ОТРАСЛЕВОЙ ЦЕНТР ПЕРЕПОДГОТОВКИ И ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ КАДРОВ ПРИ ТАШКЕНТСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ ПЕДАГОГИЧЕСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

Актуальные проблемы и современные достижения математики

УЧЕБНОГО МОДУЛЯ

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС

TOSHKENT

Этот учебно-методический комплекс разработан по учебному модулю “Актуальные проблемы и современные достижения математики”. Он содержит рабочую программу модуля, материалы лекционных и практических занятий, список использованной литературы.

Данный учебно-методический комплекс предназначен для слушателей ПК по специальности - Методика обучения математики и разработан в соответствии утвержденной учебной программы модуля.

Составители: Профессор кафедры “Математика и методика ее преподавания”, д.п.н., профессор Д.И.Юнусова
Профессор кафедры “Общая математика”, к.ф.-м.н., профессор Р.М.Тургунбаев
Доцент кафедры “Общая математика”, к.ф.-м.н., доцент Д.Э.Давлетов

.

СОДЕРЖАНИЕ

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

I.1. Kirish

O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017-yil 7 fevraldagi PF-4947-sonli Farmoni bilan tasdiqlangan “2017-2021-yillarda O‘zbekiston Respublikasini rivojlantirishning beshta ustuvor yo‘nalishi bo‘yicha Harakatlar Strategiyasi”da milliy kadrlarning raqobatbardoshligi va umumjahon amaliyotiga asoslangan oliy ta’lim milliy tizimining sifati oshishiga, Bolonya jarayoni ishtirokchi mamlakatlari diplomlarini o‘zaro tan olishga, o‘qituvchi va talabalar bilan almashuv dasturlarini amalga oshirishga ko‘maklashuvchi 1999 yil 19-iyundagi Bolonya deklarasiyasiga qo‘shilish masalasini ko‘rib chiqish belgilab qo‘yilgan.

O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2019 yil 8 oktyabrdagi PF-5847-son Farmoni bilan tasdiqlangan “O‘zbekiston Respublikasi Oliy ta’lim tizimini 2030 yilgacha rivojlantirish konsepsiyasi”da xalqaro standartlar asosida yuqori malakali, kreativ va tizimli fikrlaydigan, mustaqil qaror qabul qila oladigan kadrlar tayyorlash, oliy ta’lim jarayonlariga raqamli texnologiyalar va zamonaviy o‘qitish usullarni joriy etish, oliy ta’lim muassasalarida ilmiy-tadqiqot ishlari natijadorligini oshirish, yoshlarni ilmiy faoliyatga keng jalb etish, ilm-fanning innovasion infratuzilmasini shakllantirish, oliy ta’lim muassasalarida o‘quv jarayonini bosqichma-bosqich kredit-modul tizimiga o‘tkazish, o‘quv jarayonida kompetensiyalarni kuchaytirishga qaratilgan metodika va texnologiyalarni joriy etish, o‘quv jarayonini amaliy ko‘nikmalarni shakllantirishga yo‘naltirish, pedagogik ta’lim yo‘nalishlari va mutaxassisliklarida tahsil olayotgan talabalarda ta’lim jarayonida zamonaviy pedagogik texnologiyalarni qo‘llash ko‘nikmalarini shakllantirish, yuqori malakali professional pedagog kadrlarni etkazib berish bo‘yicha aniq vazifalar belgilab berilgan.

Respublikada ta’lim tizimini mustahkamlash, uni zamon talablari bilan uyg‘unlashtirishga katta ahamiyat berilmoqda. Bunda mutaxassis kadrlarni tayyorlash, ta’lim va tarbiya berish tizimi islohatlar talablari bilan hamoxang bo‘lishi muhim ahamiyat kasb etadi. Zamon talablariga javob bera oladigan mutaxassis kadrlarni tayyorlash, Davlat talablari asosida ta’lim va uning barcha tarkibiy tuzilmalarini takomillashtirib borish oldimizda turgan dolzarb masalalardan biridir.

Ushbu dasturda oliy ta’lim matematika o‘qituvchisining maxsus ilmiy-nazariy kompetentligining nazariy asoslari: pedagogika OTMda matematik analiz o‘quv fanining tezaurusi, oliy ta’limda abstrakt algebraning boshlangich kursi, OTMda geometriya mazmunini takomillashtirish masalalarini nazarda tutuvchi mazmun bayon etilgan

I.2. Modulning maqsadi va vazifalari

Modulning maqsadi: qayta tayyorlash va malaka oshirish kursi tinglovchilarining maxsus ilmiy-nazariy kompetensiyalarini rivojlantirishga oid yangi bilimlar, ko‘nikmalar hamda malakalarini tarkib toptirishdan iborat.

Modulning vazifalari:

- oliy ta’lim matematika o‘qituvchisi maxsus kompetentligining nazariy asoslarini tahlil qilish;
- matematika o‘qituvchisining matematik analiz va unga turdosh fanlarga oid nazariy bilim, ko‘nikma va malakalarini rivojlantirish;
- matematika o‘qituvchisining algebra va unga turdosh fanlarga oid nazariy bilim, ko‘nikma va malakalarini rivojlantirish;
- matematika o‘qituvchisining geometriya va unga turdosh fanlarga oid nazariy bilim, ko‘nikma va malakalarini rivojlantirish;
- tinglovchilarda maxsus kasbiy kompetensiyalarini rivojlantirish troektoriyalarini ishlab chiqish va amalda qo‘llash ko‘nikmasi va malakalarini shakllantirish.

I.3. Modul bo‘yicha tinglovchilarning bilimi, ko‘nikmasi, malakasi va kompetensiyalariga qo‘yiladigan talablar

“Matematikaning dolzarb muammolari va zamonaviy yutuqlari” modulini o‘zlashtirish jarayonida:

Tinglovchi:

- fanning o‘quv tezaurusi
- talabaning leksikoni
- o‘quv tezaurusi tarkibi
- matematik analiz fani modullarining o‘quv tezaurusi
- matematik leksikonni shakllantirishda standart topshiriqlar va masalalar sistemasi
- algebraik amal
- algebra va uning turlari
- algebralarlar gomomorfizmi
- Evklid geometriyasining zamonaviy aksiomatikasi
- noevklidiy geometriyalar

haqidagi **bilimlarga ega bo‘lishi**;

- matematik analiz fani mavzusi (moduli) bo‘yicha
- o‘quv tezaurusini tavsiflash
- talabaning matematik leksikonini tavsiflash
- masalalar sistemasini tuzish
- abstrakt algebralarni tatbiq etish;
- algebralarni qiyosiy tahlil qilish;
- matematik ob’ektlarni algebra tashkil etishini asoslash;
- matematikaning turli bo‘limlarida abstrakt algebralarni qo‘llash;
- Evklid geometriyasining zamonaviy aksiomatikasi natijalaridan foydalanish;
- tekislikda va fazoda geometrik yasashlarga oid masalalarni tasniflash;
- oliy ta’lim matematika fanlari o‘quv mashg‘ulotlarini zamonaviy yondashuvlar asosida tashkil etish;
- talabalar bilish faoliyatini rivojlantiruvchi topshiriqlarni loyihalash;
- oliy ta’lim matematika fanlari mazmunini tizimli tahlil qilish;
- oliy ta’lim o‘quv mashg‘ulotini tizimli tahlil qilish **ko‘nikma va malakalarini egallashi;**

- matematika fani va ta’limi yutuqlarini oliy ta’lim matematika fanlarini o‘qitish jarayoniga joriy etish **kompetensiyasini egallashi lozim.**

I.4. Modulni tashkil etish va o‘tkazish bo‘yicha tavsiyalar

“Matematikaning dolzarb muammolari va zamonaviy yutuqlari” moduli ma’ruza va amaliy mashg‘ulotlar shaklida olib boriladi.

Kursni o‘qitish jarayonida ta’limning zamonaviy metodlari, axborot-kommunikasiya texnologiyalari qo‘llanilishi, shuningdek, ma’ruza darslarida zamonaviy kompyuter texnologiyalari yordamida taqdimot va elektron-didaktik texnologiyalarni;

- o‘tkaziladigan amaliy mashg‘ulotlarda texnik vositalardan, blis-so‘rovlar, aqliy hujum, guruhli fikrlash, kichik guruhlar bilan ishlash, va boshqa interfaol ta’lim metodlarini qo‘llash nazarda tutiladi.

I.5. Modulning o‘quv rejadagi boshqa modullar bilan bog‘liqligi va uzviyligi

«Matematikaning dolzarb muammolari va zamonaviy yutuqlari» moduli bo‘yicha mashg‘ulotlar o‘quv rejasidagi “Ta’lim jarayoniga raqamli texnologiyalarni joriy etish”, “Kasbiy kompetensiyalarni rivojlantirish”, “Talabalar bilimini baholash” hamda “Matematikani o‘qitishda innovasion yondashuvlar” kabi modullar bilan uzviy aloqadorlikda olib boriladi.

I.6. Modulning uslubiy jihatdan uzviy ketma-ketligi

Modul bo‘yicha ma’ruza va amaliy mashg‘ulotlar mazmuni mantiqiy izchillikda mavzuni nazariy hamda amaliy yoritishga yo‘naltirilgan. Mashg‘ulotlarda modulni o‘qitishda qo‘llash rejalashtirilgan metod va vositalar mavzu, mashg‘ulot shakli, o‘quv axborotiga mos tanlanadi va ularning izchilligiga e’tibor qaratiladi.

I.7. Modulning oliy ta’limdagi o‘rni

Modulni o‘zlashtirish orqali tinglovchilar OTMlarida matematik ta’lim va tarbiya jarayonlarini nazariy asoslarini o‘rganish, ularni tahlil etish, amalda qo‘llash va baholashga doir kasbiy kompetentlikka ega bo‘ladilar.

I.8.Modul bo‘yicha soatlar taqsimoti

№	Modul mavzulari	Auditoriya o‘quv yuklamasi		
		Jami	Nazariy	Amaliy mashg‘ ul
1.	Pedagogika OTMda matematik analiz o‘quv fanining tezaurusi	8	4	4
2.	Oliy ta’limda abstrakt algebraning boshlangich kursi	6	2	4
3.	OTMda geometriya mazmunini takomillashtirish masalalari	8	4	4
	Jami:	**22**	**10**	**12**

NAZARIY MASHG‘ULOTLAR MAZMUNI

1-MAVZU: PEDAGOGIKA OTMDA MATEMATIK ANALIZ O‘QUV FANINING TEZAURUSI (4 soat)

Tezaurus tushunchasi. O‘quv tezaurusi tarkibi va talabaning matematik leksikoni. Matematik analiz o‘quv fanining o‘quv tezaurusi. Talabaning matematik leksikonini shakllantirishda standart topshiriqlar va masalalar sistemasi.

2-MAVZU: OLIY TA’LIMDA ABSTRAKT ALGEBRANING BOSHLANGICH KURSI (2 soat)

Algebraik amal va uni aniqlash. Algebra va uning turlari. Algebralarlar gomomorfizmi. Matematikaning turli bo‘limlarida abstrakt algebralarning qo‘llanilishi.

3-MAVZU: OTMDA GEOMETRIYA MAZMUNINI TAKOMILLASHTIRISH MASALALARI (4 soat)

Evklid geometriyasining zamonaviy aksiomatikasi, Evklid va noevklid geometriyalarning qiyosiy tahlili, noevklid geometriyalari bo‘yicha ilmiy tadqiqotlar taxlili, tekislikda va fazoda geometrik yasashlar.

AMALIY MASHG‘ULOTLAR MAZMUNI

1-MAVZU: PEDAGOGIKA OTMDA MATEMATIK ANALIZ O‘QUV FANINING TEZAURUSI (4 soat)

Pedagogika OTM “Matematik analiz” o‘quv fanining o‘quv tezaurusi. Talabaning matematik leksikonini shakllantirishda standart topshiriqlar va masalalar sistemasi.

2-MAVZU: OLIY TA’LIMDA ABSTRAKT ALGEBRANING BOSHLANG‘ICH KURSI (4 soat)

Algebraik amal va uning turini aniqlash. Gruppa, xalqa, maydon v.b. algebralarni qurish. Algebralarlar gomomorfizmi turini aniqlash. Matematikaning turli bo‘limlarida abstrakt algebralarning qo‘llanilishini asoslash.

3-MAVZU: OTMDA GEOMETRIYA MAZMUNINI TAKOMILLASHTIRISH MASALALARI (4 soat)

Evklid va noevklid geometriyalarning qiyosiy tahlili, noevklid geometriyalarga oid ilmiy tadqiqotlar, tekislikda va fazoda geometrik yasashlar.

O‘QITISH SHAKLLARI

Mazkur modul bo‘yicha quyidagi o‘qitish shakllaridan foydalaniladi:

- ma’ruzalar, amaliy mashg‘ulotlar (ilmiy-nazariy ma’lumotlarni anglab olish, maxsus kompetensiyani takomillashtirish motivasiyasini rivojlantirish, nazariy bilimlarni mustahkamlash);
- davra suhbatlari (ko‘rilayotgan muammo echimlari bo‘yicha taklif berish qobiliyatini rivojlantirish, idrok qilish va mantiqiy xulosalar chiqarish);

- bahs va munozaralar (muammolar echimi bo‘yicha dalillar va asosli faktlarni taqdim qilish, muammolar echimini topish qobiliyatini rivojlantirish).
- trening mashg‘ulotlar (oliy ta’lim matematika fanlari o‘quv materiallarini takomillashtirish tajribasiga ega bo‘lish).

BAHOLASH MEZONI

“Oliy ta’lim matematika fanlari mazmunini ilmiy-nazariy masalalari” moduli bo‘yicha assisment (joriy nazorat) rejalashtirilmagan. Malaka oshirish kursini yakunlashdagi test nazoratlarida o‘quv rejadagi boshqa modullar qatorida mazkur modul yuzasidan test savollari bo‘yicha tinglovchilar bilimlari nazorat qilinadi va baholanadi.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

Тема №1: Тезаурус учебного предмета “Математический анализ” педагогических ВУУ.

1.1. Понятие тезауруса. Состав учебного тезауруса, математический лексикон студента. Учебнқй тезаурус курса математический анализ

План:

1. Понятия тезауруса, различнқе толкования
2. Состав учебного тезауруса, математический лексикон студента.
3. Учебный тезаурус курса математический анализ.

Слово «тезаурус» (the- auro-) имеет длительную историю: в Древней Греции оно обозначало «запас», «сокровище», «сокровищница», «клад». В общем смысле тезаурус понимался как накопление чего-либо. Если посмотреть на современное толкование слова в различных научных областях (лингвистике, культурологии, информатике, кибернетике, семиотике, педагогике и др.), то можно прийти к выводу о том, что исходное значение термина сохранилось до сих пор: тезаурус есть упорядоченное накопление слов, понятий, знаний и пр.

Однако, как это бывает с абсолютно всеми терминами, тезаурус расширил границы своего применения. Так, И. А. Воронцова, анализируя лексикографическую форму тезауруса, приходит к выводу, что тезаурус — это «сверхпонятие», которое, с одной стороны, отражает запас знаний человека о мире, с другой стороны, представляет собой систематический справочник, в котором отражены связи между понятиями. Таким образом, можно предположить, что тезаурус позволяет описать окружающую действительность (мир) с помощью языка.

К слову, Г.Г.Воробьев для определения термина «тезаурус» использовал как раз слово «мир» (а также понятия «картина мира», «языковая картина мира»): «...мир подростка, мир учителя, мир науки, мир искусства — это все тезаурусы».

Несмотря на тот факт, что исследователи по-разному понимают смысл понятия «тезаурус», большинство авторов сходятся во мнении, что тезаурус есть некоторая система понятий и семантических связей между ними.

1. *Значение термина «тезаурус» в лингвистике*

Лингвистика как наука о языке пользуется термином «тезаурус» в двух значениях.

Первый смысл относится к словарю, содержащему максимальное количество слов с возможными примерами их употребления. В настоящее время данное использование тезауруса применительно по большей части только в отношении мертвых языков (например, латинского) в связи с тем, что действующий («живой») язык является структурой динамичной, постоянной развивающейся и непрерывно пополняющейся новыми словами с разными смыслами. По этой причине составить словарь реально действующего языка не представляется возможным.

Второе значение связано с пониманием тезауруса как идеографического словаря, в котором понятия упорядочены по смыслам. Чаще всего лексические единицы в таком словаре связаны между собой семантическими отношениями (синонимическими, родовидовыми и т. д.). Однако составление полных идеографических словарей — задача также практически невыполнимая для современного языка, поскольку определение всех существующих связей какого-либо понятия осложняется разным толкованием смысла слов, входящих в его понятийное поле.

2. Значение термина «тезаурус» в информатике.

В информатике (науке занимающейся хранением, передачей, обработкой информации, в том числе с использованием компьютерной техники) тезаурус понимается как совокупность сведений, которыми распологает система или пользователь. По сути, речь идет об информационно-поисковом языке, с помощью которого решается задача установления соответствия между авторской терминологией (понятийным аппаратом носителя языка) и терминологией системы (понятиями и терминами, использующимися в системе документов информационного поиска).

3. Значение термина «тезаурус» в кибернетике.

Кибернетика и как информатика занимается изучением и развитием информации. Однако примерами кибернетических систем являются не только электронные вычислительные машины но и мозг млекопитающих(в том числе человека), а также социум, искусственный интеллект и т.п.

В кибернетике понятие тезауруса расширило свои границы: впервые тезаурус упоминается в значении «мир»- «мир ребенка», «мир взрослого»; «мир учащегося», «мир учителя». «Мир» - это то, что принадлежить субъекту, его мыслительная зрелость во взаимосвязи с личностными новообразованиями: представление о себе, о других людях, об окружающей действительности и др.

4. Значение термина «тезаурус» в гуманитарных науках.

Гуманитарные науки, такие как социология, культурология, антропология и др., в основе понимания термина «тезаурус» опирается на кибернетический смысл. Однако значение термина все-таки претерпевает некоторые изменения в понимания его существенных характеристик.

Так, речь идет о ментальных структурах, являющихся психическими образованиями отдельно взятого субъекта, позволяющими обеспечить возможность получения информации вовне. Ментальный опыт, присущий каждому человеку, определяет, таким образом, уровень интеллекта и качество личности, связанные с отбором поступающей информации с точки зрения ценностно-ориентационных структур.

Состав учебного тезауруса, математический лексикон студента.

Изучение различных трактовок понятия тезауруса в педагогике [1, 3, 5, 7] показывает использование понятий “предметного тезауруса”, “учебного тезауруса", "тезауруса студента". Однако в работах этих авторов содержание тезауруса студента и учебного тезауруса не сопоставляется. Предпологается, что они имеют схожее содержание.

Например, по мнению А.А.Мирошниченко, учебный тезаурус - это инструмент деятельности, включающий в себя все умения, все операции, которые нацелены на открытие новых знаний, это инструмент, помогающий студенту организовать, скорректировать, отрегулировать собственную деятельность, это инструмент, приводящий студента с наименьшими затратами сил и времени к определенным результатам. Учебный тезаурус включает в себя прежде всего дескрипторы - ключевые понятия и логические операции с данными понятиями. Быстрота приобретения новых знаний, способность ориентироваться в них, применять на практике находится в прямо пропорциональной зависимости от того, насколько совершенен учебный тезаурус обучающегося. Он определяет тезаурус специалиста как присвоенный человеком тезаурус учебной дисциплины, составляющий запас его знаний, умений, опыта, образов-ассоциаций, оценка соответствующей предметной области.

Л. И. Гурье определяет тезаурус в образовании как языковая среда, образованная совокупностью элементарных понятий (законов, теорий, методов, задач, научных фактов) и связей между ними (конкретизация, интерпретация, синхронизация и т. п.), а также совокупностью вхождения друг в друга структур: элементарные понятия, элементарные структуры их элементарных понятий и т. д.

Помимо термина личностный тезаурус, в научной литературе также используется термин лексикон. Лексикон – это в переводе с древнегреческого буквально означает «словарная книга». Лексикон – это набор слов которыми владеет человек, его словарный запас. Различают два вида словарного запаса: активный и пассивный. Активный словарный запас включает слова, которые человек использует в устной речи и письме. Пассивный словарный запас включает в себя слова, которые человек знает при чтении или на слух, но не использует их сам в устной речи и письме. Пассивный словарный запас обычно больше активного в несколько раз. Формирование активного профессионального словаря считается результатом профессиональной деятельности, тезауруса предмета.

Чем учебный тезаурус отличается от личностного тезауруса (лексикона) студента?

В работе [Тургунбаев Р.М. Об отношений между учебным тезаурусом и лексиконом студента (на узб.яз.)// Педагогическое мастерство. 2022, №1] описан состав учебного тезауруса на примере учебной дисциплины математический анализ, согласно которой учебный тезаурус изучаемой темы состоит из понятий, приёмов учебной и общематематической деятельности, основных задач и приёмов решения этих задач. Он представляет собой закрытую систему, которая зависит от квалификационных требований, учебных программ дисциплины.

А в работе [Тургунбаев Р.М. Учебный тезаурус дисциплины математический анализ и его значение (на узб.яз.)//Учитель и непрерывное образование. 2021 №1. 127-132б.] на основе анализа понятий «данные», «информация» и «знания», а также общепринятой DIKW модели (рис.1) было определено соотношение между учебным тезаурусом и лексиконом студента.

