MIRZO ULUG`BEK NOMIDAGI O`ZBEKISTON
MILLIY UNIVERSITETI

MEXANIKA – MATEMATIKA FAKULTETI

T.M.Zuparov

“Ehtimollar nazahiyasi va matematik statistika”

(Maruza matnlari)

Toshkent - 2010

BELGILAR

ω-elementar hodisa.

Ω-elementar hodisalar fazosi (muqarrar hodisa).

$(m)_n = A_m^n = m(m-1)...(m-n+1)$- m elementdan n tadan o`rinlashtirishlar soni.

$C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$- n elementdan m tadan guruppalashlar soni.

$[u_1, u_2, ..., u_n]$-tartiblanmagan tanlanma.

$(u_1, u_2, ..., u_n)$-tartiblangan tanlanma.

$N(A)$-A to`plam elementlarining soni.

$C[0,T]$-$[0,T]$ oralig`ida aniqlangan uzluksiz funksiyalar to`plami.

Ø-bo`sh to`plam (bajarilmaydigan hodisa).

$\overline{A} = \Omega \setminus A$ - A hodisaga qarama-qarshi hodisa.

$A \cup B$ (yoki A+B) - A va B hodisalarning yig`indisi.

$A \cap B$ (yoki AB) - A va B hodisalarning ko`paytmasi.

$A \setminus B$ (yoki A-B) - A va B hodisalarning ayirmasi.

$A \subset B$ - A hodisa B hodisasini ergantirish belgisi.

$M(\Omega)$ - Ω ning barcha qism to`plamlaridan tashkil topgan to`plamlar sinfi.

$\mathcal{A}$-hodisalarning σ-algebrasi (hodisalarning Borel algebrasi).

B=B(R)-Borel to`plamlarining σ-algebrasi.

R_n-n o`lchovli Evklid fazo.

$(\Omega, \mathcal{A})$-o`lchovli fazo.

$P(\cdot)$-ehtimol o`lchov.

$P(A)$- A hodisaning ehtimoli.

$B(R_n)$- n-o`lchovli Evklid fazosidagi Borel to`plamlarining σ-algebrasi.

$A_n \uparrow$-monoton o`suvchi ketma-ketlik (yani $A_n \subset A_{n+1}, \quad n = 1,2,...$).

$A_n \downarrow$-monoton kamaYuvchi ketma-ketlik (yani $A_{n+1} \subset A_n, \quad n = 1,2,...$).

$P_B(A)$ $\left(P\left(A/B\right)\right)$- A hodisaning B hodisa ro`y bergandagi shartli ehtimoli.

ξ-tasodifiy miqdor.

$F_\xi(x)$ - ξ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi.

$\mathrm{I}_A(\omega)=\mathrm{I}_A$ - A hodisaning indikatori.

$\mathcal{A}_\xi=\{B: B\subseteq R;\ \ \xi^{-1}(B)\in \mathrm{A}\}$

$B(x;n,p)=\sum\limits_{k\le x} C_n^k p^k(1-p)^{n-k}; x\in R$ - (n,p) parametrli binomial tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi.

$P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$ – Bernulli formulasi.

$\Pi(x;\lambda)$ - λ parametrli Puasson tasodifiy miqdorining taqsimot funksiyasi.

$\Gamma(k;p)$ - p parametrli geometrik taqsimotga ega bo\`lgan tasodifiy miqdorning $k$ ga teng bo\`lish ehtimoli.

$p(x)$ -zichlik funksiya.

$\Phi_{a,\sigma}(x)$ - (a,σ^2) parametrli normal taqsimot funksiya.

$\varphi_{a,\sigma}(x)$ - (a,σ^2) parametrli normal zichlik funksiya.

$\Phi(x)$ - $(0,1)$ parametrli normal taqsimot funksiya.

$\varphi(x)$ - $(0,1)$ parametrli normal zichlik funksiya.

$\Gamma(\alpha)$ -Eyler gamma funksiyasi.

$\gamma(x;\alpha,\lambda)$ - (α,λ) parametrli gamma taqsimotning zichlik funksiyasi.

$\Gamma(x;\alpha,\lambda)$ - (α,λ) parametrli gamma taqsimot funksiya.

$k(x;a,\sigma)$ - (a,σ) parametrli Koshi qonuni bo\`yicha taqsimlangan tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi.

$k(x)=k(x;0,1)$

MUNDARIJA

KIRISH SO`ZI

Malumki biror jarayonni matematik usul bilan o`rganish uchun birinchi navbatda bu jarayonnig matematik modelini tuzish kerak bo`ladi. Tashkil topishi har xil va turli sohalarga tegishli jarayonlar bir xil matematik modellarga ega bo`lishlari mumkin. Masalan kundalik ob-havoni belgilaydigan yer sharining yuqorisida (atmosferada) ro`y beradigan metereologik jarayonlar va suyuqlik harakati (gidrodinamika) bilan bog`liq jarayonlar umumiy matematik modellarga ega bo`lib, ular ikkinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalar ko`rinishida bo`ladi.

Ehtimollar nazariyasi tasodifiy jarayonlarning matematik modellarini o`rganadigan fan sifatida XVII asrning boshlarida tiklana boshlangan. Bunga azart (qimor) o`yinlarni matematik usulda o`rganish birinchi qadam bo`lib xizmat qilgan.

1657 yilda G.Yuygens yozgan "Azart o`yinlardagi hisoblarga doir" kitobda (bu ehtimollar nazariyasi bo`yicha birinchi traktat hisoblanadi) keltirilgan quyidagi fikr juda ham diqqatga sazovordir. "Mening fikrimcha - deb yozadi muallif – agar diqqat bilan etibor qilsak, biz faqat har xil o`yinlarni o`rganayotganimiz yo`q, aksincha ular asosida qiziqarli va chuqur nazariya borligini ko`ramiz". Aytilgan fikrni to`g`riligini tanga tashlanganda uni yoki raqam, yoki gerb tomoni bilan tushishi, taxminan olingan kunda yog`ingarchilik bo`lishi yoki bo`lmasligi, tug`iladigan bolaning o`g`il yoki qiz bo`lishligi bir xil matematik modelga (Bernulli sxemasi) ega bo`lishligida ham ko`rish mumkin.

Yana malumki, biror fanni o`rganish uning predmetini (obektini) o`rganishdan boshlanadi. Masalan, analiz kursi uchun oldin haqiqiy sonlar to`plamini o`rganish kerak bo`ladi. Ehtimollar nazariyasining obekti tasodifiy hodisalardir va avvalo shu tushunchani kiritish zaruriyati yuzaga keladi. Mazkur kitobda elementar hodisa tushunchasi asosiy (boshlang`ich) tushuncha sifatida qabul qilinib, tasodifiy hodisalarga nisbatan umumiy bo`lgan ehtimollar fazosi tushunchasi to`plamlar nazariyasidagi o`lchovli fazo ko`rinishida kiritilgan (I-qism). Ehtimolliklar fazosi tushunchasi o`z navbatida juda ham ahamiyatli bo`lgan tasodifiy miqdor tushunchasini kiritishga ham asos bo`ladi. Shunday qilib, tasodifiy hodisalar, tasodifiy miqdorlar va ularning umumlashgan variantlari – tasodifiy jarayonlar ehtimollar nazariyasining obektini tashkil qiladi.

Ehtimollar nazariyasida asosan 2 turdagi metodlar qo`llaniladi. Birinchisi faqat "ehtimol" tushunchasiga asoslanadi va uni shu sababli "to`g`ri ehtimollik metodlari" deb qabul qilish mumkin. (Masalan, to`la ehtimollik formulasiga, tasodifiy hodisa va miqdorlarning bog`liqsizligiga asoslangan metodlar). Ikkinchisi esa analitik metodlar nomi bilan atalib, ehtimollar nazariyasi masalalarini matematik analiz  masalalariga keltirish bilan bog`liq bo`ladi. (Xarakteristik va hosil qiluvchi funksiyalar metodlari).

Aytilganlardan kelib chiqadiki ushbu maruzalar matnini o`qish uchun o`quvchidan matematik analiz kursi va haqiqiy o`zgaruvchili funksiyalar nazariyasining boshlang`ich elementlari bilan tanish bo`lishligi talab qilinadi.

Ushbu maruzalar matnlari muallifning Mirzo Ulug`bek nomidagi O`zbekiston Milliy Universitetida bir necha yil davomida “Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika” kursi bo`yicha o`qigan maruzalari asosida yozilgan. Shu munosabat bilan muallif mazkur Universitetning “Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika” kafedrasi azolarining ushbu matnlarni yuzaga keltirishda katta xizmatlari borligini etirof etadi. Men ularga samimiy minnatdorchilik bildiraman.

1-qism. Ehtimollarfazosi. Ehtimol

1 Maruza. Tasodifiy hodisa. Elementar hodisalar fazosi

Ehtimollar nazariyasining asosiy tushinchalaridan biri tasodifiy hodisa tushunchasidir. Bu yana bir muhim tushuncha tajriba bilan chambarchas bog`liqdir. Tajriba-suniy ravishda yaratiluvchi yoki tajriba o`t=azuvchi shaxsning ihtiyoriga bog`liq bo`lmagan щolda vujudga keluvchi malum shartlar kompleksi bajarilganda, o`tqaziladigan sinovdan iborat. Tajribalarni ikki sinfga (turga) bo`lish mumkin. Ularning birida tajriba natijalari tabiat qonunlariga tayangan holda oldindan aytib berilishi mumkin. Bunday tajribalar ***determinasiyalangan (aniqlangan)*** degan nom bilan yuritiladi. Tajribalarning ikkinchi sinfida esa bir xil shart-sharoit bajarilganda ham sinov natijasida bir-birini rad etuvchi xilma-xil hodisalar ro`y berishi mumkin. Bunday xilma-xillik masalan elektr lampochkalarini ishdan chiqish hodisasini kuzatganda, elementar zarrachalar bir-birlari bilan to`qnashganda, kalamushlarning biror tibbiy preparatga tasirchanligi kuzatilganda va hakozolarda uchraydi. Bunday tajribalarni o`rganish ehtimollar nazariyasining predmetini tashkil etadi. Ular ***tasodifiy (stoxastik)*** yoki ehtimollik tajribalari deb ataladi. Biz bunday tajribalarni istalgancha qaytarish mumkin deb faraz qilamiz.

Tasodifiy tajribaning har qanday natijasi uning oqibati yoki ***elementar hodisa*** deyiladi. Tajriba natijasida ro`y berishi mumkin bo`lgan barcha elementar hodisalardan tashkil topgan to`plamni biz ***elementar hodisalar fazosi*** yoki to`plama fazo deb ataymiz va Ω orqali belgilaymiz, har bir elementar hodisani esa ω, ($\omega \in \Omega$) orqali belgilaymiz.

Elementar hodisalar fazosining strukturasini izohlash uchun birqancha misollar keltiramiz.

1-Misol. Tajriba bir jinsli simmetrik tanga tashlashdan iborat bo`lsin. Raqamni «r» va gerbni «g» orqali belgilasak, u holda elementar hodisalar $\omega_1 =$ g va $\omega_2 =$ r bo`lib, elementar hodisalar fazosi $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ to`plamdan iborat bo`ladi.

2-Misol. Tajriba o`yin soqqasini (yoqlari birdan oltigacha nomerlangan bir jinsli kubni) tashlashdan iborat bo`lsin. Bunda elementar hodisalar fazosi $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ to`plamdan iborat.

3-Misol. Faraz qilaylik biz telefon stansiyasining ishini bir soat ichida kuzatib, (telefon) chaqirishlar soni bilan qiziqaylik. Kuzatuv vaqtida bitta ham chaqirish kelmasligi, bitta chaqirish kelishi, ikkita chaqirish kelishi va hakozo hodisalar ro`y berishi mumkin. Bu tajribada elementar hodisalar fazosi $\Omega = \{0,1,2,...\}$ ko`rinishga ega.

4-Misol. Bunda n ta sharni m ta turli sharlarni o`z ichiga olgan urnadan tanlash bilan bogliq bo`lgan murakkabroq tajribani ko`rishga o`tamiz.

Har bir tanlovda olingan shar urnaga qaytarib qo`yiladigan tajribaga ***qaytma*** (yoki ***qaytuvli***) tanlash deyiladi. Bu holda n ta shardan iborat harqanday tanlama

$\Omega=\{u_1,u_2,...,u_n\}$ ko`rinishda yozilishi mumkin, bu erda u_i orqali i–chi qadamda olingan sharning raqami belgilangan. qaytma tanlamada har bir u_i, m ta $1,2,3,...,m$ qiymatlardan birini qabul qilishi mumkin. Elementar hodisalar fazosini tasvirlash birxil tarkibli, masalan (5121234) va (1251243) kabi tanlamalarni bir xil tanlama yoki har xil tanlama deb hisoblashimizga qarab tubdan farq qiladi. Shu munosabat bilan ikki xil holni bir-biridan farq qilamiz; ***tartiblangan tanlamalar*** va ***tartiblanmagan tanlamalar.***

Tartiblangan tanlamalar qaralgan holda elementar hodisalar fazosi $\Omega=\{\omega;\omega=(u_1,u_2,...,u_n);u_j=1,2,...,m\}$ ko`rinishga ega va elementar hodisalar soni $N(\Omega)=m^n$ ga teng. Tartiblanmagan tanlamalarni biz $\omega=[u_1,u_2,...,u_n]$ shaklida ifodalasak, bu holda elementar hodisalar fazosi $\Omega=\{\omega;\omega=[u_1,u_2,...,u_n];u_j=1,2,...,m\}$ ko`rinishga ega bo`lib, elementar hodisalar sonini $K(m,n)$ orqali belgilasak

$$N(\Omega)=K(m,n)=C_{m+n-1}^{n} \qquad (1)$$

tenglik o`rinli bo`ladi. Bu erda $C_k^j=\dfrac{k!}{j!(n-j)!}$ k–ta elementdan j tadan tuzilgan gruppalar soniga teng. (1) tenglikning isboti ushbu

$$K(1,n)=1$$

$$K(m,n)=\sum_{s=1}^{n}K(m-1,s) \qquad (2)$$

rekurent munosabatdan kelib chiqadi. (2) tenglikdagi $K(m-1,s)$ avval $m-1$ ta turli sharli urnadan s ta shardan iborat tartiblanmagan tanlama olib, so`ngra $m$-chi sharni $n-s$ marta qўshib olishdan hosil bo`lgan elementar hodisalar soniga teng.

5-Misol. Bu misolda endi tanlangan shar urnaga qaytarib qo`yilmaydi. Bunday tajribaga ***qaytarilmas tanlash*** deyiladi. Bu holda $n\le m$ deb faraz qilamiz. qaytarilmas $n$ ta shardan iborat tartiblangan tanlash o`tqazilgan holda elementar hodisalar fazosi

$$\Omega=\{\omega;\omega=(u_1,u_2,...,u_n);u_1\ne u_2\ne...\ne u_n,u_j=1,2,...,m\}$$

to`plam orqali ifodalanadi va bu to`plamning elementlar soni

$$(m)_n=m(m-1)...(m-n+1)$$

m ta elementdan n tadan o`rinlashtirishlar soni $A_m^n$ ga teng. Tartiblanmagan tanlash o`tqazilgan holda elementar hodisalar fazosi

$$\Omega=\{\omega;\omega=[u_1,u_2,...,u_n];u_1\ne u_2\ne...\ne u_n;u_j=1,2,...,m\}$$

to`plamdan iborat bo`ladi va harbir tartiblanmagan turli elementli tanlamadan $n!$ ta turli tartiblangan tanlamani hosil qilish mumkin bo`lgani uchun barcha elementar hodisalar soni

$$N(\Omega)=\frac{(m)_n}{n!}=\frac{A_m^n}{n!}=C_m^n$$

ga teng bo`ladi.

6-Misol. Navbatdagi misol sifatida shamolning yo`nalishini aniqlashdan iborat bo`lgan tajribani ko`raylik. Agar biz natijani $\theta$ orqali belgilasak, u holda $\theta$; $[0,2\pi)$ yarim intervaldan son qiymatlar qabul qiladi. Shunday qilib tabiiy ravishda $\Omega$ elementar hodisalar fazosi chekli yarim intervaldan (yoki aniqrogi aylananing nuqtalaridan iborat bo`ladi). Bir vaqtning o`zida shamolning yo`nalishi va uning v tezligini kuzatish yana ham aniqroq tajriba bo`lar edi. Bu holda elementar hodisalar fazosi $\Omega = \{\omega = (\theta, v);\ 0 \le \theta < 2\pi; v > 0\}$ bilan, yani ikki o`lchovli cheksiz to`plam orqali ifodalanar edi.

7-Misol. ***Broun harakati.*** Mikroskopda molekulalar tomonidan ko`p miqdordagi zarbalar natijasida xaotik harakat qilayotgan kichik zarrachaning xolati kuzatilayotgan bo`lsin. Kuzatuv $[0,T]$ vaqt oraligida o`tqazilayotgan bo`lsin. Bu tajribaning natijasi zarrachaning harakat traektoriyasidan iborat bo`ladi. Agar bizni zarrachaning biror yo`nalish bo`yicha siljishi qiziqtirsa, u holda vaqtning ihtiyoriy $t$ momentida ($t \in [0,t]$), uni tanlangan yo`nalishdagi proeksiyasining vaziyati $x(t)$ koordinata orqali ifodalanadi. Bu holda elementar hodisalar fazosi $\Omega = \{x(t); t \in [0,T]\} = C_{[0,T]}$ $[0,T]$ oraligida aniqlangan haqiqiy uzluksiz funksiyalar to`plamidan iborat bo`ladi.

Shunday qilib elementar hodisalar fazosi, chekli, sanoqli va xatto kontinium quvvatga ega bo`lishi mumkin ekanligi yuqorida keltirilgan misollardan yaqqol ko`rinadi.

Elementar hodisalar fazosi bilan bir qatorda endi eng muhim tushuncha ***tasodifiy hodisa*** yoki (boshqa tipdagi hodisalar bilan biz bu darslikda uchrashmaganligimiz sababli) hodisa tushunchasini kiritamiz. Hodisa elementar hodisalardan tashkil topgan to`plam bo`lib ular odatda lotin alfavitining bosh xarflari $A, B, C, \ldots$ lar bilan belgilanadi. Tajriba natijasida albatta ro`y beradigan hodisaga biz ***muqarrar*** hodisa deymiz. Aksincha hech qachon ro`y bermaydigan (yani birorta ham elementar hodisani o`z ichiga olmagan) hodisaga **mumkin** ***bo`lmagan*** yoki ***bajarilmaydigan*** hodisa deb ataymiz va uni Ø orqali belgilaymiz. Birorta berilgan hodisalar sinfiga tayanib “yoki”, ”va”, ”inkor qilish” kabi mantiqiy boglanishlar yordamida yangi hodisalarni hosil qilish mumkin; bu mantiqiy boglanishlarga to`plamlar nazariyasida “birlashma”, ”kesishma” va “to`ldirma” kabi amallar mos keladi.

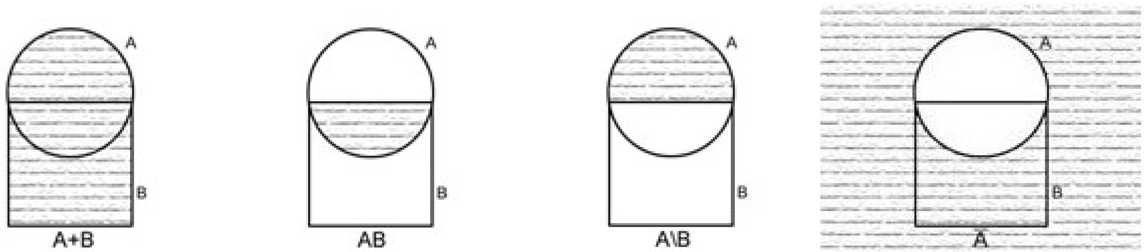
A hodisaga teskari (qarama-qarshi) $\overline{A}$ hodisa deb A hodisa ro`y bermaganda va faqat shundagina bajariladigan hodisaga aytiladi. $A$ va $B$ hodisalarning yigindisi $A+B$ (yoki $A \cup B$) deb, $A$ yoki $B$ hodisalar, yoki ikkalasi ham bajarilganda va faqat shundagina bajariladigan hodisaga aytiladi. $A + \overline{A} = \Omega$ - muqarrar hodisa ekanligi o`z-o`zidan ayon. $A$ va $B$ hodisalarning ko`paytmasi AB (yoki $A \cap B$) deb A va B hodisalar birgalikda bajarilganda va faqat shundagina bajariladigan hodisaga aytamiz. $A\overline{A} =$Ø - mumkin bo`lmagan hodisa ekanligi ravshan.

Agar AB=Ø bo`lsa, $A$ va $B$ hodisalar ***birgalikda bo`lmagan hodisalar*** deyiladi. A va B hodisalarning $A \setminus B$ ayirmasi deb A hodisa bajarilib B hodisa bajarilmaganda va faqat shundagina bajariladigan hodisaga aytiladi. Agar A hodisaning ro`y berishidan $B$ hodisaning ham ro`y berishi kelib chiqsa, u holda A

hodisa B hodisani **ergashtiradi** deymiz va buni $A \subseteq B$ deb yozamiz. Agar $A \subseteq B$ va $B \subseteq A$ bo`lsa. U holda A va B hodisalar teng kuchli yoki teng hodisalar deyiladi va $A = B$ deb yoziladi. Teng kuchli hodisalar bir xil elementar hodisalardan tashkil topgan ekanligiga ishonch hosil qilishimiz mumkin.

8-Misol. Tajriba simmetrik bir jinsli tangani uch marta tashlashdan iborat bo`lsin. Elementar hodisalar fazosi $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7, \omega_8\}$ to`plamdan iborat bo`lib, unda $\omega_1 = $(ggg), $\omega_2 = $(ggr), $\omega_3 = $(grg), $\omega_4 = $(rgg), $\omega_5 = $(grr), $\omega_6 = $(rgr), $\omega_7 = $(rrg), $\omega_8 = $(rrr). $A$ hodisa tanga uch marta tashlanganda ikki marta gerb tushishidan, $B$ esa kamida ikki marta raqam tushishidan iborat bo`lsin, u holda $A = \{\omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ va $B = \{\omega_5, \omega_6, \omega_7, \omega_8\}$ ekanligi ravshan, demak $A + B = \{\omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7, \omega_8\}$ – kamida bir marta raqam tushish hodisasi, $AB = \varnothing$, $A \setminus B = A$, $\overline{A} = \{\omega_1, \omega_5, \omega_6, \omega_7, \omega_8\}$ – kamida ikkita raqam, yoki birorta ham raqam tushmaslik hodisasidan iborat.

9-Misol. Tajriba birlik kvadratga tavakkaliga zarracha tashlashdan iborat bo`lsin. $A$ tashlangan zarrachani doiraga tushishi, $B$ esa – tashlangan zarrachaning kichik kvadratga tushishi hodisalari bo`lsa, u holda $A + B$, AB, $A \setminus B$ va $\overline{A}$ hodisalar zarrachani mos ravishda A va B figuralarning birlashmasi, kesishmasi, ayirmasi va birlik kvadratgacha to`ldirmasi orqali hosil qilingan (1- shaklda tegishli sohalar shtrixlangan) sohalarga tushishidan iborat.



1-shakl.

Hodisalarning yigindisi va ko`paytmasi amallarini ularning chekli yoki cheksiz to`plami $\sum_\alpha A_\alpha$ (yoki $\bigcup_\alpha A_\alpha$), $\prod_\alpha A_\alpha$ (yoki $\bigcap_\alpha A_\alpha$) uchun kengaytirish mumkin.

To`plamlar ustidagi amallarning barcha hossalari hodisalar uchun ham ko`chiriladi: masalan

$$\overline{\sum_\alpha A_\alpha} = \sum_\alpha \bar{A}_\alpha, \quad \overline{\bigcap_\alpha A_\alpha} = \bigcup_\alpha \overline{A_\alpha}, \quad \overline{A} = \Omega \setminus A, \quad \overline{\Omega} = \varnothing,$$

$$A \setminus B = A \setminus AB = A\overline{B}, \quad A \setminus (A \setminus B) = AB, \quad A \subseteq B \Rightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A},$$

$$A + A = A, \quad (A + B)C = AC + BC, \quad (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

2-Maruza. Tasodifiy hodisalar algebrasi va σ- algebrasi. Ehtimollar nazariyasining aksiomalari. Ehtimollar fazosi

Elementar hodisalar fazosi cheksiz bo`lgan umumiy holda biz barcha hodisalarni qarash o`rniga, hodisalarning algebralari yoki σ–algebralari deb ataluvchi bazi sinflarinigina qaraymiz xolos. Shunday qilib, elementar hodisalar fazosi Ω ihtiyoriy to`plamdan iborat bo`lsin va $\mathcal{A}-\Omega$ to`plamning qism to`plamlaridan tashkil topgan birorta sistema bo`lsin.

1-Tarif. Agar

1°. $\Omega \in \mathcal{A}$

2°. $A \in \mathcal{A}$ va $B \in \mathcal{A}$ munosabatdan $A + B \in \mathcal{A}$ kelib chiqsa,

3°. $A \in \mathcal{A}$ munosabatdan $\overline{A} \in \mathcal{A}$ kelib chiqsa,

u holda $\mathcal{A}$ sistema ***algebra*** tashkil qiladi deyiladi.

2-Tarif. $\mathcal{A}$ – hodisalar algebrasi, $P = P(A)$; $A \in \mathcal{A}$ esa $\mathcal{A}$ da aniqlangan va $[0;1]$ to`plamdan qiymatlar qabul qiladigan to`plam funksiyasi bo`lsin. Agar $\mathcal{A}$ dan olingan va birgalikda bajarilmaydigan ihtiyoriy A va B hodisalar uchun

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

tenglik o`rinli bo`lsa, u holda $\mathcal{A}$ da chekli additiv o`lchov kiritilgan deyiladi. $P(\Omega) = 1$ shartni qanoatlantiruvchi chekli additiv o`lchovga esa, $\mathcal{A}$ da aniqlangan chekli additiv ehtimollik o`lchovi deyiladi.

Agar $\mathcal{A}$ hodisalar algebrasi bo`lsa, u holda $A \in \mathcal{A}$ va $B \in \mathcal{A}$ dan $A \bigcap B = \overline{\overline{A} \bigcup \overline{B}}$ va $A \setminus B = A \bigcap \overline{B}$ munosabatlarga ko`ra $A \bigcap B \in \mathcal{A}$ va $A \setminus B \in \mathcal{A}$ kelib chiqadi. Shu kabi 1° va 3° shartdan $\varnothing = \overline{\Omega} \in \mathcal{A}$ kelib chiqadi.

Hodisalarning $\mathcal{A}$ algebrasini bazan hodisalar halqasi deb atashadi, chunki $\mathcal{A}$ da halqaning barcha shartlarini qanoatlantiruvchi ikkita algebraik amal (qo`shish va ko`paytirish: $\bigcup; \bigcap$) kiritilgan. Hodisalarning $\mathcal{A}$ algebrasi $A \bigcap \Omega = A$ bo`lgani uchun birlik halqa tashkil etadi.

Algebra tashkil qiluvchi hodisalar sistemasining eng “kichigi” $\mathcal{A}=\{\varnothing;\Omega\}$ ekanligi ravshan. Shu bilan birga Ω to`plamning barcha qism to`plamlaridan tashkil topgan hodisalar sistemasi $M(\Omega)$ ham algebradan iborat ekanligini tekshirish mumkin.

Agar Ω chekli fazo bo`lsa, u holda uning barcha qism to`plamlaridan tashkil topgan $M(\Omega)$ sistema ham chekli to`plam bo`ladi.

10-Misol. Tajriba bir jinsli simmetrik tangani ikki marta tashlashdan iborat bo`lsin. U holda elementar hodisalar fazosi $\Omega$={gg,gr,rg,rr} 4 elementdan tashkil topgan chekli to`plamdan iborat bo`ladi va $M(\Omega)$ algebraning barcha hodisalarini yozib chiqish mumkin:

$$M(\Omega) = \{\varnothing; \{gg\}; \{gr\}; \{rg\}; \{rr\}; \{gg,gr\}; \{gg,rg\}; \{gg,rr\}; \{gr,rg\}; \{gr,rr\};$$

$$\{rg,rr\}; \{gg,gr,rr\}; \{gg,rr,gr\}; \{gg,rr,gr\}; \{gr,rg,rr\}; \Omega\}$$

Bu misolda $M(\Omega)$ algebra 2^4=16-ta hodisalardan tashkil topgan. Agar Ω to`plam $N$ ta elementdan tashkil topgan bo`lsa, u holda $M(\Omega)$ to`plam $2^N$ ta elementdan iborat. Haqiqatan ham 0 va 1 lardan tashkil topgan uzunliliklari $N$ ga teng bo`lgan ketma-ketliklarning soni 2^N ga teng va bunday ketma-ketliklar bilan $M(\Omega)$ orasida o`zoro birqiymatlik moslik o`rnatish mumkin.

3-Tarif. Agar Ω to`plamning qism to`plamlaridan tashkil topgan hodisalarning $\mathcal{A}$ -algebrasida

2*. $A_n \in \mathcal{A}$; $n = 1,2,...$ dan $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ kelib chiqsa, u xolda $\mathcal{A}$ σ*–algebra* yoki ***Borel algebrasi*** deyiladi. Ω fazo va uning qism to`plamlaridan tashkil topgan $\mathcal{A}$ $\sigma$–algebra birgalikda ***o`lchovli fazo*** deb ataladi va $(\Omega, \mathcal{A})$ orqali belgilanadi.

