BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI HUZURIDAGI PEDAGOG KADRLARNI QAYTA TAYYORLASH VA ULARNING MALAKASINI OSHIRISH MINTAQAVIY MARKAZI

# KO’RGAZMALI GEOMETRIYA

2023

**Parmonov H.F.** katta o‘qituvchi.

**O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI**
**OLIY TA’LIM, FAN VA INNOVATSIYALAR VAZIRLIGI**

**BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI HUZURIDAGI PEDAGOG KADRLARNI QAYTA TAYYORLASH VA ULARNING MALAKASINI OSHIRISH MINTAQAVIY MARKAZI**

# “KO’RGAZMALI GEOMETRIYA”

MODULI BO‘YICHA

# O‘QUV-USLUBIY MAJMUA

**Matematika**

**Buxoro – 2023**

Modulning o`quv-uslubiy majmuasi Oliy ta'lim, fan va innovatsiyalar vazirligining 2023 yil 25 avgustdagi 391-sonli buyrug'i bilan tasdiqlangan o`quv dasturi va o`quv rejasiga muvofiq ishlab chiqilgan.

**Tuzuvchi:** **H.F. Parmonov** – katta o'qituvchi.

**Taqrizchi:** **H.R. Rasulov** – fizika-matematika fanlari nomzodi, dotsent.

**O`quv -uslubiy majmua Buxoro davlat universiteti Ilmiy Kengashining qarori bilan nashrga tavsiya qilingan**
**(2023 yil "29" avgustdagi 1-sonli bayonnoma)**

# MUNDARIJA

# I. ISHCHI DASTUR

## Kirish

«Ko’rgazmali geometriya» fani matematikaning bir tarmog‘i hisoblanib, u uch o‘lchamli fazodagi ob’ektlarning tekislikdagi grafik modelini qurish asoslarini o‘rganadi. Ko’pyoqliklar yoyilmasi ko’pyoqliklar bilan sirtga yaqinlashishi geometriyaning zamonaviy yo’nalishlari va ularning tatbiqlarini amaliyotga keng qo‘llash, hamda ularning kelajakdagi o‘rni masalalarini qamraydi.

## Modulning maqsadi va vazifalari

«**Ko’rgazmali geometriya**» **modulining maqsadi:** pedagog kadrlarni qayta tayyorlash va malaka oshirish kurs tinglovchilarining bu borada mamlakatimizda va xorijiy davlatlarda to‘plangan zamonaviy usullarini o‘rganish, amalda qo‘llash, ko‘nikma va malakalarini shakllantirish.

«**Ko’rgazmali geometriya**» **modulining vazifalari:**

- zamonaviy talablarga mos holda oliy ta’limning sifatini ta’minlash uchun zarur bo‘lgan pedagoglarning kasbiy kompetentlik darajasini oshirish;
- matematika fanini o‘qitish jarayoniga zamonaviy axborot-kommunikasiya texnologiyalari va xorijiy tillarni samarali tadbiq etilishini ta’minlash;
- matematika sohasidagi o‘qitishning innovasion texnologiyalar va o‘qitishning eng so‘nggi zamonaviy usullaridan foydalanishni o‘rgatish;
- tinglovchilarga «Matematika» masalalari bo‘yicha konseptual asoslar, mazmuni, tarkibi va asosiy muammolari bo‘yicha ma’lumotlar berish hamda ularni mazkur yo‘nalishda malakasini oshirishga ko‘maklashish;

## Kurs yakunida tinglovchilarning bilim, ko‘nikma va malakalari hamda kompetensiyalariga qo‘yiladigan talablar:

«**Ko’rgazmali geometriya**» moduli bo‘yicha tinglovchilar quyidagi yangi bilim, ko‘nikma, malaka hamda kompetensiyalarga ega bo‘lishlari talab etiladi:

**Tinglovchi:**

- matematik masalalarni matematik tizimlarda yechishni va standart funksiyalardan foydalanishni;

- matematikani o‘qitishda uning tatbiqlari bilan tushuntirishni, hayotiy va sohaga oid misollarni;

- matematik fanlarni o‘qitishning zamonaviy usullarini ***bilishi*** kerak.

**Tinglovchi:**

- matematik fanlarni o‘qitishda innovatsion ta’lim metodlari va vositalarini amaliyotda qo‘llash;

- talabaning o‘zlashtirish darajasini nazorat qilish va baholashning nazariy asoslari hamda innovatsion yondashuv uslublarini to‘g‘ri qo‘llay olish ***ko‘nikmalariga*** ega bo‘lishi lozim.

**Tinglovchi:**

- matematikani o‘qitish innovatsion jarayonini loyihalashtirish va tashkillashtirishning zamonaviy usullarini qo‘llash ***malakalariga*** ega bo‘lishi lozim.

**Tinglovchi:**

- matematikani o‘qitishda foydalaniladigan zamonaviy (matlab, mathcad, maple, GeoGebra va boshqalar) matematik paketlarini o‘quv jarayoniga tatbiq etish;

- matematikaning xorij va respublika miqyosidagi dolzarb muammolari, yechimlari, tendensiyalari asosida o‘quv jarayonini tashkil etish;

- oliy ta’lim tizimida matematik fanlar mazmunining uzviyligi va uzluksizligini tahlil qila olish ***kompetensiyalariga*** ega bo‘lishi lozim.

## Modulning o‘quv rejadagi boshqa modullar bilan bog‘liqligi va uzviyligi

« **ko’rgazmali geometriya**» moduli o‘quv rejadagi boshqa modullar va mutaxassislik fanlarining barcha sohalari bilan uzviy bog‘langan holda pedagoglarning bu soha bo‘yicha kasbiy pedagogik tayyorgarlik darajasini orttirishga xizmat qiladi.

## Modulning oliy ta’limdagi o‘rni

Modulni o‘zlashtirish orqali tinglovchilar matematika fanlarini o‘qitishda zamonaviy usullar yordamida ta’lim jarayonini tashkil etishda pedagogik yondashuv asoslari va bu boradagi ilg‘or tajribalarni o‘rganadilar, ularni tahlil etish, amalda qo‘llash va baholashga doir kasbiy layoqatga ega bo‘lish, ilmiy-tadqiqotda innovatsion faoliyat va ishlab chiqarish faoliyati olib borish kabi kasbiy kompetentlikka ega bo‘ladilar.

**Modul bo‘yicha soatlar taqsimoti**

| № | Modul mavzulari | Tinglovchining o‘quv yuklamasi, soat | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | Hammasi | Auditoriya o‘quv yuklamasi | | |
| | | | Jami | jumladan | |
| | | | | Nazariy mashg`ulot | Amaliy mashg`ulot |
| 1. | Elementar geometriyaning asosiy elementlari va unga doir masalalar | 4 | 4 | 2 | 2 |
| 2 | Vektor funksiya tushunchasi. | 4 | 4 | 2 | 2 |
| 3 | Geometriyaning zamonaviy yo’nalishlari va muammolari | 4 | 4 | 2 | 2 |
| 4 | Sirt tushunchasi. Sirtning ichki va tashqi geometriyasi | 4 | 4 | 2 | 2 |
| 5 | Yuza va hajm tushunchasi bilan bog’liq masalalar | 2 | 2 | | 2 |
| | **Jami** | **18** | **18** | **8** | **10** |

## NAZARIY  MAShG‘ULOTLAR MAZMUNI

**1 – Mavzu**. Elementar geometriyaning asosiy elementlari va unga doir masalalar.

**2 – Mavzu.** Vektor funksiya tushunchasi.

**3 – Mavzu.** Geometriyaning zamonaviy yo’nalishlari va muammolari.

**4 – Mavzu.** Sirt tushunchasi. Sirtning ichki va tashqi geometriyasi.

## AMALIY MASHG‘ULOTLAR MAZMUNI

**1 – Mavzu**. Elementar geometriyaning asosiy elementlari va unga doir masalalar.

**2 – Mavzu.** Vektor funksiya tushunchasi.

**3 – Mavzu.** Geometriyaning zamonaviy yo’nalishlari va muammolari.

**4 – Mavzu.** Sirt tushunchasi. Sirtning ichki va tashqi geometriyasi.

**5 – Mavzu.** Yuza va hajm tushunchasi bilan bog’liq masalalar.

## II. MODULNI O’QITIShDA FOYDALANILADIGAN INTREFAOL TA’LIM METODLARI

**BINAR MA’RUZA.** “Binar”s o‘zi lotinchadan olingan bo‘lib, “qo‘sh”, “ikki” degan ma’noda qo‘llaniladi. Bunday mashg‘ulotning olib borilishi ikki vakil:o‘qituvchi va metodist;o‘qituvchi vao‘quvchi; taklif etilgan mutaxassis vao‘qituvchi;o‘qituvchi va tyutor (maslahatchi)o‘rtasidagi interfaol suhbat, bahs-munozara va axborotlar almashinuvini namoyon qiladi. Jarayonni bunday tashkillashtirishdan ko‘zlangan asosiy maqsad yangio‘quv ma’lumotlari va axborotlarini ikki mutaxassis yoki ishtirokchi nuqtayi nazarlarini taqqoslash orqali yoritib berishdan iborat.

**TRENING**. Trening zamonaviy ta’lim shakllaridan biri hisoblanib, u interfaol mashg‘ulotlarni amalga oshirishningo‘ziga xos ko‘rinishidir. Treninglaro‘rganilishi lozim bo‘lgan nazariy g‘oya va fikrlarni amaliy ish hamda mashqlar davomidao‘zlashtirish imkoniyatini beradi va ta’lim oluvchilarda shaxslararoo‘zaro hamkorlikning samarali ko‘nikmasini shakllantirishga, shuningdek, mutaxassis kasbiy kompetentligining umumiy darajasini oshirishga yo‘naltiriladi.

Har qanday pedagogik treningni tashkil etish quyidagi bosqichlardan tashkil topadi:

1. Tashkiliy bosqich: guruhni yig‘ish yoki shakllantirish.
2. Boshlang‘ich bosqich: guruh me’yorlarini ishlab chiqish, tanishuv va mashg‘ulotdan kutuvlarni aniqlash.
3. Faoliyatli bosqich: trening turi vao‘tkazish metodikasini belgilash.
4. Yakuniy bosqich (refleksiya).

Trening mobaynida talabalar nazariy ma’lumotlarnio‘zlashtirish bilan birga, ularda bilish, emmotsional va xulq-atvor ko‘nikmalari ham rivojlanib boradi.

**“SWOT-TAHLIL” METODI.** Metodning maqsadi: mavjud nazariy bilim lar va amaliy tajribalarni tahlil qilish, taqqoslash orqali muammoni hal etish yo‘llarni topishga, bilimlarni mustahkamlash, takrorlash, baholashga, mustaqil, tanqidiy fikrlashni, nostandart tafakkurni shakllantirishga xizmat qiladi.

S – (strength) kuchli tomonlari

W – (weakness) zaif, kuchsiz tomonlari

O – (opportunity) imkoniyatlari

T – (threat) to‘siqlar

**“KEYS-STADI” METODI.** «Keys-stadi» - inglizcha so‘z bo‘lib, («case» – aniq vaziyat, hodisa, «study» – o‘rganmoq, tahlil qilmoq) aniq vaziyatlarni o‘rganish, tahlil qilish asosida o‘qitishni amalga oshirishga qaratilgan metod hisoblanadi. Keysda ochiq axborotlardan yoki aniq voqyea-hodisadan vaziyat sifatida tahlil uchun foydalanish mumkin.

Mazkur metod muammoli ta’lim metodidan farqli ravishda real vaziyatlarni o‘rganish asosida aniq qarorlar qabul qilishga asoslanadi. Agar u o‘quv jarayonida ma’lum bir maqsadga erishish yo‘li sifatida qo‘llanilsa, metod xarakteriga ega bo‘ladi, biror bir jarayonni tadqiq etishda bosqichma-bosqich, ma’lum bir algoritm asosida amalga oshirilsa, texnologik jihatni o‘zida aks ettiradi

“Keys metodi” ni amalga oshirish bosqichlari Ish bosqichlari Faoliyat shakli va mazmuni

1-bosqich: Keys va uning axborot ta’minoti bilan tanishtirish

- yakka tartibdagi audio-vizual ish;
- keys bilan tanishish (matnli, audio yoki media shaklda);
- axborotni umumlashtirish;
- axborot tahlili;
- muammolarni aniqlash

2-bosqich: Keysni aniqlashtirish va o‘quv topshirig’ni belgilash

- individual va guruhda ishlash;
- muammolarni dolzarblik iyerarxiyasini aniqlash;
- asosiy muammoli vaziyatni belgilash

3-bosqich: Keysdagi asosiy muammoni tahlil etish orqali o‘quv topshirig’ining yechimini izlash, hal etish yo‘llarini ishlab chiqish

- individual va guruhda ishlash;
- muqobil yechim yo‘llarini ishlab chiqish;
- har bir yechimning imkoniyatlari va to‘siqlarni tahlil qilish;
- muqobil yechimlarni tanlash

4-bosqich: Keys yechimini shakllantirish va asoslash, taqdimot.

- yakka va guruhda ishlash;
- muqobil variantlarni amalda qo‘llash imkoniyatlarini asoslash;
- ijodiy-loyiha taqdimotini tayyorlash;
- yakuniy xulosa va vaziyat yechimining amaliy aspektlarini yoritish

“Keys-stadi” metodining o‘ziga xos xususiyatlari:

-izlanishga doir faoliyatning mavjud bo‘lishi.
-jamoaviy va guruhlarda o‘qitish.
-individul, guruhli va jamoaviy ish shakllari integrasiyasi.
-xilma-xil o‘quv loyihalarini ishlab chiqish.
-muvaffaqiyatga erishish uchun ta’lim oluvchilarning o‘quv-bilish faoliyatini rag’batlantirish

Keys harakatlari o‘z ichiga quyidagilar savollar bo‘yicha faoliyatni qamrab oladi:

-Kim? (Who?)
-Qachon? (When?)
-Qayerda? (Where?)
-Nima uchun? (Why?)
-Qanday?/ Qanaqa? (How?)
-Nima? (natija) (What?).

**Keys.** 5-sinf darsligining sizga taqdim etilgan bitta mavzusi materiallari bo‘yicha keys topshirig’ini tuzing, bu keys asosida o‘tiladigan darsni loyihalashtiring, u bo‘yicha taqdimot tayyorlang va uni namoyish eting.

**«FSMU» METODI.** Metodning maqsadi: Mazkur metod ishtirokchilardagi umumiy fikrlardan xususiy xulosalar chiqarish, taqqoslash, qiyoslash orqali axborotni o‘zlashtirish, xulosalash, shuningdek, mustaqil ijodiy fikrlash ko‘nikmalarini shakllantirishga xizmat qiladi. Mazkur metoddan ma’ruza mashg’ulotlarida, mustahkamlashda, o‘tilgan mavzuni so‘rashda, uyga vazifa berishda hamda amaliy mashg’ulot natijalarini tahlil etishda foydalanish tavsiya etiladi.

Metodni amalga oshirish tartibi:

- qatnashchilarga mavzuga oid bo‘lgan yakuniy xulosa yoki g’oya taklif etiladi;
- har bir ishtirokchiga FSMU metodining bosqichlari yozilgan qog’ozlarni tarqatiladi:
- ishtirokchilarning munosabatlari individual yoki guruhiy tartibda taqdimot qilinadi.

FSMU tahlili qatnashchilarda kasbiy-nazariy bilimlarni amaliy mashqlar va mavjud tajribalar asosida tezroq va muvaffaqiyatli o‘zlashtirilishiga asos bo‘ladi.

*Namuna.*

Fikr: PISA va TIMSS qiyosiy xalqaro tadqiqotlar natijalari mamlakatimizda matematika fanini o‘qitish tizimini tahlil qilish va takomillashtirishni taqozo etadi.

Topshiriq: Mazkur fikrga nisbatan munosabatingizni FSMU orqali tahlil qiling.

**“TUSHUNCHALAR TAHLILI” METODI.** Metodning maqsadi: mazkur metod o‘quvchilar yoki qatnashchilarni mavzu buyicha tayanch tushunchalarni o‘zlashtirish darajasini aniqlash, o‘z bilimlarini mustaqil ravishda tekshirish, baholash, shuningdek, yangi mavzu buyicha dastlabki bilimlar darajasini tashxis qilish maqsadida qo‘llaniladi. Metodni amalga oshirish tartibi:

- ishtirokchilar mashg’ulot qoidalari bilan tanishtiriladi;
- o‘quvchilarga mavzuga yoki bobga tegishli bo‘lgan so‘zlar, tushunchalar nomi tushirilgan tarqatmalar beriladi ( individual yoki guruhli tartibda);
- o‘quvchilar mazkur tushunchalar qanday ma’no anglatishini, qachon, qanday xolatlarda qo‘llanilishi haqida yozma ma’lumotlar beradilar ;
- Belgilangan vaqt yakuniga yetgacho‘qituvchi berilgan tushunchalarning

to‘g`ri va  to‘liq izohinio‘qib eshittiradi yoki slayd orqali namoyish etadi;

- Har bir ishtirokchi berilgan  to‘g`ri javoblar bilano‘zining ishini taqqoslaydi, farqlarini aniqlaydi vao‘z bilim darajasini tekshirib, baholaydi.

**VENN DIAGRAMMASI METODI.** Venn diagrammasi - grafik ko‘rinishda bo‘lib, olingan natijalarni umumlashtirib, ulardan bir butun xulosa chiqarishga, ikki va undan ortiq predmetlarni (ko‘rinish, fakt, tushuncha) taqqoslash, tahlil qilish va o‘rganishda qo‘llaniladi. Diagramma ikki va undan ortiq aylanani kesishmasidan hosil bo‘ladi.

Metodning maqsadi: Bu metod grafik tasvir orqali o‘qitishni tashkil etish shakli bo‘lib, u ikkita o‘zaro kesishgan aylana tasviri orqali ifodalanadi. Mazkur metod turli tushunchalar, asoslar, tasavurlarning analiz va sintezini ikki aspekt orqali ko‘rib chiqish, ularning umumiy va farqlovchi jihatlarini aniqlash, taqqoslash imkonini beradi.

Metodni amalga oshirish tartibi:

- ishtirokchilar ikki kishidan iborat juftliklarga birlashtiriladilar va ularga ko‘rib chiqilayotgan tushuncha yoki asosning o‘ziga xos, farqli jihatlarini (yoki aksi) doiralar ichiga yozib chiqish taklif etiladi;

- navbatdagi bosqichda ishtirokchilar to‘rt kishidan iborat kichik guruhlarga birlashtiriladi va har bir juftliko‘z tahlili bilan guruh a’zolarini tanishtiradilar;

- juftliklarning tahlili eshitilgach, ular birgalashib, ko‘rib chiqilayotgan muammo yohud tushunchalarning umumiy jihatlarini (yoki farqini) izlab topadilar, umumlashtiradilar va doirachalarning kesishgan qismiga yozadilar.

*Namuna:* PISA va TIMSS xalqaro tadqiqotlar natijalarini qiyosiy tahlil qiling.

**KICHIK GURUHLARDA ISHLASH METODI**. Kichik guruhlarda ishlash orqali o‘rganish - ma’lum muammoning yechimini topishga va o‘quvchilar faolligini oshirishga qaratilgan darsdagi ijodiy hamkorlikdagi ish. Bosqichlari: guruhlarga bo‘lish, muammoni guruhlarda muxokama qilish, muammoning yechimlari taqdimoti, xulosalash.

*Kichik guruhlarda hamkorlikda o‘qitish*

Bu yondashuvda kichik guruhlar 4 ta o‘quvchidan tashkil topadi. O‘qituvchi avval mavzuni tushuntiradi, so‘ngra o‘quvchilarning mustaqil ishlari tashkil etiladi. O‘quvchilarga berilgan o‘quv topshiriqlari 4 qismga ajratilib, har bir o‘quvchi topshiriqning ma’lum qismini bajaradi. Topshiriq yakunida har bir o‘quvchi o‘zi bajargan qism yuzasidan fikr yuritib, o‘rtoqlarini o‘qitadi, so‘ngra guruh a’zolari tomonidan topshiriq yuzasidan umumiy xulosa chiqariladi. O‘qituvchi har bir kichik guruh axborotini tinglaydi va test savollari yordamida bilimlarni nazorat qilib baholaydi.

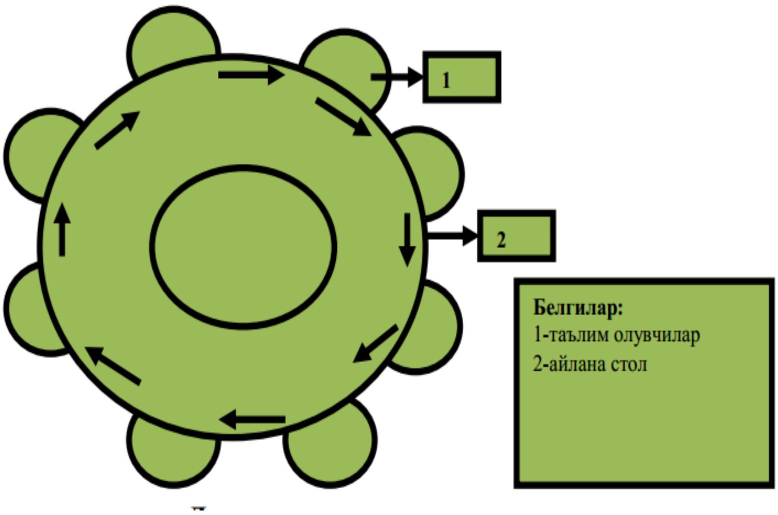
O‘quvchilarning kichik guruhlardagi o‘quv faoliyati o‘yin (turnir, musobaqa) shaklida, individual tarzda ham tashkil etilishi mumkin

*Kichik guruhlarda ijodiy izlanishni tashkil etish*

Kichik guruhlarda ijodiy izlanishni tashkil etish metodi 1976 yili Tel-Aviv universiteti professori Sh.Sharan tomonidan ishlab chiqilgan. Bu metodda ko‘proqo‘quvchilarning mustaqil va ijodiy ishiga e’tibor qaratiladi.

O‘quvchilar alohida-alohida yoki 6 kishilik kichik guruhlarda ijodiy izlanish olib boradilar. Ijodiy izlanish kichik guruhlarda tashkil etilganda darsda o‘rganish lozim bo‘lgan o‘quv materiali kichik qismlarga ajratiladi. Keyin bu qismlar yuzasidan topshiriqlar har bir o‘quvchiga taqsimlanadi. Shunday qilib, har bir o‘quvchi umumiy topshiriqning bajarilishiga o‘z hissasini qo‘shadi. Kichik guruhlarda topshiriq yuzasidan munozara o‘tkaziladi. Guruh a’zolari birgalikda ma’ruza tayyorlaydi va sinf o‘quvchilari o‘rtasida o‘z ijodiy izlanishlari natijasini e’lon qiladi. Kichik guruhlar o‘rtasida o‘tkazilgan o‘quv bahsi, munozara o‘quvchilar jamoasining hamkorlikda bajargan mustaqil faoliyatining natijasi, yakuni sanaladi. Hamkorlikda ishlash natijasida qo‘lga kiritilgan muvaffaqiyatlar sinf jamoasining har bir o‘quvchining muntazam va faol aqliy mehnat qilishiga, kichik guruhlarni, umuman sinf jamoasini jipslashtirishga, avval o‘zlashtirilgan bilim, ko‘nikma va malakalarni yangi kutilmagan vaziyatlarda qo‘llanib, yangi bilimlarning o‘zlashtirishiga bog’liq bo‘ladi.

**“DAVRA SUHBATI” METODI** – aylana stol atrofida berilgan muammo yoki savollar yuzasidan ta’lim oluvchilar tomonidano‘z fikr-mulohazalarini bildirish orqali olib boriladigano‘qitish metodidir. “Davra suhbati” metodi qo‘llanilganda stol-stullarni doira shaklida joylashtirish kerak. Bu har bir ta’lim oluvchining bir-biri bilan “ko‘z aloqasi”nio‘rnatib turishiga yordam beradi. Davra suhbatining og‘zaki va yozma shakllari mavjuddir. Og‘zaki davra suhbatida ta’lim beruvchi mavzuni boshlab beradi va ta’lim oluvchilardan ushbu savol bo‘yichao‘z fikr-mulohazalarini bildirishlarini s o‘raydi va aylana bo‘ylab har bir ta’lim oluvchio‘z fikr-mulohazalarini og‘zaki bayon etadilar. S o‘zlayotgan ta’lim oluvchini barcha diqqat bilan tinglaydi, agar muhokama qilish lozim bo‘lsa, barcha fikr-mulohazalar tinglanib bo‘lingandan s o‘ng muhokama qilinadi. Bu esa ta’lim oluvchilarning mustaqil fikrlashiga va nutq madaniyatining rivojlanishiga yordam beradi. Quyida “Davra suhbati” metodining tuzilmasi keltirilgan.




**Rasm. Davra stolining tuzilmasi**

Yozma davra suhbatida ham stol-stullar aylana shaklida joylashtirilib, har bir ta’lim oluvchiga convert qog‘ozi beriladi. Har bir ta’lim oluvchi convert ustiga ma’lum bir mavzu bo‘yicha o‘z savolini beradi va “Javob varaqasi”ning biriga o‘z javobini yozib, convert ichiga solib qo‘yadi. Shundan s o‘ng konvertni soat yo‘nalishi bo‘yicha yonidagi ta’lim oluvchiga uzatadi. Konvertni olgan ta’lim oluvchio‘z javobini “Javoblar varaqasi”ning biriga yozib, konvert ichiga solib qo‘yadi va yonidagi ta’lim oluvchiga uzatadi. Barcha konvertlar aylana bo‘ylab harakatlanadi. Yakuniy qismda barcha konvertlar yig‘ib olinib, tahlil qilinadi.

**“Davra suhbati” metodining bosqichlari quyidagilardan iborat:**

1. Mashg‘ulot mavzusi e’lon qilinadi.

2. Ta’lim beruvchi ta’lim oluvchilarni mashg‘ulotnio‘tkazish tartibi bilan tanishtiradi.

3. Har bir ta’lim oluvchiga bittadan konvert va javoblar yozish uchun guruhda necha ta’lim oluvchi bo‘lsa, shunchadan “Javoblar varaqalari”ni tarqatilib, har bir javobni yozish uchun ajratilgan vaqt belgilab qo‘yiladi. Ta’lim oluvchi konvertga va “Javoblar varaqalari”gao‘z ismi-sharifini yozadi.

4. Ta’lim oluvchi konvert ustiga mavzu bo‘yichao‘z savolini yozadi va “Javoblar varaqasi”gao‘z javobini yozib, konvert ichiga solib qo‘yadi.

5. Konvertga savol yozgan ta’lim oluvchi konvertni soat yo‘nalishi bo‘yicha yonidagi ta’lim oluvchiga uzatadi.

6. Konvertni olgan ta’lim oluvchi konvert ustidagi savolga “Javoblar varaqalari”dan biriga javob yozadi va konvert ichiga solib qo‘yadi hamda yonidagi ta’lim oluvchiga uzatadi.

7. Konvert davra stoli bo‘ylab aylanib, yana savol yozgan ta’lim oluvchiningo‘ziga qaytib keladi. Savol yozgan ta’lim oluvchi konvertdagi “Javoblar varaqalari”ni baholaydi.

8. Barcha konvertlar yig‘ib olinadi va tahlil qilinadi.

Ushbu metod orqali ta’lim oluvchilar berilgan mavzu bo‘yichao‘zlarining bilimlarini qisqa va aniq ifoda eta oladilar. Bundan tashqari ushbu metod orqali ta’lim oluvchilarni muayyan mavzu bo‘yicha baholash imkoniyati yaratiladi. Bunda ta’lim oluvchilaro‘zlari bergan savollariga guruhdagi boshqa ta’lim oluvchilar bergan javoblarini baholashlari va ta’lim beruvchi ham ta’lim oluvchilarni obyektiv baholashi mumkin.

**MUAMMOLI TA’LIM METODI.** Ta’lim jarayonida o‘quvchilarning bilish faoliyatini faollashtirish hamda ularning intellektual imkoniyatlaridan yuqori

darajada foydalanish quyidagi umumiy omillarga bog’liq bo‘ladi:
-o‘rganilayotgan mavzu yuzasidan muammoli savollar tizimi tuzish;
-qo‘yilgan muammoli savollar tizimi asosida suhbat metodi orqali tushuntiriladigan mavzu materiallarini o‘rgatish va uning tub mohiyatini ochib berish;
-muammoli savol asosida izlanish xarakteridagi o‘quv vazifalarini qo‘yish.

Yuqoridagi bosqichlar asosida o‘quv materiali tushuntiriladiganda o‘quvchilar o‘zlari darrov tushunib yetmaydigan fakt va tushunchalarga duch keladilar. Natijada o‘rganilayotgan mavzu materiali bilan o‘quvchilar orasida muammoli vaziyat hosil bo‘ladi.

Muammoli vaziyatning roli va ahamiyatini aniqlash o‘quvchilarning aktiv fikrlash faoliyatini psixologik, pedagogik qonuniyatlarini hisobga olish asosida o‘quv jarayonini qayta qurish muammoli ta’limning asosiy g’oyasini belgilab beradi. Muammoli vaziyatlarni hal qilish asosida hosil qilingan dars jarayoni muammoli ta’lim deyiladi.

