\}$); 3) (A,B) juftlikni yozish; 4) A to‘plamning bo‘sh emasligini asoslash (A to‘plamga tegishli rasional son ko‘rsatish); 5) V to‘plamning bo‘sh emasligini asoslash (V to‘plamga tegishli rasional son ko‘rsatish); 6) $A \cup B = Q$ ekanini ko‘rsatish (har bir rasional son yo A to‘plamga, yo V to‘plamga tegishli ekanini ko‘rsatish); 7) A to‘plamdagi har bir rasional sonning V to‘plamdagi har bir rasional sondan kichik ekanini ko‘rsatish ($x \in A \rightarrow x \leq r; y \in B \rightarrow r < y;$ bulardan $x < y$); 8) xulosalash.

Bu masalani echishdan avval talaba rasional sonlar to‘plamidagi kesim ta’rifini o‘zlashtirishi (ya’ni ta’rif bilan ishlash faoliyat usullarini yangi vaziyatga o‘tkazish, biror ob’ektni ta’rifga keltirish bo‘yicha faoliyat usullarini qo‘llashi) lozimligi ravshan.

4. Matematikaning alohida bo‘limlariga xos faoliyat usullari, bizning holda “Haqiqiy sonlar to‘plami va uning xossalari” mavzusiga xos bo‘lgan faoliyat usullari abstraksiyaning navbatdagi pog‘onasi - “kesimlar tili”dan, cheksiz o‘nlik kasr tushunchasidan foydalanish bilan bog‘liq. Masalan, ikkita x va y haqiqiy sonlarni taqqoslash bo‘yicha faoliyat usulining harakatlar tarkibi quyidagicha: 1) x va y ni aniqlaydigan kesimlarni yozish, $x = (A, B), y = (C, D)$; 2) A va C to‘plamlarni solishtirish; 3) xulosa chiqarish (agar $A = C$ bo‘lsa, u holda $x = y$; agar $A \subset C$ bo‘lsa, u holda $x < y$; agar $A \supset C$ bo‘lsa, u holda $x > y$).

SHuni ham ta’kidlash kerakki, tezaurusni tuzishda kiritilayotgan tushunchaning nomlanishi (atamasi), atamaning lug‘aviy ma’nosi, boshqa fanlarda, hayotda uchraydigan sinonimlari, omonimlarini aniqlash, simvolik belgilanishini ko‘rsatib o‘tish maqsadga muvofiq.

Endi yuqorida aniqlangan o‘quv tezaurusini talaba muvaffaqiyatli o‘zlashtirishi uchun zarur bo‘lgan matematik leksikonini aniqlaymiz. Buning uchun o‘quv tezaurusidagi asosiy tushunchalarning “atrofilari”ni aniqlaymiz, ya’ni shu tushuncha bilan bog‘liq bo‘lgan boshqa tushunchalar, keyingi qadamda bu tushunchalarning atroflarini qarash mumkin. Bu jarayonni odatda, atamar lug‘atgacha [] davom ettirish mumkin, lekin talabaning oldingi ta’lim bosqichida yoki oldingi mavzularda o‘zlashtirgan tushunchalariga (oldingi mavzularning o‘quv tezauruslariiga) qadar davom ettirish maqsadga muvofiq. Masalan, “Rasional sonlar to‘plami” tushunchasining atrofi {rasional son, to‘plam}, “rasional son” tushunchasining atrofi {natural son, butun son, kasr son, rasional sonlar ustida amallar, musbat rasional son, manfiy rasional son, nol, sonlar o‘qi, rasional sonning moduli}, kasr son tushunchasining atrofi {qisqaradigan kasr, qisqarmaydigan kasr, to‘g‘ri kasr, noto‘g‘ri kasr, aralash kasr, o‘nlik kasr, kasrlar ustida amallar, kasrlarni taqqoslash, kasrning moduli, musbat, manfiy kasrlar}, sonlar o‘qi tushunchasining atrofi {to‘g‘ri chiziq, sanoq boshi, birlik kesma, yo‘nalish} va h. Berilgan tushunchaning atrofini tuzish uchun turli axborot haritalaridan (masalan “o‘rgimchak”) foydalanish mumkin (-ilova). Keyingi bosqichda asosiy tushunchalar orasidagi aloqalarni, bu tushunchalarga bog‘liq talabalarda shakllanishi lozim bo‘lgan ko‘nikmalarni aniqlash muhim.

Talabaning “Haqiqiy sonlar to‘plami va uning xossalari” mavzuni o‘zlashtirish uchun zarur bo‘lgan leksikoni quyidagidan iborat: natural son, butun son, rasional son, sonlar o‘qi, koordinata boshi, birlik kesma, musbat, manfiy sonlar, “orasida yotadi”, “chapda yotadi”, “o‘ngda yotadi”, “moslik”, “mos qo‘yish”, rasional sonlar ustida arifmetik amallar va ularni bajarish bo‘yicha faoliyat usullari, rasional sonlarni taqqoslash va unga mos faoliyat usullari, sonli tengsizlikning xossalari va ulardan foydalanish, Pifagor teoremasi, chizg‘ich va sirkul yordamida yasash bo‘yicha faoliyat usulari (kesmaga teng kesmani yasash, perpendikulyarni yasash), Fales teoremasi, tushunchalarga mos belgilashlar, to‘plam, sonli to‘plamlar, teskaridan faraz qilib isbotlash metodi, to‘plamning eng katta elementi, to‘plamning eng kichik elementi.

Mavzu bo‘yicha asosli shakllantirilgan tezaurus:

- Tushunchalarning rivojlanishidagi uzviylikning namoyon bo‘lishini ko‘rishga imkon beradi. Biz qarayotgan mavzuda rasional sonlar to‘plamidagi kesim-haqiqiy son; rasional sonlar to‘plamidagi tenglik (katta, kichik) munosabati – haqiqiy sonlar to‘plamidagi tenglik (katta, kichik) munosabati; chekli yoki davriy o‘nli kasr – cheksiz o‘nli kasr; rasional sonlarning zichlik (tartiblanganlik) xossasi – haqiqiy sonlarning zichlik (tartiblanganlik) xossasi uzviylikning namoyon bo‘lishiga misol bo‘ladi.

- Talabalar tomonidan tushunchalarni, yangi faoliyat usullarini o‘zlashtirishda, talabaning leksikoni rivojlantirishda uzviylikdan samarali foydalanish uchun savollar va yordamchi masalalar tizimini tuzishga imkon beradi. YUqorida rasional sonlar to‘plamida kesim tushunchasini ta’rifini o‘zlashtirish bo‘yicha yordamchi masalalar keltirildi. Kesimlar tilida isbotlashga o‘rgatish maqsadida dastlab talabalarga rasional sonlar to‘plamining zichlik xossasini kesimlar tilida isbotlashni taklif qilish mumkin. Bu isbotni bajarishda talaba har bir rasional sonni rasional sonlar to‘plamidagi birinchi tur kesim bilan aniqlanishi, rasional sonlarni solishtirish ular aniqlanadigan kesimning quyi (yuqori) sinflari orasidagi munosabat (biri ikkinchisining qismi bo‘lish) bilan aniqlanishini, rasional sonning u aniqlaydigan kesimning quyi va yuqori sinflaridagi rasional sonlar bilan munosabatini bilishi va foydalana olishi lozim bo‘ladi. SHu sababli talabalarga yo‘naltiruvchi savollar (masalan, a) har bir rasional son birinchi yoki ikkinchi tur kesimni aniqlaydi, aniqlik uchun birinchi tur kesimlarni qaraymiz. r_1 ni aniqlaydigan (A, B) kesimni yozing va sonlar o‘qida chizing. Quyi (yuqori) sinfdagi rasional sonlar bilan r_1 orasidagi munosabatni ayting; b) $r_1 < r_2$ bo‘lsin. Ularga mos birinchi tur kesimni bitta sonlar o‘qida tasvirlang. Ularga mos quyi sinflar orasida qanday munosabat mavjud? Bu munosabat har doim o‘rinlimi? v) $r_1 < r_2$ munosabatni kesimlar tilida ta’riflash mumkinmi?) tuzish imkoniyatiga ega bo‘lamiz.

- Mavzu bilan uzviy aloqada bo‘lgan yangi - rivojlantiruvchi masalalar tizimini tuzishga imkon beradi. Masalan, qaralayotgan mavzu uchun haqiqiy sonlarni cheksiz o‘nli kasr yordamida aniqlash, haqiqiy sonlar to‘plamidagi munosabat va amallarni cheksiz o‘nli kasrlar tilida aniqlash, haqiqiy sonlar to‘plamining xossalarini isbotlashga oid masalalar tizimini tuzish mumkin.

- o‘quv tezaurusi talabaning shu mavzuni sifatli o‘zlashtirishi uchun zarur bo‘lgan leksikonini aniqlash va bu leksikonni talabada dolzarblashtirish vositalarini ishlab chiqishga yordam beradi.

O‘quv mavzusi (yoki bir darsga mo‘ljallangan qismi) materialining o‘quv tezaurusini va uni o‘zlashtirish uchun zarur bo‘lgan o‘quvchining leksikonini aniqlashni o‘quv axborotining tezaurusli tahlili deb ataymiz.

Demak, mavzuning tezaurusli tahlili

- mavzuning asosiy tushunchalari (va asosiy iboralari)ni;
- mavzuga mos matematik faoliyat usullarini;

- asosiy masalalarini;
- asosiy masalalarni echish bo‘yicha faoliyat usullarini aniqlashni hamda mavzuni o‘zlashtirish uchun talabada shakllangan bo‘lishi kerak bo‘lgan bilimlar (asosiy tushunchalar), ko‘nikmalari, malakalari va tajribalarini (matematik kompetensiyalari) oydinlashtirishga xizmat qiladi.

Aniq modul bo‘yicha tahlillar amaliy mashg‘ulotlarda qaraladi.

Birinchi kurs talabalarining umummatematik faoliyat usullarini shakllantirishda foydalanish matematik analiz mashg‘ulotlarida foydalanish maqsadida olti turdagi standart topshiriqlar ishlab chiqildi. Bu topshiriqlar matematika, xususan matematik analiz o‘quv fanining har qanday o‘quv axborotlarini ishlab chiqish (kashf qilish, o‘zgartirish va qo‘llash) va talabalarning leksikonini shakllantirish va rivojlantirish bilan bog‘liq. SHu sababli bu topshiriqlar standart deb nomlandi. Bu topshiriqlar masalalar to‘plamlarida maxsus berilgan emas.

Birinchi standart topshiriq - tushunchani ta’riflash sxemasini tuzish. Ma’lumki, tushuncha bir hil ob’ektlar (ob’ektlar) sinfi yoki bir elementli sinfning muhim belgilarini aks ettiruvchi tafakkur shaklidir

Tushuncha mazmun va hajmga ega. Tushunchaning mazmuni – bu tushunchaning ta’rifida sanab o‘tilgan muhim belgilar yig‘indisidir. Tushunchaning hajmi - bu tushunchada fikrlangan predmetlar to‘plami (sinfi) yoki ob’ektlar. Tushunchaning mazmuni uning ta’rifida, hajmi esa tasnifida ochiladi. Matematik analiz fanida tushunchalarning 70% ga yaqini eng yaqin jins va o‘ziga xos tur farqlar orqali aniqlanadi. SHu tarzda aniqlangan tushuncha uchun tushunchani aniqlash sxemasi - mantiqiy o‘quv modeli tuziladi

Tushunchani aniqlash sxemasi quyidagi komponentlardan tashkil topgan: tushuncha atamasi; tushunchaning muhim belgilari, birinchisi eng yaqini jins tushunchasi, qolganlari esa tur farqlari; tushuncha doirasiga mansub ob’ektlarga misollar; agar kerak bo‘lsa, kontrmisol (1 -rasm).

Atama:

1) eng yaqini jins tushunchasi – birinchi muhim belgi

2) birinchi tur farqi – ikkinchi muhim belgi VA

3) ikkinchi tur farqi – ikkinchi muhim belgi VA (YOKI)

belgilash

o‘qilishi

misollar

kontrmisol

1-rasm. Tushunchani aniqlash sxemasi

Masalan, rasional sonlar to‘plamidagi kesim tushunchasini aniqlash sxemasi quyidagicha berishimiz mumkin (2-rasm):

Rasional sonlar to‘plamidagi kesim

1) Rasional sonlar to‘plamini A va B to‘plamlarga ajratish

2) $A \neq \emptyset,\ B \neq \emptyset$

3) $A \cup B = Q$

4) $\forall a \in A$ va $\forall b \in B \to a < b$

Belgilanishi: (A, B)

O‘qilishi: ABe kesim

Misollar: 1) $A = \{x \in Q : x \leq 2\}, B = \{x \in Q : x > 2\},\ (A, B)$ – kesim;

2) $A = \{x \in Q : x < 2\}, B = \{x \in Q : x \geq 2\},\ (A, B)$ – kesim;

3) $A = \{x \in Q : x \leq 0 \lor x^2 < 2\}, B = \{x \in Q : x > 0\ \land x^2 > 2\},\ (A, B)$ – kesim;

4) $A = \{x \in Q : x < 2\}, B = \{x \in Q : x > 2\},\ (A, B)$ – kesim emas;

5) $A = \{x \in Q : x \leq 2\}, B = \{x \in Q : x \geq 2\},\ (A, B)$ – kesim emas;

6) $A = Z, B = Q \backslash Z,\ (A, B)$ – kesim emas.

2-rasm. Rasional sonlar to‘plamidagi kesim tushunchasini aniqlash sxemasi

Ikkinchi standart masala - tushunchaga keladigan ob’ektlar to‘plamini tuzish. Ushbu ST bajarish uchun o‘qituvchi va talabalar quyidagi metabilim va metako‘nikmalarga ega bo‘lishi kerak. Tushunchaga keltirish - bu ob’ektda berilgan tushunchaning muhim belgilarining mavjudligini aniqlashdan iborat bo‘lgan aqliy faoliyat usuli, kognitiv mantiqiy harakat. Bu belgilar etarli yoki bir vaqtda ham zaruriy va etarli shart bo‘ladi.

2-ST "tushunchaga keltirish" (1-jadval) va umumuquv "tushunchaga keltirish uchun ob’ektlar to‘plamini tuzish" (2-jadval) yordamida, shuningdek, "taqqoslash" "analiz, sintez" harakatlari orqali amalga oshiriladi.

"Tushunchaga keltirish" harakati odatda birlamchi mustahkamlash uchun ishlatiladi. Talabalarga ob’ektlar to‘plami taqdim etiladi va belgilar bilan ishlash qoidasiga asoslanib, ular ob’ektlarni tushunchaga keltiradi (masalan, "rasional sonlar to‘plamida kesim").

Agar tushuncha ta’rifidagi belgilar "va" bog‘lovchi bilan bog‘langan bo‘lsa, u holda o‘rganilayotgan ob’ekt tushuncha doirasiga tegishli bo‘lishi uchun u ushbu ta’rifga kiritilgan barcha belgilarga ega bo‘lishi kerak.

1-jadval

“Tushunchaga keltirish” harakatining tarkibi

1) O‘rganilayotgan ob’ektni umumlashtiradigan tushunchaning ta’rifini eslash;
2) tushuncha belgilari qanday birlashma bilan bog‘langanligini aniqlash;
3) ob’ektning umumiy tushunchaga tegishliligini tekshirish (birinchi belgining mavjudligi);
4) ob’ektning o‘ziga xos farqlari (boshqa belgilar) mavjudligini tekshirish;
5) belgilar bilan ishlash qoidasiga muvofiq ob’ekt tushunchaga tegishli degan xulosaga kelish (belgilar bog‘langan bog‘lovchiga qarab)

2-jadval

"Tushunchaga keltirish uchun ob’ektlar to‘plamini tuzish" harakatining tarkibi

1) Tushunchani ta’riflash sxemasini tuzish;
2) tushunchaning belgilarini sanash;

3) birinchi belgini - eng yaqin umumiy tushunchani ajratib ko‘rsatiish;
4) barcha belgilari bajariladigan tushunchalarga misollar keltirish, shu jumladan xususiy hollar, ushbu ob’ektlarning tarkibiy qismlarining belgilarini o‘zgartirish;
5) birinchi belgi bajarilgan va qolganlaridan kamida bittasi bajarilmaydigan misollarini keltirish;
6) birinchi belgisi bajarilmagan tushunchalarga misollar keltirish;
7) keltirilgan ob’ektlar misollarni yozish va ularni raqamlash

Uchinchi standart topshiriq – tushunchalar orasidagi munosabatlar sxemasni tuzish. Ushbu standart topshiriqni bajarish uchun o‘qituvchi va talabalarga quyidagi metabilimlar kerak: 1) tasniflash (klassifikasiya) - tushuncha hajmini bo‘lishning mantiqiy operasiyasini qo‘llashning maxsus holati bo‘lib, biror bo‘linishlar to‘plamini ifodalaydi; 2) tasniflash tushuncha hajmini ochib beradi - tushunchada fikran ajratilgan ob’ektlar yoki ob’ektlar to‘plami (sinfi); 3) tasniflashga ma’lum talablar qo‘yiladi (6-jadval). Ushbu standart topshiriqni bajarish da ham mantiqiy o‘quv harakatlar ("taqqoslash" , "analiz, sintez") va "tushunchalarning o‘zaro aloqalari sxemasini tuzish" yangi umumo‘quv harakati (3-jadval) talab qilinadi. Tasniflash yoki tizimlashtirish sxemasini tuzish jarayoni ob’ektlar to‘plami yordamida amalga oshiriladi. Tuzilayotgan sxema shu vaqtga qadar talabalar tomonidan o‘rganilgan axborotlar bilan chambarchas bog‘liq.

3-jadval

“Tushunchalarning o‘zaro aloqalari sxemasini tuzish” harakatning tarkibi

1) Ushbu tushuncha uchun eng yaqin jins tushunchani aniqlash;
2) uni guruhlarga bo‘lish mumkinligini aniqlash: a) tushunchaning muhim belgilarini aniqlash; b) tushunchaning hajmini aniqlash;

c) tushuncha hajmiga kiradigan, o‘ziga xos farqlarga ega bo‘lgan ob’ektlar mavjudligini aniqlash; agar shunday bo‘lsa, 3-bandga, agar bo‘lmasa, 10-bandga;
3) tushunchani turlarga bo‘lish asosini - tushunchaning muhim belgilaridan birini tanlash;
4) tushunchani tanlangan asosga ko‘ra guruhlarga bo‘lish (ular orasidagi aloqalarni tayinlash uslubini tanlash);
5) turlarni kichik turlarga bo‘lish asosini tanlash;
6) ob’ektlarni tanlangan asosga ko‘ra kichik turlarga bo‘lish;
7) tasniflash talablariga muvofiqligini tekshirish: a) bo‘linish faqat bitta asosda amalga oshirilishi kerak; b) guruhlarga bo‘lingan barcha ob’ektlarning birlashmasi tushuncha hajmini tashkil qilishi kerak; c) har qanday ikki guruh ob’ektlarning kesishmasi bo‘sh to‘plam bo‘lishi kerak; agar bo‘sh bo‘lsa, 8-bandga, agar bo‘lmasa, 9-bandga;
8) tasniflash amalga oshirildi;
9) tizimlashtirish amalga oshirildi;
10) tasniflash va tizimlashtirish bajarilmagan

Masalan, a) rasional sonlar to‘plamida kesim tushunchasi kiritilgandan so‘ng, qaralgan masalalar asosida uni tasniflash amalga oshiriladi. Rasional sonlar to‘plamida faqat uch turdagi kesim mavjudligi asoslanadi.

b) funksiyalarning muhim sinflarini o‘rganishda juft, toq, juft ham emas, toq ham emas funksiyalar to‘plamlari tizimlashtirishga misol bo‘ladi, chunki juft va toq funksiyalar to‘plamlari uchun umumiy bo‘lgan nol funksiya mavjud.

To‘rtinchi standart topshiriq – muayyan turdagi masalalarni echish uchun yo‘riqnoma tuzish. Bu topshiriqni bajarish natijasida o‘quv tezaurusida aniqlangan asosiy masalalarni echish bo‘yicha faoliyat usullari va uni ifodalovchi yo‘riqnomalar olinadi. Yo‘riqnomalar asosiy matematik masalalar sinflarini echishda foydalaniladi, bu yo‘riqnomalardan masala echimini asoslashda ham foydalanish mumkin. Prosessual bilimlarni olish (Yo‘riqnomalarni tuzish, "kashf qilish") talabalarning faol aqliy faoliyatini, o‘quv ma’lumotlarini qayta ishlash jarayonida ijodiy qobiliyatlarning namoyon bo‘lishini o‘z ichiga oladi, uni tushunishga yordam beradi. Matematika o‘qitishda yo‘riqnomalardan foydalanish talabaga o‘zining individual imkoniyatlaridan kelib chiqib, mustaqil ravishda yangi bilim va harakat usullarini egallash imkonini beradi hamda intellektual faoliyatni tartibga solishni ta’minlaydi.

To‘rtinchi STni bajarishda o‘qituvchi talabalar faoliyatini 4-jadvalda keltirilgan rejaga muvofiq tashkil qiladi.

4-jadval

"Muayyan turdagi masalalarni echish uchun yo‘riqnoma tuzish" harakatining tarkibi

1) Yo‘riqnoma - echishning umumiy metodi tuziladigan masalalar turini tanlash;
2) talabalarga echish uchun bir qator masalalarni, shu jumladan tuzilayotgan yo‘riqnomaning barcha "yo‘nalishlari" ga mos keladigan masalalarni taklif qilish;
3) talabalar tomonidan masalalarni echishni tashkil etish, kerak bo‘lganda yordam ko‘rsatish;
4) bajarilgan harakatlar ketma-ketligini o‘rnatgan holda, talabalar bilan masalalarni echishni umumlashtirish;
5) bajarilgan harakatlarning to‘g‘ri shakllantirilishini va yo‘riqnomaning tegishli bloklarini va butun yo‘riqnomani "ochish"ni (asta-sekin) tashkil etish;
6) yaxlit holda yo‘riqnoma tahlilini tashkil etish.

Masalan, berilgan $\{x_n\}$ ketma-ketlikni monotonlikka tekshirish bo‘yicha yo‘riqnoma quyidagicha bo‘lishi mumkin:

1) $x_{n+1} - x_n$ ayirmani tuzish;

2) ayirmani soddalashtirish;

3) natijani nol bilan taqqoslash;

4) agar $\forall n \in N$ uchun a) $x_{n+1} - x_n \geq 0$ bo‘lsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik kamaymaydi; b) $x_{n+1} - x_n \leq 0$ bo‘lsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik o‘smaydi; v) agar ba’zi natural sonlarda ayirma musbat, boshqa birlarida manfiy bo‘lsa, u holda $\{x_n\}$ ketma-ketlik monoton emas.

Beshinchi standart topshiriq – axborotli sxemani tuzish. Ushbu standart topshiriq o‘quv axborotini strukturalashtirish va to‘ldirish ko‘nikmalarni shakllantirishga qaratilgan, bu ko‘nikmalar o‘quv axborotini tushunishga yordam beradi. Matematik analiz darsligi yoki o‘quv qo‘llanmasining paragrafi (bandi)ning ta’lim mazmunini tushunish hatto matnni mustaqil o‘qiydigan, tayyorgarligi yuqori bo‘lgan talaba uchun ham oson ish emas. YAngi axborotlarning ma’nosini tushunish bilan bog‘liq muammoni o‘rgangan psixologlar quyidagini ta’kidlashadi: matnni tushunish o‘rganilayotgan materialni bir shakldan ikkinchisiga o‘tkazish; o‘rganilgan materialni sharhlash; harakatlar, hodisalar va boshqa rivojlanishining keyingi yo‘nalishini taklif qilish qobiliyatida namayon bo‘ladi.

5 - standart topshiriqni bajarayotganda, avval ma’lum bo‘lgan mantiqiy o‘quv harakatlar "taqqoslash", "analiz, sintez" va yangi umumo‘quv harakatlar "matnning semantik (ma’noli) birliklarini ajratish" (8-jadval), "axborotli sxemani tuzish” (9-jadval) ishlatiladi.

8 - jadval mazmuniga mos ravishda matnning semantik (ma’noli) birliklarini ajratib ko‘rsatish jarayoni dasta shaklida ifodalanadi, shuning uchun odatda "mental xarita" nomi ishlatiladi (2-rasm). Mental xaritaning bloklari asosiy blokga, ular bilan bog‘langan semantik bloklarga ajratilishi mumkin va tegishli bloklarni o‘rganish ketma-ketligi ko‘rsatilgan.

5-jadval

“Matnning semantik (ma’noli) birliklarini ajratish” harakatining tarkibi

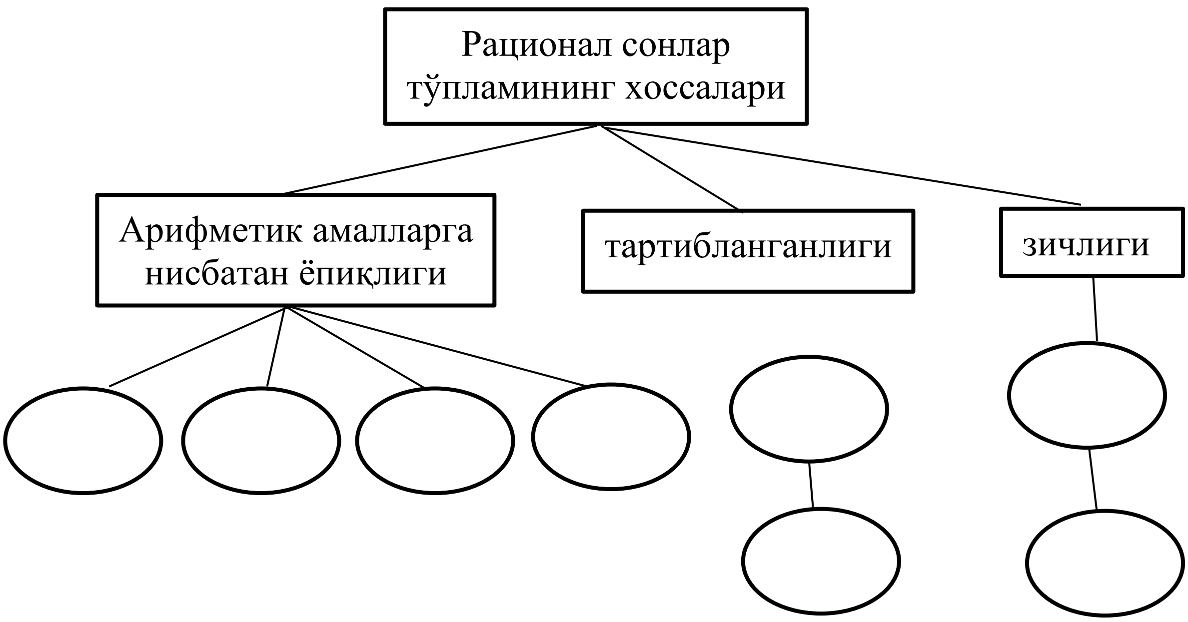
1) Mavzuni - axborotning bosh semantik (ma'noli) birligini – tayanch so'z yoki ibora shaklida ajratish;

2) Tayanch so'z bilan aloqadagi axborotning ma'noli bloklarini ajratish;

3) Tushunchalarni o'zlashtirilayotgan axborotda mavjud bo'lgan fikrlar va faktlar bilan konkretlashtirish (3-rasm)

Mental xaritalar tayyor holda mavzuni o'rganish istiqbollari va rejalashtirishni ko'rsatishi, yoki talabalar oraliq yoki yakuniy nazorat savollariga javob rejasini tuzish maqsadida yaratilishi mumkin. Axborotli sxemani tuzish ko'nikmasi o'quv axborotini tushunishga, tizimlashtirishga, keyinchalik ongli eslab qolishga yordam beradi, sxemalar esa keyinchalik regulyativ funksiyani bajaradi.

Masalan, yakuniy nazorat savolnomasidagi "Rasional sonlar to'plamining xossalari" savoliga tuzilgan xotira haritasi quyidagicha bo'lishi mumkin:



2-rasm. "Rasional sonlar to'plamining xossalari" savoliga tuzilgan xotira haritasi

6-jadval.

Axborotli sxemani tuzish harakatining tarkibi

1) Mazmunning ma’no jixatdan to‘liq tugallangan qismini tanlang (punkt, paragraf, bob, bo‘lim, darslik va boshqalar); 2) tanlangan mazmun elementini o‘rganish; 3) tayanch elementlarni (asosiy faktlar, tushunchalar, teoremalar, formulalar) aniqlash; 4) tayanch elementlar orasidagi aloqalarni o‘rnatish; 5) tayanch elementlarni, ular orasidagi aloqalarni mahkamlash (fiksasiya) usulini tanlang va diagramma tuzish.

Mental xarita va axborot sxemasi uchun umumiy narsa shundaki, ular o‘quv axborotlarini tuzish va to‘ldirish natijasidir va darsning turli bosqichlarida o‘quv harakatlarini shakllantirishni tashkil qilish imkonini beradi.

Oltinchi standart topshiriq – masalaning echimini izlash, teoremani isbotlash sxemasini tuzish. Masalaning echimini izlash masala bilan ishlashning eng muhim qismi bo‘lib, odatda, u ko‘rgazmali vositalarga tayanmasdan, og‘zaki tarzda amalga oshiriladi, ya’ni talabalar tomonidan bajariladigan aqliy faoliyat jarayoni yashirin bo‘ladi. Masalalarni hal qilish uchun turli xil qidiruv sxemalari (jumladan, jadvallar) ushbu jarayonni tasavvur qilish, o‘quvchilar duch keladigan qiyinchiliklarning sabablarini aniqlash va tushunish, masalani echishga yordam beradi.

Ushbu standart topshiriqlarni talabalarga mustaqil ishlash ko‘nikmalarini shakllantirish maqsadida beriladigan maslahatlarda, mustaqil ish, ma’ruza matnini oldo‘qishda yoki amaliy mashg‘ulotga tayyorgarlik ko‘rishda foydalanishga tavsiya etiladi.

2. Matematik analiz kursini bilish va uning ob’ektlarini va metodlarini erkin egallash bo‘lg‘usi matematika o‘qituvchisining matematik madaniyatini oshirishga xizmat qilibgina qolmay, balki uning kasbiy tayyorgarligining

zaruriy elementi hisoblanadi. Bu kursning materiallari maktab matematika kursining asosiy mazmun yo‘nalishlari bilan jips aloqada va ularning ilmiy asoslari hisoblanadi. Matematik analizning asosiy tushunchalari maktab matematika kursining ham asosiy tushunchalari hisoblanadi. SHu sababli birinchi kurs talabalarining leksikonida bu asosiy tushunchalar haqida qoldiq bilimlar (faol yoki faol bo‘lmagan leksikonida) mavjud. Bu tushunchalarga bog‘liq masalalar echish ko‘nikmalari mavjud. Ko‘p yillik kuzatishlar, amaliyot shuni ko‘rsatadiki, talabalar analitik usulda berilgan funksiyani aniqlanish sohasini topish, ba’zi funksiyalarning grafiklarini chizish, funksiyalarning hosilalarini topish, umuman hisoblashga oid masalalarni echa oladi. Ammo tushunchalarning ta’riflari, xossalari, tushunchalar orasidagi aloqalarni tushuntirib bera olmaydi, ularga oid masalalarni echishga qiynalishadi, tushunchaviy tafakkuri etarli darajada shakllanmagan. Ba’zida talabaning shaxsiy tezaurusi – leksikoni mavzuni o‘rganish uchun etarli emas. SHu sababli talabaning leksikonini faollashtirish, undagi bo‘shliqlarni to‘ldirish muhim. Buning uchun vosita sifatida standart topshiriqlardan tashqari, maxsus ishlab chiqilgan savollar va masalalar tizimi xizmat qiladi. Masalani tuzishda talabaning leksikonida mavjud tushunchalarga, faoliyat usullariga asoslaniladi.

Ushbu bobda biz matematik analizning "Analizga kirish" bo‘limini o‘rganish jarayonida foydalaniladigan masalalar tizimi va va ularni tanlashning o‘ziga xos xususiyatlari ko‘rib chiqamiz.

Haqiqiy sonlar to‘plami

№1. Sonlar o‘qiga ta’rif bering, ta’rifda qanday tushunchalar qatnashadi?

№2. CHizg‘ich va sirkul yordamida berilgan kesmani a) teng ikkiga, b) teng uchga bo‘lishni qanday bajarish mumkinligini ayting;

№3. Sonlar o‘qida 1, 3/2, 4/3, -2,3 sonlariga mos keladigan nuqtalarni yasang;

№4. YUqoridagi sonlarni sonlar o‘qida biri ikkinchisiga nisbatan joylashishi haqida nima aytish mumkin?

№5. “Orasida yotadi”, “chapda yotadi”, “o‘ngda yotadi” iboralarning ma’nosini tushuntiring;

№6. Sonlar o‘qida berilgan rasional songa mos keladigan nuqtani yasash algoritmini ayting;

№7. Bunday algoritm yagonami?

YUqoridagi 1-5-masalalar talabalar leksikonini (faol bo‘lmagan) takrorlash maqsadida berilgan. 2-masalada kesmani teng uchga bo‘lish masalasi maktabda maxsus qaralmagan, talaba uchun muammoli vaziyat yaratiladi, 6-masalani echish natijasida talabada ixtiyoriy rasional sonni yasash algoritmi shakllantiriladi.

№8. Rasional sonning umumiy ko‘rinishini yozing. Rasional sonlar to‘plami qanday belgilanadi?

№9. Rasional sonlar to‘plamining arifmetik amallarga nisbatan yopiqligini isbotlang. Ko‘rsatma. Buning uchun ixtiyoriy ikkita rasional sonning yig‘indisi, ayirmasi, ko‘paytmasi, bo‘linmasi (bo‘luvchi noldan farqli) rasional son bo‘lishini ko‘rsating. Bu xossani simvolik ko‘rinishda yozing.

Talaba rasional sonning ta’rifini, har bir rasional sonni qisqarmaydigan kasr ko‘rinishda yozish, rasional sonlar ustida arifmetik amallarni bajarish mumkinligi bilan maktabda tanishadi, lekin maxsus o‘zlashtirish, eslab qolish ob’ekti bo‘lmagan. YUqoridagi 8 va 9 masalalarning maqsadi talabaning faol bo‘lmagan leksikonini faollashtirish, uni yangi tushuncha bilan umumlashtirishdan iborat. Talaba arifmetik amallarga to‘plamda bajariladigan amallar, ularning yopiqligi tushunchalarini o‘zlashtirishi lozim.

Maktabdan talabalar sonli tengsizliklar va ularning xossalarini o‘rganadi. Ammo tartib, to‘plamning tartiblanganlik xossasi tushunchasi bilan matematik analizda tanishadi. Bunda quyidagi masalalardan foydalanish mumkin.

№10. Qachon bitta rasional son ikkinchisidan kichik (katta, teng) deyiladi? Ularning geometrik ma’nosini ayting.

№11. Ushbu jumlani isbotlang: ixtiyoriy ikkita r_1, r_2 rasional son uchun $r_1 < r_2, r_1 > r_2, r_1 = r_2$ munosabatlardan faqat bittasi o‘rinli bo‘ladi.

№12. Jumlani isbotlang. 3) Agar $r_1, r_2, r_3 \in Q$ uchun $r_1 < r_2, r_2 < r_3$ bo‘lsa, u holda $r_1 < r_3$ ekanini isbotlang. Bu tasdiqlarga geometrik talqin bering.

№13. "$\leq$", "$\geq$" munosabatlarni qanday aniqlash mumkin? 5) $r_1 \leq r_2$ va $r_1 \geq r_2$ munosabatlardan $r_1 = r_2$ bo‘lishini isbotlang.

Rasional sonlar to‘plamining zichlik xossasini o‘rganishda quyidagi masalalardan foydalanamiz.

№14. Teng bo‘lmagan ikkita butun son orasida har doim uchinchi butun son mavjudmi? Javobingizni asoslang.

№15 Aytaylik, 2/3 va 3/4 rasional sonlar berilgan bo‘lsin. 2/3 dan katta, lekin 3/4 dan kichik (ular «orasida yotuvchi») rasional songa misol keltiring. Bunday rasional sonlar nechta? Orasida yotadigan rasional sonni topishning biror usulini ko‘rsatish mumkinmi?

№15. YUqorida aytilgan masalani ixtiyoriy ikkita teng bo‘lmagan rasional son uchun umumlashtiring. Bu xossa rasional sonlar to‘plamining zichlik xossasi deyiladi.

№16. Agar nomanfiy rasional son har qanday musbat rasional sondan kichik bo‘laversa, uning nolga teng ekanini isbotlang.

Talabalar sonlar o‘qida har bir rasional songa bitta nuqtani mos qo‘yish algoritmi mavjudligi bilan №6 masalada tanishadi. Rasional sonlar to‘plamini to‘ldirish zaruratini motivasiyalash maqsadida quyidagi masaladan foydalanish mumkin:

№17. YUqorida har bir rasional songa mos keladigan nuqtani yasadik. Demak, har bir rasional songa sonlar o‘qida aniq bitta nuqta mos keladi. Endi teskarisi, sonlar o‘qidagi har bir nuqtaga aniq bitta rasional nuqta mos keladimi? Bu savolga javob berish uchun malani quyidagi yasashni bajaramiz: Sonlar o‘qida birlik kesmani ikkinchi uchidan perpendikulyar chizamiz, shu nuqtadan birlik kesmani sirkul yordamida o‘lchab qo‘yamiz. Perpendikulyardagi birlik kesmaning ikkinchi uchi bilan sonlar o‘qidagi sanoq boshini tutashtiramiz. Natijada to‘g‘ri burchakli uchburchak hosil bo‘ladi. SHu uchburchakning diagonalning uzunligiga teng kesmani sonlar o‘qida sanoq boshidan boshlab qo‘yamiz. Uning ikkinchi uchini (nuqtani) A bilan belgilaymiz. Bu diagonalning uzunligining kvadrati 2 ga teng (Pifagor teoremasi). A nuqtaga rasional son mos keladimi? SHu masalani analitik usulda yozing. ($\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$ o‘rinli bo‘ladigan qisqarmaydigan $\frac{p}{q}$ kasr mavjudmi?)

Ko‘rsatma. Mavjud emas. Teskaridan faraz qiling, ya’ni “$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$ o‘rinli bo‘ladigan qisqarmaydigan $\frac{p}{q}$ kasr mavjud” deb ziddiyatga olib keling.

YOrdamchi masala: juft sonning kvadrati juft bo‘ladi. Isbotlang. Teskarisi o‘rinlimi?

№18. Isbotlangan tasdiqdan sonlar o‘qida rasional sonlarga mos kelmaydigan nuqtalar mavjudligi kelib chiqadi. Rasional nuqtalarga mos keladigan nuqtalarni rasional nuqtalar, qolgan nuqtalarni rasional bo‘lmagan (irrasional) nuqtalar deb ataymiz. Sonlar o‘qida rasional bo‘lmagan nuqtalarga misollar keltiring.

Haqiqiy son tushunchasini matematik analiz kursida Dedekind nazariyasi asosida kiritish rejalashtirilgan. Bu nazariyaning markaziy tushunchasi rasional sonlar kesimidir. Quyidagi masalalarni amaliy mashg‘ulotda ma’ruzada shakllangan leksikonni mutahkamlash va rivojlantirish uchun tavsiya qilish mumkin

№19. Rasional sonlar to‘plami kesimiga ta’rif bering. Kesim qanday belgilanadi?

№20. Aytaylik, A – manfiy rasional sonlar to‘plami, V – musbat rasional sonlar to‘plami bo‘lsin. (A,V) kesim bo‘ladimi? Javobingizni asoslang.

№21. Aytaylik, $A = Z$ – butun sonlar to‘plami, $V = Q\backslash Z$ – qolgan rasional sonlar to‘plami bo‘lsin. (A,V) kesim bo‘ladimi? Javobingizni asoslang.