11-Misol. 1°. $\Omega = R = \{x;\ -\infty < x < \infty\}$ sonli to`g`ri chiziq bo`lsin. $F_0$ orqali chekli yoki cheksiz kesmalardan, intervallar va yarim intervallardan tashkil topgan to`plamlar sistemasini belgilaymiz. F_0 algebra tashkil qilmaydi, chunki, masalan. $A = (-\infty;-1)$ va $B = (1;+\infty)$ to`plamlar yig`indisi $(-\infty;-1) \cup (1;+\infty)$ F_0 sistemaga kirmaydi. Agar F_0 ni, undan olingan to`plamlarning barcha chekli yig`indilari bilan to`ldirsak, hosil bo`lgan yangi to`plamlar sistemasi $\mathcal{A}$ algebra tashkil qiladi.

$\mathcal{A}$ algebrani o`z ichiga olgan barcha $\sigma-$ algebralarni qaraymiz. $\mathcal{A} \subset M(\Omega)$ va $M(\Omega)$ $\sigma-$ algebra tashkil qilgani sababli $\mathcal{A}$ algebrani o`z ichiga olgan kamida bitta σ- algebra mavjud. Bunday $\sigma-$ algebralarning kesishmasi (yani $\sigma-$ algebralarning barchasiga tegishli bo`lgan to`plamlar sinfi) yana σ- algebra tashkil qiladi. Bu barcha intervallarni o`z ichiga olgan minimal $\sigma-$ algebra bo`lib Borel $\sigma-$ algebrasi deyiladi va $\Re = B(R)$ orqali belgilanadi.

2°) $\Omega = R_n = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n);\ \ x_k \in R\}$- n o`lchovli Evklid fazosi bo`lsin. R_n fazo nuqtalarini $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ ko`rinishida ifodalaymiz. I_0 orqali

$$\{x \in R_n;\ a_1 < x_1 \le b_1, a_2 < x_2 \le b_2, ..., a_n < x_n \le b_n\} \qquad (3)$$

ko`rinishdagi barcha $n$ o`lchovli yarim ochiq parallelepipedlardan tashkil topgan to`plamlar sistemasini belgilaymiz, bu erda $-\infty \le a_i < b_i$ haqiqiy sonlar. (3) ko`rinishdagi yarim ochiq parallelepipedlarning chekli yig`indilaridan tashkil topgan $\Re_0(R_n)$ sinf algebra tashkil qilishini tekshirish qiyin emas. $\Re_0(R_n)$ algebrani o`z ichiga olgan minimal $B(R_n) = \Re_n$ $\sigma-$ algebraning mavjud ekanligini 1°) dagi kabi isbotlash mumkin. B_n $\sigma-$ algebraga n o`lchovli Evklid fazosidagi Borel to`plamlarining σ–algebrasi deyiladi.

4-Taъrif. Bizga $(\Omega, \mathcal{A})$ – o`lchovli fazo berilgan bo`lsin. Agar $\mathcal{A}$ $\sigma-$ algebrada aniqlangan P sonli fnksiya uchun quyidagi aksiomalar o`rinli bo`lsa:

K1. Istalgan $A \in \mathcal{A}$ uchun $P(A) \ge 0$ (P ning nomanfiyligi);

K2. $P(\Omega) = 1$ (P ning normalanganligi);

K3. Juft-jufti bilan birgalikda bo`lmagan $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ hodisalar ketma-ketligi uchun

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \quad (P \text{ ning sanoqli additivligi});$$

u holda $\mathcal{A}$ $\sigma-$ algebrada P ehtimollik o`lchovi yoki ehtimol kiritilgan deyiladi.

(Ω,𝒜,P) uchlikka ehtimolliklar fazosi yoki ehtimollik modeli deyiladi, bu erda 𝒜 hodisalarning $\sigma-$ algebrasi, P 𝒜 da aniqlangan etimol, $P(A)$, ($A \in \mathcal{A}$) songa A hodisaning ehtimoli deyiladi.

Shunday qilib ehtimollik modelini yaratish o`lchovli fazoda manfiy bo`lmagan, sanoqli additiv Ω fazoning o`lchovi 1 bo`lgan o`lchov kiritish demakdir.

Ehtimollar nazariyasining yuqorida kiritilgan aksiomatikasini A.N.Kolmogorov taklif qilgan. K1, K2, K3 aksiomalar sistemasi, ularni qanoatlantiruvchi real obektlar mavjud bo`lgani sababli o`zoro zid emas.

3-Maruza. Ehtimolning asosiy xossalari

Yuqorida keltirilgan aksiomalardan ehtimolning quyida keltirilgan asosiy xossalari kelib chiqadi.

1^0). $P(\varnothing)=0$.

1^0 xossaning isboti $\varnothing \bigcup \Omega=\Omega$ tenglikdan va K1, K3 aksiomalardan kelib chiqadi.

2^o). Agar $A\subseteq B$, bo`lsa, u holda $P(B\setminus A)=P(B)-P(A)$. $B=A\bigcup(B\setminus A)$ va $A\bigcap(B\setminus A)=\varnothing$ tengliklardan K3 aksiomaga ko`ra

$$P(B)=P(A)+P(B\setminus A).$$

Bu tenglikdan ushbu xossaning isboti kelib chiqadi:

3^0). Agar $A\subseteq B$ bo`lsa, $P(A)\le P(B)$ bo`ladi.

4^0). Agar $A,B\in\mathcal{A}$ bo`lsa, u holda

$$P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)-P(A\bigcap B).$$

Bu xossaning isboti $A\bigcup B=A\bigcup(B\setminus(A\bigcap B))$ tenglikdan va 2^0 xossadan kelib chiqadi:

$$P(A\bigcup B)=P(A)+P(B\setminus(A\bigcap B))=P(A)+P(B)-P(A\bigcap B).$$

5^0). $P(\overline{A})=1-P(A)$ tenglik $A\bigcup\overline{A}=\Omega$, $A\bigcap\overline{A}=\varnothing$ munosabatlardan va K3 aksiomadan kelib chiqadi.

6^0). Agar $A_n\in\mathcal{A}$, $n=1,2,...$ bo`lsa, u holda

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)\le\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n).$$

6^o xossani isbotlash uchun $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}B_n$ tenglikka murojat etamiz, bu erda $B_1=A_1$, $B_n=\overline{A_1}\bigcap...\bigcap\overline{A_{n-1}}\bigcap A_n, n=2,3,..., B_i\bigcap B_j=\varnothing$, $i\neq j$ tenglik o`rinli. Demak K3 aksiomaga ko`ra

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P\left(\sum_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) \le \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

Ushbu teorema ehtimol o`lchovi bilan chekli additiv to`plam funksiyasining uzluksizligi orasidagi bog`lanishni ko`rsatadi.

1-Teorema. P, $\mathcal{A}$ -algebrada kiritilgan chekli additiv ehtimol o`lchovi bo`lsin. U holda ushbu 4 ta shartlar o`zoro ekvivalent:

1. P σ–additiv (yani P $\mathcal{A}$ da kiritilgan ehtimollik).

2. P–yuqoridan uzluksiz, yaъni $\mathcal{A}$ dan olingan va $A_n \subseteq A_{n+1}, n = 1,2,..., \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ shartlarni qanoatlantiruvchi ihtiyoriy $A_1, A_2,...$ ketma-ketlik uchun (buni biz $A_n \uparrow$ deb belgilaymiz)

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right).$$

3. P-quyidan uzluksiz, yani $\mathcal{A}$ dan olingan va $A_{n+1} \subseteq A_n, n = 1,2,..., \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ shartlarni qanoatlantiruvchi ihtiyoriy $A_1, A_2,...$ ketma-ketlik uchun (buni biz $A_n \downarrow$ deb belgilaymiz)

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right).$$

4. P-“nolda” uzluksiz, yani $\mathcal{A}$ dan olingan va $A_{n+1} \subseteq A_n, n = 1,2,..., \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$ shartlarni qanoatlantiruvchi ihtiyoriy $A_1, A_2,...$ ketma-ketlik uchun (buni biz $A_n \downarrow \emptyset$ deb belgilaymiz)

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0.$$

Teoremaning isboti. Teoremani biz ushbu 1)⇒ 2) ⇒ 3)⇒ 4) ⇒1) sxema bo`yicha isbotlaymiz. Bu erda i)⇒j) orqali i) shartdan j) shart kelib chiqishi belgilangan.

1)⇒2). $A_n \uparrow$ va $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ bo`lsin $B_1 = A_1, B_n = A_n \setminus A_{n-1}, n = 2,3,...$ deb belgilaymiz. $B_n$ hodisalar juft-jufti bilan birgalikda bajarilmaydigan hodisalar va $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ bo`lgani uchun P ning σ–additivligiga ko`ra

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) = P(A_1) + P(A_2 \setminus A_1) + P(A_3 \setminus A_2) + ... =$$

$$= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1) + P(A_3) - P(A_2) + ... = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

2)⇒3). $A_n \downarrow$ va $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ bo`lsin. $B_n = A_1 \setminus A_n$, $n = 1,2,...$ deb belgilaymiz. $\{B_n\}$ hodisalar ketma-ketligi uchun $B_n \uparrow$ shart bajariladi va $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = A_1 \setminus \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)$ bo`lgani uchun 2^0 xossaga ko`ra

$$\lim_{n\to\infty} P(B_n) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = P(A_1) - P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

tenglik o`rinli bo`ladi. Demak

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = \lim_{n\to\infty} P(A_1 \setminus B_n) = P(A_1) - \lim_{n\to\infty} P(B_n) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right).$$

3)⇒4). Tabiiy.

4)⇒1). 4^0 xossa o`rinli bo`lsin. $A_1, A_2, ...$ juft-jufti bilan birgalikda bajarilmaydigan hodisalar ketma-ketligi bo`lib $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ bo`lsin. P ning chekli additivligidan, ihtiyoriy $n \geq 1$ uchun

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) + P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right)$$

tenglikning o`rinli ekanligi kelib chiqadi. $B_n = \bigcup_{i=n+1}^{\infty} A_i$ deylik, u holda $\{B_n\}$ ketma-ketlik uchun $B_n \downarrow \varnothing$ shart bajariladi. Demak $4^0$ ga ko`ra

$$\sum_{\imath=1}^{\infty} P(A_i) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} P(A_i) = \lim_{n\to\infty} P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \lim_{n\to\infty}\left[P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) - P(B_n)\right] =$$

$$= P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) - \lim_{n\to\infty} P(B_n) = P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right).$$

1-Teorema isbotlandi.

4-Maruza. Elementar hodisalarning diskret fazosi. Ehtimolning klassik tarifi

Elementar hodisalar fazosi chekli yoki cheksiz, ammo ularni $\omega_1, \omega_2, ...$ ko`rinishida nomerlab chiqish mumkin bo`lgan fazoga elementar hodisalarning diskret fazosi deyiladi. Birinchi paragrafda kj`rib o`tilgan 1),2),3) misollarda elementar hodisalar fazosi *Ω* diskret fazo tashkil qiladi.

Ω diskret fazo va $\mathcal{A} = M(\Omega)$ bo`lsin. Bu holda ihtiyoriy $A \in \mathcal{A}$ hodisaning ehtimolini quyidagicha kiritish mumkin:

$\sum_{\omega\in\Omega} p_\omega = 1$ shartni qanoatlantiruvchi manfiy bo`lmagan $p_\omega$ sonlar berilgan bo`lsin. A hodisaning ehtimolini

$$P(A)=\sum_{\omega\in\Omega} p_\omega \qquad (4)$$

yig`indi shaklida ifodalaymiz. Ehtimolni bunday aniqlab ehtimollik o`lchovini 3 ta aksiomasining barchasini qanoatlantiramiz. Haqiqatan ham K1 aksioma $P(A)$ miqdorning aniqlanishidan kelib chiqadi. K2 aksioma ham bajariladi, chunki (4) tenglikga ko`ra

$$P(\Omega)=\sum_{\omega\in\Omega} p_\omega =1$$

Agar A ikkita A_1 va A_2 birgalikda bajarilmaydigan hodisalarning yig`indisi bo`lsa. u holda (4) tenglikka ko`ra

$$P(A_1\cup A_2)=P(A)=\sum_{\omega\in\Omega} p_\omega =\sum_{\omega\in A_1\cup A_2} p_\omega =\sum_{\omega\in A_1} p_\omega +\sum_{\omega\in A_2} p_\omega =P(A_1)+P(A_2)$$

bўladi, yani (4) tenglik orqali kiritilgan ehtimollik chekli additiv. Xuddi shu kabi P ning sanoqli additivligini ham isbotlash mumkin. Shunday qilib

$$p_\omega \geq 0 \quad \text{va} \quad \sum_{\omega\in\Omega} p_\omega =1 \qquad (5)$$

shartlarni qanoatlantiruvchi sonlar yordamida *(Ω, 𝒜)* o`lchovli fazoda (4) formula orqali ehtimollik o`lchovini kiritish mumkin. Bu takidning teskarisi ham o`rinli, yani agar *(Ω, 𝒜)* o`lchovli fazoda K1,K2,K3 aksiomalarni qanoatlantiruvchi P ehtimollik o`lchovi kiritilgan bo`lsa, u holda (5) shartlarni qanoatlantiruvchi shunday $p_\omega \geq 0$ sonlar mavjudki $A\in$ 𝒜 hodisaning ehtimoli (4) formula orqali ifodalanadi. Haqiqatan ham $A=\{\omega\}$- yagona ω elementar hodisadan iborat deb hisoblab, biz $P(A)=p_\omega =P(\{\omega\})$ tenglikka ega bo`lamiz. Demak K1 aksiomaga ko`ra $p_\omega \geq 0$. Shu bilan birga, agar $A=\{\omega_{i_1},\omega_{i_2},...\}$ bo`lsa, u holda K3 aksiomadan

$$P(A)=P\left(\{\omega_{i_1}\}+\{\omega_{i_2}\}+...\right)=\sum_{\omega\in A} P(\{\omega\})=\sum_{\omega\in A} p_\omega$$

(4) tenglik kelib chiqadi. Bundan va K2 aksiomadan $A=\Omega$ deb hisoblab

$$\sum_{\omega\in\Omega} p_\omega =1$$

tenglikka kelamiz.

Agar Ω chekli elementar hodisalar fazosi bo`lib, $p_\omega$ barcha $\omega$ elementar hodisalar uchun bir-biriga teng bo`lsa, u holda (4) formula

$$P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)} \qquad (6)$$

ko`rinishga ega bo`ladi. Bu erda $N(A)$ orqali A to`plamning elementlar soni belgilangan. Bu ehtimolning ***klassik tarifi.***

$$P(\Omega)=1=\sum_{\omega\in\Omega} p_\omega =p_\omega N(\Omega)$$

bo`lgani uchun

$$p_\omega = \frac{1}{N(\Omega)}$$

tenglik o`rinli, yani klassik tarifga olib keladigan ehtimollar fazosining modeli ihtiyoriy elementar hodisaning ro`y berish imkoniyati tajriba xarakterini aniqlovchi shartlarga nisbatan birxil bo`lgan hollarda ishlatiladi. Masalan simmetrik bir jinsli o`yin soqqasi tashlanganda 1,2,...,6 elementar hodisalar uchun $p_1 = p_2 = ... = \frac{1}{6}$, simmetrik bir jinsli tanga uchun esa p (g)= p (r)= $\frac{1}{2}$ deb aniqlash va ehtimolning klassik tarifidan foydalanish tabiiydir.

Shunday qilib A hodisaning ehtimolini klassik tarifdan foydalanib hisoblash A hodisani ro`y berishiga olib keluvchi barcha elementar hodisalarning sonini hisoblashga keltiriladi. Bazan bunday hisoblashlar trivial, bazan esa - kombinatorikaning qiyin masalasi bo`lib, uni echish uchun hozirgi kunda rivojlantirilgan nozik usullarni qo`llashga to`g`ri keladi. Bunday sof texnikoviy qiyinchiliklarni yengish ehtimolliklar nazariyasi faniga hech qanday aloqasi yo`қ. Ammo, bir qancha bunday holatlarni tekshirmay turib, na o`rganilayotgan mavzuning tabiati haqida, na uning amaliy imkoniyatlari haqida tasavvurga ega bo`lish mumkin emas.

Endi ehtimolning klassik tarifidan foydalanib bazi bir hodisalarning etimollarini hisoblaymiz.

12-Misol. 3 ta o`yin soqqasi tashlanganda tushgan ochkolar yig`indisi 11 ga teng bo`lish ehtimolini toping.

Echish. Bu misolda ochkolar qaysi o`yin soqqasida tushganinni hisobga olsak elementar hodisalar fazosi $\Omega = \{\omega; \omega = (u_1, u_2, u_3); u_j = 1,2,...,6; j = 1,2,3\}$ ko`rinishga ega ekanligi kelib chiqadi, bu erda (u_1, u_2, u_3) orqali mos ravishda birinchi o`yin soqqasida $u_1$, ikkinchi o`yin soqqasida u_2, va uchinchisida u_3 ochkolar tushishi belgilangan. Demak barcha elementar hodisalar soni $N(\Omega)$=3^6=216. Agar A orqali tushgan ochkolar yig`indisi 11 ga teng bo`lish hodisasini belgilasak, u holda $A = \{\omega \in \Omega; u_1 + u_2 + u_3 = 11\}$ ko`rinishga ega. 11 ochkoni 6 ta turli usul bilan olish mumkin (6-4-1; 6-3-2; 5-5-1; 5-4-2; 5-3-3; 4-4-3). Shu bilan birga 6-4-1 kombinasiyasi ushbu 6 ta elementar hodisalardan biri bajarilganda va faqat shundagina tushishini ko`ramiz: (6,4,1), (6,1,4), (4,6,1), (4,1,6), (1,6,4), (1,4,6). huddi shu kabi 6-3-2, 5-4-2 kombinasiyalari ham 6 tadan elementar hodisalardan biri bajarilganda ro`y beradi. 5-5-1, 5-3-3, 4-4-3 – kombinasiyalarning har biriga mos keluvchi elementar hodisalarning soni 3 ga teng ekanligi ravshan. Shunday qilib $N(A)$=3·6+3·3=27 va ehtimolning klassik tarifiga ko`ra

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{27}{216} = \frac{1}{8}.$$

13-Misol. 36 ta qartadan iborat bo`lgan qartalar dastasidan tavakkaliga 3 ta qarta olingan. Bu qartalarning uchchalasi ham bir xil tusli bo`lish ehtimolini toping.

Echish. Qartalarni dastadan olish tartibi bu misolda ahamiyatga ega bo`lmagani uchun elementar hodisalar fazosi

$$\Omega = \{\omega; \omega = [u_1, u_2, u_3], u_1 \neq u_2 \neq u_3; u_j = 1,2,...,36\}$$

ko`rinishga ega. Demak $N(\Omega) = C_{36}^3 = \dfrac{36 \cdot 35 \cdot 34}{1 \cdot 2 \cdot 3}$. $A$ orqali olingan qartalar dastasi bir xil tusli bo`lish hodisasini belgilasak va dastada har biri 9 ta qartadan iborat bo`lgan 4 xil turli tus borligini hisobga olsak,

$$N(A) = 4C_9^3 = \frac{4 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

kelib chiqadi. Shunday qilib

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{4C_9^3}{C_{36}^3} = \frac{4}{85}.$$

5-Maruza. Geometrik ehtimollar

Ehtimollik modellarining yana bir muhum sinfi geometrik ehtimollar deb ataluvchi sinfdir. *Ω* n- o`lchovli Evklid fazosining chekli $n$- o`lchovli hajmga ega bo`lgan oblasti bo`lsin. *Ω* oblastning hajmini aniqlash mumkin bo`lgan harqanday qism to`plamiga hodisa deymiz. $\mathcal{A}$ orqali barcha hodisalar sinfini belgilaymiz. A hodisaning ehtimoli deb ushbu

$$P(A) = \frac{V(A)}{V(\Omega)} \qquad (11)$$

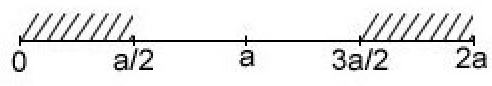
sonni qabul qilamiz. Bu erda $V(A)$ A to`plamning $n$- o`lchovli hajmi. (11) formula yordamida aniqlangan P to`plam funksiyasi ehtimollik o`lchovining barcha aksiomalarini qanoatlantirishini ko`rish qiyin emas.

(Ω,$\mathcal{A}$,P) ehtimolliklar fazosi, bu erda P-ehtimollik o`lchovi (11) formula orqali aniqlangan, *Ω* oblastga tavakkaliga (tasodifan ravishda) nuqta tashlash bilan bog`liq bo`lgan masalalar uchun model vazifasini o`taydi. Bu erda *Ω* elementar hodisalar fazosi kontinium quvvatga ega bo`lgani uchun klassik tarifdan foydalana olmaymiz. Nuqtaning vaziyati *Ω* oblastda tekis taqsimlangan, yani nuqtani $A$ oblastga tushishi bu oblastning $n$ o`lchovli hajmiga proporsional deb faraz qilinadi.

15-Misol. $2a$ uzunlikka ega bo`lgan kesmaga tavakkaliga nuqta tashlangan. Shu nuqtadan kesmaning eng yaqin uchigacha bo`lgan masofa $a/2$ dan kichik bo`lish ehtimoli topilsin.

Echish. Umumiylikka zarar etqazmay, kesmaning uchlari 0 va $2a$ koordinatalarga ega deymiz. Tashlangan nuqtadan *O* nuqtagacha bo`lgan masofani $x$ orqali belgilaymiz. U holda bizni qiziqtirayotgan hodisa $x < a/2$ yoki $2a - x < a/2$ bo`lganda va faqat shunda ro`y beradi.

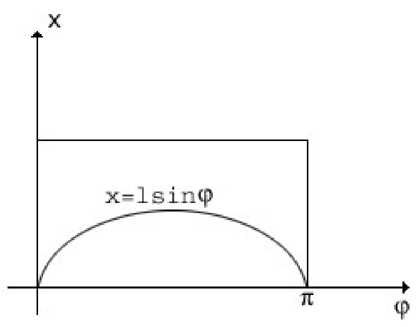
Talab qilingan ehtimollik $(a/2 + a/2)/2a = 1/2$ nisbatga teng (3 shaklga qarang).



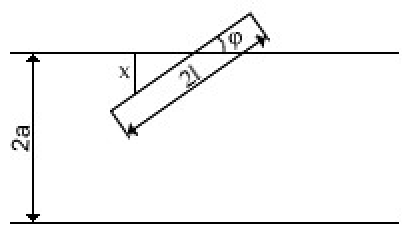
3-shakl.

16-Misol. ***(Byuffon masalasi).*** Tekislikda bir-biridan $2a$ masofada parallel to`g`ri chiziqlar o`tqazilgan va shu tekislikka uzunligi $2l; (l < a)$ bo`lgan igna tavakkaliga tashlangan ignaning to`g`ri chiziqlardan birortasini kesib o`tish ehtimoli topilsin.

Echish. Ignaning o`tqazilgan to`g`ri chiziqlarga nisbatan vaziyati uning o`rtasidan unga eng yaqin turgan chiziqqacha bo`lgan $x$ masofa hamda igna bilan to`g`ri chiziq orasidagi $\varphi$ burchak orqali ifodalanadi (4 shakl). $0 \le x < a$ va $0 \le \varphi < \pi$ bo`lgani uchun ignaning barcha holatlari (yani barcha elementar hodisalar) tomonlari *0* va π bo`lgan to`g`ri to`rtburchak nuqtalari bilan aniqlanadi (5 shakl).



4-shakl.



5-shakl.

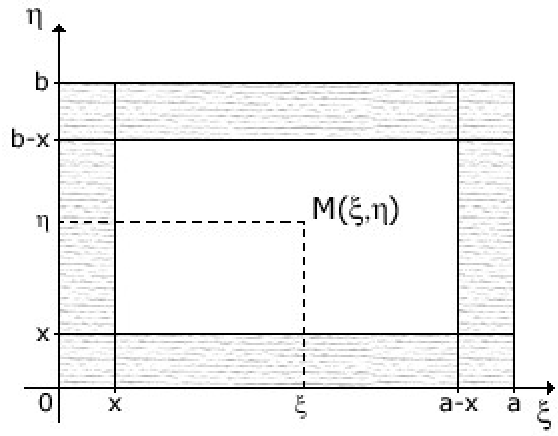
Ignaning parallel to`g`ri chiziq bilan kesishishi uchun (A hodisa) $x \le l\sin\varphi$ tengsizlikning bajarilishi zarur va etarlidir. Izlanayotgan ehtimol, (11) formulaga ko`ra, 5 shakldagi shtrixlangan sohaning yuzini to`g`ri to`rtburchak yuziga nisbatiga teng bo`ladi, yani

$$P = P(A) = \frac{1}{a\pi}\int_0^{\pi} l\sin\varphi d\varphi = \frac{2l}{a\pi}.$$

Byuffon masalasi, snaryadning kattaligi va uning quvvatini hisobga olish bilan bog`liq bo`lgan otishlar nazariyasining bazi masalalarini xal etishda asosiy rol o`ynaydi. Bundan tashqari Byuffon masalasi $\pi$ sonining qiymatini tasodifiy tajribalar metodidan foydalanib topishda ishlatilgan. Haqiqatan ham, echilgan masaladan $\pi = \dfrac{2l}{pa}$ formula hosil bo`ladi. Ignani tashlash yordamida π ni aniqlash uchun etarlicha ko`p tajriba o`tqazilgan va mos $\dfrac{n(A)}{n}$ chastota $P = P(A)$ ehtimolga tenglashtirilgan (bu erda n tajribalar soni, $n(A)$ esa ignaning parallel chiziqlardan birini kesib tushgan hollari soni).

17-Misol. Tomonlari a va b ga $(b \leq a)$ teng bo`lgan to`g`ri to`rtburchakka tavakkaliga nuqta tashlangan. Tashlangan nuqtadan to`rtburchakning eng yaqin tomonigacha bo`lgan masofa x dan katta emasligining ehtimoli topilsin.

Echish. Umumiylikka zarar keltirmay to`g`ri to`rtburchakning uchi koordinatalar boshida va uning tomonlari koordinata o`qlari bo`ylab yo`nalgan deb faraz qilamiz (6 shaklga qarang).



6-shakl.

Tashlangan M nuqtaning koordinatalarini (ξ,η) deylik. Hisoblanayotgan ehtimol ushbu $A_x = \{(\xi,\eta); \min\{\xi,\eta,a-\xi,b-\eta\} \leq x\}$ hodisaning ehtimoliga teng. $\bar{A}_x = \{(\xi,\eta); \min\{\xi,\eta,a-\xi,b-\eta\} > x\} = \{(\xi,\eta): x < \xi < a-x; x < \eta < b-x\}$ tenglik o`rinli. Demak izlanayotgan ehtimol (11) formulaga ko`ra 6-shaklda shtrixlangan soxaning yuzini, to`g`ri to`rtburchakning yuziga nisbati shaklida ifodalanadi, yani $P(A_x) = F(x) = \frac{S_x}{S}$, bu erda $S_x - A_x$ sohaning yuzi, $S = ab$ esa to`g`ri to`rtburchakning yuzi.

Agar $x \leq 0$ bo`lsa, $S_x = 0$ va $x \geq b/2$ bo`lsa, $S_x = S$ munosabatlar o`rinli ekanligini ko`rish qiyin emas. Endi $0 < x < b/2$ bo`lsin, u holda $S_x = S - (b-2x)(a-2x)$. Shunday qilib

$$F(x) = \begin{cases} 0, агар x \leq 0, \\ 1-(1-2x/b)(1-2x/a), агар 0 < x < b/2, \\ 1, агар x > b/2. \end{cases}$$

6-Maruza. Shartli ehtimollar. Hodisalarning bog`liqsizligi

Shartli ehtimolning tarifini kiritishdan oldin bir qancha misollar ko`ramiz.

18-misol. Oilada 2 ta farzand bor. O`g`il tug`ilish ehtimolini $\frac{1}{2}$ deb olib ushbu hodisalarning ehtimollari topilsin.

1^0. Oiladagi har ikkala farzand o`g`il (A hodisa).

2⁰. Oilada bitta farzand o`g`il ekanligi malum (B hodisa). Oilada ikkinchi farzand ham o`g`il.

Echish. Ikkita farzandli oilalarda bolalarni jinslari bo`yicha taqsimoti quyidagicha:

1) birinchi bola o`g`il, ikkinchisi ham o`g`il (o`o`)
2) birinchi bola o`g`il, ikkinchisi qiz (o`q)
3) birinchi bola qiz, ikkinchisi o`g`il (qo`)
4) birinchi bola qiz, ikkinchisi ham qiz (qq)

Demake lementar hodisalar fazosi $\Omega=\{$o`o`,o`q,qo`,qq$\}$ ko`rinishga ega va bunda barcha elementar hodisalar teng ehtimolli. Klassik tarifga ko`ra $P(A)=\frac{1}{4}$. 2^0 holda biz qo`shimcha informasiyaga egamiz. ($B$ hodisa bajarilgan) yani oilada bitta bola o`g`il. Bu holda endi o`o`, o`q, qo` elementar hodisalar teng imkoniyatli demak izlanaetgan ehtimol $\frac{1}{3}$ ga teng deyish tabiiy.

19-misol. Urnada m ta oq va $n-m$ ta qora shar bor. Urnadan ketma-ket 2 ta shar olingan

1⁰. Olingan har ikkala shar oq (A hodisa) ekanligining ehtimoli topilsin.

2⁰. Agar birinchi olingan shar oq (B hodisa) ekanligi malum bo`lsa, ikkinchisi ham oq shar ekanligining ehtimoli $P(A/B)$ topilsin.