Мудрость (wisdom)
Знание (knowledge)
Информация (information)
Данные (data)

Рис.1. DIKW-модель (иерархическая связь между понятиями «данные», «информация», «знание» и «мудрость»)

Лексикон студента, относящийся к учебно-познавательной математической деятельности, называется его математическим лексиконом.

В математическом лексиконе студента можно выделить три компонента. Первый компонент связан с теоретическим составляющим учебного тезауруса, который включает в себя усвоение математических понятий, их определений и теорем, выражающих отношения между ними. Второй компонент непосредственно связан с математической деятельностью и характеризуется приобретением умений, опыта творческой деятельности. Третий компонент математического лексикона непосредственно связан с личностными качествами студента, характеризующиеся ценностным отношением студента к будущей профессии, и уровнем математической культуры.

Таким образом, математический лексикон студента можно определить следующим образом. Математический лексикон студента представляет собой открытую систему математических знаний, умений, навыков, опыта, ценностей и математической культуры студента, который является результатом непрерывного математического образования или самостоятельного обучения.

Из этого определения видно отличие учебного тезауруса от лексикона студента: учебный тезаурус представляет собой закрытую систему, которая зависит от квалификационных требований, учебных программ дисциплин, а лексикон студента – открытую систему.

Учебный тезаурус представляет собой совокупность данных. Эти данные путем обработки, интерпретации передаются как информация в виде текста (письменного, устного, визуального). Предпологается, что студент будет осваивать передаваемую информацию самостоятельно или в учебной деятельности с участием преподавателя, других студентов. В результате чего студент проиобретет знания, умения и навыки, опыт творческой работы, оценит их.

3. Учебный тезаурус курса математический анализ.

Ниже мы формируем тезаурус на примере темы «Множество действительных чисел и его свойства» дисциплины математического анализа. Конечно, формирование тезауруса зависит от того, как мы вводим действительные числа. Напомним, что в учебной программе дисциплины “математический анализ” направления бакалавриата 5110100-Математика и информатика понятие действительных чисел планировано ввести по теории Дедекинда, т.е. через понятия сечения множества рациональных чисел. Далее при составлении вышеупомянутого учебного тезауруса мы ограничимся описанием основных понятий, ключевых задач и приёмов деятельности по решению основных задач В литературе [1] приводятся общие приёмы учебной деятельности, общематематические приёмы учебной деятельности, которых можно применить и в случае высшего образования.

С учетом деятельностного подхода к обучению [12], мы считаем, что в содержание учебного тезауруса по математике, в частности учебной дисциплины математический анализ должны входить основные понятия учебной дисциплины - дескрипторы, а также приёмы учебной деятельности (общие приёмы учебной деятельности, общематематические приёмы учебной деятельности, приёмы учебной деятельности, характерные для отдельных разделов математики)., должна быть включена система основных задач по каждой теме и приёмы деятельности по решению основных задач.

Тезаурус по теме «Множество действительных чисел и его свойства».

1. Основные понятия: множество рациональных чисел; арифметические операции на множестве рациональных чисел; упорядоченность множества рациональных чисел; плотность множества рациональных чисел; представление рациональных чисел на числовой оси; отсутствие рационального числа, квадрат которого равно 2; сечение множества рациональных чисел; нижний класс; верхний класс; наибольший элемент нижнего класса; наименьший элемент верхнего класса; виды сечения; рациональное сечение; нерациональное сечение; действительное число; множество действительных чисел; множество иррациональных чисел; отношения «равно», «больше», «меньше» в множестве действительных чисел; упорядоченность множества действительных чисел; плотность множества действительных чисел; сечение множества действительных чисел; непрерывность множества действительных чисел; представление действительного числа десятичными дробями; бесконечная периодическая десятичная дробь, бесконечная непериодическая десятичная дробь.

2. Основные задачи:

1-задача. Докажите, что множество рациональных чисел замкнуто относительно арифметических операций.

2-задача. Докажите свойство упорядоченности множества рациональных чисел.

3-задача. Докажите свойства плотности множества рациональных чисел.

4-задача. Построите (с помощью циркуля и линейки) точку на числовой оси, соответствующую заданному рациональному числу.

5-задача. Докажите, что данное число не рационально.

6-задача. Постройте сечение, определяющее рациональное число.

7-задача. Постройте сечение, определяющее иррациональное число.

8-задача. Докажите, упорядоченность множество действительных чисел.

9-задача.. Докажите плотность множество действительных чисел.

10-задача. Докажите непрерывность множества действительных чисел.

3. Приёмы деятельности по решению основных задач: описываем приёмы деятельности с помощью действий входящих в этот приём. Задачи 1–3, а также задачи 8–10 решены (доказаны) в учебниках и учебных пособиях. Приёмы деятельности характеризуются действиями при проведении этого доказательства.

Например, действия в составе приёма деятельности по решению задачи 9 следующие:

1) Обозначать любые два неравных действительных числа через x и y; 2) Написать x и y через сечения множества рациональных чисел: $x = (A, B)$, $y = (C, D)$; 3) Предположить, что $x < y$; 4) Записать неравенство $x < y$ на языке сечении: $A \subset C$, $A \neq C$; 5) исходя из соотношении $A \subset C$, $A \neq C$, обосновать существование рационального числа r, которое принадлежит C, но не принадлежит A; 6) Обосновать, что $x < r$ (Рациональное число r не принадлежит классу A, а классу B, отсюда неравенство $x < r$); 7) Обосновать, что $r < y$

(рациональное число r принадлежит классу C, а не классу D, откуда $r < y$); 8) из 6 и 7 сделать заключение: $x < r < y$.

Теперь мы опишем прием деятельности по решению задачи 6. 1) все рациональные числа непревосходящие (меньше либо равно) рационального числа r объединить в множество A ($A = \{x; Q: x \leq r\}$); 2) включить все рациональные числа, большие, чем рациональное число r, в множество B ($B = \{x \in Q: x > r\}$); 3) записать пару (A, B); 4) Доказать, что множество A не пусто (показать рациональное число, принадлежащее множеству A); 5) обосновать, что множество B не пусто (показать рациональное число, принадлежащее множеству B); 6) показать, что $A \cup B = Q$ (показать, что каждое рациональное число принадлежит либо множеству A, либо множеству B); 7) Показать, что каждое рациональное число из множества A меньше каждого рационального числа из множества B ($x \in A \rightarrow x \leq r$; $y \in B \rightarrow r < y$; из которых $x < y$); 8) заключение.

Перед решением этой задачи студент должен освоить определение сечения на множестве рациональных чисел (то есть работать с определением, переносить методы работы в новую ситуацию, применять приёмы деятельности приведения под понятия).

Состав деятельности приведение объекта под понятия состоит из следующих действии [1, 184-185с.]:

1) вспомнить (повторить, прочитать) определение понятия;

2) проверить принадлежность данного объекта к указанному в определении родовому понятию ($x \in M$-?);

3) проверить наличие у данного объекта характеристических признаков (видовых отличий) данного понятия ($x \in B(x)$ -?); если при этом признаки понятия связаны союзом «и», то следует проверять их нужно все, если союзом «или», то хотя бы один из них;

4) сделать вывод о принадлежности данного объекта понятию ($x \in (A\,(x)$, или $x \notin A\,(x)$).

Чтобы сформировать и укрепить у студентов этот способ деятельности, целесообразно дать студентам дополнительные вспомогательные задачи. Например:

№1. Дайте определение сечения множества рациональных чисел. Как обозначается сечение?

№2. Пусть A - множество отрицательных рациональных чисел, а B - множество положительных рациональных чисел. Образует ли эта пара множеств сечение? Обосновать ответ.

№3. Пусть A = Z - множество целых чисел, а B = Q \ Z - остальные рациональные числа. Образует ли эта пара множеств сечение? Обосновать ответ.

№4. Пусть A - множество отрицательных рациональных чисел. Есть ли в этом множестве наибольший элемент (есть ли наибольшее отрицательное рациональное число? Наименьший элемент? Обоснуйте свой ответ.

№5. Пусть B - множество неотрицательных рациональных чисел. Существует ли на этом множестве наименьший элемент? А наибольший элемент?

№6. Пусть $A = \{r \in Q: r \leq 4\}$. Опишите множество A словесно.

№7. Пусть $A = \{r \in Q: r \leq 4 / 3\}$, пусть $B = \{r \in Q: r > 4/3\}$. Докажите, что эти множества образуют сечение. В этом случае говорять, что сечение (A, B) определяет число 4/3 (сечение первого типа).

Замечание. Сечение (A, B), где $A = \{r \in Q: r < 4/3\}$, $B = \{r \in Q: r \geq 4 / 3\}$, также определяет число 4/3 (сечение второго типа).

№8. Постройте сечения, определяющие следующие числа: а) 2; б) -1,5. Нарисуйте (изобразите) эти сечения на числовой оси.

4. Приёмы деятельности, специфичные для отдельных разделов математики, в нашем случае приёмы деятельности, специфичные для темы «Множества действительных чисел и его свойства», связаны с использованием следующего этапа абстракции - «языка сечений», понятия бесконечных десятичных дробей. Например, структура приёма деятельности для сравнения двух действительных чисел x и y выглядит следующим образом: 1) написать сечения, которые определяют x и y, x = (A, B), y = (C, D); 2) сравнить множества A и C; 3) сделать вывод (если A = C, то x = y; если A⊂C, то x <y; если A⊃C, то x> y).

1.2. Стандартные задания и система задач для формирования лексикона студента

1. Стандартные задания для формирования лексикона студента

Общематематические приемы деятельности, имеющие важное значение для формирования лексикона студента - составление схемы определения понятия, выделение множества объектов, составляющих понятие, построение схемы отношений между понятиями; создание руководств по решению определенного типа задач; выведение схемы доказательства теоремы; приёмы работы над математическим текстом (создание познавательной схемы)

Задания способствующие к формированию этих приёмов называются стандартными заданиями.

Например, поиск решения задачи – важнейшая часть работы с текстом задачи, обычно выполняется в устной форме, не опираясь на наглядные средства, то есть процесс умственной деятельности, осуществляемый студентами, скрыт. Различные поисковые схемы решения задач (в том числе таблицы) помогают визуализировать этот процесс, выявить и понять причины трудностей, с которыми сталкиваются студенты, и решить поставленную задачу.

Например, рассмотрим доказательство теоремы об ограниченности сходящейся последовательности.

Условие теоремы: последовательность $\{x_n\}$ сходится;
⇒Последовательность имеет конечный предел x_0;
⇒Для $\forall\varepsilon > 0$ существует такое натуральное число, что $n_0 = n_0(\varepsilon)$ такое, что при $\forall n > n_0$ выполняется неравенство $|x_n - x_0| < \varepsilon$;

⇒В окрестности точки x_0 лежат бесконечно много членов последовательности, и только конечные, не более n_0 членов лежат вне этой окружности.
⇒Число разностей $\lvert x_1 - x_0\rvert, \lvert x_2 - x_0\rvert, \ldots, \lvert x_{n_0} - x_0\rvert$ конечно;
⇒ $K = \max\left(\lvert x_1 - x_0\rvert, \lvert x_2 - x_0\rvert, \ldots, \lvert x_{n_0} - x_0\rvert,\ \varepsilon\right)$ существует;
⇒Для $\forall n \in N$ выполняются $\lvert x_n - x_0\rvert \le K$ или $-K + x_0 \le x_n \le K + x_0$;
⇒Существуют $-K + x_0 = m$ и $K + x_0 = M$, и $m \le x_n \le M$ выполняется для ∀n∈N, поэтому последовательность $\{x_n\}$ ограничена.

Эти стандартные задания рекомендуется использовать при консультировании студентов по выработке умения самостоятельной работы, подготовке самостоятельной работе, подготовке лекции или подготовке к практическим занятиям.

2. Система задач для формирования лексикона студента

Суть системы задач состоит в том что мы устанавливаем необходимое нам соответствие между лексиконом студента-первокурсника и частью предметного математического тезауруса. Заметим, что некоторые из предложенных задач могут быть использованы при применении интерактивных методов на лекционных занятиях, а некоторые могут быть использованы на практических занятиях как дополнение к задачам данных в традиционных сборниках задач.

№1. Начертите числовую ось, дайте определение числовой оси, какие понятия входят в определение?

№2. Расскажите, как можно с помощью линейки и циркуля разделить данный отрезок на равные а) две части; б) три части.

№3. Постройте на числовой оси точки, соответствующие числам 1; 3/2; 4/3; -2,3. Что можно сказать о расположения этих чисел относительно друг друга на числовой оси?

№4. Объясните значение словосочетаний «лежит между», «лежит слева», «лежит справа»;

№5. Сформулируйте алгоритм построения точки на числовой оси, соответствующей заданному рациональному числу. Единственен ли такой алгоритм?

Задачи 1-3 даны для повторения (активизация неактивного лексикона) лексикона студентов. В задаче 2 деления отрезка на равные три части специально в школе не рассматривается, создаётся проблемная ситуация для студента. Решением 5-ой задачи основывается на знание алгоритма построения точки соответствующей заданному произвольному рациональному числу. Здесь студент должен абстрагироваться от конкретных рациональных чисел.

№6. Напишите общий вид рационального числа. Как определяется множество рациональных чисел?

№7. Докажите, что множество рациональных чисел замкнуто относительно арифметических операций. Инструкция. Для этого покажите, что сумма, разность, произведение, деление (где делитель отличен от нуля) любых двух рациональных чисел является рациональным числом. Запишите это свойство в символической форме.

Студент со школьной скамьи знаком с определением рационального числа, возможностью записать каждое рациональное число в виде несократимой дроби, выполнять арифметические операции над рациональными числами. Но эти факты не были объектом запоминания, специального изучения. Целью приведенных выше задач 6 и 7 является специальное внедрение в лексикон студента нового понятия множество рациональных чисел, его обозначения; свойства этого множества - замкнутость множества рациональных чисел относительно арифметических операции. Не трудно заметить, что уровень абстракции усвоения повышается.

В школе ученики изучают числовые неравенства, свойства числовых неравенств. Но с понятием упорядоченности множества и свойством упорядоченности студенты знакомятся в курсе математического анализа. Для введения этих понятии и свойств могут быть использованы следующие задачи:

№8. Когда одно рациональное число называется меньше (больше, равно) чем другое? Дайте геометрическое толкование этих понятии.

№9. Докажите утверждение: для любых двух рациональных чисел r_1, r_2 имеет место только одно из соотношений $r_1 < r_2, r_1 > r_2, r_1 = r_2$.

№10. Докажите утверждение: пусть $r_1, r_2, r_3 \in Q$. если $r_1 < r_2, r_2 < r_3$, то $r_1 < r_3$. Дайте геометрическую интерпретацию этим утверждениям.

№11. Как можно определить отношения $\leq, \geq$? Докажите, что если $r_1 \leq r_2$ и $r_1 \geq r_2$, то $r_1 = r_2$.

Для изучения свойства плотности множества рациональных чисел предлагаем следующие задачи.

№12. Всегда ли существует третье целое число между двумя неравными целыми числами? Обоснуйте ответ.

№13 Пусть 2/3 и 3/4 - рациональные числа. Приведите пример рационального числа больше чем 2/3, но меньше чем 3/4 (они «лежат между ними»). Сколько существует таких рациональных чисел? Можно ли указать способ нахождения рационального числа, которое находится между заданными рациональными числами?

№14. Обобщите вышеупомянутую задачу для любых двух неравных рациональных чисел. Это свойство называется свойством плотности множества рациональных чисел.

№15. Если неотрицательное рациональное число меньше любого положительного рационального числа, то оно равно нулю. Докажите.

Решая задачу №5, студенты констатируют факт, что каждому рациональному числу на числовой оси соответствует определенная точка. Следующий вопрос можно использовать, для мотивации необходимости пополнения множества рациональных чисел:

№16. Выше мы отметили точку, соответствующую каждому рациональному числу. Это означает, что каждому рациональному числу соответствует ровно одна точка на числовой оси. Теперь, наоборот, соответствует ли каждой точке на числовой оси ровно одно рациональное число? Чтобы ответить на этот вопрос, мы делаем следующее: на числовой оси построим единичный отрезок, начало которого совпадает с началом координатной оси. Со второго конца отрезка построим перпендикуляр и с помощью циркуля на этом перпендикуляра отмерим единичный отрезок, начало которого совпадает с исходной точкой. Соединяем концы получившихся отрезков. В результате получим прямоугольный треугольник. С помощью циркуля на числовой оси с начала координат отмерим отрезок равный длине гипотенузы. Отметим второй конец этого отрезка через букву А. Квадрат длины этой гипотенузы равен 2 (теорема Пифагора). Соответствует ли рациональное число точке А? Напишите этот вопрос аналитически. (Существует ли несократимая дробь $\frac{p}{q}$ для которой $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$?)

Указание. Ответ: не существует. Предположите противное, то есть допустите, что «существует несократимая дробь $\frac{p}{q}$, для которой $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$» и получаете противоречие. Вспомогательная задача: квадрат четного числа четное число. Докажите это. Верно ли обратное?

№17. Из доказанного утверждения следует, что на числовой оси есть точки, не соответствующие рациональным числам. Точки, соответствующие рациональным числам, мы называем рациональными точками, остальные точки - нерациональными (иррациональными) точками. Приведите примеры точек на числовой оси, которые не являются рациональными.

Понятие действительного числа в курсе математического анализа вводится на основе теории Дедекинда. Центральное понятие этой теории – сечение множества рациональных чисел. Для укрепления и развития лексикона, сформированной на лекции, на практических занятиях можно рекомендовать следующие задачи.

№18. Дайте определение понятию «сечение множества рациональных чисел». Как определяется сечение?

№19. Пусть А - множество отрицательных рациональных чисел, а В - множество положительных рациональных чисел. Образует ли множества А и

В сечение? Обоснуйте ответ.

№20. Пусть $\text{А} = Z$ - множество целых чисел, а $\text{В} = Q \setminus Z$ - остальные рациональные числа. Образует ли множества А и В сечение? Обоснуйте ответ.

№21. Пусть А - множество отрицательных рациональных чисел. Существует ли на этом множестве наибольший элемент (Существует ли наибольшее отрицательное рациональное число). Обоснуйте свой ответ.

№22. Пусть В - множество неотрицательных рациональных чисел. Есть ли в этом множестве наименьший элемент? Какой элемент наибольший?

№23. Пусть $A = \{r \in Q : r \leq 4\}$. Опишите множество А словесно. Каким должно быть множество В, чтобы А и В образовали сечение?

№24. Пусть $A = \left\{r \in Q : r \leq \frac{4}{3}\right\}$, $B = \{r \in Q : r > \frac{4}{3}\}$. Докажите, что эти множества образуют сечение. В этом случае говорят, что сечение (А, В) определяет число 4/3 (сечение первого рода).

Замечание. Сечение $(A, \text{В})$ также определяет число $\frac{4}{3}$, где $A = \left\{r \in Q : r < \frac{4}{3}\right\}, B = \left\{r \in Q : r \geq \frac{4}{3}\right\}$ (сечение второго рода).

№25. Постройте сечения, определяющие следующие числа: а) 2; б) -1,5. Нарисуйте эти сечения на числовой оси.

№26. Предположим, что множество А состоит из отрицательных рациональных чисел, нуля и положительных рациональных чисел квадрат которых меньше 2, а множество В состоит из положительных рациональных чисел квадрат которых больше 2. а) Докажите, что множества А и В образуют сечение; б) Докажите, что в нижнем классе А нет самого большого (максимального) элемента (числа); с) Докажите, что верхний класс В не имеет наименьшего (минимального) элемента (числа). Говорят, что это сечение определяет $\sqrt{2}$. Такое сечение называется сечением третьего рода (иррациональным).

№27. Постройте сечения, определяющие следующие числа: а) $\sqrt{3}$; б) $\sqrt[3]{2}$; в) $-\sqrt{2}$.

Далее рациональное сечение (для определенности – сечения первого рода) отождествляется рациональным числом, а сечение третьего рода – иррациональным числом. Т.е. сечение множества рациональных чисел является моделью действительного числа.

Для изучения основных свойств множества действительных чисел используются данная модель или язык «сечений». Для преемственного определения арифметических операций над действительными числами, свойства множества действительных чисел, так чтобы эти операции и свойства совпадали с исходными операциями над рациональными числами и свойствами множества рациональных чисел, студентам можно порекомендовать следующую систему задач, которую можно рассматривать как небольшую локальную теорию:

№28. Малая локальная теория (описание свойств множества рациональных чисел на языке «сечений»). Пусть, $r \in Q$. Тогда $r = (A, B)$, где $A = \{x \in Q : x \leq r\}, B = \{x \in Q : r > x\}$, т.е. каждое рациональное число является сечением первого рода, и наоборот. В этом случае множество рациональных чисел состоит из множеств таких сечений.

28.1. Подумайте, как определить отношения «больше», «меньше», «равно» на языке «сечений». Нарисуйте на числовой оси.

28.2. Докажите свойства (плотность, упорядоченность) множества рациональных чисел на языке «сечений».

28.3. Как определить сложение (вычитание, умножение, деление) на языке «сечений»?