№22. Aytaylik, A – manfiy rasional sonlar to‘plami bo‘lsin. Bu to‘plamning eng katta elementi mavjudmi (eng katta manfiy rasional son mavjudmi? Eng kichik elementichi? Javobingizni asoslang.

№23. Aytaylik, V – nomanfiy rasional sonlar to‘plami bo‘lsin. Bu to‘plamning eng kichik elementi mavjudmi? Eng katta elementi chi?

№24. Aytaylik, $A = \{r \in Q : r \leq 4\}$ bo‘lsin. A to‘plamni so‘z bilan tavsiflang.

№25. Aytaylik, $A = \left\{r \in Q : r \leq \frac{4}{3}\right\}, B = \{r \in Q : r > \frac{4}{3}\}$ bo‘lsin. Bu to‘plamlarning kesim tashkil etishini isbotlang. Bu holda (A,V) kesim $\frac{4}{3}$. sonni aniqlaydi deb aytiladi (birinchi tur kesim).

Izoh. (A,V) kesim ham, bu erda $A = \left\{r \in Q : r < \frac{4}{3}\right\}, B = \left\{r \in Q : r \geq \frac{4}{3}\right\}$, $\frac{4}{3}$ sonni aniqlaydi (ikkinchi tur kesim).

№26. Quyidagi sonlarni aniqlaydigan kesimlarni tuzing: a) 2; b) -1,5. Bu kesimlarni sonlar o‘qida tasvirlang.

№27. Aytaylik, A to‘plam manfiy rasional sonlar, nol va kvadrati 2 dan kichik bo‘lgan rasional sonlardan, V to‘plam esa kvadrati 2 dan katta bo‘lgan musbat rasional sonlardan tashkil topgan bo‘lsin. a) Bu to‘plamlar juftining kesim bo‘lishini isbotlang; b) A quyi sinfda eng katta element (son) yo‘q ekanini isbotlang; v) V yuqori sinfda eng kichik element (son) yo‘q ekani isbotlang. Bu kesim $\sqrt{2}$ ni aniqlaydi deb aytiladi. Bunday kesim uchinchi tur (irrasional kesim) kesim deyiladi.

№27. Quyidagi sonlarni aniqlaydigan kesimlarni tuzing: a) $\sqrt{3}$; b) $\sqrt[3]{2}$; v) $-\sqrt{2}$.

Haqiqiy sonlar to‘plamining xossalarini isbotlashda kesimlardan foydalaniladi. Rasional sonlar ustidagi amallar va haqiqiy sonlar ustidagi amallarni uzviy davom ettirish maqsadida talabalarga kichik lokal nazariya sifatida qarash mumkin bo‘lgan quyidagi masalalar tizimini tavsiya qilish mumkin:

№28. Kichik lokal nazariya (Rasional sonlar to‘plamining xossalarini “kesimlar” tilidagi bayoni).

Aytaylik $r \in Q$ bo‘lsin. U holda $r = (A, B)$, bu erda $A = \{x \in Q: x \leq r\}, B = \{x \in Q: r > x\}$, ya’ni har bir rasional son birinchi tur kesim bo‘ladi va aksincha. Bu holda rasional sonlar to‘plami shunday kesimlar to‘plamidan iborat bo‘ladi.

28.1. “Kesim”lar tilida “katta”, “kichik”, “teng” munosabatlarni qanday aniqlash mumkinligini uylab ko‘ring. Sonlar o‘qida tasvirlang.

28.2. “Kesim”lar tilida rasional sonlar to‘plamining xossalarini (zichlik, tartiblanganlik) xossalarini isbotlang.

28.3. “Kesim”lar tilida qo‘shish (ayirish, ko‘paytirish, bo‘lish) amallarini qanday aniqlash mumkin?

№29. Irrasional son ta’rifini ayting. Misollar keltiring.

№30. Haqiqiy son, haqiqiy sonlar to‘plamiga ta’rif bering. Haqiqiy sonlar to‘plami qanday belgilanadi?

№31. Aytaylik, $\alpha \in R$; $\beta \in R$ bo‘lsin. U holda ta’rif bo‘yicha $\alpha = (A, B), \beta = (C, D)$, bu erda $(A, B), (C, D)$ rasional sonlar to‘plamidagi kesimlar. Quyidagilarni ta’riflang: a) $\alpha = \beta$; ,b) $\alpha < \beta$; v) $\alpha \leq \beta$; g) $\alpha > \beta$; d) $\alpha \geq \beta$. Sonlar o‘qida tasvirlang. Sonlardan biri rasional bo‘lgandagi xususiy holda ta’rifni soddalashtirish mumkinmi?

№32. R – haqiqiy sonlar to‘plamining zichlik xossasini ifodalang va ibotlang.

№33. R – haqiqiy sonlar to‘plamining tartiblanganlik xossasini ifodalang va ibotlang.

№34. Dedekind teoremasi ma’nosini tushuntiring, teoremani isbotlang. Teorema isbotini qadamlarga ajrating, blok sxema ko‘rinishida tasvirlang. Teoremani isbotlashning g‘oyasi nimadan iborat deb uylaysiz?

№35. Haqiqiy sonning o‘nlik yaqinlashishlari qanday aniqlanishini tushuntiring.

№36. Har bir haqiqiy songa cheksiz o‘nlik kasrni mos qo‘yish mumkin. Har qanday chekli yoki davriy cheksiz o‘nlik kasr rasional sonni ifodalashini isbotlang.

№37.Quyidagi cheksiz o‘nlik kasrlardan qaysilari rasional son: a) 2,13(14); b) 2,76(11); c) 0,4212121...; d) 0,1010010001...; e) 1,320320032...? rasional sonni oddiy kasr ko‘rinishida yozing.

№38. quyidagi cheksiz o‘nlik kasrning davriymasligini isbotlang: 0,1010010001....

№39. Sonlar o‘qida “irrasional nuqtani” qanday yasash mumkinligini tushuntiring.

SHunday qilib, har bir haqiqiy songa sonlar o‘qida bitta nuqta mos qo‘yiladi va aksincha. Bunday moslik o‘zaro bir qiymatli (bieksiya) deyiladi.

Talabalar umumta’lim matematikasi kursida modul tushunchasi, uning geometrik talqini bilan tanishgan, modul qatnashgan tenglama va tengsizliklarni echish usullarini o‘rganadi. Bo‘lg‘usi matematika o‘qituvchisi sifatida hamda maematik analizda modul tushunchasining muhimligini e’tiborga olgan holda haqiqiy sonning moduli tushunchasi va uning xossalarini o‘rganish rejalashtirilgan. Talabalarda shakllangan modul va unga bog‘liq tushuncha, xossalardan iborat leksikonni fan tezaurusi bilan uzviy aloqalarga kiritish modulning xossalarini, xususan arifmetrik amallar bilan bog‘liq xossalarini isbotlashga oid masalalar yordamida amalga oshiriladi.

№40. Haqiqiy sonning moduliga ta’rif bering, uning geometrik ma’nosini ayting. Haqiqiy sonning modulini funksiya deb aytish mumkinmi? Bu funksiyaning aniqlanish va qiymatlar to‘plamini ayting.

№41. Maktabda rasional sonning moduli va uning xossalari o‘rganilgan. Bu xossalarni haqiqiy sonlar to‘plamiga umumlashtirish mumkinmi? Bu modullar nimasi bilan farq qiladi?

№42. Haqiqiy sonning modulni xossalarini ayting, ularni isbotlang.

№43. Asosiy sonli oraliqlarga (interval, kesma (segment), yariminterval, nur) ta’rif bering. Ular qanday belgilanadi? Ularni sonlar o‘qida tasvirlang. Ular uchun umumiy bo‘lgan xossa nimadan iborat deb o‘ylaysiz? Qaysi oraliqlar uchun a) eng katta; b) eng kichik elementi har doim mavjud?

№44. Nuqtaning atrofiga ta'rif bering, misollar keltiring. U qanday belgilanadi?

№45. a) Quyidan (yuqoridan) chegaralangan to'plamga ta'rif bering. Geometrik talqin bering. Misollar keltiring. Oraliqlardan qaysilari quyidan, yuqoridan chegaralangan? b) chegaralangan to'plamga ta'rif bering, geometrik talqin bering.

№46. Quyi (yuqori) chegaraga ta'rif bering. Quyi (yuqori) chegaralar nechta?

№47. Talaba quyidan chegaralangan to'plamga quyidagicha ta'rif berdi: agar $\forall a \in E$ uchun $\exists m > 0$ topilib, $a \geq m$ o'rinli bo'lsa, E quyidan chegaralangan deyiladi. Talaba haqmi? Javobingizni asoslang.

№48. Aytaylik, a) $E = [0; 2]$; $b)\ E = (0; 2)$ bo'lsin. Bu to'plamlarning yuqori chegaralari to'plamini toping.

№№49. Aytaylik, E yuqoridan chegaralangan to'plam bo'lsin. Uning barcha yuqori chegaralari to'plamini V bilan belgilaymiz. Qolgan haqiqiy sonlar to'plamini A bilan belgilaymiz. Haqiqiy sonlar to'plamini bunday ikki to'plamga ajratish kesim bo'lishini asoslang. (A,V) kesimning yuqori sinfida eng kichik element mavjudligini isbotlang.

№50. Aniq yuqori (quyi) chegaraga ta'rif bering. U qanday belgilanadi?

№51. Teoremani isbotlang: Agar E to'plam quyidan chegaralangan bo'lsa, u holda E to'plamning aniq quyi chegarasi mavjud bo'ladi.

№52. Aniq yuqori chegara va to'plamning eng katta elementi tushunchalari nima bilan farq qilishini misolda tushuntiring.

№53. Quyidagi to'plamlarni chegaralanganlikka tekshiring. Agar to'plamning supremumi, infimumi mavjud bo'lsa, ularni toping.

a) M=$\left\{ r = \dfrac{p}{q},\ 0 < p < q \right\}$; b) M=$\left\{ r = \dfrac{p}{q},\ 0 < q < p \right\}$;

c) M=$\left\{ r = \dfrac{p}{q},\ -q < p < 0 \right\}$;

d) (-1,1) intervaldagi irrasional sonlar to'plami;

e) M=$\left\{ \frac{n^4}{2n^4+3}, n \in N \right\}$;   f) M=$\left\{ \frac{n^2}{n+1}, n \in N \right\}$.

№54. CHegaralanmagan to‘plamga misol keltiring. CHegaralanmagan to‘plamga ta’rif bering.

№55. Natural sonlar to‘plami chegaralanmagan. Isbotlang.

№56. “CHeksiz” va “chegaralanmagan” sonli to‘plamlar farqini misollarda tushuntiring.

YUqoridagi masalalarni bir qismi sodda, o‘z-o‘zidan ravshandek ko‘rinadi, ba’zilarini og‘zaki bajarish mumkin. Ammo talabalar bu masalalarni echish orqali o‘z leksikonidagi faol bo‘lmagan qismini faollashtiradi, yangi tushunchalar bilan bog‘laydi. YA’ni talabaning leksikoni va fan tezaurusi orasida uzviylik o‘rnatiladi, fan tezaurusining talabaning shaxsiy tezaurusiga aylanishi, o‘zlashtirish amalga oshiriladi. Bu masalalar sistemasi to‘lalikka da’vo qilmaydi. Masalalar sistemasiga irrasional sonlar to‘plamining arifmetik amallarga nisbatan yopiqligi/yopiqmasligi haqidagi masalalar, rasional va irrasional sonlar orasidagi arifmetik amallar bilan bog‘liq masalalar, mavjudlik va umumiylik kvantorlari qatnashgan tasdiqlarni isbotlash, ularning inkorini kurishga oid masalalarni kiritish maqsadga muvofiq bo‘ladi.

2-mavzu: Oliy ta’limda abstrakt algebraning boshlang‘ich kursi

Reja:

1. Algebra.
2. Algebraik amal va uni aniqlash.
3. Algebra va uning turlari.
4. Algebralarlar gomomorfizmi.
5. Matematikaning turli bo‘limlarida abstrakt algebralarning qo‘llanilishi.

Tayanch iboralar: algebra, algebraik amal, binar munosabat, gomomorfizm.

2.1-ta’rif. A^n to’plamni A ga akslantiradigan har qanday akslantirish A to’plamda berilgan n-ar yoki n-o’rinli algebraik amal deyiladi. Bu erda n-manfiy bo’lmagan butun son bo’lib, algebraik amalning rangi deyiladi. $n=0$ bo’lsa, $A^0=\varnothing$ bo’lgani uchun, 0-ar amal $f:\{\varnothing\}\to A$ ko’rinishidagi akslantirish bo’lib $\varnothing$ ni A ning birorta elementiga o’tkazadi. Boshqacha qilib aytganda 0-ar amal A to’plamning ajratilgan elementidan iborat. Bir o’rinli amal $f:A\to A$ ko’rinishdagi funksiyadan iborat bo’lishi ravshan. Bir o’rinli algebraik amal qisqalik uchun ba’zan unar amal deyiladi.

$n=2$ bo’lganda ikki o’rinli algebraik amal $f:A\times A\to A$ akslantirishdan iborat bo’lib, binar algebraik amal deyiladi. Uch o’rinli algebraik amal ternar algebraik amal deyiladi. Agar ω A to’plamda berigan n-ar algebraik amal bo’lsa, A to’plamni ω- n-ar algebraik amalga nisbatan algebraik yopiq deyiladi.

2.2-ta’rif. A^n to’plamdan A to’plamiga akslantirish A da aniqlangan n-o’rinli qisman amal deyiladi.

2.3-misol. $\mathscr{B}$(A) -A to’plamining barcha to’plamostilaridan tuzilgan to’plam berilgan bo’lsin, u holda $f:B(A)\to B(A), \forall X\in B(A)$ uchun $f(X)=A\setminus X$ tenglik yordamida aniqlanadigan amal unar algebraik amaldir.

2.4-misol. Q- rasinoal sonlar to’plamida bo’lish amali binar qisman amaldir.

2.5-misol. Natural sonlar to’plamida ixtiyoriy uchta songa ularning eng katta umumiy bo’luvchisini mos qo’yadigan amal, natural sonlar to’plamida aniqlangan ternar algebraik amaldir.

Binar algebraik amallarni Ò,•,+,∗,⊙ ko’rinishlarida belgilash qabul qilingan.

2.6-misol. $+:Z^2\to Z$ amal - $+(a,b)=a+b$ tenglik yordamida aniqlangan amal butun sonlar to’plamida qo’shush amali bo’lib, (a,b) butun sonlar juftligiga mos keladigan butun sonni $a+b$ ko’rinishida yozish qabul qilingan.

Shunga o'xshash A to'plamida $*$ binar algebraik amal berilgan bo'lsa, $*(a,b)$ o'rniga $a*b$ yozishni kelishib olamiz.

2.7-ta'rif. $A\neq 0$ to'plam va unda aniqlangan $*$ binar algebraik amal berilgan bo'lsin. U holda $(A,*)$ juftlik gruppoid deb ataladi.

2.8-misol. N-natural sonlar to'plami «•»-N dagi ko'paytirish amali bo'lsa, u holda $(N\bullet)$-gruppoiddir.

2.9-ta'rif. $(A,*)$-gruppoid berilgan bo'lsin, u holda

a) Agar $\forall a,b\in A$ uchun $a*b=b*a$ bo'lsa, u holda **∗**-amali algebraik amal A to'plamida kommutativ deyiladi;

b) Agar $\forall a,b,c\in A$ uchun $a*(b*c)=(c*b)*c$ shart bajarilsa, **∗**-A to'plamida assosiativ algebraik amal deyiladi;

v) Agar $\forall a\in A$ uchun shunday $e\in A$ topilib, $e*a=a$ shart bajarilsa, e element $*$ amalga nisbatan chap neytral element, agar $a*e=a$ shart bajarilsa, o'ng neytral element, agar ikkala shart ham bajarilsa neytral element deyiladi.

2.10-ta'rif. $(A,*)$-gruppoid berilgan bo'lsin. Agar $e\in A$ element **∗**-amalga nisbatan neytral element bo'lsa, u holda e grippoidning neytral elementi deyiladi.

2.11-teorema. Agar $(A,*)$-gruppoidda neytral element mavjud bo'lsa, u yagonadir.

Isbot. Faraz qilaylik $(A,*)$-gruppoidda ikkita e_1 va e_2 neytral elementlar mavjud bo'lsin, u holda neytral elementning ta'rifiga ko'ra $e_1=e_1*e_2=e_2$, ya'ni $e_1-=e_2$

2.12-natija. Agar $(A,*)$-gruppoidda neytral element mavjud bo'lsa, uning barcha chap , o'ng neytral elementlari neytral elementga teng.

2.13-ta'rif. Agar $(A,*)$-gruppoidda $*$ amal qo'shish amalidan iborat bo'lsa, gruppoid additiv gruppoid; agar $*$ amal, ko'paytirish amali bo'lsa, gruppoid mul'tiplikativ gruppoid deyiladi.

Odatda qo'shish amali «+» orqali, ko'paytirish amali «•» orqali belgilanadi. Qo'shish amaliga nisbatan neytral elementni nol deb ataymiz va «0» orqali belgilaymiz. Ko'paytirish amaliga nisbatan neytral element birlik element deyilib «1» orqali belgilanadi.

2.14-misol. $(R,+)$ gruppoidning neytral elementi 0; $(R,\bullet)$ - gruppoidning neytral elementi 1. Bu erda R-haqiqiy sonlar to'plami, +, •- R dagi qo'shish va ko'paytirish amallaridir.

2.15-misol. $\mathscr{B}$(A) - A to'plamning barcha to'plamostilari bo'lsin, u holda $\mathscr{B}$(A) to'plamlarni qo'shish amaliga nisbatan gruppoid bo'lib, uning neytral elementi $\varnothing$ to'plamdir. $\mathscr{B}$(A) - to'plamlarning kesishmasi amaliga nisbatan ham gruppoid bo'lib, uning neytral elementi A-to'plamdan iborat.

2.16-ta'rif. $(A,*)$-gruppoid berilgan bo'lsin, u holda $a \in A$ element va $\forall b,c \in A$ elementlar uchun $a*b=a*c$ tenglikdan $b=c$ kelib chiqsa, u holda a element $(A,*)$ gruppoidning <u>chap regulyar elementi</u>, $b*a=c*a$ shartdan $b=c$ kelib chiqsa, a element $(A,*)$ gruppoidning <u>o'ng regulyar elementi</u> deyiladi. Ham chap, ham o'ng regulyar element <u>regulyar element</u> deyiladi.

2.17-misol. $(R,+)$ gruppoidning barcha elementlari regulyar elementlardir.

2.18 -ta'rif. $(A,*)$-gruppoid neytral elementga ega bo'lsin. U holda $a \in A$ element uchun shunday $a' \in A$ element topilib, $a'*a=e$ bo'lsa, a' element a elementga <u>chap simmetrik element</u>, $a*a'=e$ bo'lsa <u>o'ng simmetrik</u>, ikkala shart ham bajarilsa, <u>simmetrik element</u> deyiladi.

2.19-misol. $(R,+)$ gruppoidda $\forall a \in R$ element uchun a element simmetrik elementdir.

2.20-misol. $(R,\bullet)$- gruppoidda $\forall a \in R$, $a \neq 0$ element uchun a^{-1} element simmetrik elementdir.

Agar $(A,*)$-gruppoidda **∗**-amal qo'shish bo'lsa, «simmetrik» termini, «qarama-qarshi» termini bilan; agar **∗**-amali ko'paytirish bo'lsa, «teskari» termini bilan almashtiriladi.

2.21-ta'rif. $(A,*)$-gruppoid, R esa A to'plamdagi ekvivalentlik munosabati bo'lsin. Agar $a_1, a_2, b_1, b_2 \in A$ elementlar uchun $a_1 R b_1$ va $a_2 R b_2$ shartlardan $(a_1 * a_2) R (b_1 * b_2)$ kelib chiqsa, u holda R-ekvivalentlik munosabati $(A,*)$ gruppoidda kongruensiya deyiladi.

2.22-misol. $(Z,+)$ gruppoidda $\forall Z_1, Z_2 \in Z$ uchun $(Z_1 R Z_2) \Leftrightarrow (Z_1 - Z_2 \vdots 3)$ qonun bilan aniqlangan ekvivalentlik kongruensiyadir. Haqikatdan, $x_1 R y_2$ va $x_2\ R y_2$ bo'lsin, ya'ni $x_1 - y_1 \vdots 3$ va $x_2 - y_2 \vdots 3$ u holda $(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2) = (x_1 - y_1) + (x_2 - y_2)$ ham 3 ga bo'linishi ravshan.

2.23-ta'rif. $(A,*)$-gruppoidda **∗-**assosiativ amal bo'lsa, bunday gruppoid yarimgruppa deyiladi.

Neytral elementga ega bo'lgan yarimgruppa monoid deyiladi.

2.24-misol. Natural sonlar to'plami qo'shish amaliga nisbatan yarimgruppadir. Kelgusida bu yarimgruppa $(N,+)$ orqali belgilanadi.

2.25-misol. Natural sonlar to'plami ko'paytirish amaliga nisbatan monoiddir. Bu monoidda $(N,\bullet,1)$ tartiblangan uchlik ko'rinishida belgilanadi.

2.26-teorema. Monoidda ihtiyoriy element ko'pi bilan bitta simmetrik elementga ega.

Isbot. Faraz qilaylik $(A,*)$- yarimgruppada a element uchun ikkita a_1 va a_2 simmetrik elementlar mavjud bo'lsin. U holda

$$a_1 = a_1 * e = a_1 * (a * a_2) = (a_1 * a) * a_2 = e * a_2 = a_2 .$$

2.27-natija. Monoidda a element uchun simmetrik element mavjud bo'lsa, a elementga chap, o'ng simmetrik elementlar a ga simmetrik bo'lgan elementga teng bo'ladi.

2.28-teorema. $(A,*,e)$- monoidda $a \in A$ elementga $a', b \in A$ elementga esa b'- simmetrik element bo'lsin, u holda $a * b$ elementga $b' * a'$ simmetrik element bo'ladi.

Isbot. Haqiqatdan

$(a*b)*(b'*a')=(a*(b*b')*a')=(a*e)*a'=a*a'=e$ va

$(b'*a')(a*b)=(b'*(a'*a))*b=(b'*e)*b=b'*b=e$

2.29-teorema. $(A,*,e)$ - monoid berilgan bo'lsin, agar $a\in A$ element uchun simmetrik element mavjud bo'lsa, bunday element regulyar elementdir.

Isbot. Haqiqatda $a\in A$ elementga $a'\in A$ element simmetrik bo'lsin, u holda $\forall b,c\in A$ elementlar uchun $a*b=a*c$ shart bajarilsa, $a'*(a*b)=a'*(a*c)$ yoki $(a'*a)*c=(a'*a)*c$ bo'ladi. Agar $a'*a=e$ bo'lishini hisobga olsak, $b=c$ bo'ladi.

2.30-ta'rif. $(A,*)$-gruppoid va $B\subset A$ bo'lsin. Agar $\forall b_1,b_2\in B$ elementlar uchun $b_1*b_2\in B$ bo'lsa, B to'plam $*$ algebraik amalga nisbatan algebraik yopiq deyiladi. $(B,*)$ juftlik esa $(A,*)$ gruppoidning qism gruppoidi yoki gruppoidosti deyiladi.

2.31-misol $(Z,+)$ gruppoid $(R,+)$ gruppoidning qism gruppoididir.

2.32-ta'rif. $A\neq\varnothing$ to'plam va A da bajariladigan algebraik amallar to'plami Ω berilgan bo'lsin (A,Ω)- juftlik algebra deyiladi. A- to'plam algebraning bosh to'plami, Ω-algebraning bosh amallari to'plami deyiladi.

(A,Ω) to'plam berilgan bo'lsa, A to'plam Ω dagi barcha amallarga nisbatan algebraik yopiq bo'lishi ravshan. Algebradagi Ω-amallar to'plami chekli, ya'ni $\Omega=\{\omega_1,\ldots,\omega_n\}$ bo'lsa, $(A,\{\omega_1,\ldots,\omega_n\})$ o'rniga yozuvni ihchamlashtirish maqsadida (A,Ω) - deb yozishga kelishib olamiz.

2.33-misol. Haqiqiy sonlar to'plami va unda bajariladigan «•», «+» amallari 0-o'rinli amallar 0, 1 lar bilan birga, ya'ni $(R,+,\bullet,0,1)$-to'plam algebradir. Bu algebraning bosh amallari to'plami $(+,\bullet,0,1)$ bo'lib, darajaga ko'tarish, ayirish amallarini hosilaviy amallar deb qarashimiz mumkin.

2.34-ta'rif. (A,Ω) va (B,Ω') algebralarning amallari to'plamlari Ω va Ω' lari orasida biektiv moslik o'rnatilgan bo'lib, Ω to'plamidagi har bir ω n-ar amalga nisbatan Ω' dan ω' n-ar amal mos qo'yilgan bo'lsa, bu algebralar bir hil turli algebralar deyiladi.

Agar (A,Ω) algebra berilgan bo'lsa, Ω-to'plamdagi amallarning ranglaridan iborat to'plam algebraning turi deyiladi. Xususan $(A,\varpi_1,...,\omega_n)$ algebraning turi $\{r(\omega_1),...,r(\omega_n)\}$ to'plamdan iborat. Bir hil turdagi algebralarning bir-biriga mos keladigan amallarining ranglari bir hil bo'lishi ravshan.

2.35-misol. $(A,*)$-gruppoidning turi $\{2\}$ to'plamdan, $(A,*,e)$- monoidning turi esa $\{2,0\}$ to'plamdan iborat.

Algebradagi amallar to'plami chekli bo'lganda, bu algebraning turini ketma-ketlik sifatida yozish maqsadga muvofiq, ya'ni $(A,\varpi_1,...,\omega_n)$ algebraning turi $(r(\omega_1),...,r(\omega_n))$ ketma-ketlik ko'rinishida ifoda qilinadi.

2.36-misol. $(R,+,\bullet,0,1)$ algebraning turi $(2,2,0,0)$ ketma-ketlikdan iborat.

(A,Ω) va (B,Ω') bir hil turli algebralar berilgan bo'lsin. $\forall\omega\in\Omega$ amalga $\omega'\in\Omega'$ amal mos qo'yilgan deb faraz qilaylik. Agar $\varphi: A\to B$, akslantirish va $\forall a_1,...,a_n\in A$ elementlar uchun $\varphi(\omega(a_1,...,a_n))=\omega'(\varphi(a_1),...,\varphi(a_n))$ tenglik bajarilsa, φ akslantirish ω amalni saqlaydi. ω amal A dagi ajratilgan element, ya'ni nol o'rinli amal bo'lsa, u holda ω ga mos keladigan ω' ham B ning ajratilgan elementi bo'ladi, $\varphi(\omega)=\omega'$.

2.37-ta'rif. (A,Ω), (B,Ω') algebralar berilgan bo'lsin. Ω dagi barcha amallarni saqlaydigan $\varphi: A\to B$ akslantirish (A,Ω) agebraning (B,Ω) algebraga gomomorfizmi deyiladi.

2.38-ta'rif. $\varphi: A\to B$ akslantirish (A,Ω) agebraning (B,Ω') algebraga gomomorfizmi bo'lsin. U holda agar φ- in'ektiv akslantirish bo'lsa, monomorfizm, φ- syur'ektiv akslantirish bo'lsa, epimorfizm, φ- biektiv akslantirish bo'lsa izomorfizm deyiladi. Monomorf akslantirishni izomorf joylashtirish deb ham yuritiladi.

2.39-ta'rif. Algebrani o'zini o'ziga gomomorf akslantirish endomorfizm, algebrani o'zini o'ziga izomorf akslantirish esa avtomorfizm deyiladi.

2.40-ta'rif. (A,Ω) algebrani (B,Ω') algebraga akslantiradigan kamida bitta izomorfizm mavjud bo'lsa, u holda (A,Ω) algebra (B,Ω') algebraga izomorf deyiladi.

2.41-misol. R - haqiqiy sonlar to'plami R^+ musbat haqiqiy sonlar to'plami bo'lsin $(R^+,\bullet,1)$ va $(R,+,0)$ algebralar $(2,0)$ tipli algebralar bo'lib, $\varphi: R^+ \to R,\ \ \varphi(x)=\lg x$ akslantirish birinchi algebraning ikkinchi algebraga izomorf akslantirishdir. Haqiqatdan φ- biektiv akslantirish bo'lib $\varphi(a\bullet b)=\lg\,(a\bullet b)=\lg\,a+\lg\,b=\varphi(a)+\varphi(b)$.

2.42-teorema. (A,Ω_1), (B,Ω_2), (C,Ω_3) algebralar berilgan bo'lib, g A to'plamini B to'plamga, φ esa B to'plamini C to'plamga akslantirish, $\varphi\circ g$ esa bu akslantirishlarning kompozisiyasi bo'lsin. U holda φ va g lar gomomorfizm bo'lishidan $\varphi\circ g$ ning gomomorfizm bo'lishi, φ va g lar epimorfizm bo'lishidan $\varphi\circ g$ ning epimorfizm bo'lishi; φ va g lar monomorfizm bo'lishidan $\varphi\circ g$ ning monomorfizm bo'lishi, φ va g larning izomorfizm bo'lishidan $\varphi\circ g$ ning izomorfizm bo'lishi kelib chiqadi.

Isbot. $\omega_1\in\Omega_1$ n-ar algebraik amalga Ω_2 dan ω_2 n-ar algebraik amal mos qo'yilgan, ω_2 ga esa Ω_3 dan ω_3 n-ar algebraik amal mos qo'yilgan bo'lsin, u holda $\forall a_1,...,a_n\in A$ uchun teorema shartiga ko'ra φ va g akslantirishlar gomomorfizmlar bo'lishini inobatga olsak,

$$(\varphi\circ g)(\omega_1(a_1,..,a_n))=\varphi(g(\omega_1(a_1,...,a_n))=\varphi(\omega_2(g(a_1),...,g(a_n)))=$$
$$=\omega_3(\varphi(g(a_1)),...,\varphi(g(a_n)))=\omega_3((\varphi\circ g)(a_1),...,(\varphi\circ g)(a_n))$$

Shunday qilib φ va g lar gomomorfizmlar bo'lishidan $\varphi\circ g$ ning gomomorfizm bo'lishini isbot qildik. Teoremaning qolgan tasdiqlarini funksiyalar kompozisiyasining xossalaridan bevosita kelib chiqadi.

2.43-teorema. Agar (A,Ω_1) algebraning (B,Ω_2) algebraga izomorfizmi bo'lsa, u holda φ ga teskari bo'lgan φ^{-1} akslantirish (B,Ω_2) algebraning (A,Ω_1) algebraga izomorfizmidir.

Isbot. φ-biektiv akslantirish bo'lganligi sababli φ^{-1} ham biektiv akslantirish bo'lishi 6.16-teoremada isbot qilingandek. SHuning uchun teoremani isbot qilish uchun φ^{-1} akslantirish algebraik amallarni saqlishini ko'rsatish kifoya.

Faraz qilaylik, $\omega_1 \in \Omega$ n-ar algebraik amalga Ω_2 to'plamidan ω_2 amal mos kelsin. $\forall b_1,...,b_n \in B$ elementlar uchun $\varphi(a_1)=b_1,...,\varphi(a_n)=b_n$ deb olsak, u holda $\varphi^{-1}(b_1)=a_1,...,\varphi^{-1}(a_n)=b_n$.

Endi $\varphi^{-1}(\omega_2(b_1,...,b_n))=\omega_1(\varphi^{-1}(b_1),...,\varphi^{-1}(b_n))$ bo'lishini ko'rsatamiz. Haqiqatdan agar φ-akslantirish amallarni saqlashini hisobga olsak,

$$\varphi^{-1}(\omega_2(b_1),...,\omega_2(b_n))=\varphi^{-1}(\omega_2(\varphi(a_1)),...,(\varphi(a_n)))=\varphi^{-1}(\varphi(\omega_1(a_1,...,a_n)))=$$
$$=(\varphi^{-1}\circ\varphi)(\omega(a_1,...,a_n))=\omega_1(a_1,...,a_n)=\omega_1(\varphi^{-1}(b_1),...,\varphi^{-1}(b_n))$$

2.44-natija. Algebralar izomorfizmi ekvivalentlik munosabatidir.

2.45-ta'rif. (A,Ω_1) va (A,Ω_2) bir hil tipli algebralar berilgan bo'lib, $B\subset A$ bo'lsin. Agar $\forall\omega_1\in\Omega$ n-ar algebraik amalga Ω_2 dan mos keladigan n-ar algebraik amalni ω_2 orqali belgilaymiz. Agar $\forall b_1,...,b_n\in B$ uchun $\omega_2(b_1,...,b_n)=\omega_1(b_1,...,b_n)$ tenglik bajarilsa, u holda ω_2 n-ar algebraik amal ω_1 n-ar algebraik amalning B to'plami bo'yicha cheklangani (B,Ω_1) algebra esa (A,Ω_2) algebraning qism algebrasi yoki <u>algebraosti</u> deyiladi.

2.46-misol. $(Q,+,\bullet,0,1)$ algebra $(R,+,\bullet,0,1)$ algebraning algebraosti bo'lib, Q dagi amallar R dagi amallarni Q to'plam bo'yicha cheklanganidir.

2.47-teorema. Algebraosti bo'lish munosabati refleksiv, antisimmetrik, tranzitiv munosabat, ya'ni noqat'iy tartib munosabatdir.

Isbot. Haqiqatdan $\forall(A,\Omega_1)$ algebra (B,Ω_2) algebraning algebraostidir. Agar (A,Ω_1) algebra (B,Ω_2) algebraning algebraosti bo'lsa va aksincha (B,Ω_2) algebra (A,Ω_1) algebraning algebraosti bo'lsa, $A\subset B$ va $B\subset A$ bo'ladi, bundan $A=B$ kelib chiqadi. U holda, agar Ω_1 dagi ω_1 n-ar algebraik amalga Ω_2 dan ω_2 n-ar amal mos kelsa, $\forall a_1,...,a_n\in A$ uchun $\omega_1(b_1,...,b_n)=\omega_2(b_1,...,b_n)$ bo'ladi.

Algebraosti munosabati tranzitiv bo'lishi ham bevosita tekshiriladi. Buni mustaqil isbotlash uchun talabalarga qoldiramiz.

Shunday qilib, algebraosti bo'lish munosabati refleksiv, antisimmetrik va tranzitiv munosabat, ya'ni, noqat'iy tartib munosabat ekan.

$\{(A_\alpha,\Omega_\alpha) \mid -\alpha \in M\}$ to'plam (B,Ω) algebraning algebraostilari to'plami bo'lsin. Algebraostining ta'rifiga ko'ra har bir (A_α,Ω_α) algebra (B,Ω) algebra bilan bir hil turli va $\forall\omega_2$ n-ar algebraik amal Ω dagi qandaydir ω-ar algebraik amalning cheklanganidir.

Faraz qilaylik $\bigcap_{\alpha\in M} A_\alpha \neq \varnothing$ bo'lsin, u holda $\forall a_1,...,a_n \in \bigcap A_\alpha$ uchun $\omega_\alpha(a_1,...,a_n) = \omega(a_1,...,a_n) \in \bigcap A_\alpha$ bo'ladi. Demak, $\bigcap_{\alpha\in M} A_\alpha$ - to'plam ω-ar algebraik amalning $\bigcap_{\alpha\in M} A_\alpha$ dagi cheklanganlarini belgilasak: $(\bigcap_{\alpha\in M} A_\alpha,\Omega')$ algebra (B,Ω) algebraning algebraosti bo'lishi ravshan. Bu algebrani (A_α,Ω_α)-algebraostilarning kesishmasi deb ataymiz.

2.48-teorema. Agar (A,Ω) algebrada hech bo'lmaganda bitta nol o'rinli algebraik amal bo'lsa, bu algebraning algebraostilari ixtiyoriy to'plamidagi algebraostilar kesishmasi yana (A,Ω) ning algebraosti bo'ladi.

Isbot. Nol o'rinli amal ajratilgan element ekanligini hisobga olsak, bu element (A,Ω) algebraning har qanday algebraostining ham ajratilgan elementi bo'lishi kelib chiqadi. Demak, (A,Ω) algebraning algebraostilari ixtiyoriy to'plamidagi algebraostilari kesishmasi bo'sh emas. Natijada bu kesishma yuqorida isbotlaganimizga ko'ra algebraosti bo'ladi.

2.49-natija. (A,Ω) algebra va $B \neq \varnothing$ to'plam A ning to'plamosti berilgan bo'lsin. $\{(A_\alpha,\Omega_\alpha) \mid -\alpha \in M\}$ to'plam esa (A,Ω) algebraning $B \subset A_\alpha$ shartni qanoatlantiradigan barcha algebraostilari bo'lsin. U holda barcha (A_α,Ω_α)-algebraostilarning kesishmasi (A,Ω) algebraning algebraosti bo'ladi. Bu algebraosti B to'plam yaratgan algebraosti deyiladi.

A to'plam va unda bajarilgan n-ar algebraik amal, ~-ekvivalentlik munosabati berilgan bo'lsin. Agar $\forall a_1,...,a_n \in A$ va $\forall b_1,...,b_n \in A$ elementlar uchun $a_i \sim b_i,\ i=1,...,n$ shartdan $\omega(a_1,...,a_n) \sim \omega(b_1,...,b_n)$ kelib chiqsa, ~-ekvivalentlik munosabati ω-n-ar <u>algebraik amalga nisbatan kongruensiya</u>

deyiladi. $A/\sim$ to'plam A ning ekvivalentlik munosabatiga nisbatan faktor to'plami bo'lsin. $[a_1],...,[a_n]$ lar $A/\sim$ ning ixtiyoriy elementlari bo'lsin. U holda $\forall([a_1],...,[a_n])\,n$ likga $[\omega(a_1,...,a_n)]$ ekvivalentlik sinfini mos qo'yadigan akslantirish $A/\sim$ to'plamda aniqlangan n-ar algebraik amaldir. Haqiqatdan $[\omega(a_1,...,a_n)]$ sinf $[a_1],...,[a_n]$ ekvivalentlik sinflaridan olingan a_1 vakillarga bog'liq emas. CHunki, agar $\upsilon = 1,...,n$ lar uchun $b_i \in (a_i)$, ya'ni $b_i \sim a_i$ bo'lsa ~-ekvivalentlik munosabati kongruensiya bo'lgani uchun, $\omega(a_1,...,a_n) \sim \omega(b_1,...,b_n)$ bo'ladi, u holda $[\omega(a_1,...,a_n)] \sim [\omega(b_1,...,b_n)]$

$A/\sim$ faktor to'plamda aniqlangan bu amalning ~-kongruensiya orqali ω-n-ar algebraik amal bilan assosirlangan amal deb ataymiz va $\omega*$ orqali belgilaymiz. SHunday qilib $\forall[a_1],...,[a_n] \in A/\sim$ uchun $\omega*([a_1],...,[a_n]) = ([\omega(a_1,...,a_n)])$.

2.50-ta'rif. (A,Ω) algebra va $\sim$ Ω dagi har bir amalga nisbatan kongruensiya bo'lsin. $\Omega*$ to'plam esa $A/\sim$ faktor-to'plamda aniqlangan va Ω dagi amallar bilan assosirlangan barcha amallar to'plami bo'lsin. U holda $(A/\sim,\Omega*)$- algebra (A,Ω) algebraning ~- kongruensiya bo'yicha faktor-algebrasi deyiladi.

2.51-misol. Z- butun sonlar to'plami bo'lsin. Z da $a \sim b$ deymiz va a ga $a-b$juft son bo'lsa, ~- munosabat kongruensiya bo'lishi ravshan. Bu munosabat bo'yicha ekvivalentlik sinflari faqat ikkita bo'lib, ular $[0],[1]$ sinflardan iborat. Bu sinflar to'plamini $Z/\sim$ orqali belgilaylik, $\forall[a],[b] \in Z/\sim$ uchun $\oplus$, Θ amallarini $[a]\oplus[b] = [a+b]$. $[a]\odot[b] = [a \bullet b]$ tengliklar orqali aniqlasak, $(\{[0],[1]\},\oplus,\odot,[0],[1])$ algebra $(Z+,\bullet,0,1)$ algebraning faktor algebrasi bo'ladi.