Echish. Ehtimolning klassik tarifidan $P(A)=\frac{m(m-1)}{n(n-1)}$ ekanligi kelib chiqadi. Ikkinchi holda, birinchi olingan shar oq bo`lgani uchun, ikkinchi tanlashdan oldin urnada $n-1$ ta shar qolgan va ulardan $m-1$ tasi oq, demak $P(A/B)=\frac{m-1}{n-1}$;

Ehtimolni klassik usul bilan kiritilgan holda A, B, A/B va AB hodisalarning ehtimollari mos ravishda

$$P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)};\quad P(AB)=\frac{N(AB)}{N\Omega)};\quad P(B)=\frac{N(B)}{N(\Omega)};\quad P(A/B)=\frac{N(A/B)}{N(B)}=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

ekanligi ravshan. Bu oxirgi tenglik shartli ehtimolga umumiy tarif berish imkonini beradi.

5-Tarif. *(Ω, $\mathcal{A}$,P)* ehtimolliklar fazosi berilgan bo`lsin va $A,B\in\mathcal{A}$; $P(B)>0$ bo`lsin. A hodisaning B hodisa ro`y bergandagi shartli ehtimoli deb ushbu

$$P_B(A)=P(A/B)=\frac{P(AB)}{P(B)} \qquad (12)$$

nisbatga aytiladi.

(12) nisbatni

$$P(AB)=P(B)P_B(A) \qquad (13)$$

shaklda qayta yozib biz ***ko`paytirish teoremasi*** deb ataluvchi tenglikni hosil qilamiz. (13) tenglikdan induksiyaga ko`ra hodisalarning ihtiyoriy ko`paytmasining ehtimolini topishga doir ushbu formula kelib chiqadi.

Agar $A_1,A_2,...,A_n$ hodisalar uchun $P(A_1,A_2,...,A_{n-1})>0$ bo`lsa, u holda

$$P(A_1A_2...A_n)=P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1A_2}(A_3)\cdots P_{A_1A_2...A_{n-1}}(A_n) \qquad (14)$$

20-Misol. 3 ta tuz, 4 ta qirol va 2 ta valetdan iborat bo`lgan qartalar dastasidan ikki o`yinchi galma-gal tavakkaliga bittadan qarta olishadi. qaysi o`yinchi birinchi bo`lib dastadan tuz olsa. Shu o`yinchi o`yinni yutgan hisoblanadi. Agar valet chiqsa o`yin durang bo`ladi. Olingan qartalar dastaga qaytib qo`yilmaydi. Birnninchi o`yinchining yutish ehtimoli topilsin.

Echish. Ehtimoli izlanayotgan hodisani A orqali belgilaymiz. U holda A hodisa A={t, qqt, qqqqt} ko`rinishga ega. Bu erda "t"- birinchi o`yinchiga tuz chiqqanini, "qqt"- birinchi o`yinchiga qirol va nihoyat "qqqqt" –birinchi va ikkinchi o`yinchilarga ikkitadan qirol chiqib, so`ngra birinchi o`yinchiga tuz chiqqanini bildiradi. Klassik tarifga va shartli ehtimolning tarifiga ko`ra quyidagilarni topamiz:

P(q)=4/9, P(t)=3/9, P_q(q)=3/8, P_{qq}(t)=3/7,

$P_{qq}(q)$=2/7, $P_{qqq}(q)$=1/6, P_{qqqq}(t)=3/5.

Topilgan ehtimolliklarni yuqoridagi (14) formulaga qo`ysak

P(qqt)=P(q)P_q(q)P_{qq}(t)=4/9·3/8·3/7=1/14,

P(qqqqt)=P(q)P_q(q)P_{qq}(q)P_{qqq}(q)P_{qqqq}(t)=4/93/82/71/63/5=1/210

tenglik hosil bo`ladi. Demak

P(A)=*P*(t)+P(qqt)+P(qqqqt)=1/3+1/14+1/210 = 43/105

ekan.

2-Teorema. Agar $B\in\mathcal{A}$ – fiksirlangan hodisa bolsa, u holda $P_B(A)$ shartli ehtimol, $A\in\mathcal{A}$ hodisaning P_B funksiyasi sifatida yangi (*Ω*, $\mathcal{A}$, P_B) ehtimolliklar fazosini aniqlaydi.

Isboti. Teoremani isbotlash uchun P_B, (*Ω*,$\mathcal{A}$) o`lchovli fazoda aniqlangan ehtimollik o`lchovi ekanligiga ishonch hosil qilishimiz, yani P_B uchun K1, K2, K3 aksiomalar o`rinli ekanligini korsatishimiz kifoya. Haqiqatan ham (12) formuladan

$$P_B(A)\geq 0 \quad \text{va} \quad P_B(\Omega)=\frac{P(\Omega B)}{P(B)}=\frac{P(B)}{P(B)}=1$$

munosabatlarning o`rinli ekanligi kelib chiqadi. Agar $A_1, A_2$ birgalikda bo`lmagan hodisalar bo`lsa (A_1, A_2=Ø) u holda A_1B va A_2B hodisalar ham birgalikda emas. Demak

$$P_B(A_1+A_2)=\frac{P(A_1B+A_2B)}{P(B)}=\frac{P(A_1B)+P(A_2B)}{P(B)}=\frac{P(A_1B)}{P(B)}+\frac{P(A_2B)}{P(B)}=P_B(A_1)+P_B(A_2),$$

yani P_B chekli additiv.

$A_1, A_2,...,A_n,...$ hodisalar ketma-ketligi $A_{n+1}\subset A_n$, $n=1,2,...$ va $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n=\varnothing$ (yaъni $A_n\downarrow\varnothing$) shartlarni qanoatlantirsin. U holda $BA_1, BA_2,...$ ketma-ketlik uchun ҳam

$BA_{n+1} \subset BA_n$ va $\bigcap_{n=1}^{\infty} BA_n = \emptyset$ munosabatlar o`rinli va ehtimol o`lchovining nolda uzluksizligiga ko`ra,

$$\lim_{n\to\infty} P_B(A_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{P(BA_n)}{P(B)} = \frac{1}{P(B)} \lim_{n\to\infty} P(BA_n) = 0 \ .$$

Bundan 3-§ dagi 1 teoremaga ko`ra $P_B$ uchun K3 aksiomaning o`rinli ekanligi kelib chiqadi.

Demak P_B, $(\Omega, \mathcal{A})$ o`lchovli fazoda aniqlangan ehtimollik o`lchovi ekan.

***Hodisalarning bog`liqsizligi.*** Hodisalarning bog`liqsizligi ehtimollar nazariyasining asosiy tushunchalaridan biri hisoblanadi, chunki u ehtimollar nazariyasini o`lchovli fazolarning umumiy nazariyasidan ajratib turadigan o`ziga xos hususiyatini aniqlab beradi.

Agar $P(A/B) = P(A)$ tenglik bajarilsa, A hodisa B hodisaga bog`liq emas deyish tabiiy.Agar $P(A) > 0$ bo`lsa, u holda $P(B/A)$ shartli ehtimol mavjud va ko`paytirish teoremasiga ko`ra

$$P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(B)P(A/B)}{P(A)} = P(B)$$

Demak A hodisaning B ga bog`liqsizligidan $B$ hodisaning $A$ ga bog`liqsizligi kelib chiqadi, yani A va B hodisalarning bog`liqsizligi simmetriklik xususiyatiga ega.

Agar A va B hodisalar bog`liqsiz bo`lsa, u holda $P(AB) = P(A)P(B)$ tenglik o`rinli va bu tenglik $A$ va $B$ hodisalarning ehtimollari nol bo`lganida ham manoga ega. Natijada biz ushbu tarifga kelamiz.

6-Tarif. Agar

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

tenglik o`rinli bo`lsa A va B hodisalar bog`liqsiz deyiladi.

21-Misol. Tajriba simmetrik tangani 2 marta tashlashdan iborat. A orqali birinchi tashlanganda gerb chiqish hodisasini, B orqali esa tanga ikkinchi marta tashlanganda gerb chiqish hodisasini belgilaymiz. U holda elementar hodisalar maydoni *Ω*={gg,gr,rg,rr}, *A*={gg,gr} va B={gg,rg} to`plamlardan iborat bo`ladi. Agar elementar hodisalarning har biri ¼ ehtimolga ega ekanligini hisobga olsak, u holda P*(A)*=½, P(B)=½, *P(AB)*=¼ bo`ladi. Demak $P(AB) = P(A)P(B)$ va $A, B$ hodisalar bog`liqsiz.

7-Tarif. $A_1, A_2, ..., A_n$ hodisalar berilgan bo`lsin. Agar ihtiyoriy $1 \le i_1 < i_2 < ... < i_k \le n; 2 \le k \le n$ sonlar uchun

$$P(A_{i_1} A_{i_2} ... A_{i_k}) = P(A_{i_1}) P(A_{i_2}) ... P(A_{i_k})$$

tengliklar ўrinli bo`lsa, u holda $A_1, A_2, ..., A_n$ birgalikda bog`liqsiz hodisalar deyiladi.

7-tarifdan $A_1, A_2, ..., A_n$, birgalikda bog`liqsiz hodisalar bo`lsa, u holda ularning ihtiyoriy qism to`plamidagi $A_{j_1}, A_{j_2}, ..., A_{j_s}$ hodisalar ham birgalikda bog`liqsiz ekanligi kelib chiqadi. Ushbu misol hodisalarning birgalikda bog`liqsizligi ularning juft-jufti bilan bog`liqsizligiga nisbatan kuchliroq shart ekanligini ko`rsatadi.

22-Misol. Tajriba simmetrik tangani 2 marta tashlashdan iborat bo`lsin (20-misolga qarang). $A$={gg,gr}, $B$={gg,rg} va $C$={gg,rr} –ikki marta tanga tashlaganda ikki marta bir xil tomon tushish hodisasini belgilaymiz. Agar barcha elementar hodisalar bir xil ehtimolga ega bo`lsa, u holda

$$P(A) = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{1}{2}, \quad P(C) = \frac{1}{2}; \quad P(AB) = PAC) = P(BC) = \frac{1}{4},$$

ammo $P(ABC) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = P(A)P(B)P(C)$, yani A, B, C hodisalar juft-jufti bilan bog`liqsiz, lekin ular birgalikda bog`liqsiz emas.

Ehtimollar nazariyasida ko`pincha bog`liqsiz hodisalar bilan birga, hodisalar sinflarining bog`liqsizligini ham qarashga to`g`ri keladi.

8-Tarif. $\mathcal{A}_{i}$1, $\mathcal{A}_{i}$2,..., $\mathcal{A}_{i}$n-hodisalarning algebralari (σ-algebralari) berilgan bo`lsin. Agar barcha $A_i \in \mathcal{A}_i$ $i = 1,2,...,n$ hodisalar uchun $P(A_1A_2...A_n) = P(A_1)P(A_2)...P(A_n)$ tenglik o`rinli bo`lsa, u holda $\mathcal{A}_{i}$1, $\mathcal{A}_{i}$2,…, $\mathcal{A}_{i}$n algebralar (σ-algebralar) birgalikda boғliқsiz deyiladi.

7-Maruza. To`la ehtimollik formulasi. Bayes formulasi

$A_1, A_2, ..., A_n$ juft-jufti bilan birgalikda bo`lmagan va musbat ehtimollarga ega bo`lgan hodisalar bo`lsin. Agar $B \subset \bigcup_{j=1}^{n} A_j$ bo`lsa, u holda

$$P(B) = \sum_{j=1}^{n} P(A_j)P(B / A_j) \qquad (15)$$

formula o`rinli. (15) formulaga to`la ehtimollik formulasi deyiladi.

(15) formulani isbotlash uchun $B = A_1B + A_2B + ... + A_nB$ tenglikka murojat qilamiz. Bu erda $A_1B, A_2B, ..., A_nB$ juft-jufti bilan birgalikda bo`lmagan hodisalar ekanligi ravshan. Demak

$$P(B) = \sum_{j=1}^{n} P(BA_j).$$

Bu tenglikning $P(BA_j)$ қo`shiluvchilariga ko`paytirish teoremasini қo`llab, to`la ehtimollik formulasini hosil qilamiz.

To`la ehtimollik formulasi, murakkab hodisalarning ehtimollarini shartli ehtimollarni qo`llab topishda asosiy qurol vazifasini bajaradi.

Ehtimollikning σ-additivlik xossasidan foydalanib (15) formulani $A_1, A_2, ...$– sanoqli juft-jufti bilan birgalikda bo`lmagan hodisalar uchun umumlashtirish mumkin.

23-Misol. Birinchi urnada 2 ta oq va 3 ta qora, ikkinchisida esa 1 ta oq va 4 ta qora shar bor. Birinchi urnadan tavakkaliga 2 ta shar olib ikkinchisiga solingandan so`ng ikkinchi urnadan tavakkaliga olingan shar oq shar ekanligining ehtimoli topilsin.

Echish. A_1, A_2 va A_3 lar orqali birinchi urnadan ikkinchisiga olib g`o`yilgan sharlarning mos ravishda har ikkalasi ham oq, har ikkalasi qora va turli rangda bo`lish hodisalarini, $B$ orqali esa ikkinchi urnadan olingan shar oq shar bo`lish hodisasini belgilaymiz. U holda ehtimolning klassik tarifiga ko`ra

$$P(A_1)=\frac{1}{C_5^2}=\frac{1}{10},\quad P(A_2)=\frac{C_3^2}{C_5^2}=\frac{3}{10},\quad P(A_3)=\frac{C_2^1C_3^1}{C_5^2}=\frac{6}{C_5^2}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5},$$

$$P(B/A_1)=\frac{3}{7},\quad P(B/A_2)=\frac{1}{7},\quad P(B/A_3)=\frac{2}{7}$$

tengliklar o`rinli boladi. Izlanayotgan hodisaning ehtimoli, to`la ehtimollik formulasiga ko`ra, quyidagicha bo`ladi:

$$P(B)=P(A_1)P(B/A_1)+P(A_2)P(B/A_2)+P(A_3)P(B/A_3)=\frac{1}{10}\cdot\frac{3}{7}+\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{7}+\frac{6}{10}\cdot\frac{1}{7}=\frac{6}{35}.$$

Ko`paytirish teoremasidan ushbu

$$P(B)P(A_k/B)=P(BA_k)=P(A_k)P(B/A_k)$$

tenglikning o`rinli ekanligi kelib chiqadi. Bundan to`la ehtimollik formulasiga tayanib topamiz:

$$P(A_k/B)=\frac{P(A_k)P(B/A_k)}{P(B)}=\frac{P(A_k)P(B/A_k)}{\sum_{j=1}^{n}P(A_j)P(B/A_j)}. \qquad (16)$$

(16) formulaga Bayes formulasi deyiladi. Bayes formulasi matematik statistikada keng ko`llaniladi. Statistik qo`llanishlarda $A_1, A_2, ..., A_n$ hodisalarni ko`pincha “gipotezalar”, $P(A_k)$ ehtimolni $A_k$ gipotezaning aprior (sinovgacha) ehtimoli $P(A_k/B)$ shartli ehtimolni esa uning aposterior (sinovdan so`nggi) ehtimoli deb atashadi.

24-Misol. Shifokor bemorni tekshirib ko`rganda uning $A_1, A_2, A_3$ kasallarning biri bilan og`riganligini gumon qildi. Ularning ehtimolliklari malum shartlar ostida mos ravishda quyidagilarga teng: $P(A_1)$=1/2, $P(A_2)$=1/6, $P(A_3)$=1/3. Shifokor diagnozni aniqlash uchun, agar bemor A_1 kasallik bilan og`rigan bo`lsa 0,1 eҳtimol bilan, A_2 kasallik bilan og`rigan bo`lsa 0,2 ehtimol bilan va A_3 kasallik bilan og`rigan bo`lsa 0,9 ehtimol bilan ijobiy natija beradigan analiz belgiladi. Besh marta analiz qilinib ulardan to`rttasi ijobiy va bittasi salbiy natija berdi. Analiz otqazilgach harbir kasalliklarning ehtimollari hisoblansin.

Echish. B orqali beshta analizdan to`rttasi ijobiy va bittasi salbiy natija berish hodisasini belgilaymiz. Bemor $A_1$ kasallik bilan og`rigan holda (yaъni A_1 gipotezasi bajarilsa) B hodisaning ro`y berish ehtimoli, Bernulli formulasiga ko`ra

$$P(B/A_1)=C_5^4(0,1)^4\cdot 0,9=5\cdot 0,00009=0,00045.$$

Xuddi shu kabi A_2 va A_3 gipotezalar uchun bu ehtimol mos ravishda

$$P(B/A_2)=C_5^4(0,2)^4\cdot 0,8=5\cdot 0,00128=0,0064$$

va

$$P(B/A_3)=C_5^4(0,9)^4\cdot 0,1=5\cdot 0,06561=0,32805$$

bo`ladi.

Shunday qilib Bayes formulasiga ko`ra, analizlar o`tqazilgach, A_1 kasallik bilan og`riganlik ehtimoli

$$P(A_1/B)=\frac{1/2\cdot 0,00009}{1/2\cdot 0,00009+1/6\cdot 0,00128+1/3\cdot 0,06561}\approx 0,002,$$

A_2 kasallik bilan og`riganlik ehtimoli

$$P(A_2/B)=\frac{1/6\cdot 0,00128}{1/2\cdot 0,00009+1/6\cdot 0,00128+1/3\cdot 0,06561}\approx 0,01$$

va A_3 kasallik bilan og`riganlik ehtimoli

$$P(A_3/B)=\frac{1/3\cdot 0,06561}{1/2\cdot 0,00009+1/6\cdot 0,00128+1/3\cdot 0,06561}\approx 0,988$$

ekanligini topamiz.

Bu hisoblashlarni nazarda tutib, shifokor bemor A_3 kasallik bilan og`rigan deb diagnoz ko`yishi tabiiy.

8-Maruza. Bernulli sxemasi.

Biror aniq A hodisani qancha marta ko`p va oz ro`y berishini keltiilgan tajribalarning Bernulli sxemasi orqali o`rganish mumkin. Aytaylik n-tajribalar ketma-ketligi berilib ular quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

1) Har xil tajribalarning natijalari o`zoro bog`liqsiz hodisalarni tashkil qiladi.
2) Har bir tajribada biror A hodisa boshqa tajrbalarga bog`liqsiz holda $p$ ehtimollik bilan ro`y beradi $(p\in[0,1])$ va u tajribalar nomeriga bog`liқ emas va $1-p$ ehtimollik bilan ro`y bermaydi;

1) va 2) shartlarni qanoatlantiruvchi tajrbalar ketma-ketligi tajribalarning Bernulli sxemasini tashkil qiladi deb ataymiz va bu sxema ko`pgina tasodifiy hodisalar bilan bog`liq bo`lgan jarayonlar uchun matematik model sifatida xizmat qiladi. Masalan demografiya masalalarida tug`iladigan bolaning o`g`il yoki qizligi, meteralogiyada yog`ingarchilikning bo`lishi yoki bo`lmasligi, ishlab chiqarishda tayyorlangan mahsulotning soz yoki nosoz bo`lishi va boshqalar.

Agar o`rganilayotgan (kuzatilayotgan) $A$ hodisa ro`y bersa shartli ravishda uni "yutuq" deb hisoblab, aks holda uni "yutuqmaslik" haqida gapirish mumkin.

Aytaylik tajrbalar soni n bo`lsin. Agar yutuqni shartli ravishda "1" yutuqmaslikni "0" deb qabul qilsak Bernulli sxemasiga mos keluvchi $\omega$ elementlar hodisani $n$ ta 1 va 0 lardan iborat bo`lgan ketma-ketlik deb tushunish mumkin. Masalan $\omega = 1001$ ifoda ($n = 4$) 1-nchi va 4-nchi tajribalarda yutuq (A hodisa) ro`y berganini bildiradi. Tushunarliki barcha elementar hodisalar soni $2^n$ ga teng bo`ladi.

Har qanday takroriy tajribalar sxemasi uchun quyidagi masala asosiy hisoblanadi: n ta takroriy tajribalarda biror A hodisa k marta ro`y berishi qanday ehtimollikka ega? Bu hodisani $B_n(k)$ deb belgilasak:

$B_n(k) = \{n$ ta tajribada yutuqlar soni k ga teng $\}$, $k = 0,1,2,\ldots,n$ bo`ladi. Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$q = 1 - p\,,\ P_n(k) = P(B_n(k)).$$

Teorema 1. 1) va 2) shartlar faqat va faqat ixtiyoriy ω elementar hodisa uchun

$$P(\{\omega\}) = p^k q^{n-k} \qquad (1)$$

bo`lgandagina bajariladi xalos. Bu erda k ω elementar hodisadagi 1 lar (yutuqlar) soni va bu holda

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad 0 \le k \le n \qquad (2)$$

tenglik o`rinli bo`ladi.

Bevosita ishonish mumkinki, $B_n(k)$ va $B_n(j)$ hodisalar $k \ne j$ bo`lganda bir vaqtda ro`y bermaydi va

$$\bigcup_{k=0}^{n} B_n(k) = \Omega.$$

Demak, $\sum_{k=0}^{n} P_n(k) = 1$ tenglik bajarilishi kerak. Haqiqatan ham Nyuton binomi formulasiga ko`ra

$$\sum_{k=0}^{n} P_n(k) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} = (p+q)^n = 1. \qquad (3)$$

(2) formula bilan aniqlanadigan $P_n(k)$ ehtimolliklar (3) tenglikni hisobga olgan holda, ***binomial taqsimotlar*** deb ataladi.

Teoremaning isboti murakkab emas, lekin u qo`shimcha belgilashlar kiritishni talab qiladi.

Zaruriylik. Yuqorida aytilganidek har bir elementar hodisa 1 va 0 lardan iborat bo`lgan ketma-ketlik bilan tenglashtiriladi. Faraz qilaylik $\omega = \omega_1\omega_2\ldots\omega_n$ bo`lib ($\omega_i = 1$ yoki $\omega_i = 0$, $i = 1,2,\ldots,n$), 1 va 0 lardan iborat bo`lgan qandaydir ketma-ketlik bo`lsin va $C_j = \begin{cases} A_j, & агар \quad \omega_j = 1, \\ \overline{A}_j, & агар \quad \omega_j = 0, \end{cases}$ bo`lsa 1) shartga ko`ra C_j hodisalar bog`liqsiz (nega?) va faqat $\omega$ dan iborat bo`lgan to`plam

$$\{\omega\} = \bigcap_{j=1}^{n} C_j$$

Demak,

$$P(\{\omega\}) = \prod_{j=1}^{n} P(C_j) \qquad (4)$$

Lekin $P(C_j) = 0$, agar $\omega_j = 1$ bo`lsa, $P(C_j) = q$ agar $\omega_j = 0$ bo`lsa va (4) tenglikning o`ng tomonidagi $p$ ga teng ko`paytuvchilarning soni ω elementar hodisadagi 1 lar soni k ga teng, yani bu ko`paytma (1) tenglikning o`ng tomoniga teng. Zaruriylik isbotlandi.

Etarlilik. (1) formula ehtimollar taqsimoti ekanligi isbotlangan

$$\sum_{\omega} P(\{\omega\}) = 1$$

tenglikdan kelib chiqadi.

Qandaydir butun $l \le n$ sonni fiksirlab ω dan birinchi l elementlarni chiqarib yuborishdan hosil qilingan ω' ketma-ketlikni ko`ramiz. Shunday qilib $\omega'$ da $n-l$ ta 1 va 0 lar bor. Endi agar $\omega \in A_1 \cap \ldots \cap A_l$ bo`lsa undagi 1 lar soni $k = l + k'$ ga teng bo`ladi. Bu erda $k'$ - $l$ tajribadan keyingi $n-l$ tajribalarda ro`y bergan yutuqlar soni.

Ko`rish qiyin emaski, $P(\{\omega\}) = p^l P(\{\omega'\})$ va $P(\{\omega'\})$ (1) formula orqali n ni $n-l$ bilan almashtirish bilan aniqlanadi. Shunday qilib, har qanday $l \le n$ uchun

$$P(A_1 \cap \ldots \cap A_l) = \sum_{\omega \in A_1 \cap \ldots \cap A_l} P(\{\omega\}) = p^l \sum_{\omega'} P(\{\omega'\}) = p^l .$$

Oxirgi tenglik $A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_l}$ hodisalarning ixtiyoriy kombinasiyasi uchun ham to`g`ri ekanligidan 1) va 2) shartlarni o`rinli ekanligiga ishonch hosil qilamiz. Etarlilik isbotlandi.

Mashq sifatida Bernulli sxemasi bo`yicha o`tkazilgan n ta tajribada yutuqlar soni toq bo`lishli ehtimolligini topaylik. Shu ehtimollikni $\pi_n$ deb belgilasak, u holda (2) formulaga ko`ra

$$\pi_n = \sum_{j=k} C_n^j p^j q^{n-j} , \qquad (5)$$

bu erda j toq yig`indi 0 dan to $n$ gacha bo`lgan toq sonlar bo`yicha olinganligini ko`rsatadi. Nyuton binomi formulasiga ko`ra

$$(q-p)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k p^k q^{n-k} = \sum_{j\ жуфт} C_n^k p^k q^{n-k} - \sum_{j\ ток} C_n^k p^k q^{n-k} \qquad (6)$$

(3) formulaga asosan

$$1 = \sum_{j\ жуфт} C_n^k p^k q^{n-k} + \sum_{j\ ток} C_n^k p^k q^{n-k} . \qquad (7)$$

Endi (6) va (7) tengliklarni qo`shib

$$2 \sum_{j\ жуфт} C_n^k p^k q^{n-k} = 1 + (q-p)^n \qquad (8)$$

ekanligini olamiz. Demak, (5) va (8) formulalardan izlanayotgan ehtimollikning

$$\pi_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(q-p)^n \qquad (9)$$

ekanligi kelib chiqadi. Agar $p = q = \frac{1}{2}$ bo`lsa, Bernulli sxemasi simmetrik hisoblanadi va bu holda (9) formuladan $\pi_n = \frac{1}{2}$ ekanligi kelib chiqadi.

Simmetrik tangani n marta tashlash tajribasi simmetrik Bernulli sxemasi uchun misol bo`la oladi.

Bernulli sxemasini umumiy holda tasodifiy miqdorlar orqali kiritish ham juda foydali ham qulaydir.

Yuqorida keltirilgan 1) va 2) shartlarni qanoatlantiruvchi tajribalar ketma-ketligini ko`raylik. Bunga asoslanib quyidagi tasodifiy miqdorlar ketma-ketligini kiritish mumkin. Agar $k$-nchi tajribada kuzatilayotgan $A$ hodisa ro`y bersa $\xi_k = 1$, aks holda $\xi_k = 0$ deb hisoblaymiz. Natijada o`zaro bog`liqsiz va bir xil taqsimlangan $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligini hosil qilamizki, ular uchun

$$P\{\xi_k = 1\} = p, \qquad P\{\xi_k = 0\} = q = 1 - p. \qquad (10)$$

Umuman, hech qanday tajribalar sxemasi bilan bog`lamagan holda, o`zaro bog`liqsiz va (10) taqsimotga ega bo`lgan $\{\xi_k\}$ tasodifiy miqdorlarni Bernulli tasodifiy miqdorlari deb ataladi. Ular uchun $M\xi_k = p$, $D\xi_k = pq$. O`z-o`zidan ko`rinadiki

$$S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$$

yig`indi Bernulli sxemasi bo`yicha o`tkazilgan $n$ ta tajribada $A$ hodisaning ro`y berishlar (yutuqlar) sonini ifoda etadi va yuqorida keltirilgan 1-teoremaga asosan u $(n; p)$ parametrli binomial taqsimotga ega bo`ladi:

$$P\{S_n = k\} = P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad k = 0,1,2,\ldots,n.$$

S_n yig`indi uchun

$$MS_n = np, \; DS_n = npq$$

tenglik o`rinli ekanligini biz 3-bobning 12 va 13 misollarida keltirib chiqargan edik.

Endi binomial taqsimotni tadbiqiga oid bir qancha misollarni ko`raylik.

1-misol. Qandaydir texnik qurilma 5 ta elementdan tashkil topgan bo`lib, uning har bir elementi malum vaqt davomida $p = 0{,}1$ ehtimollik bilan ishdan chiqadi. Agar bu qurilmadagi ishdan chiqqan elementlar soni ikkitadan ko`p bo`lmasa u normal ishlaydi. Shu qurilmaning normal ravishda ishlash ehtimolligi topilsin.

Echish. Qurilmada ishdan chiqqan elementlar soni Bernulli sxemasida 5 tajribadagi yutuqlar soni S_5 ga teng. Bunda har bir tajribada yutuq bo`lish extimolligi $p = 0{,}1$. Bizni qiziqtirgan ehtimollik

$$P(S_5 \le 2) = P(S_5 = 0) + P(S_5 = 1) + P(S_5 = 2) = C_5^0 (0{,}1)^0 (0{,}9)^5 + C_5^1 (0{,}1)(0{,}9)^4 +$$
$$+ C_5^2 (0{,}1)^2 (0{,}9)^3 = (0{,}9)^5 + (0{,}1)(0{,}9)^4 + 10 \cdot 0{,}01 \cdot (0.9)^3 = 0{,}99144$$

2-misol. Texnik sistema (qurilma) 100 ta elementdan iborat va har bir element qolganlariga bog`liq bo`liagan holda p ehtimollik bilan ishdan chiqadi. Sistemada ishdan chiqqan elementlar soni 0,99 ehtimollik bilan bittadan ko`p bo`lmasligi uchun p qanday shartni qanoatlantirishi kerak?

Echish. Izlanayotgan ehtimollik binomial taqsimot bo`yicha

$$C_{100}^0 p^0 q^{100} + C_{100}^1 pq^{99} = 0{,}99 \quad \text{yoki} \quad q^{100} + 100pq^{99} = 0{,}99$$

tenglikni qanoatlantirishi kerak. Oxirgi tenglamani taqribiy echib, p taxminan 0,0015 ga teng ekanligini topamiz.