Muammoli ta’limda o‘qituvchi faoliyati shundan iboratki, u zarur hollarda eng murakkab tushunchalar mazmunni tushuntira boribo‘rganilayotgan mavzu materiali bilan o‘quvchilar orasidagi muntazam ravishda muammoli vaziyatlar vujudga keltiriladi, o‘quvchilarni faktlardan xabardor qiladi, natijada o‘quvchilar bu faktlarni analiz qilish asosida mustaqil ravishda xulosa chiqaradilar va umumlashtiradilar.

**EVRISTIK TA’LIM METODI.** Evristika degan so‘zning ma’nosi savol javobga asosan “topaman” demakdir. Evristik metod bilan o‘qitish maktablarda asosan XIX asr boshlaridan boshlab qo‘llanila boshladi.

Mashg’ulotlar qiziqarli bo‘lishi uchun, bu mashg’ulotlardagi har bir masala yoki topshiriq so‘zma-so‘z quruq yodlash uchun emas, balki ularning oliy faoliyatlarini ishga soladigan xarakteri bo‘lishi kerak. Amerikalik olim D. Poya evristik ta’lim metodi to‘g’risida shunday degan edi. Evristikani maqsadi yangiliklarga olib boruvchi metod va qoidalarni izlash demakdir. U evristik metod mohiyatini quyidagidek izchillikda tuzilgan reja orqali amalga oshirishni tavsiya qiladi:

-masalaning quyilishini tushunish;

-masalaning yechish rejaini tuzish;

-tuzilgan rejani amalga oshirish;

-orqaga nazar tashlash (hosil qilingan yechimni tekshirish).

Bu rejani amalga oshirish jarayonida o‘qituvchilar quyidagi savollarga javob topadilar:

-Masalada nima noma’lum?

-Masalada nimalar ma’lum?

-Masalaning sharti nimalardan iborat?

-Ilgari shunga o‘xshagan masalalar yechilganmi?

-Agar shunga o‘xshagan masalalar yechilgan bo‘lsa, undan foydalanib qo‘yilayotgan masalani yecha oladimi?

Albatta yuqoridagi reja-sxema o‘quvchilarning ijodiy fikrlash faoliyatilarni shakllantiradi, ammo bu reja-sxema o‘quvchilarning ijodiy qobiliyatlarini shakllantiruvchi birdan bir yo‘l bo‘la olmaydi.

**AQLIY HUJUM METODI. U**umumiy muammo bo‘yicha o‘quvchilarni ijodiy ishga, o‘zaro muloqotga chorlash. Bosqichlari: muammoli vaziyatni keltirib chiqarish; uning yechimini topish uchun o‘quvchilarni jalb qilish; turli yechimlar taqdimotini eshitish; yechimlarni solishtirish va tanlash; xulosalash.

**MUSTAQIL ISHLASH METODI**. Vaqti-vaqti bilan o‘tkazib turiladigan, o‘quvchilarning mustaqil o‘rganish, darslik bilan ishlash va mustaqil amaliy faoliyat bilan shug’ullanish ko‘nikmalarini shakllantiradigan, har bir o‘quvchiga alohida yoki umumiy tarzda tashkil qilinadigan topshiriqni bajartirish; o‘quvchilarning amaliy faoliyatiga aralashmay, tashqaridan teskari aloqa- muloqot yordamida yo‘naltirib boshqarish va nazorat qilish.

**JUFTLIKDA ISHLASHMETODI**. Biror mavzu bo‘yicha yonma-yon o‘tirgan o‘quvchilarni o‘zaro muloqotga chorlash; o‘zaro fikr almashish va ularni ba’zilarini tinglash.

**“BAHS-MUNOZARA” METODI.** Metod quyidagi bosqichlarda amalga oshiriladi: o‘qituvchi munozara mavzusini tanlaydi va o‘quvchilarni munozaraga taklif etadi; o‘qituvchi o‘quvchilarga muammo bo‘yicha «aqliy hujum» o‘tkazishga chorlaydi va uni o‘tkazish tartibini belgilaydi; o‘qituvchi «Aqliy hujum» vaqtida bildirilgan turli g’oya va fikrlarni yozib boradi yoki bu ishni bajarish uchun o‘quvchilardan birini kotib etib tayinlaydi hamda bu bosqichda o‘qituvchi o‘quvchilarga o‘z fikrlarini bildirishlariga sharoit yaratib beradi; o‘qituvchi o‘quvchilar bilan birgalikda, ikkinchi bosqichda «aqliy hujum» davomida bildirilgan fikr va g’oyalarni guruhlarga ajratadi, umumlashtiradi va ularni tahlil qiladi. Tahlil natijasida qo‘yilgan muammoning eng maqbul yechimi tanlanadi.

**TADQIQOT METODI.** Tadqiqot usuli o‘zlashtirish darajasining eng yuqori cho‘qisi hisoblanadi. Bu usul bilan dars o‘tilganda o‘quvchilar olgan bilimlari asosida hali o‘rganilmagan kichik bir masala ustida yakka yoki birgalashib izlanish olib borishadi, masala yechimiga doir keltirilgan taxminni izlab topilgan dalillar asosida to‘g’ri yoki noto‘g’riligini tekshirishadi va isbotlashadi. Bosqichlari: -darsda hammaga qiziqish uyg’otadigan biror obyektning xossasini aniqlash yoki u haqidagi masalani qo‘yish; -uni o‘rganish, tadqiq qilish uchun ma’lumotlar to‘plash; -muammo yoki masalaning yechishga oid taxminlar, bashoratlar qilish; -har bir bashoratning qanchalik to‘g’riligini to‘plangan ma’lumotlar asosida tahlil qilish va isbotlash; -xulosa chiqarish; -sinf oldida taqdimot qilish.

**KLASTER METODI.** Klaster metodi pedagogik, didaktik strategiyaning muayyan shakli bo‘lib, u ta’lim oluvchilarga ixtiyoriy muammo (mavzu) lar xususida erkin, ochiqo‘ylash va fikrlarni bemalol bayon etish uchun sharoit yaratishga yordam beradi. Mazkur metod turli xil g’oyalar o‘rtasidagi aloqalar fikrlash imkoniyatini beruvchi tuzilmani aniqlashni talab etadi. Ushbu metod muayyan mavzuning ta’lim oluvchilar tomonidan chuqur hamda puxta o‘zlashtirilguniga qadar fikrlash faoliyatining bir maromda bo‘lishini ta’minlashga hizmat qiladi.

«Klaster» metodidan foydalanish tavsifi:

1-bosqich. Nimaniki o‘ylagan bo‘lsangiz, shuni qog’ozga yozing. Fikringizni sifati to‘g’risida o‘ylabo‘tirmay, ularni shunchaki yozib boring.

2-bosqich. Yozuvingizning orfografiyasi yoki boshqa jihatlariga e’tibor bermang.

3-bosqich. Belgilangan vaqt nihoyasiga yetmaguncha, yozishdan to‘xtamang. Agar ma’lum muddat biror-bir g’oyani o‘ylay olmasangiz, u holda qog’ozga biror narsaning rasmini chiza boshlang. Bu harakatni yangi g’oya tug’ilgunga qadar davom ettiring.

4-bosqich. Muayyan tushuncha doirasida imkon qadar ko‘proq yangi g’oyalarni ilgari surish hamda mazkur g’oyalar o‘rtasidagi o‘zaro aloqadorlik va bog’liqlikni ko‘rsatishga harakat qiling. G’oyalar yig’indisining sifati va ular o‘rtasidagi aloqalarni ko‘rsatishni cheklamang.

## III. NAZARIY MA’LUMOTLAR

### 1 – Mavzu. Elementar geometriyaning asosiy elementlari va unga doir masalalar.

**Reja:**

1. “Negizlar” asari haqida ma’lumot.
2. “Negizlar” asarida keltirilgan ta’riflar.
3. Evklidning “Negizlar” asarida keltirilgan postulat va aksiomalar.
4. Elementar geomatriya aksiomalari.

**Tayanch iboralar**: ta’rif, postulat, aksioma, nuqta, to’g’ri chiziq, sirt, to’g’ri burchak, chegara.

Yevklidning hayoti haqidagi bizgacha juda kam ma’lumot yetib kelgan. U bizning eradan oldingi 300 yillarda yashagan. Uning ijodi
ellinistik madaniyat va fanning Aleksandriya davriga to‘g‘ri keladi. Aleksandr Makedonskiy (Iskandar Zulqamayn) vafotidan so‘ng, uning g‘oyat katta imperiyasi bo'linib ketgandan keyin iqtisodiy, siyosiy va madaniy mohiyatga ko‘ra Misming yangi poytaxti
Aleksandriya shahri birinchi o‘ringa chiqib oldi. Yevklid mana shu davrdagi eng ko‘zga ko‘ringan matematik hisoblanadi. U shoh Ptolemey davrida Aleksandriyada matematika o‘qitadi va Ptolemey asos soIgan muzeyda matematika bo‘limini tashkil qiladi. Yevklid haqida ba’zi bir afsonalar ham saqlanib qolgan. Ulardan biri quyidagicha:
kunlardan bir kun shoh Ptolemey Yevklidga «Geometriyani o‘rganishning «Negizlar» da bayon etilganidan qisqaroq yo‘l yo'qmi?» - deb so‘ragan. Yevklid esa: «Geometriyada maxsus shohona yo’l yo‘q» - deya javob bergan. Yevklidning «Negizlar» dan tashqari «Ma’lumotlar», «Figuralami bo‘laklarga ajratish», «Optika» va bitta astronomik risolasi bizgacha yetib kelgan. Uning anchagina asarlari bizgacha yetib kelmagan. Shunday asarlaridan biri «Konus kesimlari» deb atalgan.

«Negizlar» 13 ta kitobdan iborat. Ba’zan bu kitoblarga boshqa mualliflar yozgan, ammo mazmuniga ko’ra Yevklidning oxirgi kitoblariga o‘xshab ketadigan 14-chi va 15-chi kitoblar ham qo'shiladi.

«Negizlar» ning I-VI kitoblari planimetriyaga bag‘ishlangan, VII-IX arifimetika, X umumiy o‘lchovsiz miqdorlar, XI-XIII stereometriyaga bag’ishlangan.

BIRINCHI KITOB kesmalar, uchburchakning tomonlari haqida, uchburchaklami yasash, perpendikular va parallel to‘g‘ri chiziqlar, parallelogrammlar, uchburc haklar va parallelogrammlaming yuzlari, Pifagor teoremasi haqida.

IKKINCHI KITOB ning mazmuni butunlay birinchi kitobning natijalariga asoslanadi va geometrik algebra masalalariga bag‘ishlangan.

UCHINCHI KITOB aylana va doira haqida, aylanaga o‘tkazilgan urinma va kesuvchi, ular hosil qiladigan burchaklar haqida.

TO‘RTINCHI KITOB ichki va tashqi chizilgan ko‘pburchaklar haqida, muntazam to'rtburchak, beshburchak, oltiburchak va o‘n besh burchak yasash haqida.

BESHINCHI KITOB nisbatlar nazariyasiga bag‘ishlangan. Bu nazariya geometriyaga umumiy o‘lchovsiz kesmalarni yoqlash uchun kiritilgan.

OLTINCHI KITOB nisbatlar nazariyasining o‘xshashliklariga tatbiqi. Bu kitobda ana shu tatbiq geometrik algebraning sohasini biroz kengaytiradi.

«Negizlar» ning keyingi uch kitobi -VII, VIII va IX arifmetikaga bag’ishlangan.

YETTINCHI KITOB to'rtta guruhga bo‘lingan: birinchi guruh ikki va uchta sonning eng katta umumiy bo‘luvchisini topish, Yevklid algoritmi deb ataluvchi qoida mana shu guruhda. Ikkinchi guruh proporsiyalar nazariyasi va proporsiyaning ba’zi teoremalari haqida.

Masalan, 31-jumlasi quyidagicha: «Har qanday murakkab son biror boshlang‘ich son bilan o‘lchanadi». Bu jumlani Yevklid mana bunday isbotlaydi: agar A murakkab son bo‘Isa, u holda A ning bo'luvchisi bo‘Igan V son mavjud. Agar V tub son bo’lsa, teorema isbot bo’ladi. Agar V ham murakkab son bo’lsa, u holda V ning bo’luvchisi bo’lgan S son mavjud. Agar S tub son bo’lsa, teorema isbot bo‘ldi. Agar S ham murakkab bolsa, yuqoridagi jarayonni davom ettiramiz va A, V, S,..., sonlar ketma-ketligini hosil qilamiz, ular A >V >S . . . tartibda joylashadi. Ammo, ma'lum qadamdan so'ng, biz tub son bo'lgan R bo'luvchiga kelamiz va teorema isbot bo'ladi.

SAKKIZINCHI KITOB da 27 jumla bo'lib, u «uzluksiz proporsiyalar» deb ataladi, boshqacha aytganda, geometrik progressiyalarga bag'ishlangan.

O'N BIRINCHI KITOB 39 ta jumladan iborat. Odatdagi stereometriya darsliklari kabi to'g'ri chiziqlar va tekisliklarning perpendikularligi, parallelligi, tekisliklar va ular hosil qiladigan burchaklar bilan boshlanadi. So'ngra parallelepiped va prizma o'rganiladi.

O'N IKKINCHI KITOB da 18 ta jumla bor. Unda piramida, konus, silindr kabi jismlar hajmlarining nisbatini o'rganishga qamrash metodi tatbiq qilingan. Qizig'i shundaki, Yevklid hech yerda doira yuzini yoki shar hajmini hisoblashni keltirmaydi. Bundan Yevklid ulami hisoblashni bilmagan degan xulosa chiqmaydi. Bu ishlar geometriyaga emas, balki amaliy geodeziyaga taalluqli bo'lgan.

O'N UCHINCHI KITOB da 18 ta jumla bor. Bunda biroz IX kitob materiallari - muntazam ko'pburchaklarni doriaga ichki chizishga qaytadi, chunki bu materiallar unga muntazam ko'pyoqlilarni tushuntirish uchun zarur bo'ladi. Yevklid beshta muntazam ko'pyoqlilarni sferaga ichki chizilgan kabi qaraydi. Xulosa sifatida shularni aytish kerakki, «Negizlar» ning mazmuni bu asar qadimgi matematika asoslari sistemasidan iborat, u elementar geometriya, ratsional sonlar nazariyasi asoslari, miqdorlar nisbatan umumiy nazariyasi asoslari va unga asoslanuvchi kvadrat va bikvadrat irratsionalliklar, geometrik algebra va qamrash metodlaridan iborat.

Evklidning har bir kitobi ta`rif va tushunchalardan boshlanadi. Birinchi kitobida 23 ta ta`rif keltirilgan. Bu ta`riflardan 8 tasini keltiramiz.

***1—ta`rif.*** Nuqta—bo`laklarga ega emas.

***2—ta`rif***. Chiziq—ensiz uzunlik.

***3—ta`rif***. Chiziqning chegarasi — nuqtalardan iborat.

***4—ta`rif***. To`gri chiziq — o`zining barcha nuqtalariga nisbatan bir xil joylashgan chiziq.

***5—ta`rif.*** Sirt— faqat uzunlikka va enga ega.

***6—ta`rif.*** Sirtning chegaralari chiziqlardan iborat.

***7—ta`rif.*** Tekislik — unda yotadigan barcha to`g'ri chiziqlarga nisbatan bir xil joylashgan sirt.

***8—ta`rif.*** Yassi burchak —bir tekislikdagi ikkita kesishuvchi chiziqning bir —biridan og'ishi.

Yevklid ta'riflaridagi kamchiliklarni ko'rishimiz uchun, avvalo, ta'rflarga qo'yiladigan talablarni bilishimiz kerak.

Birinchidan, geometrik tushunchalar ikki guruhga - asosiy va hosilaviy tushunchalarga bo'linishi lozim.

Ikkinchidan, ta'rif ta'riflanadigan tushunchaning ma'nosini ochib berish bilan ta'riflanadigan tushunchaning boshqa hamma xossalarini mantiqiy chiqarish uchun tayanch bo'lishi kerak. Masalan, aylana diametrining ta'rifi diametr aylanani teng ikkiga bo'lishni isbotlash yoki diametriga tiralgan burchak to'g'ri burchakligini isbotlash imkonini beradi.

Uchinchidan, har bir ta'rif yangi tushunchani tanish tushunchaga keltirish bilan ma'lum mantiqiy prinsip, jins va turni ko'rsatish orqali tuziladi. Masalan, diametrning ta'rifi uni umumiyroq tushuncha vatarga keltiradi.

To'rtinchidan, ta'rif ortiqcha belgilarga ega bo'lmasligi lozim. Masalan, burchak bissektrisasi nuqtalari burchak tomonlaridan barobar uzoqlikda yotuvchi, burchakni teng ikkiga bo'luvchi to'g'ri chiziq deb ta'riflash ortiqcha belgilarga ega.

Beshinchidan, ayni bir tushunchaga ikki xil ta'rif berilsa, ularning teng kuchli ekanini isbotlash lozim.

Ana endi Yevklidning kamchiliklariga to'xtaylik: u asosiy tushunchalar ro'yxatini bermagan. Biz ta'riflanmaydigan tushunchalar - nuqta, to'g'ri chiziq, tekislik va sirtga ta'rif bergan.

Yevklid hamma geometrik tushunchalarni ta'riflashga uringan. Buning esa iloji yo‘q, albatta. Masalan, u nuqta, to‘g‘ri chiziq, sirtni «qism», «uzluksiz», «kenglik» tushunchalari orqali ta’riflaydi. Boshqa joyda esa, chiziq va nuqtani «chegara» tushunchasi orqali ta’riflaydi. Ba’zi ta’riflari tushunarsiz. Masalan, to'g’ri chiziqning ta’rifini oling. Yevklidda hosilaviy tushunchalaming ta’riflari yaxshi, ammo ular ham ortiqchalikka ega. Masalan, «Doiraning diametri markaz orqali o‘tuvchi ikki tomonidan doira aylanasi bilan chegaralangan to‘g‘ri chiziqdir, u doirani teng ikkiga bo‘ladi». Ta’rifning ikkinchi qismi ortiqcha, uni teorema sifatida isbotlash mumkin.

Endi Yevklidning postulatlari va aksiomalarini qaraylik.

**POSTULATLAR.**

1. Har bir nuqtadan har qanday ikkinchi nuqtagacha to‘g‘ri chiziq o’tkazish mumkinligi talab qilinadi.
2. Va har bir chegaralangan to‘g‘ri chiziqni cheksiz davom ettirish mumkinligi talab qilinadi.
3. Va har qanday nuqtani markaz qilib, ixtiyoriy radiusli aylana chizish mumkinligi talab qilinadi.
4. Va hamma to‘g‘ri burchaklar o‘zaro teng boiilishi talab qilinadi.
5. Ikki to`g’ri chiziqni kesuvchi to`g’ri chiziq ular bilan ichki bir tomonli burchaklar hosil qiladi, bu ikki to`g’ri chiziq ichki bir tomonli burchaklar yig’indisi ikki to`g’ri burchakdan kichik bo`lgan tomonda kesishadi.

Aksiomalar bilan postulatalarning farqi bormi? Ba’zi matematiklarning fikriga qaraganda postulatlarda geometrik yasashlar qatnashadi. Lekin hozirgi zamon matematikasi nuqtai-nazaridan qaraganda aksiomalar bilan postulatlarning farqi yo‘q, ularni aksiomalar deb atasa ham bo‘ladi. Yevklid aksiomalar sistemasining eng muhim kamchiligi ularning to'liq emasligidir. Shu sababli ham u birinchi teoremalarini isbotlashdayoq «O‘z-o‘zidan ravshan» tasdiqlardan foydalaniladi. Ular esa aksiomalar ro‘yxatida yo‘q. Bu esa matematikani tuzishdagi qat’iylik prinsipiga xilof. Bundan tashqari, Yevklidda aksiomalar sistemasi to'liq emas. Unda harakat aksiomasi, uzluksizlik va tartib aksiomalari yetishmaydi. Shu aytilganlardan, Yevklid birinchi bo‘lib matematikani aksiomatik tuzishga uringanini va ma’lum muvafaqqiyatlarga erishganini ko'ramiz.

**Aksiomalar**

I. Bitta miqdorga teng miqdorlar o`zaro teng.

II.Teng miqdorlarga teng miqdorlar qo`shilsa, teng miqdorlar hosil bo`ladi.

III. Teng miqdordan teng miqdorni ayirsak, teng miqdorlar hosil bo`ladi.

IV. Teng bo`lmagan miqdorga teng miqdorlarni qo`shsak, teng bo`lmagan miqdorlar hosil bo`ladi.

V.Teng miqdorlarni ikkilantirsak, teng miqdorlar hosil bo`ladi.

VI.Teng miqdorlarning yarimlari teng miqdorlar bo`ladi.

VII.Ustma — ust tushuvchi miqdorlar teng.

VIII.Butun miqdor qismdan katta.

IX.Ikki to`g’ri chiziq fazoni chegaralay olmaydi.

Negizlar asarining ba`zi nashrlarida *IV, V* postulatlar aksioma deb olinadi. Shuning uchun V postulat *XI* aksioma deb ham yuritiladi. Hozircha Evklid aksioma va postulatni qaysi prinsipga asosan olganligi aniqmasligicha qolmoqda.

Evklid aksiomalardan so`ng teoremalarni mantiqiy bog’liqlik tartibini qat`iy etib joylashtirgan. Ya`ni, keltirilgan har bir teoremani oldin keltirilgan tasdiq, aksioma va postulatlarga tayangan holda isbotlash mumkin.

Barcha keyingi teoremalarni qat’iy mantiqiy isbotlash uchun yetarli bo`ladigan ta`rif va aksiomalarni keltirish geometriyani asoslash deyiladi.

Geometriyani asoslash masalasi Evklid tomonidan to`g’ri qo`yildi va o`zining «Negizlar» asarida o`sha davrga nisbatan to`liq yechildi.

Evklid «Negizlar» asarining zamonaviy matematika nuqtai nazaridan qaraganda, kamchiliklari mavjud. Ba`zi bir ta`riflari ta`riflanishi zarur bo`lgan tushunchalarga asoslanadi.

Masalan, «chegara», «uzunlik» va hokazo tushunchalar. I—VIII ta`riflardan birortasi teoremalar isbotlashda foydalanilmaydi. Bu ta`riflar kitobda keltirilgan boshqa materiallarga bog'liq emas, ya`ni ularni tushirib qoldirsa ham kitobdagi keyingi mulohazalarga ta`sir qilmaydi. Bu ta`riflar faqat geometrik ob`yektlarni tasvirlash uchun kerak bo`lgan.

Postulat va aksiomalarga kelsak, umuman olganda ular muhim jumlalar hisoblanadi. Juda ko`p jumlalarni isbotlashda aksioma va postulatlardan foydalanishga to`g'ri keladi. Masalan, to`g'ri chiziq o`zining ikkita nuqtasi bilan aniqlanadi, istalgan radiusli aylana mavjud va hokazo. Lekin Evklidning isbotsiz qabul qilgan jumlalari qat`iy mantiqqa asoslangan geometriyani qurish uchun juda kamlik qiladi. Evklid ko`proq chizmalarga asoslanib fikr yuritadi.

Elementar geometriya aksiomalari besh guruhga bo'lib o'rganiladi.

**I guruh** sakkizta bog'liqlik aksiomalarini o'z ichiga oladi.

**II guruh** to'rtta tartib aksiomalaridan iborat.

**III guruh** beshta konguruentlik aksiomalaridan tuzilgan.

**IV guruh** bitta uzluksizlik aksiomasidan tashkil topgan.

**V guruh** bitta parallellik aksiomasini o'z ichiga oladi.

Bu paragrafda I guruh bog'liqlik akiomalari va ulardan kelib chiqadigan natijalar haqida to'xtalamiz.

Bog'liqlik aksiomalarida nuqta, to'g'ri chiziq va tekisliklarni o'zaro joylashishi xossalari haqida so'z yuritiladi va "tegishli" so'zi bilan ifodalanadi.

Bunda "$A$ nuqta $a$ to'g'ri chiziqqa tegishli", "$A$ nuqta $a$ to'g'ri chiziqda yotadi" va "$a$ to'g'ri chiziq $A$ nuqtadan o'tadi" kabi jumlalar teng kuchli. "$A$ nuqta $\alpha$ tekislikka tegishli", . "$A$ nuqta $\alpha$ tekislikda yotadi" va "$\alpha$ tekislik $A$ nuqtadan o'tadi" kabi jumlalar teng kuchli deb hisoblanadi. Agar $C$ nuqta $a$ va $b$ to'g'ri chiziqlarga tegishli bo'lsa, $a$ va $b$ to'g'ri chiziqlar $C$ ***nuqtada kesishadi deyiladi***. $a$ to'g'ri chiziqning barcha nuqtalari $\alpha$ tekislikka tegishli bo'lsa, $a$ to'g'ri chiziq $\alpha$ tekislikda yotadi yoki $\alpha$ tekislikka $a$ to'g'ri chiziq orqali o'tadi deb ataladi.

**Ta'rif.** $\alpha$ va $\beta$ tekisliklarning har biri $a$ to'g'ri chiziq orqali o'tsa, $\alpha$ va $\beta$ tekisliklar $a$ to'g'ri chiziq bo'yicha kesishadi deyiladi.

**$I_1$ aksioma.** $A$ va $B$ nuqtalar qanday bo'lmasin, bu nuqtalarning har biridan o'tuvchi $c$ to'g'ri chiziq mavjud.

**$I_2$ aksioma.** Turli $A$ va $B$ nuqtalar qanday bo'lmasin, bu nuqtalardan o'tuvchi bittadan ortiq bo'lmagan to'g'ri chiziq mavjud.

Bu ikki aksiomani quyidaicha ifodalash mumkin: Istalgan ikkita turli nuqtalar bu nuqtalardan o'tuvchi bitta va faqat bitta to'g'ri chiziqni aniqlaydi.

**$I_3$ aksioma.** Har bir to'g'ri chiziqda kamida ikkita nuqta yotadi. Bir to'g'ri chiziqda yotmaydigan kamida uchta nuqta mavjud.

**$I_4$ aksioma.** $A$, $B$, $C$ nuqtalar qanday bo'lmasin, bu nuqtalarning har biridan o'tuvchi $\pi$ tekislik mavjud. Har bir tekislikda kamida bitta nuqta yotadi.

**$I_5$ aksioma.** Bir to'g'ri chiziqda yotmaydigan $A$, $B$, $C$ nuqtalar qanday bo'lmasin, bu nuqtalarning har biridan o'tuvchi bittadan ortiq bo'lmagan tekislik mvjud.

**$I_6$ aksioma.** $d$ to'g'ri chiziqning $A$ va $B$ nuqtalari (ya'ni, $d$ to'g'ri chiziqqa tegishli) $\pi$ tekislikda yotsa, $d$ to'g'ri chiziq $\pi$ tekislikda yotadi.

**$I_7$ aksioma.** $\alpha$ va $\beta$ tekisliklar bitta umumiy $C$ nuqtaga ega bo'lsa (tkislikning har birida yotuvchi nuqta), ularning yana kamida bitta umumiy $D$ nuqtasi mavjud.

**$I_8$ aksioma.** Bir tekislikda yotmaydigan kamida to'rtta nuqta mavjud.

Bog'liqlik aksiomalaridan bir necha natijalar kelib chiqadi. Bu natijalardan ba'zilarini keltiramiz.

## NAZORAT SAVOLLARI

1. Evklidning geometriya rivojiga qo'shgan hissasi?
2. Evklidning "Negizlar" asarida keltirilgan ta'riflardan bir nechtasini aytib bering?
3. Evklidning V postulatasini ayting?
4. Bog'liqlik aksiomalarini ayting.
5. Tartib va kongruentlik aksiomalari.

6. Uzluksizlik va parallellik aksiomalari.

7. To'g'ri chiziqning berilishi haqidagi teoremani ayting.

## 2-Mavzu: Vektor funksiya tushunchasi.

**Reja:**

1. Vektor funksiya tushunchasi.
2. Vektor funksiyalar uzluksizligi.
3. Vektor funksiya hosilasi va xossalari.
4. Vektor funksiya integrali va xossalari.

Bizga **G-** to'g'ri chiziqdagi, tekislik ($R^2$) dagi yoki fazo ($R^3$) dagi soha berilgan bo'lsin.

**1-ta'rif.** Agar **G** sohaning har bir $t \in \mathbf{G}$ nuqtasiga biror $r(t) \in G^n$ (n$\in \overline{1,3}$) vektor mos qo'yilgan bo'lsa G sohada vektor funksiya aniqlangan deyiladi.

Huddi skalyar funksiyalar kabi vektor funksiyalarda ham limit, uzluksizlik, hosila va integral tushunchalarini kiritish mumkin.

**2-ta'rif.** Agar $t \to t_0$ bo'lganda $|r(t) - \bar{a}| \to 0$ intilsa $\bar{a}$ ga r(t) vektor funksiyaning $t \to t_0$ ga intilgandagi limiti deyiladi va quyidagicha belgilanadi:

$$\lim_{t \to t_0} \boldsymbol{r}(\boldsymbol{t}) = \bar{\boldsymbol{a}}$$

Skalyar funksiyalar uchun limitlar haqidagi teoremalar vektor funksiyaar uchun ham o'rinli bo'ladi.