№29. Дайте определение иррациональному числу. Приведите примеры.

№30. Дайте определение действительного числа, множества действительных чисел. Как обозначается множество действительных чисел?

№31. Пусть $\alpha \in R$; $\beta \in R$. Тогда по определению $\alpha = (A, B)$, $\beta = (C, D)$, где $(A, B), (C, D)$ - сечения в множестве рациональных чисел. Дайте определение а) $\alpha = \beta$; ,б) $\alpha < \beta$; в) $\alpha \leq \beta$; г) $\alpha > \beta$; д) $\alpha \geq \beta$. Проиллюстрируйте на числовой оси. Можно ли упростить определение в частном случае, когда одно из чисел рациональное?

№32. Сформулируйте и докажите свойство плотности множества действительных чисел R.

№33. Сформулируйте и докажите свойство упорядоченности множества действительных чисел R.

№34. Объясните смысл теоремы Дедекинда, докажите теорему. Разделите доказательство теоремы на шаги, опишите его в виде блок-схемы. Как вы думаете, в чем заключается идея доказательства теоремы?

№35. Объясните, как определяются десятичные приближения действительного числа.

№36. Каждому действительному числу можно присвоить бесконечную десятичную дробь. Докажите, что любое конечное или периодическое бесконечное десятичное число представляет собой рациональное число.

№37. Какие из следующих бесконечных десятичных дробей являются рациональным числом: а) 2,13 (14); б) 2,76 (11); в) 0,4212121 ...; г) 0,1010010001 ...; д) 1,320320032 ...? Запишите рациональное число в виде обыкновенной дроби.

№38. Докажите, что следующая бесконечная десятичная дробь не является периодической: 0.1010010001 ....

№39. Объясните, как построить «иррациональную точку» на числовой оси.

Таким образом, для каждого действительного числа на числовой оси ставится одна точка, и наоборот. Такое соответствие называется взаимно однозначным (биекцией).

В курсе общеобразовательной математики учащиеся изучают понятие модуля, его геометрическую интерпретацию, методы решения уравнений и неравенств с модулями. Надо отметить, что свойства модуля в школе не доказываются. В курсе математического анализа изучаются понятие модуля действительного числа и его свойства. Для формирования понятия модуля и связанного с ним понятия, введение в лексикон студентов предметный тезаурус, связанный с модулем, можно осуществить с помощью следующих задач.

№40. Дайте определение модуля действительного числа, укажите его геометрическое значение. Можно ли назвать модуль действительного числа функцией? Укажите область определения и множество значений этой функции.

№41. Модуль рационального числа и его свойства изучались в школе. Можно ли обобщить эти свойства на множестве действительных чисел? Чем отличаются эти модули?

№42. Сформулируйте свойства модуля действительного числа, докажите их.

№43. Дайте определения основным числовым промежуткам (интервал, отрезок, полуинтервал, луч). Как они обозначаются? Нарисуйте их на числовой оси. Как вы думаете, что является их общим свойством (что их объединяет как промежутки)? Для каких промежутков всегда существует а) наибольший; б) наименьший элементы?

№44. Дайте определение окрестности точки, приведите примеры. Каково количество окрестности точки? Как она обозначается? Нарисуйте на числовой оси.

№45. а) Дайте определение ограниченному снизу (сверху) множеству. Дайте геометрическую интерпретацию. Приведите примеры. Какие из промежутков ограничены снизу, сверху? б) Дайте определение ограниченного множества, дайте геометрическую интерпретацию.

№46. Дайте определение нижней (верхней) границы. Каково количество нижних (верхних) границ?

№47. Студент определил ограниченное множество следующим образом: если для $\forall a \in E \ \exists m > 0$ такое, что $a \geq m$, то E называется ограниченным снизу. Прав ли студент? Обоснуйте ответ.

№48. Предположим, что а) E = [0; 2]; б) E = (0; 2). Найдите множество верхних границ этих множеств.

№49. Пусть E – ограниченное множество сверху. Множество всех его верхних границ обозначим через В. А множество остальных действительных чисел через А. Обоснуйте, что А и В образует сечение множества действительных чисел. Докажите, что в верхнем классе существует наименьший элемент.

№50. Дайте определение точной верхней (нижней) границы. Как она обозначается?

№51. Докажите теорему: если множество Е ограничено снизу, то существует точная нижняя граница множества Е.

№52. Объясните на примере, чем различаются понятия точной верхней границы и наибольшего элемента множества.

№53. Приведите пример неограниченного множества. Дайте определение неограниченного множества.

№54. Множество натуральных чисел неограниченно. Докажите.

№55. Объясните на примерах разницу между «неограниченными» и «бесконечными» множествами.

Некоторые из вышеперечисленных учебных вопросов кажутся простыми и очевидными, некоторые можно решить устно. Но, решая эти задачи, студенты активируют неактивную часть своего словарного запаса, связывая ее с новыми понятиями. То есть между лексиконом студента-первокурсника и предметным математическим тезаурусом устанавливается связь, происходит преобразование предметного тезауруса в личностный тезаурус студента, в результате этого достигается методическая цель - понимание базовых понятий математического анализа учащегося и расширяется его Лексикон. Достигается и другая цель построенной нами методики происходит освоение части профессионального математического тезауруса как системы научного знания. Предложенная система задач не претендует на полноту, она обладает свойствами, гибкости, дополнения, модификации в зависимости от учебных задач и конкретной академической группы. Было бы целесообразно включить в данную систему задачи, в которых рассматривалась: замкнутость/не замкнутость множества иррациональных чисел относительно арифметических операций; задачи, связанные с арифметическими операциями между рациональными и иррациональными числами. Задачи на доказательство утверждений с кванторами существования и общности, на построения отрицания таких утверждений с использованием универсальной знаковой системы мы считаем является естественным образовательным фоном математики современной общеобразовательной школы. В экспериментальной части наших исследований мы, в некоторых сильных группах, одновременно показываем стили мышления теоретической и прикладной, непрерывной и дискретной математики. Это очень важный «побочный» эффект изучения курса математического анализа, где воспитание инфинитезимального мышления сопрягается с дискретным математическим мышлением.

Тема №2: Начальный курс абстрактной алгебры в ВО

План:

1. Алгебраическая операция.
2. Алгебра.
3. Гомоморфизм алгебр.
4. Применение элементов абстрактной алгебры в разных разделах математики.

Общая алгебра (также *абстрактная алгебра*, *высшая алгебра*) — раздел математики, изучающий алгебраические системы (также иногда называемые алгебраическими структурами), такие как группы, кольца, поля, модули, решётки, а также отображения между такими структурами.

Нам известны различные операции:

• над числами: сложение, умножение, возведение в степень, ... ;

• над множествами: объединение, пересечение, ...;

• над высказываниями: конъюнкция, импликация, эквиваленция, ... Вывод: операции можно выполнять над объектами различной природы.

Определение. Алгебраической операцией на множестве X называется отображение $(x, y) \to z$, которое ставит в соответствие каждой упорядоченной паре элементов (x, y) этого множества третий элемент z этого же множества. Другими словами: алгебраическая операция на множестве X – это отображение декартова произведения $X \times X$ в X.

Определение. Частичной алгебраической операцией на множестве X называтся отображение некоторого подмножества P декартова произведения $X \times X$ в множество X. Множество P пар (x, y), которым соответствуют элементы $z \in X$, называется областью определения частичной алгебраической операции.

Определение. Если при некоторой алгебраической операции для каждой пары $(x, y) \in X \times X$ соответствующий элемент $z \in X$, то говорят, что множество X замкнуто относительно данной алгебраической операции.

Определение. Непустое множество X, на котором определена одна или несколько алгебраических операций и задано некоторое отношение P, называется алгебраической структурой.

Пример. Множество N с операциями сложения и умножения и с отношением «больше» является алгебраической структурой $A=(N, +, \times, >)$.

Основные свойства алгебраических операций

1. Алгебраическая операция *, заданная на множестве X, называется ассоциативной, если для любых трех элементов $a, b, c \in X$ выполняется равенство $(a * b) * c = a * (b * c)$.

2. Алгебраическая операция * , заданная на множестве X, называется коммутативной, если для любых двух элементов $a, b \in X$ выполняется равенство $a * b = b * a$.

3. Пусть на множестве X заданы две алгебраические операции * и #. Алгебраическая операция # называется дистрибутивной относительно алгебраической операции *, если для любых трех элементов $a, b, c \in X$

выполняется равенство $(a * b) \# c = (a \# c) * (b \# c)$ (дистрибутивность слева); $a \# (b * c) = (a \# b) * (a \# c)$ (дистрибутивность справа).

Определение. Элемент $e \in X$ называется нейтральным относительно алгебраической операции *, если для любого элемента $a \in X$ выполняется равенство $e * a = a * e = a$.

Определение. Если в множестве X существует нейтральный элемент относительно алгебраической операции *, то элемент $a^{-1} \in X$ называется симметричным к элементу $a \in X$, если выполняется равенство $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$.

Определение. Группой называется множество G, на котором определена одна алгебраическая операция *, для которой выполняются следующие требования (аксиомы группы):

1) операция * ассоциативная: $(a * b) * c = a * (b * c)$;

2) существует нейтральный элемент относительно операции *: $e * a = a * e = a$;

3) для каждого элемента $a \in G$ существует элемент a^{-1}, симметричный элементу a: $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$.

Определение. Группа G называется коммутативной, если алгебраическая операция * коммутативная.

Свойства группы

1. Нейтральный элемент в группе единственный.

2. Каждый элемент группы имеет единственный симметричный к нему элемент.

3. Симметричный к симметричному для элемента a элемент есть сам элемент a.

Определение. Кольцом называется множество A, на котором заданы две алгебраические операции * и #, если оно образует коммутативную группу относительно операции *, а операция # дистрибутивна относительно операции *.

Определение. Полем называется коммутативное и ассоциативное кольцо с единицей, в котором для каждого элемента $a \neq 0$ существует обратный элемент a^{-1}.

Основные классы алгебраических систем

Множество можно считать вырожденной алгебраической системой с пустым набором операций и отношений.

- Группоид — множество с одной бинарной операцией .
- Правая квазигруппа — группоид, в котором возможно правое деление, то есть уравнение xa=b имеет единственное решение для любых a и b.
- Квазигруппа — одновременно правая и левая квазигруппа.
- Лупа — квазигруппа с нейтральным элементом .
- Полугруппа — группоид, в котором умножение ассоциативно.
- Моноид — полугруппа с нейтральным элементом.
- Группа — моноид, в котором для каждого элемента a группы можно определить симметричный элемент.
- Абелева группа — группа, в которой операция коммутативна.

Кольцо — структура с двумя бинарными операциями (абелева группа по сложению с заданной второй ассоциативной бинарной операцией — умножением), в которой выполняется закон дистрибутивности.

- Коммутативное кольцо — кольцо с коммутативным умножением.
- Целостное кольцо — кольцо, в котором произведение двух ненулевых элементов не равно нулю.
- Тело — кольцо, в котором ненулевые элементы образуют группу по умножению.
- Поле — коммутативное кольцо, являющееся телом.
- Полукольцо — похоже на кольцо, но без обратимости сложения.

Алгебраической системой называется объект $\mathbf{A}=\langle A,O,R\rangle$, состоящий из непустого множества A, семейства O алгебраических операций и семейства R отношений, заданных на множестве A. Множество A называется носителем, или основным множеством, алгебраической системы $\mathbf{A}$, а его элементы – элементами этой системы.

Мощность $|A|$ множества A называется мощностью, или порядком, алгебраической системы **A**.

Алгебраическая система $\mathbf{A}=\langle A,O,R\rangle$ называется универсальной алгеброй, или алгеброй, если множество R основных отношений её является пустым, и моделью, или реляционной системой, если множество O основных операций её пустое.

Классическими алгебраическими системами являются группы, кольца, линейные пространства, линейные алгебры, линейно упорядоченные множества, линейно упорядоченные группы, линейно упорядоченные кольца, решётки и т. д.

Гомоморфизм (от др.-греч. ὁμός — равный, одинаковый и μορφή — вид, форма) — это морфизм в категории алгебраических систем, то есть отображение алгебраической системы **A**, сохраняющее основные операции и основные отношения.

Отображение называется гомоморфизмом групп если оно одну групповую операцию переводит в другую: то есть образ произведения равен произведению образов.

Понятие гомоморфизма как соотношение между парой алгебраических систем начало использоваться в работах немецкого математика Фробениуса, а обобщённое определение было сформулировано Эмми Нётер в 1929 году. Частными случаями гомоморфизма являются изоморфизм и автоморфизм

- **Гомоморфный образ** — образ математического объекта, имеющего структуру полугруппы, группы, кольца, алгебры при гомоморфном отображении. Иногда говорят и о гомоморфных образах других математических объектов, например, графов.
- **Ядро гомоморфизма**
  - для гомоморфизма абелевых групп (в частности, для колец, векторных пространств и т. д.) — прообраз нуля,
  - для общих групп — прообраз единицы.
- Мономорфизм — однозначный (инъективный) гомоморфизм

- Эпиморфизм — сюръективный гомоморфизм
- Биморфизм — взаимно однозначный (биективный) гомоморфизм
- Изоморфизм — гомоморфизм с наличием обратного гомоморфизма
- Эндоморфизм — гомоморфизм в само множество
- Автоморфизм — изоморфизм на само множество.

Тема №3: Задачи совершенствования содержания геометрии в педагогических ВУУ

3.1. Основные этапы истории развития геометрии. «Начала» Евклида. Проблема пятого постулата и ее решение. Акасиоматика Гильберта. Геометрия Лобачевского.

План:

1. Геометрия до Эвклида. Попытки доказательства 5-постулата
2. Система аксиом Гильберта
3. Аксиома Лобачевского
4. Прямые на плоскости Лобачевского
5. Аксиоматика Вейла

Современное понимание аксиоматического метода построения геометрии – результат длительного развития человеческой мысли.

Историю развития геометрии можно разделить на четыре основных периода, качественно отличающихся друг от друга.

Первый период – период возникновения геометрии как науки – начался в глубокой древности и протекал в Древнем Египте, Вавилоне, Древней Греции примерно до V века до н.э. Это период накопления геометрических знаний, общих правил решения геометрических задач.

Содержание двух египетских папирусов (период 2000-1700 лет до н.э.), дошедших до наших дней, дает следующую картину египетской геометрии. Египтяне умели определять площадь прямоугольника, треугольника и трапеции, притом тем же способом, как они определяются и теперь. Площадь круга они принимали равной площади квадрата, сторона которого равняется $8/9$ диаметра, что соответствует приближенному значению $\pi \approx 3{,}1605$. Египтяне знали, что углы прямоугольного треугольника определяются отношением катетов, знали даже правильную формулу нахождения объема усеченной пирамиды, основание которой квадрат.

Вавилоняне ничуть не уступали египтянам в области геометрии. Более того, многие вопросы они решали способом, содержащим зачатки алгебры.

Развитие геометрии в Греции (VII-III век до н.э.) связано с философскими школами Фалеса, Пифагора, Демокрита, Платона, Евдокса. К III веку до н.э. геометрия в греческих философских школах достигла высокой ступени абстрактности, была оторвана от практических задач. Лишь со времен Архимеда (287-212 гг. до н.э.), под влиянием возросших требований жизни, математика получает прикладное направление.

Накопление обильного фактического материала привело к необходимости его систематизации, приведения в стройную логическую систему.

Второй период – период оформления геометрии в самостоятельную математическую науку, которая развивается в логической последовательности.

За решение задачи систематизации геометрических знаний, как указывает Прокл, принимались Гиппократ Хиосский, Леон, Федий Магнезийский, Гермотим Колофонский и др. Однако, их произведения были забыты, когда появилось сочинение «Начала» Евклида, в котором наиболее полно для того времени решена задача систематического изложения геометрии.

В течение многих веков «Начала» Евклида были единственной книгой, по которой изучалась геометрия. С 1482 года она выдержала более 500 печатных изданий на всех языках мира.

«Начала» состоят из тринадцати книг. Каждая книга начинается определением всех терминов, которые появляются впервые.

В книге I рассматриваются основные свойства треугольников, прямоугольников, параллелограммов и производится сравнение их площадей. Заканчивается книга Пифагора теоремой. В книге II излагается так называемая геометрическая алгебра, т. е. строится геометрический аппарат для решения задач, сводящихся к квадратным уравнениям (алгебраическая символика в «Н.» Е. отсутствует). В книге III рассматриваются свойства круга, его касательных и хорд (эти проблемы были исследованы Гиппократом Хиосским во 2-й половине 5 в. до н. э.), в книге IV — правильные многоугольники. В книге V даётся общая теория отношений величин, созданная Евдоксом Книдским*;* её можно рассматривать как прообраз теории действительных чисел, разработанной только во 2-й половине 19 в. Общая теория отношений является основой учения о подобии (книга VI) и метода исчерпывания (книга VII), также восходящих к Евдоксу. В книгах VII—IX изложены начала теории чисел, основанные на алгоритме нахождения наибольшего общего делителя (Евклида алгоритме). В эти книги входит теория делимости, включая теоремы об однозначности разложения целого числа на простые множители и о бесконечности числа простых чисел; здесь излагается также учение об отношении целых чисел, эквивалентное, по существу, теории рациональных (положительных) чисел. В книге X даётся классификация квадратичных и биквадратичных иррациональностей и обосновываются некоторые правила их преобразования. Результаты книги X применяются в книге XIII для нахождения длин рёбер правильных многогранников. Значительная часть книг X и XIII (вероятно и VII) принадлежит Теэтету (начало 4 в. до н. э.). В книге XI излагаются основы стереометрии. В книге XII определяются с помощью метода исчерпывания отношение площадей двух кругов и отношение объёмов пирамиды и призмы, конуса и цилиндра. Эти теоремы впервые доказаны Евдоксом. Наконец, в книге XIII определяется отношение объёмов двух шаров, строятся пять правильных многогранников и доказывается, что иных правильных тел не существует. Последующими греческими математиками к «Н.» Е. были присоединены книги XIV и XV, не принадлежавшие Евклиду. Они нередко и теперь издаются совместно с основным текстом «Начала» .

В первой книге сформулированы 35 определений, а также аксиомы и постулаты.

Определения:

1. Точка есть то, что не имеет частей.

2. Линия есть длина без ширины.

3. Концы линии суть точки.

4. Прямая есть линия, которая одинаково расположена относительно лежащих на ней точек.

5. Поверхность есть то, что имеет только длину и ширину.

6. Границы же поверхности суть линии.

7. Плоскость есть такая поверхность, которая одинаково расположена по отношению к лежащим на ней прямым.

8. Плоский угол есть взаимное наклонение двух линий на плоскости, которые друг друга встречают, но не расположены на одной прямой.

9. И если линии, образующие угол, прямые, то угол называется прямолинейным.

Следующие 25 определений – это определения прямого угла и перпендикуляра, тупого и острого угла, круга, окружности, круга и их центра, прямолинейной фигуры, треугольника, четырехугольника, равностороннего, равнобедренного и неравностороннего треугольника, квадрата, прямоугольника, ромба и др.

35. Параллельные прямые суть те, которые лежат в одной плоскости и, будучи продолжены в обе стороны, нигде не пересекаются.

Постулаты у Евклида – требования, которые следует принять, чтобы дальнейшие рассуждения не вызывали противоречий. Постулатов у Евклида пять. Нужно потребовать

I. Чтобы от каждой точки к каждой точке можно было провести прямую линию.

II. И чтобы ограниченную прямую можно было непрерывно продолжать по прямой.

III. И чтобы вокруг любого центра на любом расстоянии можно было провести окружность.

IV. Чтобы все прямые углы были друг другу равны.

V. И чтобы всякий раз, как прямая, пересекая две прямые, образует с ними внутренние односторонние углы, составляющие меньше двух прямых, эти прямые при неограниченном продолжении пересекались с той стороны, с которой эти углы составляют меньше двух прямых.

Аксиомы у Евклида – это общие достояния ума, истины, которые признаются всяким человеком, которыми человек руководствуется в любом рассуждении:

1. Равные одному и тому же равны между собой.

2. И если равным прибавить равные, то получаются равные.

3. И если от равных отнять равные, то получаются равные.

4. И совмещающиеся друг с другом равны.

Затем Евклид излагает теоремы геометрии, располагая их в такой последовательности, чтобы каждую теорему можно было доказать, используя только предыдущие теоремы, постулаты и аксиомы.

Историческое значение «Начал» Евклида заключается в том, что они являются первым крупным научным трудом, в котором сделана попытка логического построения геометрии на основе аксиоматики.

Однако, с точки зрения современной математики, изложение «Начал» надо признать неудовлетворительным.

1. С современной точки зрения многие определения ничего не определяют и просто не нужны. Ни на одно из них Евклид не опирается при изложении всех тринадцати книг.

2. Система аксиом является недостаточной для проведения полных строгих доказательств:

а) она не дает возможность обосновать такие понятия, как «лежать между», «лежать по одну или по разные стороны от прямой»;

б) как следует из аксиомы 4, равенство фигур выясняется с помощью движения, но что такое движение не определено и свойства движений в аксиомах не перечислены;

в) не затронута идея непрерывности прямой, плоскости, пространства, что приводит к невозможности логически строго обосновать многие утверждения, например, существование точки пересечения двух окружностей, каждая из которых проходит через центр другой.