2.52-teorema. $\varphi : A \to B$ akslantirish (A,Ω_1) algebraning (B,Ω_2) algebraga epimorfizmi bo'lsin. U holda A to'plamda aniqlangan $R = \{(x'x'') \mid \forall x', x'' \in A, \varphi(x') = \varphi(x'')\}$ - munosabat Ω_1 to'plamdagi har bir amalga nisbatan kongruensiya bo'lib, A/R to'plam Ω_1^* amallar to'plamiga nisbatan (A,Ω_1) algebraning faktor algebrasi bo'ladi. Bu algebrani $(A/R,\Omega^*)$ orqali belgilaymiz.

Isbot. Teoremani isbot qilish uchun $R-\Omega_1$ dagi har bir ω_1 n-ar amalga nisbatan kongruensiya bo'lishini ko'rsatish etarli. R- ekvivalentlik munosabati bo'lishi isbotlangan edi. SHuning uchun $\forall a_1,...,a_n \in A$ va $b_1,...,b_n \in A$ elementlar uchun $a_i Rb_\upsilon,\ \upsilon=1,...,n$ munosabatdan $\omega_1(a_1,...,a_n)\,R\,\omega_1(b_1,...,b_n)$ bo'lishini ko'rsatishimiz etarli.

Shartga ko'ra $\varphi(a_i)=\varphi(b_i), i=1,...,n$, u holda φ-gomomorfizm bo'lishi uchun

$$\varphi(\omega_1(a_1,...,a_n))=\omega_1(\varphi(a),...,\varphi(a_n))=\omega_1(\varphi(b_1),...,\varphi(b_n))=\varphi(\omega_1(b_1,...,b_n)).$$

Demak, $\omega_1(a_1,...,a_n)\,R\,\omega_1(b_1,...,b_n)$.

2.53-teorema. $\varphi: A\to B$ akslantirish (A,Ω_1) algebraning (B,Ω_2) algebraga epimorfizmi, $R=\{(x'x'')\mid \forall x',x''\in A, \varphi(x')=\varphi(x'')\}$-esa A da aniqlangan ekvivalentlik munosabati bo'lsin. U holda $(A/R,\Omega^*)$ faktor algebra (B,Ω_1) algebraga izomorfdir.

Isboti. Har bir $[a]\in A/R$ sinfga $\varphi(a)$ ni mos qo'yadigan $\Phi: A/R\to B$ akslantirish $(A/R,\Omega_1^*)$ algebrani (B,Ω_2) algebraga akslantiradigan izomorfizmdir. Haqiqatdan 6.16-teoremada bu akslantirish biektiv bo'lishi tasdiqlangan edi. Undan tashqari $\forall[a_1],...,[a_n]\in A/R$ elementlar va $\forall\omega_1\in\Omega_1^*$ n-ar algebraik amal uchun $\Phi(\omega_1^*([a_1],...,[a_n]))=$

$$=\Phi([\omega_1(a_1,...,a_n)])=\varphi(\omega_1(a_1,...,a_n))=\omega_1(\varphi(a_1),...,\varphi(a_n))=\omega^*{}_1(\Phi([a_1]),...,\Phi([a_n])).$$

2.54-teorema. $(A,*)$ gruppoid, ~-esa, A dagi kongruensiya munosabati $A/\sim$-A to'plamning ~-ekvivalentlik munosabati bo'yicha faktor-to'plami bo'lsin. U holda $\forall[a_1],[a_2]\in A/\sim$ ekvivalentlik sinflari uchun $[a_1]*[a_2]=[a_1*a_2]$ tenglik bilan aniqlanadigan munosabat A/N to'plamda algebraik amal bo'ladi.

Isboti. Teoremani isbot qilish uchun $\forall[a_1],[a_2]$ sinflarga teorema shartida ko'rsatilgan tenglik yagona sinfni mos qo'yishini ko'rsatish etarli.

Faraz qilaylik, $\forall b_1, E[a_1]$ va $\forall b_2, E[a_2]$ bo'lsin, u holda $b_1\sim a_1$ va $b_2\sim a_2$.

Teorema shartiga ko'ra $\sim$- kongruensiya. Demak, $b_1 * b_2 \sim a_1 * a_2$ ya'ni, $[a_1 * a_2] = [b_1 * b_2]$. Demak, $[a_1] * [a_2]$ ifoda $[a_1]$ va $[a_2]$ ekvivalentlik sinflaridan olingan vakillarga bog'liq bo'lmagan yagona ekvivalentlik sinfi ekan.

SHunday qilib, $A/\sim$ to'plam $*$- amalga nisbatan gruppoid bo'lishini isbot qildik. Bu gruppoidni $(A,*)$ gruppoidning faktor gruppoidi deb ataymiz va $(A/\sim,\oplus)$ orqali belgilaymiz.

2.55-misol. $(Z,+)$-gruppoidda $\forall z_1, z_2 \in A$ uchun $(z_1 \sim z_2) \Leftrightarrow ((z_1 - z_2) \vdots 3)$ qonuniyat bilan aniqlangan munosabat kongruensiyabo'lishini yuqorida ko'rdik. Z ning $\sim$ munosabat bo'yicha ekvivalentlik sinflari $Z_3 = \{[0],[1],[3]\}$- to'plamidan iborat. U holda $Z_3, \forall [a],[b] \in Z_3$ uchun $[a] \oplus [b] = [a+b]$ tenglik yordamida aniqlangan amalga nisbatan gruppoid bo'lib, Z ning faktor gruppoididir.

2.56-teorema. $(G_1,\Omega_1), (G_2,\Omega_2), (G,\Omega)$- bir hil turli algebralar berilgan bo'lib, $G_1 \cong G_2$, (G_2,Ω_2)- algebra (G,Ω)- algebraning algebraostisi bo'lsin. U holda (G_1,Ω_1)- qism algebradan iborat qism algebraga ega bo'lgan (G,Ω) algebraga izomorf (G_3,Ω_3) algebra mavjud.

Isbot. Faraz qilaylik $\forall \omega_1 \in \Omega_1$ n-ar algebraik amalga $\omega_2 \in \Omega_2$ n-ar algebraik amal, $\omega_2 \in \Omega_2$ algebraik amalga esa $\omega \in \Omega$ n-ar algebraik amal mos kelsin va $\varphi : G_1 \in G_2$ izomorf akslantirish bo'lsin.

$G_3 = (G/G_2) \cup G_1$ to'plamda har bir $\omega \in \Omega$ n-ar algebraik amalga mos qilib ω_3 n-ar algebraik amalni $\forall a_1,...,a_k \in G \setminus G_2$, $\forall a_{k+1},...,a_n \in G_1$ elementlar uchun, agar $\omega(a_1,...,a_k,\varphi(a_{k+1}),\varphi(a_n)) \in G_2$ bo'lsa,

$$\omega_3(a_1,...,a_k,a_{k+1},...,a_n) = \varphi^{-1}(\omega(a_1,...,a_k,\varphi(a_{k+1}),...,\varphi(a_n)));$$

Agar $\omega(a_1,...,a_k,\varphi(a_{k+1}),\varphi(a_n)) \in G \setminus G_2$ bo'lsa, $\omega_3(a_1,...,a_k,a_{k+1},...,a_n) = \omega(a_1,...,a_k,\varphi(a_{k+1}),\varphi(a_n))$ tengliklar yordamida aniqlaylik. Agar shunday usulda G_3 da aniqlangan barcha amallar to'plamini Ω_3 orqali belgilasak (G_3,Ω_3)- algebra hosil bo'ladi. Bu algebra teoremaning barcha shartlarini qanoatlantiruvchi algebradir. Algebraning tuzilishiga asosan (G_1,Ω_1) algebra bu algebraning algebraostisi bo'lib, (G_3,Ω_3) va (G_1,Ω) algebralar bir hil turlidir.

$$\forall a_3 \in G_3 \quad \text{uchun} \quad \psi(a_3) = \begin{cases} a_3, \ агар \ a_3 \in G_1 \setminus G_{T2} \\ \varphi(a_3), \ агар \ a_3 \in G_{T1} \end{cases}$$

akslantirish (G_3,Ω_3) algebrani (G,Ω) algebraga izomorf akslantiradi.

Haqiqatdan $\psi -$ tuzilishiga asosan biektiv akslantirish bo'lishi ravshan. Shuning uchun ψ Ω_3 dagi amallarni saqlashini ko'rsatish kifoya $\forall \omega_3 \in \Omega, a_1,...,a_k \in G \setminus G_2, a_{k+1},...,a_n \in G_1$ uchun $\psi(\omega_3(a_1,...,a_k,a_{k+1},...,a_n)) = \omega(\psi(a_1),...,\psi(a_k),\psi(a_{k+1}),...,\psi(a_n))$ tenglikni isbot qilamiz va ψ lar ω_3 ning aniqlanishiga ko'ra agar $\omega(a_1,...,a_k,\varphi(a_{k+1}),\varphi(a_n)) \in G_T / G_2$ bo'lsa,

$$\psi(\omega_3(a_1,...,a_k,a_{k+1},...,a_n) = \psi(\omega(a_1,...,a_k,\varphi(a_{k+1}),\varphi(a_n)) = \omega(a_1,...,a_k,\varphi(a_{k+1}),\varphi(a_n))$$
$= \omega(\psi(a_1),...,\psi(a_k),\psi(a_{k+1}),...,\psi(a_n))$, agar $\omega(a_1,...,a_k,\varphi(a_{k+1}),\varphi(a_n)) \in G_2$ bo'lsa yana ω_3 va ψ larning aniqlanishiga va $\varphi^{-1}(\omega(a_1,...,a_k,\varphi(a_{k+1}),...,\varphi(a_n))) \in G_1$ bo'lishiga ko'ra $\psi(\omega_3(a_1,...,a_k,a_{k+1},...,a_n) = \psi(\varphi^{-1}(\omega(a_1,...,a_k,\varphi(a_{k+1}),...,\varphi(a_n))) =$

$$\varphi(\varphi^{-1}(\omega(a_1,...,a_k,\varphi(a_{k+1}),...,\varphi(a_n))) = \omega(a_1,...,a_k,\varphi(a_{k+1}),\varphi(a_n))$$
$$= \omega(\psi(a_1),...,\psi(a_k),\psi(a_{k+1}),...,\psi(a_n)).$$

2.57-ta'rif. Bizga $(2,1)$ turli $(G,*,1)$ algebra berigan bo'lib quyidagi shartlar bajarilsin.

1. $*$-binar algebraik amal assosiativ, ya'ni $\forall a,b,c \in G$ uchun $(a*b)*c = a*(b*c)$ bo'lsin.

2. G da neytral element mavjud, ya'ni $\forall a \in G$ uchun shunday $e \in G$ topilib, $e*a = a$ shart bajarilsin.

3. Har qanday $a \in G$ uchun $a'*a = e$ bo'lsin.

U holda $(G,*,')$- algebra gruppa deyiladi.

Gruppadagi amal kommutativ, ya'ni $\forall a,b \in G$ uchun $a*b = b*a$ shart bajarilsa, bunday gruppa abel gruppasi deyiladi. Bunday gruppalar, gruppalar nazariyasidagi yuqori darajali tenglamalarni echishi muamolarini qo'ygan I. G. Abel sharafiga abel gruppalari deb nomlangan.

Har bir $a \in G$ element uchun $a' \in G$ element a elementga chapdan simmetrik deyiladi. Gurppadagi elementlar soni uning tartibi deyiladi. Agar gruppa tartibi natural sondan iborat bo'lsa, bunday gruppa chekli tartibli gruppa, aks holda cheksiz tartibli gruppa deyiladi.

Gruppada $*$- binar algebraik amal "+"- qo'shish amali yoki "•"- ko'paytirish amali bo'lishi mimkin. Bu amallarga nisbatan qo'llaniladigan tushunchalar quyidagi jadvalda keltirilgan.

*	●	+
1) binar amal 2) neytral element 3) simmetrik element	ko'paytirish birlik element teskari element	qo'shish nol qarama-qarshi element

Birlik elementni ko'pincha e yoki 1 orqali, nolni "0"- orqali, a ga teskari elementni a^{-1}, a ga qarama-qarshi elementni $-a$ orqali belgilash qabul qilingan.

Gruppadagi binar algebraik amal "•" bo'lsa, bunday gruppani multiplikativ gruppa, "+" bo'lsa additiv gruppa deymiz. Gruppadagi amalni ko'paytirish deb qarash yozuvni ixchamlashtiradi, shu sabab, multiplikativ gruppaning terminlaridan foydalanamiz.

2.58-teorema. Gruppadagi ixtiyoriy elementga chap teskari element, shu elementga o'ngdan ham teskari bo'ladi.

Isbot. Gruppaga tegishli $\forall a$ elementga chapdan teskari a^{-1} element, o'ngdan ham teskari bo'lishini ko'rsatamiz. SHartga ko'ra $a^{-1} \bullet a = e$ undan tashqari $\left(a^{-1}\right)^{-1}$ element a^{-1} ga chapdan teskari element bo'lsa $\left(a^{-1}\right)^{-1} \bullet a^{-1} = e$ bo'lishi ham ravshan u holda, gruppa ta'rifining 2 va 3 shartlariga ko'ra

$$a \bullet a^{-1} = e\left(a \bullet a^{-1}\right) = \left(\left(a^{-1}\right)^{-1} \bullet a^{-1}\right) \bullet \left(a \bullet a^{-1}\right) = \left(a^{-1}\right)^{-1}\left(\left(a^{-1} \bullet a\right)a^{-1}\right) = \left(a^{-1}\right)^{-1} \bullet \left(ea^{-1}\right) = \left(a^{-1}\right)^{-1} \bullet a^{-1} = e$$

SHunday qilib $a \bullet a^{-1} = e$, ya'ni a^{-1} element a elementga o'ngdan teskari element ekan.

2.59-teorema. Gruppada o'ng birlik element, chap birlik element bo'ladi.

Isbot. Gruppa ta'rifi va 9.2-teoremaga ko'ra $a \bullet e = a \bullet \left(a^{-1} \bullet a\right) = \left(a \bullet a^{-1}\right)a = ea = a$.

2.60-teorema. Gruppada birlik element yagonadir.

Isbot. Yuqorida chap birlik element o'ng birlik elementga tengligini ko'rsatdik. Bu elementni gruppaning birlik elementi deb ataymiz. Endi ikkita e_1 va e_2 birlik elementlar mavjud deb faraz qilaylik. U holda $e_1 = e_1 \bullet e_2 = e_2 \bullet e_1 = e_2$

2.61-teorema. Gruppada ixtiyoriy element uchun yagona teskari element mavjud.

Isbot. Haqiqatdan a_1 elementga a_1^{-1} va a_2^{-1} teskari elementlar mavjud bo'lsin, u holda $a_1^{-1} = a_1^{-1} \bullet e = a_1^{-1}\left(a \bullet a_2^{-1}\right) = \left(a_1^{-1} \bullet a\right) \bullet a_2^{-1} = e \bullet a_2^{-1`} = a_2^{-1}$.

2.62-teorema. Gruppaning ixtiyoriy a va b elementlari uchun $ax = b$ va $ya = b$ tenglamalarning har biri yagona echimga ega.

Isbot. $x = a^{-1} \bullet b$ va $y = b \bullet a^{-1}$ elementlar mos ravishda bu tenglamalarning echimi bo'lishi ayon. Faraz qilaylik $ax = b$ tenglamaning ikkita x_1 va x_2 echimlari bo'lsin. U holda $ax_1 = b = ax_2$ yoki $ax_1 = ax_2$. Bu tenglikning ikkila tomonini a^{-1} ga ko'paytirsak $a^{-1} \bullet (ax_1) = a^{-1} \bullet (ax_2)$ yoki $\left(a^{-1}a\right)x_1 = \left(a^{-1}a\right)x_2$ u holda $ex_1 = ex_2$ demak $x_1 = x_2$ bo'ladi. Ikkinchi tenglama echimi yagona bo'lishi shunga o'xshash isbot qilinadi.

2.62-natija. Gruppaning ixtiyoriy a,b elementlar uchun $a \bullet b = e$ bo'lsa a va b elementlar bir-biriga teskari elementlardir.

Bu natijalarning isboti yuqoridagi teoremalardan bevosita kelib chiqadi, shuning uchun ularning isbotini o'quvchilarga mashq sifatida qoldiramiz.

Gruppalar nazariyasida gomomorfizm, izomorfizm, gruppaosti tushunchalari algebradagi mos tushunchalarning xususiy xollari bo'lib, ular quyidagicha kiritiladi: $(G,\bullet,^{-1})$ va $\left(H,\bullet,^{-1}\right)$ gruppalar berilgan bo'lib, $h : G \to H, G$ ni H ga akslantirish bo'lsin. U holda $\forall a,b \in G$ uchun

$h(a \bullet b) = h(a) \bullet h(b)$ va $h(a^{-1}) = (h(a))^{-1}$ shartlar bajarilsa, h- gomomorf akslantirish deyiladi. Agar h-in'ektiv bo'lsa, monomorf, syur'ektiv bo'lsa, epimorf, biektiv bo'lsa, izomorf akslantirish deyiladi.

2.63-ta'rif. $(G,\bullet,^{-1}), (H,\bullet,^{-1})$ gruppalar berilgan bo'lsin. Agar G ni H ga akslantiradigan kamida bitta izomorf akslantirish mavjud bo'lsa bu gruppalar izomorf deyiladi va $G \cong H$ orqali belgilanadi.

2.64-ta'rif. Gruppani o'zini o'ziga gomomorf akslantirish endomorfizm, o'ziga o'zini izomorf akslantirish aftomorfizm deyiladi.

2.65-teorema. $(G,\bullet,^{-1}), (H,\bullet,^{-1})$ gruppalar berilgan bo'lsin. G ni H ga akslantiradigan $\varphi : G \to H$ -akslantirish gomomorf akslantirish bo'lishi uchun G dagi binar amalni saqlash etarli, ya'ni $\forall a,b \in G$ uchun $\varphi(a \bullet b) = \varphi(a) \bullet \varphi(b)$ bo'lishi etarli.

Isbot. Berilgan gruppalarning birlik elementlari mos ravishda e va e' bo'lsin, u holda $\varphi(e) = e'$. Haqiqatdan $\varphi(e) = \varphi(e \bullet e) = \varphi(e) \bullet \varphi(e)$.

Demak, $e' = \varphi(e) \bullet \varphi(e)^{-1} = (\varphi(e) \bullet \varphi(e))\varphi(e)^{-1} = \varphi(e) \bullet (\varphi(e) \bullet \varphi(e)^{-1}) = \varphi(e) \quad \forall a \in G$ uchun $\varphi(e) = \varphi(a \bullet a^{-1}) = \varphi(a) \bullet \varphi(a^{-1})$ u holda $\varphi(a^{-1}) = \varphi(e) \bullet \varphi(a)^{-1} = e' \bullet \varphi(a)^{-1} = \varphi(a)^{-1}$, ya'ni $\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1}$.

2.66-teorema. Gruppalarning izomorfizmi ekvivalentlik munosabatidir.

2.67-misol. R^{+}-musbat haqiqiy sonlar to'plami bo'lsin. R^{+} haqiqiy sonlarni ko'paytirish va teskarisini olish amallariga nisbatan multiplikativ gruppa tashkil qiladi.

R- haqiqiy sonlar to'plami esa qo'shish va qarama- qarshisini olish amallariga nisbatan additiv gruppa hosil qiladi. Bu gruppalarni mos ravishda $(R^{+},\bullet,-1)$ va $(R,+,-)$ orqali belgilaylik. $\varphi : R \to R^{+}$ $\varphi(x) = ex$ -biektiv akslantirish bo'lib $e\forall x_1, x_2 \in R$ uchun $\varphi(x_1 + x_2) = e^{x_1 + x_2} = e^{x_1} \bullet e^{x_2} - \varphi(x_1) \bullet \varphi(x_2)$.

2.68-ta'rif. Gruppaning gruppadagi amallariga nisbatan yopiq bo'sh bo'lmagan to'plamostisi gruppaosti deyiladi.

$(G,\bullet,^{-1})$-gruppa berilgan bo'lsin. U holda ta'rifga ko'ra $H \neq \varnothing$ va $H \subset G$ to'plamosti gruppaosti bo'lishi uchun $\forall a,b \in H$ elementlari uchun $a \bullet b \in H$ va $a^{-1} \in H$ bo'lishi etarli. U holda $a \bullet a^{-1} = e \in H$. Ya'ni gruppaning neytral elementi gruppaosti uchun ham neytral element ekan. $H \subset G$ bo'lganligi uchun gruppaostida ham "$\bullet$" binar algebraik amal assosiativdir. SHunday qilib, gruppaosti ham o'z navbatida gruppa hosil qilar ekan.

2.69-teorema. $(G,\bullet,^{-1})$ gruppa berilgan bo'lsin $H \neq \varnothing$ $H \subset G$ to'plamosti gruppaosti bo'lishi uchun $\forall a,b \in H$ elementlari uchun $a \bullet b^{-1} \in H$ bo'lishi zarur va etarli.

Isbot. Agar $(H,\bullet,^{-1})$ gruppaosti bo'lsa, $\forall a,b \in H$ uchun $a \bullet b^{-1} \in H$ bo'lishi ravshan. Faraz qilaylik $\forall a,b \in H$ uchun $a \bullet b^{-1} \in H$ bo'lsin. U holda xususan $a = b$ bo'lsa $a \bullet a^{-1} = e \in H$ bo'lib, bundan $\forall e,b$ elementlar uchun $e \bullet b^{-1} \in H$, ya'ni $\forall b$ uchun $b^{-1} \in H$ bo'lishi kelib chiqadi. Agar $\forall a,b \in H$ uchun $a \bullet b^{-1} \in H$ shartda b ni b^{-1} bilan almashtirsak, $\forall a,b \in H$ uchun $a \bullet b \in H$ bo'lishi kelib chiqadi. Ya'ni H - gruppaosti ekan.

2.70-teorema. Gruppaosti bo'lish munosabati noqat'iy tartib munosabatdir.

2.71-teorema. $(G,\bullet,^{-1})$ gruppaning gruppaostilaridan iborat bo'sh bo'lmagan $\mathscr{B}$ to'plamning barcha elementlarining kisishmasi yana gruppaosti bo'ladi.

$(G,\bullet,^{-1})$ gruppa va G ning bo'sh bo'lmagan to'plamostisi M birilgan bo'lsin. $M \subset G\alpha$ shartni qanotlantiradigan $(G,\bullet,^{-1})$ ning barcha $(G\alpha \bullet^{-1})$ larning kisishmasi M to'plam yaratgan gruppaosti deyiladi va bu gruppaosti $(< M >^{-1},\bullet)$ orqali belgilanadi. Agar M -bir elementli to'plam bo'lsa, bu gruppa <u>siklik gruppa</u> deyiladi.

2.72-misol. $M = \{1,2,...,h\}$ to'plam berilgan bo'lsin. M ni M ga akslantiradigan har qanday biektiv akslantirish M to'plamda aniqlagan <u>o'ringa qo'yish</u> deyiladi. M to'plamda aniqlangan barcha o'rniga qo'yshlar to'plamini

S_n orqali belgilaymiz. S_n da ikkita φ va ψ o'rniga qo'yilarning kompozisiyasini $\forall x \in M$ uchun $\varphi \circ \psi(x) = \varphi(\psi(x))$ ko'rinishda aniqlasak, S_n to'plam « $\circ$ » amalga nisbatan gruppa tashkil etadi.

Xaqiqatdan, ikkita biektiv funksiyalarning kompozisiyasi yana biektiv funksiya bo'lib, assosiativdir. Har qanday biektiv funksiyaga teskari funksiya mavjud, $\varphi(x) = x$ tenglik bilan aniqlangan o'rniga qo'yish esa kompozisiya amaliga nisbatan neytral elementdir.

Bu misolni $n = 3$ uchun ko'rib chiqishni o'quvchilarga havola qilamiz.

2.73-misol. Muntazam k-burchakni diagonallari kesishgan nuqta atrofida $\frac{2\pi}{k} \bullet n, k = 3,4,...,n-1$ burchaklarga burishlar to'plami, burishlarni ketma-ket bajarish amaliga nisbatan gruppa hosil qiladi.

2.74-misol. G-tekislikdagi vektorlar to'plami bo'lsin. U holda G vektorlarni qo'shish amaliga nisbatan gruppa hosil qiladi.

2.75-misol. $(Z,+,-)$-butun sonlar additiv gruppasi $(Q,+,-)$ rasional sonlar additiv gruppasining gruppaostisidir.

2.76-ta'rif. Agar $(K,+,-,\bullet)$ $(2,1,2)$ turli algebra uchun quyidagi shartlar bajarilsa

(1) $(K,+,-,)$ abel gruppasi;

(2) $(K,\bullet)$-yarim gruppa;

(3) $\forall a,b,c \in K$ uchun $a \bullet (b+c) = a \bullet b + a \bullet c$ va $(b+c) \bullet a = b \bullet a + c \bullet a$ u holda $(K,+,-,\bullet)$- algebra halqa deyiladi.

$(K,+,-,)$ additiv gruppaning neytral elementi halqaning noli deyiladi va 0 orqali belgilanadi.

Z halqa unda bajarilgan "$\bullet$"-amalining xossalariga mos ravishda nomlanadi. Agar ko'paytirish amali assosiativ bo'lsa, halqa assosiativ halqa, ko'paytirish amaliga nisbatan birlik element mavjud bo'lsa, halqa birlik elementli halqa deyiladi.

Agar halqada $a \neq 0$ va $b \neq 0$ elementlar uchun $a \bullet b = 0$ bo'lsa, a

nolning chap bo'luvchisi, b esa nolning o'ng bo'luvchisi deyiladi. Nolning ham chap, ham o'ng bo'luvchisi bo'lgan element nolning bo'luvchisi deyiladi. Biz asosan birlik elementga ega bo'lgan assosiativ halqalarni o'rganamiz. Halqaning birlik elementini odatda 1 orqali belgilaymiz.

2.77-ta'rif. Nolning bo'luvchilariga ega bo'lmagan assosiativ, kommutativ halqada $1 \neq 0$ shart bajarilsa, bunday halqa butunlik sohasi deyiladi.

2.78-misol. Z-butun sonlar to'plami $+,-,\bullet$ amallariga nisbatan halqa bo'lib, $(Z,+,-,\bullet)$ orqali belgilanadi. Bu halqa butunlik sahasidir.

2.79-misol. $K = \{0, e, a, b\}$ to'plamida $+,-,\bullet$ amallari quyidagi jadvallar orqali berilgan bo'lsin:

$\oplus$	0	e	a	b
0	0	e	0	b
e	e	a	a	a_3
a	a	b	0	e
b	b	a_3	a	a

$\odot$	0	e	a	b
0	0	0	0	0
e	0	e	a	b
a	0	a	0	a
b	0	b	a	e

(K, ⊕, Θ, ⊙) algebra kommutativ, assosiativ, birlik elementga ega bo'lgan halqadir. Lekin $a \bullet a = 0$, bo'lib a nolning bo'livchisidir.

2.80-teorema. $(K,+,-,\bullet)$ halqa berilgan bo'lib, a,b,c lar halqaning ixtiyoriy elementlari bo'lsin, u holda

(I) agar $a+b=a$ bo'lsa, $b=0$.

(II) agar $a+b=0$ bo'lsa, $a=-b$.

(III) $-(-a)=a$.

(IV) $0 \bullet a = a \bullet 0 = 0$.

(V) $(-a)(-b) = a \bullet b$.

(VI) $(a-b)\bullet c = ca - bc$.

(VII) $c(a-b) = ca - cb$.

Isbot. I, II, III, IV tasdiqlar $(K,+,-,)$ -kommutativ gruppaligidan bevosita kelib chiqadi. (VI)- xossaning isbotini keltiramiz.

$a\bullet 0 = a(0+0) = a\bullet 0 + a\bullet 0 \Rightarrow a\bullet 0 = a\bullet 0 + a\bullet 0 \Rightarrow a\bullet 0 = 0$

$0\bullet a = 0$ tenglik shunga o'xshash isbot qilinadi.

(V) tsadiqning isboti.

$(-a)\bullet b + a\bullet b = ((-a)+a)\bullet b = 0\bullet b = 0$. Demak. $(-a)\bullet b = -(a\bullet b)$;

U holda $ab = -(-a)\bullet b$. Endi $(-a)\bullet(-b) + (-a)\bullet b = (-a)(-b+b) = (-a)\bullet 0 = 0$ ni hisobga olsak $(-a)(-b) = -(-a)\bullet b = ab$.

(VII) tasdiq (VI) ga o'xshash isbotlanadi.

2.81-ta'rif. $(K,+,-,\bullet)$ va $(K',+,-,\bullet)$ halqalar berilgan bo'lsin. K ni K' ga akslantiradigan va $(K,+,-,\bullet)$ halqaning hamma amallarini saqlaydigan $\varphi : K \to K'$ akslantirish gomomorf akslantirish deyiladi.

Odatdagidek φ-in'ektiv bo'lsa, monomorf, syurektiv bo'lsa epimorf, biektiv bo'lsa izomorf akslantirish deyiladi. Halqani o'zini-o'ziga gomomorf akslantirish endomorfizm, izomorf akslantirish esa avtomorfizm deyiladi.

Huddi algebradagidek halqalarning izomorfizmi ekvivalentlik munosabati bo'lib, izomorf halqalar $(K,+,-,\bullet) \cong (K',+,-,\bullet)$ orqali belgilanadi.

2.82-ta'rif. $(K,+,-,\bullet)$ halqa berilgan bo'lsin. L esa K ning bo'sh bo'lmagan to'plamostisi bo'lsin.

Agar L to'plam K dagi $+,-,\bullet$ amallariga nisbatan algebraik yopiq bo'lsa, ya'ni $\forall a,b\in L$ uchun $a+b\in L,\ a\bullet b\in L,\ -a\in L$ shartlar bajarilsa $(L,+,-,\bullet)$-algebra $(K,+,-,\bullet)$ halqaning halqaostisi deyiladi.

Halqaosti o'z navbatida halqa bo'lishi ravshan, chunki halqa ta'rifining qolgan shartlari $L\subset K$ munosabatdan kelib chiqadi.

2.83-teorema. Halqaning noli halqaostining ham noli bo'ladi. Agar halqada ko'paytirishga nisbatan neytral element mavjud bo'lsa, bu element L

uchun ham ko'paytirishga nisbatan neytral element bo'ladi.

Algebra (arab.- al-Jabr) - matematikaning bir sohasi. Buyuk olim Abu Abdullo Muhammad ibn Muso al-Xorazmiy "Al-jabr val-muqobala" asarida dunyoda birinchi marta algebrani izchil bayon qilgan. Asar lotin tiliga tarjima qilinib, "Algebra" nomi bilan jahonga tarqalgan. Algebra tiklashni, ya'ni manfiy hadlarni tenglamaning ikkinchi tomoniga oʻtkazishni, val-muqobala esa tenglamaning ikkala tomonidan teng hadlarni tashlab yuborishni bildiradi. Algebraning asosiy masalasi - toʻplamlarda kiritilgan matematik amallarni oʻrganish. SHunday matematik amallar borki, ular butunlay arifmetik amallarga oʻxshamaydi (mas. oʻrin almashtirish yoki assosiativlik qonuniga boʻysunmaydigan amallar mavjud). Arifmetikada tayin sonlar ustida birinchi toʻrt amal oʻrganiladi. Algebrada esa bu amallarning har qanday son va son boʻlmagan boshqa matematik ob'ektlar uchun oʻrinli umumiy xossalari tekshiriladi. Bunda hosil qilinadigan natijalarning umumiy boʻlishiga erishish uchun miqdorlarning qiymatlari harflar bilan belgilanib, harfiy ifodalar ustida bajariladigan amallarning qoida va qonunlari koʻrsatiladi, ifodalar shaklini oʻzgartirish va tenglamalarni echish qoidalari oʻrganiladi. Umar Xayyom Algebrani tenglamalar echish haqidagi fan deb ta'riflagan edi. Uning bu ta'rifi 18-a. oxirigacha kuchini saqlab keldi. Bundan keyingi davrda Algebra yangi yoʻnalishlar bilan kengaytirildi, ammo amallar haqidagi umumiy fan sifatida oʻz ahamiyatini saqlab ham kolli. Qad. misrliklar ancha murakkab masalalarni echganlar (arifmetik va geometrik progressiyalarga doir masalalar). Masalalarning ta'rifi, ularning echilishi ogʻzaki soʻz 6ilan faqat sonli misollar uchun berilar edi. Bu misollar shakl jihatidan 1-va 2-darajali teiglamalarni echishda umumiy usullarning toʻplanayotganligidan darak beradi. YUnoniston geometriyasi alohida ajralib turardi. Bu erda geometrik tekshirishlar mantiq tomonidan shunday yoʻlga qoʻyilgan ediki, unda har bir aytilgan fikr isbosiz qoldirilmas edi. Geometrik mulohazalarning kuchli ta'siri natijasida arifmetika va Algebra masalalari geom. tili bilan bayon etilardi. Mas. miqdorni uzunlik deb, ikki miqdor koʻpaytmasini toʻgʻri toʻrtburchakning yuzi deb qaralardi.

Hozirgi zamon matematikasida miqdorning oʻz-oʻziga koʻpaytmasini "kvadrat" deb atash geometrik tilning hozirgacha saqlanib kelishidan namunadir. YUnonlar erishgan natijalarni toʻldirish, umumlashtirish va taraqqiy ettirishda Turkiston matematiklari katta hissa qoʻshdilar. Ildizlarni hisoblash, bir qator tenglamalarni taqribiy echish usullari, Nyuton binomi umumiy formulasining soʻz bilan taʼriflangan ifodasini berish Turkiston matematik olimlari tomonidan muvaffaqiyatli hal qilingan. 9- 10-a.larda Turkiston yirik ilmiy markazga aylanadi. Bu davrda al-Xorazmiy, Abu Rayhon Beruniylar yashagan va fan sohasida oʻzlarining yirik ilmiy ishlari bilan dunyoga nom taratgan edilar. 1074 yilda Umar Xayyomning "al-Jabr" degan boshqa bir kitobida chiziqli va kvadrat tenglamalarni echish, uchinchi darajali tenglamalar ildizlarini geometrik usul bilan izlash va boshqa juda koʻp masalalarni echish yoʻllari koʻrsatilgan. Ibn Sino asarlarida ham oʻsha zamon uchun alohida ahamiyatga ega boʻlgan arifmetika va Algebra masalalarining echimlari berilgan. Uning matematikaga, xususan, Algebra va arifmetikaga oid ishlarida sonlarni kvadrat va kubga koʻtarish amallari tekshirilgan. Qad. dunyo tarixidan to al-Xorazmiy davriga qadar matematika Algebra va arifmetika kabi bilimlarga ajralgan emas edi. Faqat al-Xorazmiy davridan boshlab Algebra matematikaning alohida boʻlimi boʻlib ajraldi. 15-a.da Samarqandda mashhur Ulugʻbek rasadxonasining tashkil topishi astronomiyaning taraqqiy etishi bilan bir qatorda matematikaning rivojlanishiga ham sabab boʻldi. Algebraning taraqqiyoti uchun amallarni soʻz bilan ifoda etishdan koʻra ular oʻrniga qulay belgilar topib ishlatish zarur edi. Bu ish juda sekinlik bilan bordi: qad. misrliklar kasr uchun alohida belgi ishlatishgan. Diofant i harfini tenglik belgisi uchun (yun. isos - teng) ishlatgan. Italyan olimlari plyus va minus soʻzlari oʻrnida ustiga alohida chiziq chizilgan va t harflarini ishlatishgan. 15-a. oxiriga kelgandagina hozirgi = va — ishoralari kiritilgan. Bundan keyingi davrda masalada qatnashadigan miqdorlar, shuningdek nomaʼlumlar harflar bilan belgilanadigan boʻldi. 16-a. oʻrtalarida hozirgi zamon algebrasidagi timsollar toʻla takomillashtirildi. Algebrada bunday toʻla timsollarga oʻtishga qadar biror umumiy qoida yoki isbotni tushuntirish, biror umumiy fikrni ta'riflash mumkin emas edi. 16-a.da noma'lum miqdorlar uchun unli A, E,... harflari, ma'lum miqdorlar uchun esa unsiz V, S, D,... harflari ishlatilib, o'sha vaqtda kiritilgan matematik amallar bilan bog'landi. SHunday qilib, hozirgi zamon Algebrasi uchun xos bo'lgan harfiy formulalar birinchi martaba paydo bo'ldi. Har qanday tayin son o'rniga timsoliy belgilarning kiritilishi, harflardan arifmetika amallarini echishda foydalanilishi juda katta ahamiyatga ega edi. Bu bilan formulalar tili bo'lgan matematik vosita hosil qilindi. SHu vositasiz 17-a.da oliy matematikaning yorqin taraqqiyoti, cheksiz kichik miqdorlar tahlili, fizika, mexanika va texnika fanlaridagi qonunlarning matematik ifodalarini berish masalalarini xayolga keltirish ham mumkin emas edi. 17-a.da Dekartning analitik geometriya tuzishda tutgan yo'li Algebrada paydo bo'layotgan manfiy son tushunchasini geometrik tasvirlash bilan birga, manfiy sonlarning fandagi o'rnini mustahkamladi. Noma'lum sonlar uchun x,y,z harflarini ishlatish Dekartdan boshlangan bo'lib, hozir ham shunday qilinadi. Analitik geometriyaning maydonga kelishi Algebraning katta yutug'i bo'ldi. Agar yunonlar Algebra masalalarini geom. tilida tahlil qilgan bo'lsalar, endi, aksincha, geom. masalalari Algebra formulalariga ko'chiriladigan bo'lib koldi. 17-a. oxiri - 18-a. boshlarida ishlab chiqaruvchi kuchlarning taraqqiyoti, texnika va tabiiy fanlarning matematika oldiga qo'ygan talablari munosabati bilan differensial va integral hisob vujudga keldi va taraqqiy eta boshladi. Bunga Algebraning bosib o'tgan tarixiy taraqqiyoti ham zamin tayyorlab bergan edi. Bu davrda Algebra bilan matematik tahlil bir-biri bilan jips munosabatda taraqqiy qilardi. Algebraga funksional bog'lanish masalalari kira boshladi. Tahlil esa Algebraning boy formulalari to'plamidan foydalana bordi. 18—19-a.larda Algebra taxlildan farq qilib, diskret va chekli miqdorlar bilan ish ko'rardi: bu davrda Algebra asosan ko'phadlar bilan shug'ullanardi. 2-darajali tenglamalarni echish munosabati bilan Algebrada irrasional va kompleks sonlarning fanga kiritilishi uchun ehtiyoj tug'iladi. Bu sonlarning kiritilishi bilan 18-a.da Algebra hozirgi zamon o'rta maktabida o'tilayotgan

Algebra hajmiga yaqin kelgan edi. Harfiy belgilardan foydalanib turli sonlar tizimlarining umumiy xossalarini hamda tenglamalar vositasi bilan echishning umumiy metodlarini o‘rganadigan Algebra klassik algebra deb yuritiladi. Klassik Algebrada kv. tenglamani echish qad. dunyodan ma’lum, ammo uchinchi va to‘rtinchi darajali tenglamalarni echish formulalarini esa faqat 16-a.da italyan matematiklari Kardano, Tartalya va Ferrari yaratib berdi. Bu formulalar tenglama ildizlarini uning koeffisientlari orqali rasional amallar bilan radikallarda ifoda etadi. Darajasi 4 dan yuqori tenglamalar ildizlarini ham shu yo‘sinda ifodalash masalasi ko‘p vaqn olimlar diqqatini o‘ziga jalb qilib keldi. Oradan 300 y. o‘tgach, 19-a.da Abel hamda Galua darajasi 4 dan yuqori algebraik tenglamalar ildizlarini koeffisientlari orqali rasional amallar bilan radikal ko‘rinishida ifoda etish mumkin emasligini isbot kildilar. Galua har bir tenglama bilan uning ildizlarini almashtirish guruhini beradi va tenglamani tekshirishni bu guruhni tekshirishga keltiradi. Algebraik tenglamalar ildizlarining soni va ularning qaysi sohaga tegishli bo‘lishi masalalari ham ko‘p vaqtdan beri olimlarning diqqat markazida turgan masalalardandir. D’Alamber va Gauss kompleks koeffisientli har qanday pdarajali tenglama p ta kompleks ildizga ega ekanligini isbotladilar. 19-a. boshlarida mavhum sonlarning tabiatini o‘rganish tufayli matematik amal tushunchasi kengaya boshladi. Ingliz matematiklari birinchi bo‘lib matematik amalning mavhum tushunchasiga keldilar va bu tushunchani yangi matematik obektlarga tatbiq qilish bilan Algebra sohasini kengaytirdilar. Bu davrda vektorlar, kvaternionlar, gaperkompleks tizimlar, matrisalar algebrasi, assosiativ bo‘lmagan algebralar va algebraik geometriya tashkil topdi va rivojlandi, yangi algebraik ob’ektlar, chunonchi xalqa, maydonlar paydo buddi. Bular 19-a. 1-yarmidagi Algebrani jonlantirdi. O‘sha vaqtgacha Algebra metodlari va natijalari Algebraning markaziy muammosi hisoblangan algebraik tenglamalarni echishdan iborat edi. 1850 yildan keyin esa ahvol o‘zgardi, yangi izlanishlar borgan sari hozirgi kunda algebraning asosiy muammosi hisoblangan matematika amallarni o‘rganishdan iborat bo‘la bordi. 19-a. 2-yarmida algebraik sonlar, invariantlar va guruhlar nazariyasi vujudga keldi. 20-a.da algebra matematikaning turli sohalariga, nazariy fizika, kimyo, biol., genetika kabi boshqa fanlarga ham jadal kirib keldi, ya’ni matematika va boshqa ko‘pgina sohalarni algebralashtirish jarayoni ro‘yobga keldi. Ayni paytda Algebra va matematikaning turli sohalari chegarasida matematikaning yangi yo‘nalishlari, chunonchi Algebra va funksional analiz o‘rtasida Banax Algebralari, operatorlar Algebralari nazariyasi, Algebra bilan topologiya o‘rtasida gomologak Algebra va h.k. paydo bo‘ldi. Algebra fanining rivojlanishiga bir qancha o‘zbek olimlari, chunonchi: T.Sarimsoqov, SH. Ayupov, J. Hojiev va boshqalar o‘z hissalarini qo‘shdilar. Algebra ehgimollar nazariyasi, topologiyaga oid topologik yarim maydonlar va umuman tartiblangan Algebralar nazariyasini birinchi marta O‘zbekistonda T. Sarimsoqov o‘z shogirdlari bilan yaratdi.