Agar f(t) va g(t)- G da aniqlangan vektor funksiyalar , $\lambda(t)$ esa G da aniqlangan skalyar funksiya hamda $t \to t_0$ da $\overline{f(t)} \to \bar{a},\ \overline{g(t)} \to \bar{b},\ \lambda(t) \to \lambda_0$ bo'lsin, u holda $t \to t_0$ da quyidagi tasdiqlar o'rinlidir:

1) $\lim\limits_{t \to t_0} \lambda(t)\,\overline{f(t)} = \lambda_0 \bar{a};$

2) $\lim\limits_{t \to t_0} \left(\overline{f(t)} * \overline{g(t)}\right) = (\bar{a} * \bar{b});$

3) $\lim\limits_{t \to t_0} \left(\overline{f(t)} \times \overline{g(t)}\right) = (\bar{a} \times \bar{b});$

4) $\lim_{t\to t_0}\left(\overline{f(t)} \pm \overline{g(t)}\right) = (\bar{a} \pm \bar{b});$

Endi **3 ta'sdiqni**

**isbotlasak**:

$\left\|\left(\overline{f(t)} \times \overline{g(t)}\right) - (\bar{a} \times \bar{b})\right\| = \left\|\left(\overline{f(t)} - \bar{a}\right) \times \left(\overline{g(t)} - \bar{b}\right) + \left(\overline{f(t)} - \bar{a}\right) \times \bar{b} - \left(\overline{g(t)} - \bar{b}\right) \times \bar{a}\right\| \le \left\|\overline{f(t)} - \bar{a}\right\| * \left\|\overline{g(t)} - \bar{b}\right\| + \left\|\overline{f(t)} - \bar{a}\right\| * \|\bar{b}\| + \left\|\overline{g(t)} - \bar{b}\right\| * \|\bar{a}\|$

Bu tenglikda $t \to t_0$ da limitga o'tsak,

$\left\|\left(\overline{f(t)} \times \overline{g(t)}\right) - (\bar{a} \times \bar{b})\right\| \to 0$ ekanligi kelib chiqadi.

**Bundan:** $\lim_{t\to t_0}\left(\overline{f(t)} \times \overline{g(t)}\right) = (\bar{a} \times \bar{b});$

Endi uzluksiz vektor funksiya ta'rifini keltiramiz:

$t \to t_0$ da $\overrightarrow{f(t)} \to \overrightarrow{f(t_0)}$ bo'lsa $\overrightarrow{f(t)}$ vektor funksiya $t_0$ nuqtada uzluksiz deyiladi. Agar $\overrightarrow{f(t)}$ va $\overrightarrow{g(t)}$ vektor funksiyalar $\lambda(t)$ skalyar funksiyalar $t_0$ nuqtada uzluksiz bo'lsa $\lambda(t) * \overrightarrow{f(t)}$ , $\overline{f(t)} \pm \overline{g(t)}$ , $\overline{f(t)} \times \overline{g(t)}$ , $\overline{f(t)} * \overline{g(t)}$ funksiyalar ham $t_0$ nuqtada uzluksiz bo'ladi.

## Vektor funksiyani differensiallash.

Bizga t$\epsilon[a, b]$ da aniqlangan r(t) funksiya berilgan bo'lib, t uning tayinlangan funksiyasi bo'lsin.

Ta'rif: Agar

$$\frac{r(t+h)-r(t)}{h}$$

Ifodaning h$\to 0$ dagi limiti r vektor funksiyaning t nuqtadagi hosilasi deyiladi va quyidagicha belgilanadi

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Delta r}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{r(t+h) - r(t)}{h} = r'(t) = \frac{dr}{dt}$$

Agar vektor funksiyaning G sohaning har bir nuqtasida hosilasi mavjud bo'lsa, vektor funksiya G sohada differensiallanuvchi deyiladi.

Agar λ(t) skalyar funksiya, r(t) va q(t) vektor funksiyalar differensiallanuvchi bo'lsa ular uchun quyidagi xossalar o'rinli

$\mathbf{1^0}$ $(r(t) \pm q(t))' = r'(t) \pm q'(t)$

$\mathbf{2^0}$ $(\lambda(t) * r(t))' = \lambda'(t) * r(t) + \lambda(t) * r'(t)$

$\mathbf{3^0}$ $\left(c * r(t)\right)' = c * r'(t) \qquad c = cons$

$\mathbf{4^0}$ $\left(r(t) * q(t)\right)' = r'(t) * q(t) + r(t) * q'(t);$

$\mathbf{5^0}$ $\left(r(t) \times q(t)\right)' = r'(t) \times q(t) + r(t) \times q'(t);$

Endi ba'zi birlarini isbotini ko'raylik:

$\mathbf{4^0}$ $\left(r(t) * q(t)\right)' = r'(t) * q(t) + r(t) * q'(t);$

$\lim\limits_{h\to 0}\frac{r(t)}{h} = r'(t)$ orttirma beramiz, u holda

$$\lim_{h\to 0}\frac{q(t)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{q(t+h)-q(t)}{h} = q'(t);$$

$$\left(r(t) * q(t)\right)' = \lim_{h\to 0}\frac{r(t+h)*q(t+h)-r(t)*q(t)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{r(t+h)*q(t+h)-r(t+h)q(t)+r(t+h)q(t)-r(t)*q(t)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{r(t+h)(q(t+h)-q(t))}{h} + \frac{q(t)(r(t+h)-r(t))}{h}\right] =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{r(t+h)-r(t)}{h}\lim_{h\to 0} r(t)\frac{q(t+h)-q(t)}{h} + \lim_{h\to 0} q(t)\frac{r(t+h)-r(t)}{h} =$$

$$r(t)\lim_{h\to 0}\frac{q(t+h)-q(t)}{h} + q(t)\lim_{h\to 0}\frac{r(t+h)-r(t)}{h} = r'(t) * q(t) + r(t) * q'(t); \blacksquare$$

$r'(t)$ vektor funksiyaning hosilasiga r(t) funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi deyiladi. Huddi shunday 3,4,… yuqori tartibli hosilalarni ham aniqlash mumkin. i, j, k lar $R^3$ dagi birlik o'zaro perpendikulyar vektorlar bo'lsin. U holda r(t) vektor funksiyaning berilishi 3 ta x(t) , y(t) , z(t) skalyar funksiyalarning berilishiga teng kuchli ya'ni :

r(t)=x(t)i+y(t)j+z(t)k x(t) , y(t) , z(t) larga r(t) vektor funksiyaning koordinatalari deyiladi.

r'(t)=x'(t)i+y'(t)j+z'(t)k r(t)∈ $C^n[a,b]$ va x(t), y(t), z(t)∈ $C^n[a,b]$ bo'ladi.

Ikki o'zgaruvchili vektor funksiyalar uchun ham ya'ni r=r(u,v) uchun ham xususiy hosilalarni aniqlash mumkin.

$$r'_u = \lim_{h\to 0}\frac{r(u+h;v)-r(u;v)}{h} = \frac{dr}{du}$$

$$r'_v = \lim_{h\to 0}\frac{r(u;v+h)-r(u;v)}{h} = \frac{dr}{dv}$$

r=r(u,v) ning to'la differensiali quyidagicha aniqlanadi:

$$dr = r'_u du + r'_v dv = \frac{\Delta r}{\Delta u}du + \frac{\Delta r}{\Delta v}dv;$$

Huddi shunday yuqori tartibli hosilalarni ham hisoblash mumkin.

## Vektor funksiyani integrallash:

Bizga r(t) vektor funksiya berilgan bo'lsin. Vector funksiyaning Riman ma'nosidagi integrali huddi skalyar funksiya kabi kiritiladi:

$$\int_a^b r(t)dt = \bar{\imath}\int_a^b x(t)dt + \bar{\jmath}\int_a^b y(t)dt + \bar{k}\int_a^b z(t)dt$$

Vector funksiya integrali quyidagi xossalarga ega:

Agar $\bar{f}(t) \in C[a,b]$ va a$< c < b$, u holda

**1)** $\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$

2) $\int_a^b mf(t)dt = m\int_a^b f(t)dt;$ m=const.

3) $\int_a^b (f(t) \pm g(t))dt = \int_a^b f(t)dt \pm \int_a^b g(t)dt$ ;

4) $\int_a^b f(t)dt = F(a) - F(b)$ ;

## Nazorat savollari.

1. Vektor nima
2. Vektor funksiya geometrik tasviri
3. Vektor funksiyaning hosilasi
4. Vektor funksiyani differensiallash

## 3 – Mavzu: : Geometriyaning zamonaviy yo’nalishlari va muammolari.

**Reja:**

1. Geometriya faniga kirish va uning rivojlanish bosqichlari.
2. Yevklid geometriyasi
3. Lobachevskiy geometriyasi
4. Riman geometriyasi

**GEOMETRIYA** - (geo… va metriya) — mat. ning predmet shakllari va shakliy munosabatlarini o‘rganadigan bo‘limi. Yer o‘lchash bilan bog‘liq ravishda paydo bo‘lgan. Nomi shundan. Mas, ochiq silindrsimon idishning shakli, hajmi, sirtining yuzi Geometriya o‘rganish obyektlari, uning rangi yoki qanday moddadan yasalgani esa Geometriyani qiziqtirmaydi. Shuningdek, asosi doyra bo‘lsa ham, shaklda ellips bilan tasvirlanishi Geometriyaga mansub munosabatdir. Geometriya tu-shunchalarni mavhumlashtirib, ideallashtirib o‘rganadi. Mac, silindrsimon idishning asosi doiradan bir oz farq qilishi, yasovchisi to‘ppa-to‘g‘ri bo‘lmasligi mumkin, sirti qalinlikka ega, asosi bilan yon sirti tik tutashmay, silliqlangan bo‘ladi, lekin Geometriyada bu kabi tafeilotlar soqit qilinadi. Shunday yo‘l bilan o‘lchamlarga ega bo‘lmagan nuqta, har ikki tomonga cheksiz davom etuvchi to‘g‘ri chiziq kabi tushunchalar, parallellik, simmetriklik kabi munosabatlar hosil qilinadi. Buning evaziga tatbiq doirasi juda keng, ma’lum ma’noda mutlaq va universal tabiatli qonuniyatlar aniqlanadi.

Geometriyaga oid dastlabki ma’lumotlar Qad. Bobil va Misrda kuzatuv yo‘li (empirik usul) bilan to‘plangan. Mas, bir juft parallel to‘g‘ri chiziqni uchinchi to‘g‘ri chiziq kesib o‘tsa, hosil bo‘lgan 8 ta burchakdan to‘rttadani o‘zaro teng; tomonlari 3, 4 va 5 birlik bo‘lgan uchburchakning bir burchagi to‘g‘ri. Geometrik xossalarni to‘plash yunonlar tomonidan davom ettirilgan. Bu muammo ustida mushohada ayrim dalillarni boshqalaridan sof mantiqiy yo‘l bilan chiqarishga olib kelgan. Tayin geometrik xossani mantiqiy mushohada bilan keltirib chiqarish isbot, isbotlangan xossa esa teorema deb atala boshlagan. Dastlabki shunday dalillardan biri Fales (mil. av. 625-548-y. lar) teoremasidir. Yunon faylasufi Pifagor akademiyasida mantiq va mat. muhim oʻrin tutib, muntazam teoremalar isbotini izlash bilan shugʻullanishgan. Tabiiyki, bunda imkoni boricha oz dalildan boshqa barcha dalillarni keltirib chiqarishga urinilgan. Bu urinishlar yakuni sifatida Yevklid oʻzining mashhur «Negizlar» asarini yaratadi. Bu asar nafaqat mat. tarixida, balki umuman tafakkur taraqqiyotida beqiyos oʻrin tutib, 2000 yil davomida mantiqiy mushohada namunasi boʻlib xizmat qildi. «Negizlar» da Yevklid nuqta, toʻgʻri chiziq, tekislik, tenglik, toʻgʻri chizik yoki tekislikning nuktadan oʻtishi (insidentlik) kabi tushunchalarni asos qilib olib, kesma, burchak, koʻpburchak, parallellik, perpendikulyarlik kabi tushunchalarga ta’rif beradi. Xuddi shu singari 10 ta geometrik dalilni isbotsiz qabul qiladi (ular aksiomalar va postulatlar deb atalgan) va birin-ketin teoremalarni keltirib chiqaradi.

Qad. Misr va Bobilda Geometriya amaliy ehtiyojlar: maydonlar yuzini oʻlchash, navigatsiya, astronomiya, me’morlik masalalarini hal qilish uchun vujudga kelgan boʻlsa, Yunonistonda Geometriya san’at sifatida ham rivojlanib, yuksak natijalarga erishdi. Xususan, sirkul va chizgʻich yordamida shakllar yasash rivoj topdi. Yunonlarning bu sohada erishgan darajasi shundan ham koʻrinadiki, ular qoʻygan muntazam koʻpburchaklar yasash masalasi 1796-y. (K. F. Gauss), doyra kvadraturasi masalasi esa 1882-y. dagina (F. Lindemann) hal qilindi. Yunonlar doira va b. ayrim egri chiziqli shakllar yuzlari, piramida, konus va shar hajmlarini hisoblashda integral hisob elementlari qoʻllaganlar (Arximed va b.). Pergalik Apolloniyga mansub konus kesimlari nazariyasini esa shubhasiz yunon Geometriya sining gultojisi deyish mumkin.

Mil. ning 3-asridan keyin yunon Geometriyasi umuman madaniyat bilan birga inqiroz tomon yuz tutdi, lekin Geometriya arab sharqi mamlakatlari, Oʻrta Osiyo va Hindistonda taraqqiy qila bordi.

7—8-a. lar davomida Hindistonda Geometriyaga oid ayrim yutuqlar qoʻlga kiritilgan boʻlsa ham (mas, aylanaga ichki chizilgan toʻrtburchak yuzi uchun

Brahmagupta formulasi), fan tarixidagi uyg‘onish 9-a. dan arab tilida ijod qilgan Yaqin va O‘rta Sharq, xususan, o‘rta osiyolik olimlar faoliyati bilan bog‘liq. Ahmad alFarg‘oniy stereografik proyeksiyaga oid Ptolemey qoldirgan teoremalarning isbotini berdi, tekislik trigonometriyasi va sferik trigonometriya yaratildi (Battoniy, Beruniy, Nasriddin Tusiy, Abul-Vafo va b.). Algebra geometriyaga va geometriya algebraga tatbiq qilina boshladi. Bu g‘oyalar 16-a. dan Yevropa olimlari tomonidan rivojlantirilib, analitik geometriyaga asos solindi, (P. Ferma, R. Dekart). Shu davrdan boshlab me’morlik va tasviriy san’at yuksalishi munosabati bilan perspektiv akslantirish xossalari o‘rganildi va proyektiv geometriya vujudga keldi. 18-a. da differensial va integral hisob ixtiro qilingach, Geometriya masalalarini yechishning standart usullari ishlab chiqildi va silliq chiziqlar hamda sirtlarni o‘rganuvchi differensial geometriya rivojlandi.

Ularni o‘rganishda differensial hisob usullari yetmas yoki ojizlik qilar edi. Mas, Myobius yaprog‘ining faqat bitta tomoni borligi, uch yaproq tugunini yechib bo‘lmasligi shunday xossalarga kiradi. Bu masalalar Geometriyaning yangi bo‘limi — topologiya tug‘ilishiga olib keldi. U esa, o‘z navbatida, 20-a. mat. sini ifodalovchi Geometriya, algebra va funksiyalar nazariyasining sintezidan iborat yo‘nalish — xilma-xil fazolarni o‘rganishga poydevor bo‘ldi.

Yevklidning «Negizlari» 2000-yil davomida mantiqiy qat’iylik namunasi bo‘lib kelganligiga qaramay, uning ayrim o‘rinlariga tanqidiy nazar bilan qaralib takomillashtirilgan: boshlang‘ich tushunchalar tarkibi qayta ko‘rib chiqilgan, nuqtalarning tartibiga oid va uzluksizlik aksiomalari bilan to‘ldirilgan, qator aksiomalar esa boshqalari orqali isbotlanib, teoremalar qatoriga o‘tkazilgan. Bu ish D. Gilbertning «Geometriya asoslari» asarida yakunlandi.

Deyarli Yevklid zamonidan boshlab uning 5-postulati yoki unga teng kuchli parallellik aksiomasini isbotlashga juda ko‘p urinilgan (jumladan, Nasriddin Tusiy, Umar Xayyom, I. G. Lambert), chunki matematiklarda u teorema bo‘lishi kerak degan ishonch hukm surgan, xilma-xil «isbotlar» ham taklif etilgan, lekkn bu isbotlarning barchasida mantiqiy nosozlik uchraydi — Yevklid aksiomasiga teng kuchli boshka tasdikdan (mas, uchburchak burchaklarining yigindisi 180° ga tengligidan) foydalanib ketilgan. Bu sohadagi izlanishlar avval Yevklid Geometriya sidan parallellik aksiomasi soqit qilingan mutlaq Geometriya, so‘ng parallellik aksiomasi o‘rniga uning inkori aksioma qilib olingan noyevklid Geometriya (Lobachevskiy geometriyasi, 1826-y.) ixtiro qilinishiga olib keldi. Yevklid Geometriyasi ham, noyevklid Geometriya ham bir xil darajada ziddiyatdan xoli ekanligini qatiy isbotlagan F. Kleyn gruppa tushunchasi yordamida Geometriya sohalarining tasnifini berdi (Erlangen dasturi). Unga muvofiq har bir Geometriya o‘zining geometrik almashtirishlar gruppasi bilan ifodalanadi. Shakllarning bunday almashtirishlarda o‘zgarmay qoladigan (invariant) xossalari tegishli G. Sohalarining o‘rganish obyekti bo‘ladi. Kleyn nuqtayi nazaridan maxsus nisbiylik nazariyasi Lorens gruppasiga mos keluvchi Geometriya dir. Shakllarning xossalarini o‘rganishda ularning ko‘lamiga qarab Geometriya yana ikki turga bo‘linadi: shakllarning kichik (mahalliy) sohalari xossalarini o‘rganuvchi sohalar geometriyasi va shakllarni yaxlit obyekt sifatida o‘rganuvchi to‘la (global) G. Hozirgi davrda Geometriya matematikaning barcha sohalarida, shakl va holatlarga doir tushunchalarni tasavvur qilishda qo‘llanilmoqda.

**YEVKLID GEOMETRIYASI** — mil. av. 3-a. da Yevklid izchil asoslagan geometriya. Parallellik aksiomasiga (to‘g‘ri chiziqda yotmagan nuqta orqali shu to‘g‘ri chiziq bilan kesishmaydigan faqat bitta to‘g‘ri chiziq o‘tkazish mumkin, degan aksiomaga) hamda mutlaq geometriya aksiomalari sistemalari deb ataluvchi 5 guruh (bog‘lanish, tartib, harakat, uzluksizlik, parallellikdan iborat) aksiomalarga asoslangan. Yevklid geometriyasi aksiomalar sistemalari nuqta, to‘g‘ri chiziq, tekislik, harakat va nuqta, to‘g‘ri chiziq va tekislik orasidagi munosabatlarga suyanadi. Yevklid geometriyasi birinchi marta izchil ravishda Yevklid «Negizlari»da bayon etilgan. Yevklid geometriyasidan farkli geometriyami birinchi marta rus geometri N. I. Lobachevskiy yaratdi. Yevklid geometriyasi o‘rta maktabda o‘qitiladi va «elementar geometriya» deb ataladi.

**LOBACHEVSKIY GEOMETRIYASI** — Yevklid geometriyasinpng aksiomalar sistemasidan faqat parallellik aksiomasi bilan farq qiladigan, aksiomalar sistemasiga asoslangan geometrik nazariya. L. g. da Yevklidning parallellik aksiomasi oʻrniga quyidagi aksioma qabul qilinadi: agar toʻgʻri chiziq va undan tashqarida nuqta berilgan boʻlsa, ularni oʻz ichiga olgan tekislikda shu nuqtadan oʻtuvchi, lekin berilgan toʻgʻri chiziq bilan kesishmaydigan kamida ikkita toʻgʻri chiziq oʻtkazish mumkin.

Lobachevskiy geometriyasining manbai — Yevklidning «Negizlar» asarida ta’riflangan beshinchi postulatni isbotlash uchun Ibn al-Xaysam (10-a.), Umar Xayyom (12-a.), Nasriddin Tusiy (13-a.), Prokl (15-a.), Lejandr, Lambert va b. matematiklar tomonidan qilingan urinishlardir. 19-a. da beshinchi postulatni boshqa aksiomalar asosida isbotlab boʻlmaydi, ya’ni u mustaqil aksioma, degan fikr vujudga keldi. Agar beshinchi postulat aksioma sifatida qabul qilingan boʻlsa, uning inkori ham boshqa aksi-omalarga zid boʻlmasligi kerak. Yevklidning beshinchi postulati oʻrniga yuqoridagi aksiomaga asoslangan geometriyani birinchi marta 1826-y. da N. I. Lobachevskiy, undan keyinroq Ya. Bolyay taklif qildi.

Yevklid geometriyasining parallellik aksiomasiga asoslanmagan teoremalari Lobachevskiy geometriyasida ham oʻrinli boʻladi, parallellik aksiomaga asoslangan teoremalari esa Lobachevskiy geometriyasida oʻrinli boʻlmaydi. Lobachevskiy geometriyasida uchburchakning ichki burchaklari yigʻindisi 180° dan kichik.

Lobachevskiy geometriyasining mantiqiy ziddiyatsizligini birinchi marta italyan matematigi E. Beltrami 1868-y. da isbotladi. U psevdosferaning geodezik chiziqlari toʻgʻri chiziq deb qaralsa, hosil boʻladigan geometriya L. g. ekanligini koʻrsatdi. Bu fakt Lobachevskiy geometriyasining Beltrami interpretatsiyasi (izohi) deyiladi. Keyinchalik F. Kleyn va A. Puankare ham Lobachevskiy geometriyasining boshqa interpretatsiyalarini berdilar.

Lobachevskiy geometriyasi — mat., mexanika va fizikada keng tatbiq etiladigan nazariya. Shu bilan birga Lobachevskiy geometriyasining yaratilishi moddiy olam haqidagi tasavvurimizni boyitdi. Yevklid geometriyasi olamni to‘g‘ri aks ettiruvchi yagona geometriya emasligini ko‘rsatdi.

B. Rimanning elliptik geometriyasidan farqlash uchun Lobachevskiy geometriyasi ba’zan noyevklid giperbolik geometriya ham deyiladi.

**RIMAN GEOMETRIYASI** - elliptik geometriya — noyevklid geometriyalaryagsh biri. Aksiomalari Yevklid geometriyasinkt aksiomalaridan farq qiladi. Uch o‘lchovli Riman geometriyasining asosiy obyektlari: nuqta, to‘g‘ri chiziq va tekisliklar; asosiy tushunchalari: mansublik tushunchasi (Mas, to‘g‘ri chiziqning tekislikka mansubligi), nuqtalarning to‘g‘ri chizikda joylashish tartibi va figuralarning kongruentligi. Riman geometriyasiga ko‘ra, har qanday 2 nuqta orqali 1 ta to‘g‘ri chiziq o‘tadi, bir tekislikdagi har qanday 2 to‘gri chiziq 1 nuqtada kesishadi (ya’ni Riman geometriyasida «parallel» to‘g‘ri chiziklar mavjud emas), nuqtalarning to‘g‘ri chiziqda joylashish tartibi aylanadigan nuqtalarning joylashish tartibiga o‘xshash bo‘ladi. Riman tekisligida har qanday 2 to‘g‘ri chiziq bir nuqtada kesishadi, sferada esa to‘g‘ri chiziqlar rolini o‘taydigan har 2 katta doira 2 nuqtada kesishadi; tekislikda yotgan to‘g‘ri chiziq uni 2 sohaga ajratmaydi va h. k.

Riman geometriyasi haqidagi ma’lumot B. Riman tomonidan 1854-y. e’lon qilingan. Bu eng to‘la o‘rganilgan noyevklid geometriyadir.

## Nazorat savollari.

1. Yevklid geometriyasi nima
2. Lobachevskiy geometriyasi nima
3. Riman geometriyasi nima

# 4 – MAVZU: SIRT TUSHUNCHASI. SIRTNING ICHKI VA TASHQI GEOMETRIYASI. EVKLID FAZOSADA SIRTLAR. SIRT TUSHUNCHASI.

Elementar sirt, oddiy sirt, regulyar sirt, silliq sirt, sirt-ning egri chiziqli koordinatalari, sirtning parametrik tenglamalari, sirtning vektor tenglamasi, sirtning oshkor tenglamasi, sirtning oshkarmas tenglamasi, koordinat chiziqlar, *u* chiziqlar, *v* chiziqlar, koordinat to'ri, muntazam to'r.

Avvalo to'plamlar nazariyasidan ba'zi-bir tushunchalarni kel-tiramiz. Tekislikda nuqtalar to'plami **G** berilgan bo'lsin. Tekislikdagi $M_o(x_o; y_o)$ nuqtaning "-atrofi" deb q munosabat bilan aniqlanuvchi M nuq-talar to'plamini tushunamiz.

Agar **G** to'plamning $M_o$ nuqtasi biror atrofi bilan **G** to'plamga to'la tegishli bo'lsa, $M_o$ nuqtani **G** to'plamning **ichki nuqtasi** deb ataymiz.

**G** to'plam **ochiq** deyiladi, agarda uning har bir nuqtasi ichki nuqta bo'lsa.

**G** to'plam **bog'lamli** deb ataladi, agarda uning istalgan ikki nuqtasini shu to'plamga tegishli siniq chiziq bilan tutashtirish mumkin bo'lsa.

**G** to'plamni **soha** deb ataymiz, agarda u ochiq to'plam bo'lib, bog'lamli bo'lsa.

Masalan, doiraning, uni o'rab turgan aylana nuqtalaridan bosh-qa nuqtalari to'plami soha bo'ladi.

**G** to'plam tekislikdagi soha bo'lsin, uni qisqacha **tekis soha** deb ataymiz.

<u>Ta'rif.</u> Tekis sohaning $E_3$ fazodagi topologik aksiga **ele-mentar sirt** deb ataymiz.

<u>Ta'rif.</u> $E_3$ fazodagi nuqtalar to'plami **Q** bog'lamli to'plam bo'lib, uning har bir nuqtasi shunday fazoviy atrofga ega bo'lsaki, to'plamning bu atrofga tegishli qismi elementar sirt bo'lsa, u holda **Q** to'plamga **oddiy sirt** deb ataladi.

**F** oddiy sirt **G** tekis sohani $E_3$ fazoga topologik akslantirish natijasida hosil bo'lgan bo'lsin.

**G** soha joylashgan tekislikda $u, v$ dekart koordinatalar sistemasini kiritamiz (25-chizma).

U vaqtda **G** sohani **F** oddiy sirtga akslantiruvchi funksiyalar umumiy shaklda quyidagicha bo'ladi:

$$\left.\begin{aligned} x &= x(u,v), \\ y &= y(u,v), \\ z &= z(u,v) \end{aligned}\right\} (1).$$

Bu erda $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ funksiyalar uzluksiz, bir qiymatli va ularga teskari funksiyalar ham uzluksizdir.

(1) tenglamalar sistemasiga **F** oddiy sirtning **parametrik tenglamalari** deyiladi.

$u$ va $v$ sonlar jufti **F** sirtdagi nuqtaning holatini to'la aniqlaydilar va ularga sirtdagi nuqtaning **egri chiziqli koor-dinatalari** yoki **gauss koordinatalari** deb ataladi.

## REGULYAR SIRTLAR.

Ta'rif. **F** oddiy sirtni **regulyar sirt** deb ataymiz, agarda u o'zining har bir nuqtasi atrofida $x$ q $x(u, v)$, y q $y(u, v)$, $z$ q $z(u, v)$ parametrik tenglamalari bilan berilib, $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ funk-tsiyalar $k$ marta differensiallanuvchi $(k \geq 1)$ va ushbu

$$\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}$$

matritsaning rangi ikkiga teng bo'lsa.

Agar $k$ q 1 bo'lsa, sirtga **silliq sirt** deb ataymiz.

Teorema. Agar **F** silliq sirt $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ parametrik tenglamalari bilan berilib, sirtning $M_o(x_o;yo;z_o)$ nuqtasida

$$\begin{vmatrix} x_u^0 & y_u^0 \\ x_v^0 & y_v^0 \end{vmatrix} \neq 0$$

shart bajarilsa, u vaqtda $M_o$ nuqta atrofida **F** sirt tenglamasini

$$z = f(x, y) \qquad (1)$$

shaklda yozish mumkin.

Isbot. Oshkormas funksiyalar haqidagi teoremaga asosan:

$$\begin{vmatrix} x_u^0 & y_u^0 \\ x_v^0 & y_v^0 \end{vmatrix} \neq 0$$

bo'lganda, $x$ $q$ $x(u, v)$, $y$ $q$ $y(u, v)$ tenglamalar sistemasini $M_o(u_o; v_o)$ nuqta atrofida $u, v$ larga nisbatan echish mumkin.

Natijada

$$u = \varphi(x, y)\,, \qquad v = \psi(x, y) \qquad (2)$$

hosil bo'ladi.

$u$ va $v$ larning bu qiymatlarini sirtning parametrik teng-lamalaridagi $z = z(u, v)$ tenglamaga qo'ysak:

$$z = z(\varphi(x, y), \psi\,(x, y)) = f(x, y)$$

hosil bo'ladi. Teorema isbot bo'ldi.

(1) tenglamaga sirtning **oshkor tenglamasi** deb ataladi.
(1) tenglamani umumiy shaklda quyidagicha yozish mumkin:

$$\boldsymbol{F}(x, y, z) = 0 \qquad (3).$$

(3) tenglamaga sirtning **oshkormas tenglamasi** deb ataladi.