Yana shu narsani qayd qilib o`tamizki, (1) tenglik tajribalar ketma-ketligi uchun Bernulli sxemasini oxirigacha aniqlaydi va bu sxemaning mavjudligi va yagonaligini taminlaydi. Umuman ehtimollar nazariyasida tasodifiy miqdorlarning Bernulli sxemasi deganda, o`zaro bog`liqsiz va faqatgina ikkita qiymat qabul qiladigan (ular 0 va 1 sonlaridan iborat bo`lishi shart emas) tasodifiy miqdorlar ketma-ketligini tushuniladi.

9-Maruza. Bernulli sxemasidagi limit teoremalar.

Bernulli sxemasini

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$$

tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi ko`rinishida yozish mumkin va bu erda $\xi_i$ lar o`zaro bog`liqsiz va

$$P\{\xi_i = 1\} = p, \qquad P\{\xi_i = 0\} = q = 1 - p$$

ekanligini biz yuqorida ko`rgan edik.

1-§ da keltirilgan misollar

$$P\{\xi_1 + \ldots + \xi_n = k\} = P(S_n = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

formulaning tadbiqi katta hisoblash ishlari bilan bog`liq ekanligini ko`rsatadi. Ayniqsa, bu formula n va k larning katta qiymatlarida foydalanish uchun deyarli yaroqsiz bo`lib qoladi. Aytilganlardan $P(S_n = k)$ ehtimollik uchun $n \to \infty$ asimptotik formulalar topish zarurati yuzaga keladi. Umuman, ehtimollar nazariyasida $P(S_n = k)$ ko`rinishidagi ehtimolliklar uchun isbotlangan limit teoremalar lokal teoremalar deyiladi. Kelgusida, agar $\{a_n\}$ va $\{b_n\}$ ikkita sonli ketma-ketliklar bo`lsa, $a_n \sim b_n$ belgi $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ ekanligini ko`rsatadi. Bu holda $\{a_n\}$ va $\{b_n\}$ ketma-ketliklar ekvivalent deb hisoblanadi. Quyidagi (0,1) oraliqda aniqlangan

$$H(x) = x\ln\frac{x}{p} + (1-x)\ln\frac{1-x}{1-p} \qquad (14)$$

funksiya binomial taqsimot uchun isbotlanadigan limit teoremalarda katta rol o`ynaydi.

Teorema 4. Aytaylik $p^* = \frac{k}{n}$ bo`lsin. U holda $k \to \infty$, $n-k \to \infty$ da

$$P(S_n = k) = P\left(\frac{S_n}{n} = p^*\right) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi np^*(1-p^*)}}\exp\{-nH(p^*)\}. \qquad (15)$$

Isbot. Quyidagi

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}n^n e^{-n} \qquad (16)$$

asimptotik formula Stirling nomi bilan yuritiladi. (16) formulaga ko`ra

$$P(S_n = k) = C_n^k p^k q^{n-k} \sim \sqrt{\frac{n}{2\pi k(n-k)}}\frac{n^n}{k^k(n-k)^{n-k}}p^k(1-p)^{n-k} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi np^*(1-p^*)}}\exp\left\{-k\ln\frac{k}{n} - (n-k)\ln\frac{n-k}{n} + k\ln p + (n-k)\ln(1-p)\right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi np^*(1-p^*)}}\exp\{-n[p^*\ln p^* + (1-p^*)\ln(1-p^*) - p^*\ln p - (1-p^*)\ln(1-p)]\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi np^*(1-p^*)}}\exp\{-nH(p^*)\}.$$

(15) asimptotik formulaning o`ng tomonini $p^*$ ning $p$ ga yaqin qiymatlarida boshqa ko`rinishda yozish mumkin. (14) formula bilan aniqlangan $H(x)$ funksiya (0,1) oraliqda barcha tartibdagi chekli hosilalarga ega. Xususan

$$H'(x) = \ln\frac{x}{p} - \ln\frac{1-x}{1-p}; \qquad H''(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x},$$

va $H(p) = H'(p) = 0$. Bularni hisobga olgan holda Teylor formulasiga ko`ra $p^* \to p$ da

$$H(p^*) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)(p^* - p)^2 + \underline{\underline{O}}\left(|p^* - p|^3\right).$$

Demak $p^* \sim p$, $n(p^* - p)^3 \to 0$ bo`lsa

$$P(S_n = k) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\exp\left\{-\frac{n}{2pq}(p^* - p)^2\right\}. \qquad (17)$$

Agar

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{npq}}, \qquad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

belgilashlarni kirisak (17) dan quyidagi natijaga kelish mumkin.

3-natija. Agar $z = n(p^* - p) = k - np = \overline{\overline{o}}\left(n^{\frac{2}{3}}\right)$ bo`lsa, u holda

$$P(S_n = k) = P(S_n - np = z) \sim \varphi(z\Delta)\Delta\,. \qquad (18)$$

O`z navbatida, agar $x = \dfrac{k - np}{\sqrt{npq}}$ deb olsak (18) dan shunday natijaga kelamiz:

Fiksirlangan p uchun ($0 < p < 1$), k shunday o`zgarsinki $|x| \le T$ ($T > 0$) bo`lsin. U holda

$$P(S_n = k) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad (19)$$

Oxirgi (19) asimptotik munosabat Muavr-Laplasning lokal limit teoremasi nomiga ega (Muavr (19) formulani $p = q = \dfrac{1}{2}$ bo`lgan holda, Laplas esa uni ihtiyoriy p uchun isbotlagan).

Agar $k = pn$ butun son bo`lsa, (19) dan

$$P(S_n = np) = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\left(1 + \overline{\overline{o}}(1)\right)$$

yani $P(S_n = np)$ ehtimollikning 0 ga intilish tartibi $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ dan yuqori bo`la olmasligi kelib chiqadi. Quyidagi teorema Muavr-Laplas lokal teoremasida qoldiq hadning 0 ga intilish tartibi ham $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ ekanligini ko`rsatadi.

Teorema 5. Bernulli sxemasida p ($0 < p < 1$) o`zgarmas bo`lib, $n \to \infty$, $x = x_k = \dfrac{k - np}{\sqrt{npq}}$ k va n lar bo`yicha chegaralangan bo`lsa ($-\infty < a \le x_k \le b < +\infty$), u holda

$$\sup_{0 \le k \le n} \left| \sqrt{npq}\, P(S_n = k) - \varphi(x_k) \right| = \underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \qquad (20)$$

Isbot. Bizga binomial taqsimotning koeffisienti

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad (21)$$

ekanligi malum. (15) Stirling formulasining analiz kursidan malum bo`lgan qoldiq hadini hisobga olgan holda $\ln n!$ miqdorni

$$\ln n! = \ln\sqrt{2\pi n} + n\ln n - n + \underline{\underline{O}}\frac{1}{n} \qquad (22)$$

ko`rinishda yozish mumkin. Endi

$$k = np + x_k\sqrt{npq}, \qquad n - m = np - x_m\sqrt{npq}$$

ekanligini hisobga olsak (22) munosabatdan ushbu

$$\ln k! = \ln\sqrt{2\pi k} + \left(np + x_k\sqrt{npq}\right)\ln\left(np + x_k\sqrt{npq}\right) - np - x_k\sqrt{npq} + O\left(\frac{1}{n}\right), \qquad (23)$$

$$\ln(n-k)! = \ln\sqrt{2\pi(n-m)} + \left(nq - x_k\sqrt{npq}\right)\ln\left(nq - x_k\sqrt{npq}\right) - nq + x_k\sqrt{npq} + O\left(\frac{1}{n}\right), \qquad (24)$$

tengliklarni hosil qilamiz. $x \to 0$ da

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + O(x^3)$$

munosabatning o`rinli ekanligidan foydalanib

$$\ln\left(np + x_k\sqrt{npq}\right) = \ln np + \ln\left(1 + x_k\sqrt{\frac{q}{np}}\right) = \ln np + x_k\sqrt{\frac{q}{nq}} - \frac{x_k^2}{2}\frac{q}{np} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right), \qquad (25)$$

$$\ln\left(nq - x_k\sqrt{npq}\right) = \ln nq - x_k\sqrt{\frac{p}{nq}} - \frac{x_k^2}{2}\frac{p}{nq} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \qquad (26)$$

asimptotik formulalarni hosil qilamiz. Endi (20) munosabat (21), (22)-(26) tengliklardan kelib chiqadi.

Isbotlangan 5-teoremaga asoslanib, amaliy qo`llanishlarda

$$P(S_n = k) \cong \frac{\varphi(x_k)}{\sqrt{npq}} \qquad (27)$$

taqribiy formula ishlatiladi.

3-misol. Korxonada tayyorlangan ixtiyoriy buyumning yaroqsiz bo`lish ehtimolligi 0,005 bo`lsin. Agar buyumlar partiyasi 10000 buyumdan iborat bo`lsa, shulardan 40 tasi yaroqsiz bo`lish ehtimolligi topilsin.

Echish. Bu misolda binomial taqsimot uchun $n = 10000$, $p = 0{,}005$ va izlanayotgan ehtimollik

$$P = P_{10000}(40) = P(S_{10000} = 40) = C_{10000}^{40}(0{,}995)^{9960}(0{,}005)^{40}.$$

O`z-o`zidan ko`rinadiki bu ehtimollikni hisoblash murakkab. Shuning uchun (27) taqribiy formulani qo`llash kerak bo`ladi. Bu holda

$$\sqrt{npq} = \sqrt{10000 \cdot 0{,}005 \cdot 0{,}995} = \sqrt{49{,}75} \cong 7{,}05,$$

$$x = x_k = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} \cong -1{,}42, \qquad \varphi(x) \cong 0{,}1456.$$

Endi (27) formuladan foydalanib

$$P \cong \frac{0{,}1456}{7{,}05} \cong 0{,}0206$$

ekanligini topamiz.

Muavr-Laplasning integral teoremasi.

Muavr-Laplasning oldingi paragrifda keltirilgan lokal teoremasida $P(S_n = k)$ ehtimollikning funksiyasi sifatida qaralib unga asimptotik baho berilgan edi. Amaliyotda uchraydigan ko`p masalalarda $S_n$ ning qiymati malum oraliqda yotish ehtimolligini topishga to`g`ri keladi va bu masalalar umumiy holda $S_n$ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi uchun limit teoremalarni o`rganishga olib keladi. Ehtimollar nazariyasida taqsimot funksiyalar ketma-ketligi uchun o`rinli limit teoremalarni umumiy nom bilan integral teoremalar deb atash odatga aylangan.

6-teorema. Agar $0 < p < 1$ bo`lsa, $n \to \infty$ da har qanday musbat $T > 0$ uchun

$$\sup_{-T \le a < b \le T} \left| P\left(a \le \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \le b \right) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{u^2}{2}} du \right| \to 0 . \tag{28}$$

Bu teorema Muavr-Laplasning integral teoremasi deb ataladi. (28) munosabatda yaqinlashish a va b lar bo`yicha har qanday oraliqda tekis ekanligidan $n \to \infty$ da

$$\sup_x \left| P\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \le x \right) - \Phi(x) \right| \to 0$$

limit munosabat o`rinli bo`ladi. Bu erda

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(u) du , \qquad \varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} .$$

5-teoremaning isboti. Oldin

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u) du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = 1 \tag{29}$$

tenglikni isbotlaymiz. Ushbu

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du \right)^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}} dxdy \tag{30}$$

tenglik o`rinli. Bu erdagi ikki karrali integralda

$$x = \rho \cos\varphi, \qquad y = \rho \sin\varphi, \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi$$

almashtirishlar bajarilsa, u quyidagiga teng bo`ladi:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \rho e^{-\frac{\rho^2}{2}} d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \rho e^{-\frac{\rho^2}{2}} d\rho \cdot 2\pi = 1 . \tag{31}$$

Endi (30) va (31) tengliklardan (29) o`rinli ekanligi kelib chiqadi. Oldingi paragrifdagidek $\Delta = \frac{1}{\sqrt{npq}}$, $x_k = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$ belgilash kirisak, u holda

$$P\left(a \le \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} < b \right) = \sum_{a \le \frac{k-np}{\sqrt{npq}} < b} P(S_n = k) = \sum_{a \le x_k < b} P(S_n = k) \,. \tag{32}$$

2-§ da keltirilgan 3-natijaga ko`ra (u erdagi (19) formulani qarang) har qanday $\varepsilon > 0$ va etarli katta n lar uchun

$$(1-\varepsilon)\Delta\varphi(x_k) \le P(S_n = k) \le \Delta\varphi(x_k)(1+\varepsilon) \tag{33}$$

tengsizlikning o`rinli ekanligi kelib chiqadi. (33) tengsizlikning har ikki tomonini $a \le x_k < b$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi hamma $k$ lar bo`yicha yig`ib (32) tenglikni hisobga olsak

$$(1-\varepsilon)\Delta \sum_{a \le x_k < b} \varphi(x_k) \le P\left(a \le \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} < b \right) =\le (1+\varepsilon)\Delta \sum_{a \le x_k < b} \varphi(x_k) \tag{34}$$

tengsizliklar hosil bo`ladi.

$$x_{k+1} - x_k = \frac{k+1-np}{\sqrt{npq}} - \frac{k-np}{\sqrt{npq}} = \frac{1}{\sqrt{npq}} = \Delta$$

tenglikka ko`ra,

$$\Delta \sum_{a \le x_k < b} \varphi(x_k) = \sum_{a \le x_k < b} \varphi(x_k)(x_{k+1} - x_k) \,. \tag{35}$$

(35) tenglikning o`ng tomoni $\int_a^b \varphi(x)dx$ uchun integral yig`indidan iborat. Bundan va $n \to \infty$ da

$$\max_{0 \le k \le n}(x_{k+1} - x_k) = \Delta = \frac{1}{\sqrt{npq}} \to 0$$

ekanligidan kuyidagi limit munosabat

$$\sum_{a \le x_k < b} \varphi(x_k)(x_{k+1} - x_k) \to \int_a^b \varphi(x)dx \;; \quad n \to \infty \tag{36}$$

kelib chiqadi.

Endi (36) dagi yaqinlashish a va b larga nisbatan ($-T \le a < b \le T$ oraliqda) tekis bo`lishini isbotlaymiz. Haqiqatan ham quyidagi baholarga egamiz:

$$\left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi(x)dx - \varphi(x_k)(x_{k+1} - x_k) \right| \le \int_{x_k}^{x_{k+1}} |\varphi(x) - \varphi(x_k)| dx \le \int_{x_k}^{x_{k+1}} |\varphi'(\theta x_k)| (x - x_k) dx \le$$

$$\le \max_x |\varphi'(x)| \int_{x_k}^{x_{k+1}} (x - x_k) dx = \max_x |\varphi'(x)| \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{2} = O\left(\frac{1}{n} \right) \tag{37}$$

(35) va (37) munosabatlardan, (35) yig`indida qo`shiluvchilar soni $\sqrt{n}$ tartibga ega bo`lgani uchun, (36) munosabatdagi yaqinlashish tekis ekanligini olamiz. O`z navbatida (34) va (36) formulalardan

$$\lim_{n\to\infty} P\left(a \le \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} < b \right) = \int_a^b \varphi(x)dx$$

tenglikning to`g`ri va bunda yaqinlashish a va b sonlar bo`yicha ($-T \le a < b \le T$ oraliqda) tekis ekanligiga ishonch hosil qilamiz.

Amaliy tatbiqlarda (28) limit munosabatdan amaliyotda foydalanish uchun undagi yaqinlashish tezligini baholay olish kerak. Aytilgan tezlik (qoldiq hadning nolga intilish tartibi) qanday bo`lishligini tekshirish uchun simmetrik Bernulli sxemasini ko`ramiz. Bu holda $p = \frac{1}{2}$ va

$$S_n^* = \frac{S_n - \frac{n}{2}}{\frac{\sqrt{n}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}(2\xi_j - 1) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}\eta_j \ .$$

Bu erda $\eta_j = 2\xi_j - 1$ tasodifiy miqdor 1 va -1 qiymatlarni $\frac{1}{2}$ va $\frac{1}{2}$ ehtimollik bilan qabul qiladi va uning simmetrik ekanligidan

$$P\left(S_n^* < 0\right) = P\left(S_n^* > 0\right) = \frac{1 - P\left(S_n^* = 0\right)}{2}.$$

Shu bilan birga, Muavr-Laplasning lokal teoremasiga asosan, $P\left(S_n^* = 0\right) \to 0$ bo`lgani uchun, $n \to \infty$ da

$$P\left(S_n^* > 0\right) \to \frac{1}{2}. \qquad (38)$$

(38) munosabat Muavr-Laplasning integral teoremasidan ham kelib chiqadi, chunki $\Phi(0) = \frac{1}{2}$. Endi (38) da yaqinlashish tezligi qandayligini baholaymiz va shu maqsadda juft nomerli yig`indilarni o`rnatamiz.

$$P\left(S_{2n}^* > 0\right) - \frac{1}{2} = -P\left(S_{2n}^* = 0\right) = -\frac{1}{2}C_{2n}^n\left(\frac{1}{n}\right)^n$$

tenglikning o`rinli ekanligiga ishonch hosil qilish mumkin. Oxirgi tenglikning o`ng tomoni Stirling formulasiga ko`ra quyidagi

$$-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2\pi}\sqrt{2n}(2n)^{2n}e^{-2n}}{2\pi n n^{2n}e^{-2n}n^n} = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{n}}$$

nisbatga ekvivalent ekanligini topamiz. Demak (38) da yaqinlashish tezligining tartibi $\frac{1}{\sqrt{n}}$ ga teng bo`lar ekan.

4-misol. Korxonada ishlab chiqilgan buyumlar hajmi N ga teng bo`lgan partiyalarga ajratilib, keyin texnik kontrol bo`limiga yuboriladi. Partiyadagi n tadan ko`p buyumlar, $\alpha$ dan ($0 < \alpha < 1$) kichik bo`lmagan ehtimollik bilan yaroqsiz deb topilmasligi uchun, N sonini qanday tanlash kerak?

Echish. Ushbu

$$\xi_j = \begin{cases} 1, & agap \quad j-nchi \quad buyum \quad yaroqli \;\; bo`lsa; \\ 0, & aks \;\; holda, \end{cases}$$

formula orqali $\xi_1, \xi_2, \ldots$ o`zaro bog`liqsiz tasodifiy miqdorlar ketma-ketligini kiritaylik. Shu bilan birga

$$P(\xi_j = 1) = p, \qquad P(\xi_j = 0) = q = 1 - p$$

bo`lsin. U holda

$$S_N = \xi_1 + \ldots \xi_N$$

partiyadagi yaroqli buyumlar soni bo`ladi. Masalaning shartiga ko`ra, N ni shunday tanlash keraki, natijada

$$P(S_N \geq n) \geq \alpha$$

tengsizlik bajarilsin.

Agar

$$S_N^* = \frac{S_N - Np}{\sqrt{Npq}}$$

deb qabul qilsak

$$P(S_N \geq n) = P\left(S_N^* \geq \frac{(n - Np)}{\sqrt{Npq}} \right)$$

bo`ladi. $n = Np - \delta\sqrt{Npq}$ deylik. U holda

$$P(S_N \geq n) = P\left(S_N^* \geq -\delta\right).$$

Endi N va n sonlarni etarlicha katta deb

$$P\left(S_N^* < x\right) \cong \Phi(x)$$

munosabatdan foydalanishimiz mumkin. Aytilganlardan so`ng δ ni shunday tanlaymizki

$$1 - \Phi(-\delta) \geq \alpha$$

bo`lsin. U holda N ni n orqali ifoda qilish mumkin. Buning uchun

$$n = Np - \delta\sqrt{Npq}$$

tenglamani echish kerak. Oxirgi tenglama $\sqrt{N}$ ga nisbatan kvadrat tenglama va uning musbat echimini olib, katta n lar uchun

$$N = \left(4np + 2\delta\sqrt{pq}\sqrt{\delta^2 pq + 4np} + \frac{2\delta^2 pq}{4p^2} \right) \sim \frac{1}{p}\left(n + \delta\sqrt{q}\sqrt{n}\right)$$

ifodani hosil qilamiz.

Puasson teoremasi.

Oldingi paragrifdagi Muavr-Laplas teoremasining isboti davomida keltirilgan baholar shuni ko`rsatadiki, binomial taqsimotni normal qonun bilan approksimasiyalash $npq$ ifodaning ($S_n$ ning dispersiyasi) katta qiymatlarida yaxshi natijalar beradi. Bu esa, o`z navbatida n ning katta qiymatlarida va p ning 0 va 1 dan farqli fiksirlangan qiymatlarida ro`y beradi. Aytaylik $n = 1000$ $p = 0{,}001$, yani $np = 1$ bo`lsin. Bu holda, albatta, Muavr-Laplas teoremasini qo`llash hech qanday manoga ega emas. Quyida ko`ramizki, $P(S_n = k)$ taqsimotni bunday hollarda

$$\pi_k = \frac{\lambda^k}{ki} e^{-\pi} \ , \quad \lambda = np \ , \ k = 0,1,2,...$$

Puasson taqsimoti bilan ifodalash maqsadga muvofiq bo`lar ekan.

Birinchi navbatda shu narsani qayd qilib o`tish kerakki, approksimasiyalash haqidagi masalani qo`yilishi Muavr-Laplas teoremasidagi holatidan butunlay farq qiladi, chunki Puasson taqsimotining parametri $\lambda = np$ n ning qiymatlarida chegaralangan son $p = P(\xi_k = 1)$ ehtimollik nolga yaqin bo`lishi kerak. Buni esa bitta fiksirlangan Bernulli tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ bilan tamin etib bo`lmaydi. Aytilgan maqsadni amalga oshirish uchun quyidagi tasodifiy miqdorlarning seriyalar ketma-ketligini ko`ramiz:

$$\xi_1^{(1)};$$
$$\xi_1^{(2)},\ \xi_2^{(2)};$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\xi_1^{(n)},\ \xi_2^{(n)}, \ldots, \xi_n^{(n)}.$$

Bu erda yuqoridagi indeks seriyaning nomerini, pastdagi indeks esa seriyadagi tasodifiy miqdorning nomerini bildiradi. Keltirilgan sxema tasodifiy miqdorning ***seriyalar sxemasi*** dab yutitiladi.

Faraz qilaylik, n seriyadagi tasodifiy miqdorlar Bernulli sxemasini tashkil qilsin, yani $\xi_j^{(n)}$ lar o`zoro bog`liqsiz va

$$P\left(\xi_j^{(n)} = 1\right) = p_n \ , \qquad P\left(\xi_j^{(n)} = 0\right) = 1 - p_n = q_n$$

6-Teorema. (Puasson teoremasi). Agar $n \to \infty$ da $np_n \to \lambda > 0$ bo`lsa, u holda

$$\sup_{0 \le k \le n} \left| P(S_n = k) - \pi_k \right| \to 0 \ , \ n \to \infty .$$

6-teoremani isbotlashdan oldin ushbu tengsizlikni isbotlaymiz.

Lemma. Agar a_j, $j = 1,2,\ldots,n$ sonlar, $0 \le a_j \le 1$ tengsizlikni qanoatlantirsa, u holda

$$(1 - a_1)(1 - a_2)\ldots(1 - a_n) \ge 1 - (a_1 + \ldots + a_n) \qquad (29)$$

bo`ladi.

(29) tengsizlikni matematik induksiya usuli bilan isbotlaymiz. $n=1$ uchun (29) o`z-o`zidan to`g`ri. Faraz qilaylik $n=k$ da (29) tengsizlik o`rinli bo`lsin. U holda

$$(1-a_1)(1-a_2)\dots(1-a_k)(1-a_{k+1}) \geq [1-(a_1+\dots+a_k)](1-a_{k+1}) =$$
$$=1-(a_1+\dots+a_{k+1})-a_{k+1}+(a_1+\dots+a_k)a_{k+1} \geq 1-(a_1+\dots+a_{k+1}),$$

yani (29) tengsizlik $n=k+1$ da ham to`g`ri ekan. Lemma isbotlandi.

Endi

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

ifodaning asimptotikosini o`rganamiz. Birinchidan $C_n^k = C_n^{n-k}$ ekanligidan $k \leq \frac{n}{2}$ qiymatlarini ko`rish etarli bo`ladi. Quydagi tenglikni yozamiz:

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n^k}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \tag{30}$$

Lemmadagi (29) tengsizlikni qo`llab ushbu

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \geq 1-\left(\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\dots+\frac{k-1}{n}\right) = 1-\frac{k(k-1)}{2n} \tag{31}$$

munosabatini olamiz. (30) va (31) munosabatlardan

$$1-\frac{k(k-1)}{2n} \leq \frac{C_n^k}{n^k k!} \leq 1, \qquad 0 \leq k \leq n \tag{32}$$

tengsizlikning o`rinli ekanligi kelib chiqadi. $P(S_n = k) = C_n^k p_n^k q_n^{n-k}$ bo`lgani uchun (32) tengsizlikdan quydagi bahoni olamiz:

$$\left[1-\frac{k(k-1)}{2n}\right]\frac{n^k}{k!} p_n^k q_n^{n-k} \leq P(S_n = k) \leq \frac{n^k}{k!} p_n^k q_n^{n-k} \tag{33}$$

Teoremaning shartiga ko`ra har qanday fiksirlangan k uchun $n \to \infty$ da

$$(np_n)^k \to \lambda^k \quad , \qquad q_n^{-k} = (1-p_n)^{-k} \to 1 \tag{34}$$

$$q^n = \left(1-\frac{np_n}{n}\right)^n \to e^{-\lambda} \tag{35}$$

(Agar α_n ketma–ketlik $n \to \infty$ da α ga yaqinlashsa, u holda $\left(1+\frac{\alpha_n}{n}\right)^n \to e^{\alpha}$ munosabatning o`rinli ekanligi bizga analiz kursidan malum. Bizning holda $\alpha_n = -np_n \to -\lambda$).

Endi har qanday k uchun

$$1-\frac{k(k-1)}{2n} \to 1 \;, \quad n \to \infty$$

ekanligini hisobga olib va (33) tengsizlikda (34) va (35) munosabatlarni qo`llab

$$P(S_n = k) \to \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \qquad n \to \infty$$

ekanligiga ishonch hosil qilamiz. Teorema isbotlandi.

5-misol. Telefon stansiyasi 1000 abonentga hizmat qiladi. Malum vaqt oralig\`ida xoxlagan abonent qolganlaridan bog\`liqsiz holda 0,005 ehtimollik bilan “chaqiriq” berilishi mumkin. Shu vaqt oralig\`ida qilgan “chaqiriqlar” 7 dan ko\`p bo\`lmaslik ehtimolligi topilsin.

Echish. Axtarilayotgan ehtimollik

$$P(S_n \le 7) = P(S_n = 0) + P(S_n = 1) + \ldots + P(S_n = 7)$$

yig\`indiga teng. Bizning holda $n = 1000$, $p = 0{,}005$ va $np = 5$. Puasson teoremasidan foydalansak,

$$P(S_n \le 7) \cong e^{-5}\left(1 + 5 + \frac{5^2}{2} + \frac{5^3}{6} + \frac{5^4}{24} + \frac{5^5}{120} + \frac{5^6}{720} + \frac{5^7}{5040}\right) \cong 0{,}867$$

ekanligini topamiz.

11-qizm. Tasodifiy miqdorlar va taqsimot funksiyalar

10-Maruza. Tasodifiy miqdorlar

Ehtimollar nazariyasining asosiy tushunchalaridan biri tasodifiy miqdor tushunchasidir. Tasodifiy miqdor bu tasodifga bog\`liq holda u yoki bu son qiymatlarni qabul qiluvchi miqdor. Masalan, o\`yin soqqasini tashlaganda tushgan ochkolar soni, tavakkaliga olingan n ta mahsulotlar ichidagi yaroqsizlarining soni, n ta o\`q uzulganda nishonga tekkan o\`qlar soni, asbobning beto\`xtov ishlash vaqti va hakozolar tasodifiy miqdorlarga misol bo\`la oladi. ξ - tasodifiy miqdor, tajribaning harbir mumkin bo\`lgan oqibatiga mos qo\`yilgan sondan iborat. Tajriba natijalarining to\`plami elementar hodisalar bilan tariflangani tufayli tasodifiy miqdorga $\Omega$ elementar hodisalar fazosining $\xi = \xi(\omega)$ funksiyasi sifatida qarash mumkin. Tasodifiy miqdorning tarifini keltirishdan avval bir qancha misollar ko\`ramiz.

1-Misol. Tajriba tangani 2 marta tashlashdan iborat. Elementar hodisalar maydoni

$$\Omega = \{gg, gr, rg, rr\}$$

ko\`rinishga ega. $\xi$-gerb chiqishlar soni bo\`lsin. ξ ning miqdori elementar hodisalarning $\xi = \xi(\omega)$ funksiyasidan iborat. $\xi(\omega)$ funksiyaning qiymatlar jadvali ushbu ko\`rinishga ega:

ω	gg	gr	rg	rr
$\xi(\omega)$	2	1	1	0

2-Misol. Tanga birinchi bor gerb chiqqunicha tashlansin. Bu holda

$$\Omega = \{г, pг, ppг, pppг,.., ppp...г,...\} = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n, ...\}.$$

ξ- tanga tashlashlar soni bo\`lsin. U holda $\xi$ elementar hodisalarning funksiyasi bo\`lib, agar $\omega = \omega_n$ $(n = 1,2,...)$ bo\`lsa, $\xi(\omega) = n$ bo\`ladi.