3-mavzu: OTMda geometriya mazmunini takomillashtirish masalalari

1-ma’ruza: Yevklid geometriyasining zamonaviy aksiomatikasi, Yevklid va noevklid geometriyalarning qiyosiy tahlili, noevklid geometriyalar bo‘yicha ilmiy tatqiqotlar tahlili

Reja:

1. **Yevklid geometriyasining zamonaviy aksiomatikasi, turli aksiomalar sistemalari.**

2 **Yevklid va noevklid geometriyalarning qiyosiy tahlili, Lobachevskiy aksiomalar sistemasi va undan kelib chiqadigan teoremalar**

Tayanch tushunchalar: tegishlilik aksiomasi, kongurent figuralar, uzluksizlik aksiomasi, parallellik aksiomalari, Lobachevskiy aksiomasi, noyevklid geometriya aksiomalari

1. **Evklid geometriyasining zamonaviy aksiomatikasi, Gilbert aksiomalar sistemasi va undan kelib chiqadigan teoremalar**

Qadimgi buyuk geometrlardan biri Evklid (taxminan Eramizdan avvalgi 33O yil dan 275 yilgacha yashagan). Uning «Negizlar» asari 13 ta kitobdan iborat bo‘lib, beshinchi, ettinchi, sakkizinchi, to‘qqizinchi va o‘ninchi kitoblari proporsiyalar nazariyasi va arifmetikaga (geometrik usulda yozilgan), qolganlari geometriyaga bag‘ishlangan.

Birinchi kitobi

1-ta'rif. Nuqta-bo‘laklarga ega emas.

2-ta'rif. *CH*iziq-ensiz uzunlik.

3-ta'rif. CHiziqning chegarasi - nuqtalardan iborat.

4-ta'rif. To‘g‘ri chiziq - o‘zining barcha nuqtalariga nisbatan
bir xil joylashgan chiziq.

5-ta'rif. Sirt-faqat uzunlikka va enga ega.

6-ta'rif. Sirtning chegaralari chiziqlardan iborat.

7-ta'rif. Tekislik-unda yotadigan barcha to‘g‘ri chiziqlarga nisbatan bir xil joylashgan sirt.

8-ta'rif. Yassi burchak-bir tekislikdagi ikkita kesishuvchi chiziqning bir-biridan og‘ishi.

Ta'riflardan so‘ng Evklid isbot talab qilmaydigan jumlalar - postulatlar va aksiomalar keltiradi.

Postulatlar

I Har bir nuqtadan boshqa nuqtaga to‘g‘ri chiziq o‘tkazish mumkin.

II Har bir to‘g‘ri chiziqni istalgancha davom ettirish mumkin.

III Istalgan nuqtani markaz qilib istalgan radiusli aylana chizish mumkin.

IV Barcha to‘g‘ri burchaklar teng.

V Ikki to‘g‘ri chiziqni kesuvchi to‘g‘ri chiziq ular bilan ichki bir tomonli burchaklar hosil qiladi, bu ikki to‘g‘ri chiziq ichki bir tomonli burchaklar yig‘indisi ikki to‘g‘ri burchakdan kichik bo‘lgan tomonda kesishadi.

Aksiomalar

I. Bitta miqdorga teng miqdorlar o‘zaro teng.

II. Teng miqdorlarga teng miqdorlar qo‘shilsa, teng miqdorlar hosil bo‘ladi.

III. Teng miqdordan teng miqdorni ayirsak, teng miqdorlar hosil bo‘ladi.

IV. Teng bo‘lmagan miqdorga teng miqdorlarni qo‘shsak, teng bo‘lmagan miqdorlar hosil bo‘ladi.

V. Teng miqdorlarni ikkilantirsak, teng miqdorlar hosil bo‘ladi.

VI. Teng miqdorlarning yarimlari teng miqdorlar bo‘ladi.

VII. Ustma-ust tushuvchi miqdorlar teng.

VIII. Butun miqdor qismdan katta.

IX. Ikki to‘g‘ri chiziq fazoni chegaralay olmaydi.

Negizlar asarining ba’zi nashrlarida *IV, V* postulatlar aksioma deb olinadi. SHuning uchun *V* postulat *XI* aksioma deb ham yuritiladi. Hozircha Evklid aksioma va postulatni qaysi prinsipga asosan olganligi aniqmasligicha qolmoqda.

Evklid aksiomalardan so‘ng teoremalarni mantiqiy bog‘liqlik tartibini qat’iy etib joylashtirgan. YA’ni, keltirilgan har bir teoremani oldin keltirilgan tasdiq, aksioma va postulatlarga tayangan holda isbotlash mumkin.

Barcha keyingi teoremalarni qat’iy mantiqiy isbotlash uchun etarli bo‘ladigan ta’rif va aksiomalarni keltirish geometriyani asoslash deyiladi.

Geometriyani asoslash masalasi Evklid tomonidan to‘g‘ri qo‘yildi va o‘zining «Negizlar» asarida o‘sha davrga nisbatan to‘liq echildi.

Evklid «Negizlar» asarining zamonaviy matematika nuqtai nazaridan qaraganda, kamchiliklari mavjud. Ba’zi bir ta’riflari ta’riflanishi zarur bo‘lgan tushunchalarga asoslanadi. Masalan, «chegara», «uzunlik» va hokazo tushunchalar. I-VIII ta’riflardan birortasi teoremalar isbotlashda foydalanilmaydi. Bu ta’riflar kitobda keltirilgan boshqa materiallarga bog‘liq emas, ya’ni ularni tushirib qoldirsa ham kitobdagi keyingi mulohazalarga ta’sir qilmaydi. Bu ta’riflar faqat geometrik ob’ektlarni tasvirlash uchun kerak bo‘lgan.

Postulat va aksiomalarga kelsak, umuman olganda ular muhim jumlalar hisoblanadi. Juda ko‘p jumlalarni isbotlashda aksioma va postulatlardan foydalanishga to‘g‘ri keladi. Masalan, to‘g‘ri chiziq o‘zining ikkita nuqtasi bilan aniqlanadi, istalgan radiusli aylana mavjud va hokazo. Lekin Evklidning isbotsiz qabul qilgan jumlalari qat’iy mantiqqa asoslangan geometriyani qurish uchun juda kamlik qiladi. Evklid ko‘proq chizmalarga asoslanib fikr yuritadi.

Gilbert aksiomalar sistemasi

Gilbert aksiomasida asosiy obyektlar “nuqta”, “to‘g‘ri chiziq”, “tekislik” – degan iboralar bo‘lib, ular orasidagi munosabatlar “tegishli”, “orasida”, “kongurentkik” dir.Bularning xossalarini Aniqlovchi aksiomalar besh guruhga bo‘linadi:

I – gruppa: Tegishlilik aksiomalari(8 ta)

II – gruppa: Tartib aksiomalari (4 ta)

III – gruppa: Kongurentlik aksiomalari (5 ta)

IV – gruppa: Uzluksizlik aksiomalari (1 ta)

V – gruppa: Parallellik aksiomalari (1 ta)

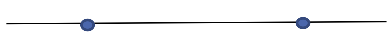
Geometriyani va har qanday matematik nazariyani aksiomalar asosida qurish ishni 1–dan asosiy obyektlar kategoriyasini, 2–dan bu obyektlar orasidagi asosiy munosabatlarni, 3–dan aksiomalarni ko‘rsatishdan boshlanishi kerak.Geometriyada qaraladigan undan kam obyektlar va ular orasidagi munosabatlar asosiy obyektlar orqali ta’riflanishi kerak va barcha teoremalarni aksiomalarga suyanib isbotlash kerak.

Gilbert aksiomalar sistemasida asosiy tushunchalar nuqta, to‘g‘ri chiziq, tekislik.

I gruppa tegishlilik aksiomalari. (8 ta)

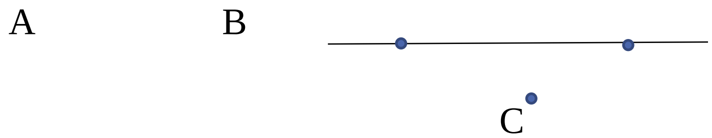
I_1. Ixtiyoriy A va B nuqtalar uchun shunday to‘g‘ri chiziq mavjud bo‘lib, bu nuqtalar shu to‘g‘ri chiziqda yotadi.

A B

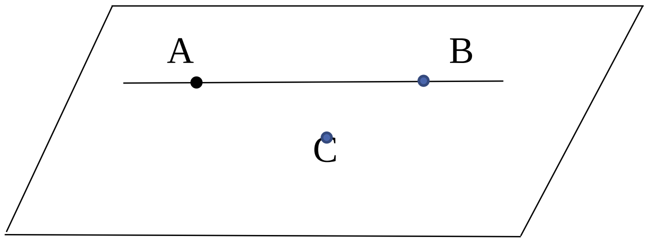


I_2. A va B nuqtalardan o‘tuvchi bittadan ortiq to‘g‘ri chiziq mavjud emas.

I_3. Har qanday to‘g‘ri chiziqda kamida ikkita nuqta mavjud. Bitta to‘g‘ri chiziqda yotmaydigan uchta nuqta mavjud.



I_4. Bir to‘g‘ri chiziqda yotmaydigan har qanday uchta A,B,C nuqtalardan o‘tuvchi tekislik mavjud.

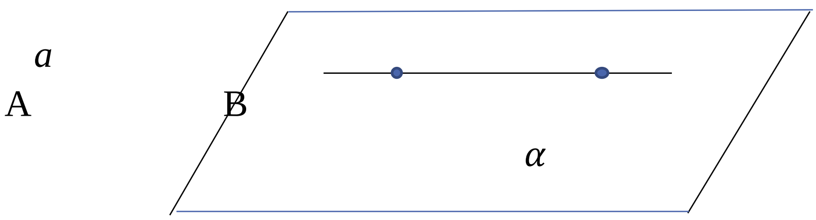


I_5. Bir to‘g‘ri chiziqda yotmaydigan har qanday *A*,*B*,*C* nuqtalardan o‘tuvchi yagona tekislik mavjud.

I_4 va I_5 aksiomalardan quyidagi tekislik kelib chiqadi.

Teorema. Bir to‘g‘ri chiziqda yotmaydigan har qanday uchta *A*,*B*,*C* nuqtalardan bitta va faqat bitta *ABC* tekislik o‘tkazish mumkin.

I_6. Agar a to‘g‘ri chiziqning *A* va *B* nuqtalari α tekislikda yotsa, a to‘g‘ri chiziqning har qanday nuqtasi ham shu tekislikda yotadi.

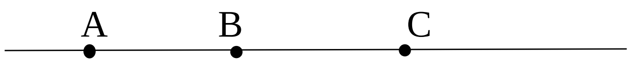


I_7. Agar α va β tekisliklar umumiy *A* nuqtaga ega bo‘lsa, u holda *A* nuqtadan farqli kamida yana bitta umumiy *B* nuqta mavjud.

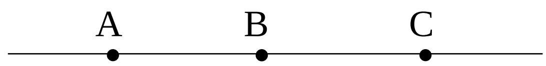
I_8. Bitta tekislikda yotmaydigan kamida to‘rtta nuqta mavjud.

II – Tartib aksiomalari

II_1. Agar *B* nuqta *A* va *C* nuqtalar orasida yotsa, u holda *A*,*B*,*C* bir to‘g‘ri chiziqdagi turli nuqtalar bo‘lib, *B* nuqta *C* va *A* nuqtalar orasida yotadi.



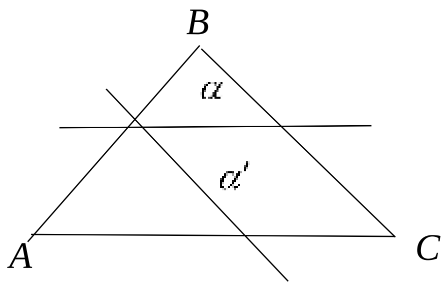
II_2. Agar *A*,*B* biror to‘g‘ri chiziqning nuqtalari bo‘lsa, shu to‘g‘ri chiziqda kamida bitta shunday C nuqta topiladiki, B nuqta A bilan C ning orasida yotadi.



II_3. To‘g‘ri chiziqdagi har qanday 3 ta nuqtadan bittadan ortig‘i qolgan ikkitasi orasida yotmaydi.

II_4. Pash aksiomasi.

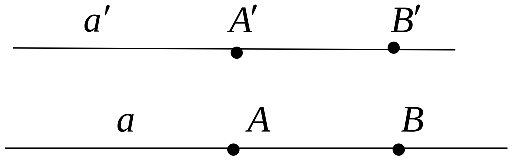
ABC uchburchakning birorta ham uchidan o‘tmaydigan va uning tekisligida yotadigan to‘g‘ri chiziq shu uchburchakning AB tomoni bilan umumiy nuqtaga ega bo‘lsa, u holda bu to‘g‘ri chiziq yoki BC kesma yoki AC kesma nuqtasi orqali o‘tadi.



III. Kongruentlik aksiomalari. (5 ta)

Bu gruppa aksiomalari kesma va burchaklarning kongruentlik (tenglik) tushunchasini aniqlaydi.

III_1. Ikki A va B nuqta a to‘g‘ri chiziqning nuqtasi, A' esa shu to‘g‘ri chiziqning yoki boshqa biror a' to‘g‘ri chiziqning nuqtasi bo‘lsa, u holda shu to‘g‘ri chiziqning A' nuqtadan berilgan tomonida yotuvchi faqat bitta B' nuqtani doimo topish mumkinki, AB kesma $A'B'$ kesmaga kongruent bo‘ladi.

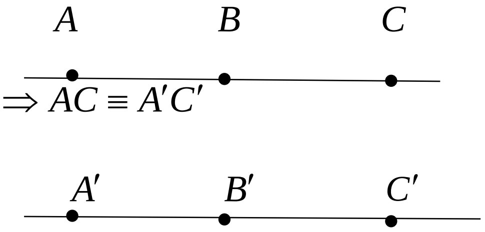


$[AB]\equiv[A'B']$

III_2. Ikki kesma uchinchi kesmaga kongruent bo‘lsa, u holda ular bir–biriga kongruentdir, ya’ni $A'B' \equiv A''B''$

III_3. AB va BC kesmalar a to‘g‘ri chiziqning ichki umumiy nuqtalarga ega bo‘lmagan kesmalari bo‘lsin, shu to‘g‘ri chiziqning yoki boshqa a' to‘g‘ri chiziqning $A'B'$, $B'C'$ kesmalari ham ichki umumiy nuqtalarga ega bo‘lmay $AB \equiv A'B'$, $BC \equiv B'C'$ bo‘lsa, $AC \equiv A'C'$ bo‘ladi.

$$\left.\begin{matrix} AB \equiv A'B' \\ BC \equiv B'C' \end{matrix}\right| \Rightarrow AC \equiv A'C'$$



III$_4$. P tekislikda $\angle(h,k)$ burchak va shu tekislikda yoki biror P' tekislikda a' to‘g‘ri chiziq berilgan bo‘lib, a' to‘g‘ri chiziq bilan aniqlangan yarim tekisliklardan biri hamda a' to‘g‘ri chiziqdagi O' uchli h' nur tayin bo‘lsin.

U holda O' nuqtadan chiquvchi va aniqlangan yarim tekislikda yotgan shunday yagona R' nur mavjudki, $\angle(h,k)$burchak $\angle(h',k')$ burchakka kongruent bo‘ladi. Burchaklar orasidagi bunday nisbat $\angle(h,k) = \angle(h',k')$ ko‘rinishda belgilanadi. Har bir burchak o‘z–o‘ziga kongruent deb olinadi.

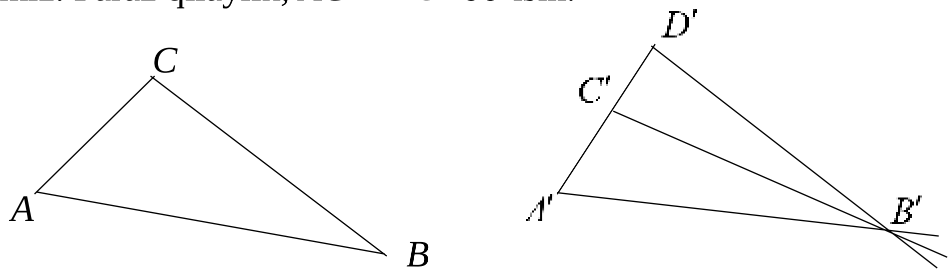
III$_5$. ABC va $A'B'C'$ uchburchaklar uchun $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$, $\angle BAC \equiv \angle B'A'C'$ bo‘lsa, $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$ bo‘ladi.

Ta’rif. ABC va $A'B'C'$ uchburchaklarning uchta burchaklari va uchta tomonlari mos ravishda kongruent bo‘lsa, bu uchburchaklar o‘zaro kongruent deyiladi va ΔABC va $\Delta A'B'C'$ ko‘rinishda belgilanadi.

Kongruentlik aksiomalari yordamida uchburchakning tenglik alomatlarini isbotlash mumkin.

Teorema. ABC va $A'B'C'$ uchburchaklarda $AB \equiv A'B'$, $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$, $\angle BAC \equiv \angle B'A'C'$ bo‘lsa, ΔABC va $\Delta A'B'C'$ bo‘ladi.

Isbot. Avval AC va $A'C'$ tomonlarning o‘zaro kongruentligini isbotlaymiz. Faraz qilaylik, $AC \equiv A'C'$ bo‘lsin.



III$_1$ ga asosan $A'C'$ nurda shunday D' nuqta mavjudki, $AC \equiv A'D'$ bo‘ladi. Bu vaqtda yuqoridagi teoremaga asosan $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'D'$ bo‘lish, $ABC \equiv A'B'D'$ bo‘ladi. Lekin shartga ko‘ra, $ABC \equiv A'B'C'$. Bu esa III aksiomaga zid. Demak, $AC \equiv A'C'$ bo‘ladi. U holda yuqoridagi teoremaga asosan $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$.

IV. Uzluksizlik aksiomalari

Bu aksiomaning mohiyati shundan iboratki, u to‘g‘ri chiziq nuqtalari to‘plami bilan barcha haqiqiy sonlar to‘plami orasida o‘zaro bir qiymatli moslik o‘rnatishga imkon beradi.

IV. *AB* kesmaning barcha nuqtalari shu kesma uchlari bilan birgalikda quyidagi shartlarni qanoatlantiradigan qilib ikki sinfga ajratilgan bo‘lib:

a) *AB* kesmaning har bir nuqtasi faqat bitta sinfga tegishli bo‘lib, *A* nuqta birinchi sinfga, *B* nuqta esa ikkinchi sinfga tegishli bo‘lsin, bu sinflar bo‘sh bo‘lmasin;

b) Birinchi sinfning *A* dan farqli har bir nuqtasi *A* bilan ikkinchi sinfning ixtiyoriy nuqtasi orasida yotsin.U holda *AB* kesmada shunday *C* nuqta topiladiki, *A* bilan *C* orasidagi barcha nuqtalar birinchi sinfga, *C* bilan *B* orasidagi barcha nuqtalar ikkinchi sinfga tegishli bo‘lib, *C* nuqtaning o‘zi birinchi yoki ikkinchi sinfga tegishli bo‘ladi. *C* nuqta esa *AB* kesma nuqtalarini ikki sinfga ajratuvchi (kesadigan) nuqta deb ataladi.

IV_1. Arximed aksiomasi.

AB va *CD* kesmalar bo‘lsin. *AB* to‘g‘ri chiziqda $A_1, . . , A_n$ shunday chekli nuqtalar topiladiki, ular quyidagi shartni qanoatlantiradi:

1) $A–A_1–A_2, A_1–A_2–A_3, . . . , A_{n–2}–A_{n–1}–A_n$;

2) $AA_1=A_1A_2=...=A_{n–1}A_n=CD$;

3) $A–B–A_n$

IV_2. Kontor aksiomasi.

Ixtiyoriy *a* to‘g‘ri chiziqda cheksiz ichma–ich joylashgan kesmalar ketma–ketligi bo‘lib (har bir kesma oldingisini ichida yotgan) ixtiyoriy *CD* kesma uchun shunday *n* natural son topiladiki, u uchun $A_nB_n<CD$. U holda *a* to‘g‘ri chiziqda shunday *M* nuqta topiladiki, u kesmalar ketma–ketligining har biriga tegishli bo‘ladi.

Bu ikki aksioma Dedikind kesimi deb ataluvchi aksiomaga ekvivalentdir.

V. Parallellik aksiomalari

V. To‘g‘ri chiziq tashqarisidagi nuqtadan o‘tib, berilgan to‘g‘ri chiziq bilan kesishmaydigan to‘g‘ri chiziq bittadan ortiq emas.

Pogorelov aksiomalari sistemasi

Pogorelov aksiomalar sistemasi uchun asosiy tushunchalar nuqta, to‘g‘ri chiziq, tekislik, tegishli, orasida yotadi, uzunlik, burchakning gradus o‘lchovi.

I. Tegishlilik aksiomalari.

I_1. Istalgan ikki nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq mavjud va u faqat bittadir.

I_2. Istalgan to‘g‘ri chiziqda kamida ikkita nuqta yotadi. Bir to‘g‘ri chiziqda yotmaydigan uchta nuqta mavjud.

I_3. Istalgan tekislikka tegishli nuqtalar va unga tegishli bo‘lmagan nuqtalar mavjud.

I_4. Agar ikki tekislik umumiy nuqtaga ega bo‘lsa, ular to‘g‘ri chiziq bo‘ylab kesishadi.

I_5. Agar ikkita turli to‘g‘ri chiziq umumiy nuqtaga ega bo‘lsa, ular orqali bitta va faqat bitta tekislik o‘tkazish mumkin.

II. Tartib aksiomalari

II_1. To‘g‘ri chiziqdagi uchta nuqtadan bittasi va faqat bittasi qolgan ikkitasi orasida yotadi.

II_2. Tekislikdagi to‘g‘ri chiziq shu tekislikning to‘g‘ri chiziqda yotmagan nuqtalarini ikkita yarim tekislikka shunday ajratadiki, bitta yarim tekislikka tegishli nuqtalarni tutashtiruvchi kesma berilgan to‘g‘ri chiziq bilan kesishmaydi, har xil yarim tekisliklarga tegishli nutalarni tutashtiruvchi kesma berilgan to‘g‘ri chiziqni kesadi.

III. Kesma va burchaklar uchun o‘lchov aksiomalari.

III_1. Har bir kesma noldan katta tayin uzunlikka ega. Agar *C* nuqta kesmada yotsa, *AB* ning uzunligi *AC* va *CB* kesmalar uzunliklarining yig‘indisiga teng.

III_2. Har bir burchak noldan katta tayin gradus o‘lchoviga ega. Yoyiq burchak 180° ga teng. Burchakning gradus o‘lchovi o‘zining tomonlari orasidan o‘tuvchi har qanday nur yordamida ajratilishdan hosil qilingan burchaklarning gradus o‘lchovlari yig‘indisiga teng.

Bu gruppadagi aksiomalar yordamida kesma uzunligi va burchak kattaligini o‘lchash masalasi to‘la hal qilinadi, bundan tashqari to‘g‘ri chiziqda koordinatalar sistemasini kiritish imkoniyati bajariladi.

IV. Berilgan burchakka teng uchburchakning mavjudligi haqida aksioma.

IV. *ABC* uchburchak va *a* nur berilgan bo‘lsin. U holda *ABC* uchburchakka teng shunday $A_1B_1C_1$ uchburchak mavjudki, uning A_1 nuqtasi *a* nurning uchi bilan ustms–ust tushadi. B_1 nuqta esa *a* nurda yotadi. C_1 nuqta esa *a* nur orqali o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq bilan aniqlanadigan yarim tekisliklardan birida yotadi.

V. Uzunligi berilgan kesmaning mavjudligi haqida aksioma

V. Har qanday haqiqiy d musbat son uchun uzunligi shu d ga teng kesma mavjud.

VI. Parallellik aksiomasi

VI. Berilgan to‘g‘ri chiziqda yotmaydigan nuqta orqali tekislikda berilgan to‘g‘ri chiziqda bittadan ortiq parallel to‘g‘ri chiziq o‘tkazish mumkin emas.

Pogorelov aksiomalari sistemasi 12 ta aksiomadan iborat bo‘lib, I aksiomalar fazoga taaluqlidir. Shu aksiomalar asosida Evklid geometriyasi to‘la bayon qilinadi. Bu aksiomatikaning muhim tomonlaridan biri kesma uzunligi va burchak o‘lchovi tushunchalari asosiy tushunchalar qatoriga kiritilgan. Bu esa umuman geometriyani mantiqan ixchamroq qilib qurishga yo‘l ochadi.

Veyl aksiomalari sistemasi.

1916 yilda nemis matematigi German Veyl (1885–1955) tomonidan taklif qilingan aksiomatika fanda vektorli aksiomatika deb yurutilib, Gilvert aksiomalari sistemasiga nisbatan soddaligi bilan farq qiladi. Bundan tashqari bu aksiomatika hozirgi zamon matematikasini talay bo‘limlari bilan uzviy bog‘langanligi bilan ajralib turadi.

Bu sistemada asosiy tushunchalar sifatida “vektor” va “nuqta” qabul qilingan.

Vektorlar va nuqtalarni bir–biri bilan bog‘lovchi munosabatlar “Vektorlarni qo‘shish”, “Vektorlarni songa ko‘paytirish”, “Vektorlarni skalyar ko‘paytirish”, “Vektorlarni nuqtadan boshlab qo‘yish”dir.

I.Vektorlarni qo‘shish aksiomalari istalgan ikki $\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b}$ vektorga ularning yig‘indisi deb ataladigan $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$ vektor mos keltirilib, bu amal xossalari ushbu aksiomalarda ifodalanadi:

I_1. Ixtiyoriy $\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b}$ vaekor uchun $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\ =\vec{b}+\vec{a}$ tenglik bajariladi.

I_2. Ixtiyoriy $\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b},\overrightarrow{c}$ vektorlar uchun $\left(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right)+\overrightarrow{c}=\overrightarrow{a}+(\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})$ tenglik bajariladi.

I_3. Nol vektor deb atalgan $\overrightarrow{0}$ vektor mavjud bo‘lib, ixtiyoriy $\overrightarrow{a}$ vektor uchun $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{0}=\overrightarrow{a}$

I_4. Har qanday $\overrightarrow{a}$ vektor uchun $\overrightarrow{a'}$ vektor mavjudki, uning uchun $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{a'}=\overrightarrow{0}$

II. Vektorni songa ko‘paytirish amallari istalgan $\overrightarrow{a}$ vektor va istalgan haqiqiy k songa ularning ko‘paytmasi deb ataladigan $k\overrightarrow{a}$ vektor mos keltirilib, bu amal xossalari ushbu aksiomalarda ifodalanadi:

II_1. Ixtiyoriy $\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b}$ vektorlar va k haqiqiy son uchun $k\left(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right)=k\overrightarrow{a}+k\overrightarrow{b}$ tenglik bajariladi.

II_2. Ixtiyoriy k,t haqiqiy sonlar va har qanday $\overrightarrow{a}$ vektor uchun

$(k+t)\overrightarrow{a}=\ k\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{a}$ bo‘lsin, ya’ni vektorni songa ko‘paytirish munosabati haqiqiy sonlarni qo‘shish amaliga nisbatan distributiv qonuniga bo‘ysunishi talab qilinadi.

II_3. Ixtiyoriy k, t haqiqiy sonlar va har qanday $\overrightarrow{a}$ vektor uchun $k(t\overrightarrow{a}) = (kt)\overrightarrow{a}$ tenglik bajariladi.

II_4. Ixtiyoriy $\overrightarrow{a}$ vektor uchun 1*$\overrightarrow{a}$=$\overrightarrow{a}$

Bu ikki gruppa aksiomalari yordamida vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi, chiziqli erkinligi, chiziqli bog‘liqligi va shu kabi tushunchalarni kiritish mumkin.

III. O‘lcham aksiomalari

III_1. Fazoda uchta chiziqli erkin vektor mavjud.

III_2. Fazodagi har qanday to‘rtta vektor chiziqli vektordir.

IV. Vektorlarni skalyar ko‘paytirish aksiomalari

IV_1. Ixtiyoriy ikki $\overrightarrow{a}, \ \overrightarrow{b}$ vektorlar uchun $\overrightarrow{a} * \overrightarrow{b} = \vec{b} * \vec{a}$

IV_2. Ixtiyoriy uchta $\overrightarrow{a}, \ \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ vektorlar uchun $\left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right)\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a}\overrightarrow{c} + \overrightarrow{b}\overrightarrow{c}$

IV_3. Ixtiyoriy $\overrightarrow{a}, \ \overrightarrow{b}$ vektorlar va k haqiqiy son uchun $\left(k\overrightarrow{a}\overrightarrow{b}\right) = k(\overrightarrow{a}\overrightarrow{b})$

IV_4. Ixtiyoriy $\overrightarrow{a}$ vektor uchun $\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{a} \geq o$

V. Vektorni nuqtadan boshlab qo‘yish aksiomalari.

V_1. Ixtiyoriy vektor va har qanday *M* nuqta uchun yagona shunday *N* nuqta mavjudki, uning uchun $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{MN}$

V_2. Ixtiyoriy *A*,*B*,*C* nuqtalar uchun $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

Kolmogorov aksiomalar sistemasi.

Andrey Nikolayevich Kolmogorov aksiomalar sistemasi 12 ta bo‘lib, 5 ta gruppaga bo‘lingan.

I. Tegishlilik aksiomalari

I_1. To‘g‘ri chiziq nuqtalar to‘plamidir.

I_2. Har qanday ikki nuqtadan o‘tuvchi bitta va faqat bitta to‘g‘ri chiziq mavjud.

I_3. Shunday kamida bitta to‘g‘ri chiziq mavjud bo‘lib, bu to‘g‘ri chiziqqa tegishli kamida bitta nuqta bor.

II. Masofa aksiomalari

II_1. Ixtiyoriy *A* va *B* nuqtalar uchun manfiy bo‘lmagan |*AB*| haqiqiy son mos qo‘yilgan bo‘lib, uni *A* va *B* nuqtalar orasidagi masofa deyiladi.

A va *B* nuqtalar orasidagi masofa nolga teng bo‘lishi uchun ularning ustma–ust tushishi zarur va yetarlidir.

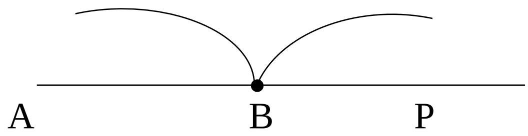
II_2. *A* niqtadan *B* nuqtagacha bo‘lgan masofa, *B* nuqtadan *A* nuqtagacha bo‘lgan masofaga teng bo‘ladi. |*AB*|=|*BA*|

II_3. Ixtiyoriy *A*,*B*,*C* nuqtalar uchun quyidagi tenglik o‘rinli:

$$|AC| \le |AB| + |BC|$$

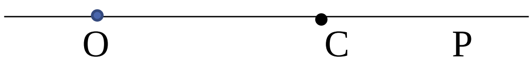
III. Tartib aksiomalari

III$_1$. P to‘g‘ri chiziqqa tegishli ixtiyoriy O nuqta shu to‘g‘ri chiziqni bo‘sh bo‘lmagan ikkita to‘plamga ajratadi. O nuqta har xil to‘plamlarga tegishli ixtiyoriy ikkita nuqtalar orasida yotadi.

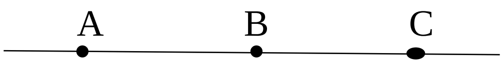


Yuqorida olingan har bir to‘plam ochiq nur, 0 nuqtaga nurning boshi deyiladi.

III$_2$. Manfiy bo‘lmagan ixtiyoriy $a \ge 0$ son uchun nurda shunday bir C nuqta mavjudki $|OC| = a$



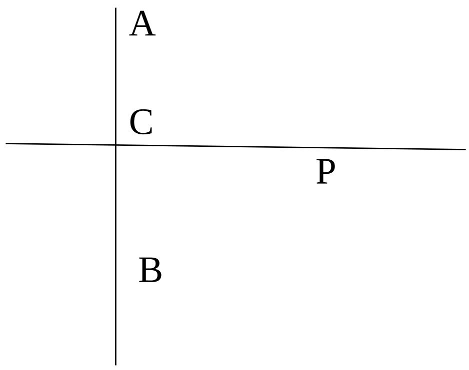
III$_3$. Uchta nuqta bitta to‘g‘ti chiziqda yotishi uchun ulardan bittasi qolganlarning orasida yotishi zarur va yetarlidir.



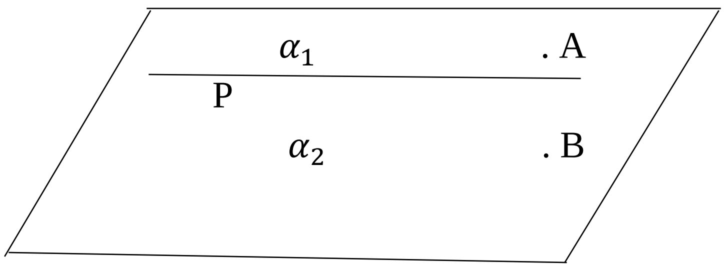
$|AC| = |AB| + |BC|$

Ta’rif. *P* to‘g‘ri chiziq unda yotmaydigan *A* va *B* nuqtalarni ajratadi deyiladi, agar *P* to‘g‘ri chiziq bilan *AB* kesmaning kesishmasi bo‘sh bo‘lmasa, ya’ni $|\mathrm{AB}| \cap P \epsilon C$

$|\mathrm{AB}| \cap P \in C$



III$_4$. Ixtiyoriy to‘g‘ri chiziq tekislikni bo‘sh bo‘lmaydigan ikkita yarim tekisliklarga ajratadi.



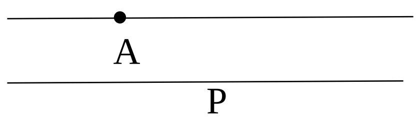
α_1, α_2 – lar ochiq yarim tekisliklar deyiladi.

IV. Tekislikning siljitish aksiomasi

Agar |AC| masofa musbat bo‘lib, | A’B’| masofaga teng bo‘lsa, u holda shunday ikkita siljitish mavjudki, A nuqta A’ nuqtaga, B nuqta B’ nuqtaga akslanadi.

V. Parallellik aksiomasi

p to‘g‘ri chiziqdan tashqarida olingan A nuqtadan *p* to‘g‘ri chiziq bilan parallel yagona to‘g‘ri chiziq mavjud.



Atanasyan aksiomalar sistemasi.

L. S. Atanasyan va boshqalar tomonidan geometriya sinov darsliklarida berilgan planimetriya aksiomatikasini batafsil ko‘rib chiqamiz.

E_2 Evklid tekisligi tuzilishining bazasi ikkita to‘plamdan iborat: *E* (nuqtalar to‘plami) va *F* (to‘g‘ri chiziqlar to‘plami). Asosiy munosabatlar quyidagi uchta munosabatlardir: a) nuqta va chiziqlar uchun "tegishli bo‘lmoq"; b) bir to‘g‘ri chiziqning uch nuqtasi uchun "orasida yotmoq" (agar *B* nuqta *A* va *C* nuqtalar orasida yotsa, u holda quyidagicha yozamiz: *A*–*B*–*C*); c) "qoplash", ya’ni $f: E \to E$ akslantirish bilan belgilanadigan binar munosabat.

Bu yerda biz taqdim etayotgan aksiomalar tizimi asosan maktab kursining aksiomatikasiga to‘g‘ri keladi, ammo unga nisbatan biroz zaiflashadi. Maktab kursiga aksioma shaklidagi qo‘shimcha gaplarning kiritilishi metodik mulohazalardan kelib chiqadi.

Biz $\sum_A$ bilan ifodalayotgan ko‘rib chiqilayotgan aksiomalar sistemasi besh guruhga bo‘lingan o‘n beshta aksiomadan iborat.

I. Tegishlilik aksiomalari.

I_1. Ikkala nuqta qanday bo‘lishidan qat’i nazar, bu nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq bor va bundan tashqari faqat bittasi.

I_2. Har bir to‘g‘ri chiziqda kamida ikkita nuqta bor. Bir xil to‘g‘ri chiziqda yotmaydigan kamida uchta nuqta mavjud.

II. Tartib aksiomalari.

II_1. Agar $A - B - C$ bo‘lsa, u holda A, B va C bir chiziqning turli nuqtalari va $C - B - A$.

II_2. A va B nuqtalar qanday bo‘lishidan qat’i nazar, $A - B - C$ ni qanoatlantiruvchi kamida bitta C nuqta mavjud.

II_3. To‘g‘ri chiziqning uchta nuqtasi orasida boshqa ikkitasi o‘rtasida yotadigan bittadan ortiq nuqta yo‘q.

Bu aksiomalar asosida kesma tushunchasi kiritiladi. AB kesma – bu A, B nuqtalar va ular orasida yotuvchi barcha nuqtalardan tashkil topgan to‘plam. AB kesma a chiziq bilan umumiy nuqtalarga ega bo‘lmasa (AB kesma a chiziq bilan faqat bitta umumiy ichki nuqtaga ega bo‘lsa) A va B nuqtalar a chiziqning bir tomonida (turli tomonlarida) yotishiga aytiladi.