## KOORDINAT CHIZIQLAR.

Bizga **F** regulyar sirt

$$\vec{r} = \vec{r}\ (u, v) \qquad (1)$$

vektor tenglamasi bilan berilsin.

(1) tenglamada $v = v_o = const$ deb olsak,

$$\vec{r} = \vec{r}\ (u, v_o)$$

vektor bitta $u$ o'zgaruvchining funksiyasi bo'lib, u **F** sirt ustida yotuvchi qandaydir chiziqning vektor tenglamasi bo'ladi.

Agar $v_o$ ga har xil qiymatlar qo'ysak, sirt ustida har xil chiziqlar hosil bo'la boradi va ular $v_o$ parametrli chiziqlar oila-sini tashkil etadi. Bu chiziqlar oilasida $u$ o'zgaruvchi bo'lgani uchun, ularni biz $u$ **chiziqlar** ($v = const$) deb ataymiz.

Xuddi shunga o'xshash (1) tenglamada $u = u_o = const$ deb olsak, **F** sirt ustida yotuvchi chiziqlarning $u_o$ parametrli ikkinchi oilasini hosil qilamiz. Bu chiziqlar oilasini biz ***v* chiziqlar** ($u = const$) deb ataymiz.

Koordinat chiziqlarning ikkala oilasini **koordinat to'ri** deb ataymiz.

Silliq sirtning har bir nuqtasidan koordinat to'riga te-gishli ikkita chiziq o'tadi.

Sirtda joylashgan biror sohaning har bir nuqtasidan ko-ordinat to'rining faqat ikkita chizig'i o'tsa, bunday to'rga **muntazam to'r** deyiladi.

Silliq sirt ustidagi to'r muntazam bo'ladi.

**F** sirtda $M_o(u_o; v_o)$ nuqta berilsin. U vaqtda chiziqlar na-zariyasidan ma'lumki, $\vec{r}_u\ (u_o, v_o)$ vektor $u$ chiziqning $M_o(u_o; v_o)$ nuqta-sidagi urinma vektori bo'ladi. $\vec{r}_u$ $(u_o, v_o)$ vektor esa $v$ chiziqning $M_o(u_o; v_o)$ nuqtasidagi urinma vektori bo'ladi

**F** sirt regulyar bo'lgani uchun, $M_o(u_o; v_o)$ nuqta atrofida

matritsaning rangi ikkiga teng bo'ladi. Shu sababli $M_o(u_o; v_o)$ nuqtada ushbu

vektor noldan farqlidir:

.

Bu esa $M_o(u_o; v_o)$ nuqtada $(u_o, v_o)$ va

$(u_o, v_o)$ urinma vektorlar noldan farqliligini, hamda bu vektorlar kollinear emasligini ko'rsatadi. Demak, regulyar sirtning har bir nuq-tasida va urinma vektorlar kollinear bo'lmas ekan.

## SIRT ICHKI GEOMETRIYASI

**Ta'rif.** Sirt birinchi kvadratik formasining koeffitsiyent-lari bilan aniqlanuvchixossalarini o'rganuvchi bo'limga **sirt ichki geometriyasi** deb ataladi.

Ma'lumki sirt birinchi kvadratik formasining koeffitsi-entlari orqali sirt ustidagi chiziq yoyining uzunligi, sirt ustidagi ikki chiziq orasidagi burchak va sirt ustidagi sohaning yuzi aniqlanar edi. Demak, yuqoridagi ta'rifga asosan sirt ustidagi chiziq yoyining uzunligi, sirt ustidagi ikki chiziq orasidagi burchak va sirt ustidagi sohaning yuzi sirt ichki geometriyasining ob'ekti bo'ladi.

## GAUSS TEOREMASI.

**Teorema** (**Gauss teoremasi**). Sirtning to'la egriligi birinchi kvadratik forma koeffitsiyentlari va ularning birinchi hamda ik-kinchi tartibli hosilalari orqali ifodalanadi, ya'ni sirtning to'la egriligi sirt ichki geometriyasining ob'ekti bo'ladi.

Isbot. Ma’lumki, sirtning to’la egriligi ushbu formula bilan hisoblanar edi:

$$K = \frac{DD_2 - D_1^2}{EG - F^2} \quad .$$

Bu erda

$$D \cdot D_2 = \frac{\begin{vmatrix} x_{uu} & y_{uu} & z_{uu} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG - F^2}} \cdot \frac{\begin{vmatrix} x_{vv} & y_{vv} & z_{vv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{vmatrix} x_{uu} & y_{uu} & z_{uu} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_{vv} & y_{vv} & z_{vv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}.$$

Determinantlarni “sartlarni sartlarga” qoidasi bilan ko’-paytirib, ushbu

$$x_{uu} \cdot x_{vv} + y_{uu} \cdot y_{vv} + z_{uu} \cdot z_{vv} = \vec{r}_{uu}\vec{r}_{vv} \ , \qquad x_u \cdot x_{vv} + y_u \cdot y_{vv} + z_u \cdot z_{vv} = \vec{r}_u\vec{r}_{vv} \ ,$$

$$x_v \cdot x_{vv} + y_v \cdot y_{vv} + z_v \cdot z_{vv} = \vec{r}_v\vec{r}_{vv} \ , \qquad x_{uu} \cdot x_u + y_{uu} \cdot y_u + z_{uu} \cdot z_u = \vec{r}_{uu}\vec{r}_u \ ,$$

$$x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 = \vec{r}_u^{\,2} = E \ , \qquad x_u \cdot x_v + y_u \cdot y_v + z_u \cdot z_v = \vec{r}_u\vec{r}_v = F ,$$

$$x_{uu} \cdot x_v + y_{uu} \cdot y_v + z_{uu} \cdot z_v = \vec{r}_{uu}\vec{r}_v \ , \qquad x_v^2 + y_v^2 + z_v^2 = \vec{r}_v^{\,2} = G$$

tengliklarni e’tiborga olsak

$$DD_2 = \frac{1}{EG - F^2} \begin{vmatrix} \vec{r}_{uu}\vec{r}_{vv} & \vec{r}_{uu}\vec{r}_u & \vec{r}_{uu}\vec{r}_v \\ \vec{r}_u\vec{r}_{vv} & E & F \\ \vec{r}_v\vec{r}_{vv} & F & G \end{vmatrix}$$

hosil bo’ladi.

Xuddi shu yo’l bilan quyidagini hosil qilamiz:

$$D_1^2 = D_1 D_1 = \frac{\begin{vmatrix} x_{uv} & y_{uv} & z_{uv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG - F^2}} \cdot \frac{\begin{vmatrix} x_{uv} & y_{uv} & z_{uv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{1}{EG - F^2} \cdot \begin{vmatrix} \vec{r}_{uv}^{\,2} & \vec{r}_{uv}\vec{r}_u & \vec{r}_{uv}\vec{r}_v \\ \vec{r}_u\vec{r}_{uv} & E & F \\ \vec{r}_v\vec{r}_{uv} & F & G \end{vmatrix}.$$

Demak,

$$K = \frac{1}{\left(EG - F^2\right)^2} \left\{ \begin{vmatrix} \vec{r}_{uu}\vec{r}_{vv} & \vec{r}_{uu}\vec{r}_u & \vec{r}_{uu}\vec{r}_v \\ \vec{r}_u\vec{r}_{vv} & E & F \\ \vec{r}_v\vec{r}_{vv} & F & G \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \vec{r}_{uv}^{\,2} & \vec{r}_{uv}\vec{r}_u & \vec{r}_{uv}\vec{r}_v \\ \vec{r}_u\vec{r}_{uv} & E & F \\ \vec{r}_v\vec{r}_{uv} & F & G \end{vmatrix} \right\}.$$

Bu ifodadagi ikkala determinantning ham birinchi ustun, bi-rinchi satr elementidan tuzilgan birinchi tartibli minorlarining qo’-shimcha minorlari bir xil bo’lgani uchun, uni quyidagicha yozish mumkin:

$$K=\frac{1}{\left(EG-F^2\right)^2}\left\{\begin{vmatrix}\vec r_{uu}\vec r_{vv}-\vec r_{uv}^2 & \vec r_{uu}\vec r_u & \vec r_{uu}\vec r_v\\ \vec r_u\vec r_{vv} & E & F\\ \vec r_v\vec r_{vv} & F & G\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}0 & \vec r_{uv}\vec r_u & \vec r_{uv}\vec r_v\\ \vec r_u\vec r_{uv} & E & F\\ \vec r_v\vec r_{uv} & F & G\end{vmatrix}\right\} \qquad (1).$$

Endi $\vec r_u^2=E$, $\vec r_u\vec r_v=F$, $\vec r_v^2=G$ tengliklarni $u$ va $v$ larga nisbatan differensiallasak:

$$2\cdot\vec r_u\cdot\vec r_{uu}=E_u, \qquad \text{bu erdan} \qquad \vec r_{uu}\cdot\vec r_u=\frac{1}{2}E_u\ ,$$

$$2\cdot\vec r_u\cdot\vec r_{uv}=E_v, \qquad \text{bu erdan} \qquad \vec r_{uv}\cdot\vec r_u=\frac{1}{2}E_v\ ,$$

$$2\cdot\vec r_v\cdot\vec r_{uv}=G_u, \qquad \text{bu erdan} \qquad \vec r_{uv}\cdot\vec r_v=\frac{1}{2}G_u\ ,$$

$$2\cdot\vec r_v\cdot\vec r_{vv}=G_v, \qquad \text{bu erdan} \qquad \vec r_{vv}\cdot\vec r_v=\frac{1}{2}G_v\ ,$$

$$\vec r_{uu}\cdot\vec r_v+\vec r_u\cdot\vec r_{uv}=F_u\ , \qquad \text{bu erdan} \qquad \vec r_{uu}\cdot\vec r_v=F_u-\frac{1}{2}E_v\ ,$$

$$\vec r_{uv}\cdot\vec r_v+\vec r_u\cdot\vec r_{vv}=F_v\ , \qquad \text{bu erdan} \qquad \vec r_{vv}\cdot\vec r_u=F_v-\frac{1}{2}G_u\ .$$

Bu erda beshinchi tenglikni $v$ bo’yicha, uchinchi tenglikni $u$ bo’-yicha differensiallab, ularni hadlab ayirsak

$$\vec r_{uuv}\cdot\vec r_v+\vec r_{uu}\cdot\vec r_{vv}-\vec r_{uuv}\cdot\vec r_v-\vec r_{uv}\cdot\vec r_{uv}=F_{uv}-\frac{1}{2}E_{vv}-\frac{1}{2}G_{uu}$$

yoki

$$\vec r_{uu}\cdot\vec r_{vv}-\vec r_{uv}^2=-\frac{1}{2}G_{uu}+F_{uv}-\frac{1}{2}E_{vv}$$

hosil bo’ladi. Bu tengliklarni (1) ga qo’ysak:

$$K=\frac{1}{\left(EG-F^2\right)^2}\left\{\begin{vmatrix}-\frac{1}{2}G_{uu}+F_{uv}-\frac{1}{2}E_{vv} & \frac{1}{2}E_u & F_u-\frac{1}{2}E_v\\ F_v-\frac{1}{2}G_u & E & F\\ \frac{1}{2}G_v & F & G\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}0 & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u\\ \frac{1}{2}E_v & E & F\\ \frac{1}{2}G_u & F & G\end{vmatrix}\right\} \qquad (2).$$

Teorema isbot bo'ldi.

Shuni ham aytib o'tish kerakki, agarda sirtning birinchi kvad-ratik formasi

$$\Phi_1 = du^2 + G dv^2$$

ko'rinishda bo'lsa, u vaqtda (2) formulaga asosan, bu sirtning gauss egri-ligi quyidagiga teng bo'ladi:

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}}\left(\sqrt{G}\right)_{uu}.$$

.

## SIRTNI EGISH.

Ta'rif. Sirt ustidagi chiziq yoyining uzunligini o'zgartir- masdan sirtni uzluksiz deformatsiyalashga **sirtni egish** deb ataladi.

Masalan, bir varaq qog'ozni o'rab, uni silindrga yoki konusga aylantirish qog'ozni **egish** demakdir.

**F** sirtni egish natijasida $\mathbf{F}^1$ sirt hosil qilingan bo'lsin. U vaqtda bu sirtlardagi bir-biriga mos yoylarning uzunligi tengdir:

$$\int_a^b \sqrt{E du^2 + 2F du dv + G dv^2} = \int_a^b \sqrt{E^1 du^2 + 2F^1 du dv + G^1 dv^2}.$$

Bu tenglik chiziqlardagi istalgan $M$(t) nuqta, ya'ni istalgan t parametr uchun bajarilgani sababli, integral ostidagi ifodalar bir-biriga aynan tengdir:

$$E du^2 + 2F du dv + G dv^2 = E^1 du^2 + 2F^1 du dv + G^1 dv^2.$$

Bu shart esa istalgan $du : dv$ yo'nalish uchun bajarilgani sa-babli, kvadratik formalarning koeffitsiyentlari teng bo'ladi:

$$E = E^1, \qquad F = F^1, \qquad G = G^1.$$

Shunday qilib ushbu teoremaga keldik.

**Teorema.** Sirtni egishda uning birinchi kvadratik formasi-ning koeffitsiyentlari o'zgarmaydi.

Sirt ustidagi ikki chiziq orasidagi burchak, sirt ustidagi sohaning yuzi va sirtning to'la egriligi faqat birinchi kvadratik forma koeffitsiyentlariga bog'liq bo'lgani uchun, yuqoridagi teoremaga asosan ushbu natijaga kelamiz.

**Natija.** Sirtni egishda sirt ustidagi ikki chiziq orasidagi burchak, sirt ustidagi sohaning yuzi va sirtning to'la egriligi o'zgarmaydi.

## BIRINCHI KVADRATIK FORMASI

Bizga **F** sirt $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ vektor tenglamasi bilan berilsin. Bu tenglamani differensiallaylik:

$$d\vec{r} = \vec{r}_u\, du + \vec{r}_v\, dv\,.$$

Bu tenglikni kvadratga ko'taraylik:

$$d\vec{r}^{\,2} = \vec{r}_u^{\,2}\, du^2 + 2\, \vec{r}_u \vec{r}_v\, du\, dv + \vec{r}_v^{\,2}\, dv^2.$$

Yozishni soddalashtirish maqsadida

$$\vec{r}_u^{\,2} = \boldsymbol{E}\,, \qquad \vec{r}_u \vec{r}_v = \boldsymbol{F}\,, \qquad \vec{r}_v^{\,2} = G \qquad (1)$$

belgilashlarni kiritsak:

$$d\vec{r}^{\,2} = E\, du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2$$

hosil bo'ladi.

Ta'rif. Ushbu

$$d\vec{r}^{\,2} = E\, du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2$$

ifodaga sirtning **birinchi kvadratik formasi** deb ataymiz va $\mathbf{F}_1$ bilan belgilaymiz.

Demak,

$$\mathbf{F}_1 = d\vec{r}^{\,2} = E\, du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2 \qquad (2).$$

Sirtning birinchi kvadratik formasini ba'zan sirtning **chiziqli elementi** deb ham ataladi.

***E* , *F* , *G*** larga sirt birinchi kvadratik formasining **koeffitsiyentlari** deb ataladi.

(1) belgilashlarga asosan **,** $E$ va $G$ ning har biri noldan katta bo'lib, $F$ esa manfiy, nol va musbat qiymatlarni qabul qilishi mumkin.

$\mathbf{F}_1 = d\vec{r}^{\,2}$ bo'lgani uchun, sirtning birinchi kvadratik formasi har doim musbatdir.

Sirt $x = x(u, v)$ , $y = y(u, v)$ , $z = z(u, v)$ parametrik tenglamalari bilan berilsa

$$\vec{r} = x\cdot\vec{i} + y\cdot\vec{j} + z\cdot\vec{k} ,$$

$$\vec{r}_u = x_u\cdot\vec{i} + y_u\cdot\vec{j} + z_u\cdot\vec{k} ,$$

$$\vec{r}_v = x_v\cdot\vec{i} + y_v\cdot\vec{j} + z_v\cdot\vec{k}$$

bo'lgani uchun, sirt birinchi kvadratik formasining koeffitsiyentlari quyidagicha bo'ladi:

$$\left.\begin{aligned} E &= x_u^2 + y_u^2 + z_u^2, \\ F &= x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v, \\ G &= x_v^2 + y_v^2 + z_v^2 \end{aligned}\right\} \qquad (3).$$

(3) formula parametrik tenglamalari bilan berilgan sirt birinchi kvadratik formasining koeffitsiyentlarini topish formulasi bo'ladi.

Agar sirt $z = f(x, y)$ oshkor tenglamasi bilan berilsa, $u = x$ , $v = y$ belgilashlar kiritamiz. U vaqtda $x_u = 1$, $x_v = 0$, $y_u = 0$, $y_v = 1$ bo'lgani uchun, (3) formulalarga asosan:

$$E = 1 + z_x^2 ,$$

$$F = z_x z_y ,$$

$$G = 1 + z_y^2.$$

Bu erda $z_x = p$ , $z_y = q$ belgilashlarni kiritsak:

$$\left.\begin{aligned} E &= 1 + p^2, \\ F &= pq, \\ G &= 1 + q^2 \end{aligned}\right\} \qquad (4).$$

(4) formula oshkor tenglamasi bilan berilgan sirt birinchi kvadratik formasining koeffitsiyentlarini topish formulasi bo'ladi.

<u>1-misol.</u> $x = u \cos v$ , $y = u \sin v$, $z = u^2$ aylanma paraboloidning birinchi kvadratik formasini toping.

<u>Echish.</u> Sirt parametrik tenglamalari bilan berilgan. Shuning uchun

sirt birinchi kvadratik formasining koeffitsiyentlarini topish uchun (3) formuladan foydalanamiz. Sirtning berilgan parametrik tenglamalaridan xususiy hosilalar olamiz:

$$x_u = \cos v, \qquad y_u = \sin v, \qquad z_u = 2u,$$

$$x_v = -u \sin v, \qquad y_v = u \cos v, \qquad z_v = 0.$$

Bu topilgan hosilalarni (3) formulalarga qo'yamiz:

$$E = \cos^2 v + \sin^2 v + 4u^2 = 1 + 4u^2,$$

$$F = -u \cos v \cdot \sin v + u \sin v \cdot \cos v = 0\ ,$$

$$G = u^2 \sin^2 v + u^2 \cos^2 v = u^2.$$

***E* , *F* , *G*** larning bu qiymatlarini (2) formulaga qo'ysak, aylanma paraboloidning birinchi kvadratik formasi hosil bo'ladi:

$$\mathbf{F}_1 = (1 + 4u^2)\, du^2 + u^2\, dv^2.$$

<u>2-misol.</u> $z = \frac{1}{2}(ax^2 + by^2)$ sirtning birinchi kvadratik forma-sini toping.

<u>Echish.</u> Sirt oshkor tenglamasi bilan berilgan. Shu sababli sirt birinchi kvadratik formasining koeffitsiyentlarini topishda (4) formu-ladan foydalanamiz. Sirtning berilgan tenglamasidan xususiy hosilalar olamiz:

$$p = z_x = ax\ , \qquad q = z_y = by\ .$$

$p$ va $q$ larning topilgan bu qiymatlarini (4) formulaga qo'yamiz:

$$E = 1 + a^2x^2\ ,$$

$$F = abxy\ ,$$

$$G = 1 + b^2y^2.$$

***E* , *F* , *G*** larning topilgan bu qiymatlarini (2) formulaga qo'ysak, sirtning birinchi kvadratik formasi hosil bo'ladi:

$$\mathbf{F}_1 = (1 + a^2x^2)dx^2 + 2abxydxdy + (1 + b^2y^2)dy^2\ .$$

## SIRT USTIDAGI ChIZIQ.

Sirt ustidagi chiziqning vektor tenglamasi, sirt ustidagi chi-ziqning parametrik tenglamalari, sirt ustidagi chiziqning egri chiziqli koordinatalarga nisbatan tenglamalari, loksodrom, sirt ustidagi chiziq yoyining uzunligi.

Bizga **F** regulyar sirt $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ vektor tenglamasi bilan berilsin. Bu sirt ustida shunday nuqtalar to'plamini qaraylikki, ularning $u$ va $v$ egri chiziqli koordinatalari biror t erkli o'zgaruvchining funksiyalari bo'lsin:

$$\left.\begin{aligned} u &= u(t), \\ v &= v(t) \end{aligned}\right\} \qquad (1),$$

bunda $u$(t) va $v$(t) - uzluksiz va differensiallanuvchi funksiyalar bo'lsin. Bu tenglamalar berilgan sirtda yotuvchi qandaydir chiziqni ifodalaydi. Chunki sirtning $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ vektor tenglamasiga (1) ifodalarni qo'ysak:

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v) = \vec{r}(u(\mathrm{t}), v(\mathrm{t})) = \vec{r}(\mathrm{t})$$

ya'ni

$$\vec{r} = \vec{r}(\mathrm{t}) \qquad (2)$$

tenglama hosil bo'lib, chiziqlar nazariyasidan ma'lumki, bu (2) tenglama chiziqning vektor tenglamasidir.

Shuning uchun (2) tenglamaga sirt ustidagi **chiziqning vektor tenglamasi** deb ataladi. (1) tenglamalar sistemasiga sirt ustidagi **chiziqning paramet-rik tenglamalari** deyiladi. (1) tenglamalardan t ni yo'qotish mumkin:

$$f(u, v) = 0 \qquad (3).$$

Bu (3) tenglama sirt ustidagi chiziqning egri chiziqli koor-dinatalarga nisbatan **oshkormas tenglamasi** deyiladi.

(3) tenglamani $v$ ga nisbatan echsak:

$$v = v(u) \qquad (4).$$

(4) tenglama sirt ustidagi chiziqning egri chiziqli koor-dinatalarga nisbatan **oshkor tenglamasi** deyiladi.

Xususiy holda:

$$u = const$$

$v$ chiziqning tenglamasi bo'ladi.

$$v = const$$

esa $u$ chiziqning tenglamasi bo'ladi.

Sirtdagi chiziqning (2) tenglamasini t bo'yicha differen-tsiallasak ushbu

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}_u \frac{du}{dt} + \vec{r}_v \frac{dv}{dt} \qquad (5)$$

vektor hosil bo'lib, u chiziq urinmasi bo'ylab yo'naladi. $\vec{r}_u$ va $\vec{r}_v$ vektorlar esa shu nuqtadan o'tuvchi koordinat chiziqlarning urinmalari bo'ylab yo'naladi.

Tekislikda chiziqning yo'nalishi *dx:dy* yoki *dy:dx* nisbat-larga bog'liq bo'lgani kabi, sirt ustidagi chiziqning yo'nalishi ham *dv:du* yoki *du:dv* nisbatlarga bog'liqdir. Haqiqatan, (5) tenglikdan ko'rinadiki, $\frac{d\vec{r}}{dt}$ hosila $\vec{r}_u$ va $\vec{r}_v$ hamda $\frac{du}{dt}$ va $\frac{dv}{dt}$ larning funksiyasidir. Biroq $\vec{r}_u$ va $\vec{r}_v$ vektorlar berilgan nuqtada o'zgarmas vektorlar bo'ladi. Shu sababli $\frac{d\vec{r}}{dt}$ hosila $\frac{du}{dt}$ va $\frac{dv}{dt}$ larning funksiyasi bo'ladi. $\frac{du}{dt} : \frac{dv}{dt}$ nisbatni olsak *du:dv* hosil bo'ladi, yoki $\frac{dv}{dt} : \frac{du}{dt}$ nisbatni olsak *dv:du* hosil bo'ladi.

Endi sirt ustidagi chiziqqa misol keltiramiz.

**LOKSODROM.** Sferaning hamma meridianlarini bir xil burchak ostida kesib o'tuvchi chiziqqa **loksodrom** deb ataladi.

Uning tenglamasini topaylik.

Sferaning vektor tenglamasini qaraymiz:

$$\vec{r} = \{R \cos u \cos v; R \cos u \sin v; R \sin u\} \qquad (6).$$

Meridianning tenglamasi shu (6) tenglamada $v = const$ bo'lgan holdir.

Meridianning urinmasi bo'ylab yo'naluvchi vektorni topamiz. U (6) dan $v = const$ bo'lgan holda topiladi:

$$\vec{r}_u = \{-R\sin u\cos v;\ -R\sin u\sin v;\ R\cos u\} \qquad (7).$$

Loksodromning tenglamasini $v = v(u)$ shaklda izlaymiz. U vaqtda ta'rifga asosan:

$$\frac{\vec{r}_u \dfrac{d\vec{r}}{du}}{|\vec{r}_u|\left|\dfrac{d\vec{r}}{du}\right|} = const = \cos m \qquad (8)$$

bo'ladi. $v$ q $v(u)$ deb, $\dfrac{d\vec{r}}{du}$ ni (6) tenglikdan topamiz:

$$\frac{d\vec{r}}{du} = \{-R\sin u\cdot\cos v - R\cos u\cdot\sin v\frac{dv}{du};$$

$$-R\sin u\cdot\sin v + R\cos u\cdot\cos v\frac{dv}{du};\ R\cos u\} \qquad (9).$$

(7) dan

$$|\vec{r}_u| = \sqrt{R^2\sin^2 u\cos^2 u + R^2\sin^2 u\sin^2 v + R^2\cos^2 u} = R,$$

(9) dan

$$\left|\frac{d\vec{r}}{du}\right| = \sqrt{\left(R\sin u\cos v + R\cos u\sin v\frac{dv}{du}\right)^2 + \left(-R\sin u\sin v + R\cos u\cos v\frac{dv}{du}\right)^2 + R^2\cos^2 u} =$$

$$= \sqrt{R^2\sin^2 u + R^2\cos^2 u\left(\frac{dv}{du}\right)^2 + R^2\cos^2 u} = R\cdot\left(\sqrt{1+\cos^2 u\left(\frac{dv}{du}\right)^2}\right).$$

(7) va (9) dan: $\vec{r}_u\dfrac{d\vec{r}}{du} = R\sin u\cos v\left(R\sin u\cos v + R\cos u\sin v\dfrac{dv}{du}\right) +$

$$+\ R\sin u\sin v\left(R\sin u\sin v - R\cos u\cos v\frac{dv}{du}\right) + R^2\cos^2 u = R^2.$$

$|\vec{r}_u|$, $\left|\dfrac{d\vec{r}}{du}\right|$ va $\vec{r}_u\dfrac{d\vec{r}}{du}$ larning qiymatlarini (8) ga qo'yib, uni ixchamlasak:

$$\frac{1}{\sqrt{1+\cos^2 u\left(\dfrac{dv}{du}\right)^2}} = \cos m,$$

$$1+\cos^2 u\left(\frac{dv}{du}\right)^2=\frac{1}{\cos^2 m},$$

$$\cos^2 u\left(\frac{dv}{du}\right)^2=\frac{\sin^2 m}{\cos^2 m},$$

$$\cos u\frac{dv}{du}=\pm\ \mathrm{tg}\, m,$$

$$\frac{\cos u}{du}=\pm\frac{tgm}{dv},$$

$$\frac{du}{\cos u}=\pm\, dv\cdot\mathrm{ctg}\, m \qquad (10).$$

(10) tenglama loksodromning ***differensial tenglamasi*** bo'ladi.

Agar (10) differensial tenglamani integrallasak:

$$\ln\left|tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{u}{2}\right)\right|=\pm\, v\ \mathrm{ctg}\, m+\ln C$$

yoki

$$tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{u}{2}\right)=Ce^{\pm v\cdot ctgm} \qquad (11).$$

(11) formula loksodromning **oshkormas tenglamasi** bo'ladi. Bu (11) tenglamadagi $\pm$ ishorasi sferada ikkita loksodrom mavjudligini ko'rsatadi.

## SIRTNING IKKINCHI KVADRATIK FORMASI

Bizga **F** regulyar sirt $\vec{r}=\vec{r}(u,v)$ vektor tenglamasi bilan berilgan bo'lsin.

Ta'rif. **F** sirtning berilgan $M$ nuqtasidagi urinma tekis-ligiga perpendikulyar bo'lgan birlik vektorga sirtning shu nuqtasidagi **birlik normal vektori** deb ataymiz va $\vec{n}$ bilan belgilaymiz

Agar $M\,(u;\,v)$ nuqta **F** sirt bo'ylab harakatlansa, u vaqtda sirtning shu nuqtasidagi birlik normal vektori $\vec{n}$ ham harakatlana boradi, ya'ni bu $\vec{n}$ vektor $u$ va $v$ o'zgaruvchilarning vektor funk-tsiyasi bo'ladi:

$$\vec{n} = \vec{n}(u, v) \qquad (1).$$

Sirtning vektor tenglamasini va (1) tenglamani differen-tsiallaymiz:

$$d\vec{r} = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv,$$

$$d\vec{n} = \vec{n}_u du + \vec{n}_v dv.$$

Bu $d\vec{r}$ va $d\vec{n}$ vektorlarni skalyar ko'paytiraylik:

$$d\vec{r} \cdot d\vec{n} = (\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv)(\vec{n}_u du + \vec{n}_v dv) = \vec{r}_u\vec{n}_u du^2 + (\vec{r}_u\vec{n}_v + \vec{r}_v\vec{n}_u)dudv + \vec{r}_v\vec{n}_v dv^2.$$

<u>Ta'rif.</u> Ushbu

$$\mathbf{F}_2 = -d\vec{r} \cdot d\vec{n} = -\vec{r}_u\vec{n}_u du^2 - (\vec{r}_u\vec{n}_v + \vec{r}_v\vec{n}_u)dudv - \vec{r}_v\vec{n}_v dv^2 \qquad (2)$$

ifodaga sirtning **ikkinchi kvadratik formasi** deb ataladi.