3-Misol. Radiusi *R* ga teng bo\`lgan doiraviy tekis ekranda tasodifiy ravishda zarracha paydo bo\`lish hodisasi kuzatilayotgan bo\`lsin. $\xi$ orqali zarrachadan ekran markazigacha bo\`lgan masofani belgilaylik Bu holda $\Omega = \{\omega; \omega = (x, y); x^2 + y^2 \le R\}$ – to\`plamdan iborat bo\`ladi. ξ elementar hodisalarning funksiyasi bo\`lib, $\xi(\omega) = x^2 + y^2$ tenglik o\`rinli.

Yuqorida ko\`rilgan misollar tasodifiy miqdorni elementar hodisalar fazosining funksiyasidan iborat deb izohlash mumkin ekanligini ko\`rsatadi. Ammo Ω da aniqlangan ihtiyoriy funksiyani tasodifiy miqdor deb qarash mumkin emas. Amaliyotda ko\`pincha $\xi(\omega)$ tasodifiy miqdorning qiymati u yoki bu to\`plamga tegishli bo\`lish ehtimoli nimaga teng degan savolga javob berishga to\`g\`ri keladi. Demak, sonlar o\`qidagi etarlicha keng $\{B\}$ to\`plamlar sinfi uchun, biz $\{\omega; \xi(\omega) \in B\}$ to\`plam hodisalarning $\mathcal{A}$ σ-algebrasiga tegishli bo\`lishiga va, demak $P(\{\omega; \xi(\omega) \in B\})$ ehtimolni hisoblash mumkin ekanligiga ishonch hosil qilishimiz kerak.

1-Tarif. $(\Omega, \mathcal{A}, P)$– ehtimollik fazosi va $\xi = \xi(\omega)$ Ω da aniqlangan sonli funksiya bo\`lsin. Agar har qanday haqiqiy x uchun

$$\{\omega; \xi(\omega) \le x\} \in \mathcal{A} \qquad (1)$$

munosabat o\`rinli bo\`lsa, u holda bunday $\xi = \xi(\omega)$ funksiyaga **tasodifiy miqdor** deyiladi.

Funksional analiz kursidan malumki (1) shartni qanoatlantiruvchi Ω da aniqlangan $\xi = \xi(\omega)$ funksiyaga $\mathcal{A}$ σ–algebraga nisbatan **o\`lchovli** funksiya deyiladi. Shunday qilib $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ fazodagi tasodifiy miqdor $\mathcal{A}$ $\sigma$-algebraga nisbatan o\`lchovli funksiyadan iborat.

2-Tarif. Ihtiyoriy $x \in R$ son uchun aniqlangan

$$F(x) = F_\xi(x) = P(\{\xi \le x\})$$

funksiyaga ξ tasodifiy miqdorning **taqsimot funksiyasi** deyiladi.

Tasodifiy miqdorning yana bir eng sodda misoli sifatida $A \in \mathcal{A}$ **hodisaning** $I_A(\omega)$ **indikatorini** qarash mumkin;

$$I_A = I_A(\omega) = \begin{cases} 1, агар\, \omega \in A, \\ 0, агар\, \omega \notin A. \end{cases}$$

$$\{\omega; \xi(\omega) \le x\} = \begin{cases} \varnothing, x < 0, \\ \overline{A}, 0 \le x < 1; \\ \Omega, x \ge 1 \end{cases} \qquad (2)$$

munosabatdan $I_A(\omega)$ funksiyaning tasodifiy miqdor ekanligi kelib chiqadi. Uning taqsimot funksiyasi (2) munosabatga ko`ra

$$F(x)=\begin{cases}0, x<0,\\ P(\overline{A}), 0\le x<1,\\ 1, x\ge 1\end{cases}$$

ko`rinishga ega.

Endi $A_i \in \mathcal{A}$, $A_i \cap A_j = \varnothing$, $i \neq j$, $\sum_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega$ bo`lsin, u holda

$$\xi(\omega)=\sum_{i=1}^{\infty} x_i I_{A_i}(\omega); x_i \in R \qquad (3)$$

Ko`rinishda ifodalangan tasodifiy miqdorga **diskret tasodifiy miqdor** deyiladi. Agar (3) yig`indi chekli bo`lsa, u holda bunday tasodifiy miqdorga **sodda** (yoki **elementar**) tasodifiy miqdor deyiladi.

Tasodifiy miqdorlarning yana bir qancha misollarini ko`ramiz.

4-Misol. Simmetrik bir jinsli tanga tashlansin. Bu holda $\Omega=\{\omega_1,\omega_2\}$ bo`lib, bu erda $\omega_1=$“g”, $\omega_2=$“r”, $\mathcal{A}$ esa $\Omega$ ning barcha qism to`plamlaridan iborat, $P(\{\omega_1\})=P(\{\omega_2\})=\frac{1}{2}$.

$$\xi(\omega)=\begin{cases}1, \omega=\omega_1,\\ -1, \omega=\omega_2\end{cases}$$

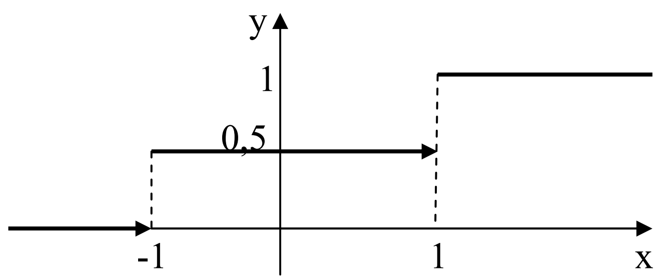
deylik. Bu holda

$$\{\omega;\xi(\omega)\le x\}=\begin{cases}\varnothing, x<-1;\\ \{\omega_2\}, -1\le x<1;\\ \Omega, x\ge 1\end{cases}$$

munosabat o`rinli. Shunday qilib, $\xi(\omega)$-tasodifiy miqdor. Uning taqsimot funksiyasi

$$F_\xi(x)=\begin{cases}0, x<-1,\\ 1/2, -1\le x<1,\\ 1, x\ge 1\end{cases}$$

ko`rinishga ega. Uning grafigi 7-shaklda keltirilgan.



7-shakl

5-Misol. $[a,b]$ kesmaga tasodifiy ravishda nuqta tashlansin, yani nuqta $[a,b]$ kesmaning birorta qism to`plamiga tushish ehtimoli u to`plamning Lebeg o`lchoviga proporsional bo`lsin. Bunda $\Omega-[a,b]$ kesmaga teng bo`lib, $\mathcal{A}$ esa $[a,b]$ kesmadagi barcha Borel to`plamlaridan iborat bo`ladi $\xi=\xi(\omega)$ funksiyani

$$\xi(\omega)=\omega, \omega\in[a,b]$$

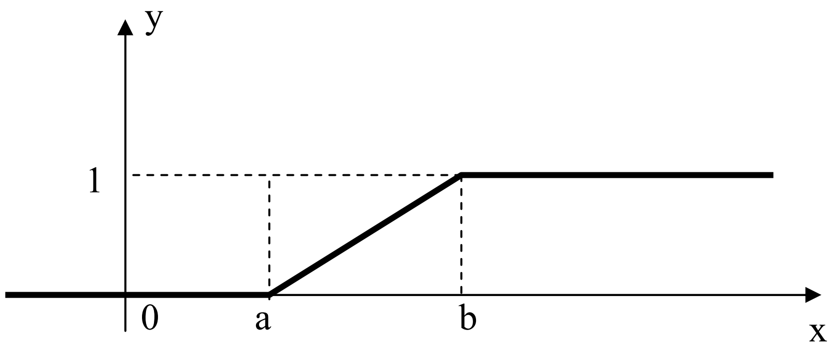
formula orqali belgilaymiz, yani ξ-$[a,b]$ oraliqqa tushgan nuqtaning koordinatasidan iborat.

$$\{\omega;\xi(\omega)\le x\}=\begin{cases}\varnothing, x<a;\\ [a,x], a\le x<b;\\ \Omega=[a,b], x\ge b\end{cases}$$

munosabatning o`rinli ekanligini ko`rish qiyin emas. Shunday qilib, harqanday $x\in R$ uchun $\{\omega;\xi(\omega)\le x\}\in\mathcal{A}$, yani $\xi(\omega)$ tasodifiy miqdor. $\xi(\omega)$ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi

$$F_\xi(x)=\begin{cases}0, x<a;\\ \dfrac{x-a}{b-a}, a\le x<b;\\ 1, x\ge b.\end{cases}$$

Bu taqsimot funksiya (8-shakl) $[a,b]$ oraliqda tekis taqsimlangan tasodifiy miqdorning taqsimotini aniqlaydi.



8-shakl

Endi ehtimollar fazosi va unda aniqlangan tasodifiy miqdor bo`lmagan funksiyaga misol keltiramiz.

6-Misol. $\Omega=[0,1]$, $\mathcal{A}$-$[0,1]$ oralig`idagi Lebeg o`lchovli to`plamlarning $\sigma$-algebrasi bo`lsin. $P(A)=\lambda(A)$, $A\in\mathcal{A}$ deymiz, bu erda $\lambda(A)$ - A to`plamning Lebeg o`lchovi. U holda *(Ω,$\mathcal{A}$,P)*-ehtimolliklar fazosi. $E-[0,1]$ oralig`idagi Lebeg bo`yicha o`lchovsiz to`plam bo`lsin*. $\xi(\omega)=I_E(\omega)$-$E$ to`plamning indikatori. U holda, agar

* T.A.Sarimsoqov. Haqiqiy o`zgaruvchining funktsiyalari nazariyasi. Toshkent, “O`qituvchi”, 1968 y. darsligining 60-§ ga qaralsin.

$0 \le x < 1$ bo`lsa $\{\omega;\ \xi(\omega) \le x\} = \overline{E} \notin \mathcal{A}$. Demak yuqorida tasvirlangan *(Ω,A,P)* fazoda aniqlangan $\xi(\omega)$ funksiya tasodifiy miqdor emas.

$\xi(\omega)$ - *(Ω,A,P)* ehtimollar fazosida aniqlangan tasodifiy miqdor va $B \subseteq R$ - sonlar o`qidagi to`plam bo`lsin. $\mathcal{A}_\xi$ orqali ushbu

$$\mathcal{A}_\xi = \{ B; B \subseteq R; \xi^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$$

to`plamlar sinfini belgilaylik, bu erda $\xi^{-1}(B) = \{\omega; \xi(\omega) \in B\}$ - $B$ to`plamining proobrazi. Avvalo shuni aytish lozimki, $\xi(\omega)$ tasodifiy miqdorning tarifidan $B = (-\infty; x]$, $x \in R$ ko`rinishdagi yarim intervallar $\mathcal{A}_\xi$ sinfga tegishli ekanligi kelib chiqadi.

Ushbu teorema Borel to`plamlarining $\sigma$-algebrasi $\mathcal{A}_\xi$ sinfida yotishini ko`rsatadi.

1-Teorema. *(Ω,A,P)* ehtimollik fazosi, ξ undagi tasodifiy miqdor, B esa sonlar o`qidagi ihtiyoriy Borel to`plami bo`lsin. U holda

$$\xi^{-1}(B) = \{\omega; \xi(\omega) \in B\} \in \mathcal{A}$$

munosabat orinli, yani har qanday Borel to`plamining proobrazi tasodifiy hodisadan iborat.

Isboti. $a, в; a \le b$ ihtiyoriy haqiqiy sonlar bo`lsin. U holda $\{\omega; \xi(\omega) \in (a,b]\} = \{\omega; a < \xi(\omega) \le b\} = \{\omega; \xi(\omega) \le b\} \setminus \{\omega; \xi(\omega) \le a\}$ tengliklardan $\xi^{-1}((a,b]) = \xi^{-1}((-\infty, b]) \setminus \xi^{-1}((-\infty, a]) \in \mathcal{A}$ munosabatning o`rinli ekanligi kelib chiqadi. Demak $(a, в]$ ko`rinishidagi barcha yarim intervallar $\mathcal{A}_\xi$ to`plamga tegishli. Shu bilan birga R sonlar o`qidagi ihtiyoriy $B, B_1, B_2, \ldots$ to`plamlar uchun

$$\xi^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \xi^{-1}(B_i), \qquad (4)$$

$$\xi^{-1}\left(\overline{B}\right) = \overline{\xi^{-1}(B)}, \qquad (5)$$

$$\xi^{-1}(R) = \Omega \qquad (6)$$

---

tengliklar o`rinli ekanligini osongina isbotlash mumkin. (4)-(6) tengliklardan $\mathcal{A}_\xi$ to`plamlar sinfi barcha $(a.в]$ yarim intervallarni o`z ichiga oluvchi $\sigma$-algebra ekanligi kelib chiqadi. Borel to`plamlarining σ-algebrasi , $(a,b]$ ko`rinishidagi barcha yarim intervallarni o`z ichiga oluvchi minimal σ–algebra bo`lgani uchun $B \subseteq \mathcal{A}_\xi$. Shunday qilib teoremaning davosi ihtiyoriy $B$ Borel to`plami uchun o`rinli.

3-Tarif. *(R,B(R))*–sonli tўғri chiziқ va undagi Borel to`plamlaridan tashkil topgan $\Re$=B*(R)* $\sigma$-algebra bo`lib, $\xi = \xi(\omega)$ *(Ω,A,P)* fazoda aniqlangan tasodifiy miqdor bo`lsin.

(R, B (R)) o1lchovli fazoda

$$P_\xi(B)=P(\{\omega;\xi(\omega)\in B\}), B\in \mathcal{B}\ (R)$$

formula orqali aniqlangan P_ξ-ehtimollik o`lchoviga ξ tasodifiy miqdorning **ehtimollik taqsimoti** deyiladi.

Sunday qilib har qaysi ξ tasodifiy miqdor yangi $(R, B(R), P_\xi)$ ehtimollar fazosini vujudga keltiradi.

11-Maruza. Taqsimot funksiyalarning xossalari. Misollar.

$F(x)-\xi$ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi bo`lsin. U holda $F(x)$ taqsimot funksiya quyidagi xossalarga ega:

F1. Monotonlik xossasi: agar $x_1 \le x_2$ bo`lsa $F(x_1)\le F(x_2)$ bo`ladi.

F2. $F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0; F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1,$

F3. O`ngdan uzluksizlik xossasi: $\lim\limits_{x\to x_0+0}F(x)=F(x_0).$

Isboti. F1 xossaning isboti $\{\xi\le x_1\}\subseteq\{\xi\le x_2\}$ munosabatdan va ehtimolning 3) asosiy xossasidan kelib chiqadi. F2 xossani isbotlash uchun biz ikkita $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ sonli ketma-ketliklarni qaraymiz, bunda x_n ketma-ketlik -∞ ga monoton kamayadi ($x_n\downarrow-\infty$), y_n esa $+\infty$ ga monoton o`sadi ($y_n\uparrow+\infty$). Agar $A_n=\{\omega;\ \xi(\omega)\le x_n\}$ va $B_n=\{\omega;\ \xi(\omega)\le y_n\}$ deb belgilasak $A_n\downarrow\varnothing$ va $B_n\uparrow\Omega$ bo`lgani uchun F2 xossa ehtimolning quyidan va yuqoridan uzluksizlik xossalaridan kelib chiqadi (1.1-teoremaning 4 va 2 punktlariga qaralsin).

F3 xossa ham xuddi F2 kabi isbotlanadi: $A=\{\omega;\ \xi(\omega)\le x_0\}$ $A_n=\{\omega;\ \xi(\omega)\le x_n\}$ bo`lsin, bu erda $\{x_n\}$ ketma-ketlik monoton kamayuvchi bo`lib $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$ tenglik o`rinli. Demak $A_n$ hodisalar ketma-ketligi monoton kamayuvchi bo`lib $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n=A$ tenglik o`rinli bo`lgani sababli (yani $A_n\downarrow A$) 1.1 teoremaning 3) punktiga ko`ra $\lim\limits_{n\to\infty}P(A_n)=P(A)$ yoki $\lim\limits_{x\downarrow x_0}F(x)=F(x_0)$ tenglik kelib chiqadi.

$F(x)=F_\xi(x)$ funksiya umuman olganda chapdan uzluksiz emas, chunki ehtimolning o`ngdan uzluksizlik xossasidan

$$p_x=F(x)-F(x-0)=\lim_{n\to\infty}\big(F(x)-F(x-1/n)\big)=\lim_{n\to\infty}P(x-1/n<x\le x)=$$

$$=P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{\xi\in(x-1/n,x]\}\right)=P(\{\xi=x\})$$

tenglik o`rinli.

Bundan barcha $x\in R$ sonlar uchun $P\{\xi=x\}=0$ tenglik o`rinli bo`lsa va faqat shu holdagina $F_\xi(x)$ funksiyaning uzluksiz ekanligi kelib chiqadi.

Shunday qilib $p_0=P(\{\xi=x_0\})=F(x_0)-F(x_0-0)$ tenglikdan $F(x)$ funksiyaning uzulish nuqtalarida $p_0>0$ tengsizlikning o`rinliligi kelib chiqadi. Har qanday natural $n$ soni uchun $F(x)$ funksiyaning $p_0 = P(\{\xi = x_0\}) \geq \frac{1}{n}$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi uzilish nuqtalarining soni $n$ dan katta bo`lmagani sababli, taqsimot funksiyaning uzilish nuqtalari to`plami ko`pi bilan sanoqli bo`lishi kelib chiqadi.

$F_\xi(x) = F(x)$ taqsimot funksiyaning uzilish nuqtalarini $x_1, x_2, ...$ orqali belgilaylik. Agar ξ–diskret tasodifiy miqdor bo`lsa $p_k = p_{xk} = P(\{\xi = x_k\}), \ k = 1,2,...$ ehtimollar

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1 \qquad (7)$$

tenglikni qanoatlantiradi va aksincha. Agar $p_k, \ \ k = 1,2,...$ ehtimollar (7) tenglikni qanoatlantirsa, u holda ξ tasodifiy miqdor diskret tasodifiy miqdor bo`ladi.

ξ-diskret tasodifiy miqdorning P_ξ taqsimoti eng ko`pi bilan sanoqli sondagi $x_k$ nuqtalarda to`plangan bo`lib uni

$$P_\xi(B) = \sum_{\{k; x_k \in B\}} p(x_k)$$

ko`rinishida ifodalash mumkin.

Endi amaliyotda eng ko`p uchraydigan diskret taqsimotli tasodifiy miqdorlarni keltiramiz.

Binomial taqsimot. Agar diskret tasodifiy miqdor ξ uchun $x_k = k, \ k = 0,1,...,n$ bo`lib

$$p_k = P(\{\xi = k\}) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, 0 < p < 1$$

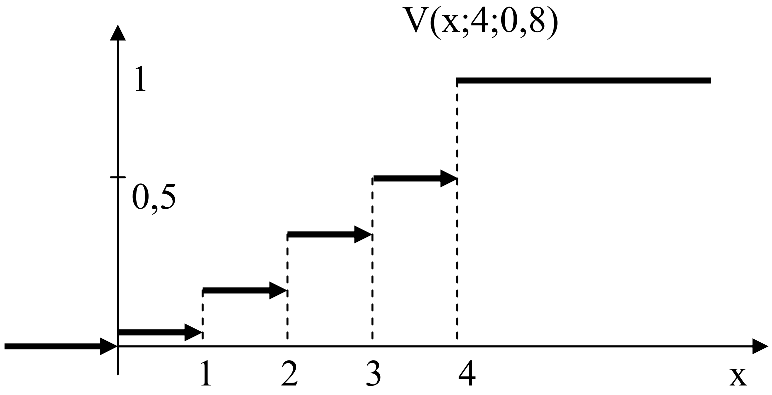
bo`lsa, u holda ξ tasodifiy miqdorga (n, p) parametrli binomial tasodifiy miqdor $P_n(k) = p_k$ ehtimollarga esa (n, p) parametrli binomial taqsimot deyiladi. (n, p) parametrli binomial tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi

$$B(x, n, p) = \sum_{k \leq x} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, x \in R$$

ko`rinishga ega. Binomial taqsimot $n$ ta bog`liqsiz tajribada kuzatilayotgan A hodisaning ro`y berishlar soni $\mu_n$ ni $A$ hodisaning har bir tajribada ro`y berish ehtimolligi p bo`lgan holdagi taqsimotidan iborat.

7-Misol. Oraliq nazorat uchun o`tqazilayotgan yozma ishda student $n = 4$ ta masala oldi. Har bir masalani to`g`ri echish ehtimoli 0,8 bo`lsin. μ orqali to`g`ri echilgan masalalar sonini belgilaylik. Bu holda biz (4;0,8) parametrli binomial taqsimotga egamiz. Uning taqsimot qonuni va taqsimot funksiyasi quyidagi jadvalda va 9 shaklda keltirilgan

μ	0	1	2	3	4
P_μ	0,0016	0,0256	0,1536	0,4096	0,4096



9-shakl.

(n,p) parametrli binomial taqsimotni maksimallashtiruvchi k sonini, yani ro`y berishlar soni $\mu_n$ ning eng katta ehtimol bilan qabul qiluvchi qiymatini topamiz. Buning uchun quyidagi nisbatni ko`ramiz:

$$\frac{P_n(k)}{P_n(k-1)} = \frac{n-k+1}{k} \cdot \frac{p}{1-p} = 1 + \frac{(n+1)p-k}{k(1-p)}.$$

Agar $k<(n+1)p$ bo`lsa, $P_n(k) > P_n(k-1)$ yani, $k$ o`sishi bilan $P_n(k)$ funksiya monoton o`sadi; agar $k>(n+1)p$ bo`lsa $P_n(k) < P_n(k-1)$ yani $P_n(k)$ ehtimollar monoton kamayadi. $m = [(n+1)p] - (n+1)p$ sonidan katta bo`lmagan eng katta butun son bo`lsin, u holda $k=m$ da $P_n(k)$ ehtimol eng katta qiymatga erishadi. Agar $(n+1)p$ butun son bo`lsa, $P_n(k)$ ehtimolni maksimallashtiradigan k ning qiymati ikkita: $k=(n+1)p$ va $k=(n+1)p-1$.

Yuqorida 7-misolda $(n+1)p$=5·0,8=4 bo`lgani uchun $P_4(k)$ ni maksimallashtiruvchi k ning qiymati ikkita $k=3$ va $k=4$. Bunda $P_4(k)$=0,4096. Shunday qilib student 3 ta yoki 4 ta masalani echish ehtimoli 0,8192 ga teng.

Puasson taqsimoti. Agar ξ-diskret tasodifiy miqdor x_k: 0,1,2,... qiymatlarni

$$p_k = \pi(k;\lambda) = P(\{\xi = k\}) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}; \lambda > 0$$

ehtimollar bilan qabul qilsa, uni λ parametrli Puasson qonuni bo`yicha taqsimlangan tasodifiy miqdor yoki qisqacha Puasson tasodifiy miqdori deyiladi.

λ parametrli Puasson qonuni bo`yicha taqsimlangan tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi

$$\Pi(x;\lambda) = \sum_{k \le x} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, x \in R$$

ko`rinishga ega.

Puasson taqsimoti bazan kam uchraydigan hodisalar qonuni degan nom bilan ham ataladi, chunki u har doim ko`p tajriba o`tqazilib, ularning har birida kuzatilayotgan hodisaning ehtimoli kichik bo`lgan hollarda uchraydi.

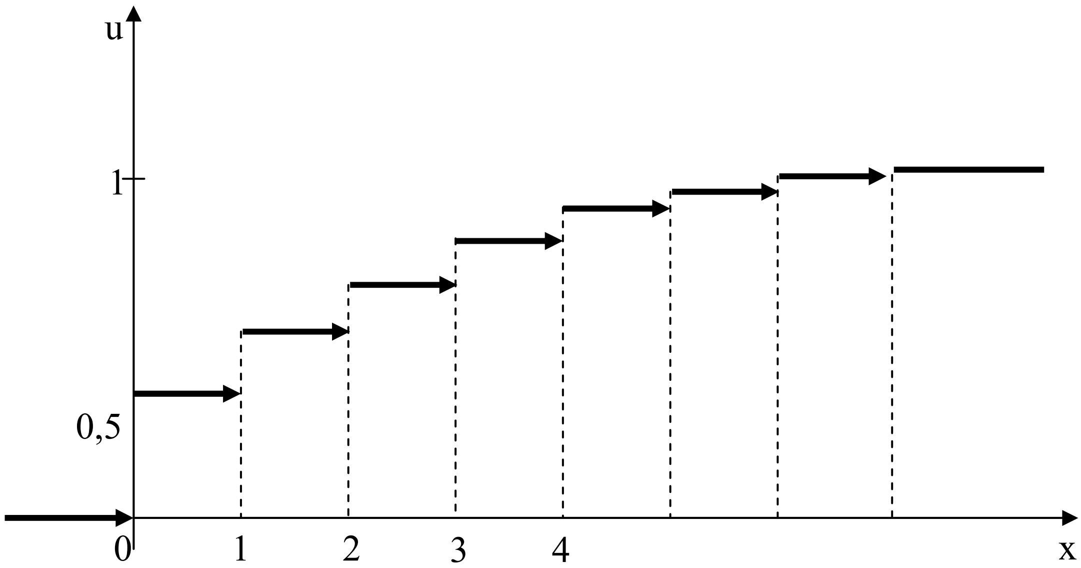
Geometrik taqsimot. Agar ξ tasodifiy miqdor x_k : 0,1,2,... qiymatlarni

$$\Gamma(k;p) = p_k = P(\{\xi = k\}) = p(1-p)^k ; 0 < p < 1 \qquad (8)$$

ehtimollar bilan qabul qilsa, uni p parametrli geometrik qonun bo`yicha taqsimlangan tasodifiy miqdor deyiladi.

8-Misol. O`tqazilayotgan fizikoviy tajribada kutilayotgan natija chiqish ehtimoli 0,4 bo`lsin. ξ orqali kutilgan natija birinchi marta chiqquncha o`tkazilgan tajribalar sonini belgilaylik. U holda ξ tasodifiy miqdor 0,4 parametrli geometrik taqsimotga ega. Quyida uning (8) formula orqali hisoblangan taqsimot qonuni va taqsimot funksiyasi (10 shakl) keltirilgan:

ξ	0	1	2	3	. . .
P_ξ	0,4	0,24	0,144	0,0864	. . .



10-shakl.

ξ-geometrik qonun bo`yicha taqsimlangan tasodifiy miqdor bo`lsin, u holda

$$P(\{\xi = n+m / \xi \geq n\}) = P(\{\xi = m\}), m = 1,2,... \qquad (9)$$

tenglik o`rinli.

Darhaqiqat,

$$P(\{\xi = n+m / \xi \geq n\}) = \frac{P(\{\xi = n+m, \xi \geq n\})}{P(\{\xi \geq n\})} = \frac{P(\{\xi = n+m\})}{P(\{\xi \geq n\})} =$$

$$= \frac{p(1-p)^{n+m}}{\sum_{k=n}^{\infty}(1-p)^k} = p(1-p)^m = P(\{\xi = m\}).$$

(9) tenglikni yuqorida keltirilgan misolda sharhlaylik. 8-misolda ξ tasodifiy miqdorni natijani ‘’kutish” vaqti deb sharhlash mumkin. Bu holda (9) tenglikni $(n-1)$ ta tajribada natija chiqmaganlik shartida, yana $m-1$ ta tajribadan so`ng birinchi marta natija chiqish ehtimoli $m$ chi tajribada birinchi marta natija chiqish sharsiz ehtimoliga teng deb izohlash mumkin. Bu (9) tenglik bilan ifodalanadigan xossa **so`nggi tasirning yo`qligi** deb ataladi.

Kezi kelganda shuni qayd qilish lozimki barcha diskret taqsimotlar ichida, faqat geometrik taqsimotgina so`nggi tasirning yo`qlik xossasiga ega.

12-Maruza. Uzluksiz tasodifiy miqdorlar.

Agar ξ tasodifiy miqdorning $F_\xi(x)$ taqsimot funksiyasi barcha $x \in R$ nuqtalarda uzluksiz bo`lsa, u holda bunday tasodifiy miqdorga uzluksiz tasodifiy miqdor deyiladi.

4-Tarif. Agar ξ uzluksiz tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasini

$$F(x) = F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} p(u)du \qquad (10)$$

ko`rinishda ifodalash mumkin bo`lsa, bunday tasodifiy miqdorga **absolyut uzluksiz** tasodifiy miqdor deyiladi. Bu erdagi $p(x)$ funksiyaga ξ tasodifiy miqdorning **zichlik funksiyasi** deyiladi.

(10) tenglikdan zichlik funksiyaning quyidagi xossalari kelib chiqadi:

1^0) $F'(x) = p(x)$;

2^0) $p(x) \geq 0$;

3^0) $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1$;

4^0) $\int_{x_1}^{x_2} p(x)dx = F(x_2) - F(x_1) = P(\{x_1 \leq \xi \leq x_2\}), x_1 \leq x_2.$

Endi eng ko`p ishlatiladigan absolyut uzluksiz tasodifiy miqdorlarni keltiramiz.

Tekis taqsimot. $[a,b]$ oralig`ida tekis taqsimlangan tasodifiy miqdor (5-misolga qarang) absolyut uzluksiz tasodifiy miqdor bo`lib, uning zichlik funksiyasi

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, a \leq x \leq b, \\ 0, x < a; \text{ёки} x > b \end{cases}$$

ko`rinishga ega (11 shakl).

11-shakl.

Tekis taqsimlangan tasodifiy miqdorning $[a,b]$ oraliqning ichidagi (x_1, x_2) intervalga tushish ehtimoli, $F(x_2) - F(x_1) = \frac{(x_2 - x_1)}{(b-a)}$ ga teng bo`lib, u shu intervalning uzunligiga proporsional.