II_4. Har bir chiziq tekislikning ushbu chiziqda yotmaydigan barcha nuqtalari to‘plamini ikkita kichik to‘plamga (yarim tekisliklarga) ajratadi, shunda bir xil pastki qismning istalgan ikkita nuqtasi ushbu chiziqning bir tomonida yotadi va har xil pastki to‘plamlarning har qanday ikkita nuqtasi ushbu chiziqning turli tomonlarida yotadi.

Bu aksiomalardan foydalanib, nur tushunchasi kiritiladi va qo‘shimcha nurlar haqidagi teorema isbotlanadi, u metodik sabablarga ko‘ra o‘rta maktab darsligida aksioma sifatida qabul qilinadi (aksioma 5). Keyin burchak tushunchasi kiritiladi: nuqta va shu nuqtadan chiqqan ikkita nurdan iborat shakl burchak deb ataladi. Agar bu nurlar bir xil to‘g‘ri chiziqda yotsa, burchak yoyiq deyiladi.

III. Qoplash aksiomalari.

III_1. Qoplama – bu tekkislikning o‘z – o‘ziga in’ektiv akslantirilishi.

III_2. Agar A, M, B nuqtalar mos ravishda A_1, M_1, B_1 nuqtalarga ustma–ust qo‘yilsa va $A - M - B$ bo‘lsa, u holda $A_1 - M_1 - B_1$.

Agar F figura F' figuraga o‘tadigan qoplama mavjud bo‘lsa, F figura F' figuraga teng (kongruent) deyiladi. $F = F'$ yozuvi F figurasi F' figurasiga teng ekanligini anglatadi.

Ikkita A va B nuqtadan iborat figurani $\{A, B\}$ bilan belgilaymiz.

III_3. Agar $\{A', B'\} = \{A, B\}$ va $\{A'', B''\} = \{A, B\}$, shunda $\{A', B'\} = \{A'', B''\}$.

III_4. Agar A' nuqtadan chiqadigan bir juft $\{A, B\}$ nuqta va h nur berilgan bo‘lsa, unda $\{A, B\} = \{A', B'\}$ qanoatlantiruvchi bitta va faqat bitta h nurdagi B'nuqtasi mavjud.

Bu aksiomalardan foydalanib, ustma–ust qo‘yilganda figuralarning tasvirlari haqidagi qator teoremalarni isbotlash mumkin: har qanday ustma–ust qo‘yish bilan kesma kesmaga, nur nurga, burchak burchakka, yoyiqmas burchak esa yoyiqmas burchakka aylanadi. Shunday qilib, biz burchaklarning tengligi haqida gapirishimiz mumkin: hk burchak h_1k_1 burchakka teng deyiladi, agar $f(h) = h'$ va $f(k) = k'$ yoki $f(h) = k'$ va $f(k) = h'$ qanoatlantiruvchi shunday f qoplama mavjud bo‘lsa.

III$_5$. Agar yoyiqmas burchak $\angle hk$ va (O', h', λ') bayroq (burchak) berilgan bo‘lsa, unda O nuqtadan keladigan λ' yarim tekislikka bitta va faqat bitta k' nur borki, shunda $\angle hk = \angle h'k'$.

Har bir burchak o‘ziga teng.

III$_6$. Agar hk yoyiqmas burchak h_1k_1 burchagiga teng bo‘lsa, unda h nurining h' nuriga, k nurining k' nuriga o‘tishi va h nurining k' nuriga o‘tishi va k nurining h' nuriga o‘tishi bilan qoplanishi mavjud.

Ushbu aksiomalardan foydalanib, uslubiy sabablarga ko‘ra o‘rta maktab uchun sinov darsligida aksioma sifatida qabul qilingan bir qator teoremalarni isbotlash mumkin (8, 12, 13 va 14 aksiomalar).

Tekkislikning har qanday bieksiyasini harakat deb ataymiz, unda har qanday $\{A, B\}$ juftlik $\{A', B'\}$ teng juftlikka aylanadi. I, II va III guruhlar aksiomalaridan foydalanib, qoplash va harakat tushunchalari bir–biriga mos kelishini isbotlash mumkin.

IV. Uzluksizlik aksiomalari.

IV$_1$. (Arximed aksiomasi). AB va CD ba’zi kesmalar bo‘lsin. Keyin AB chizig‘ida cheklangan A_1, A_2 ... A_n nuqtalar to‘plami mavjud bo‘lib, shartlar qondiriladi:

a) $A - A_1 - A_2$, $A_1 - A_2 - A_3$, … , $A_{n-2} - A_{n-1} - A_n$;

b) $AA_1 = A_1A_2 = \cdots = A_{n-1}A_n = CD$.

v) $A - B - A_n$

Yuqorida sanab o‘tilgan aksiomalarning natijasi kesmalarni o‘lchash nazariyasidir. Jumladan, birlik segmentni tanlab, har qanday segmentni o‘rta maktab kursidan ma’lum tarzda o‘lchash mumkinligini isbotlash mumkin. Shunday qilib, har bir kesmaga musbat son beriladi, shunda bir xil son teng kesmalarga to‘g‘ri keladi va agar $A - B - C$ bo‘lsa, u holda AC kesmasi AB va BC kesmalariga mos keladigan raqamlar yig‘indisiga teng songa to‘g‘ri keladi. Sinov darsligida bu bayonot 15 aksiomasida ifodalangan.

IV$_2$. Har qanday musbat haqiqiy son uchun tanlangan birlik kesmasi uchun uzunligi b ga teng bo‘lgan kesma mavjud.

Parallel to‘g‘ri chiziqlar aksiomasi.

V. Berilgan to‘g‘ri chiziqda yotmaydigan nuqta orqali, to‘g‘ri chiziq va nuqta bilan aniqlangan tekislikda, berilgan to‘g‘ri chiziqqa parallel ravishda ko‘pi bilan birta to‘g‘ri chiziq o‘tadi.

3. Bu bobda I, II, IV va V guruhlarning barcha aksiomalari

$\mathcal{T}(\sum_W)$ nazariyada bajarilishi ko‘rsatildi. Har qanday qoplash harakat bo‘lgani uchun III guruh aksiomalari ushbu nazariyada bajariladi.

2. Evklid va noevklid geometriyalarning qiyosiy tahlili, Lobachevskiy aksiomalar sistemasi va undan kelib chiqadigan teoremalar

Beshinchi postulatni isbotlashga doir urunishlar geometriya strukturasini oydinlashtirish borasida muhum ro’l kasb etdi va beshinchi postulatni qolgan aksiomalar va ulardan chiqqan natijalar yordamida isbotlab bolmaydi degan fikrlar tug’ilishiga zamin yaratib berdi.

Shunday xulosaga kelgan olimlardan biri, ulug’ nemis matematigi Karl Fridrix Gaussdir (1777- 1855). Noyevklidiy geometriyani yaratilish sohasidagi Gaussning ishlari uning vafotidan keyingina fan ahliga ma’lum bo’ldi. 1829 yilda Gauss o’z do’sti Basselega yozgan xatida: “Ehtimol, men yaqin orada bu masala bo’yicha nihoyatda keng tadqiqiotlarimni bosmaga berish holatida emasman va umrim bo’yi bunga jur’at qilaolmasam kerak” degan fikrni aytgan.

Ba’zi teoremalarning Evklid, Lobachevskiy va Riman geometriyalarida ifodalanishi

Evklid geometriyasida	Lobachevskiy geometriyasida	Riman geometriyasida
1.Uchburchak ichki burchaklarining yigindisi $2d$ ga teng.	1.Uchburchak ichki burchaklarining yigindisi $2d$ dan kichik.	1. Uchburchak ichki burchaklarining yig‘indisi $2d$ dan katta
2. Uchburchakning tashqi burchagi o‘ziga qo‘shni bo‘lmagan ikkita ichki burchaklarining yigindisiga teng.	Uchburchakning tashqi burchagi o‘ziga qo‘shni bo‘lmagan ikkita ichki burchaklari yig‘indisidan katta.	2. Uchburchakning tashqi burchagi o‘ziga qo‘shni bo‘lmagan ikkita ichki burchaklari yigindisidan kichik.
3. To‘g‘ri burchakli uchburchakning 30° li burchagi qarshisida yotgan kateti gipotenuzasining yarmiga teng.	3. To‘g‘ri burchakli uchburchakning 30° li burchagi qarshisida yotgan kateti gipotenuzaning yarmidan katta.	3. To‘g‘ri burchakli uchburchakning 30° li burchagi qarshisida yotgan kateti gipotenuzaning yarmidan kichik.

4. Tomonlari mos ravishda parallel bo‘lgan burchaklarning ikkalasi ham o‘tkir yoki ikkalasi ham o‘tmas bo‘lsa, ular bir– biriga teng bo‘ladi.	4. Tomonlari mos ravishda parallel bo‘lgan burchaklar teng emas.	4. Parallel to‘g‘ri chiziqlar mavjud emas.
5. To‘rtburchak ichki burchaklarining yig‘indisi 4*d ga* teng	5. To‘rtburchak ichki burchaklarining yig‘indisi 4*d* dan kichik.	5.To‘rtburchak ichki burchaklarining yig‘indisi 4*d* dan katta.
6. To‘g‘ri burchakli uchburchak gipotenuzasining kvadrati katetlari kvadratlarining yigindisiga teng.	6. To‘gri burchakli uchburchak gipotenuzasining kvadrati katetlar kvadratlarining yig‘indisidan katta	6.To‘g‘ri burchakli uchburchak gipotenuzasining kvadrati katetlar kvadratlarining yig‘indisidan kichik.
7. Har qanday tekis figuraning yuzi mavjud.	7. Har qanday tekis figuraning yuzi mavjud, lekin Evklid geometriyasidagi formulalarga bo‘ysunmaydi.	7. Har qanday tekis figuraning yuzi mavjud, lekin Evklid geometriyasidagi formulalarga bo‘ysunmaydi.
8. O‘xshash figuralar mavjud.	8. O‘xshashlik koeffitsienti birdan farqli bo‘lgan figuralar mavjud emas.	8. O‘xshashlik koeffitsienti birdan farqli bo‘lgan figuralar mavjud emas.
9. Tomoni *n* ta bo‘lgan qavarid ko‘pburchak ichki burchaklarining yig‘indisi 2*d* (*n*–2) ga teng.	9. Tomoni *n* ta bo‘lgan qavarid ko‘pburchak ichki burchaklarining yig‘indisi *2d* (*n*–2) dan kichik.	9. Tomoni *n* ta bo‘lgan qavarid ko‘pburchak ichki burchaklarining yig‘indisi *2d* (*n*–2) dan katta.
10. Har qanday qavariq ko‘pburchak uchlarida bittadan olingan tashki burchaklarining yig‘indisi 4*d* ga teng	10. Har qanday qavariq ko‘pburchak uchlarida bittadan olingan tashqi burchaklarining yig‘indisi 4*d* dan katta	10. Har qanday qavariq ko‘pburchak uchlarida bittadan olingan tashqi burchaklarining yig‘indisi 4*d* dan kichik.

11. Agar ikki to‘gri chiziq bitta tekislikka perpendikulyar bo‘lsa, ular o‘zaro parallel bo‘ladi.	11. Agar ikki turli chiziq bitta tekislikka perpendikulyar bo‘lsa, ular o‘zaro uzoqlashuvchi bo‘ladi.	11. Bu teorema Riman geometriyasida o‘rinli emas.

Noyevklidiy geometriyaning yaratilishiga hissa qo’shgan matematiklardan biri vengriyalik ofitser Bol’yaidir (1802-1860). 1823 yili Yanosh Bol’yai noyevklidiy geometriyani ochishga muvaffaq bo’ldi. U 1832 yili (Lobachevskiydan keyin) o’zining otasi qalamiga mansub kitobga ilova tariqasida “Appendiks” deb atalgan asarini e’lon qiladi. Bu ish bilan tanishgan Gauss Yanoshning otasiga yozgan xatida “ bu ishni men maqtolmayman, uni maqtash o’zimni maqtashdir, chunki bu ish so’ngi 30-35 yil davomida mening bu sohada qilgan ishlarimning xuddi o’zidir” deb yozadi. Katta obro’ga ega bo’gan Gaussdan bunday javobni olish yanosh Bol’yaini juda hayajonga keltiradi va bu sohadagi ishini tark etib, qolgan hayotini og’ir musibatda o’tkazadi. Gauss va Bol’yai tomonidan noyevklidiy geometriya sohasida qilingan ilmiy ishlar ulug’ rus matematigi Nikolay Ivanovich Lobachevskiy tomonidan bu sohada qilingan ishlarning faqat bir qismidir. Nikolay Ivanovich Lobachevskiy 1792 yil 1 dekabrda Nijniy Novogorod shahrida mayda chinovnik oilasida dunyoga keladi. 1811 yili Qozon universitetini muvoffaqiyatli tugatganidan so’ng, uning qobilyati va mehnatsevarligiga qoyil qolgan olimlar uni shu universitetda ishga olib qolishadi. U 1816 yildan boshlab professor lavozimida ishlay boshlaydi. Lobachevskiy birinchi pedagogik faoliyatini studentlarga geometriyadan leksiya o’qishdan boshlaydi. U ayniqsa “Geometriya asoslari”ni chuqur o’rganadi, natijada Yevkilidning “Negizlari” da katta yetishmovchilik borligini sezadi, umuman geometriyani negizidan boshlab qayta ko’rib chiqishni o’z oldiga maqsad qilib qo’yadi. 1815-1817 yillardan boshlab u ham ishni boshqa olimlar kabi, beshinchi postulatni tahlil qilishdan boshlaydi. Lobachevskiy beshinchi postulatga berilgan isbotlarda qat’iylik yo’qligini sezadi. O’zining dastlabki ishlarida beshinchi postulat haqida bunday deydi: “ Uning jiddiy isboti hali topilganicha yo’q”.

1826 yil 11 fevralda Qozon universiteti fizika-matematika fakultetining ilmiy sovetida Lobachevskiy “Geometriyadagi prinsiplar haqidagi mulohazalar” nomli doklad qilib, uni 1829 yili shu universitetning “ Kazanskiy vestnik” djurnalida “O nachalax geometrii” nomi bilan bostirib chiqardi. Ilmiy sovetda qilingan doklad va djurnalda chiqqan yuqoridagi maqola Lobachevskiyni noyevklidiy geometriya bo’yicha qilgan ilmiy ishining ilk natijalari hisoblanadi. Shuning uchun 11 fevral (1826 yil) noyevklidiy geometriyaning tug’ilish sanasi hisoblanadi. Lobachevskiy bu asardagi natija-xulosalarini yanada takomillashtirib, quyidagi asarlarni yaratadi.

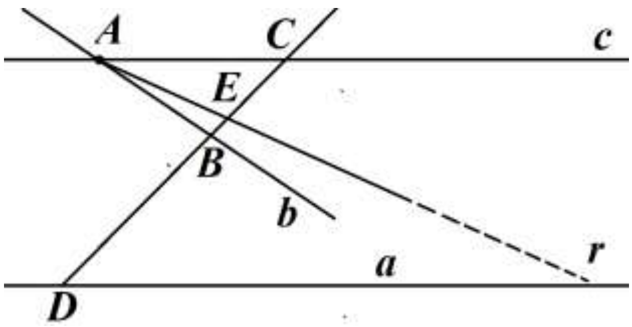
1. Xayoliy geometriya (Voobrajaema geometriya) (1835 yil).
2. Xayoliy geometriyaning ba’zi integrallariga tatbiqi (1835 yil).
3. Parallellar nazaryasi bilan to’ldirilgan geometriya negizlari (1838).
4. Parallel to’g’ri chiziqlar nazaryasi bo’yicha tadqiqot (1840).
5. Pangeometriya (1855).

Lobachevskiy geometriyasining aksiomatikasi absolyut geometriya aksiomalari qatoriga Lobachevskiy aksiomasini qo’shish bilan hosil qilinadi. Demak, Lobachevskiy geometriyasida absolyut geometriyaning barcha ta’rif va teoremalari o’z kuchini saqlaydi.

Lobachevskiy aksiomasi. Tekislikda to’g’ri chiziq tashqarisida olingan nuqtadan bu to’g’ri chiziq bilan kesishmaydigan kamida ikkita to’g’ri chiziq o’tadi.

Shuni ta’kidlab o’tamizki, to’g’ri chiziqda yotmaydigan nuqtadan uning bilan kesishmaydigan to’g’ri chiziq o’tishligini tasdiqlovchi fakt absolyut geometriyaga taalluqlidir, bu to’g’ri chiziqning yagonaligini parallellik aksiomasi tasdiqlaydi. Lobachevckiy aksiomasi esa bunday to’g’ri chiziqning kamida ikkitaligini tasdiqlaydi.

2.1-teorema. Lobachevskiy tekisligida to’g’ri chiziqda yotmaydigan nuqtadan bu to’g’ri chiziq bilan kesishmaydigan cheksiz ko’p to’g’ri chiziq o’tadi.



Isbot. Lobachevskiy aksiomasiga asosan A nuqtadan a to’g’ri chiziq bilan (1- chizma) kesishmaydigan b va c to’g’ri chiziqlari o’tsin. c to’g’ri chiziqda shunday C nuqtani olamizki, bu nuqta va a to’g’ri chiziq b to’g’ri chiziq bilan aniqlanadigan turli yarim tekisliklarga tegishli bo’sin. a to’g’ri chiziqda ixtiyoriy D nuqtani olib, CD to’g’ri chiziqni o’tkazsak, bu to’g’ri chiziq b bilan biror B nuqtada kesishadi, B nuqta C bilan D orasida yotadi. BC kesmaning ixtiyoriy E nuqtasini olib, AE to’g’ri chiziqni o’tkazsak, bu to’g’ri chiziq a bilan kesishmaydi. Haqiqatan ham, AE bilan a to’g’ri chiziq biror nuqtada kesishadi deb faraz qilib, DEF uchburchak va b to’g’ri chiziqqa nisbatan Pash aksiomasini qo’llasak, a bilan b kesishadi, degan xulosaga kelamiz. Bu esa shartga zid.

Demak, BC kesma nuqtalari cheksiz ko’p bo’lgani uchun AE ga o’xshash cheksiz ko’p to’g’ri chiziqlar A nuqtadan o’tib, a bilan kesishmaydi.

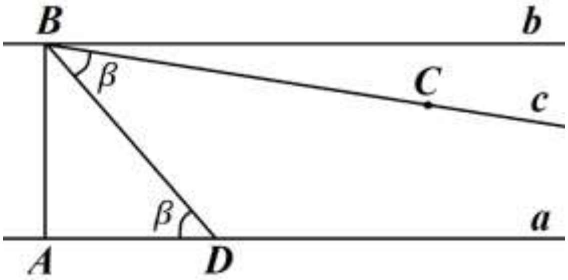
Beshinchi postulatning barcha ekvivalentlari ham Lobachevskiy geometriyasida o’z kuchini yo’qotadi, jumladan, uchburchak ichki burchaklarining yig’indisi endi 180^o ga teng emas.

2.2-teorema. Lobachevskiy tekisligida uchburchak ichki burchaklari yig’indisi 180^o dan kichik.

2.3-teorema. Agar uchburchak ichki burchaklarining yig’indisi 180^o dan kichik bo’lsa, Lobachevskiy aksiomasi o’rinli bo’ladi.

Isbot. AB kesmaning uchlaridan shu kesmaga perpendikulyar bo’lgan a, b to’g’ri chiziqlarni o’tkazamiz. Absolyut geometriyadan ma’lumki, a, b to’g’ri chiziqlar kesishmaydi. B nuqtadan o’tib, b dan farqli a bilan kesishmaydigan yana bitta to’g’ri chiziqning mavjudligini isbotlasak, maqsadga erishgan bo’lamiz. a to’g’ri chiziqda ixtiyoriy D nuqtani olib, BD nurni o’tkazsak, $\angle ADB = \beta$ burchak hosil qilinadi, so’ngra shu burchakni B

nuqtadan boshlab, bir tomoni BD nurdan iborat qilib qo'yamiz (ABD burchakdan tashqariga), bu burchakning ikkinchi tomoni BC nur bo'lsin.



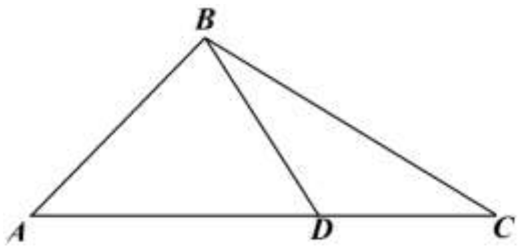
Shartga ko'ra, ABD uchburchak ichki burchaklarining yig'indisi 180^o dan kichik bo'lgani uchun, ya'ni $90^o + \beta + \angle ABD < 180^o$ yoki $\beta + \angle ABD < 90^o$, bundan $\angle ABC < 90^o$. Bu vaqtda BC to'g'ri chiziq a bilan kesishmaydi. Aksincha BC tog'ri chiziq bilan a biror E nuqtada kesishadi deb faraz qilsak, DBE uchburchak hosil bo'lib, $\angle ADB$ bu uchburchak uchun tashqi burchakdir. U holda $\angle ADB = \angle DBE = \beta$ bo'lgani uchun, bu esa ziddiyatdir. Demak, BC bilan a kesishmaydi. Ushbu xulosaga keldik: Lobachevskiy aksiomasi "uchburchak ichki burchaklarining yig'indisi 180^o dan kichik" degan farazga ekvivalent.

ABC uchburchak ichki burchaklarining yig'indisi $S_{\Delta ABC}$ bilan belgilasak, 180^o - $S_{\Delta ABC}$ ayirma musbatdir, uni ABC uchburchakning *nuqsoni* (defekti) deb ataladi va $\delta_{\Delta ABC}$ bilan belgilanadi.

2.4-teorema. Uchburchakning nuqsoni additivlik xossasiga bo'ysunadi, ya'ni $\delta_{\Delta ABC} = \delta_{\Delta ABD} + \delta_{\Delta BDC}$.

Isbot. $\delta_{\Delta ABC} = 180^o - S_{\Delta ABC} = 180^o - (S_{\Delta ABD} + S_{\Delta BDC} - 180^o) = (180^o - S_{\Delta ABD}) + (180^o - S_{\Delta BDC}) = \delta_{\Delta ABD} + \delta_{\Delta BDC}$.

2.5-teorema. Lobachevskiy tekisligida uchburchak ichki burchaklarining yig'indisi turli uchburchaklar uchun turlicha qiymatga ega, ya'ni o'zgaruvchi miqdordir.



Isbot. Faraz qilaylik, barcha uchburchaklar ichki burchaklarining yig'indisi o'zgarmas γ

bo'lsin (ravshanki, $\gamma < 180^o$). ABC uchburchakning B uchidan o'tuvchi, AC tomonini D nuqtada kesuvchi BD nur o'tkazsak, farazga asosan, $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ABD} = S_{\Delta BDC} = \gamma$ bo'lib $S_{\Delta ABD} + S_{\Delta BDC} = S_{\Delta ABC} + 180^o$. Demak, $\gamma + \gamma = \gamma + 180^o$ yoki $= 180^o$. Bu esa yuqoridagi teoremaga zid.

Har qanday to'rtburchakni ikkita uchburchakka ajratish mumkin bo'lgani uchun quyidagi ikki natijani chiqaramiz.

1. Lobachevskiy tekisligida har qanday to'rtburchak ichki burchaklari yig'indisi 360^o dan kichik bo'lib, bu son har xil to'rtburchaklar uchun har xildir.
2. Lobachevskiy tekisligida burchak kattaliklari bilan chiziqli kattaliklar orasida bog'lanish mavjud.

Parallel to`g`ri chiziqlar va ularning xossalari

"Parallellar nazariyasigacha" bo'lgan bo'limga oid teoremalar o'rta maktab darsliklarida fuyidagi tartibda keltiriladi: geoemetrik figura, chiziq, nuqta, tekislik, kesma, nur, aylana, aylana yoyi, vatar va hokazo to'g'risidagi tushunchalarni anglatgandan so'ng, kesmalarni va yoylarni qo'shish amali qaraladi. So'ngra, to'g'ri chiziq haqidagi bobda burchak tushunchasi kiritiladi, burchaklarni qo'shish va ayirish qaraladi, bissektrisa, qo'shni burchaklar, vertikal burchaklar to'g'risida tushuncha kiritiladi. Bundan so'ng, to'g'ri chiziqda yotmagan nuqtadan shu to'g'ri chiziqqa perpendikulyar tushirish mumkin, ham faqat bittagina degan muhim teorema va vetikal burchaklarning tengliginini ifoda etuvchi teorema isbot qilinadi. Siniq chiziq, ko'pburchak, uchburchak, qavariq ko'pburchak tushunchalari kiritiladi. O'qqa nisbatan simmetriya asoslari tekshiriladi, teng yonli uchburchak xossalari va uchburchaklar tengligining alomatlari o'rganiladi. Biz uchun katta ahamiyatga ega bo'lgan ushbu teorema isbotlanadi: *uchburchakning tashqi burchagi o'ziga qo'shi bo'lmagan ichki burchaklarning har biridan kattadir.* Bu teoremaning parallellar nazariyasigacha isbotlanishiga e'tibor qilish kerak.

Budan keyin, uchburchakning tomonlari bilan burchaklari orasidagi munosabatlar to'liq ravishda o'rganiladi: *har qanday uchburchakda teng tomonlar qarshisidan teng burchaklar yotadi; katta tomon qarshisida katta* *burchak yotadi.* Bu teoremalarga teskari bo‘lgan teoremalar ham qaraladi.

Ikki nuqtani tutashtiruvchi to‘g‘ri chiziq kesmasi, bu nuqtalarning tutashtiruvchi har qanday siniq chiziqdan kichikdir degan teorema isbotlanadi. Shu erning o‘zidayoq, mos ravishda teng bo‘lgan tomonlar orasidagi burchaklari teng bo‘lmagan ikki uchburchak haqidagi teorema qaraladi; ya’ni: *agar bir uchburchakning ikki tomoni, ikkinchi uchburchakning ikki tomoniga mos ravishda teng bo‘lsa, bu tomonlar orasidagi burchaklarning kattasi qarshisida katta tomon yotadi* va teskari teorema.

Evklid geometriyasi bilan Lobachevskiy geometriyasi orasidagi eng asosiy farq ulardagi “parallellar nazariyasining” turliligidan iboratdir.

Lobachevskiy geometriyasi uchta qismga bo‘linadi:
1) chiziqlarni o‘lchash haqida (longimetriya), 2) sirtlarni o‘lchash haqida (planimetriya) va 3) jismlarni o‘lchash haqida (stereometriya).

Birinchi bo‘limda — “Chiziqlarni o‘lchash” bo‘limida — to‘g‘ri chiziq; aylana va yoylar, hamda ichki chizilgan siniq chiziq uzunligidan limitni topish bilan egri chiziq uzunligini hisoblash usuli ko‘rsatiladi;

Ikkinchi bo‘limda — “Burchaklar haqida” degan bo‘limda — Lobachevskiy chiziqli burchak, tekisliklar orasidagi burchak, to‘g‘ri chiziq bilan tekislik orasidagi burchakni qaraydi, sfera to‘g‘risida bahs qiladi, uchburchaklarni va ko‘pburchaklarni turlarga bo‘ladi va ko‘pyoqlar haqida ozgina to‘xtalib o‘tadi.

Uchinchi bo‘limda — “Perpendikulyarlar haqida" degan bo‘limda — perpendikulyar to‘g‘ri chiziqlardan tashqari perpendikulyar tekisliklar hamda tekislikka perpendikulyar to‘g‘ri chiziqlar tekshiriladi.
To‘rtinchi bo‘lim — “Mujassam burchaklarni o‘lchash. Muntazam ko‘pburchaklar va jismlar haqida” degan sarlavhali bo‘lib, muntazam ko‘pyoqlarning mavjudligini isbotlash va ularni turlarga ajratish bilan tugaydi. Lobachevskiy bu bo‘limda, parallellar nazariyasiga mumkin qadar tayanmaslik maqsadida, o‘z davrida qabul qilingan isbotlardan ancha farq qiladigan isbotlarni keltiradi.

“Uchburchaklarning bir xilligi haqida” nomli beshinchi bo‘limda uchburchaklarning tenglik hollari tekshiriladi.

“To‘g‘ri to‘rtburchaklarni o‘lchash haqida” nomli oltinchi bo‘lim quyidagi so‘zlar bilan boshlanadi: “Tekisliklarni o‘lchash ushbu haqiqatga asoslanadi: agar ikki to‘g‘ri chiziq, uchinchi to‘g‘ri chiziqdan bir tarafda turib, bulardan biri shu to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar, ikkinchisi esa u bilan o‘tkir burchak tashkil qilsa, ular kesishadi.

Bu haqiqatning isboti hozirgacha topilgan emas. Berilgan isbotlarni faqat unga berilgan izoh deb aytish mumkin bo‘lib, to‘liq ma’noda matematik isbot nomiini olishga arzimaydi”.

Lobachevskiy parallellar nazariyasiga bog‘liq bo‘lmagan ko‘p ma’lumotni to‘pladi. Bu ma’lumotlarning joylashish tartibi va bayoni odatdagiday shu qadar farq qilar ediki, akademik Fuss qo‘lyozmaga yomon baho beradi va u bosilmaydi. Lobachevskiy yozgan bu asarning keyinchalik Lobachevskiy nomini olgan g‘ayrievklid geometriyani vujudga keltirishda g‘oyat darajada katta rol o‘ynaganini endigina biz ko‘rib turamiz.

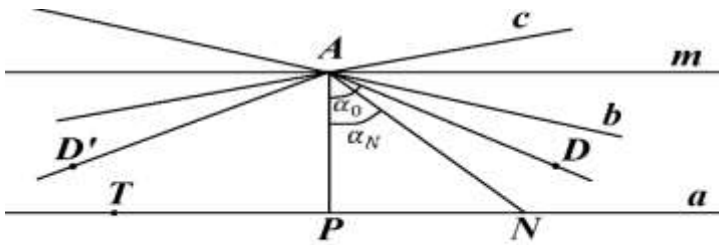
Lobachevskiy geometriyasining Yevklid geometriyasidan yana bir asosiy farqi tekislikdagi to’g’ri chiziqlarning joylashishida yuz beradigan yangi hollardan iborat. Yevklid geometriyasida tekislikdagi umumiy nuqtaga ega bo’lmagan to’g’ri chiziqlar parallel deyiladi; Lobachevskiy tekisligida esa parallel to’g’ri chiziqlarni boshqacha ta’riflashga tog’ri keladi. a to’g’ri chiziqda yotmaydigan A nuqtadan a bilan kesishmaydigan cheksiz ko’p to’g’ri chiziq o’tadi.

Demak, markazi A nuqtada bo’lgan to’g’ri chiziqlar dastasi ikki sinfga ajratiladi. Birinchi sinfga dastaning a to’g’ri chiziq bilan kesishadigan barcha to’g’ri chiziqlarni, ikkinchi sinfga esa dastaning qolgan hamma to’g’ri chiziqlarini kiritamiz. (Ravshanki, ikkala sinfda ham cheksiz ko’p chiziqlar mavjud.) A nuqtadan a to’g’ri chiziqqa AP perpendikulyar tushiraylik (4-chizma) hamda a to’g’ri chiziqda yo’nalishni aniqlab olaylik. AP, AN to’g’ri chiziqlar birinchi sinfga tegishlidir. $\angle PAN = \alpha_N$ bo’lsin, ravshanki $\alpha_N <$

90^o.

N nuqta a to’g’ri chiziq bo’ylab aniqlandan yo’nalishda harakatlanib borsa, AN to’g’ri chiziq doimo birinchi sinfga tegishli bo’lib boraveradi, lekin doimo 90^o dan kichikligicha qoladi. Shunday α_N burchaklar to’plamini ω deb belgilaylik; u chegaralangan cheksiz to’plam bo’lganligi sababli, aniq yuqori α_0 chegaraga egadir. Uchi A nuqtada, bir tomoni AP nurdan iborat α_0 burchakning ikkinchi tomoni AD nurni hosil qiladi. AD to’g’ri chiziq quyidagi xossalarga ega:

1°. AD to’g’ri chiziq a bilan kesishmaydi. Haqiqatan ham ilarni biror K nuqtada kesishadi deb faraz qilsak, a to’g’ri chiziqda K nuqtadan o’ng tomonda undan farqli K' nuqtani olib, AK' to’g’ri chiziqni o’tkazsak, AK to’g’ri chiziq birinchi sinfga tegishli bo’lib, $\angle PAK$ ham ω ga tegishli bo’lib, $\angle PAK < \alpha_0$. Buning bo’lishi mumkin emas, chunki α_0 burchak ω ning aniq yuqori chegarasi.



4- chizma

2°. A nuqtadan o’tib, PA bilan α_0 dan kichik burchak hosil qilingan har qanday to’g’ri chiziq a bilan kesishadi, chunki bu vaqtda u to’g’ri chiziq birinchi sinfga tegishli bo’ladi.

Lobachevskiy yuqoridagi ikki xossaga ega bo’lgan shunday AD to’g’ri chiziqni a to’g’ri chiziqqa berilgan yo’nalishda *parallel* deb ataydi. Demak, Lobachevskiy geometriyasida parallel to’g’ri chiziqlar tushunchasi boshqacha ta’riflanadi: berilgan nuqtadan berilgan to’g’ri chiziqqa roppa-rosa ikkita parallel to’g’ri chiziq o’tadi, bulardan biri a bilan bir xil yo’nalishda, ikkinchisi esa qarama-qarshi yo’nalishdadir. Yevklid geometriyasidagi kabi parallel to’g’ri chiziqlarni || bilan belgilaymiz.

Lobachevskiy tekisligidagi a to’g’ri chiziqda yotmagan A nuqtadan o’tgan barcha to’g’ri chiziqlar ikki sinfga ajralib, birinchi sinfga a bilan kesishadiganlari, ikkinchi sinfga esa a bilan kesishmaydiganlari kiradi; bu ikkinchi sinfga qarashli to'g'ri chiziqlar uzoqlashuvchi deyiladi. Bu ikki sinf to'g'ri chiziqlarini ajratib turuvchi AD, AD' to'g'ri chiziqlarni a ga parallel deb ataymiz. α_0 – parallellik burchagi, AP – shu burchakka mos parallellik kesmasi deb ataladi.

Endi parallel to'g'ri chiziqlarning ba'zi xossalariga to'xtalib o'taylik: parallel to'g'ri chiziqlarga ta'rif berilganda A nuqta maxsus rol o'ynagan edi, hozir bu nuqta o'rniga AD to'g'ri chiziqdagi boshqa nuqtani olsak ham parallellik ta'rifiga halal yetmasligini ko'rsatamiz.

2.1-teorema. Agar A nuqtaga nisbatan $AD||PN$ bo'lsa, u holda AD to'g'ri chiziqning ixtiyoriy C nuqtasi uchun ham $AD||PN$ bo'ladi.

Isbot. Avvalo shuni ta'kidlaymizki, $AD||PN$ bo'lgani uchun AD bilan PN kesishmaydi (5- chizma). Ikki holni tekshiramiz:

1-hol. C nuqta AD nurga tegishli bo'lsin. PN to'g'ri chiziqning ixtiyoriy S nuqtasini olib, SA va SC to'g'ri chiziqlarni o'tkazamiz, so'ngra $\angle SCD$ ning ichidan CE nurni o'tkazamiz. CE bilan PN to'g'ri chiziqlarning kesishishligini ko'rsatamiz. CE nurda ixtiyoriy E nuqtani olaylik, agar E nuqta PN ga tegishli bo'lsa, yoki E nuqta SN to'g'ri chiziqqa nisbatan C bilan har xil tomonda joylashib qolsa teorema isbot etilgan bo'ladi. E nuqta C nuqta bilan birga SN to'g'ri chiziqning bir tomonida yotsin. U holda AE nur PN bilan biror F nuqtada kesishadi (chunki $AD||PN$).

SAF uchburchak va CE to'g'ri chiziq uchun Pash aksiomasini tatbiq qilsak, CE to'g'ri chiziq SA yoki SF kesmalardan birini kesishi kerak, lekin SA ni kesmaydi, chunki, u kesma $\angle DCS$ ning tashqarisida, CE nur esa uchburchakning ichida, demak CE nur SF ni kesadi va $AD||PN$.

2- hol. C nuqta AD nurga tegishli bo'lmasdan, uning to'liruvchisiga tegishli bo'lsin, ya'ni A nuqta C bilan D ning orasida yotsin. P, C, A nuqtalardan PCA uchburchakni hosil qilamiz (6- chizma). $\angle PCA$ ning ichidan o'tgan CE ixtiyoriy nurni PN bilan kesishishligini isbotlasak, maqsadga erishgan bo'lamiz. CE ning toldiruvchisida biror T nuqtani olib, TA to'g'ri chiziqni o'tkazsak, y $\angle PAD$ ning ichidan o'tadi va $AD||PN$ bo'lgani uchun PN bilan biror S nuqtada kesishadi. U holda PAS uchburchak va CE to'g'ri chiziq uchun Pash aksiomasidan CE nur PS bilan kesishadi degan natijaga kelamiz. Parallel to'g'ri chiziqlar haqida gapirilganda ularning qaysi nuqtasiga nisbatan parallelligi ta'kidlanmaydi.

2.2-teorema. $AD||PN \Rightarrow PN||AD$.

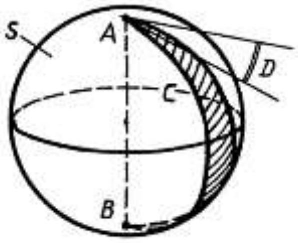
Isbot. AD to'g'ri chiziqning ixtiyoriy A nuqtasidan PN ga AP perpendikulyar tushiramiz (7- chizma). Shartga ko'ra PN bilan AD to'g'ri chiziqlar kesishmaydi. $\angle APN$ ning ichidan o'tgan ixtiyoriy PE nurning AD_{PN} bilan kesishishini ko'rsatsak kifoya.

Buning uchun PE to'g'ri chiziqning PN bilan hosil qilgan β burchak α_0 dan (parallellik burchagidan) kichik bo'lgan holni ko'rsatsak bo'ladi. $AE \perp PE$ ni o'tkazib, $\angle PAE = \gamma$ desak, APE uchburchak ichki burchaklarining yig'indisi 180^o dan kichik bo'lgani uchun $\gamma + 90^o - \beta + 90^o < 180^o$ yoki $\gamma < \beta$ bo'ladi. $AE < AD$ bo'lgani uchun (gipotenuza katetdan kata) AP ga A dan boshlab AE kesmani o'lchab qo'yib ($AE = AF$), F nuqtani topamiz. $AP \perp FC$ ni o'tkazib, FC nurni hosil qilamiz. $AN \perp AP$, $AP \perp FC$ bo'lgani uchun PN bilan FC kesishmaydi, $\angle DAE$ ning ichiga γ ni qo'yamiz, uning bir tomoni AB nur PN bilan T nuqtada kesishadi (chunki AB nur parallellik burchagi ichidan o'tadi). Pash aksiomasiga asosan FC to'g'ri chiziq AT bilan biror G nuqtada kesishadi. AD ning ustiga $AG = AG'$ ni qo'yib, G' nuqtani hosil qilamiz. U holda $AG' \equiv AG,\ AE \equiv AF$ va $\angle FAB \equiv \angle EAG'$ bo'lgani uchun $\Delta AEG' \equiv \Delta AFG$, bundan $\angle AEG' = \angle AFG = 90^o$. Lekin $AE \perp PE$ bo'lgani uchun EG' kesma PE nurga tegishli, demak PE nur AD ni G' nuqtada kesadi.

Sferik geometriya

1. Sferik geometriya Evklid fazosi sferasida yotgan figuralarning xossalarini o'rganadi. S–markazi O nuqta, radiusi r bo'lgan birori sfera bo'lsin. O nuqtadan r masofadan kichik bo'lgan masofadan o'tuvchi σ tekislikni olaylik. U holda σ tekislik va S sferaning kesishishi aylana bo'lib, uni $O \in \sigma$ bo'lsa katta aylana, $O \notin \sigma$ bo'lsa kichik aylana deb ataymiz.