Некоторые из недостатков «Начал» были замечены еще учеными древности. Так, Архимед существенно дополнил и завершил изложение Евклида в теории измерения длин, площадей и объемов.

Особое внимание всех геометров привлекал пятый постулат Евклида, который казался слишком сложным, чтобы принимать его без доказательства. Со времен Евклида и до конца XIX столетия проблема V постулата была одной из самых популярных в математике. Было предложено большое количество самых разнообразных доказательств V постулата, однако они либо были ошибочны, либо опирались на другие предложения, принятые вместо этого постулата без доказательства, эквивалентные ему относительно остальных аксиом и постулатов. Геометрия, в котором выполняются I-IV постулаты Евклида называется абсолютной геометрией.

Два предложения A *и* B *называются эквивалентными относительно совокупности* P *предложений,* если из предложений P и предложения A логически следует B, а из предложений P и предложения B следует A.

Очень часто в доказательствах пятого постулата авторы использовали незаметно для себя какое-нибудь утверждение, эквивалентное пятому постулату. Ученые последующих поколений, как правило, вскрывали эти ошибки, но сами, увы, делали аналогичные.

Примеры эквивалентов пятого постулата.

1. Если прямые параллельны, то при пересечении их третьей прямой соответственные углы равны.

2. Через точку, лежащую вне данной прямой, проходит только одна прямая, параллельная данной (предложение Прокла-Плейфера).

3. Перпендикуляр и наклонная к одной и той же прямой пересекаются (предложение Туси-Лежандра).

4. Существует треугольник с достаточно большой площадью

5. Высоты треугольника пересекаются в одной точке

6. Сумма внутренних углов треугольника равна двум прямым углам.

7. Если сумма углов некоторого треугольника равна двум прямым углам, то сумма углов любого треугольника равна двум прямым углам (вторая теорема Саккери-Лежандра).

8. Существуют подобные, но не равные треугольники (предложение Валлиса).

9. В плоскости через всякие три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести окружность (предложение Вольфганга Бойяи).

10. Теорема Пифагора.

11. В плоскости существуют, по меньшей мере, три точки, равноотстоящие от данной прямой и лежащие на одной прямой (предложение Посидония).

12. Через всякую внутреннюю точку угла можно провести прямую, пересекающую обе стороны угла (предложение Лежандра).

Второй период развития геометрии характеризуется тем, что геометрия рассматривается как наука о простейших пространственных формах и отношениях, попытки строгого обоснования геометрии несовершенны, доказательства зачастую опираются на наглядные представления, аксиоматика несовершенна и носит наглядно-чувственный характер.

Третий период – XVII – начало XIX в., характеризуется

– появлением новых приемов исследования: методов алгебры (аналитическая геометрия), дифференциального исчисления (дифференциальная геометрии);

– расширением круга изучаемых фигур и их свойств: преобразования, гладкие линии и поверхности, проективная геометрия.

Однако основы геометрии остаются неизменными.

Четвертый период начинается гениальным открытием нашего соотечественника Н.И. Лобачевского.

11 февраля 1826 года (по старому стилю) называют «Днем рождения неевклидовой геометрии». В этот день на заседании физико-математического факультета Казанского университета Лобачевский прочел доклад «Рассуждения о принципах геометрии». В 1829 году в журнале «Казанский вестник» появилась работа под названием «О началах геометрии».

Заменив один из эквивалентов пятого постулата – предложение Прокла-Плейфера, следующим утверждением: «Через точку вне прямой на плоскости проходит более одной прямой, не пересекающей данную», Лобачевский развивает свою систему аксиом до объема «Начал», не обнаруживая противоречий. На этом основании он делает вывод о существовании геометрии, отличной от геометрии Евклида, в которой пятый постулат не имеет места.

Лобачевский был не единственным математиком, заключившим о существовании геометрии, отличной от геометрии Евклида.

К выводу о существовании иной геометрии пришел также К. Гаусс. В письме к Тауринусу от 1824 г. он пишет: «Допущение, что сумма углов треугольника меньше 180°, приводит к своеобразной, совершенно отличной от нашей, геометрии. Эта геометрия совершенно последовательна, и я ее развил для себя вполне удовлетворительно. Я могу в этой геометрии решить любую задачу, кроме определения некоторой постоянной, значение которой a priori установлено быть не может. Чем большее значение придадим мы этой постоянной, тем ближе подойдем к евклидовой геометрии, а бесконечно большое ее значение приводит обе системы к совпадению». Однако, боясь остаться непонятым, Гаусс не опубликовал этих своих исследований.

Три года спустя после выхода в свет работы Н.И. Лобачевского, в 1832 году венгерский математик Янош Бойяи, не зная об исследованиях Лобачевского, опубликовал работу, в которой излагал ту же идею, но в менее развитой форме. Работа являлась приложением к книге по геометрии, написанной отцом Яноша, Фаркашем Бойяи. Работа Бойяи была написана на латинском языке; «приложение» по латински – *appendix*; поэтому труд Я. Бойяи получил в математической литературе название «Аппендикс».

Общему признанию геометрии Лобачевского, уже после его смерти, в значительной степени способствовали работы Бельтрами, Пуанкаре, Клейна, в которых доказывалась непротиворечивость геометрии Лобачевского, и тем самым доказывалась независимость пятого постулата Евклида.

Четвертый период развития геометрии характеризуется тем, что путем видоизменений и обобщений геометрии Евклида создаются и развиваются новые геометрические теории, появляются совершенно различные математические пространства. Так, проективная геометрия была изложена Понселе в 1822 году в виде новой главы евклидовой геометрии, а уже в 1847 году Штаудт дал ей самостоятельное обоснование; оформилось понятие проективного пространства и уже евклидова геометрия стала рассматриваться в известном смысле как глава проективной геометрии.

В связи с построением разнообразных математических пространств, вновь повышается интерес к логическому обоснованию геометрии Евклида. Вопросами аксиоматики евклидовой геометрии занимаются Паш, Пеано, Пиери и многие другие.

В 1899 году вышла знаменитая работа немецкого математика Д. Гильберта «Основания геометрии», в которой он приводит систему аксиом евклидовой геометрии, положившую начало современному аксиоматическому методу в математике и теории математических структур.

Особенность четвертого периода развития геометрии – переход от наглядно-чувственного к абстрактному пониманию аксиоматики: геометрическим понятиям не придается никакого конкретного смысла, все их свойства либо перечисляются в аксиомах, либо являются их логическим следствием.

Система аксиом Гильберта евклидовой геометрии

В 1899 году вышла знаменитая книга немецкого математика Д. Гильберта

«Основания геометрии». В этой книге впервые дан список аксиом, достаточный для логического построения евклидовой геометрии. Тем самым было доказано, что геометрия – формально дедуктивная система, все предложения которой выводятся чисто логически из некоторого числа основных допущений – аксиом.

База в аксиоматике Гильберта евклидовой плоскости – это символы Е и F, обозначающие множества, элементы которых будем называть соответственно точками и прямыми.

Символы $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ обозначают отношения на множествах базы:

– $\Delta_1 \subset \mathrm{E} \times \mathrm{F}$ – отношение «принадлежности». Если $(A, l) \in \Delta_1$, то будем говорить, что точка A лежит на прямой l, или l проходит через точку A, и обозначать $A \in l$.

– $\Delta_2 \subset \mathrm{E} \times \mathrm{E} \times \mathrm{E} = \mathrm{E}^3$ – отношение «лежать между». Если $(A, B, C) \in \Delta_2$, то будем говорить, что точка B лежит между точками A и C и обозначать $A - B - C$.

– $\Delta_3 \subset \mathrm{P(E)} \times \mathrm{P(E)}$ – отношение «конгруэнтности».

О п р е д е л е н и е. Любая совокупность точек называется *фигурой*. Множество всех фигур Р(Е) – множество всех подмножеств множества Е. Если $(F_1, F_2) \in \Delta_3$, то будем говорить, что фигура F_1 конгруэнтна фигуре F_2, и обозначать $F_1 \cong F_2$.

Отметим, что прямую не следует представлять как специальное множество точек. Ее нужно мыслить как самостоятельный единый объект, не разлагающийся на точки.

Точки, прямые, отношения «принадлежности», «лежать между» и «конгруэнтности» – это любые два сорта элементов и любые три отношения, которые удовлетворяют системе аксиом, содержащей 15 утверждений, разбитых на 5 групп:

I группа – аксиомы принадлежности; II группа – аксиомы порядка; III группа – аксиомы конгруэнтности; IV группа – аксиомы непрерывности; V группа – аксиома параллельных.

I. Аксиомы принадлежности.

1.1. Через любые две различные точки A и B проходит единственная прямая a (будем обозначать $a=(AB)$).

1.2. На всякой прямой лежат, по крайней мере, две точки.

1.3. Существуют, по крайней мере, три точки, не лежащие на одной прямой.

Исходя из этих аксиом можно доказать ряд теорем, которые в школьном курсе геометрии не доказываются, так как наглядно очевидны. Например

Т е о р е м а. *Если точка C не лежит на прямой, проходящей через точки A и B, то не существует прямой, на которой лежат все три точки A,B,C.*

Т е о р е м а. *Если две различные прямые a и b проходят через точку C, то*

1) каждая точка A, лежащая на одной из прямых и отличная от C, не лежит на другой прямой;

2) если точка A лежит на прямой a, точка B лежит на прямой b и точки A и B не совпадают с C, то не существует прямой, проходящей через три точки A,B,C.

Т е о р е м а. *Две различные прямые могут иметь не более одной точки, лежащей одновременно на обеих прямых.*

II. Аксиомы порядка.

2.1 . Если точка B лежит между точками A и C, то A,B,C – различные точки, лежащие на одной прямой, и точка B лежит между C и A.

2.2. Для любых двух различных точек A и B существует, по крайней мере, одна точка C, что $A-B-C$.

2.3. Среди любых трех точек, лежащих на одной прямой, существует не более одной точки, лежащей между двумя другими.

Далее можно определить, по Гильберту, отрезок, треугольник.

О п р е д е л е н и е. *Отрезок* AB – это пара точек A и B. Обозначение: $[AB]$. Точки A и B – *концы отрезка*; любая точка, лежащая между A и B

называется *внутренней точкой отрезка* или просто *точкой отрезка*.

О п р е д е л е н и е. *Треугольником* называются три точки, не лежащие на одной прямой. Точки, определяющие треугольник, называются *вершинами треугольника*, а отрезки, определяемые вершинами треугольника – *сторонами треугольника*.

2.4. (*Аксиома Паша*). Пусть точки A, B, C не лежат на одной прямой и прямая a не проходит ни через одну из них. Если a проходит через внутреннюю точку отрезка AB, то она проходит и через внутреннюю точку одного из отрезков AC или BC.

С помощью аксиом I, II групп можно доказать многие факты и ввести ряд основных определений. Среди них определение луча, угла, полуплоскости.

III. Аксиомы конгруэнтности.

Эта группа аксиом определяет понятия равенства отрезков и углов основные свойства отношения конгруэнтности.

3.1. Если даны отрезок AB и луч A_1X, то существует точка B_1, принадлежащая лучу, такая, что отрезок A_1B_1 конгруэнтен отрезку AB Единственность точки B можно доказать.

3.2. Если отрезки A_1B_1 и A_2B_2 конгруэнтны одному и тому же отрезку AB , то отрезок A_1B_1 конгруэнтен отрезку A_2B_2.

3.3. Если точка B лежит между точками A и C, а B_1 лежит между точками A_1 и B_1, и отрезок AB конгруэнтен отрезку A_1B_1, а отрезок BC конгруэнтен отрезку B_1C_1, то отрезки AC и A_1C_1 конгруэнтны.

3.4. Пусть даны $\angle AOB$, луч O_1A_1 и полуплоскость π' с границей O_1A_1. Тогда в полуплоскости π' существует единственный луч O_1B_1, такой, что $\angle AOB \cong \angle A_1O_1B_1$, кроме того $\angle AOB \cong \angle BOA$.

3.5. Если две стороны и угол между ними одного треугольника конгруэнтны соответственно сторонам и углу между ними другого треугольника, то конгруэнтны соответственные углы при других вершинах треугольника.

Основываясь на аксиомах первых трех групп, можно доказать:

1. Отношение конгруэнтности отрезков является отношением эквивалентности на множестве отрезков.

2. В равнобедренном треугольнике углы при основании конгруэнтны.

3. Считая конгруэнтными два треугольника, у которых соответственные стороны и соответственные углы конгруэнтны, можно доказать три признака конгруэнтности треугольников.

4. Отношение конгруэнтности углов является отношением эквивалентности на множестве углов.

5. Введя понятие смежных углов, прямого угла, как угла, конгруэнтного смежному с ним, можно доказать, что все прямые углы конгруэнтны.

6. Введя сравнение отрезков и углов, можно доказать, что внешний угол треугольника больше каждого угла треугольника, не смежного с ним.

7. В треугольнике против большей стороны лежит больший угол, и наоборот.

8. Определив середину отрезка и биссектрису угла, можно доказать, что любой отрезок имеет единственную середину, любой угол имеет единственную биссектрису.

9. Определив сумму и разность отрезков, можно доказать, что во всяком треугольнике каждая сторона меньше суммы и больше разности двух других сторон.

10. В прямоугольном треугольнике гипотенуза больше каждого катета.

11. Три медианы (соответственно три высоты, три биссектрисы) треугольника пересекаются в одной точке.

IV. Аксиомы непрерывности.

Здесь мы приводим изложение, принятое в учебной литературе, отличное от схемы Гильберта.

4.1. (*Аксиома Архимеда*). Пусть AB и CD – какие-либо два отрезка. На луче AB существует конечное множество точек $A_1, A_2, ..., A_n$.таких, что выполняются условия:

а) $A - A_1 - A_2,\ A_1 - A_2 - A_3,\ A_{n-2} - A_{n-1} - A_n$;

б) отрезки $AA_1, A_1A_2, ..., A_{n-1}A_n$ конгруэнтны отрезку CD;

в) точка B лежит между A и A_n.

4.2. (*Аксиома Кантора*). Пусть на прямой a дана бесконечная последовательность отрезков A_iB_i, удовлетворяющая условиям:

а) каждый последующий отрезок содержится в предыдущем;

б) для любого наперед заданного отрезка CD найдется n, что $A_nB_n < CD$.

Тогда существует точка M, принадлежащая каждому из отрезков последовательности A_iB_i (можно доказать, что такая точка единственная).

Можно доказать, что аксиомы 4.1 и 4.2 при сохранении аксиом I и III групп эквивалентны *предложению Дедекинда*:

Пусть точки отрезка AB разбиты на два класса K_1 и K_2, то есть $K_1 \cup K_2 = AB$ и $K_1 \cap K_2 = \varnothing$, так что выполняются условия:

1) точка A принадлежит классу K_1, точка B – классу K_2; классы содержат точки, отличные от A и B;

2) каждая точка X класса K_1, отличная от A, лежит между A и любой точкой Y второго класса K_2.

Тогда существует единственная точка C, такая, что точки X, лежащие между A и C, принадлежат классу K_1, а точки Y, лежащие между C и B, – классу K_2.

Относительно точки C говорят, что она *производит сечение* (*дедекиндово сечение*) *отрезка*, ее называют *дедекиндовой точкой*.

Теорию, построенную на аксиомах I-IV группы, называют *абсолютной* *геометрией*. К ней, в частности, относятся теория измерения отрезков и углов, теоремы о пересечении прямой и окружности, двух окружностей. Особо выделим следующие теоремы абсолютной геометрии.

Т е о р е м а. (*Первая теорема Саккери-Лежандра*). Сумма углов треугольника меньше или равна двум прямым углам.

Т е о р е м а. Через точку вне прямой можно провести прямую, не пресекающуюся с данной прямой.

V. Аксиома параллельных.

5.1. (*Предложение Плейфера*). Через точку вне прямой можно провести не более одной прямой, не пересекающейся с данной.

Две прямые плоскости, не имеющие общей точки, называются *параллельными прямыми*.

Из аксиомы параллельных и теоремы 12 следует, что через точку вне прямой проходит единственная прямая, параллельная данной.

Опираясь на аксиомы I-V группы можно установить существование подобных фигур, доказать теорему Пифагора, развить теорию измерения площадей и многое другое, что составляет содержание евклидовой геометрии плоскости.

С современной точки зрения аксиоматика Гильберта представляется чрезвычайно сложной и неоправданно громоздкой. Надо обладать большим терпением, чтобы с помощью этой аксиоматики добраться до узловых теорем геометрии и при этом не запутаться в огромном количестве промежуточных

лемм, теорем и следствий.

В теории этой аксиоматики достаточно сложно вводятся понятия расстояния между точками, длины отрезка, величины угла. Недостатком является и то обстоятельство, что она никак не связана с понятием векторного пространства, которое в наше время играет в математике важную роль. Немецкий математик Герман Вейль в 1918 году предложил аксиоматику евклидова пространства, основанную на широком применении понятия вектора. Можно доказать, что аксиоматики Σ_H Гильберта и Σ_W Вейля эквивалентны, то есть, теории, определяемые ими, совпадают.

Геометрия Лобачевского

Аксиоматика геометрии Лобачевского

Геометрия Лобачевского (гиперболическая геометрия) – одна из неевклидовых геометрий, геометрическая теория, основанная на тех же основных посылках, что и обычная евклидова геометрия, за исключением аксиомы о параллельных, которая заменяется на аксиому о параллельных Лобачевского.

Евклидова аксиома о параллельных (точнее, одно из эквивалентных ей утверждений) гласит:

Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит не более одной прямой, лежащей с данной прямой в одной плоскости и не пересекающей её.

В геометрии Лобачевского, вместо неё принимается следующая аксиома:

Через точку, не лежащую на данной прямой, проходят, по крайней мере, две прямые, лежащие с данной прямой в одной плоскости и не пересекающие её.

Широко распространено заблуждение, что в геометрии Лобачевского параллельные прямые пересекаются. Геометрия Лобачевского имеет обширные применения, как в математике, так и в физике. Историческое её значение состоит в том, что её построением Лобачевский показал возможность геометрии, отличной от евклидовой, что знаменовало новую эпоху в развитии геометрии, математики и науки вообще.

Модель планиметрии Лобачевского на евклидовой плоскости была построена французским математиком Анри Пуанкаре в 1882 г.

На евклидовой плоскости проведём горизонтальную прямую. Эта прямая называется абсолютом (x). Точки евклидовой плоскости, лежащие выше абсолюта, являются точками плоскости Лобачевского. Плоскостью Лобачевского называется открытая полуплоскость, лежащая выше абсолюта. Неевклидовы отрезки в модели Пуанкаре – это дуги окружностей с центром на абсолюте или отрезки прямых, перпендикулярных абсолюту (AB, CD). Фигура на плоскости Лобачевского – фигура открытой полуплоскости, лежащей выше абсолюта (F). Неевклидово движение является композицией конечного числа инверсий с центром на абсолюте и осевых симметрий, оси которых перпендикулярны абсолюту. Два неевклидовых отрезка равны, если один из них неевклидовым движением можно перевести в другой. Таковы основные понятия аксиоматики планиметрии Лобачевского.

Все аксиомы планиметрии Лобачевского непротиворечивы.

Определение прямой следующее: "Неевклидова прямая – это полуокружность с концами на абсолюте или луч с началом на абсолюте и перпендикулярный абсолюту". Таким образом, утверждение аксиомы параллельности Лобачевского выполняется не только для некоторой прямой a и точки A, не лежащей на этой прямой, но и для любой прямой a и любой не лежащей на ней точки A.

За геометрией Лобачевского возникли и другие непротиворечивые геометрии: от евклидовой отделилась проективная геометрия, сложилась многомерная евклидова геометрия, возникла риманова геометрия (общая теория пространств с произвольным законом измерения длин) и др. Из науки о фигурах в одном трёхмерном евклидовом пространстве геометрия за 40 – 50 лет превратилась в совокупность разнообразных теорий, лишь в чём-то сходных со своей прародительницей – геометрией Евклида.

Отправным пунктом геометрии Лобачевского послужил V постулат Евклида – аксиома, эквивалентная аксиоме о параллельных. Он входил в список постулатов в "Началах" Евклида. Относительная сложность и неинтуитивность его формулировки вызывала ощущение его вторичности и порождала попытки вывести его как теорему из остальных постулатов Евклида. геометрия лобачевский евклидовый

Среди пытавшихся доказать были следующие учёные: древнегреческие математики Птолемей (II в.), Прокл (V в.) (основывался на предположении о конечности расстояния между двумя параллельными), Ибн аль-Хайсам из

Ирака (конец X – начало XI вв.) (основывался на предположении, что конец движущегося перпендикуляра к прямой описывает прямую линию), иранские математики Омар Хайям (2-я половина XI – начало XII вв.) и Насир ад-Дин ат-Туси (XIII в.) (основывались на предположении, что две сходящиеся прямые не могут при продолжении стать расходящимися без пересечения), немецкий математик Клавиус (1574), итальянские математики Катальди (впервые в 1603 году напечатал работу, целиком посвященную вопросу о параллельных), Борелли (1658), Дж. Витале (1680), английский математик Валлис (1663, опубликовано в 1693) (основывался на предположении, что для всякой фигуры существует ей подобная, но не равная фигура), французский математик Лежандр (1800) (основывался на допущении, что через каждую точку внутри острого угла можно провести прямую, пересекающую обе стороны угла; у него также были другие попытки доказательства).