Eksponensial taqsimot.

$$p(x) = \begin{cases} 0, x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, x \geq 0, \end{cases}$$

zichlik funksiyaga ega bo`lgan tasodifiy miqdorga $\lambda$; $(\lambda > 0)$–parametrli eksponensial qonun bo`yicha taqsimlangan tasodifiy miqdor deyiladi. Bu holda taqsimot funksiya

$$F(x) = \begin{cases} 0, x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}; x \geq 0 \end{cases}$$

ko`rinishga ega ekanligini topish qiyin emas.

Turli elementlarning atomlarining emirilish vaqti eksponensial taqsimotga ega. Bunda $T = \frac{1}{\lambda}$ son emirilish vaqtining o`rta qiymati deyiladi.

Eksponensial taqsimotga ega bo`lgan $\xi$ tasodifiy miqdor so`nggi tasirning yo`qlik xossasiga ega. $\xi$ tasodifiy miqdorni atomning emirilish vaqti deb izohlab $A = \{x_1 < \xi \leq x_1 + x_2\}$ hodisani ko`ramiz va bu hodisaning $B = \{\xi > x_1\}$ hodisa ro`y bergandagi shartli ehtimolini hisoblaymiz:

$$P(A) = P(\{x_1 < \xi \leq x_1 + x_2\}) = 1 - e^{-\lambda(x_1 + x_2)} - (1 - e^{-\lambda x_1}) =$$

$$= e^{-\lambda x_1}(1 - e^{-\lambda x_2});$$

$$P(B) = P(\{\xi > x_1\}) = 1 - P(\{\xi \leq x_1\}) = e^{-\lambda x_1}$$

tengliklardan

$$P(A/B) = \frac{e^{-\lambda x_1}(1 - e^{-\lambda x_2})}{e^{-\lambda x_1}} = 1 - e^{-\lambda x_2}$$

munosabatning o`rinli ekanligi kelib chiqadi, yani atom $x_1$ vaqt yashagach uning yana $x_2$ vaqt ichida emirilish ehtimoli, xuddi shu atomni $x_2$ vaqt ichida emirilishining sharsiz ehtimoli bilan bir xil. Xuddi shu xususiyat so`nggi tasirning yo`qlik xossasidan iborat.

So`nggi tasirning yo`qligi eksponensial taqsimlangan tasodifiy miqdorning xarakterlovchi xossadan iborat. Boshqacha qilib aytganda, barcha absolyut uzluksiz taqsimotli tasodifiy miqdorlar ichida faqat eksponensial taqsimotli tasodifiy miqdorgina so`nggi tasir yo`qlik xossasiga ega (geometrik taqsimotga qaralsin).

Normal taqsimot. Taqsimot funksiyasi

$$\Phi_{a,\sigma}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(u-a)^2}{2\sigma^2}}du$$

ko`rinishga ega bo`lgan tasodifiy miqdorga (a,σ^2) parametrli normal (yoki Gauss) qonuni bo`yicha taqsimlangan tasodifiy miqdor deyiladi.

Normal taqsimlangan tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi

$$\varphi_{a,\sigma}(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

ko`rinishga ega.

$$\varphi_{a,\sigma}(x)>0 \quad \text{va} \quad \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_{a,\sigma}(x)dx=1$$

ekanligini ko`rsataylik:

$$\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_{a,\sigma}(x)dx\right]^2=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_{a,\sigma}(x)\varphi_{a,\sigma}(y)dxdy=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{y-a}{\sigma}\right)^2\right\}dxdy=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-\frac{u^2+v^2}{2}\right\}dudv.$$

Oxirgi integralda $u=r\cos\theta,\quad v=r\sin\theta$ deb o`zgaruvchi almashtirsak

$$\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_{a,\sigma}(x)dx\right]^2=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\infty}r\exp\left\{-r^2/2\right\}drd\theta=-\int_{0}^{\infty}d\exp\left\{-r^2/2\right\}=1$$

kelib chiqadi.

Demak $\varphi_{a,\sigma}(x)$ zichlik funksiya $\Phi_{a,\sigma}(x)$ esa taqsimot funksiya ekan. Normal qonun bo`yicha taqsimlangan tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasini turli $a$ va $\sigma$ parametrlarga bog`liq holdagi grafiklari 12 shaklda keltirilgan

12 shakl.

$\varphi_{a,\sigma}(x)$ zichlik funksiya $x=a$ nuqtada eng katta qiymatga erishadi va uning grafigi $x=a$ to`g`ri chiziqqa nisbatan simmetrik joylashgan. Bu funksiya uchun

OX o`q gorizontal asimptota $x = a + \sigma, \quad x = a - \sigma$ nuqtalar esa funksiyaning burilish nuqtalaridan iborat.

Xususan $a = 0, \quad \sigma = 1$ bo`lganda normal taqsimlangan tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi

$$\Phi_{0,1}(x) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du$$

ko`rinishiga ega bo`ladi va $\Phi(x)$ taqsimotga standart normal qonun deyiladi (13 shakl).

13-shakl.

$\Phi_{a,\sigma}(x) = \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$ tenglik o`rinli bo`lgani uchun normal qonunning a va σ parametrlariga taqsimotning “siljish” va ”masshtab” parametrlari deb qarash tabiiy.

Gamma taqsimot. Zichlik funksiyasi (14-shakl)

$$p(x) = \begin{cases} 0, x < 0; \\ \dfrac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda x}, x \geq 0 \end{cases}$$

dan iborat bo`lgan tasodifiy miqdor $(\alpha, \lambda)$ parametrli gamma qonuni bo`yicha taqsimlangan tasodifiy miqdor deyiladi, bu erda

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

Eyler gamma funksiyasi. Uning taqsimot funksiyasi (15-shakl)

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \displaystyle\int_0^x u^{\alpha-1} e^{-\lambda u} du, x \geq 0; \\ 0, x < 0 \end{cases}$$

ko`rinishga ega.

14-shakl. 15-shakl.

Umumiy holda gamma taqsimot aniq ifodalanmasa ham, u bazi juda muhum xususiyatlarga ega. Masalan, agar $\alpha = k$ yani α butun qiymatlarni qabul qilsa, biz ommoviy hizmat ko`rsatish nazariyasida muhum rol o`ynaydigan Erlang taqsimotini hosil qilamiz. Agar $\alpha = k/2, \lambda = 1/2$ bo`1sa, gamma taqsimot $\chi^2$ (xi-kvadrat) deb ataluvchi taqsimotga aylanadi, $k$, bu holda $\chi^2$ taqsimotning ozodlik darajasi soni deyiladi. Nihoyat, $\alpha = 1$ bo`lsa biz eksponensial taqsimotning xuddi o`ziga kelamiz.

Koshi taqsimoti. Zichlik funksiyasi

$$p_{a,\sigma}(x) = \frac{1}{\pi\sigma}\frac{1}{1+\frac{(x-a)^2}{\sigma^2}}, x \in R, \sigma > 0$$

ko`rinishda bo`lgan tasodifiy miqdor (a,σ) parametrli Koshi qonuni bo`yicha taqsimlangan tasodifiy miqdor deyiladi. (0;1) parametrli Koshi qonuni bo`yicha taqsimlangan tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi (17-shakl)

$$K(x) = K(x;0,1) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$$

ko`rinishga ega. $K(x;a,\sigma) = K\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$ tenglik o`rinli bo`lgani uchun xuddi normal qonundagi kabi bu erda ham a va σ parametrlarga siljish va masshtab parametrlari deb qaraladi.

Singulyar taqsimot funksiyalar. Zichlik funksiyaga ega bo`lmagan uzluksiz tasodifiy miqdorlar ham mavjud. Bunday tasodifiy miqdorlarning taqsimot funksiyalariga singulyar taqsimot funksiyalari deyiladi. Singulyar taqsimot funksiya uzluksiz, barcha o`sish nuqtalaridan tashkil topgan to`plamning Lebeg o`lchovi 0 ga teng, yani deyarli barcha nuqtalarda $F'(x) = 0$ bo`lib $F(+\infty) - F(-\infty) = 1$ tenglik o`rinli. Bunday funksiyaning misoli sifatida o`quvchiga analiz kursidan malum bo`lgan ushbu Kantor funksiyasini olishimiz mumkin:

$F(x)=0$, agar $x \le 0$, $F(x)=1$, agar $x \ge 1$. $F(x)$ funksiyani [0,1] oraliqdagi qiymatlarini aniqlash uchun, quyidagi amallarni bajaramiz. Avval bu oraliqni 1/3 va 2/3 nuqtalar bilan teng uch [0,1/3], [1/3,2/3] va [2/3,1] bo`laklarga bo`lamiz. Ichki oraliqda $F(x)$=1/2 deymiz. qolgan ikki oraliqning har birini yana teng uch bo`lakga bo`lib, harbir ichki oraliqlarda $F(x)$ funksiya mos ravishda ¼ va ¾ qiymatlarni qabul qiladi deymiz. har bir qolgan oraliqlar o`z navbatida yana uch bo`lakka bo`linib uning ichki bo`laklarida $F(x)$ funksiya uning aniqlangan qo`shni qiymatlarini o`rta arifmetigiga teng deb olamiz va hokazo (18-shakl).

18-shakl.

$F(x)$ taqsimot funksiya o`zgarmas qiymatlar qabul qiluvchi ichki [1/3,2/3], [1/9,2/9],[7/9,8/9],… oraliqlarning uzunliklar yig`indisi

$$1/3+2/9+4/27+...=\frac{1}{3}(1+2/3+4/9+...)=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-2/3}=1.$$

Demak $F(x)$ funksiyani o`sish nuqtalarining Lebeg o`lchovi 0 ga teng.

Taqsimot funksiyalarning mumkin bo`lgan tiplari haqida boshqa to`xtalmay, haqiqatda taqsimot funksiyalar yuqorida keltirilgan uchta tip bilan tugallanishi haqidagi mulohaza bilan kifoyalanamiz. Aniqroq aytganda ihtiyoriy $F(x)$ taqsimot funksiyani

$$F(x)=c_1F_1(x)+c_2F_2(x)+c_3F_3(x)$$

ko`rinishida ifodalash mumkin, bu erda $c_i \ge 0, c_1+c_2+c_3=1$, $F_1(x)$-diskret taqsimot funksiya, $F_2(x)$-absolyut uzluksiz taqsimot funksiya, $F_3(x)$ esa singulyar taqsimot funksiya.

13-Maruza. Ko`p o`lchovli tasodifiy miqdorlar

Kelgusida biz uchun tasodifiy miqdorlar bilan bir qatorda tasodifiy vektorlar yoki ko`p o`lchovli tasodifiy miqdorlar tushunchasi ham juda zarur.

Faraz qilaylik *(Ω,$\mathcal{A}$,P)* ehtimollik fazosida aniqlangan $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ tasodifiy miqdorlar berilgan bo`lsin. $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ vektorga **tasodifiy vektor** yoki $n-$ **o`lchovli tasodifiy miqdor** deyiladi.

$a_1 < b_1, a_2 < b_2, ..., a_n < b_n$ tengsizliklarni qanoatlantiruvchi $a_i, b_i, i = 1,2,...,n$ haqiqiy sonlar berilgan bo`lsin. U holda

$$\{\omega; a_1 < \xi_1(\omega) \le b_1, ..., a_n < \xi_n(\omega) \le b_n\} = \bigcap_{i=1}^{n} \{\omega; a_i < \xi_i(\omega) \le b_i\} \in \mathcal{A} \qquad (11)$$

munosabat o`rinli. $(\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), ..., \xi_n(\omega))$ $R^n$ dagi nuqtani $\Delta$ orqali esa $\Delta = \{x \in R^n; a_1 < x_1 \le b_1, ..., a_n < x_n \le b_n\}$ - $n$ o`lchovli yarim ochiq parallelepipedni belgilasak, u holda (11) munosabatni

$$\{\omega; (\xi_1(\omega), ..., \xi_n(\omega)) \in \Delta\} \in \mathcal{A} \qquad (12)$$

shaklda ifodalash mumkin.

R dan olingan ihtiyoriy $\{B_k\}$ ketma-ketlik uchun o`rinli bo`lgan ushbu

$$\begin{aligned} \bigcap_k \{\omega; (\xi_1(\omega), ..., \xi_n(\omega)) \in B_k\} &= \{\omega; (\xi_1(\omega), ..., \xi_n(\omega)) \in \bigcap_k B_k\} \\ \bigcup_k \{\omega; (\xi_1(\omega), ..., \xi_n(\omega)) \in B_k\} &= \{\omega; (\xi_1(\omega), ..., \xi_n(\omega)) \in \bigcup_k B_k\} \end{aligned} \qquad (13)$$

tengliklardan va (12) munosabatdan foydalanib (12) munosabatning Δ - R^n dan olingan ihtiyoriy Borel to`plami bo`lgan hol uchun ham o`rinli ekanligini isbotlash mumkin.

5-Tarif. (R^n, B_{R^n}) o`lchovli fazoda

$$P_\xi(B) = P\{\omega;\ \xi(\omega) \in B\}, \qquad B \in B_{R^n}$$

formula orqali aniqlangan P_ξ ehtimol o`lchoviga $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ tasodifiy vektorning ehtimollik taqsimoti deyiladi.

(12) munosabatdan har qanday $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n$ uchun $\{\omega;\ \xi_1(\omega) \le x_1, ..., \xi_n(\omega) \le x_n\} \in \mathcal{A}$ hodisadan iborat ekanligi kelib chiqadi. Demak uning ehtimoli haqida so`z yuritishimiz manoga ega.

6-Tarif. R^n da aniqlangan ushbu

$$F_{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n}(x_1, x_2, ..., x_n) = P(\{\xi_1 \le x_1, \xi_2 \le x_2, ..., \xi_n \le x_n\})$$

n o`lchovli funksiya $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ tasodifiy vektorning taqsimot funksiyasi yoki $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ tasodifiy miqdorlarning birgalikdagi taqsimot funksiyasi deyiladi.

Ko`p ўlchovli taqsimot funksiyani biz bazan qulaylik uchun $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ indekslarni tushirib qoldirib $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ shaklida yozamiz.

Δ_{a_k, b_k} orqali $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiyaning k argumenti bo`yicha $(a_k, b_k]$ yarim intervalda olingan ushbu

$$\Delta_{a_k,b_k}F(x_1,...,x_n)=F(x_1,...,x_{k-1},b_k,x_{k+1},...,x_n)-F(x_1,...,x_{k-1},a_k,x_{k+1},...,x_n)$$

funksiya orttirmasini belgilaylik. Agar $(a,b]=\{x\in R^n;a_1<x_1\le b_1,...,a_n<x_n\le b_n\}$ orqali R^n dagi yarim ochiq parallelepipedni belgilasak, u holda

$$P_\xi\big((a,b]\big)=\Delta_{a_1,b_1}\Delta_{a_2,b_2}...\Delta_{a_n,b_n} \qquad (14)$$

tenglik o`rinli.

(14) formulaning isbotini a_k,b_k argumentlar bo`yicha birin-ketin o`tqazish mumkin:

$$P\big(\{a_1<\xi_1\le b_1,\xi_2\le x_2,...,\xi_n\le x_n\}\big)=P\big(\{\xi_1\le b_1,\xi_2\le x_2,...,\xi_n\le x_n\}\big)-$$
$$-P(\{\xi_1\le a_1,\xi_2\le x_2,...,\xi_n\le x_n\})=\Delta_{a_1,b_1}F(x_1,x_2,...,x_n),$$
$$P(\{a_1<\xi_1\le b_1,a_2<\xi_2\le b_2,\xi_3\le x_3,...,\xi_n\le x_n\})=P(\{a_1<\xi_1\le b_1,\xi_2\le b_2,...,\xi_n\le x_n\})-$$
$$-P(\{a_1<\xi_1\le b_1,\xi_2\le a_2,\xi_3\le x_3,...,\xi_n\le x_n\})=\Delta_{a_2,b_2}P(\{a_1<\xi_1\le b_1,\xi_2\le x_2,...,\xi_n\le x_n\})=$$
$$=\Delta_{a_2b_2}\big(\Delta_{a_1,b_1}F(x_1,x_2,...,x_n)\big)=\Delta_{a_1,b_1}\Delta_{a_2,b_2}F(x_1,x_2,...,x_n)$$

va hokazo.

Ko`p o`lchovli taqsimot funksiyalarning xossalari. Misollar.

$F(x_1,x_2,...,x_n)=F_{\xi_1,\xi_2,...,\xi_n}(x_1,x_2,...,x_n)$ - $\xi=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)$ tasodifiy vektorning taqsimot funksiyasi bo`lsin. Ko`p o`lchovli $F(x_1,x_2,...,x_n)$ taqsimot funksiyaning asosiy xossalarini keltiramiz:

F1^0. Monotonlik xossasi: $F(x_1,x_2,...,x_n)$ funksiya har qaysi argumenti bo`yicha kamayuvchi emas va o`ngdan uzluksiz.

F2^0. $\lim\limits_{x_k\to\infty}F_{\xi_1,\xi_2,...,\xi_n}(x_1,x_2,...,x_n)=F(x_1,...,x_{k-1},\infty,x_{k+1},...,x_n)=$

$=F_{\xi_1,...,\xi_{k-1},\xi_{k+1},...,\xi_n}(x_1,...,x_{k-1},x_{k+1},...,x_n);k=1,2,...,n.$

F3^0. $\lim\limits_{x_k\to\infty}F_{\xi_1,\xi_2,...,\xi_n}(x_1,x_2,...,x_n)=0;k=1,2,...,n.$

F4^0. $\Delta_{a_1,b_1}\Delta_{a_2,b_2}...\Delta_{a_n,b_n}F(x_1,x_2,...,x_n)\ge 0$

F1^0,F2^0,F3^0 xossalar bir o`lchovli taqsimot funksiyalarning mos xossalari kabi isbotlanadi, F4^0 xossaning isboti esa (14) formuladan kelib chiqadi.

F2^0 va F3^0 ko`p o`lchovli taqsimot funksiyaning **uyg`unlik xossalari** deb ataladi.

F1^0-F4^0 xossalarga ega bo`lgan ihtiyoriy $n$ o`lchovli $F(x_1,x_2,...,x_n)$ funksiya birorta $\xi_1,\xi_2,...,\xi_n$ tasodifiy miqdorlarning birgalikdagi taqsimot funksiyasidan iborat.

Bir o`lchovli taqsimot funksiyalar uchun F4$^0$ xossa F1$^0$ xossadan kelib chiqadi, ammo $n$ o`lchovli taqsimot funksiyalar uchun F4^0 xossa mustaqil bo`lib u birinchi uchta xossadan kelib chiqmaydi.

9-Misol. Ushbu

$$F(x_1,x_2)=\begin{cases}0, агар x_1+x_2<1;\\ 1, агар x_1+x_2\ge 1\end{cases}$$

ikki o`lchovli funksiyani ko`raylik. Bu funksiya uchun F1^0-F3^0 xossalar o`rinli ekanligi osongina tekshiriladi. Ammo

$$\Delta_{0,1}\Delta_{0,1}F(0,0)=\Delta_{0,1}[F(1,0)-F(0,0)]=F(1,1)-F(0,1)-F(1,0)+F(0,0)=-1$$

tenglikdan $F(x_1,x_2)$ funksiyaning F4^0 xossaga ega emasligi kelib chiqadi.

$\xi_1,\xi_2,...,\xi_n$ tasodifiy miqdorlar qism to`plamini barcha tasodifiy miqdorlarning $F_{\xi_1,\xi_2,...,\xi_n}(x_1,x_2,...,x_n)$ taqsimot funksiyasi orqali F2^0 xossa yordamida keltirib chiqariladigan birgalikdagi taqsimot funksiyasiga **marginal** (xususiy) taqsimot funksiya deyiladi.

Masalan $F_{\xi_1,\xi_2,...,\xi_n}(x_1,x_2,...,x_n)$ taqsimot funksiya malum bo`lsa, har qaysi ξ_k tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasini

$$F_{\xi_k}(x)=F_{\xi_1,\xi_2,...,\xi_n}(+\infty,...,+\infty,x+\infty,...,+\infty)$$

tenglik orqali aniqlashimiz mumkin.

7-Tarif. Agar R^n fazoning chekli yoki sanoqli $x^{(k)}=(x_1^{(k)},x_2^{(k)},...,x_n^{(k)});k=1,2,...$ nuqtalari uchun

$$P\left(\left\{\xi_1=x_1^{(k)},\xi_2=x_2^{(k)},...,\xi_n=x_n^{(k)}\right\}\right)=p_{x_1^{(k)},x_2^{(k)},...,x_n^{(k)}}=p_{x^{(k)}}$$

$$\sum_k p_{x_1^{(k)},...,x_n^{(k)}}=\sum_k p_{x^{(k)}}=1$$

tengliklar o`rinli bo`lsa, u holda $(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)$ tasodifiy vektorga n o`lchovli diskret tasodifiy vektor deyiladi. Diskret tasodifiy vektorning taqsimot qonuni, R fazodagi kabi

$$P_{\xi_1,\xi_2,...,\xi_n}(B)=\sum_{\{k;x^{(k)}\in B\}}p_{x^{(k)}},B\in\square(R^n),\qquad x^{(k)}\in R^n$$

formula orqali beriladi.

Polinomial taqsimot. Agar ξ m-o`lchovli diskret tasodifiy vektor uchun $x_k=k=(k_1,k_2,...,k_m),\quad k_i\in Z,\quad k_1+k_2+...+k_m=n$ bo`lib

$$p_k=P(\{\xi=k\})=P(\{\xi_1=k_1,...,\xi_m=k_m\})=\frac{n!}{k_1!k_2!...k_m!}p_1^{k_1}p_2^{k_2}...p_m^{k_m} \qquad (15)$$

$p_i\ge 0,i=1,2,...,m;p_1+p_2+...+p_m=1$ bo`lsa, u holda $\xi$ vektor $(n;p_1,p_2,...,p_m)=(n;p)$ parametrli polinomial qonun bo`yicha taqsimlangan tasodifiy vektor va $в(k;n,p_1,p_2,...,p_m)=p_k$ ehtimollarga esa $(n;p_1,p_2,...,p_m)$ parametrli polinomial taqsimot deyiladi. (15) tenglikning o`ng tomoni $(p_1+p_2+...+p_m)^n$ polinomning $p_1,p_2,...,p_m$ sonlarning darajalari bo`yicha yoyilmasini umumiy holidan iborat bo`lgani sababli, yuqoridagi taqsimotni polinomial taqsimot deb atalishi tabiiy.

Agar $m=2,p_1=p,p_2=1-p$ bo`lsa polinomial taqsimot (n,p)-parametrli binomial taqsimotga aylanadi.

10-Misol. Ikkita shahmatchilar orasida shahmat turniri o`tqazilayotgan bo`lsin. Birinchi o`yinchi harbir o`yinni, avvalgi o`yin qanday yakunlanganidan qatiy nazar, $p$ ehtimol bilan yutib, $q$ ehtimol bilan yutqizadi va $1-p-q$ ehtimol bilan o`yin durang bo`ladi deylik. U holda $n$ ta o`yindan so`ng birinchi shahmatchi o`yinni k marta yutib, l marta yutqizish ehtimoli $(k+1\le n)$ ushbu

$$p(n;k,l)=\frac{n!}{k!l!(n-k-l)!}p^k q^l(1-p-q)^{n-k-l}$$

songa teng.

8-Tarif. Agar ihtiyoriy $x=(x_1,x_2,...,x_n)\in R^n$ uchun

$$F_{\xi_1,\xi_2,...,\xi_n}(x_1,x_2,...,x_n)=\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}p_{\xi_1,\xi_2,...,\xi_n}(u_1,u_2,...,u_n)du_1du_2...du_n \qquad (16)$$

tenglikni qanoatlantiruvchi $p_{\xi_1,\xi_2,...,\xi_n}(x_1,x_2,...,x_n)$ funksiya mavjud bo`lsa, u holda $\xi=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)$ tasodifiy vektorga $n$ o`lchovli absolyut uzluksiz tasodifiy vektor, $p_{\xi_1,\xi_2,...,\xi_n}(x_1,x_2,...,x_n)$ funksiyaga esa uning zichlik funksiyasi deyiladi.

(16) munosabatdan zichlik funksiyaning ushbu xossalari kelib chiqadi:

1^0). Deyarli barcha $(x_1,x_2,...,x_n)\in R^n$ nuqtalarda

$$p_{\xi_1,\xi_2,...,\xi_n}(x_1,x_2,...,x_n)=\frac{\partial^n}{\partial x_1\cdot\partial x_2\cdots\partial x_n}F_{\xi_1,\xi_2,...,\xi_n}(x_1,x_2,...,x_n).$$

tenglik o`rinli.

2^0). $\quad p_{\xi_1,\xi_2,...,\xi_n}(x_1,x_2,...,x_n)\ge 0.$

3^0). $\quad \int_{-\infty}^{+\infty}...\int_{-\infty}^{+\infty}p_{\xi_1,\xi_2,...,\xi_n}(x_1,x_2,...,x_n)dx_1dx_2...dx_n=1.$

4^0). $\quad p_{\xi_1,\xi_2,...,\xi_n}(x_1,x_2,...,x_n)$ zichlik funksiyaning uzluksiz nuqtalarida

$P(\{x_i<\xi_i<x_i+\Delta x_i, i=1,2,...,n\})=p_{\xi_1,\xi_2,...,\xi_n}(x_1,x_2,...,x_n)\Delta x_1\Delta x_2...\Delta x_n+o(\Delta x_1\Delta x_2...\Delta x_n;$

$\max_i \Delta x_i\to 0$ munosabat o`rinli.

Ko`p o`lchovli normal taqsimot. $\overline{m}=(m_1,m_2,...,m_n)$ -n o`lchovli vektor va $R=\|r_{ij}\|$ birorta $n\times n$ o`lchovli, musbat aniqlangan, simmetrik matrisa bo`lsin. $R$ musbat aniqlangan matrisa bo`lgani uchun, uning teskari matrisasi $R^{-1}=A=\|a_{ij}\|$ mavjud.

Zichlik funksiyasi

$$\varphi(x_1,x_2,...,x_n)=\varphi_{\xi_1,\xi_2,...,\xi_n}(x_1,x_2,...,x_n)=\frac{|A|^{1/2}}{(2\pi)^{n/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x_i-m_i)(x_j-m_j)\right\}$$

ko`rinishga ega bo`lgan $\xi=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)$ -n o`lchovli tasodifiy vektor $(m;R)$ parametrli normal qonun bo`yicha taqsimlangan tasodifiy vektor deyiladi. Bu erda $|A|=\det A$ orqali A matrisaning determinanti belgilangan.

R matrisaga $\xi=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)$ vektorning **kovariasion matrisasi** $\overline{m}$ vektorga esa, uning **o`rta qiymat vektori** deyiladi.

$\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) - n$ o`lchovli $(\overline{m}, R)$ parametrli normal taqsimotga ega bo`lgan tasodifiy vektor bo`lsin. U holda $(n-1)$ o`lchovli $(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_{n-1})$ vektor ham, o`rta qiymat vektori $(m_1, m_2, ..., m_{n-1})$ va kovariasion matrisasi $R$ matrisani oxirgi satr va ustunini o`chirgandan hosil bo`ladigan $R'$ matrisaga teng bo`lgan normal taqsimotga ega. Buni

$$\varphi_{\xi_1, \xi_2, ... \xi_{n-1}}(x_1, x_2, ..., x_{n-1}) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{\xi_1 ... \xi_{n-1} \ \xi_n}(x_1 .... x_{n-1}, x_n) dx_n$$

tenglikdan (bu tenglik taqsimot funksiyaning F2 xossasidan kelib chiqadi) keltirib chiqarish mumkin.

11-misol. O`rta qiymat matrisasi (m_1, m_2), kovariasion matrisa esa

$$R = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & r\sigma_1\sigma_2 \\ r\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \qquad (\sigma_1, \sigma_2 > 0; \quad -1 < r < 1)$$

bo`lgan normal qonun bo`yicha taqsimlangan ikki o`lchovli tasodifiy vektor bo`lsin. U holda

$$|R| = \sigma_1^2 \sigma_2^2 \ (1 - r^2)$$

$$F = R^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sigma_1^2(1-r^2)} & \dfrac{-r}{\sigma_1\sigma_2(1-r^2)} \\ \dfrac{-r}{\sigma_1\sigma_2(1-r^2)} & \dfrac{1}{\sigma_2^2\left(1-r^2\right)} \end{pmatrix}$$

$$|A| = \frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2(1-r^2)}$$

tengliklardan $\varphi_{\xi_1\xi_2}(x_1, x_2)$ zichlik funksiya

$$\varphi(x_1, x_2) = \varphi_{\xi_1\xi_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x_1-m_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2r(x_1-m_1)(x_2-m_2)}{\sigma_1^2\sigma_2^2} + \frac{(x_2-m_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

ko`rinishga ega ekanligi kelib chiqadi (19 shakl).

19 shakl. Ikki o`lchovli normal qonunning zichlik funksiyasi $(m_1 = m_2 = 0$ bo`lgan hol).

14-Maruza. Tasodifiy miqdorlarning bog`liqsizligi.

Tasodifiy miqdorlarning bog`liqsizlik tushunchasi ehtimollar nazariyasidagi eng muhim tushunchalardan biri bo`lib, u hodisalarning bog`liqsizligini tasodifiy miqdorlarga ko`chirishdan iborat.

9-tarif. $\xi_1,\xi_2,...\xi_n$ – *(Ω,𝒜,P)* ehtimollar fazosida aniqlangan tasodifiy miqdorlar bo`lsin. Agar ixtiyoriy $B_k \in \mathcal{B}_R$ $(k=1,2,...,n)$ Borel to`plamlari uchun

$$P(\xi_1 \in B_1,...\xi_n \in B_n) = P(\xi_1 \in B_1)....P(\xi_n \in B_n) \qquad (17)$$

tenglik o`rinli bo`lsa, u holda $\xi_1,...\xi_n$ bog`liqsiz tasodifiy miqdorlar deyiladi.