Sferadagi geometriyada katta aylanalar tekislikdagi to‘g‘ri chiziqlar vazifasini o‘taydi. Bu yerda ma’lum bir o‘xshashlik mavjud: har qanday ikkita $A, B \in S$ nuqta uchun, bu nuqtalardan o‘tadigan katta aylana mavjud. Ammo farq ham bor: katta aylana faqat A va B nuqtalari diametrga qarama–qarshi bo‘lmaganda yagonadir. Bundan tashqari, Evklid tekisligida va Lobachevskiy tekisligida kesishmagan chiziqlar mavjud, sharda esa har qanday ikki xil katta aylanalar ikki nuqtada (diametrga qarama–qarshi) kesishadi.



1-chizma

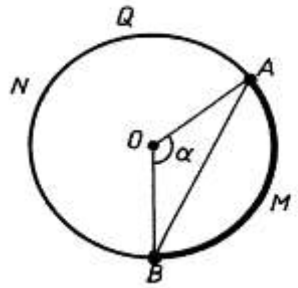
Ma’lumki, sferaning har qanday katta aylyanasi uni *yarim sferasi* deb ataladigan ikki qismga ajratadi, va Q aylananing o‘zi bu yarim sferaning *chekkasidir*. Sferadagi geometriyada yarimsfera planimetriyada yarimtekislik bilan bir xil vazifani o‘ynaydi.

A va $B-$ S sferaning ikkita diametral qarama–qarshi nuqtalari bo‘lsin, ACB va ADB – uchlari A va B nuqtalarda bo‘lgan ikkita yarim aylanalar bo‘lsin, va G figura – bu yarimaylanalarning birlashmasi (1-chizma). Shuni ko‘rsatish mumkinki, G figura $S\backslash G$ figurani D' va D'' ikki qismga ajratadi (8-chizmada bu qismlardan biri shtrixlangan). $D_1 = D' \cup G,\ D_2 = D'' \cup G$ figuralarning har biri A va B nuqtalarida uchlari bo‘lgan *ikkiburchak* deb ataladi. ACB va ADB berilgan yarimaylanalar bu ikkiburchaklarning *tomonlari* deb ataladi. Ikkiburchak – bu tekislikdagi burchakning analogi: ikkiburchak – bu chekkalari ustma ust tushmaydigan ikki yarimsferaning kesishishi yoki birlashishidir. Ikkiburchakni S sferaning $C \cdot AB \cdot D$ ikkiyoqli burchagi bilan kesishishi deb hisoblash mumkinligi. Ushbu ikkiyoqli burchakning chiziqli burchagi bu *ikkiburchakning burchagi* deb ataladi. Buni A (yoki B) nuqtadagi ikkiburchakning tomonlarini o‘z ichiga olgan katta aylanmalarga o‘tkazilgan urinmalar orasidagi burchak deb qarash mumkin. Agar bu burchak to‘g‘ri bo‘lsa, ikkiburchak to‘g‘ri burchakli deyiladi.

Q_1, Q_2 – ikkita katta aylana. $Q_1 \cap Q_2 = \{A, B\}$. Bizda bu yerda $\sigma_1 \supset Q_1$ va $\sigma_2 \supset Q_2$ tekisliklarning kesishmasida olingan, ikki juft vertikal ikkiyoqli burchak bilan S sferada kesimida hosilbo‘lgan ikki juft vertikal ikkiburchak mavjud. Bu ikkiburchaklardan biri to‘g‘ri burchak bo‘lsa qolgan uchtasi to‘g‘riburchakdir. Bu holda Q_1 va Q_2katta aylanalar perpendikular deyiladi: $Q_1 \perp Q_2$. Ravshanki, agar Q_1 va Q_2 aylanalar shunda va faqat shunda perpendikulyar bo‘ladiki , qachonki σ_1 va σ_2 tekisliklar perpendikulyar bo‘lsa.

Agar Q – katta aylana, AB esa shu aylana tekisligiga perpendikulyar bo‘lgan sferaning diametri bo‘lsa, u holda A va B nuqtalar Q aylananing *qutblari* deyiladi. Agar M_1 nuqta Q_1 aylananing qutbi bo‘lmasa, u holda M_1nuqtadan o‘tuvchi va Q_1 aylanaga perpendikulyar yagona Q_2 katta aylana mavjud. Bu Q_2 aylanani hosil qilish uchun S sferani aylana tekisligiga perpendikulyar bo‘lgan OM_1 to‘g‘ri chiziqdan o‘tuvchi Q_1 tekislik bilan kesishtirish kerak. Agar M_1 nuqta Q_1 katta aylananing qutbi bo‘lsa, u holda M_1 nuqtadan o‘tuvchi har qanday katta aylana Q_1aylanaga perpendikulyar bo‘ladi. Bu esa Evklid tekisligida (yoki Lobachevskiy tekisligida) geometriya va sferik geometriya o‘rtasidagi farqni ko‘rsatadi, bu yerda tekislikning istalgan nuqtasidan berilgan chiziqqa perpendikulyar bo‘lgan yagona to‘g‘ri chiziq o‘tadi.

2. Endi $A, B \in S$ ikkita nuqtani olamiz va ushbu nuqtalardan o‘tadigan Q katta aylanani ko‘rib chiqamiz (2-chizma). Q aylana A va B nuqtalarda uchlari bo‘lgan ikkita $\cup AMB$ va $\cup ANB$ yoyning birlashmasidan. Yarim aylanadan katta bo‘lmagan bu ikki yoydan birining uzunligi A va B nuqtalar orasidagi sferik masofa deyiladi va $d(A, B)$ bilan belgilanadi. Shuning uchun S sferaning istalgan ikki nuqtasi uchun $d(A, B) \leq \pi r$ ga egamiz.



2-chizma

$\cup AMB \subset Q$ yarim aylanadan kichik bo‘lsin va shuning uchun $d(A, B)$ bu yoyning uzunligi. AMB yoyiga tiralgan AOB markaziy burchaginini α va AB kesmaning uzunligini $\rho(A, B)$ orqali belgilaymiz.

Ma’lumki

$$d(A, B) = \alpha r. \tag{1}$$

AOB uchburchagidan:

$$\rho(A, B) = 2r \sin\frac{\alpha}{2}. \tag{2}$$

(1), (2) formulalardan:

$$\rho(A, B) = 2r \sin\frac{d(A, B)}{2r}. \tag{3}$$

3. Sferadagi harakat deb sferaning o‘ziga har qanday izometrik akslantirishiga aytamiz, ya’ni sferaning A va B nuqtalari qanday bo‘lishidan qat’iy nazar, $d(AB) = d\big(f(A), f(B)\big)$ shartni qanoatlantiruvchi shunday $f: S \to S$ akslantirish mavjud bo‘lsa. Bu holda (3) formuladan kelib chiqadiki $\rho(AB) = \rho\big(f(A), f(B)\big)$. Demak, S sferaning har qanday f harakati fazoning qandaydir f_0 harakati bilan hosil bo‘ladi, va $f_0(O) = O$. Teskarisi yani fazoning O nuqta invariantligini qoldiradigan har qanday g_0 harakati S sferaning ma’lum bir harakatini hosil qiladi.

Demak, biz S sferaning barcha harakatlari to‘plami fazoning harakatlari gruppasidagi O nuqtaning H_0 statsionar ichki gruppasiga izomorf bo‘lgan gruppadir.

Agar seraning ikkita $F, F' \subset S$ figuralaridan birini boshqasiga o‘tkazadigan S sferasining harakati mavjud bo‘lsa, ikkita figura kongruent yoki teng deb ataladi. Demak, $F, F' \subset S$ figuralar H_0–ekvivalent bo‘lsa ular kongruent bo‘ladi.

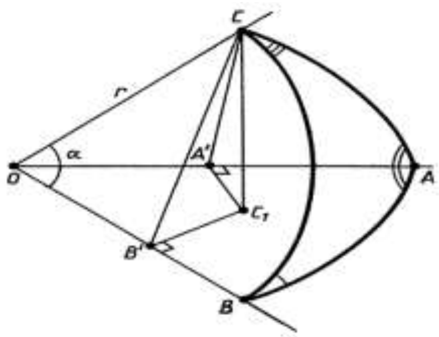
4. S sferada bitta katta aylanada yotmaydigan A, B, C uchta nuqtani olaylik. Ular uchta yarimsferani aniqlaydilar, ularning har biri A, B, C nuqtalarini o‘z ichiga oladi va bu ikkita nuqta yarimsferaning chetiga tegishli. Ushbu uchta yarimsferaning kesishishi A, B, C uchlari bo‘lgan sferik uchburchak deb ataladi. Katta aylanalarning (yarim aylanadan kichik) AB, BC, AC yoylari ABC sferik uchburchakning tomonlari deyiladi.

ABC – sferik uchburchak bo‘lsin, $a = d(B, C)$, $b = d(A, C)$, $c = d(A, B)$ – uning tomonlarining uzunligi, α, β, γ– BOC, AOC, AOB larga mos burchaklar.

Sferik uchburchak uchun sinuslar teoremasini isbotlaymiz.

Teorema. $a = d(B, C)$, $b = d(A, C)$, $c = d(A, B)$–ABC sferik uchburchakning tomonlari bo‘lsin, r esa – sfepaning radiusi. Shunda:

$$\frac{\sin \hat{A}}{\sin \frac{a}{r}} = \frac{\sin \hat{B}}{\sin \frac{b}{r}} = \frac{\sin \hat{C}}{\sin \frac{c}{r}}\,. \qquad (14)$$



3-chizma

□ C nuqtaning AOB tekislikdagi proeksiyasini C_1 bilan, B' va A' esa OB va OA (3-chizma) chiziqlariga C_1 nuqtaning proeksiyalarini belgilaymiz. CC_1

ni $a, r, \hat{B}$ bilan ifodalaylik. To‘g‘ri burchagi B' bo‘lgan OCB' to‘g‘ri burchakli uchburchakdan $CB' = r\sin\alpha$ ega bo‘lamiz, bu yerda $\alpha = \widehat{BOC}$. Endi to‘g‘ri burchagi C_1 bo‘lgan $CB'C_1$ to‘g‘ri burchakli uchburchakdan CC_1 ni topamiz: $CC_1 = B'C \cdot \sin\widehat{CB'C_1}$. $\widehat{CB'C_1} = \hat{B}$ bo‘lgani uchun, ohirgi ikkita tenglamadan $CC_1 = r\sin\alpha\sin\beta$ ega bo‘lamiz. (1) formula buyicha $d(B, C) = \alpha r$, yoki $a = \alpha r$. Shunday qilib,

$$CC_1 = r\sin\frac{a}{r}\sin\hat{B}. \tag{5}$$

Xuddi shunday, OCA' va $CA'C_1$ to‘g‘ri burchakli uchburchaklar yordamida CC_1 ni $b, r, \hat{A}$ orqali ifodalaymiz:

$$CC_1 = r\sin\frac{b}{r}\sin\hat{A}. \tag{6}$$

(5) va (6) tengliklardan:

$$r\sin\frac{a}{r}\sin\hat{B} = r\sin\frac{b}{r}\sin\hat{A} \;\; yoki \;\; \frac{\sin\hat{A}}{\sin\frac{a}{r}} = \frac{\sin\hat{B}}{\sin\frac{b}{r}}.$$

Xuddi shunday, A nuqtaning BOC tekislikka proeksiyasini qarasak, biz $\frac{\sin\hat{B}}{\sin\frac{b}{r}} = \frac{\sin\hat{C}}{\sin\frac{c}{r}}$ munosabatga ega bo‘lamiz. Shunday qilib (4) tenglik o‘rinli. ■

ABC sferik uchburchak uchun kosinuslar teoremasini ifodalovchi quyidagi tenglik mavjudligini isbotlash mumkin:

$$\cos\frac{a}{r}\sin\hat{B}\sin\hat{C} = \cos\hat{A} + \cos\hat{B}\cos\hat{C}. \tag{7}$$

Bundan tashqari, ABC sferik uchburchagining yuzasini quyidagi formula bilan hisoblanganligini isbotlash mumkin:

$$S_{ABC} = \varepsilon \cdot r^2, \tag{8}$$

bu yerda $\varepsilon = \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - \pi$ – sferik uchburchakning ortiqchasi deb ataladi. $S_{ABC} > 0$ bo‘lgani uchun, (8) formuladan $\varepsilon > 0$, yani $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} > \pi$ ekanligi kelib chiqadi. Demak, har qanday sferik uchburchak burchaklari yig‘indisi π dan katta. Bu sferadagi geometriya Evklid tekisligidagi geometriyadan va Lobachevskiy tekisligidagi geometriyadan sezilarli farq qiladi.

Elliptik Riman geometriyasi.

1. V – haqiqiy R sonlar maydoni ustudagi $n+1$ o‘lchamli Evklid vektor fazo bo‘lsin. $E \neq \emptyset$ to‘plam n –o‘lchamli Rimanning elliptik fazosi deyiladi (va S_n bilan belgilanadi) agar

$$\pi: V \setminus \{\vec{0}\} \to E,$$

akslantirish berilgan bo‘lib u quyidagi aksiomalarni qanoatlantirsa:

π – syureksiya;

$\pi(\vec{x}) = \pi(\vec{y})$ shunda va faqat shunda, qachon $\vec{x}$ va $\vec{y}$ vektorlar kollinear bo‘lsa.

V vektor fazo Evklid bo‘lgani uchun S_n fazoda masofa tushunchasini quyidagicha kiritishimiz mumkin. Musbat r sonni belgilaylik. Agar M_1, M_2 nuqtalar $\vec{m}_1, \vec{m}_2$ (yan’i $\pi(\vec{m}_1) = M_1, \pi(\vec{m}_2) = M_2$) vektorlar tomonidan hosil qilingan bo‘lsa, unda M_1, M_2 nuqtalar orasidagi masofa quyidagi shartni qonatlantiradigan manfiy bo‘lmagan $\delta(M_1, M_2)$ sondir:

$$\cos\frac{\delta(M_1, M_2)}{r} = \frac{|\vec{m}_1\vec{m}_2|}{|\vec{m}_1||\vec{m}_2|}. \tag{1}$$

$r > 0$ soni S_n fazoning egrilik radiusi deyiladi.

Shunday qilib, S_n elliptik fazo P_n proektiv fazo bilan bir xil sxema bo‘yicha quriladi, lekin faqat V Evklid vektor fazosi ustida bo‘ib undagi skalyar ko‘paytma S_n da masofani (1) formula bilan aniqlash uchun ishlatiladi.

(1) formulaning o‘ng qismi $\delta(M_1, M_2)$ masofa $\vec{m}_1$ va $\vec{m}_2$ vektorlarning normallashga bog‘liq emasligini ko‘rsatadi.

E’tibor bering, V vektor fazosi Evklid bo‘lgani uchun unda har qanday chiziqli almastirishlar o‘rinli emas, faqat bu fazoning avtomorfizmlari, ya’ni ortogonal almastirishlar (vektorlarning skalar ko‘paytmasinini saqlaydigan chiziqli almastirishlar) o‘rinli. V vektor fazoning har bir ortogonal φ almastirishi quyidagi qonunga muvofiq S_n fazoning ba’zi f almastirishinii hosil qiladi:

agar $\varphi\vec{m} = \overrightarrow{m'}$ bo‘lsa, u holda $f(M) = M'$.

Bu (1) formuladan kelib chiqadiki, S_n fazoning f almastirishi uning istalgan ikkita nuqtasi orasidagi masofani saqlaydi. Ushbu almastirish fazoning *harakati* deb ataladi.

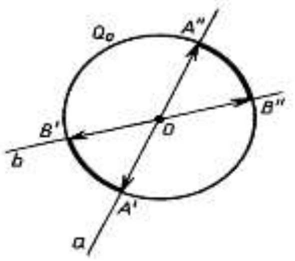
Shunday qilib, V vektor fazoning har bir ortogonal almastirishi S_n fazoning biror harakatlarini hosil qiladi.

S_n fazoning ta’rifidan bir hil o‘lchamdagi S_n va $S_n{}'$ elliptik fazolar izomorf ekanligi kelib chiqadi.

2. Keling, $n = 2$ bo‘lgan holatini batafsil ko‘rib chiqaylik. S_2 fazo elliptik tekislik deyiladi. Proektiv tekislik modeliga o‘xshatib elliptik tekislik modelini biror O nuqtada markazi bo‘lgan E_3 Evklid fazosining to‘g‘ri chiziqlari bog‘lami ko‘rinishida ko‘rib chiqamiz.

Markazi O nuqtada va radiusi r bo‘lgan Q sferani olaylik. Qurilgan modelda har bir $A \in S_2$ nuqta O markazli bog‘lamning biror a to‘g‘ri chizig‘i bo‘ladi. a to‘g‘ri chiziq Q sferani diametrga qarama–qarshi A', A'' ikki nuqtasida kesadi.

Teskarisi: diametrga qarama–qarshi har qanday $A', A'' \in Q$ ikki nuqta markazi O bo‘lgan bog‘lamning a to‘g‘ri chizig‘ini, va demak S_2 elliptik tekislikning A nuqtasini aniqlaydi.



1-chizma

Shunday qilib,

$$f: S_2 \to \tilde{Q}$$

bieksiya mavjud, bu yerda $\tilde{Q}$ – Q sferaning diametral qarama–qarshi nuqtalarning juftlari to‘plami.

A, B – S_2 elliptik tekislikning turli nuqtalari bo‘lsin. O markazli to‘g‘ri chiziqlar bog‘lamida ular a, b to‘g‘ri chiziqlar bo‘lib tasvirlanadi. Ikki juft $\{A', A''\} = a \cap Q$ va $\{B', B''\} = b \cap Q$ nuqta Q sferaning Q_2 katta aylanasida yotadi (1-chizma). $A \in S_2$ nuqta $\overrightarrow{OA'}$ va $\overrightarrow{OA''} = -\overrightarrow{OA'}$ vektorlarning har biridan hosil bo‘ladi, B nuqta esa – $\overrightarrow{OB'}$ va $\overrightarrow{OB''} = -\overrightarrow{OB'}$ vektorlarning har biridan. Shuning uchun (1) formuladan, $\frac{\delta(A,B)}{r}$ – bu a, b to‘g‘ri chiziqlardan hosil qilgan burchaklardan eng kichigi bo‘ladi. Demak, $\delta(A, B)$ – bu $d(A', B')$ va $d(A', B'')$ sferik masofalarning kichigi.

$d \subset S_2$ to‘g‘ri chiziq ikki o‘lchamli $V' \subset V$ qism fazo tomonidan hosil bo‘ladi. Markazi O bo‘lgan to‘g‘ri chiziqlar bog‘lamida u biror δ tekislikda yotuvchi to‘g‘ri chiziqlar to‘plami bilan ifodalanadi. Bu tekislik Q sferani D katta aylana bo‘ylab kesib o‘tadi. Demak, Q sferada $d \subset S_2$ to‘g‘ri chiziq D aylananing diametral qarama–qarshi nuqtalari juftlari D to‘plami bilan ifodalanadi.

E’tibor bering, har qanday $d_1, d_2 \subset S_2$ ikki xil chiziq bitta umumiy nuqtaga ega (chunki bu P_2 tekisligida). Shuning uchun *elliptik tekislikda har qanday ikkita to‘g‘ri chiziq kesishadi.*

Sfera O markaziga nisbatan simmetrik bo‘lgan bir juft $A'B'C'$ va $A''B''C''$ sferik uchburchak S_2 tekislikdagi bitta shaklni ifodalaydi, bu shakl elliptik S_2 tekislikdagi ABC uchburchak deyiladi. Demak, S_2 tekislikdagi ABC uchburchagi uchun sferik geometriyadagi sinuslar va kosinuslar teoremasi o‘rinli.

Kosinus teoremasi bo‘yicha $ABC \subset S_2$ uchburchakning burchaklarini bilib, uning tomonlarini topishingiz mumkin. Shuning uchun, agar S_2 tekislikdagi ikkita uchburchakning mos burchaklari o‘zaro teng bo‘lsa, unda mos tomonlari ham tengdir. Bunda agar ikkita $F, F' \subset S_2$ figura G – ekvivalent bo‘lsa, ular kongruent (teng) deyiladi, bu yerda $G - S_2$ tekislikdagi harakatlar gruppasi.

$ABC \subset S_2$ uchburchakning yuzasi $ABC = \varepsilon r^2$ formula bilan hisoblanadi, bu yerda $\varepsilon = \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - \pi$ – sferik uchburchakning ortiqchasi. Demak har qanday $ABC \subset S_2$ uchburchakda $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} > \pi$.

Nazorat savollari

1. Gilbert aksiomasida asosiy obyektlarni ayting.
2. Bog’lanish aksiomlari haqida ma’lumot bering.
3. Tartib aksiomalari haqida ayting.
4. Gilbert aksiomalar sistemasiga kiradigan aksiomalarni tavsiflang.
5. Bir kesma ikkinchi kesmaga kongurent bo’lish shartini ayting.
6. Kongurentlik aksiomalaridan kelib chiquvchi teoremalarni ayting
7. Absolyut geometriya aksiomlariga qaysi aksiomalar kiradi?
8. Absolyut geometriya teoremlarini ayting.
9. Lobachevskiy tekisligining asosiy obyektlarini tavsiflang.
10. Lobachevskiy aksiomasini ayting.
11. Lobachevskiy aksiomasidan kelib chiqadigan asosiy teoralarga qaysi teoremalar kiradi?
12. Lobachevskiy tekisligida parallel to’g’ri chiziqlar xossalarini sharhlang.
13. Lobachevskiy geometriyasi qanday qismlarga bo‘linadi? Har bir qismga tavsif bering.
14. Parallel to’g’ri chiziqlar haqidagi teoremani tavsiflang.
15. Lobachevskiy tekisligida parallel to’g’ri chiziqlar haqidagi teoremalarni ayting.
16. Evklidning V postulatiga ekvivalent teoremalarni keltiring.

2-ma’ruza. Tekislikda va fazoda geoemtrik yasashlar

Reja:

1. Sirkul va chizg`ich yordamida yasash aksiomalari.Tekislikda yasashga doir masalalar yechish bosqichlari

2. Yasashga doir masalalarni yechish usullari va yasashga doir sodda masalalar
3. Markaziy va parallel proyeksiyalash. Ikki tekislikning perspektiv affin mosligi.
4. Pozitsion masalalar. Fazoviy figuralarda kesimlarni yasash

Tayanch tushunchalar: geometrik o'rinlar, simmetriya, parallel ko'chirish, tahlil bosqichi, yasash bosqichi, isbot bosqichi, tekshirish bosqichi, konstruktiv masala, markaziy va parallel proyeksiyalash. Ikki tekislikning perspektiv affin mosligi fazoviy figura tasviri

1. Sirkul va chizg`ich yordamida yasash aksiomalari

Konstruktiv geometriya**.** Nuqtalarning har qanday to`plami figura deb atalishi ma`lum. Ma`lum talablarga javob beruvchi figurani bir yoki bir nechta yasash qurollari ( chizg`ich, sirkul, chizmachilik uchburchagi va boshqalar) yordamida yasashni talab etgan masala *konstruktiv* masala deyiladi.
Chizg`ich, sirkul, uchburchakli chizg`ich va transporter yordamida yechiladigan tekislikdagi har qanday konstruktiv masalalarni faqat sirkul va chizg`ich vositasida yechish mumkin. Shuning uchun boshqa yasash qurollarining qolganlaridan foydalanmasa ham bo`ladi.

Konstruktiv geometriya aksiomalari. Konstruktiv geometriyada geometric figurani "yasash" deganda uning barcha elementlarini topishni tushuniladi. Geometriyaning yasashga doir asosiy talablarni tegishli aksiomalar orqali ifoda qilinadi. Konstruktiv geometriya masalalarini ixtiyoriy qurollar vositasida yechishda quyidagi aksiomalar o`rinli deb qabul qilinadi.

1. Berilgan, $F_1\, F_2 \; . \; . \; . \; .F_k$ figuralarning har biri yasalgan. Bu yerda "berilgan figura" va "figura aniqlangan" tushunchalarini ajratib yubormaslik kerak. Agar biror"figura berildi"deb aytilsa, bu figura tasvirlangan, chizilgan, ya`ni yasalgan deb tushunish kerak. Agar biror "figura aniqlangan" deb aytilsa, bu ibora orqali figuraning o`zi berilmagan bo`lib, faqat figuraning vaziyatini aniqlaydigan elementlar berilgan degan ma`noni tushunmoq kerak. Masalan, to`g`ri chiziqning ikki nuqtasi berilgan bo`lsa, bu nuqtalarni birlashtiradigan

yagona to`g`ri chiziq mavjud, ya`nib u to`g`ri chiziq o`zining ikki nuqtasi bilan aniqlangan, biroq bu to`g`ri chiziq o`zining ikki nuqtasi bilan aniqlangan, biroq bu to`g`ri chiziq yasalmagan(chizimagan) uni yasash kerak.

2. Ikkita figura yasalgan bo`lsa, u holda bu figuralarning birlashmasi ham yasalgan .
3. Ikkita F_1 va F_2 yasalgan bo`lib, ularning kesishmasi bo`sh bo`lmasa, ularning $F_1 \cap F_2$ kesishmasi yasalgan bo`ladi.
4. Agar F_1 va F_2 figuralar yasalgan va $F_1 \neq F_2$ bo`lsa $F_1 / F_2$ figura yasalgan bo`ladi.
5. Agar F figura yasalgan bo`lsa bu figuraga qarashli nuqtani yasash mumkin.

Biz Yevklid tekisligiga taalluqli yasashga doir masalalar bilangina shug`ullanamiz. Tekislikda yasashga doir masalalarni yechishda yasash qurollaridan odatda chizg`ich va sirkul ishlatiladi. Yasashga doir masalalarni chizg`ich va sirkul yordamida yechishda chizma praktikasida qo`llaniladigan chizg`ich va sirkul emas, balki abstract chizg`ich hamda sirkul e`tiborga olinadi. Bu qurollarning konsttruktiv imkoniyatlari quyidagi ikkita aksioma orqali ifoda qilinadi.

6. Agar A, B nuqtalar (A$\neq$ B) belgilangan bo`lsa, AB nurni yasash mumkin.
7. Agar O nuqta va AB kesma yasalgan bo`lsa markazi O nuqtada va radiusi r=AB bo`lgan aylanani chizish mumkin. Bu aylanani S(o,r)ko`rinishida belgilaymiz.

2. Tekislikda yasashga doir masalalar yechish bosqichlari

Tekislikda yasashga oid masalalarni sirkul va chizg`ich yordamida yechishda geometrik tushuncha, xossa va xususiyatlarga tayanib ish ko`ruvchi to`g`irlash, geometrik o`rinlar, simmetriya, parallel ko`chirish, o`xshashlik yoki geometriya inversiya hamda algebraik tushuncha, xossa va xususiyatlarga tayanib ish ko`ruvchi algebraik metodlardan foydalaniladi.

Yasashga oid geometrik masalalarni yechish jarayoni qaysi metod bilan amalga oshirilishidan qat`iy nazar, u bir qancha bosqichlarda bajariladi va tekislikda yasashga oid masalalarni yechish bosqichlari deb yuritiladi. Bular, tahlil, yasash va isbot va tekshirish bosqichlari bo`lib, har bir bosqich masala yechish jarayonida ma`lum bir maqsadni amalga oshirishni nazarda tutadi.

Tahlil bosqichi: masala yechishning eng muhim, ijodiy bosqichi bo`lib bunda yasalishi lozim bo`lgan F figura, masala talablariga mumkin qadar to`la javob beradigan darajada taxminan chizib olinadi.

Tahlil rasmida masala shartida berilganlar bor yo`qligi aniqlanadi, agar ular rasmda aks etmagan bo`lsa qo`shimcha chizib olinadi. Natijada asosiy ya`ni yasalishi lozim bo`lgan figura bilan hamjihatlikda bo`lgan bir qancha yordamchi figuralar hosil bo`ladi. Yordamchi figuralarda masala shartida berilganlar bilan bir qatorda, izlangan ya`ni yasalishi lozim bo`lgan asosiy figuraning nuqtalari ham joylashadi. Shu tariqa berilganlar va izlanganlar orasidagi bog`lanishlarni o`rnatish natijasida asosiy figurani yasash imkoniyatlari axtariladi va aniqlanadi. Yasash mumkin bo`lgan yordamchi figura orqali izlangan figurani yasashga o`tiladi.

Yasash bosqichi: tahlil bosqichida aniqlanganlarni amaliy jihatdan bajarilishini nazarda tutadi.

Bunda yasalishi mumkin bo`lgan yordamchi figuralar yasash vositalari yordamida yasaladi va ular orqali yasalishi lozim bo`lgan asosiy figuraning nuqtalari va elementlari yasab olinadi.

Isbot bosqichi: masla yechimining sinash bosqichi bo`lib tahlil bosqichida taxminan chizib olingan asosiy figura bilan yasash bosqichida yasalgan figuraning masala shrtlariga javob berishi isbotlanadi.

Tekshirish bosqichi: masala yechishning yakunlash bosqichi hisoblanib, unda masala shartida belgilanganlarga asosan figura yasash mumkinmu?, agar mumkin bo`lmasa berilganlarni qanday tasnlash lozim qanday hollarda yechim mavjud, berilganlarga asoslanib nechta yechimga ega ekanligi aniqlanadi.

3. Yasashga doir masalalarni yechish usullari va yasashga doir sodda masalalar

Odatda yasashga doir geometrik masalalarni yechishda masala yechilishini osonlashtirish va to`la yechimni ta`minlash maqsadida yuritiladigan muhokama aniq bir umumiy sxemada olib boriladi. Bu sxema quyidagi 4 ta bosqichdan iborat:

ANALIZ. Analiz konstruktiv masalalarni yechishning dastlabki tayyorlov bosqichidir. Bu bosqichning asosiy vazifasi masalani yechilishi oldindan ma`lum bo`lgan masalalarga ajratish va ularning yechilishi tartibini aniqlashdan iborat. Bundan tashqari, masala yechildi deb faraz qilinib, izlangan va berilgan figuralar masala talabiga mumkin qadar to`laroq javob beradigan tarzda taxminan chizib qo`yiladi. So`ngra kerakli geometrik faktlardan foydalanib, so`raglan va berilgan figura orasidagi bog`lanishlar aniqlanadi va figuraning qaysi elementni qay tartibda yasash mumkinligi belgilanadi. Shunday qilib, izlangan figuraning yasash plani tuziladi.

So`ralgan va berilgan figura elementlari orasidagi bog`lanishni topishni osonlashtirish uchun odatda yordamchi figuradan foydalaniladi. Yordamchi figura shunday bo`lishi kerakki, uni berilganlarga asosan yasash va undan izlangan figuraga o`tish mumkin bo`lsin.

YASASH. Masalada so`raglan figurani toppish uchun kerak bo`lgan asosiy yasashlar ketma- ketligi analiz bosqichida tuzilgan plan asosida, chizg`ich va sirkul yordamida hosil qilinadi.

Isbot. Bu bosqichda yasalgan figura masalada izlangan figura ekanligi isbot qilinadi, ya`ni uning masalada berilgan barcha shartlarga javob berishi isbotlanadi. Isbotlash yasashda bajarilgan ishlarga ve tegishli geometriya teoremalariga asoslanadi.

TEKSHIRISH. Yasashga doir masalalarni to`la yechish uchun quyidagi savollarni oydinlashtirish kerak:

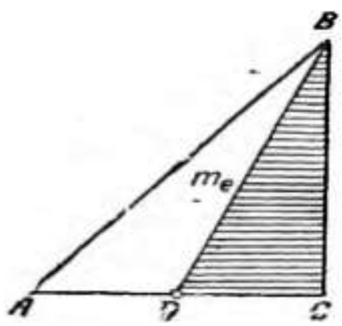
1. Masalada berilgan elementlarni ixtiyoriy tanlab olganda ham masala yechimga ega bo`ladimi, agar berilgan elementlar ixtiyoriy tanlab olinganda masala yechimga ega bo`lmasa, u holda qanqanday tanlab olganda masala yechimga ega bo`ladi, qanday hollarda yechimga ega bo`lmaydi?

2. Berilgan elementlar imkoniyati boricha tanlab olinganda masala nechta yechimga ega bo`ladi?

Bu savollarga javob berish uchun yasashning borishini tekshirish kerak. Bu degan so`z, yasash bosqichida bajarilgan eng sodda va asosiy yasashlarni birin-ketin yana bir bor tekshirish kerak hamda bu masalalarni hamma vaqt yechish mumkinmi, yechish mumkin bo`lsa, nechta yechim borligini aniqlash kerak. Yasashga doir masalalarni bosqichlab yechish masalani to`g`ri yechishning garovidir. Lekin shuni sedan chiqarmaslik kerakki, har qanday masalani yechishda ham bu to`rtta bosqichga qat`iy roiya qilish shart emas. Masalaning og`ir yengilligiga, soda- murakkabligiga qarab, bu bosqichlarning ba`zilariga to`xtalmasdan ketish ham mumkin.

1- Masala*: Bir kateti va ikkinchi katetiga o`tkazilgan medianasi berilgan to`g`ri burchakli uchburchak yasang.*

ANALIZ. Izlanuvchi uchburchak topildi deb faraz qilib, uni taxminan chizib qo`yaylik. 3.1 chizmadagi *ABC*-izlanuvchan ucburchak va uning berilgan elementlari $BC=\alpha$ $BD=m$ va burchak $C=\ 90^0$ bo`lsin. Bu uchburchakni yasash uchun uning *A*, *B* va *C* uchlarini toppish kerak. $BC=\alpha$ tomoni berilgani uchun uning *B* va *C* uchlari ma`lum. *A* uchi uchburchak *AC* va *AB* tomonlarning kesishish nuqtasi bo`lsa ham bu tomonlar noma`lum bo`lgani uchun ular yordamida *A* nuqtani bevosita topib bo`lmaydi. Shuning uchun to`g`ri burchakli uchburchak *BCD* ni qaraymiz. Uning *BC* kateti, *BD* gipotenuzasi va burchak $C=\ 90^0$ berilgani uchun uni yasash mumkin. Berilishiga ko`ra *BD* kesma median abo`lgani uchun, *AD=CD.* Shunung uchun uchburchak *BCD* ning *CD* kateti davomida unga teng kesma olib, *A* nuqtani olish mumkin. So`ngra A va B nuqtalarni tutshtirsak, uchburchak *ABC* hosil bo`ladi.



3.1-Chizma.

Demak, masala shartida berilganlar bo`yicha to`g`ri burchakli uchburchak *BCD* ni yasab uning yordamida izlanuvchi uchburchak *ABC* ga o`tish mumkin ekan. Masala yechishda foydalanilgan uchburchak *BCD* yordamchi figura bo`ladi.

Yechimning yasash, isbotlash va tekshirish bosqichlari o`z- o`zidan ravshan bo`lgani uchun ular ustida to`xtashga ehtiyoj yo`q.

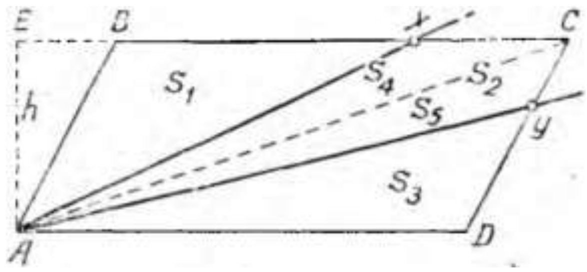
2-Masala: *Parallelogramni uning bir uchidan chiquvchi ikki to`g`ri chiziq bilan uchiga tengdosh bo`lakka bo`ling.*

ANALIZ. Berilgan parallelogram *ABCD* va masalaning talabiga javob beruvchi to`g`ri chiziqlar *AX* va *AY* (2.2 chizma) deb faraz qilaylik (X va Y to`g`ri chiziqlarning parallelogram tomonlari bilan kesishish nuqtalari). Masala shartiga muvofiq

$$\triangle \mathrm{AB}X_{yuzi} = \square \mathrm{AXC}Y_{yuzi} = \triangle \mathrm{BY}D_{yuzi}$$

Yoki $S_1 = S_2 = S_3$ (1)

Izlanuvchi to`g`ri chiziqlarni topish uchun X va Y nuqtalarni topish kifoya. Bu nuqtalarni topishda ularning parallelogram tomonlarida yotishidan va AC dioganal parallellogrammni ikkita teng uchburchakka bo`lishidan foydalanamiz.



3.2– Chizma.

Chizmadan:

$\triangle$ ABC_{yuzi} = $\triangle$ ADC_{yuzi} yoki

$S_1 + S_4 = S_3 + S_5$ (2)

Bundan (1) ga asosan $S_4 = S_5$

$S_4 + S_5 = S_2$ bo`lgani uchun:

$S_4 = \frac{1}{2}S_2 = \frac{1}{2}S_1$ (3)

$S_5 = \frac{1}{2}S_2 = \frac{1}{2}\ S_3$ (4)

Parallellogrammning A uchidan BC- tomoniga o`tkazilgan balandlikni h bilan belgilab, uchburchaklar yuzlari uchun quyidagi ifodalarni yoza olamiz:

$S_1 = \frac{1}{2}\text{BX} \cdot h$; $S_4 = \frac{1}{2}\text{CX} \cdot h.$

Bu ifodalarni $S_4 = \frac{1}{2}S_1$ tenglikka qo`ysak:

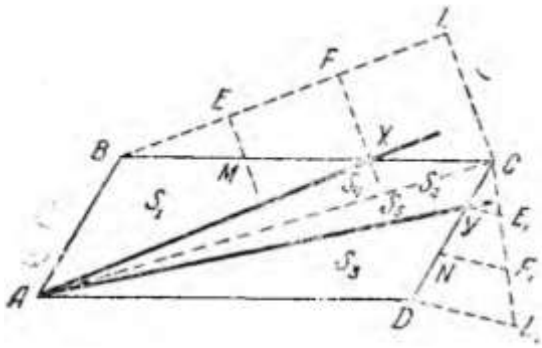
$$\frac{1}{2}\text{CX} \cdot h = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\text{BX} \cdot h\right)$$

Bundan esa:

$$\text{CX} = \frac{1}{2}\text{BX}. \quad (5)$$

Xuddi shu yo`l bilan CY = $\frac{1}{2}$ DY ekanligi aniqlanadi. Bulardan quyidagilar ma`lum bo`ladi:

$$\text{CX} = \frac{1}{3}\text{BC}, \quad \text{CY} = \frac{1}{3}\text{CD} \quad (6)$$



2.3-chizma

Demak, izlanuvchi to`g`ri chiziqlarni aniqlashda yordam beruvchi X va Y nuqtalarni topish uchun berilgan parallellogrammning CB va CD tomonlarini teng uch bo`lakka bo`lish kerak. Bundagi X va Y nuqtalar yordamchi figura bo`ladi.

YASASH. Berilgan ABCD parallellogramning CB va CD tomonlarini har birini teng uch bo`lakka bo`lamiz. C uchidan boshlab hisoblanganda tomonning uchdan bir bo`lagini ko`rsatuvchi nuqtalar izlangan X va Y nuqtalar bo`ladi.

So`ngra parallellogramning A uchini topilgan X va Y nuqtalar bilan tutashtiramiz; AX va AY to`g`ri chiziqlar parallellogrammni izlangan tengdosh bo`laklarga bo`ladi.

ISBOT. Yasashga ko`ra quyidagilar ma`lum:

BM = MX = XC;

DN = NY = YC.