При этих попытках доказательства пятого постулата математики вводили некоторое новое утверждение, казавшееся им более очевидным. Были предприняты попытки использовать доказательство от противного:

итальянский математик Саккери (1733) (сформулировав противоречащее постулату утверждение, он вывел ряд следствий и, ошибочно признав часть из них противоречивыми, он счёл постулат доказанным),

немецкий математик Ламберт (около 1766, опубликовано в 1786) (проведя исследования, он признал, что не смог обнаружить в построенной им системе противоречия).

Наконец, стало возникать понимание о том, что возможно построение теории, основанной на противоположном постулате:

немецкие математики Швейкарт (1818) и Тауринус (1825) (однако они не осознали, что такая теория будет логически столь же стройной).

Лобачевский в работе "О началах геометрии" (1829), первой его печатной работе по неевклидовой геометрии, ясно заявил, что V постулат не может быть доказан на основе других посылок евклидовой геометрии, и что допущение постулата, противоположного постулату Евклида, позволяет построить геометрию столь же содержательную, как и евклидова, и свободную от противоречий.

Одновременно и независимо к аналогичным выводам пришёл Янош Бойяи, а Карл Фридрих Гаусс пришёл к таким выводам ещё раньше. Однако труды Бойяи не привлекли внимания, и он вскоре оставил эту тему, а Гаусс вообще воздерживался от публикаций, и о его взглядах можно судить лишь по нескольким письмам и дневниковым записям. Например, в письме 1846 года астроному Г.Х. Шумахеру Гаусс так отозвался о работе Лобачевского:

Это сочинение содержит в себе основания той геометрии, которая должна была бы иметь место и притом составляла бы строго последовательное целое, если бы евклидова геометрия не была бы истинной… Лобачевский называет ее "воображаемой геометрией"; Вы знаете, что уже 54 года (с 1792 г.) я разделяю те же взгляды с некоторым развитием их, о котором не хочу здесь упоминать; таким образом, я не нашёл для себя в сочинении Лобачевского ничего фактически нового. Но в развитии предмета автор следовал не по тому пути, по которому шёл я сам; оно выполнено Лобачевским мастерски в истинно геометрическом духе. Я считаю себя обязанным обратить Ваше внимание на это сочинение, которое, наверное, доставит Вам совершенно исключительное наслаждение.

В итоге Лобачевский выступил как первый наиболее яркий и последовательный пропагандист этой теории. Хотя геометрия Лобачевского развивалась как умозрительная теория, и сам Лобачевский называл её "воображаемой геометрией", тем не менее именно Лобачевский рассматривал её не как игру ума, а как возможную теорию пространственных отношений. Однако доказательство её непротиворечивости было дано позже, когда были указаны её интерпретации и тем полностью решён вопрос о её реальном смысле, логической непротиворечивости.

Лобачевский строил свою геометрию, отправляясь от основных геометрических понятий и своей аксиомы, и доказывал теоремы геометрическим методом, подобно тому, как это делается в геометрии

Евклида. Основой служила теория параллельных линий, так как именно здесь начинается отличие геометрии Лобачевского от геометрии Евклида. Все теоремы, не зависящие от аксиомы о параллельных, являются общими для обеих геометрий; они образуют так называемую абсолютную геометрию, к которой относятся, например, теоремы о равенстве треугольников. Вслед за теорией параллельных строились другие разделы, включая тригонометрию и начала аналитической и дифференциальной геометрии.

Приведём (в современных обозначениях) несколько аксиом геометрии Лобачевского, отличающих её от геометрии Евклида и установленных самим Лобачевским.

Через точку P, не лежащую на данной прямой R (см., проходит бесконечно много прямых, не пересекающих R и находящихся с ней в одной плоскости; среди них есть две крайние x, y, которые и называются параллельными прямой R в смысле Лобачевского. В моделях Клейна (Пуанкаре) они изображаются хордами (дугами окружностей), имеющими с хордой (дугой) R общий конец (который по определению модели исключается, так что эти прямые не имеют общих точек).

Угол θ между перпендикуляром PB из P на R и каждой из параллельных (называемый углом параллельности) по мере удаления точки P от прямой убывает от 90° до 0° (в модели Пуанкаре углы в обычном смысле совпадают с углами в смысле Лобачевского, и потому на ней этот факт можно видеть непосредственно). Параллель x с одной стороны (а y с противоположной) асимптотически приближается к a, а с другой – бесконечно от неё удаляется (в моделях расстояния определяются сложно, и потому этот факт непосредственно не виден).

Для точки, находящейся от заданной прямой на расстоянии PB = a (см. рисунок), Лобачевский дал формулу для угла параллельности П(a):

$$\theta = \Pi(a) = 2\operatorname{arctg} e^{-\frac{a}{q}}$$

Здесь q – некоторая постоянная, связанная с кривизной пространства Лобачевского. Она может служить абсолютной единицей длины аналогично тому, как в сферической геометрии особое положение занимает радиус сферы.

Если прямые имеют общий перпендикуляр, то они бесконечно расходятся в обе стороны от него. К любой из них можно восстановить перпендикуляры, которые не достигают другой прямой.

В геометрии Лобачевского не существует подобных, но неравных треугольников; треугольники равны, если их углы равны.

Сумма углов всякого треугольника меньше π и может быть сколь угодно близкой к нулю. Это непосредственно видно на модели Пуанкаре. Разность

$\delta = \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$,

где α, β, γ – углы треугольника, пропорциональна его площади:

$$S = q^2 \cdot \delta$$

Из формулы видно, что существует максимальная площадь треугольника, и это конечное число: πq2.

Линия равных расстояний от прямой не есть прямая, а особая кривая, называемая эквидистантой, или гиперциклом.

Предел окружностей бесконечно увеличивающегося радиуса не есть прямая, а особая кривая, называемая предельной окружностью, или орициклом.

Предел сфер бесконечно увеличивающегося радиуса не есть плоскость, а особая поверхность – предельная сфера, или орисфера; замечательно, что на ней имеет место евклидова геометрия. Это служило Лобачевскому основой для вывода формул тригонометрии.

Длина окружности не пропорциональна радиусу, а растёт быстрее. В частности, в геометрии Лобачевского число π не может быть определено как отношение длины окружности к её диаметру.

Чем меньше область в пространстве или на плоскости Лобачевского, тем меньше геометрические соотношения в этой области отличаются от соотношений евклидовой геометрии. Можно сказать, что в бесконечно малой области имеет место евклидова геометрия. Например, чем меньше треугольник, тем меньше сумма его углов отличается от π; чем меньше окружность, тем меньше отношение её длины к радиусу отличается от 2π, и т. п. Уменьшение области формально равносильно увеличению единицы длины, поэтому при безграничном увеличении единицы длины формулы геометрии Лобачевского переходят в формулы евклидовой геометрии. Евклидова геометрия есть в этом смысле "предельный" случай геометрии Лобачевского.

Элементарные теоремы геометрии Лобачевского

Аксиоматика плоскости Лобачевского получается присоединением к аксиомам абсолютной геометрии аксиомы Лобачевского. Таким образом, все теоремы о треугольниках и четырехугольниках, которые доказываются в абсолютной геометрии, имеют место и в геометрии Лобачевского. Однако в плоскости Лобачевского у треугольников и четырехугольников есть ряд специфических свойств.

Т е о р е м а. *Сумма углов любого треугольника меньше двух прямых углов.*

Т е о р е м а. *Сумма углов треугольника не постоянна, то есть не одна и та же для всех треугольников*.

Т е о р е м а. *Сумма углов выпуклого четырехугольника меньше четырех прямых углов*.

Т е о р е м а. *Если три угла одного треугольника соответственно равны трем углам другого треугольника, то эти треугольники равны*.

Взаимное расположение прямых на плоскости Лобачевского

По аксиоме Лобачевского, для точки A не лежащей на прямой a существуют, по крайней мере, две прямые, проходящие через точку A и не пересекающие прямую a. Более того, можно доказать, что в плоскости Лобачевского через точку, не лежащую на прямой, проходит бесконечно много прямых не пересекающих эту прямую.

Чтобы ввести понятие параллельных прямых, условимся считать, что все прямые являются направленными. При обозначении прямой двумя буквами UV будем считать, что U предшествует V и что рассматриваемые нами точки на этой прямой лежат между U и V.

О п р е д е л е н и е. Прямая AB называется *параллельной прямой* CD, если эти прямые не имеют общих точек и для любых точек P на AB и Q на CD любой внутренний луч угла QPB пересекает луч QD.

Т е о р е м а. (Признак параллельности прямых). *Если прямые AB и CD не имеют общих точек и существуют точки P на AB и Q на CD, что любой внутренний луч угла QPB пересекает луч QD, то прямая AB параллельна прямой CD.*

Т е о р е м а. (Существование параллельных прямых). *Для прямой CD и точки M, не лежащей на ней, существует единственная прямая AB, проходящая через точку M и параллельная прямой CD.*

Доказательство. 1. Существование. Рассмотрим перпендикуляр MN, проведенный из точки M к прямой CD, и прямую MP, перпендикулярную прямой MN. Прямые CD и MP не пересекаются. Точки отрезка NP разобъем на два класса K_1 и K_2. Класс K_1 содержит точки X отрезка NP, такие, что луч MX пересекает луч ND. Класс K_2.содержит точки Y отрезка NP, такие, что луч MY не пересекает луч ND. Это разбиение удовлетворяет условиям предложения Дедекинда:

а) $N \in K_1,\ P \in K_2,$ и K_1, K_2 содержат точки, отличные от N и P;

б) для любой точки X класса K_1, отличной от N, и любой точки Y класса K_2 точка X лежит между точками N и Y (если предположить противное: $N - Y - X$, то луч MY будет внутренним для угла NMX и будет пересекать луч ND, то есть Y должно принадлежать K_1).

Итак, на множестве точек отрезка NP имеем дедекиндово сечение. Пусть точка B производит это сечение. То есть любая точка X, лежащая между точками N и B, принадлежит классу K_1, а любая точка Y, лежащая между точками B и P, принадлежит классу K_2.

Покажем, что точка B принадлежит классу K_2.

Предположим, что B принадлежит классу K_1. Тогда луч MB пересекает луч ND в некоторой точке D_1. Выберем на луче ND точку D_1' такую, что $N-D_1-D_1'$. Луч MD_1' пересекает луч ND, следовательно, точка B' пересечения отрезка NP и луча MD_1' принадлежит классу K_1. Но так как луч MB' внутренний для угла D_1MP, то точка B' лежит между B и P и, значит, по предложению Дедекинда принадлежит классу K_2. Пришли к противоречию.

Таким образом, точка B принадлежит классу K_2.

Возьмем на прямой MB точку A такую, что $A-M-B$. Тогда по признаку параллельных прямых получаем, что AB параллельна прямой CD.

2. Единственность. Пусть $A'B'$ – другая прямая, проходящая через точку M и параллельная прямой CD.

По определению параллельных прямых внутренние лучи углов NMB и NMB' пересекают луч ND, поэтому лучи MB, MB' и ND лежат в одной полуплоскости, определяемой прямой MN. Отсюда, либо луч MB – внутренний луч угла NMB', либо луч MB' – внутренний луч угла NMB. Но тогда одна из прямых AB или $A'B'$ пересекает прямую CD, что противоречит определению параллельных прямых. Отсюда следует единственность прямой AB. Теорема доказана.

Из доказанной теоремы следует, что через точку M, не лежащую на прямой CD, проходит единственная прямая AB, параллельная прямой CD, и единственная прямая EF, параллельная прямой DC. При этом углы, образуемые этими прямыми с перпендикуляром MN к прямой CD, острые, а значит прямые AB и EF различные.

Итак, через каждую точку M, не лежащую на прямой a, проходят две прямые, параллельные прямой a в двух различных направлениях.

Несложно показать, что углы, образуемые этими прямыми с перпендикуляром MN к прямой a, равны. Каждый из этих углов называется *углом параллельности в точке* M *относительно прямой* a.

О п р е д е л е н и е. Две прямые на плоскости Лобачевского называются *расходящимися* или *сверхпараллельными*, если они не пересекаются и не параллельны.

Таким образом, на плоскости Лобачевского две прямые либо пересекаются, либо параллельны, либо расходятся.

Л е м м а. Если прямая AB параллельна прямой CD, то существует ось симметрии этих прямых.

Т е о р е м а. Если прямая AB параллельна прямой CD, то прямая CD параллельна прямой AB.

Т е о р е м а. Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны между собой.

Параллельные прямые Евклидовой геометрии, в геометрии Лобачевского будут расходящиеся.

Одними из важных объектов на плоскости Лобачевского являются пучки прямых.

В геометрии Евклида существуют два вида пучков прямых: 1) пучок прямых, проходящих через одну точку, и 2) пучок параллельных прямых.

В геометрии Лобачевского можно выделить три рода пучков:

1) Пучок *пересекающихся* прямых (пучок 1-го рода) – совокупность прямых, проходящих через некоторую точку (центр пучка), такой пучок называется центральным или эллиптическим;

2) Пучок *расходящихся* прямых (пучок 2-го рода) – совокупность прямых, перпендикулярных к некоторой прямой (оси пучка), такой пучок называется гиперболическим;

3) Пучок *параллельных* прямых (пучок 3-го рода) – совокупность прямых, параллельных некоторой прямой в заданном на ней направлении, такой пучок называется параболическим.

Можно доказать, что

– для двух данных прямых существует единственный пучок, которому они принадлежат;

– при наложении тип пучка сохраняется;

– серединные перпендикуляры к сторонам треугольника принадлежат одному пучку; для каждого из трех типов пучков существует треугольник, серединные перпендикуляры к сторонам которого принадлежат этому типу.

Труды Лобачевского :

Н. И. Лобачевский. Полное собрание сочинений в пяти томах. М.: ГИТТЛ.

Том 1

Геометрические исследования по теории параллельных линий.

О началах геометрии.

Том 2

Геометрия. Новые начала геометрии с полной теорией параллельных.

Том 3

Воображаемая геометрия.

Применение воображаемой геометрии к некоторым интегралам.

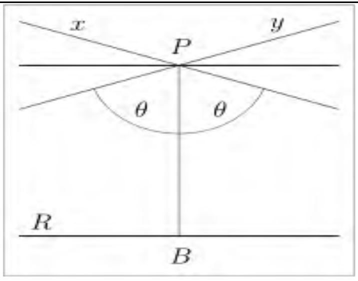
Пангеометрия.

Тома 4-5

Работы в других областях, письм

ОСОБЕННОСТИ ГЕОМЕТРИИ ЛОБАЧЕВСКОГО

В геометрии Лобачевского вместо пятого постулата Евклида принимается следующая аксиома: через точку, не лежащую на данной прямой, проходят по крайней мере две прямые, лежащие с данной прямой в одной плоскости и не пересекающие ее.

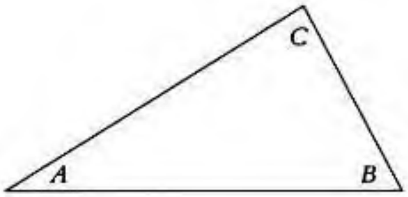
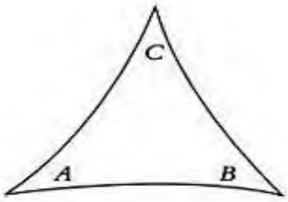
 Рис.1	Через точку P, не лежащую на данной прямой R, проходит бесконечно много прямых, не пересекающих R и находящихся с ней в одной плоскости; среди них есть две крайние x, y, которые и называются параллельными прямой R.

Визуально, отличие геометрии Лобачевского от геометрии Евклида можно представить следующим образом:

	1.Геометрия Евклида 2.Сферическая геометрия 3.Геометрия Лобачевского

Рассмотрим некоторые факты, отличающие данную геометрию от евклидовой.

1. В геометрии Лобачевского прямые на плоскости либо пересекаются, либо параллельны, либо являются расходящимися.
2. В геометрии Лобачевского сохраняются все теоремы, которые можно доказать без использования аксиомы параллельности.
3. Теорема о сумме углов треугольника: сумма углов любого треугольника меньше 180°. При ее доказательстве используется аксиома параллельности.

Геометрия Евклида	Геометрия Лобачевского
	
$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$	$\angle A + \angle B + \angle C < 180°$
Рис.3	Рис.4

4. Разность между 180° и суммой углов треугольника в геометрии Лобачевского называется дефектом этого треугольника. Площадь треугольника равна $S = k \cdot D$, где S – площадь, D – дефект треугольника, число k зависит от выбора единиц измерения площадей и углов и не зависит от выбранного треугольника. Площади треугольников в геометрии Лобачевского ограничены некоторой константой.

5. Согласно геометрии Евклида, если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны. В геометрии Лобачевского нет подобных треугольников, но есть четвертый признак равенства треугольников: если углы одного треугольника соответственно равны углам другого треугольника, то эти треугольники равны. [

6. Линия равных расстояний от прямой не есть прямая, а особая кривая, называемая эквидистантой, или гиперциклом.

7. Предел окружностей бесконечно увеличивающегося радиуса не есть прямая, а особая кривая, называемая предельной окружностью, или орициклом.

8. Предел сфер бесконечно увеличивающегося радиуса не есть плоскость, а особая поверхность — предельная сфера, или орисфера; замечательно, что на ней имеет место евклидова геометрия. Это служило Лобачевскому основой для вывода формул тригонометрии.

9. Длина окружности не пропорциональна радиусу, а растет быстрее.

Модели геометрии Лобачевского дали доказательство её непротиворечивости.

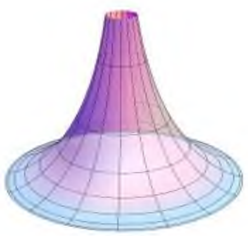
<table>
<tr><td>Псевдосфера</td><td>Модель Пуанкаре</td><td>Модель Клейна</td></tr>
<tr><td>


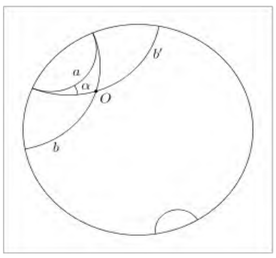
Рис.5</td><td>


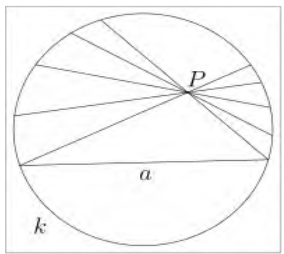
Рис.6</td><td>


Рис.7</td></tr>
</table>

Широко распространено заблуждение (отражённое, в частности, в нематематической литературе и фольклоре), что в геометрии Лобачевского параллельные прямые пересекаются. Во-первых, параллельные прямые не могут пересекаться (ни в одной геометрии) по определению параллельности. Во-вторых, в геометрии Лобачевского как раз можно провести через точку, не лежащую на данной прямой, бесконечно много прямых, не пересекающихся с ней.

Аксиомы Вейла.

Традиционный путь построения геометрии, идущий от Евклида и закрепленный Д.Гильбертом в его аксиоматике геометрии (1899), является самым известным, но отнюдь не единственно возможным. Так, например, совершенно иной путь построения геометрии был предложен в 1917г. знаменитым немецким математиком Г.Вейлем. Система аксиом Вейла описывает основные шесть понятий, два из которых-**точки и векторы**-называются основными объектами. Понятия «**сложение векторов**», «**умножение вектора на число**», «**скалярное умножение векторов**» и «**откладывание вектора от точки**» называются основными соотношениями. Прямые, плоскости, равенство фигур и т.п. определяются через эти первоначальные понятия и отношения. Совокупность всех точек и векторов обозначаются соответственно **T** и **V**.

Аксиомы Вейла распределяются на пять групп.

1.Аксиомы сложения векторов.

1.Сложение векторов коммутативно, т.е. $\forall \overline{x}, \overline{y} \in \boldsymbol{V} \ (\overline{x} + \overline{y} = \overline{y} + \overline{x})$.

2.Сложение векторов ассоциативно, т.е. $\forall \overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \in \boldsymbol{V} \ ((\overline{x} + \overline{y}) + \overline{z} = \overline{x} + (\overline{y} + \overline{z}))$.

3.Существует такой вектор $\overline{0}$, что для $\forall \overline{x} \in \mathbf{V} (\overline{x} + \overline{0} = \overline{x})$.

4.Для любого вектора $\overline{x}$ существует такой вектор $\overline{x}'$, что $\overline{x} + \overline{x}' = \overline{0}$.

Вектор $\overline{0}$ называется нулевым, а $\overline{x}'$ – вектором, противоположным вектору $\overline{x}$.

Эта группа аксиом описывает отображение $\phi_1 : \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$, называемое операцией сложения векторов, которая позволяет поставить в соответствие

$\forall\overline{x},\overline{y}$ третий вектор φ_1 $(\overline{x},\overline{y})$, называемый суммой векторов $\overline{x}$ и $\overline{y}$ и обозначаемый символом $\overline{x}+\overline{y}$.