Agar ixtiyoriy n uchun $\xi_1,...\xi_n$ tasodifiy miqdorlar bog`liqsiz bo`lsa, u holda $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ tasodifiy miodorlar ketma-ketligi bog`liqsiz deyiladi.

(17) tenglikdan $B_k = (-\infty, x_k], k=1,2,...,n$ bo`lgan xususiy holda

$$F_{\xi_1,\xi_2,...,\xi_n}(x_1,x_2,...,x_n) = F_{\xi_1}(x_1)F_{\xi_2}(x_2)...F_{\xi_n}(x_n) \qquad (18)$$

tenglikning o`rinli ekanligi kelib chiqadi. Ikkinchi tomondan (18) munosabatdan (14) tenglikka ko`ra ihtiyoriy $a_k \le b_k$ sonlar uchun

$$P(\{a_1 < \xi_1 \le b_1, a_2 < \xi_2 \le b_2,...,a_n < \xi_n \le b_n\}) = \prod_{k=1}^{n} P(\{a_k < \xi_k \le b_k\})$$

ekanligi, yani (17) tenglikning $B_k = (a_k, b_k]$ yarim intervallar uchun o`rinli ekanligi kelib chiqadi. Ehtimollarning barcha yarim intervallardagi qiymatlari, uning Borel to`plamlaridagi qiymatlarini yagona usul bilan aniqlagani uchun oxirgi tenglikdan (17) munosabatning o`rinli ekanligi kelib chiqadi.

Shunday qilib (18) tenglikni $\xi_1,\xi_2,...\xi_n$ tasodifiy miqdorlarning bog`liqsizligi uchun tarif sifatida qabul qilish mumkin.

$\xi_1,\xi_2,...\xi_n$ absolyut uzluksiz tasodifiy miqdorlar bo`lsin. U holda

$$F_{\xi_i}(x_i) = \int_{-\infty}^{x_i} p_{\xi_i}(x)dx; \qquad i=1,2,...,n$$

tenglikdan (18) ga ko`ra

$$F_{\xi_1,\xi_2,...,\xi_n}(x_1,x_2,...,x_n) = F_{\xi_1}(x_1)F_{\xi_2}(x_2)...F_{\xi_n}(x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} p_{\xi_1}(x)dx \int_{-\infty}^{x_2} p_{\xi_2}(x)dx ... \int_{-\infty}^{x_n} p_{\xi_n}(x)dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{x_1} ... \int_{-\infty}^{x_n} p_{\xi_1}(u_1)p_{\xi_2}(u_2)...p_{\xi_n}(u_n)du_1du_2...du_n.$$

Aksincha,

$$F_{\xi_1,\xi_2,...,\xi_n}(x_1,x_2,...,x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} ... \int_{-\infty}^{x_n} p_{\xi_1}(u_1)p_{\xi_2}(u_2)...p_{\xi_n}(u_n)du_1du_2...du_n$$

munosabatdan (18) tenglikka kelamiz.

Shunday qilib $\xi_1, \xi_2, ...\xi_n$ – absolyut uzluksiz tasodifiy miqdorlar bog`liqsiz bo`lishi uchun $(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ – n o`lchovli tasodifiy vektor absolyut uzluksiz bo`lib

$$p_{\xi_1, \xi^2, ..., \xi_n}(x_1, x_2, ..., x_n) = p_{\xi_1}(x_1) p_{\xi_2}(x_2) ... p_{\xi_n}(x_n)$$

tenglikning o`rinli ekanligi zarur va etarli.

Diskret tasodifiy miqdorlar bog`liqsiz bo`lishi uchun

$$P\left(\left\{\xi_1 = x_1^{(k)}, \xi_2 = x_2^{(k)}, ..., \xi_n = x_n^{(k)}\right\}\right) = P\left(\left\{\xi_1 = x_1^{(k)}\right\}\right) P\left(\left\{\xi_2 = x_2^{(k)}\right\}\right) \cdots P\left(\left\{\xi_n = x_n^{(k)}\right\}\right)$$

tenglikning o`rinli bo`lishi zarur va etarli ekanligini tekshirish qiyinchilik tug`dirmaydi.

Tasodifiy miqdorlar yoki tasodifiy hodisalarning bog`liqsizligini formal tarifi, sababli bog`liq bo`lmagan hodisalarga mansublilik manosidagi real bog`liqsizlik tushunchasiga nisbatan ancha keng. Shu, sababli bog`liqlilik yo`q deyishga hechqanday asosimiz bo`lmagan hollarda ham ‘’matematik” bog`liqsizlik o`rinli bo`lishi mumkin ekanligi kelib chiqishi mumkin.

12-Misol. $\xi = (\xi_1, \xi_2)$-ikki o`lchovli diskret tasodifiy miqdor bo`lib

$$P(\{\xi_1 = 1, \xi_2 = 1\}) = P(\{\xi_1 = -1, \xi_2 = 1\}) = P(\{\xi_1 = 1, \xi_2 = -1\}) = P(\{\xi_1 = -1, \xi_2 = -1\}) = 1/4$$

bo`lsin. U holda

$$P(\{\xi_1 = \varepsilon_1, \xi_1\xi_2 = \varepsilon_2\}) = P(\{\xi_1 = \varepsilon_1, \xi_2 = \varepsilon_2 / \varepsilon_1\}) = 1/4 = P(\{\xi_1 = \varepsilon_1\}) P(\{\xi_1\xi_2 = \varepsilon_2\}), \varepsilon_1, \varepsilon_2 = \pm 1,$$

tenglikdan ξ_1 va $\xi_1\xi_2$, garchan ular tuzilishiga ko`ra sababli bog`liqli bo`lsalar ham, bog`liqsiz tasodifiy miqdorlar ekanligi kelib chiqadi.

15-Maruza. Tasodifiy miqdorning funksiyalari

$g(x)$- R da aniqlangan funksiya bo`lsin. $g^{-1}(B)$ orqali $B \subset R$ to`plamning proobrazini belgilaylik, yani $g^{-1}(B) = \{x \in R; g(x) \in B\}$.

10-Tarif. Agar ihtiyoriy Borel to`plami $B \in \Re$ uchun $g^{-1}(x)$ proobraz ham Borel to`plamidan iborat bo`lsa, u holda $g(x)$ funksiya Borel funksiyasi deyiladi.

R da aniqlangan uzluksiz va bo`lakli uzluksiz funksiyalar Borel funksiyalariga misol bo`ladi.

2-Teorema. $g(x)$, $g_1(x)$, $g_2(x)$ Borel funksiyalaridan iborat bo`lib, $\xi$, $\xi_1$ va $\xi_2$ lar *(Ω,A,P)* ehtimolliklar fazosida aniqlangan tasodifiy miqdorlar bo`lsin. U holda ushbu takidlar o`rinli.

1. $\eta = g(\xi)$ *(Ω,A,P)* fazoda aniqlangan tasodifiy miqdor.

2. Agar ξ_1 va ξ_2 tasodifiy miqdorlar bog`liqsiz bo`lsa, u holda $\eta_1 = g_1(\xi_1)$ va $\eta_2 = g_2(\xi_2)$ tasodifiy miqdorlar ham bog`liqsiz bo`ladi.

Isboti. 1. $\eta = \eta(\omega) = g(\xi(\omega))$ ni murakkab funksiya deb qaraymiz. $B \in \Re$ bo`lsin. $g(x)$ Borel funksiyasi bo`lgani uchun $g^{-1}(B) = B_1 \in \Re$ munosabat o`rinli. $\xi$- *(Ω,A,P)* fazoda aniqlangan tasodifiy miqdor bo`lgani uchun $\xi^{-1}(B_1) \in \mathcal{A}$, demak

$\eta^{-1}(B)=\xi^{-1}(B_1)\in\mathcal{A}$, yani η*-(Ω,𝒜,P)* ehtimolliklar fazosida aniqlangan tasodifiy miqdor.

2. $B_1, B_2 \in \Re$ ihtiyoriy Borel to`plamlari bo`lsin. U holda

$$P(\{\eta_1 \in B_1, \eta_2 \in B_2\}) = P(\{g_1(\xi_1) \in B_1, g_2(\xi_2) \in B_2\}) = P(\{\xi_1 \in g_1^{-1}(B_1), \xi_2 \in g_2^{-1}(B_2)\})$$

tenglik o`rinli. Bundan, $g_1^{-1}(B_1)$ va $g_2^{-1}(B_2)$ Borel to`plamlari bo`lganligi va $\xi_1$, $\xi_2$ bog`liqsiz tasodifiy miqdorlar ekanligini hisobga olsak

$$P(\{\eta_1 \in B_1, \eta_2 \in B_2\}) = P(\{\xi_1 \in g_1^{-1}(B_1)\})P(\{\xi_2 \in g_2^{-1}(B_2)\}) =$$
$$= P(\{g_1(\xi_1) \in B_1\})P(\{g_2(\xi_2) \in B_2\}) = P(\{\eta_1 \in B_1\})P(\{\eta_2 \in B_2\})$$

munosabat kelib chiqadi. Demak η_1 va η_2 tasodifiy miqdorlar bog`liqsiz. Teorema isbot bo`ldi.

13-Misol. Agar $g(x)$ funksiya monoton o`suvchi funksiya bo`lib $g^{-1}(x)$ uning teskari funksiyasi bo`lsa, u holda

$$F_\eta(x) = F_{g(\xi)}(x) = P(\{g(\xi) \le x\}) = P(\{\xi \le g^{-1}(x)\}) = F_\xi(g^{-1}(x)) \qquad (19)$$

Bu tenglikdan, agar $F_\xi(x)$ uzluksiz taqsimot funksiya bo`lsa, u holda $g(x)=F_\xi(x)$ deb olib $\eta = F_\xi(\xi)$ [0,1] oraliqda tekis taqsimlangan tasodifiy miqdor ekanligini keltirib chiqaramiz. Aksincha, $\eta$- [0,1] da tekis taqsimlangan tasodifiy miqdor bo`lsa, $\xi = F^{-1}(x)$ tasodifiy miqdor $F(x)$ taqsimot funksiyaga ega. Shunday qilib biz, tekis taqsimlangan tasodifiy miqdor yordamida oldindan berilgan taqsimotga ega bo`lgan tasodifiy miqdorni qurish imkoniga egamiz.

$g(x)=bx+a, b>0$ bo`lsa (19) tenglikdan $F_{b\xi+a}(x) = F_\xi\left(\dfrac{x-a}{b}\right)$ munosabatni hosil qilamiz. Bu munosabatdan biz normal va Koshi taqsimot funksiyalarini ko`rganda foydalangan edik.

Agar $g(x)$ funksiya qatiy o`suvchi funksiya bo`lib differensiallanuvchi bo`lsa va $p(x)$ $\xi$ tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi bo`lsa, u holda $\eta = g(x)$ tasodifiy miqdor ham absolyut uzluksiz bo`lib

$$p_\eta(x) = \frac{1}{g'(g^{-1}(x))} p_\xi(g^{-1}(x))$$

munosabat o`rinli. Bu oxirgi tenglik (19) tenglikning har ikki tomonidan hosila olib topiladi.

$\xi_1, \xi_2, ...\xi_n$ *(Ω,𝒜,P)* ehtimolliklar fazosida aniqlangan tasodifiy miqdorlar va $g(x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n$- Borel $\sigma-$ algebrasiga nisbatan o`lchovli funksiya bo`lsin, yani ihtiyoriy Borel to`plami $B \in \Re$ uchun $g^{-1}(B) = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n; \quad g(x_1, x_2, ..., x_n) \in B\}$ proobraz $R^n$ dagi Borel to`plamidan iborat (10- tarifga qaralsin). U holda Ω da aniqlangan $\eta = g(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ funksiya tasodifiy miqdor bo`ladi.

Haqiqatan ham, ihtiyoriy $B \in \Re_n$ uchun $g^{-1}(B) \in \Re$ munosabatdan

$$\{\omega;\eta(\omega)\in B\}=\{\omega;g(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)\in B\}=\{\omega;(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)\in g^{-1}(B)\}\in \mathcal{A},$$

kelib chiqadi.

Kompozisiya formulalari. Agar $(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)$ absolyut uzluksiz taqsimotga ega bo`lsa, u holda $\eta=g(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)$ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasini

$$F_\eta(x)=P(\{g(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)\le x\}=\int\limits_{g(x_1,...x_n)\le x}...\int p_{\xi_1,\xi_2,...,\xi_n}(x_1,x_2,...,x_n)dx_1dx_2...dx_n \qquad (20)$$

formula orqali topish mumkin.

ξ_1, ξ_2 bog`liqsiz tasodifiy miqdorlar va $g(x_1,x_2)=x_1+x_2$ bo`lgan muhim xususiy holni ko`ramiz. $p_{\xi_1}(x),p_{\xi_2}(x)$ mos zichlik funksiyalar bo`lsin. U holda ξ_1 va ξ_2 bog`liqsiz bo`lgani uchun

$$p_{\xi_1,\xi_2}(x_1,x_2)=p_{\xi_1}(x_1)p_{\xi_2}(x_2)$$

tenglik o`rinli. $\eta=\xi_1+\xi_2$ yig`indining taqsimot funksiyasini (20) formula orqali topamiz:

$$F_{\xi_1+\xi_2}(x)=P(\{\xi_1+\xi_2\le x\})=\iint\limits_{x_1+x_2\le x}p_{\xi_1,\xi_2}(x_1,x_2)dx_1dx_2=\iint\limits_{x_1+x_2\le x}p_{\xi_1}(x_1)p_{\xi_2}(x_2)dx_1dx_2=$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}p_{\xi_1}(x_1)dx_1\int\limits_{-\infty}^{x-x_1}p_{\xi_2}(x_2)dx_2=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}F_{\xi_2}(x-x_1)p_{\xi_1}(x_1)dx_1=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}p_{\xi_1}(x_1)\int\limits_{-\infty}^{x}p_{\xi_2}(x_2-x_1)dx_2dx_1.$$

Ushbu $F_{\xi_1+\xi_2}(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}F_{\xi_2}(x-x_1)p_{\xi_1}(x_1)dx_1=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}F_{\xi_2}(x-x_1)dF_{\xi_1}(x_1)$ va

$$p_{\xi_1+\xi_2}(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}p_{\xi_1}(x_1)p_{\xi_2}(x-x_1)dx_1$$

formulalarga **kompozision** yoki **yig`ish** formulalari deyiladi va mos ravishda $F_{\xi_1+\xi_2}=F_{\xi_1}*F_{\xi_2}$ va $p_{\xi_1+\xi_2}=p_{\xi_1}*p_{\xi_2}$ kabi belgilanadi.

14-Misol. ξ_1 va ξ_2 tasodifiy miqdorlar bog`liqsiz bolib mos ravishda $(a_1,\sigma_1)$ va $(a_2,\sigma_2)$ parametrli normal taqsimotga ega bo`lsin. $\eta=\xi_1+\xi_2$ tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasini topamiz.

Echish. Kompozision formuladan foydalanamiz:

$$p_\eta(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}p_{\xi_1}(u)p_{\xi_2}(x-u)du=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(u-a_1)^2}{2\sigma_1^2}}e^{-\frac{(x-u-a_2)^2}{2\sigma_2^2}}du$$

munosabatdan

$$\frac{(u-a_1)^2}{\sigma_1^2}+\frac{(x-u-a_2)^2}{\sigma_2^2}=\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2}\left(u-\frac{a_1\sigma_2^2+(x-a_2)\sigma_1^2}{\sigma_1\sigma_2\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}\right)^2+\frac{(x-a_1-a_2)^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$$

tenglikka asosan topamiz

$$p_\eta(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sigma_2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{\sigma^2(u-A)^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}}du, \qquad (21)$$

bu erda $a=a_1+a_2, \sigma^2=\sigma_1^2+\sigma_2^2$ va $A=\frac{a_1\sigma_2^2+(x-a_2)\sigma_1^2}{\sigma_1\sigma_2\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}$.

$\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sigma_2}\exp\left\{-\frac{\sigma^2(u-A)^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}\right\}$ funksiya ihtiyoriy fiksirlangan x uchun $(A,\frac{\sigma_1\sigma_2}{\sigma})$ parametrli normal zichlik funksiya bo`lgani uchun undan $(-\infty,+\infty)$ oralig`ida olingan integral birga teng va, (21) tenglikdan

$$p_\eta(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

kelib chiqadi.

Shunday qilib, bog`liqsiz normal taqsimlangan tasodifiy miqdorlarning yig`indisi yana normal taqsimotga ega.

16-Maruza. MATEMATIK KUTILMA.

Xar bir tasodifiy miqdor o`zining taqsimot funksiyasi orqali to`la aniqlanishini biz avvalgi bobda ko`rgan edik. Kuzatuvchi nuqtai nazaridan, birxil taqsimot funksiyaga ega bo`lgan tasodifiy miqdorlarni, garchan ular turli ehtimollar fazosida aniqlangan bolib, turli hodisalarni tasvirlasalar ham bir-biridan ajratib bo`lmaydi. Ammo taqsimot funksiyalar turlicha bo`lgan tasodifiy miqdorlar berilgan bo`lib ularni taqqoslash talab qilinsa. malum qiyinchiliklar paydo bo`ladi. Bazi hollarda bunday qiyinchiliklar osongina echiladi. Masalan, agar Bernulli sxemasida bizni yutuqlar soni qiziqtirayotgan bo`lsa, u holda ikkita Bernulli sxemasidan qaysi birida yutuqning ehtimoli katta bo`lsa, xuddi shunisini tanlash kerak ekanligi tabiiy. Umumiy holda esa ikkita taqsimot funksiyani qanday taqqoslash tushunarli emas, va shuning uchun ham harbir tasodifiy miqdorni biror son (balki bir қancha sonlar) bilan xarakterlash maqsadga muvofiq bo`lib, ular tasodifiy miqdorlarni malum manoda tartiblashga sabab bo`lar edi. Tasodifiy miqdorlarning bunday xarakteristikalaridan biri uning **o`rta qiymati** yoki **matematik kutilmasidir.**

Ushbu bobda biz tasodifiy miqdorning matematik kutilmasini o`rganamiz.

Diskret tasodifiy miqdorlarning matematik kutilmasi

ξ-tasodifiy miqdor chekli sondagi $a_1,a_2,...,a_r$ qiymatlarni $p_k=P(\xi_k=a_k)$ ehtimollar bilan qabul qilsin. ξ tasodifiy miqdorni n marta o`tqazilgan tajribada kuzataylik va uning bu tajribalarda qabul qilgan qiymatlarini $x_1,x_2,...,x_n$ orqali belgilaylik. U holda bu kuzatilgan qiymatlarning o`rta qiymatini ushbu ko`rinishda ifodalash mumkin

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k=\sum_{i=1}^{r}a_i\frac{k_i}{n}=\sum_{i=1}^{r}a_iN_n(\{\xi=a_i\}) \ , \qquad (1)$$

bu erda k_i va $N_n(A)$ orqali mos ravishda biz o`tkazgan tajribalar seriyasidagi $A=\{\xi=a_i\}$ hodisaning ro`y berishlar soni va chastotasi belgilangan. (1) formulada chastotalarni ehtimollar bilan almashtirib, biz ξ tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi (yoki o`rta qiymati) deb ataluvchi ushbu

$$\sum_{i=1}^{r}a_ip_i=M\xi$$

qiymatni hosil qilamiz. Ihtiyoriy diskret tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi ham yuqoridagi kabi aniqlanadi.

1-Tarif. $\{x_k\}$qiymatlarni p_k ehtimollar bilan qabul qiluvchi ξ diskret tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi deb

$$M\xi=\sum_k x_kp_k \qquad (2)$$

yig`indiga aytiladi. Shu bilan birga, agar $\xi$ tasodifiy miqdor sanoqli sondagi qiymatlarni qabul qilsa, u holda (2) qator absolyut yaqinlashuvchi bo`lishi zarur, aks holda ξ tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi mavjud emas deb hisoblanadi.

1-Mulohaza. Diskret tasodifiy miqdorni tariflashda u qabul qiluvchi qiymatlarining tartibi biz uchun ahamiyatga ega emas, shuning uchun ham (2) qatorning yig`indisi qo`shiluvchilarning tartibiga bog`liq emas, bu esa qator absolyut yaqinlashgandagina o`rinli.

Agar $\xi\ge 0$ bo`lsa, u holda (2) tenglikning o`ng tomonidagi qator yoki absolyut yaqinlashadi yoki $+\infty$ ga uzoqlashadi. Oxirgi holda $M\xi=\div\infty$ deb hisoblanadi.

Diskret tasodifiy miqdorlarning matematik kutilmasini hisoblashga doir bir qancha misollar ko`ramiz.

1-Misol. ξ tasodifiy miqdor $x_1,x_2,...,x_n$ qiymatlarni birxil $p_i=P(\xi=x_i)=\frac{1}{n}$ ehtimollar bilan qabul qilsin. U holda

$$M\xi=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\frac{x_1+...+x_n}{n}$$

bo`lib, matematik kutilma $x_1,x_2,...,x_n$, sonlarning o`rta (arifmetik) qiymatiga teng.

2-Misol. (n,p) parametrli binomial taқsimotga ega bo`lgan μ_n tasodifiy miqdorning matematik kutilmasini topamiz:

$$M\mu_n=\sum_{i=0}^{n}iP_n(i)=\sum_{k=0}^{n}kC_n^kp^k(1-p)^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}k\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}=$$

$$=np\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}p^{k-1}(1-p)^{n-k}=np\sum_{j=0}^{n-1}C_{n-1}^jp^j(1-p)^{n-j}=$$

$$= np\sum_{j=0}^{n-1} P_{n-1}(j) = np.$$

3-Misol. ξ-parametri λ bo`lgan Puasson taqsimotiga ega bo`lsin. U holda

$$M\xi = \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda^j}{j!} = \lambda e^{\lambda}e^{-\lambda} = \lambda \,.$$

Demak Puasson taqsimotining matematik kutilmasi uning parametri λ ga teng.

4-Misol. p-parametrli geometrik qonun bo`yicha taqsimlangan ξ tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi ushbu

$$M\xi = \sum_{k=0}^{\infty} kpq^k = pq\sum_{k=0}^{\infty} kq^{k-1} = pq\left(\sum_{k=0}^{\infty} q^k\right)_q^1 = pq\left(\frac{1}{1-q}\right)_q^1 = \frac{pq}{(1-q)^2} = \frac{pq}{p^2} = \frac{q}{p}; \quad (q = 1-p)$$

$M\xi = \dfrac{1-p}{p}$ ko`rinishga ega.

5-Misol. Musbat butun sonli ξ-tasodifiy miqdor uchun $p_k = P(\xi = k) = \dfrac{1}{k(k+1)}$ $(k = 1,2,...)$ bo`lsin. U holda

$$\sum_{k=1}^{\infty} kp_k = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k+1} = +\infty$$

va, demak $M\xi = +\infty.$

6-Misol. ξ-tasodifiy miqdor $x_k = (-1)^k k$ qiymatlarni $p_k = \dfrac{1}{k(k+1)}$ ehtimollar bilan qabul qilsin, $k = 1,2,...$. U holda

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|(-1)^k k\right|\frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k+1} = +\infty$$

bo`lgani uchun ξ tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi mavjud emas.

Diskret tasodifiy miqdor matematik kutilmasining asosiy xossalari

$\xi = \xi(\omega)$-(Ω,$\mathcal{A}$,P)-ehtimolliklar fazosida aniqlangan tasodifiy miqdor bo`lsin. Agar $\Omega$ fazoni chekli yoki sanoqli $\Omega = \sum_i A_i$, $A_i \cap A_j = \varnothing$ ,i$\neq j$ yig`indi shaklida ifodalash mumkin bo`lib, harbir $A_i \in \mathcal{A}$ hodisada $\xi(\omega)$ o`zgarmas qiymat qabul qilsa: $(\xi(\omega) = x_i, \omega \in A_I)$, u holda ξ sodda tasodifiy miqdor deyiladi.

Tushunarliki, sodda tasodifiy miqdor

$$\xi = \xi(\omega) = \sum_i x_i I_{A_i}(\omega) \qquad (3)$$

ko`rinishda ifodalanadi.

Ihtiyoriy diskret tasodifiy miqdor sodda tasodifiy miqdor va aksincha, harqanday sodda tasodifiy miqdor diskret ekanligini ko`rish qiyin emas.

Darhaqiqat, agar diskret tasodifiy miqdor $x_1, x_2, ...$ qiymatlarni kabul qilsa, uni (3) yig`indi shaklida yozish mumkin, bunda $A_i = \{\omega; \xi(\omega) = x_i\} \in \mathcal{A}$. 1-tarifdan sodda tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi

$$M\xi = \sum_i x_i P(A_i) \qquad (4)$$

yig`indiga teng ekanligi kelib chiqadi.

Sodda tasodifiy miqdor matematik kutilmasining yuqorida (4) formula orqali keltirilgan tarifi manoli bo`lishi uchun uni to`g`ri ekanligiga, yani $M\xi$, $\xi$ tasodifiy miqdorning faqat o`ziga bog`liq bo`lib, uning (3) ko`rinishida ifodalanishiga bog`liq emasligiga ishonch hosil qilishimiz zarur. $\xi = \xi(\omega)$ sodda tasodifiy miqdor (3) ifodadan tashqari yana boshqa

$$\xi = \xi(\omega) = \sum_j y_j I_{B_j}(\omega)$$

ko`rinishga ega bo`lsin, bu erda $\sum_j B_j = \Omega$ va $B_j B_k = 0, j \neq k.$

$C_{ij} = A_i \cap B_j$ deymiz va C_{ij} to`plamda $\xi(\omega)$ miqdorning $z_{ij}$ qiymati bir vaqtning o`zida ham x_i ga, ham y_i ga teng va har qanday i uchun $A_i = \sum_k A_i B_k$ va har bir j uchun $B_j = \sum_i A_i B_j$ bo`lgani sababli

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i P(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \sum_{j=1}^{\infty} P(A_i B_j) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} z_{ij} P(C_{ij}) \right) = \sum_{i,j=1}^{\infty} z_{ij} P(C_{ij}) =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} z_{ij} P(C_{ij}) \right) = \sum_{j=1}^{\infty} y_j \left(\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i B_j) \right) = \sum_{j=1}^{\infty} y_j P(B_j),$$

munosabat o`rinli, chunki absolyut yaqinlashuvchi qatorning hadlarini ihtiyoriy tartibda yig`ish mumkin.

Endi diskret tasodifiy miqdorlar matematik kutilmasining asosiy xossalarini keltiramiz.

1-Teorema. 1°. Agar ξ va η - diskret tasodifiy miqdorlar bo`lib, $M\xi, M\eta$ matematik kutilmalar mavjud bo`lsa, u holda ihtiyoriy a va b haqiqiy sonlar uchun $a\xi + b\eta$ tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi mavjud bo`lib

$$M(a\xi + b\eta) = aM\xi + bM\eta$$

tenglik o`rinli.

2°. Agar $\xi \geq 0$ bo`lsa $M\xi \geq 0$. Agar $M\xi$ va $M\eta$ matematik kutilmalar mavjud bo`lib $\xi \geq \eta$ bo`lsa, u holda $M\xi \geq M\eta$ bo`ladi.

3°. Agar $|\xi| \leq \eta$ bo`lib $M\eta$ chekli bo`lsa, $M\xi$ ham chekli bo`ladi. Agar $M\xi$ va $M\eta$ matematik kutilmalar chekli bo`lsa, u holda $M(\xi + \eta)$ xam chekli.

Isbot. 1°. $\xi(\omega)$ va $\eta(\omega)$ tasodifiy miqdorlar $A_1, A_2, \ldots$ va $B_1, B_2, \ldots$ to`plamlar indikatorlarining chiziqli kombinasiyalaridan iborat bo`lsin, yani

$$\xi(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i I_{A_i}(\omega), \eta(\omega) = \sum_{j=1}^{\infty} y_j I_{B_j}(\omega).$$

$C_{ij} = A_i B_j$ deb belgilaymiz $\bigcup_{i,j} A_i B_j = \Omega$ va $\omega \in C_{ij}$ uchun $a\xi(\omega) + b\eta(\omega) = ax_i + by_j$ tenglik o`rinli. Bundan matematik kutilmaning tarifiga ko`ra topamiz:

$$M(a\xi + b\eta) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(ax_i + by_j)P(C_{ij}) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(ax_i + by_j)P(A_i B_j) =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} ax_i \sum_{j=1}^{\infty} P(A_i B_j) + \sum_{j=1}^{\infty} by_j \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i B_j) = a\sum_{i=1}^{\infty} x_i P(A_i) +$$

$$+ b\sum_{j=1}^{\infty} y_j P(B_j) = aM\xi + bM\eta.$$

2°. Agar $\xi \geq 0$ bo`lsa (3) munosabatdan $x_i \geq 0$ bo`lgani sababli $M\xi \geq 0.$ Agar $\xi \geq \eta$ bo`lsa, u holda $\xi = \eta + (\xi - \eta)$ tenglikdan $1^\circ$ xossaga ko`ra $M\xi = M\eta + M(\xi - \eta)$ bo`lgani sababli $M\xi \geq M\eta$ kelib chiqadi, chunki $\xi \geq \eta$ tengsizlikdan $M(\xi - \eta) \geq 0$.