Budan:

BX = 2 XC, DY = 2 YC. (7)

(7)dan ABX uchburchakning yuzi S_1 AXC uchburchakning yuzi S_4 dan ikki marta katta. ADY uchburchakning yuzi S_3 esa AYC uchurburchakning yuzi S_5 dan ikki marta katta ekanligi ravshan:

$S_1 = 2 S_4$ $S_3 = 2 S_5$. (8)

Parallelogramning AC dioganali uni teng ikki uchburchakka bo`lishini e`tiborga olib, quyidagilarni yoza olamiz:

$\triangle \mathrm{AB}C_{yuzi} = \triangle \mathrm{AD}C_{yuzi}$

Bundan;

$S_1 + S_4 = S_3 + S_5$ (9)

Agar S_1 va S_5 ning (8) dagi qiymatlarini (9) ga qo`ysak, quyidagi tenglikka ega bo`lamiz:

$2S_4 + S_4 = 2S_5 + S_5$; $3 S_4 = 3 S_5$

Bundan:

$S_4 = S_5$ (10)

Bundan tashqari, (8) dan $S_1 = 2 S_4$ $S_3 = 2 S_5$ va (10) dan $S_4 = S_5$ bo`lgani uchun

$S_1 = S_3$ (11)

Chizmadan esa $S_4 + S_5 = S_2$ (8) va (11) da

$$S_4 = S_5 = \frac{1}{2} S_1 = \frac{1}{2} S_3$$

Demak,

$$S_1 = S_2 = S_3$$

TEKSHIRISH. Berilgan parallellogrammning shakli va kattaligi har qanday bo`lsa ham bu masala yechimga ega bo`ladi, chunki parallellogrammning tomonlarini hamma vaqt teng uch bo`lakka bo`lish mumkin va tomonning uchdan bit bo`lagini ko`rsatuvchi nuqta bitta bo`lgani uchun yechim ham bitta bo`ladi.

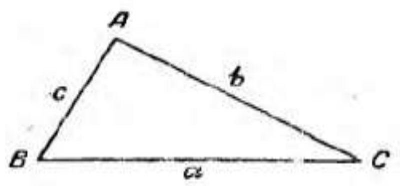
3-Masala: *Uch tomoni berilgan uchburchak yasang*.

ANALIZ. Masala yechildi deb faraz qilib, izlangan uchburchakni taxminan chizib qo`yamiz. (3.4 chizma)

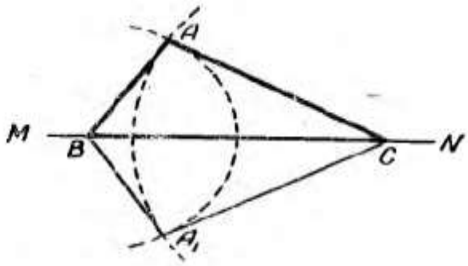
Bunda BC = a, AC = b, AB = c.

Agar, a kesma yasalsa uning B va C uchlari ABC uchburchakning ikki uchi bo`ladi. Endi uchinchi A uchining qayerda yotishini aniqlash qoladi. Buning uchun A nuqtaning quyidagi ikki xossasiga e`tabor qilamiz:

1) A nuqta B nuqtadan berilgan c masofada yotadi, demak, u B nuqtani markaz qilib c kesmaga teng radius bilan chizilgan aylanada yotar ekan,



3.4-chizma



3.5-chizma

2) Ikkinchi tomondan shu A nuqta C nuqtadan berilgan b masofada yotadi, demak, u C markazdan b kesmaga teng radius bilan chizilgan aylanada yotar ekan,
3) Shunday qilib, uchburchakning izlangan A uchi bu ikki aylana yoylarining kesishish nuqtasi bo`ladi.

YASASH. Ixtiyoriy MN to`g`ri chiziqda berilgan tomonlardan biriga masalan, a kesmaga teng qilib, BC kesma ajratamiz (3.5 chizma). Bu kesmaning B uchini markaz qilib c ga teng radius bilan va C uchini markaz qilib, b ga teng radius bilan ikkita yoy chizamiz. Bu yoylar kesishgan A(yoki A_1) nuqtani B va

C nuqtalar bilan tutashtirsak, talab etilgan ABC uchburchak hosil bo`ladi.

ISBOT. Yasashga ko`ra, BC = a   AC= b  va AB = c bo`lgani uchun ABC uchburchak masalaning talabiga javob beradi.

TEKSHIRISH. Berilgan kesmalar

$b - c < a < b + c$

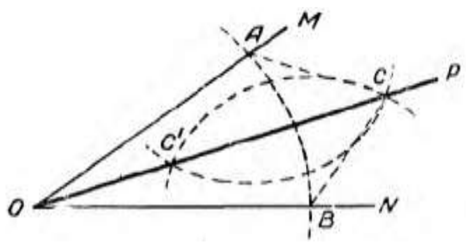
munosabatda bo`lgandagina uchburchak yasash mumkin.

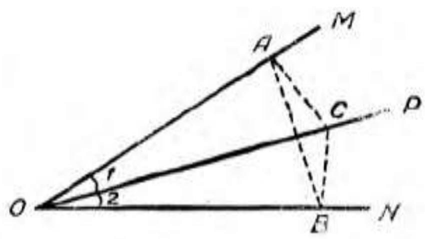
Yasash natijasida ikkita ABC va A_1BC uchburchak hosil bo`lsada, bular o`zaro teng bo`lgani uchun masalaning javobi sifatida bulardan bittasi olinadi.

Eslatma: Yasashni b yoki c tomondan boshlasa ham yuqoridagi kabi uchburchaklar hosil bo`ladi.

3-masala: *Berilgan burchakni teng ikkiga bo`ling, ya`ni burchakning bissektrisasini chizing.*

ANALIZ. NOM burchakni teng ikkiga bo`luvchi OP nur topildi deb faraz qilaylik.





3.6 - chizma   3.7- chizma

Bu farazga binoan quyidagi tengliklar to`g`rib o`ladi:

$\angle MOP = \angle NOP = \frac{\angle NOM}{2}$ (1)

OP nurning ixtiyoriy C nuqtasidan berilgan burchakning tomonlariga perpendikulyar o`tkazaylik.(3.7. chizma)

CA $\perp$OM va CB$\perp$ON.   (2)

(A va B nuqtalar – burchak tomonlari bilan perpendikulyarning kesishish nuqtalari). Hosil bo`lgan ikkita to`g`ri burchakli OAC va OBC uchburchaklar o`zaro teng, chunki ularda OC gipotenuza umumiy va farazimizga binoan bittadan o`tkir burchaklari o`zaro teng ($\angle 1 = \angle 2$). Shuning uchun:

OA= OB va AC= BC   (3)

Demak, A va B nuqtalar berilgan burchakning O uchidan teng uzoqlikda, C nuqta esa AB kesmaning o`rta perpendikulyarida yotadi. C nuqtaning bu xossasidan OP nurni yasash yo`li ma`lum bo`ladi.

C nuqta OP nurning ixtiyoriy nuqtasi bo`lgani uchun quyidagi xulosaga kelamiz *burchakning bissektrisasidagi nuqta shu burchak tomonlaridan teng masofada yotadi* (to`g`ri teorema).

YASASH.

1) berilgan burchakning O uchini markaz qilib, ixtiyoriy radius bilan yoy chiziladi(4.1 chizma). bu yoy burchak tomonlarini A va B nuqtalarda kesib o`tadi.

2) AB kesmani teng ikkiga bo`lish uchun uning o`rta perpendikulyarida yotuvchi C va C' nuqtalar topiladi.

3) C va C' nuqtalardan to`g`ri chiziq o`tkaziladi.

Eslatma: Odatda bunda aytilgan ikki nuqtadan birini topib, uni berilgan burchakning O uchi bilan tutashtirib, izlanuvchi bissektrisa hosil qilinadi.

To`g`irlash metodi.

Bir to`g`ri chiziqda yotmagan kesmalarning, masalan siniq chiziq bo`g`inlarining algebraik yig`indisiga teng kesma yasash, kesmalarni to`g`irlash deb ataladi. To`g`irlashdan foydalanib masala yechish yasashda to`g`irlash metodi deyiladi.

To`g`irlash metodi bilan masala yechishda yuqorida ko`rilgan bosqichlab yechish usulidan to`la foydalaniladi.

Yasashga doir masaladagi ma`lum elementlar qatorida izlangan figura chiziqli noma`lum elementlarning yig`indisi yoki ayirmasi berilgan bo`lsa, bunday masala to`g`irlash metodi bilan oson yechiladi.

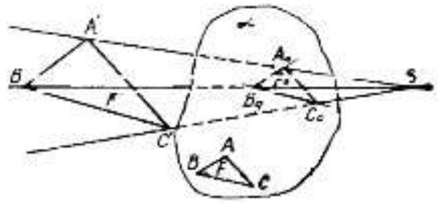
Fazoviy figuralarda kesimlarni yasash

Markaziy proyeksiyalash.

Yevklid fazosida α tekislik va shu tekislikdan tashqarida yotgan A' nuqta berilgan deb faraz qilaylik (1-chizma). A' dan farqli ixtiyoriy S $(S \notin \alpha)$ nuqtani tanlab olib, uni A' nuqta bilan tutashtiramiz, hosil bo'lgan $S\,A'$ to'g'ri chiziqning α tekislik bilan kesishgan nuqtasini A_0 bilan belgilaylik. A_0

nuqtani fazodagi A' nuqtaning α (proyeksiya) tekislikdagfi markaziy proyeksiyasi, S nuqta proyeksiyalar markazi, $S\,A'$ chiziqni proyeksiyalovchi to’g’ri chiziq, α tekislikni esa proyeksiyalar tekisligi deyiladi.

Yuqoridagi usul bilan F' figuraning α tekislikdagi F_0 proyeksiyasini yasaganimizdan keyin, uni o’xshash almashtirib, F' figuraning α tekislikdagi F tasvirini hosil qilamiz. Ba’zi hollarda o’xshash almashtirishga zaruruyat tug’ilmaydi, u holda F' figuraning α tekislikdagi proyeksiyasi uning tasviri bo’ladi.



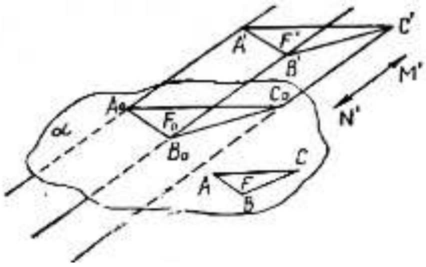
1-chizma.

Figura proyeksiyasining ko’rinishi proyeksiyalar tekisligining proyeksiyalar markaziga nisbatan joylanishiga bog’liqdir. Markaziy proyeksiyalashda kishi ko’zining ko’rish nurlari proyeksi-yalovchi nurlarga mos kelganligi sababli tasvir yaqqol ko’rinadi. Markaziy proyeksiyalar bo’yicha figuraning haqiqiy shakli va o’lchamlarini aniqlash qiyin va noqulay. Shuning uchun bu usuldan ko’pgina yirik inshootlarning umumiy ko’rinishlarini tasvirlashda foydalaniladi. Markaziy proyeksiyalash usuli bilan yasalgan tasvir proyektiva va bu usul bilan shug’ullanuvchi fan ham perspektiva deb ataladi va u chizma geometriyaning maxsus bo’limidan biri hisoblanadi.

Parallel proyeksiyalash.

Parallel proyeksiyalashni markaziy proyeksiyalashning xususiy holi deb qarash mumkin. Bunda, proyeksiyalash markazi S biror $M'N'$ to’g’ri chiziq yo’nalishi bo’yicha harakatlanib, proyeksiyalar tekisligidan cheksiz uzoqlashgan deb faraz qilamiz (2-chizma). Bu yerda $M'N'$ chiziq *proyeksiyalash yo’nalishi* deyiladi.

Fazoda olingan biror F' figurani α tekislikka proyeksiyalash uchun F'



2-chizma.

figuraning har bir nutasi orqali $M'N'$ yo'nalishga parallel qilib proyeksiyalovchi to'g'ri chiziqlarni o'tkazamiz. Bu to'g'ri chiziqlarning α tekislik bilan kesishgan F_0 nuqtalar to'plami F' figuraning α tekislikdagi parallel proyeksiyasi deb ataladi. Agar F_0 figuraning o'xshash almashtirsak, F' figuraning α tekislikdagi F tasviri hosil bo'ladi.

Parallel proyeksiyaning ko'rinishi va o'lchamlarining o'zgarishi faqat proyeksiyalar tekisligining proyeksiyalash yo'nalishiga nisbatan qanday joylanishiga bog'liq. Proyeksiyalovchi to'g'ri chiziqlarning proyeksiyalar tekisligiga nisbatan qanday yo'nalishda bo'lishiga qarab, parallel proyeksiyalash qiyshiq burchakli va to'g'ri burchakli bo'ladi.

Agar proyeksiyalash yo'nalishi proyeksiyalar tekisligi bilan o'tkir burchak tashkil qilsa, bunday parallel proyeksiyalash qiyshiq burchakli burchakli deb aytiladi.

Agar proyeksiyalash yo'nalishi proyeksiyalar tekisligi bilan to'g'ri burchak tashkil qilsa, bunday parallel proyeksiyalash to'g'ri burchakli yoki orthogonal priyeksiyalash deyiladi. Bunday proyeksiyalashda proyeksiyalash yo'nalishi ko'ratilmaydi, chunki bir nuqtadan tekislikka faqat bitta perpendicular to'g'ri chiziq o'tkazish mumkin.

Figuraning parallel proyeksiyalashdagi tasviri asosan quyidagicha hosil qilinadi:

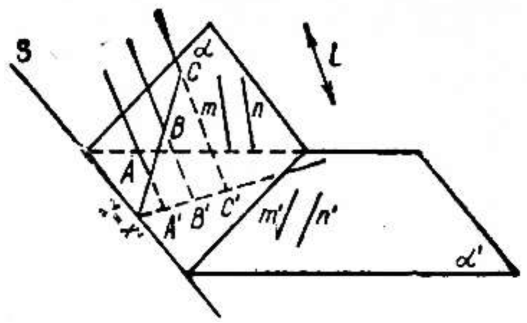
1) berilgan fazoviy figuraning barcha nuqtalari berilgan yo'nalishda α tekislikka proyeksiyalanadi;
2) proyeksiya tekisligida hosil qilingan figura o'xshash almashtiriladi.

Bu ikki qadamni bajargandan keyin berilgan fazoviy figuraning tasviri hosil etiladi. Bundan ko'riadiki, tasvirdagi har bir nuqta umuman olganda, originaldagi mos nuqtaning proyeksiyasi bo'lmaydi. Ikkinchi qadam bizga kerakli o'lchamlardagi chizmani hosil qiishga imkon beradi. Ba'zi hollarda ikkinchi qadamni bajarishga zaruriyat tug'ilmaydi, u holda F' figuraning α tekislikdagi proyeksiyasi uning tasviri bo'ladi. Umuman aytganda, ikkinchi qadam ishning mohiyatini o'zgartirmaydi.

Parallel proyeksiyalash usuli hosil qilingan tasvir to'g'ri, ya'ni originalga munosib va yetarlicha ko'rgazmalidir. Bunday tasvir, markaziy proyeksiyalash usuli bilan hosi qilingan tasvirga nisbatan soddaroq yasaladi. Shuning uchun maktabda o'qitiladigan geometriya kursi bo'yicha tasvirni yasashda parallel proyeksiyalash usulidan foydalaniladi.

Ikki tekislikning perspektiv-affin mosligi.

s to'g'ri chiziq bo'yicha kesishuvchi ikkita α', α tekisliklar va bu tekisliklarni kesuvchi l yo'nalish berilgan bo'lsin. Parallel proyeksiyalash usuli bilan α', α tekisliklar nuqtalari orasida bir qiymatli moslik o'rnatamiz(3-chizma). Bunday moslikni perspektiv-affin mosligi yoki jinsdosh moslik deyiladi. Bu moslikda ixtiyoriy ikkita mos A', A nuqtalarni birlashtiruvchito'g'ri chiziqlar l yo'nalishga parallel bo'ladi.



3-chizma.

Endi perspektiv-affin mosligining xossalari bilan tanishib chiqaylik. (Buni parallel proyeksiyalash xossalari deb ham yuritiladi.)

Avvalo, ikkita tekislikning kesishgan chizig'ining har bir nuqtasi bunday moslikda o'z-o'ziga o'tishini eslatib o'tishimiz lozim.

1. Perspektiv-affin mosligida kollinear nuqtalar yana kollinear nuqtalarga

o’tadi.

Agar A nuqta a to’g’ri chiziqda yotsa, bu nuqta va shu to’g’ri chiziq bir-biriga *insident* deyiladi. Nuqta va tekislikning, to’g’ri chiziq va tekislikning insidentligi shunga o’xshash aniqlanadi.

2. Perspektiv-affin mosligida nuqta va to’g’ri chiziqing insidentligi saqlanadi.

3. Perspektiv-afin mosligida parallel to’g’ri chiziqlar yana parallel to’g’ri chiziqlarga o’tadi(3-chizma).

4. Perspektiv-affin moslikda uchta nuqtaning oddiy nisbati saqlanadi.

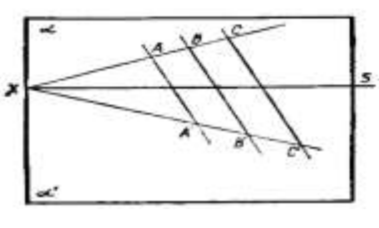
Haqiqatan ham, α tekislikdagi kollinear uchta A, B, C nuqtaga α' tekislikda A', B', C' nuqtalar mos keladi. AA', BB', CC' proyeksiyalovchi to’g’ri chiziqlar parallel, shuning uchun ushbu tenglikni tuza olamiz

$$\frac{AC}{CB} = \frac{A'C'}{C'B'}, \quad (ABC) = (A'B'C').$$

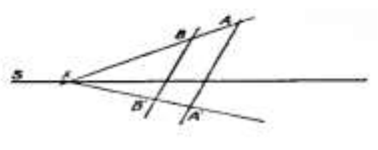
Tekislikdagi perspektiv-affin almashtirish.

Tekisliklardan birini s to’g’ri chiziq atrifida aylantiraylik, aylanayotgan tekislik qanday vaziyatda bo’lishidan qat’iy nazar proyeksiyalovchi AA', BB', CC' to’g’ri chiziqlar parallelligicha qolaveradi. Jumladan α, α' tekisliklar ustma-ust tushgan holda ham (4-chizma). Bu holda α tekislikni α' tekislikka perspektiv akslantirishni bitta $\alpha = \alpha'$ tekislik nuqtalarini o’z-o’ziga akslantirish deb qarash mumkin. Bunday perspektiv-affin akslantirishni perspektiv-affin almashtirish deb aytiladi. s to’g’ri chiziqni almashtirish o’qi deb yuritiladi. Bu hol tasvirlash matodlarini o’rganishda muhim ahamiyatga ega.

Tekislikni perspektiv-affin almashtirish bir juft mos (A, A') nuqtalarning va s o’qning berilishi bilan to’la aniqlanadi.



4-chizma.



5-chizma.

Haqiqatan ham, bizga bir juft (A, A') nuqtalar va s o'q berilgan bo'lsin $(A \notin s,\ A' \notin s)$. U holda tekislikka qarashli ixtiyoriy B nuqtaning obrazini yasashimiz mumkin(5-chizma). Buning uchun AB to'g'ri chiziqni o'tkazib, uning s to'g'ri chiziq bilan kesishgan nuqtasini X bilan belgilaylik, AX to'g'ri chiziqning obrazi $A'X$ to'g'ri chiziqdir. Izlangan nuqta $A'X$ va B nuqta orqali AA' to'g'ri chizig'iga parallel qilib o'tkazilgan g to'g'ri chiziqda yotishi shart. Demak, B nuqtaga jinsdosh B' nuqta g to'g'ri chiziq bilan $A'X$ to'g'ri chiziqning kesishgan nuqtasi bo'ladi. Ikkita jinsdosh figuralardan har birini ikkinchisidan parallel proyeksiyaash usuli bilan hosil qilingan deb qarash mumkin.

Pozitsion masala. To'liq va noto'liq tasvirlar.

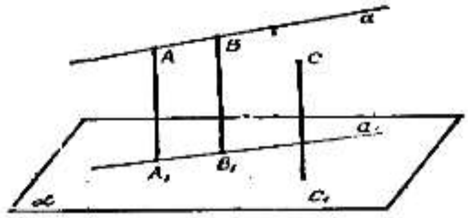
Asosiy tekislik usuli.

Fazoviy figuralarning tasvirini yasash uchun N. F. Chetveruxin tomonidan taklif qilingan asosiy tekislik usuli deb ataluvchi metoddan foydalanamiz. Bu metod aksonometrik proyeksiyalash usulining bir turidir.

Bu metod bilan tanishib chiqaylik. Fazoda birorta α' tekislikni ajratib, uni asosiy tekislik deb ataymiz. Biror yo'nalishni tanlab olib, $A', B', C', \ldots$ fazo nuqtalarini α' tekislikka parallel proyeksiyalab, α' tekislikda $A_1', B_1', C_1', \ldots$ nuqtalarni hosil qilamiz. Bu proyeksiyalash ichki proyeksiyalash deb ataladi (ichki proyeksiyalash markaziy proyeksiyalash ham bo'lishi mumkin).

Keyin rasm (tasvir) tekisligi deb ataluvchi tekislik olib, $A', B', C', \ldots$ proyeksiyalarini, $A'A_1', B'B_1', C'C_1', \ldots$ proyeksiyalovchi to'g'ri chiziqlarni biror yo'nalish bo'yicha biror tekislikka parallel proyeksiyalaymiz.

Natijada, rasm tekisligida 8-chizmada ko'rsatilganidek tasvirlarga ega bo'lamiz. Bu yerda α tekislik α' tekislikning, $A, B, C, \ldots$ nuqtalar $A', B', C', \ldots$ nuqtalarning, $A_1, B_1, C_1, \ldots$ nuqtalar $A_1', B_1', C_1', \ldots$ nuqtalarning, $AA_1, BB_1, CC_1, \ldots$ to'g'ri chiziqlar proyeksiyalovchi $A'A_1', B'B_1', C'C_1', \ldots$ to'g'ri chiziqlarning tasvirlaridir.



8-chizma.

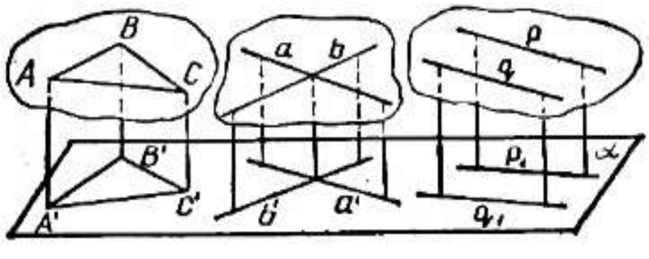
$A_1, B_1, C_1, ...$ nuqtalarning $A, B, C, ...$ nuqtalarning ikkinchi proyeksiyalari (tasvirlari) deb aytiladi, ba'zi hollarda $A_1, B_1, C_1, ...$ nuqtalarni $A, B, C, ...$ nuqtalarning asoslari deb ham aytiladi.

Agar fazodagi birorta A' nuqtaning rasm tekisligidagi tasviri A va uning ikkinchi proyeksiyasi A_1 berilsa, nuqta rasm tekisligida berilgan deb aytiladi va $A(A_1)$ ko'rinishda yoziladi.

Fazoda ikkita nuqtasi bilan aniqlangan $A'B' = a'$ to'g'ri chiziq berilgan bo'lsin.

Agar rasm tekisligida $A(A)$ va $B(B)$ $(AB = a,\ A_1B_1 = a_1)$ lar berilgan bo'lsa, to'g'ri chiziq rasm tekisligida berilgan deb aytiladi va $a(a_1)$ ko'rinishda yoziladi.

Ixtiyoriy tekislik bir to'g'ri chiziqda yotmaydiga uchta A', B', C' nuqtalarning berilishi bilan, yoki kesishadigan a', b' to'g'ri chiziqlarning berilishi bilan, yoki parallel p', q' to'g'ri chiziqlarning berilishi bilan aniqlanadi $(p' \neq q')$ (9-chizma).

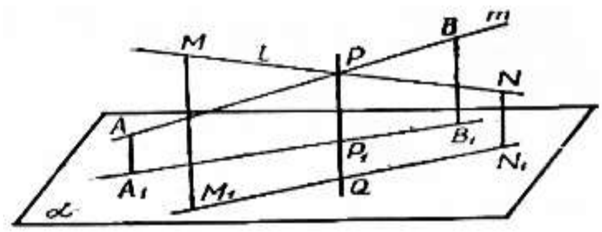


9-chizma.

Agar tekislikni aniqlovchi elementlarning rasm tekisligidagi tasvirlari va ikkinchi proyeksiyalari berilgan bo'lsa, tekislik rasm tekisligida berilgan deyiladi va $\beta(\beta_1)$ ko'rinishda yoziladi.

Agar p' va q' parallel bo'lsa, ularning p va q tasvirlari va ikkinchi proyeksiyalari p_1 va q_1 ham parallel bo'ladi (9-chizma).

Agar l' va m' to'g'ri chiziqlar ayqash bo'lsa, ularning tasviri 10-chizmada ko'rsatilganidek bo'ladi.



10-chizma.

Fazodagi F_1', F_2' figuralarning rasm tekisligida F_1, F_2 tasvirlari berilgan bo'lsin. F_1', F_2' figuralarning kesishish nuqtasining tasvirlarini yasash masalasi pozitsion masala deb aytiladi. Bunday masalalar asosiy tekislik yoki aksonometrik metod yordamida oson yechiladi.

Agar figuraning har bir nuqtasi rasm tekisligida berilgan bo'lsa, u holda bu figura tasvirini *to'liq tasvir* deb aytiladi. Aks holda *noto'liq tasvir* deyiladi.

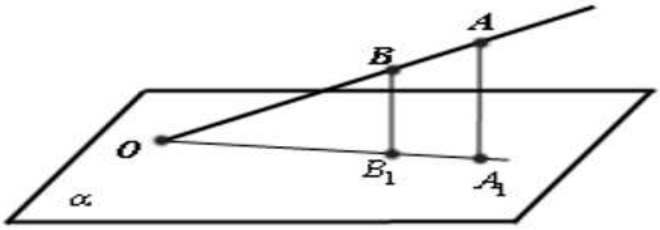
To'liq tasvir ta'rifidan quyidagi natijalar kelib chiqadi:

1) yassi figuralarning tasviri hamma vaqt to'liq;
2) agar tasvirning hamma elementlari aniqlangan bo'lsa, tasvir to'liq bo'ladi;
3) to'liq tasvirning ixtiyoriy ikki tekisligini asosiy tekisliklar deb olish mumkin.

Endi to'liq tasvirlarda pozitsion masalalarni yechishga o'tamiz:

1-masala. AB to'g'ri chiziqning α tekislik bilan kesishgan nuqtasini yasang.

AB to'g'ri chiziq bilan uning A_1B_1 proyeksiyasi kesishgan O nuqta izlangan nuqta bo'ladi (11-chizma).



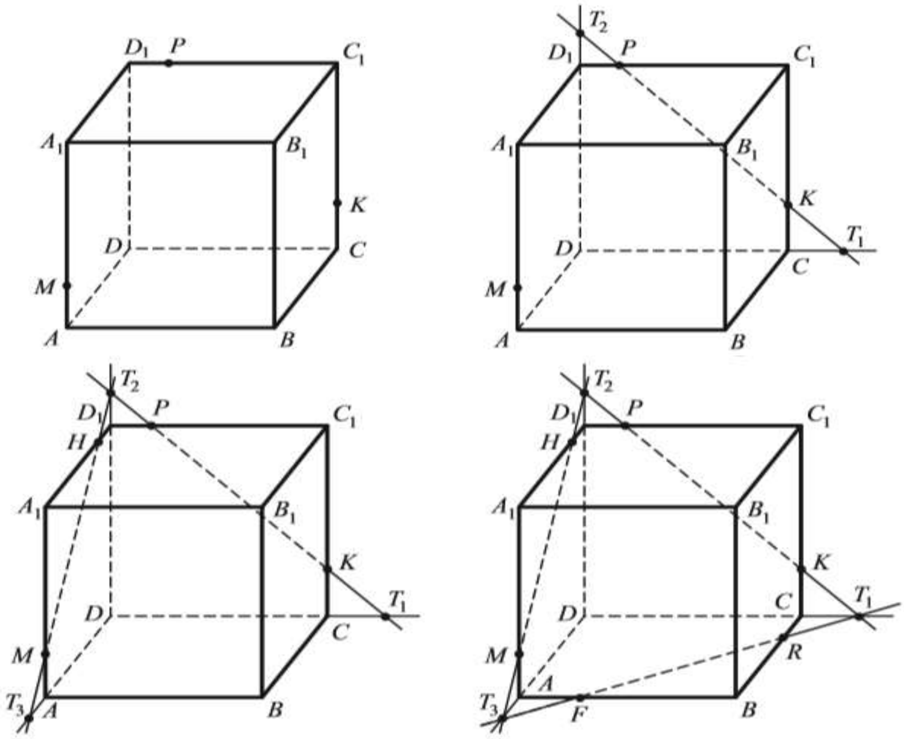
11-chizma.

Kubning turli kesimlarini yasash.

Kubning kesimlarini yasashni quyidagi masalalar yordamida ko'rib chiqamiz:

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$– kub berilgan. Uning qirralarida yotuvchi M, P, K nuqtalaridan o'tuvchi kesimini yasang.

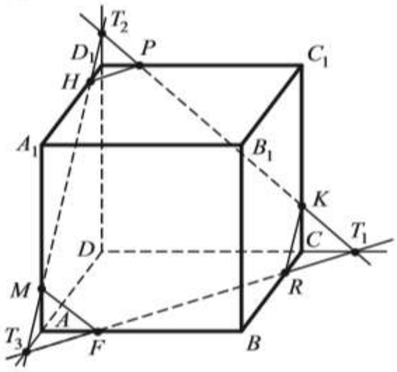
Yechim. Kubning A_1A, D_1C_1, C_1C qirralarida M, P, K nuqtalarni belgilab olamiz. Kubning bitta yog'ida yotgan P va K nuqtalari orqali to'g'ri chiziq o'tkazamiz.



Bu to'g'ri chiziq DC to'g'ri chiziq bilan T_1 nuqtada, DD_1 to'g'ri chiziq bilan T_2 nuqtada kesishadi. M va T_2 nuqtalar bitta tekislikka tegishli nuqtalar, ular orqali to'g'ri chiziq o'tkazamiz. MT_2 to'g'ri chiziq A_1D_1 bilan H nuqtada, AD to'g'ri chiziq bilan T_3 nuqtada kesishadi. T_1 va T_3 nuqtalar bitta tekislikka tegishli nuqtalardir. Ular orqali to'g'ri chiziq o'tkazamiz. T_1T_3 to'g'ri chiziq AB bilan F nuqtada, BC bilan R nuqtada kesishadi. KR, FM va HP nuqtalarni birlashtirsak biz izlagan $MHPKRF$ kesim hosil bo'ladi. Yuqorida bajargan ishlarimiz ketma-ketligini quyidagicha yozish mumkin:

1. PK;
2. $PK \cap DC = T_1$;
3. $PK \cap DD_1 = T_2$;
4. T_2M;
8. $T_1T_3 \cap AB = F$;
9. $T_1T_3 \cap BC = R$;
10. KR;
11. FM;

5. $T_2M \cap A_1D_1 = H$;
6. $T_2M \cap AD = T_3$;
7. T_1T_3;
12. HP;
13. $MHPKRF$.

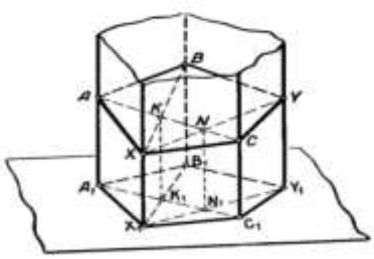


Prizmalarda kesimlar yasash.

Prizmalarning turli kesimlarini yasashni quyidagi masalalar yordamida ko'rib chiqamiz:

1. Besh burchakli prizma bilan prizma qirralarida yotuvchi A, B, C nuqtalar orqali aniqlangan tekislik kesimini yasang.

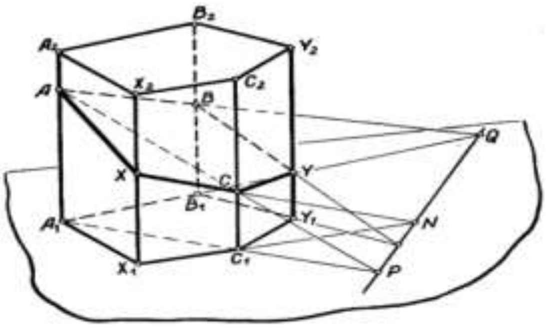
Birinchi usul. Asosiy tekislik sifatida prizma asosini, ichki proyeksiyalash deb prizma qirralariga parallel proyeksiyalashni olsak, shu bilan tasvirning to'liqligi ta'minlanadi. Kesimni yasash uchun ABC tekislik bilan prizma ikki qirrasining kesishgan X, Y nuqtalarini toppish kifoya (36-chizma). Bu nuqtalarning ikkinchi proyeksiyalari (asosari) X_1, Y_1 nuqtalardan iborat. A_1C_1, B_1X_1 to'g'ri chiziqlar K_1 nuqtada kesishadi. K_1 nuqtadan proyeksiyalovchi to'g'ri chiziq o'tkazsak, bu to'g'ri chiziq ABC tekislikni K nuqtada kesadi, BK to'g'ri chiziq prizma qirrasi bilan izlanagan X nuqtada kesishadi. Shu usul bilan N nuqtani yasaymiz (chizmada ko'rsatilgan). XN to'g'ri chiziq prizma qirrasini izlangan Y nuqtada kesadi. Izlangan kesim – beshburchakdir.



Ikkinchi usul. Kesuvchi tekislikning asos tekisligidagi izidan (ya'ni kesishish chizig'idan) faoydalanib masalani yechish, ko'p hollarda kesim yasashni osonlashtiradi.

Ikkinchi masaladan foydalanib, kesuvchi tekislikning PQ izini topamiz (37-chizma). Prizmaning $X_1X_2C_2C_1$ yog'ining asos tekislikdagi X_1C_1 izi PQ to'g'ri chiziq bilan N nuqtada kesishadi. NC to'g'ri chiziq X_1X_2 qirra bilan izlangan X nuqtada kesishadi. Shunga o'xshash Y nuqtani ham topamiz.

Agar kesuvchi tekislikni aniqlovchi nuqtalarni prizma yoqlarida olsak, kesimni yasash ko'rib o'tilgan usullardan farq qilmaydi.



Nazorat savollari

1. Gilbert aksiomasida asosiy obyektlarni ayting.
2. Bog'lanish aksiomlari haqida ma'lumot bering.
3. Tartib aksiomalari haqida ayting.
4. Gilbert aksiomalar sistemasiga kiradigan aksiomalarni tavsiflang.
5. Bir kesma ikkinchi kesmaga kongurent bo'lish shartini ayting.
6. Kongurentlik aksiomalaridan kelib chiquvchi teoremalarni ayting
7. Absolyut geometriya aksiomlariga qaysi aksiomalar kiradi?
8. Absolyut geometriya teoremlarini ayting.
9. Lobachevskiy tekisligining asosiy obyektlarini tavsiflang.
10. Lobachevskiy aksiomasini ayting.
11. Lobachevskiy aksiomasidan kelib chiqadigan asosiy teoralarga qaysi teoremalar kiradi?
12. Lobachevskiy tekisligida parallel to'g'ri chiziqlar xossalarini sharhlang.
13. Lobachevskiy geometriyasi qanday qismlarga bo'linadi? Har bir qismga

tavsif bering.

14. Parallel to’g’ri chiziqlar haqidagi teoremani tavsiflang.

15. Lobachevskiy tekisligida parallel to’g’ri chiziqlar haqidagi teoremalarni ayting.

16. Evklidning V postulatiga ekvivalent teoremalarni keltiring.

1. Sirkul va chizg`ich yordamida yasash aksiomalarini ayting.

2. Masalada berilgan elementlarni ixtiyoriy tanlab olganda ham masala yechimga ega bo`ladimi, agar berilgan elementlar ixtiyoriy tanlab olinganda masala yechimga ega bo`lmasa, u holda qanqanday tanlab olganda masala yechimga ega bo`ladi, qanday hollarda yechimga ega bo`lmaydi?

3. Berilgan elementlar imkoniyati boricha tanlab olinganda masala nechta yechimga ega bo`ladi?

4. Yasashga doir masalalarni yechishdagi bosqichlari haqida ma’lumot bering

9. Yasashga doir masalalarni to`la yechish uchun qaysi savollarni oydinlashtirish kerak?

10. Konstruktiv masalalarni yechishning dastlabki tayyorlov bosqichi qaysi bosqich?

11. To’g’irlash metodining yasash metodidagi afzalliklari nimadan iborat?

IV. AMALIY MASHG‘ULOT MATERIALLARI

Mavzu: PEDAGOGIKA OTMDA MATEMATIK ANALIZ O‘QUV FANINING TEZAURUSI

Ishning maqsadi:

Pedagogika OTM “Matematik analiz” o‘quv fanining o‘quv tezaurusi. Talabaning matematik leksikonini shakllantirishda standart topshiriqlar va masalalar sistemasi

Amaliy mashg‘ulotning o‘tkazilishi:

1-mashg‘ulot. Pedagogika OTM “Matematik analiz” o‘quv fanining o‘quv tezaurusi.

Qaraladigan masala. Biror mavzuning o‘quv tezaurusini qurish va uni o‘rganish uchun zarur bo‘lan talaba leksikonini aniqlash

Namuna. **YAqinlashuvchi ketma-ketlik va uning xossalari, yaqinlashish prinsipi**

Matematik analiz fan dasturida mazkur modul bo‘yicha o‘quv tezaurusini quyidagicha yozishimiz mumkin:

1. Asosiy tushunchalar.

Sonli ketma-ketlik, letma-ketlikning hadi, ketma-ketlikning n-hadi, ketma-ketlikning umumiy hadi; ketma-ketlikning berilish usullari: analitik usul, rekurrent formula, grafik usul; ketma-ketlikning sonlar o‘qidagi geometrik tasviri; ketma-ketliklar ustida amallar: ketma-ketlikni songa ko‘paytirish, ketma-ketliklarni qo‘shish, ketma-ketliklarni ayirish, ketma-ketliklarni ko‘paytirish, ketma-ketlikni ikkinchi ketma-ketlikga bo‘lish; ketma-ketlik turlari, chegaralangan ketma-ketlik, yuqoridan chegaralangan ketma-ketlik, quyidan chegaralangan ketma-ketlik, chegaralanmagan ketma-ketlik; monoton ketma-ketlik, kamaymaydigan ketma-ketlik, o‘suvchi ketma-ketlik, o‘smaydigan ketma-ketlik, kamayuvchi ketma-ketlik; yaqinlashuvchi ketma-ketlik, nuqtaning atrofi, ketma-ketlikning limiti, “ε-n” til, limitga o‘tish amali, uzoqlashuvchi ketma-ketlik; cheksiz kichik ketma-ketlik, cheksiz katta ketma-ketlik; yaqinlashuvchi ketma-ketliklar ustida amallar; aniqmasliklar, aniqmasliklarni ochish, $\left(\frac{0}{0}\right)$, $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, $(\infty-\infty)$, $(0\cdot\infty)$, (1^{∞}); e soni, ikkinchi ajoyib limit; ichma-ich joylashgan segmentlar ketma-ketligi; qismiy ketma-ketlik, qismiy limit nuqta; fundamental ketma-ketlik.

2.1.Asosiy teoremalar:

limitning yagonligi;

yaqinlashuvchi ketma-ketlikning chegaralanganligi (yaqinlashuvchi ketma-ketliklar sinfi va chegaralangan ketma-ketliklar sinflari orasidagi munosabat);

tenglikda limitga o‘tish, tengsizlikda limitga o‘tish;

cheksiz kichik ketma-ketliklarning xossalari (yaqinlashuvchi ketma-ketliklar sinfining qism to‘plami (ideal));

yaqinlashuvchi ketma-ketliklar ustida amallar (ketma-ketliklar ustida arifmetik amallar va limitga o‘tish amali orasidagi aloqa);

yaqinlashuvchi va cheksiz kichik ketma-ketlik orasidagi munosabat;

cheksiz kichik va cheksiz katta ketma-ketliklar orasidagi munosabat;

cheksiz katta va chegaralangan ketma-ketlik ko‘paytmasi haqidagi teorema;

o‘suvchi (kamaymaydigan) yuqoridan chegaralangan ketma-ketlikning yaqinlashuvchi ekani, (o‘smaydigan) quyidan chegaralangan ketma-ketlikning yaqinlashuvchi ekani (monoton, chegaralangan va yaqinlashuvchi ketma-ketliklar sinflari orasidagi munosabat yoki chegaralangan ketma-ketliklar sinfida yaqinlashish alomati);

e-soni (ikkinchi ajoyib limit);

ichma-ich joylashgan segmentlar ketma-ketligi uchun yagona umumiy nuqtaning mavjudligi sharti;

chegaralangan ketma-ketlikdan yaqinlashuvchi ketma-ketlik ajratib olish mumkinligi;

ketma-ketlikning yaqinlashuvchi bo‘lishining zaruriy va etarli sharti.