2.Аксиомы умножения вектора на действительное число.

Эти аксиомы описывают отображение ϕ_2: $\mathbf{V}\times\mathbf{R}\to\mathbf{V}$, называемое умножениемвектора на действительное число.Каждому вектору $\overline{x}$ и числу $\lambda\epsilon\mathbf{R}$ однозначно сопоставляется вектор $\phi_2(\lambda,\overline{x})$, называемый произведением вектора $\overline{x}$ на число λ и обозначаемый символом $\lambda\overline{x}$.

1. Операция ϕ_2 дистрибутивна относительно сложения векторов:

$\forall\overline{x},\overline{y}\epsilon\boldsymbol{V}, \forall\lambda\epsilon\boldsymbol{R}(\lambda(\overline{x}+\overline{y})=\lambda\overline{x}+\lambda\overline{y})$.

2. Операция ϕ_2 дистрибутивна относительно сложения чисел:

$\forall\overline{x}\epsilon\boldsymbol{V}, \forall\lambda,\mu\epsilon\boldsymbol{R}((\lambda+\mu)\overline{x}=\lambda\overline{x}+\mu\overline{x})$.

3. Операция ϕ_2 ассоциативна:

$\forall\overline{x}\epsilon\boldsymbol{V}, \forall\lambda,\mu\epsilon\boldsymbol{R}\ (\lambda(\mu\overline{x})=(\lambda\mu)\overline{x})$.

4. Операция ϕ_2 умножения вектора $\overline{x}$на единицу не изменяет вектора $\overline{x}$:

$\forall\overline{x}\epsilon\boldsymbol{V}(1\cdot\overline{x}=\overline{x})$.

Аксиомы **I**и **II** позволяют определить понятие векторного пространства: **векторным пространством над полем действительных чисел** **R**называется множество **V**, для элементов (векторов) которого определены операции сложения векторов

$\phi_2(\overline{x},\overline{y})=\overline{x}+\overline{y}$ и умножения вектора на действительное число

$\phi_2(\lambda,\overline{x})=\lambda\overline{x}$ так, что выполняются требования аксиом **I**и**II.**

Из определения изоморфизма следует , что 1) тождественное отображение $\mathbf{V}\to\mathbf{V}$ является изоморфизмом; 2) отображение , обратное изоморфизму, является изоморфизмом; 3) если f_1:$\mathbf{V}\to\mathbf{V}'$ и f_2: $\mathbf{V}'\to\mathbf{V}''$ - изоморфизмы, то отображение $f_2\ f_1$ пространства **V**на пространство **V''**также является изоморфизмом. Следовательно, **отношение изоморфизма является отношением эквивалентности** (т.е. оно рефлексивно, симметрично и транзитивно).

3.Аксиомы размерности.

1. Существуют три линейно независимых вектора $\overline{e}_1$,$\overline{e}_2$, $\overline{e}_3$:

$\lambda_1\overline{e}_1 + \lambda_2\overline{e}_2 + \lambda_3\overline{e}_3 = \overline{0} \to \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

2. Любые четыре вектора $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \overline{d}$ линейно зависимы:

$\forall\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \overline{d}\exists\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ ($\lambda_1\overline{a} + \lambda_2\overline{b} + \lambda_3\overline{c} + \lambda_4\overline{d} = \overline{0} \to \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \lambda_4^2 \neq 0$) , где $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \overline{d}\in$ **V**; $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\in$ **R**.

Аксиомы **I - III** позволяют ввести понятие трехмерного векторного пространства: векторное пространство **V** называется **векторным пространством V₃ над полем R**, если выполняются аксиомы 1-2 размерности.

Чтобы получить аксиоматику n-мерного векторного пространства над полем **R**, аксиомы 1-2 заменяют так:

1'. Существуют n линейно независимых векторов: $\overline{e}_1$,$\overline{e}_2$,…, $\overline{e}_n$.

2''. Всякая система, содержащая n+1 вектор, линейно зависима.

Множество **V**, для элементов которого определены операции сложения и умножения их на действительные числа с соблюдением аксиом **I–III**, называется **n-мерным векторным пространством** и обозначается $\mathbf{V_n}$.

Любая система n линейно независимых векторов пространства $\mathbf{V_n}$ называется **базисом**.

4.Аксиомы скалярного произведения векторов.

Эта группа аксиом описывает отображение $\phi_3 : \mathbf{V_3}\times\mathbf{V_3}\to\mathbf{R}$,

называемое **операцией скалярного умножения векторов**. Вводится следующее обозначение : $\phi_3 (\overline{x}, \overline{y}) = \overline{x}\overline{y}$.

1.Скалярное произведение $\overline{xy}$ коммутативно, т.е. ($\forall\overline{x},\overline{y}\in$**V**: $\overline{xy}=\overline{yx}$).

2.Скалярное произведение векторов линейно, т.е.($\forall\overline{x},\overline{y},\overline{z}\in$**V**; $\lambda,\mu\in$**R**:

$(\overline{x},\lambda\overline{y}+\mu\overline{z})=\lambda\overline{xy}+\mu\overline{xz}$).

3.$\overline{xx} > 0$, если $\overline{x} \neq \overline{0}$; $\overline{xx}=0$, если $\overline{x}=\overline{0}$, т.е. $\forall\overline{x}\in$**V** ($\overline{x} \neq \overline{0} \to \overline{xx} > 0$;$\overline{x}=\overline{0} \to \overline{xx}=0$).

Векторное пространство $\mathbf{V_3}$, в котором определена операция скалярного умножения векторов так, что выполняются требования аксиом **IV**, называется **евклидовым векторным пространством** $\mathbf{V_3}$. Два евклидовых векторных пространства **V**и**V'**называются =**изоморфными**, если существует взаимно однозначное линейное отображение fпространства **V**на**V'**, сохраняющее операцию скалярного умножения векторов.

Неотрицательная величина $|\overline{x}|=\sqrt{|\overline{x}|^2}$называется **длиной вектора** $\overline{\boldsymbol{x}}$**.**

Углом между векторами $\overline{\boldsymbol{x}}$и $\overline{y}$называется число ϕ ($0\leq\phi\leq\pi$), определяемое из условия $\cos\varphi=\frac{\overline{xy}}{|\overline{x}||\overline{y}|}$.

Из курса алгебры известно, что для $\forall\overline{x},\overline{y}\in\mathbf{V_3}$выполняется неравенство Коши-Буняковского: $|\overline{xy}|\leq|\overline{x}|\,|\overline{y}|$.

В пространстве $\mathbf{V_3}$ можно построить ортонормированный базис,т.е. базис $\overline{e_1},\overline{e_2},\overline{e_3}$, состоящий из попарно ортогональных и единичных векторов: $\overline{e}_1{}^2=\overline{e}_2{}^2=\overline{e}_3{}^2=1$; $\overline{e}_1\overline{e}_2=\overline{e}_1\overline{e}_3=\overline{e}_2\overline{e}_3=0$.

Скалярное произведение двух векторов $\overline{x},\overline{y}$, скалярный квадрат вектора и косинус угла между двумя векторами в ортонормированном базисе выражаются соответственно формулами:

$\overline{xy}=x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$, $\overline{x}^2= x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2$,

$\cos\varphi=\frac{x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\sqrt{y_1^2+y_2^2+y_3^2}}$, где x_1 , x_2 , x_3- координаты вектора $\overline{x}$;

y_1 ,y_2 , y_3 -координаты вектора $\overline{y}$ в данном базисе.

5.Аксиомы откладывания векторов.

Эта группа аксиом описывает операцию откладывания векторов

ϕ_4: **T**×**T**→**V**,сопоставляющую двум упорядоченным точкам A,B∈**T**, вектор ϕ_4(A,B), обозначаемый $\overline{AB}$.

1.Для каждой фиксированной точки A∈**T**отображение **T**→**V,**

определенное по закону $\phi_4(A,B)=\overline{AB}$,является взаимно однозначным

отображением множества точек B∈**T**на множество векторов из **V**.

2.Для любых трех точек A, B, C справедливо равенство:$\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$.

Аксиомы Погорелова

Рассмотрим еще одну из современных аксиоматических построений евклидовой геометрии на основе аксиом, предложенных украинским геометром академиком А.В. Погореловым, которая ближе всего стоит к школьному курсу геометрии.

Основными объектами в системе аксиом Погорелова – это точка, прямая и плоскость, а основными отношения – «принадлежность», «лежать между», «длина», «градусная мера». Система аксиом состоит из девяти аксиом планиметрии и трех аксиом стереометрии.

I группа. Аксиомы принадлежности

Аксиомы принадлежности на плоскости определяют свойства взаимного расположения точек и прямых, которые определяются отношением «принадлежать». При этом считается равнозначным выражения: «точка принадлежит прямой»; «точка лежит на прямой»; «прямая проходит через точку».

$\boldsymbol{I_1}$. Каковы бы ни были две точки, существует прямая, которая проходит через эти точки, и причем только одна.

$\boldsymbol{I_2}$. На каждой прямой лежат, по крайней мере две точки. Существуют три точки, не лежащие на одной прямой.

II группа. Аксиомы порядка

Эти аксиомы выражают свойства взаимного расположения точек на прямой, то есть объясняется отношение «лежать между».

$\boldsymbol{II_1}$. Из трех точек одна и только одна лежит между двумя другими.

$\boldsymbol{II_2}$. . Прямая разбивает множество точек плоскости, которые ей не принадлежат, на два подмножества (полуплоскости) так, что отрезок соединяет точки одной полуплоскости, не пересекает прямую, а отрезок, который соединяет точки разных полуплоскостей, пересекается этой прямой.

III группа. Аксиомы меры для измерения углов

Эти аксиомы определяют понятие «длина отрезка», «градусная мера угла».

III_1. Каждый отрезок имеет определенную длину, большую нуля. Если точка С лежит на отрезке АВ, то длина отрезка АВ равна сумме длин отрезков АС и ВС.

III_2.. Каждый угол имеет определенную градусную меру, большую нуля. Развернутый угол равен 180^0 . Если луч с проходит между сторонами угла (ав), то градусная мера угла (ав) равна сумме градусных мер углов (ас) и (вс).

IV группа. Аксиома существования треугольника, равного данному

На основе аксиом меры для отрезков и углов можно ввести отношение равности для отрезков, углов и треугольников.

IV_1. Пусть ABC – треугольник и а – луч. Тогда существует треугольник

$A_1B_1C_1$ равного треугольнику ABC, в котором вершина A_1 совпадает с началом луча a, вершина B_1 лежит на луче a, а вершина C_1 лежит в заданной полуплоскости относительно прямой, которая определяется лучом а

V группа. Аксиома существования отрезка данной длины

V_1. Каким бы ни было действительное число $d > 0$, существует отрезок длины d.

VI группа. Аксиома параллельности

VI_1. . Через точку, которая не лежит на данной прямой, можно провести на плоскости не более одной прямой, параллельной данной.

VII группа. Пространственные аксиомы

C_1. Какова бы ни была плоскость, существуют точки, которые принадлежат этой плоскости, и точки, которые ей не принадлежат.

C_2. Если две различные плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой.

C_3. Если две различные прямые имеют общую точку, то через них можно провести плоскость, и причем только одну.

3.2. Геометрические построения в пространстве

План

1. Центральное и параллельное проектирования

2. Изображение плоских фигур с помощью параллельного проектирования

3. Теорема Польке-Щварца.

4. Изображение пространственных фигур с помощью параллельного проектирования

5. Сечения многогранников

Центральное и параллельное проектирования.

Если требуется обеспечить наглядность, то всегда пользуются проекционными методами. Простейшие из них — метод центральных проекций и метод параллельных проекций.

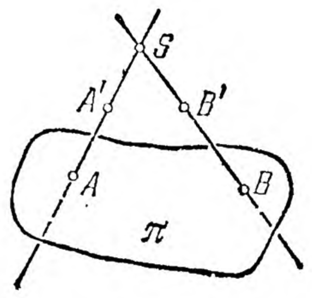


Рис. 1.

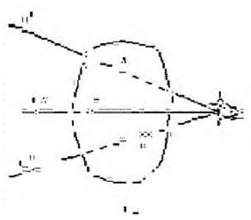
Метод центральных проекций ясен из рис. 1. Берется фиксированная точка S (центр проекций) и фиксированная плоскость я (плоскость проекций), не проходящая через 5. Через любую точку A' пространства проводится прямая SA' (проектирующая прямая). Точка A пересечения этой прямой с плоскостью я называется проекцией точки A'. На рис. 1 показаны проекции двух точек A' и B'. После построения проекций всех или некоторых точек оригинала полученный чертеж подвергается еще подобному преобразованию, и тогда получается изображение.

В центральном проектировании сохраняются *сложное отношение четырех точек.*

Метод центральных проекций дает самые наглядные изображения, потому что описанное построение воспроизводит процесс зрения. На рис. 2 показано: лучи, идущие в глаз из точек оригинала (A', B', ...) или из их проекций

(A, B, ...),— те же самые. Таким образом, глазу все равно — рассматривать ли оригинал или его проекцию на плоскость π).

Художники пользуются только методом центральных проекций.



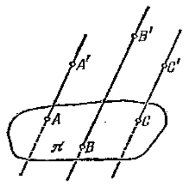


Рис. 3.

Метод параллельных проекций отличается от метода центральных проекций только тем, что проектирующие прямые не проходят через фиксированную точку, а параллельны фиксированному направлению (рис. 3).

Изображения по методу параллельных проекций несколько менее наглядны, не столь близки процессу зрения. Однако наглядность их все же достаточна: узнать оригинал легко. Это объясняется тем, что при неограниченном удалении глаза от оригинала лучи зрения становятся почти параллельными. Изображение в параллельной проекции напоминает предмет небольших размеров, рассматриваемый издалека.

Метод параллельных проекций значительно проще, чем центральных. Поэтому он всегда используется при изготовлении иллюстративных чертежей в учебной и научной литературе.

Изображение по методу параллельных проекций получается двумя шагами:

1. Все точки оригинала проектируются по данному направлению т (направление проектирования) на плоскость проекций.

2. Полученная в плоскости проекций фигура подвергается подобному преобразованию.

То, что получится после этих двух шагов, называется изображением. Таким образом, каждая точка изображения, вообще говоря, не есть непосредственная проекция соответствующей точки оригинала.

Второй шаг имеет целью придать чертежу удобные размеры. Он не влияет на форму полученной фигуры. Разумеется, в некоторых случаях его может и не быть.

Точки оригинала, лежащие на одной проектирующей прямой, называются конкурирующими точками. Конкурирующие точки имеют одно и то же изображение.

Перечислим основные свойства параллельных проекций.

Свойство 1. Изображение прямой линии есть прямая или точка.

Предположим, что прямая a' — не проектирующая. Возьмем на ней любые точки A', B', C, ... и проведем через них проектирующие прямые (рис. 4). Эти прямые лежат в одной плоскости (проходящей через a' и параллельной т). Пересечение этой плоскости с плоскостью я есть прямая).

Заметим, что плоскость, параллельная направлению проектирования т, называется проектирующей плоскостью.

Если прямая a' — проектирующая, то все ее точки имеют одно и то же изображение, т. е. вся прямая изображается точкой.

Свойство 2. Параллельные прямые изображаются параллельными прямыми (в частности, может быть, совпавшими) или каждая одной точкой.

Предположим, что параллельные прямые a', b', c', ... не проектирующие. Проходящие через них проектирующие плоскости α', β', γ', ... параллельны между собой (а может быть и совпадают) и, следовательно, пересекают плоскость я по параллельным прямым (в частности — совпадающим).

Если же параллельные прямые — проектирующие, то они изображаются отдельными точками.

Свойство 3. Отношение, в котором точка отрезка делит этот отрезок, в изображении и в оригинале одинаково.

Пусть B'—точка отрезка $A'C'$. Прямые $A'A$, $B'B$ и $C'C$ параллельны, откуда следует:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$$

Если точки A', B', C' принадлежат проектирующей прямой, то три точки A, B, C совпадают. Тогда отношение $\frac{AB}{BC}$ принимает неопределенный вид $\frac{0}{0}$.

Поскольку $\frac{0}{0}$ можно считать равным любому числу — доказанную пропорцию можно считать справедливой и в этом случае.

Из свойства 3, в частности, следует, что середина отрезка изображается серединой.

Примечание 1. То обстоятельство, что B' — внутренняя точка отрезка $A'C'$, несущественно. Если B' лежит на прямой $A'C'$ вне отрезка $A'C'$, то можно считать, что и в этом случае она делит отрезок $A'C'$ в отношении $\frac{A'B'}{B'C'}$, но только это отношение следует считать отрицательным. При таком соглашении любая точка прямой $A'C'$ делит отрезок $A'C'$ в изображении и в оригинале одинаково. Например, на рис. 5 точки C, D, E делят отрезок AB в таких отношениях: (ABC)=3, (ABD)= —3, (ABE)= —1/3.

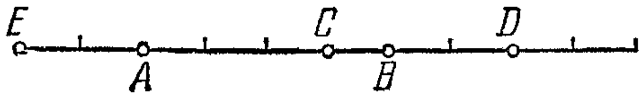


Рис.5.

Примечание 2. Свойство фигур, не изменяющееся при некотором геометрическом преобразовании, называется инвариантным относительно этого преобразования. Не изменяющийся параметр фигур называется инвариантом данного преобразования.

Параллельное проектирование есть преобразование, переводящее всякую фигуру F' в фигуру F (проекцию).

Доказанные три положения устанавливают, что прямолинейность (свойство линии) и параллельность (свойство пары прямых) суть инвариантные свойства параллельного проектирования, а отношение трех точек прямой есть инвариант параллельного проектирования.

Это верно не только для непосредственного проектирования, но и для построения изображений по методу параллельных проекций.

Ортогональное проецирование является частным случаем параллельного проецирования, когда направление проецирования S перпендикулярно плоскости проекции П’.

В этом случае нетрудно установить соотношение между длиной

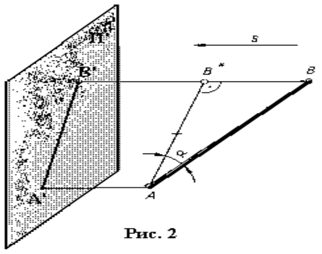


Рис. 2

натурального отрезка и длиной его проекции. Если отрезок AB образует с плоскостью проекций угол α, то, проведя AB*║A’ B’ (рис.2), получим из прямоугольного треугольника AB*B, что AB*=AB cos α или A’ B’= AB cos α.

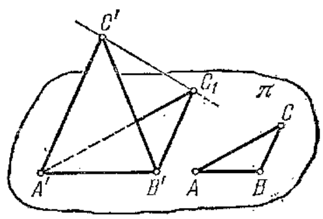
Так как ортогональное проецирование – разновидность параллельного, то ему присущи те же свойства.

Изображение плоских фигур с помощью параллельного проектирования

Теория изображения плоских фигур основана на следующих двух теоремах.

Теорема 1. Любой данный треугольник может быть изображен произвольным треугольником.

Доказательство. Имеем два треугольника: оригинал A'B'C и треугольник

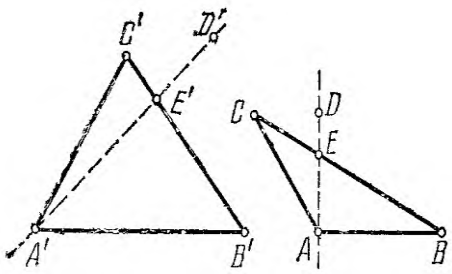


ABC. Проведем через сторону A'B' плоскость я, отличную от плоскости A'B'C. В плоскости я построим на стороне A'B' треугольник A'B'C_1, подобный треугольнику ABC (таких треугольников существует два, возьмем любой из них). Примем m=C'C_1 за направление проектирования. Тогда проекцией треугольника A'B'C' на плоскость π окажется треугольник A'B'C_1.

Подобно изменяя его, получим треугольник ABC.

Теорема 2. Если дано изображение треугольника $A'B'C'$, то тем самым однозначно определено изображение каждой точки, принадлежащей плоскости этого треугольника.

Доказательство. Пусть A'B'C' — оригинал, а ABC — изображение. Возьмем в плоскости треугольника A'B'C произвольную точку D' и соединим ее с любой вершиной треугольника, например с A'. Пусть E' - точка



пересечения A'D' с противоположной стороной B'C' (безразлично, находится ли E' внутри отрезка B'C' или на продолжении). A'D' может оказаться параллельной B'C'. Будем предполагать пока, что A'D' не параллельна B'C'. Изображение E точки E' можно найти: оно должно делить отрезок BC в таком же отношении, в каком E' делит отрезок B'C', т. е.

$$\frac{BE}{EC} = \frac{B'E'}{E'C'}$$

Точка D должна лежать на прямой AE. Ее положение на этой прямой определяется из пропорции

$$\frac{AD}{DE} = \frac{A'D'}{D'E'}$$

Если же $A'D' \ ||$ B'C' то и AD || BC и

$$\frac{AD}{BC} = \frac{A'D'}{B'C'}$$

Из доказанных двух теорем вытекает практическое правило для построения изображений плоских фигур. Когда мы начинаем чертить изображение плоской фигуры F', то сначала, до известного момента, мы можем чертить произвольно. Но вдруг наступает момент, когда весь произвол исчерпан, и дальше на чертеже уже ничего нельзя проводить произвольно, а надо все строить. Только что доказанные две теоремы позволяют уловить этот опасный момент: надо выбрать в составе фигуры F' любые три точки общего положения, (т. е. не лежащие на одной прямой) и изобразить их произвольными тремя точками общего положения. На этом произвол кончается: изображения всех остальных точек надо строить. Другими словами, данный треугольник можно изобразить произвольно, а данный четырехугольник уже нельзя.