Sirtning ikkinchi kvadratik formasi uchun quyidagi belgi-lashlarni kiritamiz:

$$\left.\begin{array}{l} -\vec{r}_u\vec{n}_u = D, \\ -\left(\vec{r}_u\vec{n}_v + \vec{r}_v\vec{n}_u\right) = 2D_1, \\ -\vec{r}_v\vec{n}_v = D_2 \end{array}\right\} \qquad (3).$$

U vaqtda ikkinchi kvadratik forma ushbu ko'rinishni oladi:

$$\mathbf{F}_2 = D\,du^2 + 2\,D_1\,du\,dv + D_2\,dv^2 \qquad (4).$$

Bizga ma'lumki $\vec{r}_u$ va $\vec{r}_v$ vektorlar sirtning urinma tekis-ligiga parallel bo'lar edi. Demak, bu vektorlarning chiziqli kombina-tsiyasi bo'lgan $d\vec{r} = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv$ vektor ham sirtning urinma tekisligiga parallel bo'ladi. Ta'rifga asosan $\vec{n}$ vektor urinma tekislikka per-pendikulyardir. Shuning uchun $d\vec{r}$ va $\vec{n}$ vektorlar o'zaro perpendikulyar bo'lib, ularning skalyar ko'paytmasi nolga teng bo'ladi:

$$d\vec{r} \cdot \vec{n} = 0.$$

Bu tenglikni differensiallaylik:

$$d(d\vec{r} \cdot \vec{n}) = d^2\vec{r} \cdot \vec{n} + d\vec{r} \cdot d\vec{n} = 0.$$

(2) ga asosan:

$$d^2\vec{r} \cdot \vec{n} = -d\vec{r} \cdot d\vec{n} = \mathbf{F}_2.$$

Demak,

$$\mathbf{F}_2 = d^2\vec{r} \cdot \vec{n}.$$

Bu erda

$$d^2\vec{r} = d(d\vec{r}) = d(\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv) = \vec{r}_{uu}du^2 + 2\vec{r}_{uv}dudv + \vec{r}_{vv}dv^2 + \vec{r}_u d^2u + \vec{r}_v d^2v$$

bo'lib, $\vec{r}_u \perp \vec{n}$ va $\vec{r}_v \perp \vec{n}$ bo'lgani uchun:

$$\mathbf{F}_2 = d^2\vec{r}\cdot\vec{n} = \vec{r}_{uu}\vec{n}du^2 + 2\vec{r}_{uv}\vec{n}dudv + \vec{r}_{vv}\vec{n}dv^2 + \vec{r}_u\vec{n}d^2u + \vec{r}_v\vec{n}d^2v =$$

$$= \vec{r}_{uu}\vec{n}du^2 + 2\vec{r}_{uv}\vec{n}dudv + \vec{r}_{vv}\vec{n}dv^2.$$

Demak,

$$\mathbf{F}_2 = \vec{r}_{uu}\vec{n}du^2 + 2\vec{r}_{uv}\vec{n}dudv + \vec{r}_{vv}\vec{n}dv^2.$$

Bu tenglama bilan (4) ni taqqoslasak, quyidagilar kelib chiqadi:

$$D = \vec{r}_{uu}\vec{n}, \qquad D_1 = \vec{r}_{uv}\vec{n}, \qquad D_2 = \vec{r}_{vv}\vec{n} \qquad (5).$$

Yuqorida aytdikki, $\vec{r}_u$ va $\vec{r}_v$ vektorlar sirtning urinma tekisligiga parallel bo'ladi. Shuning uchun bu vektorlarning vektor ko'paytmasi bo'lgan $[\vec{r}_u\,\vec{r}_v]$ vektor sirtning normaliga parallel bo'ladi. Demak, $\dfrac{[\vec{r}_u\vec{r}_v]}{\|[\vec{r}_u\vec{r}_v]\|}$ birlik vektor sirtning normali bo'ylab yo'naladi. Shu sababli bu vektorni sirt normalining birlik vektori sifatida olish mumkin, ya'ni:

$$\vec{n} = \frac{[\vec{r}_u\vec{r}_v]}{\|[\vec{r}_u\vec{r}_v]\|} = \frac{[\vec{r}_u\vec{r}_v]}{\sqrt{[\vec{r}_u\vec{r}_v]^2}} = \frac{[\vec{r}_u\vec{r}_v]}{\sqrt{\vec{r}_u^{\,2}\vec{r}_v^{\,2} - (\vec{r}_u\vec{r}_v)^2}}.$$

$\vec{n}$ vektorning bu qiymatini (5) tengliklarga qo'ysak:

$$D = \vec{r}_{uu}\frac{[\vec{r}_u\vec{r}_v]}{\sqrt{\vec{r}_u^{\,2}\vec{r}_v^{\,2} - (\vec{r}_u\vec{r}_v)^2}} = \frac{\vec{r}_{uu}[\vec{r}_u\vec{r}_v]}{\sqrt{\vec{r}_u^{\,2}\vec{r}_v^{\,2} - (\vec{r}_u\vec{r}_v)^2}} = \frac{(\vec{r}_{uu},\vec{r}_u,\vec{r}_v)}{\sqrt{\vec{r}_u^{\,2}\vec{r}_v^{\,2} - (\vec{r}_u\vec{r}_v)^2}}.$$

$$D_1 = \vec{r}_{uv}\frac{[\vec{r}_u\vec{r}_v]}{\sqrt{\vec{r}_u^{\,2}\vec{r}_v^{\,2} - (\vec{r}_u\vec{r}_v)^2}} = \frac{\vec{r}_{uv}[\vec{r}_u\vec{r}_v]}{\sqrt{\vec{r}_u^{\,2}\vec{r}_v^{\,2} - (\vec{r}_u\vec{r}_v)^2}} = \frac{(\vec{r}_{uv},\vec{r}_u,\vec{r}_v)}{\sqrt{\vec{r}_u^{\,2}\vec{r}_v^{\,2} - (\vec{r}_u\vec{r}_v)^2}}.$$

$$D_2 = \vec{r}_{vv}\frac{[\vec{r}_u\vec{r}_v]}{\sqrt{\vec{r}_u^{\,2}\vec{r}_v^{\,2} - (\vec{r}_u\vec{r}_v)^2}} = \frac{\vec{r}_{vv}[\vec{r}_u\vec{r}_v]}{\sqrt{\vec{r}_u^{\,2}\vec{r}_v^{\,2} - (\vec{r}_u\vec{r}_v)^2}} = \frac{(\vec{r}_{vv},\vec{r}_u,\vec{r}_v)}{\sqrt{\vec{r}_u^{\,2}\vec{r}_v^{\,2} - (\vec{r}_u\vec{r}_v)^2}}$$

Demak,

$$D = \frac{(\vec{r}_{uu},\vec{r}_u,\vec{r}_v)}{\sqrt{\vec{r}_u^{\,2}\vec{r}_v^{\,2} - (\vec{r}_u\vec{r}_v)^2}}. \qquad D_1 = \frac{(\vec{r}_{uv},\vec{r}_u,\vec{r}_v)}{\sqrt{\vec{r}_u^{\,2}\vec{r}_v^{\,2} - (\vec{r}_u\vec{r}_v)^2}}, \qquad D_2 = \frac{(\vec{r}_{vv},\vec{r}_u,\vec{r}_v)}{\sqrt{\vec{r}_u^{\,2}\vec{r}_v^{\,2} - (\vec{r}_u\vec{r}_v)^2}} \qquad (6).$$

(3) va (6) formulalar vektor tenglamasi bilan berilgan sirt ikkinchi kvadratik

formasining koeffitsiyentlarini topish formulalari bo'ladi.

**F** regulyar sirt $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ parametrik tenglamalari bilan berilsin. Bu vaqtda:

$$\vec{r}_u = x_u\vec{i} + y_u\vec{j} + z_u\vec{k} \quad , \quad \vec{r}_v = x_v\vec{i} + y_v\vec{j} + z_v\vec{k} \, ,$$

$$\vec{r}_{uu} = x_{uu}\vec{i} + y_{uu}\vec{j} + z_{uu}\vec{k} \ , \quad \vec{r}_{uv} = x_{uv}\vec{i} + y_{uv}\vec{j} + z_{uv}\vec{k} \ , \quad \vec{r}_{vv} = x_{vv}\vec{i} + y_{vv}\vec{j} + z_{vv}\vec{k}$$

bo'lib, koordinatalari bilan berilgan uch vektorning aralash ko'payt-masi quyidagicha aniqlanar edi:

$$(\vec{r}_{uu},\vec{r}_u,\vec{r}_v) = \begin{vmatrix} x_{uu} & y_{uu} & z_{uu} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}, \quad (\vec{r}_{uv},\vec{r}_u,\vec{r}_v) = \begin{vmatrix} x_{uv} & y_{uv} & z_{uv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}, \quad (\vec{r}_{vv},\vec{r}_u,\vec{r}_v) = \begin{vmatrix} x_{vv} & y_{vv} & z_{vv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}.$$

Sirt birinchi kvadratik formasining koeffitsiyentlari:

$$E = \vec{r}_u^{\,2}, \qquad F = \vec{r}_u\,\vec{r}_v \, , \qquad G = \vec{r}_v^{\,2}.$$

Bu tengliklarni hisobga olib, (6) tengliklardan quyidagi ifodalarni yoza olamiz:

$$D = \frac{\begin{vmatrix} x_{uu} & y_{uu} & z_{uu} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG-F^2}} \ ; \qquad D_1 = \frac{\begin{vmatrix} x_{uv} & y_{uv} & z_{uv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG-F^2}} \ ; \qquad D_2 = \frac{\begin{vmatrix} x_{vv} & y_{vv} & z_{vv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG-F^2}} \qquad (7).$$

Bu (7) formulalar parametrik tenglamalari bilan berilgan sirt ikkinchi kvadratik formasining koeffitsiyentlarini topish formulalari deyiladi.

Agar sirt $z = f\,(x, y)$ oshkor tenglamasi bilan berilsa, $x = u$, $y = v$ almashtirishlarini olib, (7) formuladan quyidagi ifodalarni hosil qilamiz:

$$D = \frac{z_{xx}}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \ ; \qquad D_1 = \frac{z_{xy}}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \ ; \qquad D_2 = \frac{z_{yy}}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \qquad (8).$$

Bu (8) formulalar oshkor tenglamasi bilan berilgan sirt ikkinchi kvadratik formasining koeffitsiyentlarini topish formulalari deyiladi.

Bu holda sirtning ikkinchi kvadratik formasi ushbu ko'ri-nishni oladi:

$$F_2 = Ddx^2 + 2D_1dx\,dy + D_2dy^2 \qquad (9).$$

<u>1-misol.</u> $x = u \cos v$ , $y = u \sin v$ , $z = a\,v$ to'g'ri gelikoidning ik-kinchi

kvadratik formasini toping.

Echish. To'g'ri gelikoidning parametrik tenglamalaridan hosi-lalar olamiz:

$x_u = \cos v$, $y_u = \sin v$, $z_u = 0$,

$x_v = -u \sin v$, $y_v = u \cos v$, $z_v = a$,

$x_{uu} = 0$, $y_{uu} = 0$, $z_{uu} = 0$,

$x_{uv} = -\sin v$, $y_{uv} = \cos v$, $z_{uv} = 0$,

$x_{vv} = -u \cos v$, $y_{vv} = -u \sin v$, $z_{vv} = 0$.

Sirt birinchi kvadratik formasining koeffitsiyentlarini topamiz:

$E = \cos^2 v + \sin^2 v = 1$,

$F = -u \sin v \cos v + u \sin v \cos v = 0$,

$G = u^2 \sin^2 v + u^2 \cos^2 v + a^2 = u^2 + a^2$.

Sirt ikkinchi kvadratik formasining koeffitsiyentlarini topamiz. Sirt parametrik tenglamalari bilan berilgani uchun (7) formulalardan foydalanamiz.

$$D = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u\sin v & u\cos v & a \end{vmatrix}}{\sqrt{u^2+a^2}} = 0, \qquad D_1 = \frac{\begin{vmatrix} -\sin v & \cos v & 0 \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u\sin v & u\cos v & a \end{vmatrix}}{\sqrt{u^2+a^2}} = -\frac{a}{\sqrt{u^2+a^2}},$$

$$D_2 = \frac{\begin{vmatrix} -u\cos v & -u\sin v & 0 \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u\sin v & u\cos v & a \end{vmatrix}}{\sqrt{u^2+a^2}} = 0$$

Topilgan qiymatlarni (4) formulaga qo'yamiz:

$$\Phi_2 = -\frac{2a\,du\,dv}{\sqrt{u^2+a^2}} .$$

Bu to'g'ri gelikoidning ikkinchi kvadratik formasi bo'ladi.

2-misol. $z = xy$ sirtning ikkinchi kvadratik formasini toping.

Echish. Sirt tenglamasidan xususiy hosilalar olamiz:

$p = z_x = y$, $q = z_y = x$,

$$z_{xx} = 0\,, \qquad z_{xy} = 1\,, \qquad z_{xy} = 0.$$

Sirt oshkor tenglamasi bilan berilgani uchun (8) formula-lardan foydalanib, ikkinchi kvadratik formaning koeffitsiyentlarini topamiz:

$$D = \frac{0}{\sqrt{1+y^2+x^2}} = 0; \qquad D_1 = \frac{1}{\sqrt{1+y^2+x^2}}; \qquad D_2 = \frac{0}{\sqrt{1+y^2+x^2}} = 0.$$

Topilgan qiymatlarni (9) formulaga qo'yamiz:

$$F_2 = \frac{2dx\,dy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}.$$

## SIRT USTIDAGI ChIZIQNING EGRILIGI.

**Tayanch iboralar:** Sirt ustidagi chiziqning egriligi, normal kesim, normal kesimning egriligi, Mene formulasi, egrilik (Dyupen) indikatrisasi, indikatrisa tenglamasi, sirtning elliptik nuqta, sirtning giperbolik nuqta, sirtning parabolik nuqta, qo'shma yo'nalishlar, bosh yo'nalishlar, bosh egriliklar.

Sirt ikkinchi kvadratik forma tushunchasining kiritilishi, sirt ustidagi chiziqlarning egriligini aniqlashga imkon beradi.

Bizga **F** regulyar sirt $\vec{r} = \vec{r}\,(u, v)$ vektor tenglamasi bilan berilsin. Bu sirtda yotuvchi $\gamma$ chiziqni qaraylik. $\gamma$ chiziqqa $s$ tabiiy parametrni kiritamiz. U vaqtda bu chiziq nuqtalarining $u$ va $v$ egri chiziqli koordinatalari $s$ tabiiy parametrning funksiyalari bo'ladi:

$$u = u(s)\,, \qquad v = v(s)\,.$$

Bu ifodalarni sirtning vektor tenglamasiga qo'ysak:

$$\vec{r} = \vec{r}\,(u, v) = \vec{r}\,(u(s), v(s)) = \vec{r}\,(s)$$

yoki

$$\vec{r} = \vec{r}\,(s) \qquad (1)$$

hosil bo'ladi.

Bu (1) tenglama **F** sirt ustidagi $\gamma$ chiziqning tabiiy para-metrli vektor tenglamasi bo'ladi.

Chiziqlar nazariyasida ma'lumki

$$\ddot{\vec{r}} = k\vec{\nu}\,.$$

Bu erda $\vec{\nu}$ vektor $\gamma$ chiziq bosh normalining birlik vektori, $k$ esa chiziqning egriligi.

$\ddot{\vec{r}}$ vektor bilan sirt birlik normal vektori $\vec{n}$ ning skalyar ko'paytmasini qaraylik:

$$\ddot{\vec{r}}\cdot\vec{n} = k\vec{\nu}\,\vec{n} = k\cos\theta\,.$$

Demak,

$$\ddot{\vec{r}}\cdot\vec{n} = k\cos\theta\,, \qquad (2)$$

bu erda $\theta = \angle(\vec{\nu},\vec{n})$.

Ikkinchi tomondan:

$$\dot{\vec{r}} = \vec{r}_u\frac{du}{ds} + \vec{r}_v\frac{dv}{ds}$$

va

$$\ddot{\vec{r}} = \vec{r}_{uu}\frac{du^2}{ds^2} + 2\vec{r}_{uv}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \vec{r}_{vv}\frac{dv^2}{ds^2} + \vec{r}_u\frac{d^2u}{ds^2} + \vec{r}_v\frac{d^2v}{ds^2}$$

bo'lgani uchun

$$\ddot{\vec{r}}\cdot\vec{n} = \left(\vec{r}_{uu}\frac{du^2}{ds^2} + 2\vec{r}_{uv}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \vec{r}_{vv}\frac{dv^2}{ds^2} + \vec{r}_u\frac{d^2u}{ds^2} + \vec{r}_v\frac{d^2v}{ds^2}\right)\cdot\vec{n} =$$

$$= \vec{r}_{uu}\vec{n}\frac{du^2}{ds^2} + 2\vec{r}_{uv}\vec{n}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \vec{r}_{vv}\vec{n}\frac{dv^2}{ds^2} + \vec{r}_u\vec{n}\frac{d^2u}{ds^2} + \vec{r}_v\vec{n}\frac{d^2v}{ds^2}\,.$$

Bu erda $\vec{r}_u \perp \vec{n}$ va $\vec{r}_v \perp \vec{n}$ bo'lib, $\vec{r}_u\vec{n} = 0$ va $\vec{r}_v\vec{n} = 0$ bo'ladi.

Shuning uchun:

$$\ddot{\vec{r}}\cdot\vec{n} = \vec{r}_{uu}\vec{n}\frac{du^2}{ds^2} + 2\vec{r}_{uv}\vec{n}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \vec{r}_{vv}\vec{n}\frac{dv^2}{ds^2} = D\frac{du^2}{ds^2} + 2D_1\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + D_2\frac{dv^2}{ds^2} =$$

$$= \frac{Ddu^2 + 2D_1dudv + D_2dv^2}{ds^2} = \frac{\Phi_2}{\Phi_1}\,.$$

Demak,

$$\ddot{\vec{r}}\cdot\vec{n} = \frac{\Phi_2}{\Phi_1} \qquad (3).$$

(2) va (3) tengliklarga asosan:

$$k \cos\theta = \frac{\Phi_2}{\Phi_1} \qquad (4).$$

Bu munosabat sirtlar nazariyasining asosiy formulalaridan biri bo'ladi. Uning o'ng tomoniga ikkala kvadratik formaning koeffi-tsiyentlari kiradi. Tayin $M$ nuqta berilganda bu koeffitsiyentlar o'zgarmas sonlar bo'ladi.

Demak, $k \cos\theta$ ifoda faqatgina $du{:}dv$ nisbatga, ya'ni $\gamma$ chiziqning yo'nalishiga bog'liqdir. Shu sababli $M$ nuqtada bitta urinmaga ega bo'lgan **F** sirtda yotuvchi hamma chiziqlar uchun $k \cos\theta$ bir xil bo'ladi, ya'ni

$$k \cos\theta = const \qquad (5).$$

Endi **F** sirtdagi $\gamma$ chiziq sifatida normal kesim deb ataluvchi chiziqni qaraymiz.

<u>Ta'rif.</u> Sirtning berilgan nuqtasidagi normalidan o'tuvchi tekislik bilan shu sirtni kesishdan hosil bo'lgan chiziqqa **normal kesim** deb ataladi.

Normal kesimning bosh normali kesuvchi tekislikda yotgani uchun, bosh normalning birlik vektori $\vec{\nu}$ va sirt normalining birlik vektori $\vec{n}$ bir to'g'ri chiziqda yotib, ular orasidagi burchak yoki $0^\circ$, yoki $180^\circ$, ya'ni $\cos\theta = \pm 1$ bo'ladi.

Shunday qilib, agar normal kesimning egriligini $k_o$ deb belgilasak, (5) ga asosan

$$k \cos\theta = \pm k_o \qquad (6)$$

hosil bo'ladi. Bu (6) tenglik **Mene formulasi** deb ataladi.

(4) va (6) ga asosan:

$$\frac{\Phi_2}{\Phi_1} = \pm k_o \qquad (7)$$

bo'lishligi kelib chiqadi.

Bu formula sirtning birinchi va ikkinchi kvadratik formalari bilan sirt normal kesimining egriligi orasida bog'lanishni ifodalaydi.

## Nazorat savollari.

1. Sirtning qanday berilish usullari mavjud.
2. Sirtning birinchi va ikkinchi kvadratik formasining geometrik manosi
3. Sirtning ichki va tashqi geometriyasi nima

## IV. AMALIY MASHG'ULOTLAR

## 1 – AMALIYOT. Elementar geometriyaning asosiy elementlari va unga doir masalalar

**1-teorema.** Ikkita to'g'ri chiziq bittadan ortiq bo'lmagan umumiy nuqtaga ega; ikkita tekislik yoki umumiy nuqtaga ega emas yoki umumiy to'g'ri chiziqqa ega; tekislik va unda yotmaydigan to'g'ri chiziq bittadan ortiq bo'lmagan umumiy nuqtaga ega.

**Isbot.** Birinchi tasdiqning isboti $I_2$ aksiomadan kelib chiqadi. Ya'ni, teskarisini faraz qilamiz. $a$ va $b$ to'g'ri chiziqlar bir-biridan farqli bo'lib, umumiy $C$ nuqtadan tashqari $D$ nuqtaga ham ega bo'lsin. U holda, $C$, $D$ nuqtalar $a$, $b$ to'g'ri chiziqlarga tegishli ekani kelib chiqadi. $C$ va $D$ nuqtalar $a$, $b$ to'g'ri chiziqlarga tegishliligidan $I_2$ aksiomaga ko'ra $a$ to'g'ri chiziq bilan $b$ to'g'ri chiziq ustma-ust tushadi. Bu ziddiyat tasdiqni isbotlaydi.

**2-teorema.** Tog'ri chiziq va unda yotmaydigan nuqta, hamda ikkita kesishuvchi to'g'ri chiziqlar orqali bitta va faqat bitta tekislik o'tadi.

Isbot. Birinchi tasdiqni isbotlaymiz. $B$ nuqta $a$ to'g'ri chiziqqa tegishli emas deb faraz qilaylik. $I_3$ aksiomaga ko'ra $a$ to'g'ri chiziqda kamida ikkita nuqta mavjud. Bu nuqtalarni $P$ va $Q$ deb belgilaylik. $I_4$ aksiomaga ko'ra $B$, $P$, $Q$ nuqtadan o'tuvchi $\pi$ tekislik mavjud. $I_6$ aksiomaga ko'ra $\pi$ tekislik $a$ to'g'ri chiziq orqali o'tadi. $I_5$ aksiomaga ko'ra bir to'g'ri chiziqda yotmaydigan $B$, $P$, $Q$ nuqtadan o'tuvchi tekislik yagona ravishda aniqlanganligi uchun $a$ to'g'ri chiziq va $B$ nuqtadan o'tuvchi $\pi$ dan boshqa tekislik mavjud emas.

Endi ikkinchi tasdiqni isbotlaymiz. $a$ va $b$ to'g'ri chiziqlar $C$ nuqtada kesishadi deb faraz qilaylik. $I_3$ aksiomaga ko'ra $a$ to'g'ri chiziqda $C$ dan farqli $A$ nuqta $b$ tog'ri chiziqda $C$ dan farqli $B$ nuqta mavjud. $A$, $B$, $C$ nuqtalar bir to'g'ri chiziqda yotmaydi.$I_4$ aksiomaga ko'ra $A$, $B$, $C$ larning har biridan o'tuvchi $\pi$ tekislik mavjud. $I_6$ aksiomaga ko'ra $\pi$ tekislik $a$ va $b$ to'g'ri chiziqlardan o'tadi. $I_5$ aksiomaga ko'ra bu tekislik yagona. 5.2-teorema isbotlandi.

**3-teorema.** $I_8$ aksiomaga ko'ra $\pi$ tekislikda yotmaydigan $B$ nuqta mavjud. $I_3$ aksiomaga ko'ra $AB$ to'g'ri chiziqdan tashqarida $C$ nuqta mavjud. $A$ nuqta

$ABC$ va $\pi$ tekisliklarning umumiy nuqtasi ekanidan, $I_7$ aksiomaga ko’ra ularning yana kamida bitta umumiy $D$ nuqtasi bor. Shunday qilib, $\pi$ tekislikda $A$ nuqtadan tashqari $D$ nuqta ham mavjud. $I_8$ aksiomaga ko’ra $ABD$ tekislikda yotmaydigan $E$ nuqta mavjud. $I_4$ aksiomaga ko’ra, $ABE$ tekislik mavjud, $I_7$ aksiomaga ko’ra, $ABE$ va $\pi$ tekisliklar $A$ dan farqli umumiy $F$ nuqtaga ($I_6$ aksiomaga ko’ra $F$ nuqta $AB$ to’g’ri chiziqda yotmaydi). $F$ va $D$ nuqtalar $AB$ to’g’ri chiziqda yotmasligidan, 1-teoremanin ikkinchi tasdig’iga ko’ra ular $ABF$ va $ABD$ tekisliklarning umumiy nuqtalari bo’la olmaydi, bu yerda $D$ va $F$ nuqtalar har xil ekani kelib chiqadi. Shunday qilib, $\pi$ tekislikda uchta $A$, $D$, $F$ turlicha nuqtalar mavjud ekan. 3-teorema isbotlandi.

## Beshinchi postulat va undan kelib chiqadigan natijalar

Ikki to`g’ri chiziqni kesuvchi to`g’ri chiziq ular bilan ichki bir tomonli burchaklar hosil qiladi, bu ikki to`g’ri chiziq ichki bir tomonli burchaklar yig’indisi ikki to`g’ri burchakdan kichik bo`lgan tomonda kesishadi.

Evklid aksiomalari tizimining, shu jumladan uning postulatlarining eng muhim kamchiliklari uning to'liq emasligi, ya'ni geometriyani qat'iy mantiqiy qurish uchun etarli emasligi bo'lib, unda har bir jumla, agar u aksiomalar ro'yxatida bo'lmasa, bo'lishi kerak oxirgilaridan mantiqiy ravishda xulosa qilingan. Shuning uchun Evklid teoremalarni isbotlashda har doim ham aksiomalarga asoslanmagan, balki sezgi, vizualizatsiya va "sezgi" idroklarga murojaat qilgan. Masalan, u "oraliq" tushunchasiga sof vizual xarakterni bergan; u aylananing ichki nuqtasidan o'tuvchi to'g'ri chiziq, albatta, uni ikkita tayoqcha kesib o'tishi kerak, deb so'zsiz taxmin qildi. Shu bilan birga, u mantiqqa emas, balki faqat ko'rinishga asoslangan edi; u hech qayerda bu haqiqatning isbotini keltirmagan va bera olmagan, chunki unda davomiylik aksiomalari yetishmagan. Unda boshqa ba'zi aksiomalar ham yo'q, ularsiz teoremalarni qat'iy mantiqiy isbotlash mumkin emas.

Ammo beshinchi postulatga kelsak, Evklid postulatlarining haqiqatiga hech kim shubha qilmadi. Ayni paytda, antik davrda, aynan parallellar postulati bir qator geometriyachilarning alohida e'tiborini tortdi, ular uni postulatlar qatoriga qo'yishni g'ayritabiiy deb hisoblashdi. Bu, ehtimol, V postulatning nisbatan kamroq ravshanligi va ravshanligi bilan bog'liq edi: bilvosita, u tekislikning istalgan, o'zboshimchalik bilan uzoq qismlariga erishish mumkinligini taxmin qiladi, faqat to'g'ri chiziqlar cheksiz ravishda uzaytirilganda topiladigan xususiyatni ifodalaydi.

Evklidning o'zi va ko'plab olimlar parallellar postulatini isbotlashga harakat qilishdi. Ba'zilar parallellar postulatini V postulatning o'zidan foydalanmasdan, faqat boshqa postulatlardan va undan chiqarish mumkin bo'lgan teoremalardan foydalangan holda isbotlashga harakat qilishdi. Bunday urinishlarning barchasi muvaffaqiyatsiz tugadi. Ularning umumiy kamchiligi shundan iboratki, isbotlanayotgan postulatga ekvivalent bo'lgan ba'zi bir taxmin isbotda bilvosita qo'llanilgan. Boshqalar parallel chiziqlarni qayta belgilashni yoki V postulatini o'zlari aniqroq bo'lgan narsa bilan almashtirishni taklif qilishdi.

Ammo Evklidning beshinchi postulatini isbotlashga bo'lgan ko'p asrlik urinishlar oxir-oqibat yangi geometriyaning paydo bo'lishiga olib keldi, bu beshinchi postulat unda bajarilmaganligi bilan ajralib turadi. Ushbu geometriya endi Evklid bo'lmagan deb nomlanadi va Rossiyada u taqdimoti bilan asarni birinchi marta nashr etgan Lobachevskiy nomi bilan ataladi.