2.2.Asosiy masalalar:

tushunchaga keltirish (berilgan ketma-ketlikni monotonlikka tekshirish; berilgan ketma-ketlikni chegaralanganlikka tekshirish; $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ tenglikni isbotlash; $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ tenglikni isbotlash)

o‘rganilgan asosiy teoremalardan foydalanib aniqmasliklarni ochish, limitlarni hisoblash, topish.

3.Asosiy masalalarga mos faoliyat usullariga namunalar:

№1. berilgan $\{x_n\}$ ketma-ketlikni monotonlikka tekshirish bo‘yicha faoliyat usuli tarkibidagi harakatlar quyidagilardan iborat: 1) $x_{n+1} - x_n$ ayirmani tuzish; 2) ayirmani soddalashtirish; 3) natijani nol bilan taqqoslash; 4) xulosalash.

№2. $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ tenglikni isbotlash bo‘yicha faoliyat usuli: 1) ketma-ketlik limiti ta’rifini yozish: $\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon)$: $\forall n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$;

2) ta’rifdagi $x_n$va a larning o‘rniga masala shartidagi qiymatlarni qo‘yish;

3) $x_n - a$ ifodani soddalashtirish;

4) $|x_n - a|$ modulning qiymatini yozish;

5) $|x_n - a| < \varepsilon$ tengsizlikni n ga nisbatan echish (odatda n>A tengsizlik hosil bo‘ladi);

6) ta’rifdagi n_0 sifatida [A]+1ni olish, bu erda [A]-A sonining butun qismi;

7) n_0 dan katta barcha n lar uchun $|x_n - a| < \varepsilon$ tengsizlikni bajarilishini ko‘rsatish;

8) xulosalash.

№3. $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ tenglikni isbotlash bo‘yicha faoliyat usuli: 1) E musbat son uchun $|x_n| > E$ tengsizlikni n ga nisbatan echish; 3) echimlar ichidan biror natural echimni tanlash va uni n_0 bilan belgilash; 4) n_0 dan katta barcha n lar uchun $|x_n| > E$ tengsizlikning bajarilishini ko‘rsatish; 5) xulosalash.

Limitlarni hisoblash va aniqmasliklarni ochishga oid masalalar tiplariga qarab, faoliyat usullarini shakllantirish mumkin: masalan, ushbu masalani qaraylik: $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-2n+3}{3n^2+n-1}$ limitni hisoblang. Bu masalani echish bo‘yicha faoliyat usuli quyidagi harakatlardan tashkil topgan: 1) kasrning surati va mahrajining limitlarini o‘rganish; 2) aniqmaslik mavjud yoki mavjudmasligini aniqlash; 3) aniqmaslik mavjud bo‘lmasa limitni topish, aniqmaslik mavjud bo‘lsa keyingi punktga o‘tish; 4) kasrning surati va mahrajini n ning eng katta darajasiga bo‘lish; 5) yaqinlashuvchi ketma-ketliklar haqidagi teoremalardan foydalanib, limitni hisoblash.

4. Talabaning mavzuni o‘zlashtirish uchun zarur bo‘lgan leksikoni:

Moslik, funksiya, monoton funksiya, grafik, sonlar o‘qi; arifmetik progressiya, geometrik progressiya, formula; to‘plam, yuqoridan (quyidan) chegaralangan to‘plam, chegaralangan to‘plam, chegaralanmagan to‘plam, ularning geometrik talqini; aniq yuqori (quyi) chegara; aniq yuqori (quyi) chegaralarning xossalari; kvantorlar; haqiqiy sonning absolyut qiymati, $|x_n-a|<\varepsilon$ tengsizlikning echimi, tengkuchli tengsizliklar; kasr sonning butun qismi.

2-mashg‘ulot. Talabaning matematik leksikonini shakllantirishda standart topshiriqlar va masalalar sistemasi.

Vazifa. 1) Biror mavzu asosida standart topshiriqlarni bajarish

1) Biror mavzu bo‘yicha yordamchi masalalar sistemasini qurish

Namuna. №1. Ketma-ketlikning barcha musbat hadlariga mos nomerlarini ko‘rsating:

a) $y_n=-n^2+7n-10$; b) $y_n=-n^2+10n-\frac{75}{4}$;

v) $y_n=\frac{123}{100-3n}$; g) $y_n=\frac{122-n^2}{6n-11}$.

№2. Ketma-ketlikning eng katta hadini toping:

a) $y_n=-2n^2+9n-7$; b) $y_n=-3n^2-18n+1$;

v) $y_n=\frac{3}{2n-5}$; g) $y_n=\frac{4}{n+1}$;

№3. $y_n = n^2 - 16n$ ketma-ketlik berilgan.

a) uning nechta manfiy hadi bor ekanini aniqlang;

b) 36 ga teng bo‘lgan ketma-ketlik hadining nomerini ko‘rsating.

v) ketma-ketlikning nechta hadi [-14;3] kesmaga tegishli ekanini aniqlang;

g) ketma-ketlikning eng kichik hadini toping.

№4. Ketma-ketlikni monotonlikka tekshiring:

a) $y_n = 7n - 3$; b) $y_n = \frac{10}{n+2}$; v) $y_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n$;

g) $y_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$; d) $y_n = \sqrt{5+n}$; e) $y_n = sin\frac{1}{n}$;

j) $y_n = n^2 + 6n - 7$; z) $y_n = n^2 - 6n - 7$;

№5. p parametrning qanday qiymatlarida $\{y_n\}$ ketma-ketlik o‘suvchi bo‘ladi:

a) $y_n = pn$; b) $y_n = 4 - \frac{p}{2}n$; v) $y_n = \frac{p+3}{4n}$; g) $y_n = \frac{4n^2-p}{n^2}$?

№6. p parametrning qanday qiymatlarida $\{y_n\}$ ketma-ketlik kamayuvchi bo‘ladi:

a) $y_n = \frac{p}{n^2+9}$; b) $y_n = \frac{p}{\cos\frac{1}{n}}$; v) $y_n = \frac{pn+3}{pn+4}$; g) $y_n = \frac{5n^2-p}{n^2}$?

№7. $\{x_n\}$ ketma-ketlikning hadlari musbat va o‘suvchi ekani ma’lum. Quyidagi ketma-ketlikni monotonlikka tekshiring:

a) $y_n = 3x_n + 2$; b) $y_n = 3 - 2x_n$;

v) $y_n = \frac{3}{x_n+2}$; g) $y_n = 3 \cdot (x_n)^2 + 2$.

№8. Agar ixtiyoriy n nomer uchun quyidagi shart bajarilsa, $\{y_n\}$ ketma-ketlikning o‘suvchi yoki kamayuvchi bo‘lishini aniqlang:

a) $y_{n+1} - y_n > 0$; b) $y_{n+1} - y_n < 0$;

v) $\frac{y_{n+1}}{y_n} > 1,\ y_n > 0$; g) $\frac{y_{n+1}}{y_n} < 1,\ y_n > 0$;

d) $\frac{y_{n+1}}{y_n} > 1,\ y_n < 0$; e) $\frac{y_{n+1}}{y_n} < 1,\ y_n < 0$.

№9. Ketma-ketlikning o‘suvchi ekanini isbotlang:

a) $y_n = n^3 + 2n$; b) $y_n = \frac{n^2}{n^2+4}$; v) $y_n = \frac{n+3}{n+4}$; g) $y_n = \frac{n^4+2n^2+2}{n^4+2n^2+7}$.

№10. Ketma-ketlikning kamayuvchi ekanini isbotlang:

a) $y_n = \frac{n+3}{n+1}$; b) $y_n = \frac{n^2+1}{n^2+4}$; v) $y_n = \frac{3}{n^3+4}$; g) $y_n = \frac{n^4+2n^2+12}{n^4+2n^2+5}$.

№11. Ketma-ketlikni chegaralanganlikka tekshiring:

a) $y_n = \frac{n^2}{n+1}$; b) $y_n = \frac{(-1)^n+1}{n+1}$;

v) $y_n = \frac{n^2-3}{n^2+1}$; g) $y_n = (cos\pi n + 1)\sqrt{n}$.

№12. p parametrning qanday qiymatlarida:

a) $y_n = \frac{2n+p}{3n+1}$ ketma-ketlik yuqoridan 1 soni bilan chegaralangan;

b) $y_n = \frac{5n+p}{3n+1}$ ketma-ketlik quyidan 1 soni bilan chegaralangan?

№13. $\{x_n\}$ ketma-ketlikning chegaralangan ekani ma’lum. Quyidagi ketma-ketlikni chegaralanganlikka tekshiring:

a) $y_n = -3x_n + 2$; b) $y_n = 3 + 2x_n^3$;

v) $y_n = \frac{x_n^2}{x_n^2+2}$; g) $y_n = x_n \cos 3n$.

№14. Quyidagi xossaga ega ketma-ketlikga misol keltiring:

a) o‘suvchi va yuqoridan chegaralanmagan;

b) o‘suvchi va yuqoridan chegaralangan;

v) kamayuvchi va quyidan chegaralangan;

g) kamayuvchi va quyidan chegaralanmagan;.

№15. Quyidagi xossaga ega ketma-ketlikga misol keltiring:

a) o‘suvchi va yuqoridan chegaralangan, barcha hadlari musbat;

b) kamayuvchi, barcha hadlari (0;4) intervalga tegishli;

v) o‘suvchi va faqat uchta manfiy hadga ega;

d) chegaralanmagan, ammo monoton emas.

Bu masalalarni echishdan maqsad talabalarning maktabda o‘rgangan tenglama va tengsizliklarni (№1 va №3) tatbiq etish №2 ni echishda grafikni yasashga oid shaxsiy tezaurusini yangi mazmun bilan boyidi. №№ 4-10 mashqlar ketma-ketlikning monotonlik xossasiga bag‘ishlangan. №4, v) va e) dan tashqari barcha punktlarda, ketma-ketlik maktab kursidan ma’lum bo‘lgan ba’zi bir funksiyalarning natural sonlar to‘plamiga cheklovdir, shuning uchun monotonlik haqida savolga javob berish uchun $[1;+\infty)$ nuridagi mos keladigan funksiyani eslash kifoya; 3) punktda ketma-ketlik monoton bo‘lolmaydi, chunki u ishora navbatlashuvchi va 6) punkt propedevtik mazmunga ega- ketma-ketlik $y_1 = sin1$ dan boshlab yuqoridan birga intiladi va shuning uchun kamayib boradi. №5-misolda, aslida, maktabning standart funksiyalari berilgan (ikkita chiziqli va ikkita teskari proporsionallik), lekin masala shartida parametrning mavjudligi odatda o‘quvchilarga birmuncha salbiy ta’sir ko‘rsatadi. Ayni paytda parametrga bog‘liq masalalar bitiruvchilarga an’anaviy ravishda kirish test sinovlarida taklif etiladi, shuning uchun bizning fikrimizcha, bunday mashqlarni chetlab o‘tish mumkin emas. №6-da yana parametr mavjud, ammo ketma-ketliklar endi shunchalik sodda emas va agar birinchi ikkita punktda muammoning savoliga javob berish uchun maxrajning o‘zgarishlarini o‘rganish kerak bo‘lsa, 3) va 4) da esa avval ushbu kasrlarning butun qismini ajratish kerak bo‘ladi.

№7-masalada aniq analitik ifodaga ega bo‘lmagan ketma-ketlikni monotonlikga tekshirish talab etilgan (n-had uchun formula yo‘q) - bu ketma-ketlik xossalarini musbat songa ko‘paytirganda monotonlik xarakterini saqlab qolish va manfiy songa ko‘paytirganda monotonlik xarakterining o‘zgarishi, monoton ketma-ketlikni kvadratga ko‘tarish kabi va boshqa xossalardan foydalanadi (masalaning abstraktlik darajasi oshadi). Bundan tashqari, bu tasdiqlar ma’ruzada isbotlanmagan bo‘lsa ham, amaliy mashg‘ulotlarda ulardan intuitiv foydalanish, bizning fikrimizcha, juda maqbuldir. №8 mashqda monoton ketma-ketliklarning ba’zi umumiy xossalari berilgan, bu monotonlikni o‘rganishni tengsizlikni tekshirishga keltirishga, bu ba’zan masalani oddiyroq yo‘l bilan echishga imkon beradi. Ushbu masalalar, garchi u erda avvalgi usullardan foydalanish mumkin bo‘lsa ham, №9 va 10-masalalarni echish uchun ko‘rsatma vazifasini bajaradi,. №11-13 masalalar chegaralangan ketma-ketlik xossalariga bag‘ishlangan. CHegaralanganlikni tekshirish uchun ba’zida quyidagi aniq faktdan foydalanish qulay bo‘ladi: agar ketma-ketlik monoton o‘suvchi (kamayuvchi) bo‘lsa, u quyidan (yuqoridan) birinchi hadi bilan chegaralangan bo‘ladi. SHunday qilib, № 11 (a, v) ketma-ketliklarning monoton o‘sishini isbotlash mumkin, bu ularning quyidan chegaralanganligini anglatadi (bu holda, ularning monotonligini ($\forall n \in N \;\; y_{n+1} - y_n > 0$) shartni teshirish orqali aniqlashimiz mumkin). YUqoridan cheklanganlikka kelsak, № 11 (a) ketma-ketlik o‘suvchi, chegaralanmagan $\left(\frac{n^2}{n+1} = n - 1 + \frac{1}{n+1}\right)$ №11 (v) ketma-ketlikning barcha hadlari birdan kichik $\left(\frac{n^2-2}{n^2+1} = 1 - \frac{3}{n^2+1}\right)$.

Xuddi shu masalaning b) va g) bandlarida ketma-ketliklar monoton emas - ularning toq nomerli hadlari nolga teng, shu bilan birga b) da ketma-ketlikning juft nomerli hadlari chegaralanmagan holda o‘sadi; g) da ketma-ketlikning juft nomerdagi hadlari kamayadi va nolga yaqinlashadi, shuning uchun birinchi ketma-ketlik faqat quyidan, ikkinchisi esa ham yuqoridan, ham quyidan chegaralangan. №12 masalada echish uchun ham ketma-ketliklarning monotonligidan foydalaniladi, ammo parametrning har xil qiymatlari uchun bu monotonlik turli xarakterga ega bo‘lishi mumkin.

Birinchi ketma-ketlikning kamayishi, ikkinchisining o‘sishini va ko‘rsatilgan chegaralar (1 ga teng) u_1 ga teng bo‘lishini taxmin qilishi kerak.

Mavzu: OLIY TA’LIMDA ABSTRAKT ALGEBRANING BOSHLANG‘ICH KURSI

Ishning maqsadi: Algebraik amal va uning turini aniqlash. Gruppa, xalqa, maydon v.b. algebralarni qurish. Algebralarlar gomomorfizmi turini aniqlash. Matematikaning turli bo‘limlarida abstrakt algebralarning qo‘llanilishiga misollar keltirish.

Amaliy mashg‘ulotning o‘tkazilishi: har bir tinglovchi amaliy topshiriqlarni hal etish orqali oliy ta'lim matematika fanlarida algebralarning o'rnini aniqlashtiradi.

Amaliy mashg'ulotlar topshiriqlari:

Quyidagi to'plamlarni multiplikativ gruppa tashkil etishini isbotlang:

1. $G = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in R, a^2 + b^2 > 0\}$.
2. $G = \{a + bi\sqrt{2} \mid a, b \in R, a^2 + b^2 > 0\}$.
3. $G = \{7^z \mid z \in Z\}$.
4. $G = \{11^z \mid z \in Z\}$.

Quyidagilarni additiv gruppa tashkil etishini isbotlang:

5. $G = G = \{a + b\sqrt{7} \mid a, b \in Z\}$.
6. $G = \{a - bi\sqrt{2} \mid a, b \in Q\}$.
7. $G = \{\frac{a}{5^k} \mid a \in Z, k \in N\}$.
8. $G = \{\frac{a}{2^k} \mid a \in Z, k \in N\}$.

Quyidagi to'plamlarni halqa tashkil etishini isbotlang:

9. $G = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in R\}$.
10. $K = \{\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \mid a, b \in 3Z\}$
11. $K = \{\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \mid a, b \in Z\}$

Quyidagi to'plamlarni maydon tashkil etishini isbotlang:

12. $F = \{\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \mid a, b \in R\}$.
13. $F = \{a + bi \mid a, b \in R \wedge i^2 = -1\}$.
14. . $F = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in R\}$.
15. $F = Z_5$.
16. $F = Z_7$.

Quyidagi algebralar orasida izomorfizm o'rnating:

17. $< \{3^z \mid z \in Z\}; \bullet, ^{-1}, \mathbf{1} > \wedge < \{5^z \mid z \in Z\}; \bullet, ^{-1}, \mathbf{1} >$.
18. $< \{2^z \mid z \in Z\}; \bullet, ^{-1}, \mathbf{1} > \wedge < Z; +, -, 0 >$.
19. $< Z; +, -, 0 > \wedge < 2Z; +, -, \mathbf{0} >$.
20. $< Z; +, -, 0 > \wedge < 3Z; +, -, \mathbf{0} >$.
21. $< \{a + bi \mid a, b \in R \wedge i^2 = -1\}; +, -, 0 > \wedge < R^2; +, -, \mathbf{0} >$.
22. $< Z; +, -, 0 > \wedge < Z_2, +, -, \mathbf{0} >$

23. $< \{ 2^z | z \in Z \};\ \bullet, ^{-1}, \mathbf{1} > \ \wedge\ < \{ 3^z\ | z \in Z \};\ \bullet, ^{-1}, \mathbf{1} >.$

24. $< \{ \begin{bmatrix} a & -3b \\ b & a \end{bmatrix} |a,b \in Q, \};\ +, -, \mathbf{0} > \wedge\ < \{ \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} |a,b \in Q \};\ +, -, \mathbf{0} >$

25. $< \{ 2^z | z \in Z \};\ \bullet, ^{-1}, \mathbf{1} > \ \wedge\ < \{ a^z | z \in Z \};\ \bullet, ^{-1}, \mathbf{1} >$.

Mavzu: OTMDA GEOMETRIYA MAZMUNINI TAKOMILLASHTIRISH MASALALARI

Ishning maqsadi: Evklid va noevklid geometriyalarning qiyosiy tahlili, noevklid geometriyalarga oid ilmiy tadqiqotlar, tekislikda va fazoda geometrik yasashlar kompetensiyalarini rivojlantirish.

Amaliy mashg'ulotlarning o'tkazilishi: har bir tinglovchi amaliy topshiriqlarni hal etadi

Amaliy mashg'ulotlar topshiriqlari namunalari:

1. Ikki to'g'ri chiziqning har biri ma'lum yo'nalishdagi bitta to'g'ri chiziqqa parallel bo'lsa, ular ham shu yo'nalishda o'zaro parallel bo'lishini ko'rsating.

2. Teng bo'lgan tomonlar orasidagi burchaklari teng bo'lmagan ikki uchburchak haqidagi teoremani sharhlang

3. Lobachevskiy tekisligida har qanday to'rtburchak ichki burchaklari yig'indisi 360^o dan kichik bo'lib, bu son har xil to'rtburchaklar uchun har xildir. Bu teoremaning isbotini tavsiflang.

4. Bir kateti va ikkinchi katetiga o`tkazilgan medianasi berilgan to`g`ri burchakli uchburchak yasang.

5. Uch tomoni berilgan uchburchak yasang.

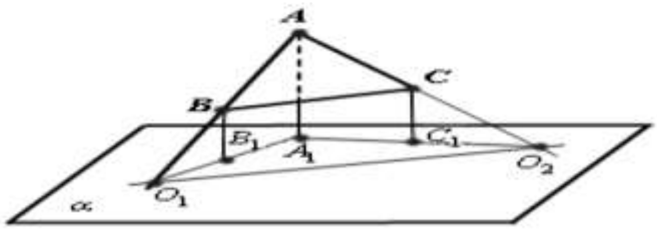
6. Parallelogramni uning bir uchidan chiquvchi ikki to`g`ri chiziq bilan uchiga tengdosh bo`lakka bo`ling.

7. Besh burchakli prizma bilan prizma qirralarida yotuvchi A, B, C nuqtalar orqali aniqlangan tekislik kesimini yasang.

Amaliy mashg'ulotlar topshiriqlarini bajarish namunalari

1-masala. ABC tekislikning α tekislik bilan kesishgan chizig'ini (ABC tekislikning α tekislikdagi izini) yasang.

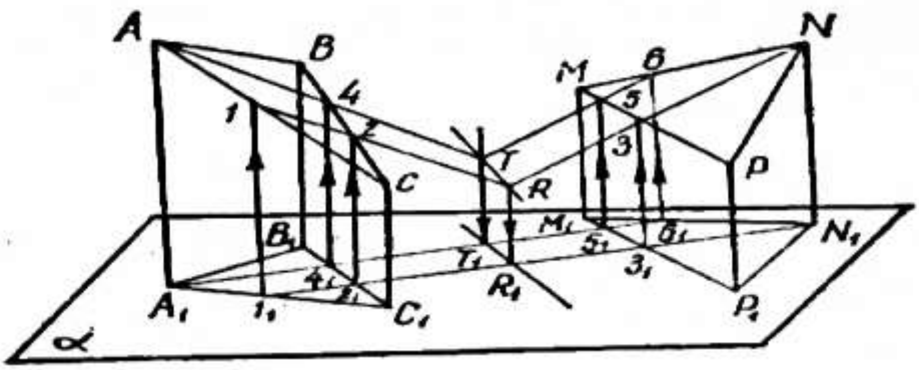
Bu masalani yechish birinchi masalaga keltiriladi. $AB \cap A_1B_1 = O_1$, $AC \cap A_1C_1 = O_2$ nuqtalar yasab, izlangan O_1O_2 to'g'ri chiziqni topamiz (12-chizma).



12-chizma.

2-masala. ABC va MNP tekisliklarning kesishgan chizig'ini yasang.

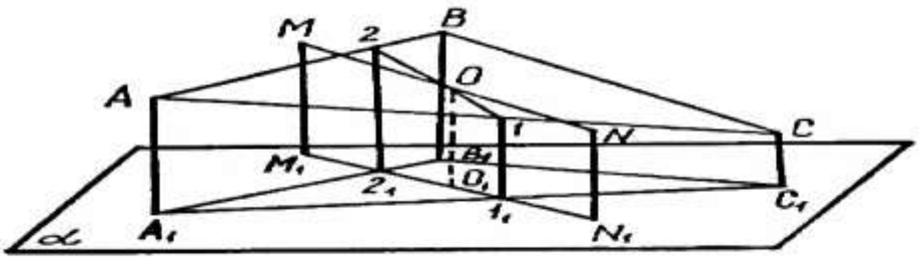
Tekisliklarning kesishgan to'g'ri chizig'ini yasash uchun bu tekisliklarga tegishi ikkita T, R nuqtalarni yasash yetarli. Asosiy tekislikdagi A_1 nuqta orqali B_1C_1, M_1P_1, M_1N_1 to'g'ri chiziqlarni mos ravishda 4_1, 5_1, 6_1 nuqtalarda kesadigan to'g'ri chiziqni o'tkazamiz. Bu nuqtalar mos ravishda BC, MP, MN to'g'ri chiziqlarda yotuvchi 4, 5, 6 nuqtalarning asoslaridir. $A4$ va 56 to'g'ri chiziqlar T nuqtada kesishadi (chunki u to'g'ri chiziqlar AA_1 va 66_1 to'g'ri chiziqlar yordamida aniqlangan tekislikda yotadi). T nuqta ABC va MNP tekisliklarning har ikkalasida yotadi. Shunga o'xshash R nuqtani topamiz. TR izlangan to'g'ri chiziq (13-chizma).



13-chizma.

3-masala. ABC tekislik bilan MN to'g'ri chiziqning kesishish nuqtasini yasang.

1_1, 2_2 – nuqtalar mos ravishda AB, AC to'g'ri chiziqlarda yotuvchi 1 va 2 nuqtalarning asoslari. MN va 1 2 to'g'ri chiziqlar MM_1, NN_1 to'g'ri chiziqlar bilan aniqlangan proyeksiyalovchi tekislikda yotadi, ular izlangan O nuqtada kesishadi. Uning asosi O_1 nuqta M_1N_1 to'g'ri chiziqda yotadi (14-chizma).



14-chizma.

Shunday qilib barcha pozitsion masalalar bir qiymatli yechiladi. Rasm tekisligida fazoviy figura elementlarining tasviri va ikkinchi proyeksiyasining (asosining) berilishi sharti yetarli shart bo'lib qolmasdan, zaruriy shart ham ekanligini ko'rish qiyin emas.

4-masala. $ABCDA'B'C'D'$ kubning AA', BB' va CC' yon qirralarida yotuvchi MNP nuqtalari berilgan. Kubning MNP tekislik bilan kesishishi natijasida hosil bo'ladigan kesimni yasang.

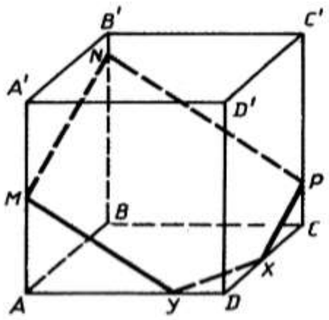
Yechim. 1. MN; 6. $T_1T_2 \cap AD = Y$;

2. $MN \cap AB = T_1$; 7. $T_1T_2 \cap DC = X$;

3. NP; 8. MY;

4. $NP \cap BC = T_2$; 9. PX;

5. T_1T_2; 10. $MNPXY$.



V. GLOSSARIY

Aksioma - isbot talab qilmaydigan fikr bo‘lib, matematika fani asosida bunday boshlang‘ich fikrlar – aksiomalarga tayanilgan holda ish ko‘riladi.

Analogiya-taqqoslanayotgan ob’ektlarning xususiy xossalari (belgilari) o‘xshashligiga asoslangan tasdiq bo‘lib tahlil qilish natijasida hosil qilinadi.

Matemátika *(qad. yunon. μᾰθημᾰτικά ; μάθημα — bilim, fan)* aniq mantiqiy mushohadalarga asoslangan bilimlar haqidagi fan. Dastlabki ob’ekti sanoq bo‘lgani uchun ko‘pincha unga «hisob-kitob haqidagi fan» deb qaralgan. Bugungi matematikada hisoblashlar, hatto formulalar ustidagi amallar juda kichik o‘rin egallaydi. Matematika eng qadimiy fan sohasi bo‘lib, uzoq rivojlanish tarixini bosib o‘tgan va buning barobarida **«matematika nima?»** degan savolga javob ham o‘zgarib, chuqurlashib borgan. YUnonistonda matematika deganda geometriya tushunilgan. 9—13-asrlarda matematika tushunchasini algebra va trigonometriya kengaytirgan.

Nul / nol – lotincha nullum – «hech narsa».
1) musbat sonlar bilan manfiy sonlar chegarasidagi son. Asosiy xossalari:
a) a+0=a;
b) a-0=0;
v) ikki sonning ko‘paytmasi nolga teng bo‘lishi uchun ko‘paytuvchilardan kamida bittasi nolga teng bo‘lishi zarur;
2) o‘nli sanoq sistemasida yozilgan sonning biror xonasida birliklar olinmaga-nini ko‘rsatuvchi rakam;
3) fizikada biror asbob shkalasining bo‘limlari boshlanadigan nuqta.

Ordinata – lotincha ordinatum – «tartiblangan». Dekart koordinatalar tizimida nuqtaning ikkinchi koordinatasi, u harfi bilan belgilanadi. Termin nemis olimi G.Leybnis tomonidan 1694 yilda fanga kiritilgan.

Birlik vektor – yunoncha ortos – «to‘g‘ri». Uzunligi birga teng bo‘lgan vektor. Orta deb ham ataladi. Birlik vektorning Dekart o‘qlaridagi proeksiyalari uning tegishli o‘qlar bilan tashkil qilgan burchaklari kosinusiga teng. Terminni fanga ingliz olimi O.Xevisayd 1892 yilda kiritgan.

Parametr – grech.slovo parametros – «o‘lchaydigan». 1) matematik formula va ifodalarda qo‘llaniladigan kattalik. Parametr qiymatlari orqali biror to‘plam elementlari bir-biridan farqlanadi. 2) texnikada — texnologik jarayon, hodisa, tizim, texnik qurilma va boshqalarning biror xossasini ifodalaydigan kattalik. Masalan, mexanik tizimlarda massa, ishqalanish koeffisienti, inersiya momenti va h.k.

Planimetriya – lotincha planum – «tekislik» va metreo – «o‘lchayman». Evklid geometriyasining sohasi bo‘lib, unda ikki o‘lchamli, ya’ni bir tekislikka joylasha oladigan shakllar o‘rganiladi. Planimetriyada nuqta, to‘g‘ri chiziq, ko‘pburchaklar, aylana kabi geometrik tushunchalar va ular orasidagi munosabatlar ko‘riladi.

Masala – yunoncha primus – «birinchi». Sonlar bilan bog‘liq masalalar. Terminni yunon olimlari uylab topishgan.

Hosila – fransuzcha derivee. Differensial hisobning asosiy tushunchasi. U funksiya o‘zgarishi tezligini ifodalaydi. Terminni fransuz olimi J.Lagranj 1797 yilda fanga kiritgan.

Proeksiya – lotincha projectio – «oldinga irg‘itilgan». Biror shaklning tekislik (qog‘oz)ga tushirilgan tasviri.

Skalyar – lotincha scalaris – «pog‘onali». Nolga teng bo‘lmagan a va b vektorlar uzunliklari bilan ular orasidagi burchak ko‘paytmasiga teng miqdor. a va b vektorlarining Skalyar ko‘paytmasi ha yoki a kabi belgilanadi. Skalyar ko‘paytmasi ab=ab cosy formula yordamida aniqlanadi. Terminni irland olimi U.Gamilton 1843 yilda fanga kiritgan.

Stereometriya – yunoncha stereos – «qattiq», «fazoviy» va metreo – «o‘lchayman». Evklid geometriyasining sohasi bo‘lib, unda uch o‘lchamli, shakllar o‘rganiladi.

Teorema – yunoncha tereo – «tekshiraman». Aksiomalar asosida qat’iy mantiqiy mushohada bilan isbotlanadigan tasdiq. Macalan, geometriyada Pifagor teoremasi, algebrada Viet teoremasi.

Figura – lotincha figura – «tashqi ko‘rinish», «obraz». 1) muayyan narsa-buyumlarning tashki ko‘rinishi, shakli; 2) tekislikdagi nuqtalar to‘plami (chiziq, doira, burchak, kvadrat — yassi figuralar) yoki fazodagi nuqtalar to‘plami (konus, kub, piramida — fazoviy figuralar).

Formula – lotincha formula – «qoida», «me’yor». 1) har qanday qisqa ta’rif; 2) muayyan fikr, mulohaza yoki qonunning matematik belgilar orqali ifodasi.

Funksiya – lotincha functio – «bajarmoq», «amalga oshirmoq». Matematikaning eng muhim va umumiy tushunchalaridan biri. O‘zgaruvchi miqdorlar orasidagi bog‘lanishni ifodalaydi. Termin birinchi bor 1692-yilda nemis olimi G.Leybnis tomonidan ishlatilgan. Funksiyaga mos ***f(x)*** belgisini birinchi bor rus olimi L.Eyler 1734 yilda ishlatgan.

VI. FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO‘YXATI

I. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining asarlari:

1. Mirziyoev SH.M. Buyuk kelajagimizni mard va olijanob xalqimiz bilan birga quramiz. – T.: “O‘zbekiston”, 2017. – 488 b.
2. Mirziyoev SH.M. Milliy taraqqiyot yo‘limizni qat’iyat bilan davom ettirib, yangi bosqichga ko‘taramiz. 1-jild. – T.: “O‘zbekiston”, 2017. – 592 b.
3. Mirziyoev SH.M. Xalqimizning roziligi bizning faoliyatimizga berilgan eng oliy bahodir. 2-jild. –T.: “O‘zbekiston”, 2018. – 507 b.
4. Mirziyoev SH.M. Niyati ulug‘ xalqning ishi ham ulug‘, hayoti yorug‘ va kelajagi farovon bo‘ladi. 3-jild.– T.: “O‘zbekiston”, 2019. – 400 b.
5. Mirziyoev SH.M. Milliy tiklanishdan – milliy yuksalish sari. 4-jild.– T.: “O‘zbekiston”, 2020. – 400 b.

II. Normativ-huquqiy hujjatlar:

6. O‘zbekiston Respublikasining Konstitusiyasi.–T.:O‘zbekiston, 2023.
7. O‘zbekiston Respublikasining 2020 yil 23 sentyabrda qabul qilingan “Ta’lim to‘g‘risida”gi O‘RQ-637-sonli Qonuni.
8. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017 yil 7 fevral “O‘zbekiston Respublikasini yanada rivojlantirish bo‘yicha Harakatlar strategiyasi to‘g‘risida”gi 4947-sonli Farmoni.
9. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2018 yil 21 sentyabr “2019-2021 yillarda O‘zbekiston Respublikasini innovasion rivojlantirish strategiyasini tasdiqlash to‘g‘risida”gi PF-5544-sonli Farmoni.
10. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2019 yil 27 may “O‘zbekiston Respublikasida korrupsiyaga qarshi kurashish tizimini yanada takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi PF-5729-son Farmoni.
11. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2019 yil 27 avgust “Oliy ta’lim muassasalari rahbar va pedagog kadrlarining uzluksiz malakasini oshirish tizimini joriy etish to‘g‘risida”gi PF-5789-sonli Farmoni.
12. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2019 yil 8 oktyabr “O‘zbekiston Respublikasi oliy ta’lim tizimini 2030 yilgacha rivojlantirish konsepsiyasini tasdiqlash to‘g‘risida”gi PF-5847-sonli Farmoni.
13. O‘zbekiston Respublikasi Prezidenti SHavkat Mirziyoevning 2020 yil 25 yanvardagi Oliy Majlisga Murojaatnomasi.
14. O‘zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasining 2001 yil 16 avgustdagi “Oliy ta’limning davlat ta’lim standartlarini tasdiqlash to‘g‘risida”gi 343-sonli Qarori.
15. O‘zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasining 2015 yil 10

yanvardagi “Oliy ta’limning Davlat ta’lim standartlarini tasdiqlash to‘g‘risida”gi 2001 yil 16 avgustdagi “343-sonli qororiga o‘zgartirish va qo‘shimchalar kiritish haqida”gi 3-sonli qarori.

III. Maxsus adabiyotlar:

16. Aleksandra Veselovsky. Knowledge Base of Mathematics Teacher Educators: A Goals-Knowledge-Practice Approach. University of Illinois at Chicago, 2017.
17. Jim Hefferon. Lab Manual for Linear Algebra. Jim Hefferon Mathematics, Saint Michael’s College Colchester, Vermont USA 2019-Dec-25.
18. Vechtomov E.M., Sidorov V.V. Abstraktnaya algebra. Bazovыy kurs. Uchebnoe posobie. Kirov. «Raduga-Press», 2014.-260 st.
19. A History of Abstract Algebra: From Algebraic Equations to Modern Algebra https://www.pdfdrive.com/a-history-of-abstract-algebra-from-algebraic-equations-to-modern-algebra-d184663837.html
20. Audrey T. Abstract Algebra with Applications. Cambridge University Press. 2019. https://rutracker.org/forum/viewtopic.php?t=5894389
21. Yunusova D. v.b. Algebra va sonlar nazariyasi. Modul texnologiyasi asosida tayyorlangan misol va mashqlar to’plami I . O‘quv qo’llanma. T.: Innovatsiya-Ziyo, 2021y. 172 b.
22. Yunusova D. v.b. Algebra va sonlar nazariyasi. Modul texnologiyasi asosida tayyorlangan misol va mashqlar to’plami II . O‘quv qo’llanma. T.: Innovatsiya-Ziyo, 2022y. 166 b.
23. Adams, Robert A. (Robert Alexander), Calculus: a complete course. Textbooks. Christopher Essex. - 7th ed. Copyright @ 2010, 2006, 2003 Pearson Education Canada, a division of Pearson Canada Inc., Toronto, Ontario.-1077 p.
24. Calculus Early Transcendental. 8th education. James Stewart, 2016 (e-v)
25. Toshmetov O‘., Turgunbayev R., Saydamatov E., Madirimov M. Matematik analiz I-qism. T.: “Extremum-Press”, 2015. -408 b.
26. Turgunbayev R.M. Matematik analiz 1-qism. Darslik. T.: “Innovatsiya-ziyo”.2019, 340 b.
27. Veydt V.P. Formirovanie professionalnogo tezaurusa pedagoga: ot teorii k praktike. Monografiya / pod nauch. red. T.B. Grebenyuk. – Kaliningrad: Izd-vo Kaliningradskogo oblastnogo instituta razvitiya obrazovaniya, 2016 – 180 s.
28. Turgunbaev R.M. Matematik analizni tezaurusli yondashuv asosida o‘qitish (60110600-matematika va informatika bakalavriat ta’lim yo‘nalishi misolida). Monografiya. T. : “Nodirabegim”. 2022. -180b.
29. Turgunbayev R.M. Matematik analiz 1-qism. Darslik. T.:- “Innovatsiya-

ziyo”. 2019. 340 b.

30. Sovremennaya geometriya, Методы i prilojeniya, Tom 1, Dubrovin B.A., Novikov S.P., Fomenko A.T., 1998

31. Sovremennaya geometriya i eyo prilojeniya – 2019. Sbornik trudov. – Kazan: Izdatelstvo Kazanskogo universiteta, 2019. – 177 c https://kpfu.ru/portal/docs/F_954797646/GEOMETRY2019_5.pdf

32. Juan Gomes. Kogda pryamыe iskrivlyayutsya. Neevklidovы geometrii. Mir matematiki. 2014. https://bookshake.net/b/tom-4-kogda-pryamye-iskrivlyayutsya-neevklidovy-geometrii-zhuan-gomes.

33. Turgunbaev R.M. Matematik analizni o‘qitishning tashxislovchi maqsadlari va ularga mos masalalar sistemasi. Monografiya.–T.: “Innovatsiya-Ziyo”. 2020. 120 b.

IV. Internet saytlar:

1. http://edu.uz – O‘zbekiston Respublikasi Oliy va o‘rta maxsus ta’lim vazirligi.

2. http://lex.uz – O‘zbekiston Respublikasi Qonun hujjatlari ma’lumotlari milliy bazasi.

3. http://bimm.uz – Oliy ta’lim tizimi pedagog va rahbar kadrlarini qayta tayyorlash va ularning malakasini oshirishni tashkil etish Bosh ilmiy-metodik markazi.

4. http://ziyonet.uz – Ta’lim portali ZiyoNET.

5. http://natlib.uz – Alisher Navoiy nomidagi O‘zbekiston Milliy kutubxonasi.

6. http://www.math.usf.edu/~eclark/numtheory_links.html.

7. http://joshua.smcvt.edu/linearalgebra/- Jim Hefferon. linear algebra.

8. https://www.krugosvet.ru/enc/nauka_i_tehnika/matematika/ALGEBRA_ABSTRAKTNAYA.html

9. https://math.fandom.com/ru/

10. https://mipt.ru/education/chair/mathematics/upload/ff4/Umnov-AnGeom-i-LinAl-arph0duocc9.pdf

11. https://my-shop.ru/shop/catalogue/8323/sort/a/page/1.html