Изображаемая фигура называется *оригиналом*, а изображенная – *проекцией* данной фигуры.

Проекция окружности.

Параллельной проекцией окружности является кривая, называемая эллипсом. Так как ортогональная проекция является частным случаем параллельной проекции, то, проецируя окружность O, расположенную в плоскости общего положения Q (рис. 9) ортогонально на плоскость $П_1$, получаем эллипс O_1 .

В окружности проведем два взаимно перпендикулярных диаметра AB и CD, причем AB пройдет по прямой уровня плоскости Q, а диаметр CD – по прямой наибольшего уклона этой плоскости по отношению к плоскости проекций $П_1$. Тогда диаметр AB спроецируется в диаметр A_1B_1 эллипса, равный диаметру окружности, т.е. $AB=A_1B_1$, а диаметр CD спроецируется в диаметр C_1D_1 эллипса. Так как угол, образованный этими диаметрами, является линейным углом двугранного угла наклона плоскости Q к плоскости

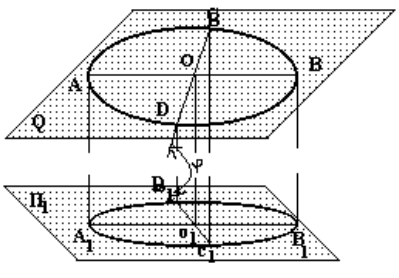


Рис. 9

$П_1$, то, обозначив его через φ, получим $C_1D_1=CD\cos\varphi$. Взаимно перпендикулярные окружности диаметры обладают свойством сопряженности (каждый сопряженный диаметр делит пополам хорды, параллельные другому диаметру). Это свойство при параллельном проецировании сохраняется. Следовательно, диаметры A_1B_1 и C_1D_1 будут сопряженными диаметрами эллипса. Но, с другой стороны, они взаимно перпендикулярны, поэтому являются осями эллипса, причем A_1B_1- большая ось, *а* C_1D_1- малая ось.

Проекция треугольника, параллелограмма и трапеции.

Треугольник изображается треугольником любой формы. Медиана треугольника будет изображаться медианой, так как отношение отрезков сохраняется. При проекции биссектрисы и высоты пойдет искажение.

Так как параллельность прямых сохраняется, то изображение параллелограмма, в частности, прямоугольника, ромба, квадрата, служит параллелограмм. Длина сторон и величины углов произвольные.

Любая трапеция изображается в виде произвольной трапеции. Сохраняется только отношение оснований. Равнобокая трапеция имеет ось симметрии. Ее изображают следующим образом. Каждое из оснований делим пополам и проводим ось симметрии.

Проекции правильного шестиугольника.

При построении оригинала правильного шестиугольника используют два

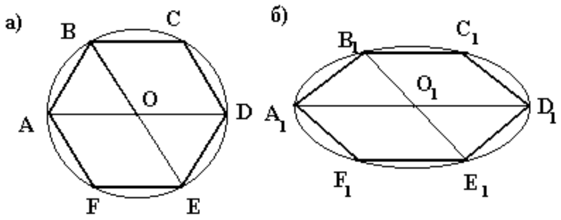


Рис. 11

симметричных ромба: *OBCD* и *OAFE* (рис. 11, а). Изображение же получается при построении ромбов в виде двух одинаковых произвольных параллелограммов. Для получения проекции правильного шестиугольника надо оставшиеся точки соединить (рис. 11, б).

Теорема Польке-Щварца.

Полным четырехугольником называется четырехугольник с диагоналями. Точнее говоря, это — плоская фигура, состоящая из следующих элементов: четыре точки общего положения (т. е. никакие три из них не лежат на одной прямой) и шесть отрезков, соединяющих эти точки попарно.

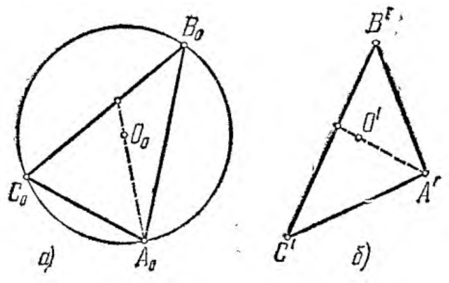
Теорема (Польке-Щварца). Любой данный тетраэдр может быть изображен произвольным полным четырехугольником.

Доказательство основано на следующей лемме.

Лемма. Треугольную призму можно пересечь плоскостью по треугольнику, подобному данному.

Под треугольной призмой понимается бесконечная «треугольная труба», а не многогранник с пятью гранями. Такую призму можно задать нормальным сечением, т. е. сечением плоскостью, перпендикулярной ребрам.

Итак, даны два треугольника . Треугольник $A_0 B_0 C_0$ служит нормальным сечением призмы, а треугольник A'B'C' — образец. Надо пересечь призму плоскостью так, чтобы в сечении получился треугольник, подобный A'B'C'.

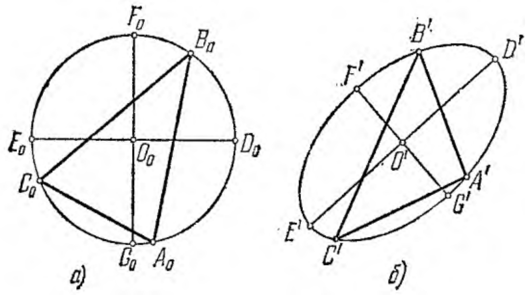


Начнем с исследования задачи. Пусть ∝ — плоскость, перпендикулярная ребрам призмы, а β— искомая плоскость. Плоскость a сечет призму по треугольнику A_0 B_0 C_0 , а плоскость β — по треугольнику *A"B"C",* который подобен треугольнику *A'B'C'.*

Рассмотрим параллельную проекцию плоскости ∝ на плоскость β . Направление проектирования параллельно ребрам призмы. Треугольник $A_0 B_0 C_0$ проектируется в треугольник *A"B"C".* Опишем около треугольника A_0 B_0 C_0 окружность. Она спроектируется в эллипс, описанный около треугольника A"B"C". Проектирующие ее прямые образуют цилиндр, описанный около призмы. Подвергнем треугольник A"B"C" вместе с описанным эллипсом подобному преобразованию так, чтобы он превратился в треугольник A'B'C'. При этом эллипс перейдет в эллипс, описанный около треугольника A'B'C'. Треугольник A'B'C' вместе с описанным эллипсом есть изображение треугольника A_0 B_0 C_0 вместе с описанной окружностью, потому что первая упомянутая фигура получена из второй параллельным проектированием и последующим подобным преобразованием.

Но в таком случае эллипс, описанный около треугольника A'B'C', вполне определен и даже легко строится по точкам.

Проведем оси эллипса — большую ось D'E'=2a' малую ось F'G'=2b' и построим в окружности взаимно перпендикулярные диаметры D_0 E_0 и F_0 G_0, соответствующие этим осям (т. е. те диаметры, изображениями которых служат оси эллипса). Переходя к построению, покажем, как «посадить» на цилиндр фигуру (эллипс с вписанным треугольником), подобную только что построенной. Если круговой цилиндр пересечь плоскостью, то в сечении



получится эллипс, у которого:

1) малая ось равна диаметру нормального сечения,

2) отношение полуосей равно косинусу угла между секущей плоскостью и нормальной плоскостью .

Исходя из этого:

1) Проведем в плоскости а какую-нибудь прямую, параллельную *F_0 G_0*.

2) Через эту прямую проведем плоскость β под углом φ= arccos$\frac{b'}{a'}$ к плоскости $\propto$. Заметим, что таких плоскостей две, потому что угол φ можно отложить по разные стороны от плоскости $\propto$.

Построенная таким образом плоскость р сечет цилиндр по эллипсу с данным отношением полуосей. Концы его малой оси F" и G" лежат «над» точками F_0 и G_0 (т. е. на тех же образующих). Точки A", B", C" лежат на тех же образующих, что и точки Ло, Во, Со. В самом деле, треугольник А "В"С" расположен относительно креста (*D"E", F"G")* так же, как треугольник A_0 B_0 C_0 относительно креста (*D_0 E_0, F_0 G_0*).

Точнее говоря, точка А" (аналогичное утверждение относится к точкам В" и С") имеет относительно координатной системы (*O"D", 0"F")* те же аффинные координаты, какие имеет точка A_0 относительно координатной системы

(O_0 $Д_0$, O_0 F_0)

Теперь перейдем к доказательству теоремы Польке Щварца. Пусть дан тетраэдр A'B'C'D' (оригинал) и плоский четырехугольник A^0 B°C°D^0 (образец). Доказательство основано на следующей идее. Тетраэдр имеет три пары противоположных ребер:

A'B' и CD',

A'C и B'D',

A'D' и B'C.

Противоположные ребра тетраэдра скрещиваются, а соответствующие прямые в составе плоского четырехугольника пересекаются. Таким образом, плоская фигура, вообще говоря, имеет три точки (они называются диагональными точками полного четырехугольника), которых пространственная фигура не имеет. Обозначим их

P° — точка пересечения A°B° и C°D°,

Q° — точка пересечения A°C° и B°D°,

R° — точка пересечения A°$Д^0$ и B°C°.

Не исключено, что одна из этих точек отсутствует (если прямые, которые должны ее определять, параллельны). Могут отсутствовать даже две точки, но не три. Оказывается, диагональные точки определяют направление проектирования. Определим на ребре A'B' точку P`, которая делит его в том же отношении, в каком точка $P^0$ делит отрезок $A^0$ B°, и аналогично определим точку $P_2$' на ребре C` D':

$$\frac{A'P_1'}{P_1'B'} = \frac{A^0P^0}{P^0B^0} \qquad \frac{C'P_2'}{P_2'D'} = \frac{C^0P^0}{P^0D^0}$$

Итак, одна точка P^0 образца определяет две разные точки P_1' и P_2' в составе оригинала. Это — конкурирующие точки, т. е. они должны изображаться одной точкой. Это значит, что прямая $P_1'P_2'$ проектирующая прямая. Через все вершины тетраэдра *A'B'C'D'* проводим прямые, параллельные $P_1'P_2'$. Получим бесконечную четырехугольную призму. В сечении этой призмы любой плоскостью (только не проектирующей) получается четырехугольник ABCD, для которого

$$\frac{AP}{PB}=\frac{A^0P^0}{P^0B^0} \qquad \frac{CP}{PD}=\frac{C^0P^0}{P^0D^0}$$

Но мы проведем не любую плоскость, а такую, которая пересекает треугольную призму A'B'C' по треугольнику ABC, подобному $A^0B^0C^0$. Эта плоскость сечет четырехугольную призму по четырехугольнику ABCD, который имеет следующее сходство с четырехугольником A^0 B^0 C^0 D^0 (образцом): треугольник ABC подобен треугольнику A^0B°C°,

$$\frac{AP}{PB}=\frac{A^0P^0}{P^0B^0} \qquad \frac{CP}{PD}=\frac{C^0P^0}{P^0D^0}$$

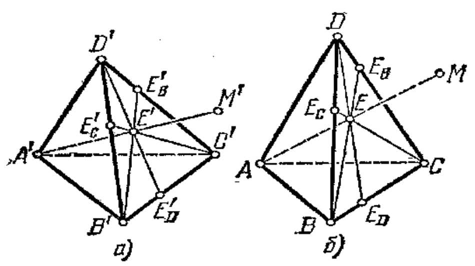
Из этих условий следует, что четырехугольник ABCD подобен четырехугольнику A^0 B^0 C^0 D^0 , и теорема Польке- Щварца доказана.

При изображении пространственных фигур используеться следующая

Теорема. Если дано изображение тетраэдра *A'B'C'D'*, то тем самым определено изображение каждой точки пространства.

Доказательство. Пусть A'B'C'D' — оригинал, а ABCD — его изображение на плоскости . Пусть, кроме того, в пространстве дана произвольная точка M'. Покажем, как построить ее изображение. Соединим M' с какой-нибудь вершиной тетраэдра, например с A', и отметим точку пересечения E' прямой A'M' с противоположной гранью B'C'D' (точка E' вовсе не должна обязательно находиться внутри треугольника B'C'D'). Случай, когда A'M' параллельна плоскости B'C'D', предоставляем читателю рассмотреть самостоятельно. Проводя прямые B'E', C'E' и D'E' , мы получим на сторонах треугольника B'C'D' соответственно точки $E'_B,\ E'_C\ ,E'_D$.

Теперь перейдем к изображению. Изображения точек $E'_B,\ E'_C\ ,E'_D$ можно



построить: эти изображения должны делить отрезки CD, DB и BC в таких же отношениях, как это имеет место в оригинале.

Впрочем, достаточно построить только две из трех точек, например E'_B, E'_C. Пересечение прямых $BE_в$ и CE_c дает нам точку E. Далее проводим прямую AE и на ней строим точку M, удовлетворяющую условию

$$\frac{AM}{ME}=\frac{A'M'}{M'E'}$$

Доказанная теорема может быть истолкована и так: изображение тетраэдра можно дополнить до изображения пространственной системы координат. На рис. 16 дано изображение пространственной системы координат, которое вполне определяется точкой O (изображение начала координат) и точками E_1, E_2, E_3 (изображения единичных точек координатных осей). Имея это изображение, можно построить изображение любой точки, заданной координатами.

Изображение пространственных фигур с помощью параллельного проектирования

Тетраэдр (треугольная пирамида) изображается в виде произвольного четырехугольника с его диагоналями (рис.12, а).

Для построения проекции параллепипеда сначала из произвольной точки проводим три луча различной длины, не совпадающие. Затем на каждой паре лучей строим параллелограмм. Полученный каркас достраиваем до

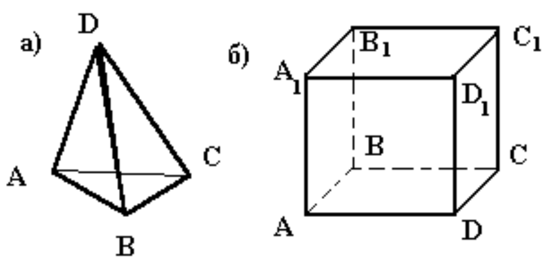
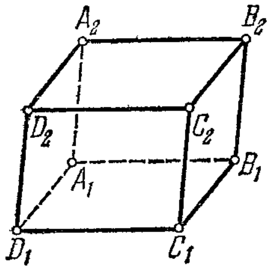


Рис. 12

параллепипеда (рис. 12,б).

Пример 1. *Изобразить куб.*

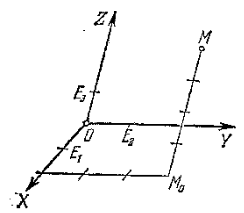
Три ребра куба, выходящие из одной точки, определяют тетраэдр. По теореме Польке — Шварца он может быть изображен произвольным



четырехугольником. Остальная часть изображения достраивается, исходя из того, что параллельные ребра куба и на чертеже должны быть параллельны. Таким образом, изображая куб, мы можем очки A_1 , B_1, D_1 и A_2 отметить произвольно. Это и есть теорема Польке — Шварца.

Другая форма теоремы Польке — Шварца разрешает нам изображать прямоугольную декартову систему координат произвольно. Например,

мы можем выбрать углы



$<$ XOY и $<$YOZ произвольно и утверждать, что в оригинале оси X', У' и Z' попарно перпендикулярны. Кроме того, мы можем взять отрезки OE_1, OE_2 и $0E_3$ произвольной длины и утверждать, что в оригинале они равны между собой и даже имеют данную длину, например $O'E'_1 = O'E'_2 = O'E'_3 =1$ м. Таким образом, лектор, читающий курс аналитической геометрии в пространстве, может чертить на доске прямоугольную декартову систему координат как угодно. Метод построения проекции пространственной фигуры по ее точкам называется *аксонометрией.*

П р и м е р 2. Изобразить правильную четырехугольную пирамиду.

Основание (квадрат) можно изобразить произвольным параллелограммом. Кроме того, согласно теореме Польке — Шварца можно изобразить произвольно одно боковое ребро, т. е. отметить произвольно вершину пирамиды. Если нужно провести высоту, то следует соединить вершину с точкой пересечения диагоналей основания.

Сечения многогранников

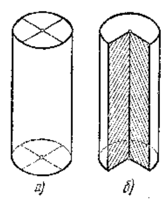
Изображение плоских сечений многогранников требует использования только двух правил:

1) Если плоскости β' и γ' α' пересекаются по прямой l', а плоскость α' пересекает их соответственно по прямым b' и c', то b' и c'' либо пересекаются в точке, лежащей на l' либо параллельны l'.

2) Если плоскости β' и γ' параллельны, а плоскость α' пересекает их соответственно по прямым b' и c', то b' и c' параллельны.

Изображения круглых тел

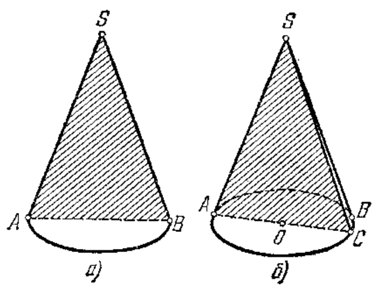
Цилиндр. Оба основания изображаются одинаковыми эллипсами. На рисунке изображены два перпендикулярных диаметра верхнего (и нижнего)



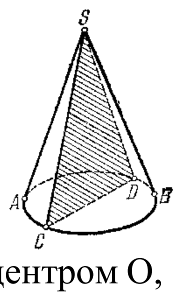
основания. Они изображаются сопряженными диаметрами эллипса. На рисунке для наглядности из цилиндра сделан вырез с двугранным углом 90°.

Конус. Основание конуса изображается эллипсом.

В школьной практике (даже в учебниках) часто встречается следующая ошибка: крайние образующие используются для изображения осевого

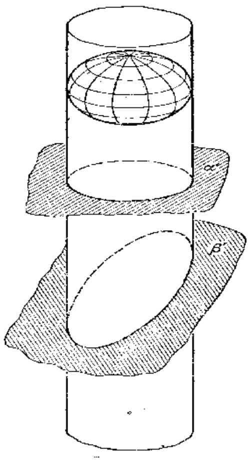


сечения, причем предполагается, что они касаются эллипса в концах большой оси. Это — нелепость. Если из точки S провести касательные к эллипсу и соединить точки касания Л и В, то прямая АВ не пройдет через центр эллипса. Однако некоторые «чертежники» проводят ее через центр



насильственно. Одна из точек касания, например А, соединяется с центром О, и на эллипсе отмечается точка С, диаметрально противоположная А. Треугольник SAC есть изображение осевого сечения. Рисунок ясно показывает, что мы видим не половину боковой поверхности конуса, а несколько больше. Интересно знать, где находится глаз наблюдателя, если он видит конус так, как изображено на рисунке. Он находится очень далеко, выше плоскости основания (лучи, идущие в глаз, образуют с плоскостью основания углы примерно в 30°). Для изображения осевого сечения вовсе не обязательно использовать одну из абрисных х) образующих. Можно использовать любые две диаметрально противоположные образующие.

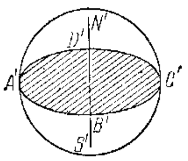
Шар. Начнем с одного практического замечания: шар принято изображать в ортогональной проекции. Причина этого следующая. При проектировании шара проектирующие прямые образуют круговой цилиндр,

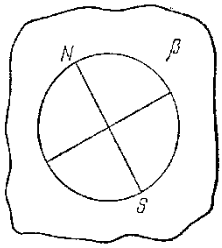


касающийся сферы . Плоскость ∝' перпендикулярна образующим цилиндра, а плоскость β' — нет; ∝' сечет цилиндр по кругу, а β' — по вытянутому эллипсу, т. е. проекция шара на ∝' есть круг, а на β' — вытянутый эллипс. Изображение шара, при котором его абрис — вытянутый эллипс, кажется не наглядным. Большинство людей скажет, что оно «не похоже на шар». Поэтому принято при проектировании шара использовать плоскость ∝', а не β'.

Правильное изображение шара строится так. Экватор и меридианы изображаются эллипсами, причем все меридианы проходят через две точки N п S. Остается только выяснить связь между изображением экватора и положением точек N и S. Если эллипс, изображающий экватор, сплющен в отрезок, то точки N и S находятся на абрисе. Если эллипс расширяется, то точки N и S сближаются. Чем шире эллипс, тем ниже N (тем выше S).

Представим себе оригинал. Проведем экваториальное сечение (круг A'B'C' D') и перпендикулярный к нему диаметр N'S' («земная ось»). Вообразим,





далее, плоскость, перпендикулярную A'C и (для удобства) проходящую вне шара. Шар вместе с экваториальным сечением и осью N'S' спроектируем ортогонально на плоскость β'. Шар спроектируется в круг, а система(A' B'C'D',N'S')—вява перпендикулярных диаметра этого круга. Если фигуру слева вращать вокруг

A'C' , то круг на плоскости β' будет оставаться на месте, а крест из двух его перпендикулярных диаметров будет вращаться вокруг центра.