N.I.Lobachevskiy (1792-1856) geometrik kashfiyotlarining zaruriy shartlaridan biri esa uning bilish muammolariga aynan materialistik yondashuvidir. Lobachevskiyning fikricha, u moddiy dunyoning ob'ektiv mavjudligiga va uni inson ongiga bog'liq bo'lmagan bilish imkoniyatiga qat'iy ishonch hosil qilgan. Lobachevskiy o'zining "Ta'limning eng muhim mavzulari to'g'risida" (Qozon, 1828) ma'ruzasida F.Bekonning so'zlarini hamdardlik bilan keltiradi: "Ularni behuda mehnat qilishlarini qoldiring, ulardan barcha donolikni yolg'iz o'zi tortib olishga harakat qiling; tabiatdan so'rang, u barcha haqiqatlarni saqlaydi va barcha savollaringizga qoniqarli va qoniqarli javob beradi. Lobachevskiy o'zi kashf etgan geometriyaning birinchi nashri bo'lgan "Geometriya tamoyillari to'g'risida" inshosida shunday yozgan edi: "Har qanday fan boshlanadigan birinchi tushunchalar aniq bo'lishi va eng kichik songacha qisqartirilishi kerak. Shundagina ular ta’limot uchun mustahkam va yetarli asos bo‘lib xizmat qilishi mumkin.

Bunday tushunchalarni sezgilar egallaydi; tug'ma - ishonmaslik kerak.

Lobachevskiyning beshinchi postulatni isbotlashga birinchi urinishlari 1823 yilga to'g'ri keladi. 1826 yilga kelib, u beshinchi postulat Evklid geometriyasining qolgan aksiomalariga bog'liq emas degan xulosaga keldi va 1826 yil 11 (23) fevralda Qozon universiteti fakulteti yig'ilishida u ma'ruza qildi. Parallel teoremaning qat'iy isboti bilan geometriya tamoyillarining qisqacha taqdimoti, unda u tomonidan kashf etilgan, keyinchalik Evklid bo'lmagan geometriya deb nom olgan tizim deb atagan "xayoliy geometriya" ning boshlanishi tasvirlangan. . 1826 yilgi ma'ruza Lobachevskiyning Evklid bo'lmagan geometriyaga oid birinchi nashriga - 1829-1830 yillarda Qozon universitetining "Kazan Vestnik" jurnalida chop etilgan "Geometriya tamoyillari to'g'risida" maqolasiga kiritilgan. U tomonidan kashf etilgan geometriyaning keyingi rivojlanishi va qo‘llanilishi “Ilmiy eslatmalar”da chop etilgan “Hayoliy geometriya”, “Ba’zi integrallarga xayoliy geometriyaning qo‘llanilishi” va “To‘liq parallellik nazariyasi bilan geometriyaning yangi boshlanishi” xotiralariga bag‘ishlangan.

Beshinchi postulat Yevklid aksiomalari tizimida alohida o‘rin tutadi. Beshinchi postulatning

boshqa aksiomalar va postulatlardan farqi shundaki, u boshqalar kabi ko‘rgazmalilik xususiyatidan xoli va dastlabki 28 ta teoremaning isbotida qo‘llanilmaydi. Shu sababli, sharhlovchilar uni mustaqil teorema shaklida isbotlashga uringanlar. Agar ikkita A va B tasdiqdan biri ikkinchisini keltirib chiqarsa, ular teng kuchli deyiladi.

Beshinchi postulatni isbotlashga urinishlar natijalari unga teng kuchli tasdiqlar ochilishiga sabab bo‘ldi:

1. a to‘g‘ri chiziqdan tashqarida yotgan A nuqta orqali a to‘g‘ri chiziqni kesib o‘tmaydigan yagona to‘g‘ri chiziq o‘tkazish mumkin.
2. Bitta to‘g‘ri chiziqqa o‘tkazilgan perpendikular va og‘malar kesishadi.
3. Ixtiyoriy uchburchak ichki burchaklarining yig‘indisi ikkita to‘g‘ri burchakka teng.

4. Ikkita parallel to‘g‘ri chiziqdan birini kesib o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq ularning ikkinchisini ham kesib o‘tadi.
5. Parallel to‘g‘ri chiziqlar orasidagi masofa o‘zgarmasdir.

O‘rta asr Sharqida parallel chiziqlar nazariyasi. O‘rta asr Sharq olimlari parallel to‘g‘ri chiziqlar nazariyasiga alohida e’tibor berishgan. Al-Abbos ibn Said al-Javhariy, Forob (hozirgi Qozog‘iston Respublikasi) shahri fuqarosi, Muhammad ibn Muso al-Xorazmiyning zamondoshi va ilmiy xodimi bo‘lgan. U boshqa olimlar qatorida Al-Ma’munning astronomik jadvallarini yaratishda ishtirok etgan. Al-Javhariy parallel chiziqlar nazariyasini o‘zining „Islohli kitob al-Usul“ („Negizlar“ kitobini takomillashtirish) nomli asarida bayon qilgan.

Al-Javhariy quyidagi teoremani isbotlagan:

“ Agar HF to‘g‘ri chiziq AB va CD to‘g‘ri chiziqlarni ular bilan teng burchaklar hosil qilgan holda kesib o‘tsa, AB va CD to‘g‘ri chiziqlar paralleldir. Agar ular parallel bo‘lsa, CD to‘g‘ri chiziqning mos nuqtasidan AB to‘g‘ri chiziqning ixtiyoriy nuqtasigacha bo‘lgan masofa o‘zgarmaydi”.

Ibn Qurra ketma-ket quyidagi teoremalarni isbotlagan:

**A.** EY chiziq AB va CD chiziqlarga shunday tushganki, AEY va EYD burchaklar tengdir. U holda AB va CD chiziqlar na AC tomonga, na BD tomonga qarab uzoqlashmaydilar va yaqinlashmaydilar, deb aytaman.

**B.** Ikkita AB va CD chiziq hech bir tomonga qarab uzoqlashmaydi ham, yaqinlashmaydi ham va ularga EY chiziq o‘tkazilgan. Hosil bo‘lgan AEY va EYD ichki almashinuvchi burchaklar teng bo‘ladi, deb aytaman.

**Mustaqil yechish uchun masalalar.**

**1-masala.** A va C nuqtalar qanday bo’lmasin, AC kesmaning ichida yotuvchi, hamda AC to’g’ri chiziqning AC kesmadan tashqarida yotuvchi nuqtalari mavjudligi isbotlansin.

**2-masala.** To’g’ri chiziqdagi uchta nuqtadan har doim bittasi va faqat bittasi qolgan ikkitasi orasida yotishini isbotlang.

**3-masala.** Bir to’g’ri chiziqda yotmaydigan A, B, C nuqtalarni tutashtirishdan hosil qilingan AB, BC, AC kesmalardan ikkitasini kesuvchi $a$

to'g'ri chiziq uchinchisini kesib o'tmasligini isbotlang.

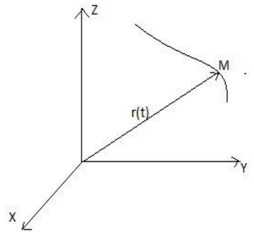
**4-masala.** B nuqta AC kesmada va C nuqta BD kesmada yotishi ma'lum bo'lsa, B va C nuqtalar AD kesmada yotishini isbotlang.

**5-masala.** C nuqta AD kesmada va B nuqta AC kesmada yotishi ma'lum bo'lsa, B nuqta AD kesmada va C nuqta BD kesmada yotishini isbotlang.

## 2- AMALIYOT: VEKTOR FUNKSIYA.

### Vektor funksiyasining geometrik tasviri

r(t) vektor funksiyaning mavjudlik sohasi $a \leq t \leq b$ berilgan bo'lsin. Hamma r(t) vectorlarni ko'chirib ularning boshlarini biror O nuqtaga keltiramiz. t ning har bir qiymatida malum bir $\overline{OM} = r(t)$ vektor mos keladi (16-chizma). t argument a dan b gacha uzluksiz o'zgara borganda M nuqta fazoda nuqtalarning qandaydir geometric o'rnini tashkil qiladi. Bu geametrik o'rin chiziq deb ataladi, r=r(t) esa chiziqning vektor shaklidagi parametric tenglamasi deyiladi.




16-chizma

Boshi O nuqtada bo'lgan dekart sistemasini olsak r(t) ning kardinata o'qlaridagi I,j,k ortlar bo'yicha yoyish mumkin, ya'ni: r=r(t)=x(t)i+y(t)j+z(t)k .

Jumladan chiziqning biror $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqtasida : r(t)=r($t_0$)=$x_0 i + y_0 j + z_0 k$.

Olingan chiziq XOY tekislikda yotsa: r(t)=x(t)i+y(t)j. $\overline{OM}$ vektorning x(t),y(t),z(t) koordinatalari M nuqtaning koordinatlari bo'ladi, demak: M$[x(t), y(t), z(t)]$, ya'ni

x(t)=x(t), y=y(t), $a \leq t \leq b$. (1)

Demak, chiziqni r=r(t) shakldagi vector tenglama yoki (1) shakildagi uchtatenglama bilan berish mumkin.

Vector-funksiyaga geometrik obraz sifatida mos kelgan chiziq shu vector funksiyasining godografi deb ataladi.

**Vektor funksiyasining hosilasi**

**Ta'rif**. Agar funksiyaning $\Delta r = r(t+\Delta t) - r(t)$ ortirmasiga bulishdan chiqqan nisbatning $\Delta t \to 0$ dagi limiti, ya'ni $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t}$ mavjud bo'lib, hamon bitta limit vektorga intilsa, u holda bu limit r(t) vector funksiyaning t argument bo'yicha hosilasi deyiladi, funksiyaning o'zi esa $t_0$ nuqtada differensiallovchi bo'ladi:

Bu yerda

$$\Delta r = r(t+\Delta t) - r(t) = [x(t+\Delta t) - x(t)]i + [y(t+\Delta t) - y(t)]j + [z(t+\Delta t) - z(t)]k$$

.

Shu sababli

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \lim \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} i + \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} j + \frac{z(t+\Delta t) - z(t)}{\Delta t} k$$

bo'ladi. x=x(t) , y=y(t),z=z(t) funksiyalarning har bir hosilasi bilan uzluksiz bo'lgani uchun quydagi natijani hosil qilamiz:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = x'(t)i + y'(t)j + z'(t)k$$

hosila $\frac{dr}{dt}$ yoki $r'(t)$ shaklida belgilanadi; boshqacha yozganda:

$r'(t) = x'(t)i + y'(t)j + z'(t)k$ yoki qisqacha

$r' = x'i + y'j + z'k$ bo'lada. Hosila $t = t_0$ qiymatda olingan bo'lansa:

$$z'(t_0) = x'(t_0)i + y'(t_0)j + z'(t_0)k\ .$$

$r' = r'(t)$ funksiyadan yana hosila olish mumkin va hokazo; biz bu holda 2,3,… tartibli hosilalarga ega bo'lamiz, ya'ni:

$$\frac{dr'}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2} = r''; \frac{d^3r}{dt^2} = r'''; \ldots$$

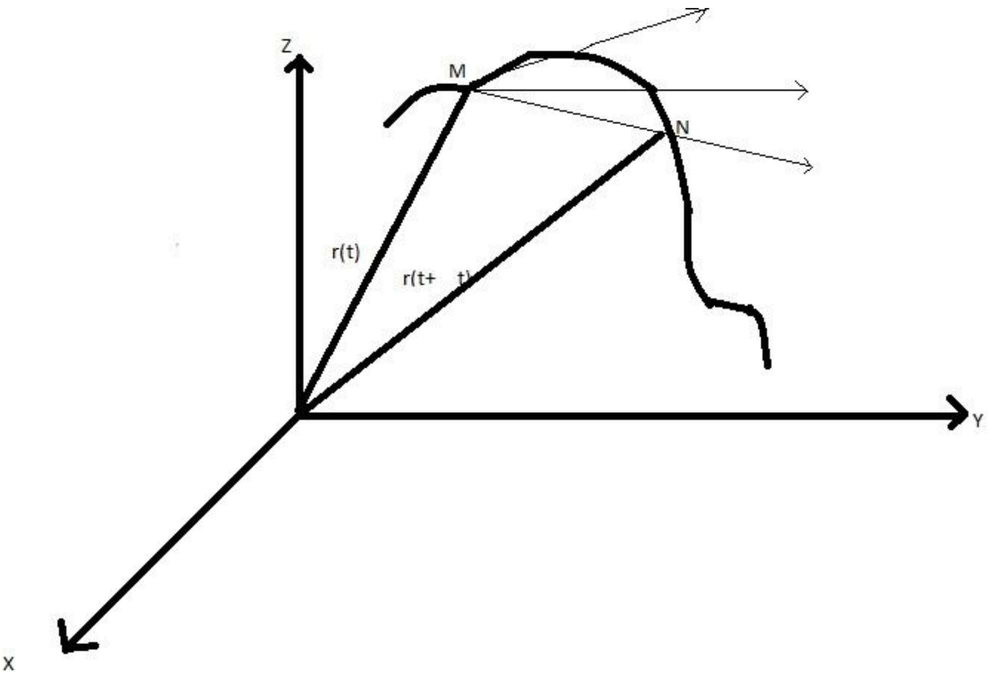
kelgusida biz o'zi va hodisalari doimo uzluksiz bo'lgan vector funksiyalar bilan ish ko'ramiz.

**Vektor-funksiyasi hosilasining geometrik ma'nosi**

Vektor funksiyasining geometrik tasviri egri chiziqdan iborat ekanligini ko’rib o’tamiz. Endi, parametrning t va $t+\Delta t$ qiymatlariga chiziqning M va N nuqtalari mos kelsin (17-rasm). U holda ayirma vektor $r(t+\Delta t)-r(t)=\Delta r=\overline{MN}$ bo’ladi. $\overline{MN}$ vektorni $\Delta t$ skalyar bo’lib, $\frac{\overline{MN}}{\Delta t}$ ni hosil qilamiz. $\overline{MN}$ va $\frac{\overline{MN}}{\Delta t}$ vektorlar kesuvchi MN to’g’ri chiziq ustida yotadi. $\Delta t$ nolga intilganda, N nuqta chiziq bo’ylab M ga intiladi. MN to’g’ri chiziq M nuqta atrofida aylanib, urinma vaziyatni oladi. Shartga ko’ra, r(t) uzluksiz hosilalarga ega bo’lgani uchun

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{r(t+\Delta t)-r(t)}{\Delta t}=r'(t)$$

mavjud bo’lib, bu hosila urinma to’g’ri chiziq bo’ylab yo’naladi, ya’ni urinma vektor bo’ylab yo’naladi.




M nuqtadan N nuqta tomon harakat qilganda $\Delta t>0$ bo’lsa, ya’ni t parametr o’sa borsa, MN kesuvchi bilan $\overrightarrow{MN}$ vektorning yo’nalishi bir xil bo’ladi, $\Delta t<0$ da esa ularning yo’nalishlari teskari bo’ladi.

Demak , $r'$ vektor urinma bo’ylab parametrning o’sa borish tomonga qarab yo’nalgan bo’ladi. t argumentni M nuqta harakatining boshlanishidan hisoblangan vaqt deb qarasak va r=r(t) tenglama M ning chiziq bo’ylab qilgan harakat qonunini ifodalasa, u holda $r'(t)$ hosila nuqtaning t paytdagi tezlik vektori deyiladi.

**Vektorni differensialsh qoidalari**

Bir necha vaktor yig'indisining hosilasi shu vektorlar hosilalarining yig'idisiga teng.

Darhaqiqat, avvalo, ikki vektornig yig'indisi R(t)=r(t)+q(t) berilgan bo'lsin. Bu yerda $\Delta R = r(t+\Delta t) - r(t) + q(t+\Delta t) - q(t) = \Delta r + \Delta q$ bo'ladi. Buning ikkala tomonini $\Delta t$ ga bo'lib, limitga o'tamiz:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta R}{\Delta t} = \lim \frac{\Delta r}{\Delta t} + \lim \frac{\Delta q}{\Delta t} \text{ yoki } R'(t) = r'(t) + q'(t).$$

Vektorlarning soni ikkidan ortiq bo'lganda ham bu xossa xuddi shu yo'l bilan isbotlanadi. Endi $r'(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k$ vektorni differensiallasak, natijada:

$$r'(t) = x'(t)i + y'(t)j + z'(t)k$$

hosil bo'ladi. Xuddi shunga uxshash:

$$\frac{d}{dt}(r(t)q(t) = \frac{dr}{dt}q + r\frac{dq}{dt},$$

$$\frac{d}{dt}[r\,q] = \left[\frac{dr}{dt}q\right] + \left[r\frac{dq}{dt}\right].$$

Misol uchun bu tengliklardan ikkinchisini isbotlaymiz. Ushbu:

$\Delta[r\,q] = [(r+\Delta r)(q+\Delta q)] - [r\,q]$ ayirmani olib bir biriga teng, ammo ishoralari qarama –qarshi bo'lgan hadlar qushamiz:

$$\Delta[rq] = [(r+\Delta r - r)(q+\Delta q)] + [r(q+\Delta q - q)] = [\Delta r(q+\Delta q)] + +[r\Delta q]$$

hosil bo'ladi. Endi , buni $\Delta t$ ga bo'lib, limitga o'tamiz:

$\lim \frac{\Delta[rq]}{\Delta t} = \left[\lim \frac{\Delta r}{\Delta t} \lim(q+\Delta q)\right] + \left[r \lim \frac{dq}{dt}\right]$ bo'ladi.

Natijalar:

1. O'zgaruvchan birik vektorning hosilasi shu vektorga perpendikulyar vektordir.

**mm**=1 tenglikdan foydalanamiz. Uning ikki tomonidan hosila olamiz :

$\frac{dm}{dt}m + m\frac{dm}{dt} = 0$ yoki $2\frac{dm}{dt}m = 0$, bundan $\frac{dm}{dt} \perp m$ ekani kelib chiqadi.

Bu natijaning geometrik ma'nosini quydagicha tushunish mumkin: o'zgaruvchan birlik **m** vektorning oxiri aylana chizadi yoki sferaning radiusiga, ya'ni **m** ga perpendikulyar buladi

2. O’zgaruvchan birlik vektorningt hosilasi shu vektorga perpendikulyar vektordir. Haqiqatan, o’zgaruvchan birlik vektorni **m** bilan belgilab, **mm** =1 tenglikdan foydalanamiz.

Uning ikki tomonidan hosila olamiz: $\frac{dm}{dt}m + m\frac{dm}{dt} = 0$ yoki $2\frac{dm}{dt}m = 0,$ bundan $\frac{dm}{dt} \perp m$ ekani kielib chiqadi.

Bu natijaning geametrik ma’nosini quydagicha tushunish mumkin: o’zgaruvchan birlik **m** vektorning oxiri aylana chizadi yoki sferada yotadigan chiziq chiza boradi. $\frac{dm}{dt}$ bu chiziqqa urinma bo’lgani uchun aylana yoki sferaning radiusiga,ya’ni **m** ga perpendikulyar (18-chizma).

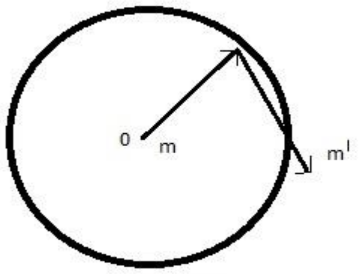
Uzunligi o’zgarmas boshqa vektorlar uchun ham xuddi shu natijani olamiz, ya’ni bunday vektorning hosilasi ham vector bo’lib, u berilgan vektorga perpendikulyardir.

2. **m** ning koordinata o’qlari bilan tashkil qilgan burchaklarni $\alpha, \beta, \gamma$ desak, $m = icos\alpha + jcos\beta + kcos\gamma$ bo’ladi.

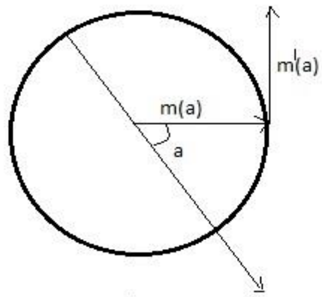
3. Birlik vector **m** vector XOY tekislikda yotgan bo’lsa, uni **m=m(**$\alpha$) shaklida yozish mumkin, $\alpha$ burchak 0 dan $360^0$ gacha o’zgarganda, m($\alpha$) ning godografi aylana bo’ladi

(19-chizma)

m$(\alpha) = icos\alpha + jcos(90^0 - \alpha) = icos\alpha + jsin\alpha$




18-chizma




19-chizma

Uning $m'(\alpha) = -isin\alpha + jcos\alpha$ hosilasi m($\alpha$) ga perpendikulyar bo'lgan $m(\alpha + \frac{\pi}{2})$ vektordir. Bu vektorning yoyilmasi:

$$m\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = icos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + jsin(\alpha + \frac{\pi}{2})$$

yoki

$$m\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -isin\alpha + jcos\alpha;$$

$demak$:

$m\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) * m(\alpha) = -sin\alpha cos\alpha + sin\alpha cos\alpha = 0$, ya'ni:

$m'(\alpha) \perp m(\alpha)$ bo'ladi.

4. Chiziqlarga nisbatan yuqorida quyilgan shartlarga binoan x(t),y(t),z(t) funksiyalar uzluksiz bo'lib, istalgan tartibgacha hosilalarga ega. Shuning uchun x(t),y(t),z(t) funksiyalarni teylor formulasi buyicha yoyib, ya'ni:

$$x(t+\Delta t) = x(t) + x'(t)\Delta t + x''(t)\frac{(\Delta t)^2}{2} + \cdots + x^{(n-1)}(t)\frac{\Delta(t)^{n-1}}{(n-1)!} + x^{(n)}(t+\theta_1\Delta t)\frac{(\Delta t)^n}{n!};$$

$$x(t+\Delta t) == x(t) + x'(t)\Delta t + x''(t)\frac{(\Delta t)^2}{2} + \cdots + x^{(n-1)}(t)\frac{\Delta(t)^{n-1}}{(n-1)!} + x^{(n)}(t+\theta_1\Delta t)\frac{(\Delta t)^n}{n!}$$

$$y(t+\Delta t) = y(t) + x'(t)\Delta t + y''(t)\frac{(\Delta t)^2}{2} + \cdots + y(t)\frac{\Delta(t)^{n-1}}{(n-1)!}$$
$$+ y^{(n)}(t+\theta_1\Delta t)\frac{(\Delta t)^n}{n!};$$
$$z(t+\Delta t) = z(t) + z(t)\Delta t + z''(t)\frac{(\Delta t)^2}{2} + \cdots + z^{(n-1)}(t)\frac{\Delta(t)^{n-1}}{(n-1)!}$$
$$+ z^{(n)}(t+\theta_1\Delta t)\frac{(\Delta t)^n}{n!};$$

$ularni$ birinchisini **i** ga,ikkinchisini **j** ga, uchinchisini **k** ga ko'paytrib, hadma-hd qushsak, natijada r(t) vector funksiyaning teylor formulasi buyicha yoyilmasi chiqadi.

$$r(t+\Delta t) = r(t) + r'(t)\Delta t + r''(t)\frac{(\Delta t)^2}{2} + \cdots + \frac{r^{n-1}(t)}{(n-1)!}(\Delta t)^{n-1} + R_n\frac{(\Delta t)^n}{n!}.$$

$Bu$ yerda $R_n$ quydagi qiymatga ega :

$R_n = x^{(n)}(t+\theta_1\Delta t)i + y^{(n)}(t+\theta_2\Delta t)j + z^n(t+\theta_1\Delta t)k$ (0<$\theta_i < 1$).

$\boldsymbol{Ta'rif}$. Agar r(t)=$\frac{dR}{dt}$ bo'lsa, R(t)=$\int r(t)\,dt$ ifoda r(t) vector funksiyaning aniqmas integrali deyiladi.

$\int_a^b r(t)dt = R(b) - R(a)$ ifoda r(t) vector funksiyaning aniq integrali bo'ladi.

$Vektor\ funksiyadan$ olingan integrallar matematik analizdagi integrallash qoidalaiga bo'ysunadi.

Vektorlar nazaryasini yakunlab , vektorlarning yana ba'zi xossalariga tuxtalib o'tamiz.

## Yo'nalishi o'zgarmas bo'lgan o'zgaruvchi vektorning xossasi.

O'zgaruvchi vector funksiyaning o'nalishi o'zgarmas bo'lsa va bu yunalishdagi birlik vektorni $\xi$ bilan belgilasak, u holda r(t) vector-unksiyani r(t)=$|r(t)|\xi = l\xi$ shaklda yozish mumkin. Bu vektorning hosilasini olamiz:

$\frac{dr}{dt} = \frac{dl}{dt}\xi = \frac{dl}{dt}\frac{r(t)}{l} = \frac{l'}{l}r(t)$. Endi $\frac{l'}{l}$ ni $\lambda$ bilan belgilasak $\frac{dr}{dt} = \lambda r(t)$ bo'ladi. Bu esa $\frac{dr}{dt}$ va r(t) vektorlarning koleniar ekanligini ko'rsatadi. Aksincha $\frac{dr}{dt}$ va r(t) koleniar vektorlar bo'lsa,r(t) vector-funksiyaning yunalishi doimiy bo'ladi. Buni isbotlaymiz. r(t) ning yunalishi o'zgaradi deb faraz qilaylik. U vaqtda $\xi$ ham o'zgaruvchan bo'ladi. Demak $\frac{dr}{dt} = \frac{dl}{dt}\xi + l\frac{d\xi}{dt}$ bo'ladi. Endi $\xi = \frac{r(t)}{l}$ ga binoan, $\frac{dr(t)}{dt} = \frac{dl}{dt}\xi + l\frac{d\xi}{dt} = \frac{l'}{l} + l\frac{d\xi}{dt} = \lambda r(t) + l\frac{d\xi}{dt}$ bo'ladi. Bundan $l\frac{d\xi}{dt} = 0$ yoki $\frac{d\xi}{dt} = 0$ kelib chiqadi. Bu esa $\xi$ vektornig doimiy ektor ekanligini isbotlaydi.

**O'zgarmas tekislikka parallel vektor.**

Agar r(t) vector funksiya ma'lum bir tekislikka parallel vaziyatda o'zgarsa,u holda r(t) vector teksliknn normal vektoriga perpendikulyar, ya'ni r(t)*n=0 bo'ladi. Bundan ikki marta hosila olamiz: $r'(t)n = 0$, $\boldsymbol{r''(t)n = 0}$. Bu uchta tenglikdan r(t),$r'(t)$ va $r''(t)$ ning har biri **n** vektorga perpendikulyar ekanligi kurinadi. Demak bularning uchalasi ham bir tekislikka parallel, ya'ni o'zaro komplanardir . shuning uchun bu uchala vektornin aralash ko'paytmasi noga teng. (r(t)$r'(t)r''$)) $= 0$. Aksincha $(r(t) * r'(t) * r''(t)) = 0$ bo'lsa, r(t) doimo bir tekislikka parallel bo'ladi.

## 3 - AMALIYOT. GEOMETRIYANING ZAMONAVIY YO'NALISHLARI VA MUAMMOLARI

Nemis matematigi **I o g a n n G ye n r i x L a m b ye r t** (1728-1777) ham bu postulatni isbotlashga urindi.

U quyidagicha yasashlarni bajardi. AV kesmaning uchlaridan ikkita perpendikulyar va teng kesmalar *AA1* va *VV1* ni ajratdi. So'ngra *AA1* kesmaning oxiridan A1 nuqtaga yana bitta perpendikulyar tushirdi, uchta to'g'ri burchakli to'rtburchak hosil bo'ldi. Sakkeriga o'xshab u ham to'rtinchi burchak, o'tkir va o'tmas burchak farazlarini ilgari surdi. So'ngra to'g'ri burchak farazi beshinchi postulatga teng kuchliligini hamda o'tmas burchak farazi qarama - qarshilikka uchrashini isbotladi.

Lambert keyinchalik, o'tkir burchak farazidan kelib chiqadigan fikrlarni rivojlantirishga harakat qildi, lekin bunda qarama-qarshilikni uchrata olmadi. Shunday qilib, V postulatni isbot qilish mumkin emas degan fikrga keldi. Bu bilan

X1X asr boshigacha beshinchi postulat muammosi hal qilinmay qoldi.

Bu muammoning yechimini buyuk rus matematigi **Nikolay Ivanovich Lobachevskiy** (1792-1856) 1826 yil 23 fevral kuni Qozon Universiteti fizika-matematika bo'limiga taqdim etgan «Geometriya asoslarining qisqacha bayoni parallellar to'g'risidagi teoremaning qat'iy isboti bilan» asari qo'lyozmasida topdi.

Bu yangi geometriya to'g'risidati birinchi axborot edi va tarixga bu kun noyevklid geometriyasi yaratilgan kun bo'lib kirdi. Faqat uch yildan so'ng, 1829-1830 yillarda «Kazanskiy vestnik» jurnalida uning «Geometriya asoslari haqida» maqolasi bosilib, bu kashfiyot mazmuni bayon etildi. Lobachevskiy birinchi marta Yevklidning beshinchi postulati geometriyaning boshqa aksiomalariga bog'liq emasligini isbotladi.

Lobachevskiy Yevklid aksiomatikasida beshinchi postulatni qo'yidagi aksioma bilan almashtirdi: to'g'ri chiziqdan tashqarida tekislikda yotuvchi ular bilan kesishmaydigan ikkitadan kam bo'lmagan to'g'ri chiziq o'tkazish mumkin. Demak, Lobachevskiy aksiomasiga muvofiq A nuqtadan utuvchi $\boldsymbol{a_1}$ va $\boldsymbol{a_2}$ to'g'ri chiziqlar to'g'ri $\boldsymbol{b}$ chiziqni kesib o'tmaydi.

- Lobachevskiy o'zi yaratgan geometriyani rivojlantira borib, uni «faraz qilinuvchi» geometriya deb etadi hamda qat'iy mantiqiy sistemani yaratdi.
- Bu geometriya Yevklid geometriyasidan tamoman farq qilar edi. Lekin u mantiqiy qarama - qarshilikka (ziddiyatlikka) duch kelishi lozim edi, chunki - ikkita geometriyaning bir vaqtda mavjud bo'lishligi mumkin emas edi.
- Shunga qaramay, Lobachevskiy yangi natijalar keltirib chiqara berdi, ular mantiqiy qarama - qarshiliklarga uchramadi. Lobachevskiy bu natijalarni 1835 yilda Qozon Universiteti ilmiy ishlarida «Faraz qilinadigan geometriya», 1835- 1838 yillarda e'lon qilingan «Parallel to'g'ri chiziqlar to'la nazariyasi va geometriyaning yangi asoslari» va 1885 yilda yana Qozon Universiteti ilmiy ishlarida chop etilgan «Pangeometriya» asarlarida bayon etdi. Yangi geometriya va Yevklid geometriyasida birinchi to'rtta guruh aksiomalar ustma-ust tushadi. Bu aksiomalar guruhlari va ularning natijalari absolyut geometriya deb atala boshladi.

- Lobachevskiy geometriyasida qarama - qarshilik yo'qligidan Yevklidning beshinchi postulatini isbotlash mumkin emas degan natija kelib chiqadi. Nima uchun? Nima uchun bu postulatni absolyut geometriyadan keltirib chiqarish mumkin emas? Mazkur savollarga javob berishga harakat qilib ko'raylik.
- Ma'lumki, absolyut geometriya bu ikkita geometriyaning umumiy qismidan tashkil topgan: agar absolyut geometriyaga Yevklidning beshinchi postulatini qo'shsak, Yevklid, geometriyasi; agarda absolyut geometriyaga Lobachevskiy aksiomasini qo'shsak, Lobachevskiy geometriyasi hosil bo'ladi.
- Shunday qilib, Yevklidning beshinchi postulatini (yoki unga teng kuchli bo'lgan ixtiyoriy mulohazani) isbot qilish, ya'ni absolyut geometriyadan mantiqiy keltirib chiqarish mumkin emas. Lobachevskiy geometriyasi kabi Yevklid reometriyasi qarama-qarshiliksizdir, Chunki arifmetikada qarama-qarshilik yo'k.
- Demak, ikkala geometriya ham mavjud bo'lish huquqiga ega. Lekin noyevklid geometriyasi (Lobachevskiy geometriyasi) Yevklid geometriyasidan jiddiy farq qiladi. Masalan, Lobachevskiy geometriyasida uchburchak ichki burchaklarining yig'indisi $\pi$ dan kichik, unda o'xshash tengmas uchburchaklar mavjud emas, berilgan to'g'ri chiziqdan bir xil uzoqlashgan nuqtalar to'plami to'g'ri chiziq emas, balki egri chiziq hisoblanadi va x. k.
- Vilgelm Veber bilan birgalikda Karl Fridrix Gauss elektromagnit telegrafni kashf etdi. "Arifmetik tadqiqotlar", "Quyosh atrofida konik kesimlar bo'yicha aylanuvchi osmon jismlari harakati nazariyasi", "Egri sirtlar haqida umumiy tadqiqotlar" nomli asarlar muallifi.
- Karl Fridrix Gauss Braunshveygda 1777 yil 30 aprelda tug'ilgan. Yetti yoshida Yekaterinin xalq maktabiga o'qishga kirdi. 1788 yilda Gauss gimnaziyagv o'tdi, u yerda tillarni o'rgandi. 1791 yilda Karl Gaussni gersog

Karl Vilgelmu Ferdinandga tanishtirishdi. U saroyda bo'lib, saroy ahli bilan hisoblash san'ati bo'yicha mashg'ulotlar olib bordi.

- 1795 yil oktyabrida Karl Fridrix Gauss Gettingen universitetiga o'qishga kirdi. U ko'p vaqtini filologiyaga qaratdi. 1795 yilda Karl Fridrix Gauss butun sonlar bilan shug'ullana boshladi. 1796 yil 30 martigacha Gauss "boshlang'ich" ildizlar nazariyasini o'ylab topdi, shu asosda o'nettiburchak( birdan p-chi darajali ildizlar p ta ekanligidan) yasashga muvaffaq bo'ldi. 1796 yil 8 aprelida Karl Gauss o'zarolikning kvadratik qonuni teoremasini isbotladi, uni «oltin» teorema deb atadi.
- Gelmshtadtda 1798 yilda Karl Fridrix Gauss "Algebraning asosiy teoremasini" – har qanday p-chi darajali algebraik tenglama p ta ildizga(haqiqiy yoki mavhum) ega ekanligi haqidagi tasdiq isbotiga bag'ishlangan dissertasiyani tayyorladi.
- 1801 yilda Karl Gaussning "Arifmetik tadqiqotlar" (yetti qismdan iborat, sakkizinchisini nashr etish uchun mablag' yetishmagan) asari chop etildi. Bu kitobni u gersog Karl Vilgelma Ferdinand mablag'lari hisobiga chiqargan va unga bag'ishlagan.
- Astronomiya bilan shug'ullanib, Gauss faraz qilinayotgan yangi katta sayyoraning trayektoriyasini hisobladi.. Nemis astronomi Olbers, Gaussning hisoblariga suyanib, sayyorani topdi (uni Serera deb atadi). 1802 yil 25 martda Olbers yana bita sayyorani – Palladani kashf etdi.
- 1809 yilda Karl Fridrix Gauss "Quyosh atrofida konik kesimlar bo'yicha aylanuvchi osmon jismlari harakat nazariyasi" nomli asarini nashr etdi, unda orbitalarni hisoblashning o'z usullarini bayon etdi. O'z usulining kuchiga ishonch hosil qilish uchun Eyler uch kun hisoblagan 1769 yil kometasi orbitasini qaytadan hisoblab chiqdi.
- Gaussning noyevklid geometriya bo'yicha tadqiqotlari uning vafotidan so'ng ma'lum bo'ldi. U Yanoshning otasiga (u ham matematik edi) yozgan xatida, bu geometriya sistemasiga juda avval uchraganligini (bu fikrga u 1818 yillarda kelgan), lekin, uni hayotligi davrida e'lon qilmaslikka qaror

qilganligini (tushunmovchiliklarga sabab bo'lishidan xavfsirab) ta'kidlagan edi. Ichki qarshilik va unga bog'liq yangi geometriya mavjudligi haqidagi shubhalar Gaussning qat'iy fikrga kelishiga, bu sohada tadqiqotlar o'tkazishiga va ishlarini chop etishga xalaqit berdi. U N. I. Lobachevskiy ishlariga katta e'tibor bilan qaradi, uni Gettingen fanlar akademiyasiga muxbir-a'zo qilib saylash tashabbuskori edi; ammo bu kashfiyotga oid o'z fikrini e'lon qilmadi.

- Lobachevskiy geometriyasi modelini mashhur fransuz matematigi **Jyul Anri Puankare** (1854-1912) 1882 yilda yaratdi. Yevklid geometriyasini olamiz - va unda gorizontal *a* to'g'ri chiziqni o'tkazamiz, u tekislikni ikkita yarim tekislikka ajratadi. Yuqorigi yarim tekislik nuqtalarini noyevklid nuqtalari (to'g'ri chiziq nuqtalari bunga kirmaydi) deb ataymiz. Noyevklid to'g'ri chiziqlar deb esa markazlari *a* to'g'ri chiziqda yotuvchi yarim aylanalarni ataymiz. Noyevklid to'g'ri chiziqlarga *a* to'g'ri chiziqqa perpendikulyar nurlarni ham kiritamiz.
- Bundan oldinroq, 1871 yilda nemis matematigi **Feliks Xristian Kleyn** (1849- 1925) proyektiv metrika g'oyasi asosida Lobachevskiy geometriyasi tavsifini bergan edi.
- U o'zining geometrik tadqiqotlarini 1872 yilda nashr qilingan «Yangi geometrik tadqiqotlarga taqqoslama nazar» («Erlangen: dasturi») asarida har qanday geometriya almashtirishlar maxsus guruhining invariatlar nazariyasi bo'lib xisoblanishini ko'rsatdi. Guruhni kengaytirib yoki qisqartirib, bir turdagi geometriyadan ikkinchi turdagi geometriyaga o'tish mumkin.
- Yevklid geometriyasi - metrik guruhlarning invariantlari haqidagi fan, proyektiv geometriya - proyektiv guruhlarning invariantlari haqidagi fandir. Almashtirishlar guruhini sinflarga ajratib geometriyalarni sinflarga ajratishga olib keladi. Har bir guruhlarning algebraik va differensial invariantlari nazariyasi geometriyaning analitik tuzilishini beradi.

- Keyinchalik Kleyn Yevklid geometriyasining modelini proyektiv metrika orkali tuzish mumkinligini ko'rsatdi. Bunda u ingliz matematigi Artur Keli (1821- 1895) 1859 yilda kiritgan proyektiv metrika tushunchasiga asoslandi.
- Lobachevskiy, agar real fazo yevklid geometriyasi qonunlariga buysunmasa, u holda kosmosda uchburchak burchaklarining yig'indisi $\pi$ dan kichik, deb faraz qildi. U fazoning noyevklidligiga ishonar edi. Agar olam o'lchovlarining bizga ko'rinarli qismini qisqartirgan holda qarasak, u xolda Lobachevskiy geometriyasi o'rinli bo'ladi.
- 1863 yilda italyan matematigi **Eujenio Beltrami** (1835-1900) va nemis matematigi **Berixard Riman** (1826-1866) yangi geometriya tavsifi bo'yicha katta ishlar qildilar.
- Beltrami «Noyevklid geometriyasini tavsiflash tajribasi» kitobida sirtida Lobachevskiy geometriyasi bajariladigan real jismlar mavjudligini ko'rsatdi. U o'zgarmas manfiy egrilikka ega bo'lgan sirtlarda (psevdosfera) noyevklid geometriyasi bajarilishini isbotladi, shuningdek, Lobachevskiy geometriyasi mantiqiy qarama-qarshiliksiz ekanligini ko'rsatdi.
- Yevklid real fazosida noyevklid xususiyatiga ega bo'lgan jismlardan birini quyidagicha yasash mumkin.
- $b$ va $c$ chiziqlar A nuqtadan o'tadi va $a$ ga parallel psevdosfera o'zgarmas manfiy egrilikka ega bo'lgan sirt deb ham ataladi. Agar egri chiziqli uchburchak burchaklarining yig'indisi $2d$ dan kichik bo'lsa, sirt manfiy egrilikka ega bo'ladi. Agar Lobachevskiy tekisligida uchburchak (psevdosferada) yasasak, uning burchaklari yig'indisi $2d$ dan kichik ekanligi ko'rinadi.
- Musbat egrilikka ega bo'lgan sirtlar ham mavjud, ularning sirtida uchburchak burchaklarining yig'indisi $\pi$ dan katta. Bunga misol sifatida shar sirtini olish mumkin. Sferada to'g'ri chiziq deb ixtiyoriy katta doira aylanasini hisoblash mumkin, ya'ni shar markazidan o'tuvchi tekislik bilan sfera kesishishidan hosil bo'lgan aylana.
- Sferada barcha to'g'ri chiziqlar kesishadi.

- Demak, sferada na Yevklid geometriyasi, na Lobachevskiy geometriyasi amal qiladi. Bunda uchburchak burchaklarining yigindnsi $\pi$ dan katta. Bazi hollarda u $3d$ ga ham teng bo'lishi mumkin. Bulardan ko'rinadiki, Yevklid tekisligi nol egrilikka ega.

## 4 – AMALIY: SIRT TUSHUNCHASI. SIRTNING ICHKI VA TASHQI GEOMETRIYASI

Bizga **F** regulyar sirt $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ vektor tenglamasi bilan berilgan bo'lsin.

Ta'rif. **F** sirtning berilgan $M$ nuqtasidagi urinma tekis-ligiga perpendikulyar bo'lgan birlik vektorga sirtning shu nuqtasidagi **birlik normal vektori** deb ataymiz va $\vec{n}$ bilan belgilaymiz

Agar $M(u; v)$ nuqta **F** sirt bo'ylab harakatlansa, u vaqtda sirtning shu nuqtasidagi birlik normal vektori $\vec{n}$ ham harakatlana boradi, ya'ni bu $\vec{n}$ vektor $u$ va $v$ o'zgaruvchilarning vektor funk-tsiyasi bo'ladi:

$$\vec{n} = \vec{n}(u, v) \qquad (1).$$

Sirtning vektor tenglamasini va (1) tenglamani differen-tsiallaymiz:

$$d\vec{r} = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv,$$

$$d\vec{n} = \vec{n}_u du + \vec{n}_v dv.$$

Bu $d\vec{r}$ va $d\vec{n}$ vektorlarni skalyar ko'paytiraylik:

$$d\vec{r} \cdot d\vec{n} = (\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv)(\vec{n}_u du + \vec{n}_v dv) = \vec{r}_u \vec{n}_u du^2 + (\vec{r}_u \vec{n}_v + \vec{r}_v \vec{n}_u) du dv + \vec{r}_v \vec{n}_v dv^2 .$$

Ta'rif. Ushbu

$$\mathbf{F}_2 = -d\vec{r} \cdot d\vec{n} = -\vec{r}_u \vec{n}_u du^2 - (\vec{r}_u \vec{n}_v + \vec{r}_v \vec{n}_u) du dv - \vec{r}_v \vec{n}_v dv^2 \qquad (2)$$

ifodaga sirtning **ikkinchi kvadratik formasi** deb ataladi.

Sirtning ikkinchi kvadratik formasi uchun quyidagi belgi-lashlarni kiritamiz:

$$\left.\begin{aligned} -\vec{r}_u \vec{n}_u &= D, \\ -\left(\vec{r}_u \vec{n}_v + \vec{r}_v \vec{n}_u\right) &= 2D_1, \\ -\vec{r}_v \vec{n}_v &= D_2 \end{aligned}\right\} \qquad (3).$$

U vaqtda ikkinchi kvadratik forma ushbu ko'rinishni oladi:

$$\mathbf{F}_2 = D\, du^2 + 2\, D_1\, du\, dv + D_2\, dv^2 \qquad (4).$$

Bizga ma'lumki $\vec{r}_u$ va $\vec{r}_v$ vektorlar sirtning urinma tekis-ligiga parallel bo'lar edi. Demak, bu vektorlarning chiziqli kombina-tsiyasi bo'lgan $d\vec{r} = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv$ vektor ham sirtning urinma tekisligiga parallel bo'ladi. Ta'rifga asosan $\vec{n}$ vektor urinma tekislikka per-pendikulyardir. Shuning uchun $d\vec{r}$ va $\vec{n}$ vektorlar o'zaro perpendikulyar bo'lib, ularning skalyar ko'paytmasi nolga teng bo'ladi:

$$d\vec{r} \cdot \vec{n} = 0.$$

Bu tenglikni differensiallaylik:

$$d(d\vec{r} \cdot \vec{n}) = d^2\, \vec{r} \cdot \vec{n} + d\vec{r} \cdot d\vec{n} = 0.$$

(2) ga asosan:

$$d^2\, \vec{r} \cdot \vec{n} = -\, d\vec{r} \cdot d\vec{n} = \mathbf{F}_2.$$

Demak,

$$\mathbf{F}_2 = d^2\, \vec{r} \cdot \vec{n}.$$

Bu erda

$$d^2\, \vec{r} = d(d\vec{r}) = d(\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv) = \vec{r}_{uu} du^2 + 2\vec{r}_{uv} du dv + \vec{r}_{vv} dv^2 + \vec{r}_u d^2u + \vec{r}_v d^2v$$

bo'lib, $\vec{r}_u \perp \vec{n}$ va $\vec{r}_v \perp \vec{n}$ bo'lgani uchun:

$$\mathbf{F}_2 = d^2\, \vec{r} \cdot \vec{n} = \vec{r}_{uu}\vec{n} du^2 + 2\vec{r}_{uv}\vec{n} du dv + \vec{r}_{vv}\vec{n} dv^2 + \vec{r}_u\vec{n} d^2u + \vec{r}_v\vec{n} d^2v =$$

$$= \vec{r}_{uu}\vec{n} du^2 + 2\vec{r}_{uv}\vec{n} du dv + \vec{r}_{vv}\vec{n} dv^2.$$

Demak,

$$\mathbf{F}_2 = \vec{r}_{uu}\vec{n} du^2 + 2\vec{r}_{uv}\vec{n} du dv + \vec{r}_{vv}\vec{n} dv^2.$$

Bu tenglama bilan (4) ni taqqoslasak, quyidagilar kelib chiqadi:

$$D = \vec{r}_{uu}\vec{n}, \qquad D_1 = \vec{r}_{uv}\vec{n}, \qquad D_2 = \vec{r}_{vv}\vec{n} \qquad (5).$$

Yuqorida aytdikki, $\vec{r}_u$ va $\vec{r}_v$ vektorlar sirtning urinma tekisligiga parallel bo'ladi. Shuning uchun bu vektorlarning vektor ko'paytmasi bo'lgan $[\vec{r}_u\, \vec{r}_v]$ vektor sirtning normaliga parallel bo'ladi. Demak, $\dfrac{[\vec{r}_u \vec{r}_v]}{\|[\vec{r}_u \vec{r}_v]\|}$ birlik vektor sirtning normali bo'ylab yo'naladi. Shu sababli bu vektorni sirt normalining birlik vektori sifatida olish mumkin, ya'ni:

$$\vec{n} = \frac{[\vec{r}_u\vec{r}_v]}{\|[\vec{r}_u\vec{r}_v]\|} = \frac{[\vec{r}_u\vec{r}_v]}{\sqrt{[\vec{r}_u\vec{r}_v]^2}} = \frac{[\vec{r}_u\vec{r}_v]}{\sqrt{\vec{r}_u^{\,2}\vec{r}_v^{\,2} - (\vec{r}_u\vec{r}_v)^2}}.$$

$\vec{n}$ vektorning bu qiymatini (5) tengliklarga qo'ysak:

$$D = \vec{r}_{uu}\frac{[\vec{r}_u\vec{r}_v]}{\sqrt{\vec{r}_u^{\,2}\vec{r}_v^{\,2} - (\vec{r}_u\vec{r}_v)^2}} = \frac{\vec{r}_{uu}[\vec{r}_u\vec{r}_v]}{\sqrt{\vec{r}_u^{\,2}\vec{r}_v^{\,2} - (\vec{r}_u\vec{r}_v)^2}} = \frac{(\vec{r}_{uu},\vec{r}_u,\vec{r}_v)}{\sqrt{\vec{r}_u^{\,2}\vec{r}_v^{\,2} - (\vec{r}_u\vec{r}_v)^2}}.$$

$$D_1 = \vec{r}_{uv}\frac{[\vec{r}_u\vec{r}_v]}{\sqrt{\vec{r}_u^{\,2}\vec{r}_v^{\,2} - (\vec{r}_u\vec{r}_v)^2}} = \frac{\vec{r}_{uv}[\vec{r}_u\vec{r}_v]}{\sqrt{\vec{r}_u^{\,2}\vec{r}_v^{\,2} - (\vec{r}_u\vec{r}_v)^2}} = \frac{(\vec{r}_{uv},\vec{r}_u,\vec{r}_v)}{\sqrt{\vec{r}_u^{\,2}\vec{r}_v^{\,2} - (\vec{r}_u\vec{r}_v)^2}}.$$

$$D_2 = \vec{r}_{vv}\frac{[\vec{r}_u\vec{r}_v]}{\sqrt{\vec{r}_u^{\,2}\vec{r}_v^{\,2} - (\vec{r}_u\vec{r}_v)^2}} = \frac{\vec{r}_{vv}[\vec{r}_u\vec{r}_v]}{\sqrt{\vec{r}_u^{\,2}\vec{r}_v^{\,2} - (\vec{r}_u\vec{r}_v)^2}} = \frac{(\vec{r}_{vv},\vec{r}_u,\vec{r}_v)}{\sqrt{\vec{r}_u^{\,2}\vec{r}_v^{\,2} - (\vec{r}_u\vec{r}_v)^2}}$$

Demak,

$$D = \frac{(\vec{r}_{uu},\vec{r}_u,\vec{r}_v)}{\sqrt{\vec{r}_u^{\,2}\vec{r}_v^{\,2} - (\vec{r}_u\vec{r}_v)^2}}. \qquad D_1 = \frac{(\vec{r}_{uv},\vec{r}_u,\vec{r}_v)}{\sqrt{\vec{r}_u^{\,2}\vec{r}_v^{\,2} - (\vec{r}_u\vec{r}_v)^2}}, \qquad D_2 = \frac{(\vec{r}_{vv},\vec{r}_u,\vec{r}_v)}{\sqrt{\vec{r}_u^{\,2}\vec{r}_v^{\,2} - (\vec{r}_u\vec{r}_v)^2}} \qquad (6).$$

(3) va (6) formulalar vektor tenglamasi bilan berilgan sirt ikkinchi kvadratik formasining koeffitsiyentlarini topish formulalari bo'ladi.

**F** regulyar sirt $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ parametrik tenglamalari bilan berilsin. Bu vaqtda:

$$\vec{r}_u = x_u\vec{i} + y_u\vec{j} + z_u\vec{k}\quad, \quad \vec{r}_v = x_v\vec{i} + y_v\vec{j} + z_v\vec{k},$$

$$\vec{r}_{uu} = x_{uu}\vec{i} + y_{uu}\vec{j} + z_{uu}\vec{k}, \quad \vec{r}_{uv} = x_{uv}\vec{i} + y_{uv}\vec{j} + z_{uv}\vec{k}, \quad \vec{r}_{vv} = x_{vv}\vec{i} + y_{vv}\vec{j} + z_{vv}\vec{k}$$

bo'lib, koordinatalari bilan berilgan uch vektorning aralash ko'payt-masi quyidagicha aniqlanar edi:

$$(\vec{r}_{uu},\vec{r}_u,\vec{r}_v) = \begin{vmatrix} x_{uu} & y_{uu} & z_{uu} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}, \quad (\vec{r}_{uv},\vec{r}_u,\vec{r}_v) = \begin{vmatrix} x_{uv} & y_{uv} & z_{uv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}, \quad (\vec{r}_{vv},\vec{r}_u,\vec{r}_v) = \begin{vmatrix} x_{vv} & y_{vv} & z_{vv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}.$$

Sirt birinchi kvadratik formasining koeffitsiyentlari:

$$E = \vec{r}_u^{\,2}, \qquad F = \vec{r}_u\,\vec{r}_v, \qquad G = \vec{r}_v^{\,2}.$$

Bu tengliklarni hisobga olib, (6) tengliklardan quyidagi ifodalarni yoza olamiz:

$$D = \frac{\begin{vmatrix} x_{uu} & y_{uu} & z_{uu} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG - F^2}}; \quad D_1 = \frac{\begin{vmatrix} x_{uv} & y_{uv} & z_{uv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG - F^2}}; \quad D_2 = \frac{\begin{vmatrix} x_{vv} & y_{vv} & z_{vv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG - F^2}} \qquad (7).$$

Bu (7) formulalar parametrik tenglamalari bilan berilgan sirt ikkinchi kvadratik formasining koeffitsiyentlarini topish formulalari deyiladi.

Agar sirt $z = f(x, y)$ oshkor tenglamasi bilan berilsa, $x = u$, $y = v$ almashtirishlarini olib, (7) formuladan quyidagi ifodalarni hosil qilamiz:

$$D = \frac{z_{xx}}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}; \quad D_1 = \frac{z_{xy}}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}; \quad D_2 = \frac{z_{yy}}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} \qquad (8).$$

Bu (8) formulalar oshkor tenglamasi bilan berilgan sirt ikkinchi kvadratik formasining koeffitsiyentlarini topish formulalari deyiladi.

Bu holda sirtning ikkinchi kvadratik formasi ushbu ko'ri-nishni oladi:

$$F_2 = Ddx^2 + 2D_1 dx\,dy + D_2 dy^2 \qquad (9).$$

<u>1-misol.</u> $x = u \cos v$ , $y = u \sin v$ , $z = a v$ to'g'ri gelikoidning ik-kinchi kvadratik formasini toping.

<u>Echish.</u> To'g'ri gelikoidning parametrik tenglamalaridan hosi-lalar olamiz:

$x_u = \cos v$ , $\quad y_u = \sin v$ , $\quad z_u = 0$ ,

$x_v = - u \sin v$ , $\quad y_v = u \cos v$ , $\quad z_v = a$ ,

$x_{uu} = 0$ , $\quad y_{uu} = 0$ , $\quad z_{uu} = 0$ ,

$x_{uv} = - \sin v$ , $\quad y_{uv} = \cos v$ , $\quad z_{uv} = 0$ ,

$x_{vv} = -u \cos v$ , $\quad y_{vv} = - u \sin v$ , $\quad z_{vv} = 0$ .

Sirt birinchi kvadratik formasining koeffitsiyentlarini topamiz:

$E = \cos^2 v + \sin^2 v = 1$,

$F = - u \sin v \cos v + u \sin v \cos v = 0$,

$G = u^2 \sin^2 v + u^2 \cos^2 v + a^2 = u^2 + a^2$.

Sirt ikkinchi kvadratik formasining koeffitsiyentlarini topamiz. Sirt parametrik tenglamalari bilan berilgani uchun (7) formulalardan foydalanamiz.

$$D=\frac{\begin{vmatrix}0&0&0\\ \cos v&\sin v&0\\ -u\sin v&u\cos v&a\end{vmatrix}}{\sqrt{u^2+a^2}}=0,\qquad D_1=\frac{\begin{vmatrix}-\sin v&\cos v&0\\ \cos v&\sin v&0\\ -u\sin v&u\cos v&a\end{vmatrix}}{\sqrt{u^2+a^2}}=-\frac{a}{\sqrt{u^2+a^2}},$$

$$D_2=\frac{\begin{vmatrix}-u\cos v&-u\sin v&0\\ \cos v&\sin v&0\\ -u\sin v&u\cos v&a\end{vmatrix}}{\sqrt{u^2+a^2}}=0$$

Topilgan qiymatlarni (4) formulaga qo'yamiz:

$$\Phi_2=-\frac{2adudv}{\sqrt{u^2+a^2}}\ .$$

Bu to'g'ri gelikoidning ikkinchi kvadratik formasi bo'ladi.

2-misol. $z = xy$ sirtning ikkinchi kvadratik formasini toping.

yechish. Sirt tenglamasidan xususiy hosilalar olamiz:

$$p = z_x = y\,,\qquad q = z_y = x\,,$$

$$z_{xx} = 0\,,\qquad z_{xy} = 1\,,\qquad z_{xy} = 0.$$

Sirt oshkor tenglamasi bilan berilgani uchun (8) formula-lardan foydalanib, ikkinchi kvadratik formaning koeffitsiyentlarini topamiz:

$$D=\frac{0}{\sqrt{1+y^2+x^2}}=0;\qquad D_1=\frac{1}{\sqrt{1+y^2+x^2}}\,;\qquad D_2=\frac{0}{\sqrt{1+y^2+x^2}}=0.$$

Topilgan qiymatlarni (9) formulaga qo'yamiz:

$$F_2=\frac{2dx\,dy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\,.$$

1-ta'rif. Sirtning berilgan nuqtasidagi bosh egrilikla-rining ko'paytmasiga sirtning shu nuqtasidagi **to'la egriligi** deb**,** unga ba'zan **gauss egriligi** deb ham ataladi va $K$ orqali belgilanadi.

Demak,

$$K = k_1k_2\,.$$

2-ta'rif. Sirtning berilgan nuqtasidagi bosh egriliklar yarimlarining yig'indisiga sirtning shu nuqtasidagi **o'rta egriligi** deb ataladi va $H$ bilan belgilanadi.

Demak,

$$H=\frac{1}{2}\left(k_1+k_2\right).$$

Bu erda

$$k_1k_2=\frac{DD_2-D_1^2}{EG-F^2} \qquad \text{va} \qquad k_1+k_2=\frac{ED_2-2FD_1+GD}{EG-F^2}$$

bo'lgani uchun

$$K=\frac{DD_2-D_1^2}{EG-F^2} \qquad (1),$$

$$H=\frac{ED_2-2FD_1+GD}{2\left(EG-F^2\right)} \qquad (2).$$

(1) va (2) formulalar mos ravishda sirtning **gauss va o'rta egriliklarini hisoblash formulalari** deyiladi.

Sirt $z=f(x,y)$ oshkor tenglamasi bilan berilsa, uning bi-rinchi va ikkinchi kvadratik formalarining koeffitsiyentlari quyi-dagicha aniqlanar edi:

$$E=1+p^2, \qquad F=pq, \qquad G=1+q^2,$$

$$D=\frac{z_{xx}}{\sqrt{1+p^2+q^2}}; \qquad D_1=\frac{z_{xy}}{\sqrt{1+p^2+q^2}}; \qquad D_2=\frac{z_{yy}}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

bu erda $p=z_x$, $q=z_y$.