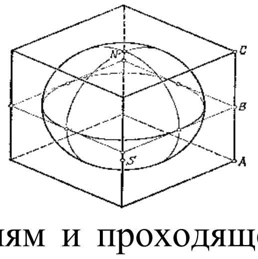
Изображения вписанных и описанных фигур

Вписанные и описанные фигуры. Точное изображение вписанных и описанных фигур требует громоздких построений. При решении стереометрических задач чертеж играет вспомогательную роль, и нет смысла тратить на его выполнение больше труда, чем на решение самой задачи. Поэтому мы рекомендуем читателю в основном чертить на глаз. Однако отметим некоторые основные положения, нарушение которых приведет к грубым ошибкам

Вписанный и описанный шар. Изображение шара сложнее, чем ногогранников, цилиндра и конуса. Поэтому рекомендуется, выполняя чертежи с участием шара, начинать с шара, а затем пристраивать к нему остальные фигуры.

Шар и цилиндр. Если шар вписан в цилиндр, то боковая поверхность цилиндра касается его но большому кругу, например но экватору. Точка В — на экваторе*, AB=BC, AC=NS.* Все три эллипса (экваториальное сечение и основания цилиндра) одинаковы. Если цилиндр вписан в шар, то следует помнить, что основания цилиндра — одинаковые по размеру параллельные круги.

Шар и призма. Если шар вписан в призму (рис. 43), то большой круг (например, экватор) вписан в среднее сечение призмы (сечение плоскостью,



параллельной основаниям и проходящей посредине между ними). Поэтому чертеж рекомендуется выполнять в такой последовательности.

1) Изобразить шар.

2) Описать многоугольник около экватора. При этом следуетучитывать условия, определяющие этот многоугольник. Например,

если это — квадрат , то его стороны параллельны сопряженным диаметрам эллипса.

3) Достроить призму по условиям: *AC=NS, AB=BC*. Чтобы изобразить призму, вписанную в шар, надо начать с того, что вписать многоугольник в какой нибудь параллельный круг.

4. *Шар и пирамида*. Если шар вписан в пирамиду (рис. 45), то точки касания боковых граней находятся на одинаковых расстояниях от вершины пирамиды и, следовательно, лежат на одном параллельном круге, плоскость котоого перпендикулярна T'O' (O' — центр шара, T' — вершина пирамиды).Если плоскость основания пирамиды параллельна плоскости, в которой лежат точки касания боковых граней (в частности, это имеет место в правильной пирамиде), то чертить можно в такой последовательности.

1) Изобразить шар с координатной сеткой (меридианы и параллельные круги).

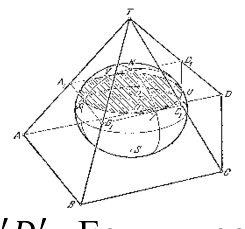
2) Взять какой-нибудь параллельный круг и описать около него многоугольник (например, A_1 B_1 C_1 $Д_1$).

3) В точках касания X, Y, U, V провести касательные к меридианам, проходящим через эти точки. Эти касательные пересекаются в одной точке T. Это и будет вершина пирамиды. Соединить ее с точками A_1 B_1 C_1 $Д_1$.

4) Достроить пирамиду, руководствуясь пропорцией

$$\frac{TA}{TA_1} = \frac{TS}{TO_1}$$

(S'— Южный полюс, O — центр параллельного круга, вписанного в



$A_1'B_1'C_1'D_1'$. Если плоскость основания пирамиды не параллельна плоскости исходного параллельного круга, то задача много сложнее. Если шар описан около пирамиды , то основание пирамиды вписано в какой-нибудь параллельный круг, а вершина— любая точка сферы.

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ

ТЕМА: УЧЕБНЫЙ ТЕЗАУРУС ДИСЦИПЛИНЫ “МАТЕМАТИК АНАЛИЗ” ПЕДВУЗА

Задание. Составить учебный тезаурус некоторой темы и определить необходимый лексикон студента для изучения данной темы.

ТЕМА : НАЧАЛЬНЫЙ КУРС АБСТРАКТНОЙ АЛГЕБРЫ В ВО

Задания.

1. *Докажите, что данные множества образуют мультипликативную группу:*

1) $G = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in R, a^2 + b^2 > 0\}$.
2) $G = \{a + bi\sqrt{2} \mid a, b \in R, a^2 + b^2 > 0\}$.
3) $G = \{7^z \mid z \in Z\}$.
4) $G = \{11^z \mid z \in Z\}$.

2. *Докажите, что данные множества образуют аддитивную группу:*

1) $G = G = \{a + b\sqrt{7} \mid a, b \in Z\}$.
2) $G = \{a - bi\sqrt{2} \mid a, b \in Q\}$.
3) $G = \{\frac{a}{5^k} \mid a \in Z, k \in N\}$.
4) $G = \{\frac{a}{2^k} \mid a \in Z, k \in N\}$.

3. *Докажите, что данные множества образуют кольцо:*

1) $G = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in R\}$.
2) $K = \{\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \mid a, b \in 3Z\}$
3) $K = \{\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \mid a, b \in Z\}$

4. *Докажите, что данные множества образуют поле:*

1) $F = \{ \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \mid a, b \in R \}$.

2) F= $\{a + bi \mid a , b \in R \wedge i^2 = -1\}$.

3) . F=$\{a + b\sqrt{2} \mid a , b \in R \}$.

4) F= Z_5 .

5) F= Z_7 .

5. *Установите изоморфизм между алгебрами:*

1) $< \{ 3^z \mid z \in Z \};\ \bullet, ^{-1}, \mathbf{1} > \wedge < \{ 5^z \mid z \in Z \};\ \bullet, ^{-1}, \mathbf{1} >$.

2) $< \{ 2^z \mid z \in Z \};\ \bullet, ^{-1}, \mathbf{1} > \wedge < Z; +, -, 0 >$.

3) $< Z ; +, - , 0 > \wedge < 2Z ; +, - , \mathbf{0} >$.

4) $< Z ; +, - , 0 > \wedge < 3Z ; +, - , \mathbf{0} >$.

5) $< \{a + bi \mid a , b \in R \wedge i^2 = -1\}; +, - , 0 > \wedge < R^2; +, - , \mathbf{0} >$.

6) $< Z ; +, - , 0 > \wedge < Z_2, +, - , \mathbf{0} >$

7) $< \{ 2^z \mid z \in Z \};\ \bullet, ^{-1}, \mathbf{1} > \wedge < \{ 3^z \mid z \in Z \};\ \bullet, ^{-1}, \mathbf{1} >$.

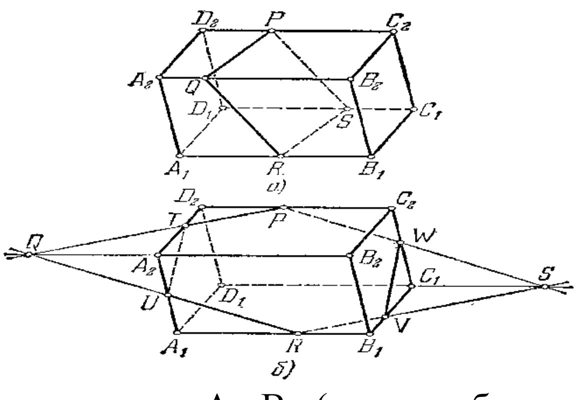
8) $< \{ \begin{bmatrix} a & -3b \\ b & a \end{bmatrix} \mid a,b \in Q, \}; +, - , \mathbf{0} > \wedge < \{ \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \mid a,b \in Q \}; + , - , \mathbf{0} >$

9) $< \{ 2^z \mid z \in Z \};\ \bullet, ^{-1}, \mathbf{1} > \wedge < \{ a^z \mid z \in Z \};\ \bullet, ^{-1}, \mathbf{1} >$.

Тема №3: Задачи совершенствования содержания геометрии в педагогических ВУУ

Пример 1. Изобразить плоское сечение параллелепипеда.

Проводим изображения линий сечения PQ и QR. Точка их пересечения должна лежать на прямой $A_2 B_2$, в остальном прямые PQ и QR произвольны.

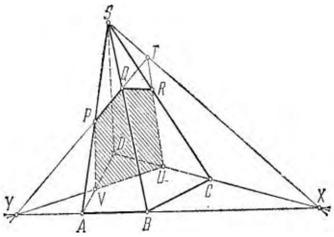


На рис. точка Q взята внутри отрезка $A_2 B_2$ (что не обязательно). Далее проводим RS\\QP и PS\\QR. Контроль: точка пересечения RS и PS должна оказаться на прямой $C_1 D_1$ (но не обязательно внутри отрезка $C_1 D_1$).

Прямые PQ и QR проведены так, что точка Q попала вне отрезка A_2 B_2. Отмечаем точки $T = PQ \cap A_2D_2$ и $U = QR \cap A_1A_2$ и соединяем U и T. Проводим RS||QP и PS||QR. Контроль: точка S должна лежать на прямой C_1 D_1 Если эта точка попала на продолжение отрезка C_1 D_1, то соединяем точки $V = RS \cap B_1C_1$ и $W = PS \cap C_1C_2$. Контроль: VW||TU.

Пример 2. Изобразить плоское сечение четырехугольной пирамиды.

Проводим звенья PQ и QR произвольно. От точки R надо вести линию



сечения по задней грани. Плоскости передней и задней граней пересекаются по прямой S'X'. Изображение этой прямой легко получить, построив точку X=AB ∩ CD. Следы секущей плоскости a' на передней и задней гранях должны пересекаться на S'X'. Находим точку T= PQ∩SX и проводим TR. Отмечаем отрезок этой прямой RU, оказавшийся внутри треугольника SCD. AB изображает линию пересечения передней и нижней граней. Значит, след секущей плоскости на передней грани (P'Q') и неизвестный пока след на нижней грани U'V̓ должны пересекаться на A'B'.

Пример 3 . Постройте сечение призмы $A_1B_1C_1D_1ABCD$ плоскостью, проходящей через три точки M, N, K. Рассмотрите все случаи расположения точек M, N, K на поверхности призмы .

Рассмотрим случай: $M \in BB_1, N \in CC_1D_1D, K \in AA_1E_1$. В данном случае очевидно, что $M_1 = B_1$.

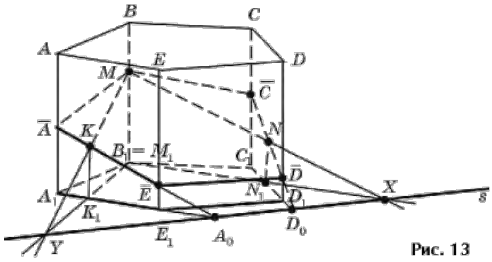


Рис. 13

Построение.

1. $MN \cap M_1N_1 = X.$

2. $MK \cap M_1K_1 = Y.$

3. XY = s – след секущей плоскости.

4. $A_1K_1 \cap s = A_0.$

5. $A_0K \cap A_1A = \overline{A}$, $A_0K \cap EE_1 = \overline{E}$.

6. $D_1N_1 \cap s = D_0.$

7. $D_0N \cap DD_1 = \overline{D}$, $D_0N \cap CC_1 = \overline{C}$.

8. $\overline{A}M\overline{C}\,\overline{D}\,\overline{E}$ – искомое сечение.

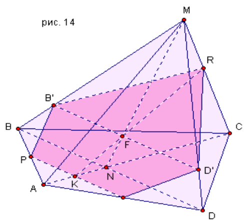
Пример 4. На ребрах AB и AD пирамиды MABCD зададим соответственно точки P и Q - середины этих ребер, а на ребре MC зададим точку R. Построим сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точки P, Q и R.

Решение :

1) Ясно, что основным следом плоскости PQR является прямая PQ.

2) Найдем точку K, в которой плоскость MAC пересекает прямую PQ. Точки K и R принадлежат и плоскости PQR, и плоскости MAC. Поэтому, проведя прямую KR, мы получим линию пересечения этих плоскостей.

рис. 14



3) Найдем точку N=AC ∩BD, проведем прямую MN и найдем точку F=KR ∩MN.

4) Точка F является общей точкой плоскостей PQR и MDB, то есть эти плоскости пересекаются по прямой, проходящей через точку F. Вместе с тем так как PQ - средняя линия треугольника ABD, то PQ параллена BD, то есть прямая PQ параллельна и плоскости MDB. Тогда плоскость PQR, проходящая через прямую PQ, пересекает плоскость MDB по прямой, параллельной прямой PQ, то есть параллельной и прямой BD. Поэтому в плоскости MDB

через точку F проведем прямую, параллельную прямой BD.

5) Дальнейшие построения понятны из рисунка. В итоге получаем многоугольник *PQD'RB'* - искомое сечение.

Построение сечения многогранника плоскостью, проходящей через заданную прямую перпендикулярно заданной плоскости.

Пусть заданы плоскость α и прямая m_1. Если через какую-нибудь точку W прямой m_1 провести прямую m_2, перпендикулярную плоскости α , то плоскость β, определяемая пересекающимися прямыми m_1и m_2, будет перпендикулярна плоскости α.

Таким образом, задача построения плоскости β, проходящей через заданную прямую m_1 и перпендикулярной плоскости α, сводится к построению прямой m_2, проходящей через какую-нибудь точку W прямой m_1 и перпендикулярной плоскости α.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ И ИСТОЧНИКОВ

I. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining asarlari:

1. Mirziyoev SH.M. Buyuk kelajagimizni mard va olijanob xalqimiz bilan birga quramiz. – T.: “O‘zbekiston”, 2017. – 488 b.
2. Mirziyoev SH.M. Milliy taraqqiyot yo‘limizni qat’iyat bilan davom ettirib, yangi bosqichga ko‘taramiz. 1-jild. – T.: “O‘zbekiston”, 2017. – 592 b.
3. Mirziyoev SH.M. Xalqimizning roziligi bizning faoliyatimizga berilgan eng oliy bahodir. 2-jild. –T.: “O‘zbekiston”, 2018. – 507 b.
4. Mirziyoev SH.M. Niyati ulug‘ xalqning ishi ham ulug‘, hayoti yorug‘ va kelajagi farovon bo‘ladi. 3-jild.– T.: “O‘zbekiston”, 2019. – 400 b.
5. Mirziyoev SH.M. Milliy tiklanishdan – milliy yuksalish sari. 4-jild.– T.: “O‘zbekiston”, 2020. – 400 b.
6. O‘zbekiston Respublikasining Konstitusiyasi.–T.:O‘zbekiston, 2023.
7. O‘zbekiston Respublikasining 2020 yil 23 sentyabrda qabul qilingan “Ta’lim to‘g‘risida”gi O‘RQ-637-sonli Qonuni.
8. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017 yil 7 fevral “O‘zbekiston Respublikasini yanada rivojlantirish bo‘yicha Harakatlar strategiyasi to‘g‘risida”gi 4947-sonli Farmoni.
9. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2018 yil 21 sentyabr “2019-2021 yillarda O‘zbekiston Respublikasini innovasion rivojlantirish strategiyasini tasdiqlash to‘g‘risida”gi PF-5544-sonli Farmoni.
10. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2019 yil 27 may “O‘zbekiston Respublikasida korrupsiyaga qarshi kurashish tizimini yanada takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi PF-5729-son Farmoni.
11. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2019 yil 27 avgust “Oliy ta’lim muassasalari rahbar va pedagog kadrlarining uzluksiz malakasini oshirish tizimini joriy etish to‘g‘risida”gi PF-5789-sonli Farmoni.
12. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2019 yil 8 oktyabr “O‘zbekiston Respublikasi oliy ta’lim tizimini 2030 yilgacha rivojlantirish konsepsiyasini tasdiqlash to‘g‘risida”gi PF-5847-sonli Farmoni.
13. O‘zbekiston Respublikasi Prezidenti SHavkat Mirziyoevning 2020 yil 25 yanvardagi Oliy Majlisga Murojaatnomasi.
14. O‘zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasining 2001 yil 16 avgustdagi “Oliy ta’limning davlat ta’lim standartlarini tasdiqlash to‘g‘risida”gi 343-sonli Qarori.
15. O‘zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasining 2015 yil 10 yanvardagi “Oliy ta’limning Davlat ta’lim standartlarini tasdiqlash to‘g‘risida”gi 2001 yil 16

avgustdagi “343-sonli qororiga o‘zgartirish va qo‘shimchalar kiritish haqida”gi 3-sonli qarori.

16. Aleksandra Veselovsky. Knowledge Base of Mathematics Teacher Educators: A Goals-Knowledge-Practice Approach. University of Illinois at Chicago, 2017.
17. Jim Hefferon. Lab Manual for Linear Algebra. Jim Hefferon Mathematics, Saint Michael’s College Colchester, Vermont USA 2019-Dec-25.
18. Vechtomov E.M., Sidorov V.V. Abstraktnaya algebra. Bazovыy kurs. Uchebnoe posobie. Kirov. «Raduga-Press», 2014.-260 st.
19. A History of Abstract Algebra: From Algebraic Equations to Modern Algebra https://www.pdfdrive.com/a-history-of-abstract-algebra-from-algebraic-equations-to-modern-algebra-d184663837.html
20. Audrey T. Abstract Algebra with Applications. Cambridge University Press. 2019. https://rutracker.org/forum/viewtopic.php?t=5894389
21. Yunusova D. v.b. Algebra va sonlar nazariyasi. Modul texnologiyasi asosida tayyorlangan misol va mashqlar to’plami I . O‘quv qo’llanma. T.: Innovatsiya-Ziyo, 2021y. 172 b.
22. Yunusova D. v.b. Algebra va sonlar nazariyasi. Modul texnologiyasi asosida tayyorlangan misol va mashqlar to’plami II . O‘quv qo’llanma. T.: Innovatsiya-Ziyo, 2022y. 166 b.
23. Adams, Robert A. (Robert Alexander), Calculus: a complete course. Textbooks. Christopher Essex. - 7th ed. Copyright @ 2010, 2006, 2003 Pearson Education Canada, a division of Pearson Canada Inc., Toronto, Ontario.-1077 p.
24. Calculus Early Transcendental. 8th education. James Stewart, 2016 (e-v)
25. Toshmetov O‘., Turgunbayev R., Saydamatov E., Madirimov M. Matematik analiz I-qism. T.: “Extremum-Press”, 2015. -408 b.
26. Turgunbayev R.M. Matematik analiz 1-qism. Darslik. T.: “Innovatsiya-ziyo”.2019, 340 b.
27. Veydt V.P. Formirovanie professionalnogo tezaurusa pedagoga: ot teorii k praktike. Monografiya / pod nauch. red. T.B. Grebenyuk. – Kaliningrad: Izd-vo Kaliningradskogo oblastnogo instituta razvitiya obrazovaniya, 2016 – 180 s.
28. Turgunbaev R.M. Matematik analizni tezaurusli yondashuv asosida o‘qitish (60110600-matematika va informatika bakalavriat ta’lim yo‘nalishi misolida). Monografiya. T. : “Nodirabegim”. 2022. -180b.
29. Turgunbayev R.M. Matematik analiz 1-qism. Darslik. T.:- “Innovatsiya-ziyo”. 2019. 340 b.
30. Sovremennaya geometriya, Metodы i prilojeniya, Tom 1, Dubrovin B.A., Novikov S.P., Fomenko A.T., 1998
31. Sovremennaya geometriya i eyo prilojeniya – 2019. Sbornik trudov. – Kazan:

Izdatelstvo Kazanskogo universiteta, 2019. – 177 c https://kpfu.ru/portal/docs/F_954797646/GEOMETRY2019_5.pdf

32. Juan Gomes. Kogda pryaмые iskrivlyayutsya. Neevklidovы geometrii. Mir matematiki. 2014. https://bookshake.net/b/tom-4-kogda-pryamye-iskrivlyayutsya-neevklidovy-geometrii-zhuan-gomes.
33. Turgunbaev R.M. Matematik analizni o'qitishning tashxislovchi maqsadlari va ularga mos masalalar sistemasi. Monografiya.–T.: "Innovatsiya-Ziyo". 2020. 120 b.
34. http://edu.uz – O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi.
35. http://lex.uz – O'zbekiston Respublikasi Qonun hujjatlari ma'lumotlari milliy bazasi.
36. http://bimm.uz – Oliy ta'lim tizimi pedagog va rahbar kadrlarini qayta tayyorlash va ularning malakasini oshirishni tashkil etish Bosh ilmiy-metodik markazi.
37. http://ziyonet.uz – Ta'lim portali ZiyoNET.
38. http://natlib.uz – Alisher Navoiy nomidagi O'zbekiston Milliy kutubxonasi.
39. http://www.math.usf.edu/~eclark/numtheory_links.html.
40. http://joshua.smcvt.edu/linearalgebra/- Jim Hefferon. linear algebra.
41. https://www.krugosvet.ru/enc/nauka_i_tehnika/matematika/ALGEBRA_ABSTRAKTNAYA.html
42. https://math.fandom.com/ru/
43. https://mipt.ru/education/chair/mathematics/upload/ff4/Umnov-AnGeom-i-LinAl-arph0duocc9.pdf
44. https://my-shop.ru/shop/catalogue/8323/sort/a/page/1.html