$E$, $F$, $G$, $D$, $D_1$, $D_2$ larning bu qiymatlarini (1) va (2) formulalarga qo'ysak:

$$K=\frac{z_{xx}z_{yy}-z_{xy}^2}{\left(1+p^2+q^2\right)^2} \qquad (3),$$

$$H=\frac{\left(1+q^2\right)z_{xx}-2pqz_{xy}+\left(1+p^2\right)z_{yy}}{2\left(1+p^2+q^2\right)^{3/2}} \qquad (4).$$

(3) va (4) formulalar oshkor tenglamasi bilan berilgan sirtning gauss va o'rta egriliklarini topish formulalari deb ataladi.

(1) formuladan ushbu xulosalarga kelamiz:

1. Sirtning elliptik nuqtasida $K>0$.
2. Sirtning giperbolik nuqtasida $K<0$.
3. Sirtning parabolik nuqtasida $K=0$.

Ba'zi sirtlarning to'la va o'rta egriliklarini hisoblaymiz.

1-misol. Tekislikning ixtiyoriy nuqtasidagi to'la va o'rta egriliklarini hisoblang.

Echish. Tekislikning umumiy tenglamasini olamiz:

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Agar $C \neq 0$ bo'lsa

$$z = ax + by + c \qquad (5)$$

bo'lib, bu erda

$$a = -\frac{A}{C}, \qquad b = -\frac{B}{C}, \qquad c = -\frac{D}{C}.$$

(5) tenglamadan

$$p = z_x = a, \quad q = z_y = b, \quad z_{xx} = 0, \quad z_{xy} = 0, \quad z_{yy} = 0.$$

Topilgan bu qiymatlarni (3) va (4) formulalarga qo'ysak

$$K = 0, \qquad H = 0.$$

Demak, tekislikning barcha nuqtalarida to'la va o'rta egri-liklari nolga teng ekan.

2-misol. $x = R\cos u \cdot \cos v$, $y = R\cos u \cdot \sin v$, $z = R\sin u$ sferaning ixtiyoriy nuqtasidagi to'la va o'rta egriliklarini toping.

Echish. Sfera parametrik tenglamalari bilan berilgan. Uning bu tenglamalaridan birinchi va ikkinchi tartibli xususiy hosilalar olamiz:

$$x_u = -R\sin u \cdot \cos v, \quad y_u = -R\sin u \cdot \sin v, \quad z_u = R\cos u,$$

$$x_v = -R\cos u \cdot \sin v, \quad y_v = R\cos u \cdot \cos v, \quad z_v = 0,$$

$$x_{uu} = -R\cos u \cdot \cos v, \quad y_{uu} = -R\cos u \cdot \sin v, \quad z_{uu} = -R\sin u,$$

$$x_{uv} = R\sin u \cdot \sin v, \quad y_{uv} = -R\sin u \cdot \cos v, \quad z_{uv} = 0,$$

$$x_{vv} = -R\cos u \cdot \cos v, \quad y_{vv} = -R\cos u \cdot \sin v, \quad z_{vv} = 0.$$

Bularga asosan sferaning birinchi va ikkinchi kvadratik formalarining koeffitsiyentlarini topamiz:

$$E = (-R\sin u \ \cos v)^2 + (-R\sin u \ \sin v)^2 + (R\cos u)^2 = R^2.$$

$$F = (-R\sin u \ \cos v)(-R\cos u \ \sin v) + (-R\sin u \ \sin v)(R\cos u \ \cos v) + (R\cos u)\cdot 0 = 0.$$

$$G = (-R\cos u\ \sin v)^2 + (R\cos u\ \cos v)^2 + 0^2 = R^2\cos^2 u\,,$$

$$D = \frac{\begin{vmatrix} -R\cos u\cos v & -R\cos u\sin v & -R\sin u \\ -R\sin u\cos v & -R\sin u\sin v & R\cos u \\ -R\cos u\sin v & R\cos u\cos v & 0 \end{vmatrix}}{\sqrt{R^2R^2\cos^2 u - 0^2}} = R,$$

$$D_1 = \frac{\begin{vmatrix} R\sin u\sin v & -R\sin u\cos v & 0 \\ -R\sin u\cos v & -R\sin u\sin v & R\cos u \\ -R\cos u\sin v & R\cos u\cos v & 0 \end{vmatrix}}{\sqrt{R^2R^2\cos^2 u - 0^2}} = 0,$$

$$D_2 = \frac{\begin{vmatrix} -R\cos u\cos v & -R\cos u\sin v & 0 \\ -R\sin u\cos v & -R\sin u\sin v & R\cos u \\ -R\cos u\sin v & R\cos u\cos v & 0 \end{vmatrix}}{\sqrt{R^2R^2\cos^2 u - 0^2}} = R\cos^2 u.$$

*E, F, G, D,* $D_1$ va $D_2$ larning topilgan bu qiymatlarini (1) va (2) formulalarga qo'ysak, sferaning to'la va o'rta egriliklari kelib chiqadi:

$$K = \frac{R\cdot R\cos^2 u - 0^2}{R^2R^2\cos^2 u - 0^2} = \frac{1}{R^2}\ ; \qquad H = \frac{R^2R\cos^2 u - 2\cdot 0\cdot 0 + \left(R^2\cos^2 u\right)R}{2\left(R^2R^2\cos^2 u - 0^2\right)} = \frac{1}{R}\ .$$

Demak, sferaning barcha nuqtalarida to'la va o'rta egri-liklari o'zgarmas bo'lib, to'la egriligi $\frac{1}{R^2}$, o'rta egriligi $\frac{1}{R}$ ga teng ekan.

<u>3-misol.</u> $x = a\sin u\cdot\cos v$, $y = a\sin u\cdot\sin v$, $z = a(\ln tg\frac{u}{2} + +\cos u)$ psevdosferaning ixtiyoriy nuqtasidagi to'la va o'rta egriliklarini toping.

<u>Echish.</u> Psevdosferaning parametrik tenglamalaridan xususiy hosilalar olamiz:

$x_u = a\cos u\cdot\cos v$, $y_u = a\cos u\cdot\sin v$, $z_u = a\cos u\cdot ctg\,u$,

$x_v = -a\sin u\cdot\sin v$, $y_v = a\sin u\cdot\cos v$, $z_v = 0$,

$x_{uu} = -a\sin u\cdot\cos v$, $y_{uu} = -a\sin u\cdot\sin v$,

$z_{uu} = -a\cos u\cdot(2 + ctg^2 u)$,

$x_{uv}$ = -$a$ $\cos u\cdot \sin v$ ,  $y_{uv} = a \cos u\cdot \cos v$ ,  $z_{uv} = 0$ ,

$x_{vv}$ = -$a \sin u\cdot \cos v$ ,  $y_{vv}$ = -$a \sin u\cdot \sin v$ ,  $z_{vv} = 0$ .

Bularga asosan psevdosferaning birinchi va ikkinchi kvad-ratik formalarining koeffitsiyentlarini topamiz:

$E = a^2\, ctg^2 u$ ,  $F = 0$ ,  $G = a^2 \sin^2 u$ ,

$D = -a\, ctg\, u$ ,  $D_1 = 0$ ,  $D_2 = a \sin u\cdot \cos u$ .

Bularni (1) va (2) ga qo'ysak:

$$K = \frac{(-a ctg u)(a \sin u \cos u) - 0^2}{(a^2 ctg^2 u)(a^2 \sin^2 u) - 0^2} = -\frac{1}{a^2},$$

$$H = \frac{(a^2 ctg^2 u)(a \sin u \cos u) - 2\cdot 0\cdot 0 + (a^2 \sin^2 u)(-a ctg u)}{2\left[(a^2 ctg^2 u)(a^2 \sin^2 u) - 0^2\right]} = \frac{2}{a} ctg 2u.$$

Demak, psevdosferaning barcha nuqtalarida to'la egriligi o'z-garmas bo'lib, $-\frac{1}{a^2}$ ga teng ekan.

$a_1^1$, $a_1^2$, $a_2^1$, $a_2^2$ noma'lumlarni topamiz. Buning uchun (4) teng-lamalar sistemasidagi har bir tenglamani navbat bilan $\vec{r}_1$ va $\vec{r}_2$ vektorlarga skalyar ko'paytiramiz:

$$\vec{n}_i \cdot \vec{r}_1 = a_i^1 g_{11} + a_i^2 g_{12} \ ,$$

$$\vec{n}_i \cdot \vec{r}_2 = a_i^1 g_{21} + a_i^2 g_{22}.$$

Bu erda $\vec{n}_i \cdot \vec{r}_k = -b_{ik}$ bo'lgani uchun:

$$\left.\begin{aligned} a_i^1 g_{11} + a_i^2 g_{12} &= -b_{i1}, \\ a_i^1 g_{21} + a_i^2 g_{22} &= -b_{i2} \end{aligned}\right\} \qquad (5).$$

(5) tenglamalar sistemasini $a_i^1$ va $a_i^2$ ga nisbatan echib, quyida-gilarni hosil qilamiz:

$$a_i^1 = -\frac{g_{22}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} b_{i1} + \frac{g_{12}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} b_{i2} \qquad (6),$$

$$a_i^2 = \frac{g_{21}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} b_{i1} - \frac{g_{11}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} b_{i2} \qquad (7).$$

Demak, izlangan munosabatlar quyidagicha yoziladi:

$$\vec{n}_i = a_i^1 \vec{r}_1 + a_i^2 \vec{r}_2, \qquad (8),$$

bu erdagi $a_i^1$ va $a_i^2$ lar (6) va (7) formulalardan topiladi.

(8) formula $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ hosilalarning yoyilmasini berib, bular-ga **ikkinchi gruppa derivatsion formulalar** yoki **Veyngarten formulalari** deyiladi.

Gauss va Veyngarten formulalarini birlashtirib yozsak:

$$\left.\begin{aligned} \vec{r}_{ik} &= \Gamma_{ik}^1 \vec{r}_1 + \Gamma_{ik}^2 \vec{r}_2 + b_{ik}\vec{n}, \\ \vec{n}_i &= a_i^1 \vec{r}_1 + a_i^2 \vec{r}_2 \end{aligned}\right\} \qquad (9).$$

Bu (9) derivatsion formulalar sirtlar nazariyasining asosiy formulalaridir. Ularda $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, $\vec{n}$ vektorlardan olingan xususiy hosi-lalar shu vektorlarning o'zlari orqali ifodalangan.

Fazodagi chiziqlar uchun Frene formulalari qanday rol o'ynasa, sirtlar uchun bu formulalar o'sha rolni o'ynaydi. Jumladan, bu formulalar $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, $\vec{n}$ vektorlarning istalgan tartibli xususiy hosilalarini yana shu $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, $\vec{n}$ vektorlar hamda $g_{ik}$ va $b_{ik}$ koeffitsiyentlar orqali, shu-ningdek, ularning $u^1$, $u^2$ bo'yicha olingan xususiy hosilalari orqali ifodalash imkonini beradi.

(9) tenglamalar sistemasi $\vec{r}_{11}$, $\vec{r}_{12}$, $\vec{r}_{22}$, $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ vektorlarga nisba-tan xususiy hosilali beshta differensial tenglamalar sistemasidir. Koordinatalarga o'tganda, xususiy hosilali o'n beshta differensial teng-lamalardan iborat sistema vujudga keladi.

## EGRILIK INDIKATRISASI.

Bizga **F** sirt $\vec{r} = \vec{r}\,(u, v)$ vektor tenglamasi bilan berilib, uni $M$ nuqtasidagi normalidan o'tuvchi tekislik bilan kesib, normal kesim hosil qilingan bo'lsin.

Agar normal kesimni hosil qiladigan kesuvchi tekislikni $M$ nuqtasidagi normal atrofida aylantirsak, hosil bo'lgan normal kesimlarning $k_o$ egriliklari o'zgara boradi. Biz shu o'zgarishning xarakterini o'rganamiz. Buning uchun sirtning $M$ nuqtasidagi urinma tekisligida har bir normal kesimning urinmasiga

$$MP = \frac{1}{\sqrt{|k_0|}} \qquad (1)$$

kesmani mos qo'yamiz. Ta'rif. Sirtning berilgan M nuqtasidagi urinma tekis-

likdagi (1) tenglikni qanoatlantiruvchi $P$ nuqtalar to'plamiga **egrilik indikatrisasi** deb ataladi, ba'zan uni **Dyupen indikatrisasi** deb ham aytiladi.

Silliq sirtning har bir nuqtasida aniq bir egrilik indikat-risa mavjuddir. Dyupen indikatrisasi qanday figuradan iborat ekanli-gini aniqlaylik.

Buning uchun urinma tekislikda shunday affin koordinatalar sistemasini quramizki, bunda $M$ urinish nuqtasini koordinatalar boshi, $\vec{r}_u$ va $\vec{r}_v$ vektorlar bo'ylab yo'nalgan to'g'ri chiziqlarni $Ox$ va $Oy$ o'qlari, $\vec{r}_u$ va $\vec{r}_v$ vektorlarni bazis vektorlar deb olamiz (33-chizma).

Tanlangan koordinatalar sistemasiga nisbatan $P$ nuqtaning koordinatalarini $x$, $y$ deb belgilasak

$$\overline{MP} = x\vec{r}_u + y\vec{r}_v \qquad (2)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Chiziqlar nazariyasidan ma'lumki normal kesim urinmasining birlik vektori $\vec{\tau}$ orqali belgilanar edi. Shuning uchun

$$\overline{MP} = [\overline{MP}]\,\vec{\tau}$$

yoki (1) ga asosan

$$\overline{MP} = \frac{1}{\sqrt{|k_0|}} \cdot \vec{\tau}\,.$$

Bu erda

$$\vec{\tau} = \dot{\vec{r}} = \vec{r}_u \frac{du}{ds} + \vec{r}_v \frac{dv}{ds}$$

bo'lgani uchun

$$\overline{MP} = \frac{1}{\sqrt{|k_0|}} \left( \vec{r}_u \frac{du}{ds} + \vec{r}_v \frac{dv}{ds} \right).$$

Agar (2) ni hisobga olsak:

$$x\vec{r}_u + y\vec{r}_v = \frac{1}{\sqrt{|k_0|}}\left(\vec{r}_u\frac{du}{ds} + \vec{r}_v\frac{dv}{ds}\right).$$

Bu erda $\vec{r}_u$ va $\vec{r}_v$ vektorlar kollinear bo'lmagani uchun

$$x = \frac{1}{\sqrt{|k_0|}}\cdot\frac{du}{ds}, \qquad y = \frac{1}{\sqrt{|k_0|}}\cdot\frac{dv}{ds}$$

yoki $$\frac{du}{ds} = x\sqrt{|k_0|}, \qquad \frac{dv}{ds} = y\sqrt{|k_0|} \qquad (3).$$

Ma'lumki

$$\pm\, k_o = \frac{\Phi_2}{\Phi_1}$$

edi, yoki

$$\pm\, k_o = \frac{Ddu^2 + 2D_1dudv + D_2dv^2}{ds^2} = D\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2D_1\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + D_2\left(\frac{dv}{ds}\right)^2.$$

(3) ni e'tiborga olsak:

$$\pm\, k_o = Dx^2|k_0| + 2D_1xy|k_0| + D_2y^2|k_0|$$

yoki

$$Dx^2 + 2D_1xy + D_2y^2 = \pm 1 \qquad (4).$$

Hosil bo'lgan (4) formula **egrilik indikatrisa tenglamasi** deyiladi. Bu tenglama $x$ va $y$ ga nisbatan ikkinchi tartibli tenglamadir. Demak, indikatrisa ikkinchi tartibli chiziq ekan.

Bizga ma'lumki ikkinchi tartibli chiziq uch xil bo'ladi. Shu sababli indikatrisalar ham uch xil bo'ladi.

Agar $DD_2 - D_1^2 > 0$ bo'lsa, indikatrisa ellipsdan iborat bo'lib, sirtning $M$ nuqtasi **elliptik nuqta** deb ataladi.

Agar $DD_2 - D_1^2 < 0$ bo'lsa, indikatrisa ikkita qo'shma giperboladan iborat bo'lib, $M$ nuqtaga **giperbolik nuqta** deyiladi.

Agar $DD_2 - D_1^2 = 0$ bo'lsa, indikatrisa ikkita parallel to'g'ri chiziqdan iborat bo'lib, $M$ nuqtaga **parabolik nuqta** deb ataladi.

<u>Misol.</u> $x = u^2 + v^2$, $y = u^2 - v^2$, $z = uv$ sirtning $P(u = 1;\ v = 1)$

nuqtasidagi egrilik indikatrisasining tenglamasini tuzing.

Echish. Sirtning parametrik tenglamalaridan xususiy hosi-lalar olamiz:

$$x_u = 2u, \quad y_u = 2u, \quad z_u = v,$$
$$x_v = 2v, \quad y_v = -2v, \quad z_v = u,$$
$$x_{uu} = 2, \quad y_{uu} = 2, \quad z_{uu} = 0,$$
$$x_{uv} = 0, \quad y_{uv} = 0, \quad z_{uv} = 1,$$
$$x_{vv} = 2, \quad y_{vv} = -2, \quad z_{vv} = 0.$$

$E, F, G, D, D_1, D_2$ koeffitsiyentlarning $P(u = 1; v = 1)$ nuqtadagi qiymatlarini topamiz.

$E = 4u^2 + 4u^2 + v^2 = 8u^2 + v^2$, $\quad E = 8\cdot1^2 + 1^2 = 9.$

$F = 4uv - 4uv + uv = uv$, $\quad F = 1\cdot1 = 1.$

$G = 4v^2 + 4v^2 + u^2 = 8v^2 + u^2$, $\quad G = 8\cdot1^2 + 1^2 = 9.$

$$D = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{\sqrt{9\cdot9-1^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}};$$

$$D_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{\sqrt{9\cdot9-1^2}} = -\frac{2}{\sqrt{5}}; \qquad D_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{\sqrt{9\cdot9-1^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Demak, egrilik indikatrisa tenglamasi

$$\frac{2}{\sqrt{5}}x^2 - \frac{4}{\sqrt{5}}xy + \frac{2}{\sqrt{5}}y^2 = \pm1$$

## 5 – AMALIYOT: Yuza va hajmga doir masalalar

**1.** qirrasi 5 ga teng kubuning biror uchiga qoshni uchta uchi orqali o'tuvchi tekislik bilan ikki bo'lakka bo’lingan. Kichik bo'lakning hajmini toping.

2. Uchburchakli piramidaning asosi tomonlari 4; 4 va 2 ga teng bo'lgan uchburchakdan iborat. Piramidaning barcha yon yoqlari asos tekisligi bilan 60°li burchak tashkil etadi. Piramidaning hajmini toping.

3. Piramidaning asosi kvadratdan iborat. Kvadratning diagonali 6 ga teng. Piramidaning yon
   qirralaridan biri uning asosiga perpendikulyar. Piramidaning katta yon
   qirrasi va asos tekisligi orasidagi burchak 45° ga teng. Piramidaning hajmini toping.
4. Muntazam uchburchakli piramidaning yon qirrasi $l$ ga teng va asos tekisligi bilan $\alpha$ burchak hosil qiladi. Piramidaning hajmini toping.
5. To'g'ri to'rtburchakni uning biror tomoni atrofida aylantirish natijasida silindr hosil qilingan. Silindr hajmini shu to'rtburchak yuzi S va asos aylanasining uzunligi C orqali ifodalang
6. Silindr va unga tashqi chizilgan muntazam to'rtburchakli perallelepipedning balandligi 3 ga, parallelepiped asosining tomoni 4 ga teng. Silindrning hajmini toping.
7. Kubning ostki asosidagi tomonlarining o'rtalari ketma ket tutashtirildi. Hosil bo'lgan to'rtburchakning uchlari kub ustki asosining markazi bilan tutashtirildi. Agar kubning qirrasi a gat eng bo'lsa, hosil bo'lgan piramidaning to'la sirtini toping.
8. Muntazam uchburchakli piramidaga konus ichki chizilgan.Agar piramidaning yon yoqlari bilan asisi 60° li burchak hosil qilib, piramidaning asosiga ichki chizilgan aylananing radiusi 16 ga teng bo'lsa, konusning yon sirtini toping.
9. Kesik konusga shar ichki chizilgan. Agar kesik konus asoslarining yuzlari $\pi$ va $4\pi$ ga teng bo'lsa, shu konus yon sirtining yuzini toping.
10. Radiusi $\sqrt{\frac{3}{2}}$ ga ten a yarim sharga kub ichki chizilgan bo'lib uning to'rtta uchi yarim shar asosida, qolgan to'rttasi shar sittida yotadi. Kubning hajmini toping.

# V. GLOSSARIY

| Termin | O‘zbek tilidagi sharhi |
|---|---|
| **Argument** | erkli o‘zgaruvchi |
| **Eyler** | ( Euler Leonhard, 1707 - 1783) fransuz matematiki Peterburg FA a’zosi. |
| **Koshi** | (Caushy Augustin Lauis, 1789 - 1857) fransuz matematiki |
| **Umumiy yechim** | tenglama yechimi oshkor ko‘rinishda |

| Belgi | Atalishi | Kim kiritgan? | Qachon kiritgan? |
|---|---|---|---|
| + | qo‘shish | Ya. Vidman | XV asr oxiri |
| - | qo‘shish | Ya. Vidman | XV asr oxiri |
| * | ko‘paytirsh | Outred | 1631 |
| · | ko‘paytirish | G. Leybnis | 1698 |
| : | bo‘lish | G. Leybnis | 1684 |
| $a^n$ | daraja | R. Dekart | 1637 |
| $\sqrt{}$ | ildiz | X.Rudolf, A.Jiror | 1525, 1629 |
| $\log_a x$ | logarifm | I.Kepler | 1624 |
| $\sin x$ | sinus | B.Kavaleri | 1632 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\cos x$ | kosinus | A.Eyler | 1748 |
| $tgx$ | tangens | A.Eyler | 1753 |
| $\arcsin x$, $arctgx$ | Arksinus, arktangens | J.Lagranj | 1772 |
| $dx,\ d^2x,...$ | Differensial | G. Leybnis | 1675 |
| $\int f(x)dx$ | Integral | G.Leybnis | 1675 |
| $y'(x)$ | Xosila | G.Leybnis | 1675 |
| $\int_a^b f(x)dx$ | Aniq integral | J.Fure | 1819-1822 |
| $\sum$ | Yig‘indi | L.Eyler | 1755 |
| $k!$ | Faktorial | X.Kramp | 1803 |
| lim | Limit | U.Gamilton | 1853 |
| $f(x)$ | Funksiya | I.Bernulli, L.Eyler | 1718, 1734 |
| $i$ | Kompleks son | L.Eyler | 1777 |
| $x, y, z$ | O‘zgaruvchilar | R.Dekart | 1637 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\rightarrow$ | Vektor | O.Koshi | 1853 |
| $=$ | Tenglik | R.Rekord | 1557 |
| $><$ | Katta, kichik | T.Garriot | 1631 |
| $\equiv$ | Tenglik | K.Gauss | 1801 |
| $\parallel$ | Parallellik | U.Outred | 1677 |
| $\perp$ | Pperpendikulyarlik | P.Erigon | 1634 |
| Arab raqamlari | Matematik belgilar | Hind matematiklari | V asr |
| $\lvert\square\rvert$ | Modul | K.Veershtrass | |
| Rim raqamlari | Matematik belgilar | Rus matematiklari | Eramizdan V asr avval |
| $\leq \geq$ | Noqat’iy tengsizliklar | P.Buge | 1734 |
| [ ] | Kvadrat qavs | R.Bombelli | 1550 |
| ( ) | Qavs | N.Tartalya | 1556 |
| { } | Sistemali qavs | F.Viet | 1593 |
| $e$ | Natural logarifm | L.Eyler | 1736 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | asosi | | |
| $\equiv$ | Tenglik belgisi | B.Riman | 1857 |
| $\cap$ | Kesishma | Dj.Peano | 1895 |

# VI. ADABIYOTLAR RO’YXATI


## I. O'zbekiston Respublikasi Prezidentining asarlari

1. Mirziyoyev Sh.M. Buyuk kelajagimizni mard va olijanob xalqimiz bilan birga quramiz. - T.: “O‘zbekiston”, 2017.-488 b.

2.Mirziyoyev Sh.M. Milliy taraqqiyot yo‘ limizni qat'iyat bilan davom ettirib, yangi bosqichga ko‘ taramiz. 1 -jild. -T.: “O‘zbekiston”, 2017. — 592 b.

3.Mirziyoyev Sh.M. Xalqimizning roziligi bizning faoliyatimizga berilgan eng oliy bahodir. 2-jild. T.: “O‘zbekiston”, 2018. - 507 b.

4.Mirziyoyev Sh.M. Niyati ulug‘ xalqning ishi ham ulug‘, hayoti yorug‘ va kelajagi farovon bo‘ ladi. 3-jild- T.: “O‘zbekiston”, 2019. - 400 b.

5.Mirziyoyev Sh.M. Milliy tiklanishdan - milliy yuksalish sari. 4-jild - T.: “O‘zbekiston”, 2020. - 400 b.

## II. Norniativ-huquqiy hujjatlar

1.O‘zbekiston Respublikasining Konstitutsiyasi. - T.: O‘zbekiston, 2023.

2.O‘zbekiston Respublikasining 2020-yil 23-sentabrda qabul qilingan “Ta’lim to‘g‘risida”gi Qonuni.

3.O‘zbekiston Respublikasining “Korrupsiyaga qarshi kurashish to‘g‘risida”gi Qonuni.

4. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2015-yil 12-iyundagi “Oliy ta’lim muassasalarining rahbar va pedagog kadrlarini qayta tayyorlash va malakasini oshirish tizimini yanada takomillashtirish to‘g‘risida”gi PF-4732-sonli Farmoni.

5.O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2019-yil 27-maydagi “O‘zbekiston Respublikasida korrupsiyaga qarshi kurashish tizimini yanada takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risidagi PF-5729-son Farmoni.

6.O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2019-yil 27-avgustdagi “Oliy ta'lim muassasalari rahbar va pedagog kadrlarining uzluksiz malakasini oshirish tizimini joriy etish to‘g‘risida”gi PF-5789-sonli Farmoni.

7. O‘zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasining 2019-yil 23
sentabrdagi “Oliy ta'lim tnuassasalari rahbar va pedagog kadrlarining malakasini oshirish tizimini yanada takomillashtirish bo‘yicha qo'shimcha chora-tadbirlar

to‘g‘risida”gi 797-sonli Qarori.

8.0‘zbckiston Respublikasi Prezidentining 2019-yil 8-oktabrdagi “O‘zbekiston Respublikasi oliy ta'lim tizimini 2030-yilgacha rivojlantirish konsepsiyasini tasdiqlash to‘g‘risida”gi PF-5847- sonli Fannoni.

9. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2022-yil 28-yanvardagi “2022- 2026-yillarga mo'ljallangan Yangi O‘zbekistonning taraqqiyot strategiyasi to‘g‘risida”gi PF-60-son Farmoni.

10.O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2023-yil 25-yanvardagi “Respublika ijro etuvchi hokimiyat organlari faoliyatini samarali yo’lga qo‘yishga doir birinchi navbatdagi tashkiliy chora-tadbirlar to‘g‘risida”gi PF-14-sonli Fannoni.

## III. Maxsus adabiyotlar

1. Avilova L.V., Bolotyuk V.A., Bolotyuk L.A. Analiticheskaya geometriya i lineynaya algebra// 2013. Izdanie: 1-ye izd. 421 s.
2. Aleksandrov A.D., Nesvetaev N.Yu. Geometriya, M.: Nauka, 1990. – 672 s.
3. Bobenko A.I. (Ed.) Advances in Discrete Differential Geometry// Springer, 2016. — 439 p. — (Mathematics). — ISBN: 3662504464 M. Rikhsiboev and N. S. Mohamed, Engineering Mathematics 2, Malaysia, 2019.
4. Manfredo P. Do Carmo. Differential geometry of Curves and surface // Dover publications, Inc. Mineola, New York, 2016. – 529 rr.
5. Matematik analiz./ Azlarov T., Mansurov H.: Universitet va ped. institutlar talabalari uchun darslik: 2 qismli. 1-q.— Qayta ishlangan va to‘ldirilgan 2-nashri.— T.: Uqituvchi, 1994.—416 b.
6. Dodajonov N., Yunusmetov R., Abdullayev T. Geometriya, II qism.
7. Narmanov A. Differensial geometriya.
8. Sobirov M.A., Yusupov A.Yo. Differensial geometriya kursi.
9. Ergashev B. Evklid fazosida chiziqlar.
10. Ergashev B. Evklid fazosida sirtlar.
11. Belko I.V. i dr. Sbornik zadach po differensialnoy geometri.
12. Sh.Murodov, L.Xakimov, A.Xolmurzayev, M.Jumayev, A.To‘xtayev. «Chizma geometriya». Oliy texnika o‘quv yurtlari uchun darslik. Toshkent, 2005.

## Elektron ta‘lim resurslari

1. O‘zbekiston Respublikasi Xalq ta‘limi vazirligining elektron sayti: www.uzedu.uz
2. O‘zbekiston Respublikasi Oliy va o‘rta maxsus ta‘lim vazirligining elektron sayti:  www.edu.uz
3. Xalq ta‘limi sohasida axborot-kommunikasiya texnologiyalarini rivojlantirish markazining elektron sayti:www.multimediya.uz
4. O‘zbekiston Respublikasi Oliy va o‘rta maxsus ta‘lim vazirligi huzuridagi Bosh ilmiy-metodik markazning elektron sayti: www.bim.uz
5. Ziyonet ijtimoiy axborot ta‘lim portalining elektron sayti: www.ziyonet.uz