3°. $\xi = \sum_{i=1}^{\infty} x_i I_{A_i}(\omega), \eta = \sum_{j=1}^{\infty} y_j I_{B_j}(\omega)$ va $|\xi| \leq \eta$ bo`lsin. U holda $\omega \in A_i B_j$ munosabatdan ihtiyoriy i, j uchun $|x_i| \leq y_j$ ekanligi kelib chiqadi. Shu bilan birga

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i B_j) = P(B_j) \quad \text{va} \quad \sum_{j=1}^{\infty} P(A_i B_j) = P(A_i)$$

tengliklar o`rinli. Bundan foydalanib, absolyut yaqinlashuvchi qatorning hadlarini ihtiyoriy tartibda yig`ish mumkin ekanligini hisobga olib, topamiz:

$$M\xi = \sum_{i=1}^{\infty} x_i P(A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| P(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| \sum_{j=1}^{\infty} P(A_i B_j) \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{\infty} y_j \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i B_j) = \sum_{j=1}^{\infty} y_j P(B_j) = M\eta \angle \infty.$$

Tasodifiy miqdorlarning matematik kutilmasi (umumiy hol)

2-Teorema. Agar $\{\xi_n(\omega)\}$ - diskret tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi $\xi(\omega)$ tasodifiy miqdorga tekis yaqinlashsa, u holda $M\xi_n$ matematik kutilmalar ketma-ketligi Koshi manosida fundamental bo`ladi.

Isboti. ξ - diskret tasodifiy miqdor uchun

$$|M\xi| = \left|\sum_{i=1}^{\infty} x_i P(A_i)\right| \le \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| P(A_i) \le \sup_i |x_i| \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = \sup_i |x_i| = \sup_{\omega\in\Omega} |\xi(\omega)| \qquad (5)$$

munosabat o`rinli. Bundan foydalanib, topamiz

$$|M\xi_n - M\xi_m| = |M(\xi_n - \xi_m)| \le \sup_{\omega\in\Omega} |\xi_n(\omega) - \xi_m(\omega)| \to 0, n, m \to \infty.$$

Demak $\{M\xi_n\}$ ketma-ketlik fundamental ekan. Teorema isbotlandi.

3-Tarif. $\xi = \xi(\omega) - (\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ ehtimolliklar fazosida aniqlangan tasodifiy miqdor, $\xi_n(\omega)$ esa $\xi(\omega)$ tasodifiy miqdorga tekis yaqinlashuvchi diskret tasodifiy miqdorlarning ihtiyoriy ketma-ketligi bo`lsin. U holda ξ tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi deb ushbu

$$M\xi = \lim_{n\to\infty} M\xi_n$$

qiymatga aytiladi.

2-Mulohaza. Etarlicha katta n sonidan boshlab $M\xi_n$ matematik kutilmalar birvaqtda yoki mavjud, yoki mavjud emasligi ravshan. Oxirgi holda $M\xi$ mavjud emas deyiladi.

ξ tasodifiy miqdorning yuqorida keltirilgan tarifi manoli ekanligini ko`rsatamiz.

Birinchidan *$(\Omega, \mathcal{A}, P)$* fazoda aniqlangan ihtiyoriy ξ tasodifiy miqdor uchun unga tekis yaqinlashuvchi diskret tasodifiy miqdorlarning ketma-ketligi mavjud.

Darhaqiqat, harqanday natural n va butun k sonlar uchun

$$A_k^{(n)} = \left\{\omega; \frac{k}{n} \le \xi(\omega) \angle \frac{k+1}{n}\right\} = \left\{\frac{k}{n} \le \xi \angle \frac{k+1}{n}\right\} = \xi^{-1}\left\{\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right)\right\} \in F \qquad \text{va} \qquad \sum_{-\infty}^{\infty} A_k^{(n)} = \Omega$$

munosabatlar o`rinli.

$$\xi_n(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{k}{n} I_{A_k^{(n)}}(\omega) \qquad (6)$$

deb belgilaymiz. U holda $|\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| \le \dfrac{1}{n}$.

Ikkinchidan, agar $\xi_n(\omega)$ va $\eta_n(\omega)$ diskret tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi $\xi(\omega)$ tasodifiy miqdorga tekis yaqinlashsa, u holda

$$\lim_{n\to\infty} M\xi_n = \lim_{n\to\infty} M\eta_n$$

tenglik o`rinli, yani $M\xi$, $\xi$ tasodifiy miqdorga tekis yaqinlashuvchi $\xi_n(\omega)$ ketma-ketlikni tanlashga bog`liq emas.

Darhaqiqat, (5) tenglikdan

$$0 \le |M\xi_n - M\eta_n| = |M(\xi_n - \eta_n)| \le \sup_{\omega\in\Omega} |\xi_n(\omega) - \eta_n(\omega)| \le$$

$$\le \left(\sup_{\omega\in\Omega} |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| + \sup_{\omega\in\Omega} |\xi(\omega) - \eta_n(\omega)|\right) \to 0, n \to \infty$$

munosabatning o`rinli ekanligi kelib chiqadi.

Matematik kutilmaning tarifidan va 1-teoremadan bevosita ushbu teorema kelib chiqadi.

3-Teorema. 1°. ξ va η tasodifiy miqdorlar $M\xi$ va $M\eta$ matematik kutilmalarga ega bo`lib, $a$ va $b$ – ihtiyoriy sonlar bo`lsin. U holda $M(a\xi+b\eta)$ mavjud bo`lib

$$M(a\xi+b\eta)=aM\xi+bM\eta$$

tenglik o`rinli.

2°. Agar $\xi\geq 0$ bo`lsa $M\xi\geq 0$[1]. Agar $M\xi$ va $M\eta$ matematik kutilmalar mavjud bo`lib $\xi\geq\eta$ bo`lsa, u holda $M\xi\geq M\eta$ bo`ladi.

3°. Agar $M\xi$ chekli bo`lsa $M\eta$ ham chekli. Agar $|\xi|\leq\eta$ bo`lib $M\eta$ chekli bo`lsa, u holda $M\xi$ ham chekli.

Bu teorema diskret tasodifiy miqdorlar uchun isbotlangan 1 teoremaning analogidan iborat.

4-Teorema. (Matematik kutilmaning multiplikativlik xossasi). Agar ξ va η bogliqsiz tasodifiy miqdorlar bo`lib, $M\xi$ va $M\eta$ matematik kutilmalar chekli bo`lsa, u holda

$$M\xi\cdot\eta=M\xi\cdot M\eta$$

tenglik o`rinli.

Isboti. ξ va η tasodifiy miqdorlar bog`liqsiz bo`lsin. Agar ξ va η sodda tasodifiy miqdorlar bo`lib $\xi=\sum_{k=1}^{\infty}x_k I_{A_k}(\omega), \eta=\sum_{j=1}^{\infty}y_j I_{B_j}(\omega)$ ko`rinishga ega bo`lsa, u holda ihtiyoriy $k,\ j$ butun sonlar uchun $P(A_k B_j)=P(A_k)\cdot P(B_j)$ tenglik o`rinli. Demak

$$M\xi\cdot\eta=M\left(\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}x_k y_j I_{A_k B_j}(\omega)\right)=\sum_{k=1}^{\infty}x_k y_j P(A_k B_j)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}x_k y_j P(A_k)P(B_j)=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}x_k P(A_k)\sum_{j=1}^{\infty}y_j P(B_j)=M\xi\cdot M\eta.$$

Agar ξ va η tasodifiy miqdorlar bog`liqsiz bo`lsa, u holda (6) formula orqali ifodalangan $\xi_n(\omega)$ va

$$\eta_n(\omega)=\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{j}{n}I_{B_j^{(n)}}(\omega), B_j^{(n)}=\left\{\omega; \frac{j}{n}\leq\eta(\omega)<\frac{j+1}{n}\right\}$$

sodda tasodifiy miqdorlar ham bog`liqsiz bo`ladi. Demak yuqorida isbotlanganiga ko`ra $M\xi_n\eta_n=M\xi_n\eta_n$ tenglik o`rinli. $\xi_n(\omega)$ ketma – ketlik $\xi(\omega)$ ga $\eta_n(\omega)$ ketma-ketlik $\eta(\omega)$ ga tekis yaqinlashgani uchun $\xi_n(\omega)\cdot\eta_n(\omega)$ ketma-ketlik $\xi(\omega)\eta(\omega)$ ga tekis yaqinlashadi. Demak matematik kutilmaning tarifiga ko`ra

$$M\xi\cdot\eta=\lim_{n\to\infty}M\xi_n\eta_n=\lim_{n\to\infty}M\xi_n\eta_n=\lim_{n\to\infty}M\xi_n\lim_{n\to\infty}M\eta_n=M\xi\cdot M\eta \quad .$$

[1] Musbat tasodifiy miqdorlarning matematik kutilmasi har doim mavjud.

Teorema isbot bo`ldi.

1-Natija. Agar $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ bog`liqsiz tasodifiy miqdorlar bo`lib, ular chekli matematik kutilmalarga ega bo`lsalar, u holda

$$M\xi_1\xi_2 \cdots \xi_n = M\xi_1 \cdot M\xi_2 \cdots M\xi_n$$

tenglik o`rinli.

5-Teorema. (Monoton yaqinlashish haqidagi teorema). $\xi_n(\omega)$ -manfiy bo`lmagan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun $\xi_n \le \xi_{n+1}, n = 1,2,...$ va $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n(\omega) = \xi(\omega)$ munosabatlar o`rinli bo`lsin. Agar $M\xi_n$ matematik kutilmalar mavjud bo`lib $\sup\limits_n M\xi_n < \infty$ bo`lsa, u holda $\xi$ tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi chekli bo`lib $M\xi = \lim\limits_{n\to\infty} M\xi_n$ tenglik o`rinli.

Isboti. $0 \le \xi_n(\omega) \le \xi(\omega)$ bo`lgani uchun 3 teoremaning $2^\circ$ xossasiga ko`ra $0 \le M\xi_n \le M\xi$ va

$$\lim_{n\to\infty} M\xi_n \le M\xi \ . \qquad (7)$$

$A_{nj}^{(k)} = \left\{\omega; \frac{j-1}{k} \le \xi_n < \frac{j}{k}\right\}$ va $\xi_{nk} = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{j-1}{k} I_{A_{nj}^{(k)}}(\omega)$ bo`lsin. U holda $\xi_{nk} \le \xi_{n,k+1}, \lim\limits_{k\to\infty} \xi_{nk} = \xi_n$ munosabatlar o`rinli. $\eta_k = \max\limits_{1\le n\le k} \xi_{nk}$ sodda tasodifiy miqdor va $0 \le \eta_k = \max\limits_{1\le n\le k} \xi_{nk} \le \max\limits_{1\le n\le k+1} \xi_{n,k+1} = \eta_{k+1}$ bo`lgani uchun $\eta_k$ monoton o`sadi. $\eta = \lim\limits_{k\to\infty} \eta_k$ bo`lsin. U holda har bir $k$ uchun $\eta_k \le \xi_k$ bo`lgani sababli

$$\lim_{k\to\infty} M\xi_k = M\eta \le \lim_{k\to\infty} M\xi_k . \qquad (8)$$

Shu bilan birga, $n \le k$, bo`lsa $\xi_{nk} \le \eta_k \le \eta$ va bundan $k \to \infty$ deb barcha $n$ lar uchun $\xi_n \le \eta$ tengsizlikning o`rinli ekanligini hosil qilamiz. Demak $\xi \le \eta$ va $M\xi \le M\eta$ tengsizliklar, (7) va (8) munosabatlar bilan birga teoremani isbotlaydi.

Diskret tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi

$$M\xi = \sum_k x_k P(\xi = x_k)$$

formula orqali ifodalanishi bizga malum. quyida absolyut uzluksiz tasodifiy miqdorlarning matematik kutilmasini hisoblash formulasini keltirib chiqaramiz:

6-Teorema. Agar ξ tasodifiy miqdor $p_\xi(x)$ zichlik funksiyaga ega bo`lib

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| p_\xi(x) dx < \infty$$

bo`lsa, u holda

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x p_\xi(x) dx \qquad (9)$$

tenglik o`rinli.

Isboti. Biz $p_\xi(x)$ Riman integrallanuvchi va (9) tenglikning o`ng tomonida Riman xosmas integrali turibdi deb faraz qilamiz (teoremaning isboti Lebeg integrali uchun ham o`rinli).

$A_k = \left\{ \frac{k}{2^n} < \xi(\omega) \le \frac{k+1}{2^n} \right\}$ deymiz va $\xi_n = \sum\limits_{k=-n2^n}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} I_{A_k}(\omega)$ sodda tasodifiy miqdorlar ketma-ketligini kiritamiz. U holda $\lim\limits_{n\to\infty} M\xi_n = M\xi$ tenglik ўrinli. Shu bilan birga

$$M\xi_n = \sum_{k=-n2^n}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} P(A_k) = \sum_{k=-n2^n}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} \int\limits_{\frac{k}{2^n}}^{\frac{k+1}{2^n}} p(u)du$$

va

$$\int\limits_{-n}^{n} xp(x)dx = \sum_{k=-n2^n}^{n2^n-1} \int\limits_{\frac{k}{2^n}}^{\frac{k+1}{2^n}} xp(x)dx \le \sum_{k=-n2^n}^{n2^n-1} \frac{k+1}{2^n} \int\limits_{\frac{k}{2^n}}^{\frac{k+1}{2^n}} p(x)dx \le$$

$$\le \frac{1}{n} + \sum_{k=-n2^n}^{n2^n} \int\limits_{\frac{k}{2^n}}^{\frac{k+1}{2^n}} p(x)dx \le \frac{1}{n} + \int\limits_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx$$

munosabatlar o`rinli.

$$\int\limits_{-n}^{n} xp(x)dx - \frac{1}{2^n} \le M\xi_n \le \int\limits_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx$$

tengsizlikdan $n \to \infty$ bo`lganda (9) tengsizlikning o`rinli ekanligi kelib chiqadi.

Endi absolyut uzluksiz tasodifiy miqdorlarning matematik kutilmasini hisoblashga doir bir nechta misollar keltiramiz.

7-Misol. $\xi - [a,b]$ oralig`ida tekis taqsimlangan tasodifiy miqdor bo`lsin. Bu holda $x < a$ yoki $x > b$ bo`lsa $p(x) = 0$ ekanligini hisobga olsak

$$M\xi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx = \int\limits_{a}^{b} \frac{x}{b-a} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{b^2 - a^2}{b-a} = \frac{b+a}{2}.$$

Kutilganidek $M\xi$ $[a,b]$ oraliqning o`rtasi bilan ustma-ust tushar ekan.

8-Misol. (a,σ) parametrli normal taqsimotga ega bo`lgan ξ tasodifiy miqdorning matematik kutilmasini topamiz:

$$M\xi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x\varphi_{a,\sigma}(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{ -\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2} \right\} dx.$$

Oxirgi integralda $y = {(x-a)}/{\sigma}$ almashtirish bajarib, topamiz

$$M\xi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma y + a}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{ -\frac{y^2}{2} \right\} dy = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma \cdot y}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{ -\frac{y^2}{2} \right\} dy + a \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{ -\frac{y^2}{2} \right\} dy =$$

$$= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y \exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\} dy + a \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) dy = a \, .$$

Bu erda birinchi integral integrallanuvchi funksiya toq funksiya bo`lgani sababli nolga teng, ikkinchisi esa standart normal zichlik funksiyadan olingan integral bo`lgani uchun birga teng ekanligini ko`rish qiyin emas. Shunday qilib, $M\xi = a$, yani normal taqsimotning birinchi parametri uning matematik kutilmasidan iborat ekan.

9-Misol. ξ tasodifiy miqdor Koshi zichlik funksiyasiga ega bo`lsin;

$$K(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

U holda $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x| dx}{\pi(1+x^2)} = \infty$ bo`lgani uchun, ξ ning matematik kutilmasi mavjud emas.

10-Misol. (α, λ)**-parametrli** gamma taqsimotning matematik kutilmasini hisoblaymiz. Gamma taqsimotning zichlik funksiyasi

$$p_\xi(x) = \begin{cases} o, x \le 0; \\ \dfrac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda x}, x > 0. \end{cases}$$

bo`lgani sababli

$$M\xi = \int_0^\infty \frac{\lambda^\alpha x^\alpha}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda \cdot \Gamma(\alpha)} \int_0^\infty u^\alpha e^{-u} du = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\lambda \cdot \Gamma(\alpha)} = \frac{\alpha}{\lambda}.$$

17-Maruza. Tasodifiy miqdor funksiyasining matematik kutilmasi

ξ *(Ω,A,P)* ehtimollar fazosida aniqlangan tasodifiy miqdor bo`lib, $g(x)$ - $R$ da aniqlangan qandaydir Borel funksiyasi va $\eta = g(\xi)$ bo`lsin. U holda η ham *(Ω,A,P)* fazoda aniqlangan tasodifiy miqdor bo`ladi (11 bob teorema 2). Uning matematik kutilmasini hisoblash uchun 11 bob 7-§ dagi formulalardan $\eta$ tasodifiy miqdorning taqsimotini topib, so`ngra avvalgi paragrafdagi tarifdan foydalanish mumkin. Ammo biz boshqa, qulayroq usulni qo`llaymiz.

Avval x_1, x_2, … qiymatlarni $p_k = P(\xi = x_k)$ ehtimollar bilan qabul qiluvchi ξ diskret tasodifiy miqdorni ko`ramiz. Bu holda $\eta = g(\xi)$ tasodifiy miqdor $g(x_1)$, $g(x_2)$,...,$g(x_k)$,... qiymatlarni p_k ehtimollar bilan qabul qilishi bizga malum. Shuning uchun ham, agar

$$\sum_{i=1}^{\infty} |g(x_i)| p_i < \infty$$

shart bajarilsa, u holda η tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi

$$M\eta = Mg(\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i)p_i$$

formula orqali aniqlanadi.

Endi ξ tasodifiy miqdor absolyut uzluksiz bo`lib, $p_\xi(x)$ uning zichlik funksiyasi bo`lgan holni qaraymiz.

7-Teorema. Agar ξ $p_\xi(x)$ zichlik funksiyaga ega bo`lib, $g(x)$ R da aniqlangan uzluksiz funksiya bo`lsa va

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| p_\xi(x)dx$$

integral absolyut yaqinlashsa, u holda

$$M\eta = Mg(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)p_\xi(x)dx \qquad (10)$$

tenglik o`rinli.

Isboti. Avval $[a,b]$ oraliqda aniqlangan va uzluksiz $g(x)$ funksiya uchun teoremani isbotlaymiz. Har qaysi $n = 1,2,...$ sonlar uchun $x_{nk} = a + \frac{b-a}{n}k$ va $g_n(x) = \begin{cases} 0, x \notin [a,b]; \\ g(x_{nk}), x_{n,k-1} < x \le x_{nk}, \end{cases}$ deb belgilaymiz.

$\varepsilon > 0$ ihtiyoriy musbat son bo`lsin. U holda faqat $\varepsilon$ ga bog`liq bo`lgan shunday $n_0$ natural son topiladiki, barcha $n \ge n_0$ va harqanday $x \in [a,b]$ sonlar uchun $|g_n(x) - g(x)| < \varepsilon$ tengsizlik o`rinli yani $g_n(x)$ funksiyalar ketma-ketligi $g(x)$ funksiyaga $[a,b]$ oraliqda tekis yaqinlashadi. $\eta_n = g_n(\xi)$ sodda tasodifiy miqdorlar ketma-ketligini kiritamiz. Yuqorida isbotlanganiga ko`ra $\eta_n$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi $\eta = g(\xi)$ tasodifiy miqdorga tekis yaqinlashadi . Demak matematik kutilmaning tarifiga ko`ra

$$\lim_{n\to\infty} Mg_n(\xi) = Mg(\xi) \qquad (11)$$

Ikkinchi tomondan

$$Mg_n(\xi) = \sum_{k=1}^{n} g(x_{nk}) \int_{x_{n,k-1}}^{x_{nk}} p_\xi(x)dx = \int_a^b g_n(x)p_\xi(x)dx.$$

Bu tenglikdan va yuqorida sbotlangan $|g_n(x) - g(x)| \le \varepsilon$ tengsizlikdan, $n \ge n_0$ sonlar uchun

$$\left| \int_a^b g(x)p_\xi(x)dx - Mg_n(\xi) \right| \le \varepsilon$$

tengsizlik kelib chiqadi. Bundan, (11) tenglikka ko`ra (10) formulaga kelamiz.

Endi $g(x) \ge 0$ bo`lgan holga o`tamiz. Ushbu

$$g_n(x)=\begin{cases} g(x), |x|\le n; \\ 0, |x|>n \end{cases}$$

funksiyalar ketma-ketligini kiritamiz. $\eta_n = g_n(\xi)$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi $\eta = g(\xi)$ tasodifiy miqdorga monoton yaqinlashadi. Monoton yaqinlashish haqidagi teoremaga ko`ra $Mg_n(\xi)\uparrow Mg(\xi)$ munosabat o`rinli. Bundan va

$$Mg_n(\xi)=\int_{-n}^{n} g(x)p(x)dx \to \int_{-\infty}^{\infty} g(x)p_\xi(x)dx$$

munosabatdan (10) tenglik manfiy bo`lmagan $g(x)$ funksiyalar uchun o`rinli ekanligi kelib chiqadi.

Umumiy holda, $g(x)=\max\{g(x);0\}+\min\{g(x);0\}=g^+(x)-g^-(x)$ tenglikdan va teoremaning musbat g(x) funksiyalar uchun o`rinli ekanligidan topamiz:

$$Mg(\xi)=Mg^+(\xi)-Mg^-(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty} g^+(x)p_\xi(x)dx-\int_{-\infty}^{\infty} g^-(x)p_\xi(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty} g(x)p_\xi(x)dx.$$

Teorema isbot bo`ldi.

3-Mulohaza. (10) formula $g(x_1,x_2,...,x_n)$ funksiya R_n fazoni R fazoga akslantiruvchi n-o`lchovli uzluksiz bo`lgan umumiy holda ham o`rinli ekanligini yuqoridagi kabi isbotlash mumkin. $\xi=(\xi_1,...,\xi_n)$ n o`lchovli tasodifiy vektor absolyut uzluksiz bo`lib, $p_{\xi_1,...,\xi_n}(x_1,...,x_n)$ uning zichlik funksiyasi bo`lsin. U holda matematik kutilma

$$Mg(\xi_1,...,\xi_n)=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} g(x_1,...,x_n)p_{\xi_1,...,\xi_n}(x_1,...,x_n)dx_1\cdots dx_n$$

formula orqali hisoblanadi.

4-Mulohaza. Tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini yozish malum qiyinchiliklarga olib keladigan bazi hollarda matematik kutilmani hisoblash uchun (10) formuladan foydalanmay, balki boshqa (matematik kutilmaning xossalaridan foydalanuvchi) turli usullar ishlatiladi:

11-Misol. Standart normal taqsimotga ega bo`lgan ξ tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi

$$M\xi=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x\exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}dx=0$$

va $\eta=\sigma\cdot\xi+a$ tasodifiy miqdor (a,σ^2) parametrli normal taqsimlangan. Demak matematik kutilmaning additivlik xossasiga ko`ra $M\eta=\sigma\cdot M\xi+a=a$ ekanligi kelib chiqadi. Bu tenglikni biz 8-misolda keltirib chiqargan edik.

12-Misol. n ta bog1liqsiz tajribalardan iborat bo`lgan Bernulli sxemasida, kuzatilayotgan A hodisaning ro`y berishlar soni μ ni $\mu=\mu_1+\mu_2+...+\mu_n$ yig`indi shaklida ifodalash mumkin, bu erda $\mu_j$ – A hodisa j nchi tajribada ro`y bersa 1 ro`y bermasa 0 qiymat qabul qblubchi tasodifiy miqdor.

$$M\mu_j = 0\cdot q + 1\cdot p = p$$

bo`lgani uchun, matematik kutilmaning additivlik xossasiga ko`ra

$$M\eta = M\eta_1 + M\eta_2 + ... + M\eta_n = np$$

tenglik kelib chiqadi. Bu 2-misoldagi natija bilan birxil, ammo juda kam hisoblashlar yordamida olingan.

18-Maruza. Dispersiya. Yuqori tartibli momentlar

Tasodifiy miqdorni sonli xarakteristikalaridan yana biri uning dispersiyasidir.

4-Tarif. ξ tasodifiy miqdorning **dispersiyasi** deb $D\xi = M(\xi - M\xi)^2$ songa aytiladi. $\sigma = \sqrt{D\xi}$ qiymatga ξ tasodifiy miqdorning **o`rta kvadratik chetlanishi** yoki **standart chetlanish** deyiladi.

$D\xi$ dispersiya ξ tasodifiy miqdorning qiymatlari uning matematik kutilmasi atrofida qanday tarqalgan ekanligini xarakterlovchi sondan iborat.

Dispersiyaning bazi xossalarini keltiramiz:

$1^\circ. D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2.$ Haqiqatan ham

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2 = M\left(\xi^2 - 2M(\xi\cdot M\xi) + (M\xi)^2\right) = M\xi^2 - 2M\xi\cdot M\xi + (M\xi)^2 = M\xi^2 - (M\xi)^2.$$

$2^\circ.$ Agar ξ tasodifiy miqdor yagona o`zgarmas C sonni 1 ehtimol bilan qabul qilsa, yani $P(\xi = C) = 1$ bo`lsa, u holda $D\xi = 0.$ Darhaqiqat, MC=C tenglikdan $D\xi = M(\xi - C)^2 = (C - C)^2\cdot 1 = 0.$ Demak $D\xi = 0$.

$3^\circ.$ Ihtiyoriy C son uchun $D(C\xi) = C^2 D\xi, D(\xi + C) = D\xi$ tengliklar o`rinli.

Isboti. $D(C\xi) = M(C\xi - MC\xi)^2 = M(C\xi - CM\xi)^2 = C^2 M(\xi - M\xi)^2 = C^2 D\xi.$

$$D(\xi + C) = M(\xi + C - M(\xi + C))^2 = M(\xi - M\xi + C - C)^2 = M(\xi - M\xi)^2 = D\xi.$$

$4^\circ.$ Agar ξ va η o`zoro bog`liq bo`lmagan tasodifiy miqdorlar bo`lsa, u holda $D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta$ tenglik o`rinli.

Isboti. Tarifga ko`ra $D(\xi + \eta) = M(\xi + \eta - M(\xi + \eta))^2$. Bundan matematik kutilmaning additivlik xossasidan foydalanib topamiz

$$D(\xi + \eta) = M(\xi - M\xi)^2 + 2M(\xi - M\xi)(\eta - M\eta) + M(\eta - M\eta)^2 = D\xi + D\eta,$$

chunki $\xi - M\xi$ va $\eta - M\eta$ tasodifiy miqdorlarning bog`liq emasligidan $M(\xi - M\xi)(\eta - M\eta) = M(\xi - M\xi)M(\eta - M\eta) = 0$ tenglik kelib chiqadi.

4-xossa, faqat ikkita emas, balki juft-jufti bilan bog`liqsiz bo`lgan n ta tasodifiy miqdorlar yig`indisi uchun ham o`rinli ekanligini ko`rish qiyin emas.

13-Misol. (n,p) parametrli binomial taqsimotga ega bo`lgan μ tasodifiy miqdorning dispersiyasini hisoblaymiz.

μ tasodifiy miqdorning dispersiyasini hisoblash uchun 1° xossadan foydalanamiz $M\mu$ matematik kutilma 2 misolda topilgan edi: $M\mu = np.$ Endi $M\mu^2$ matematik kutilmani hisoblaymiz:

$$M\mu^2=\sum_{k=0}^{n}k^2C_n^kp^k(1-p)^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}k^2\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}=np\sum_{k=1}^{n}k\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}p^{k-1}(1-p)n-k=$$

$$=np\sum_{j=0}^{n-1}(j+1)C_{n-1}^{j}p^j(1-p)^{n-j}=np(M\mu(n-1)+1)=np((n-1)p+1)=(np)^2+npq. \qquad (12)$$

Demak $D\mu=npq$. (12) natijaga ushbu usul bilan osongina kelish mumkin: $\mu(n)$ tasodifiy miqdorni n ta bog`liqsiz tajribalardan iborat bo`lgan Bernulli sxemasida kuzatilayotgan A hodisaning ro`y berishlar soni ekanligini hisobga olib uni

$$\mu=\mu(n)=\mu_1+\mu_2+...+\mu_n$$

ko`rinishidagi yig`indi shaklida ifodalash mumkin, bu erda μ_j orqali j nchi tajribada A hodisa ro`y bersa 1, aks holda 0 qiymat qabul qiluvchi tasodifiy miqdor belgilangan. Har bir qo`shiluvchining dispersiyasi

$$D\mu_j=(0-M\mu_j)^2\cdot q+(1-M\mu_j)^2\cdot p=(-p)^2q+(1-p)^2p=p^2q+q^2p=pq(p+q)=pq$$

va μ_j, $j=1,2,...,n$ tasodifiy miqdorlar birgalikda bog`liqsiz bo`lgani uchun, 4 xossaga ko`ra ushbu

$$D\mu=D\mu(n)=D\mu_1+D\mu_2+...+D\mu_n=npq$$

tenglikka kelamiz.

14-Misol. λ parametrli Puasson taqsimotiga ega bo`lgan ξ tasodifiy miqdorning dispersiyasi topilsin.

Buning uchun biz dispersiyaning 1° xossasidan foydalanamiz. Bizga $M\xi=\lambda$ ekanligi malum (3-misol). $M\xi^2$-miatematik kutilmani hisoblaymiz:

$$M\xi^2=\sum_{k=0}^{\infty}k^2\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\lambda\sum_{k=1}^{\infty}k\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda}=\lambda\sum_{j=0}^{\infty}(j+1)\frac{\lambda^j}{j!}e^{-\lambda}=$$

$$=\lambda\left(\sum_{j=0}^{\infty}j\frac{\lambda^j}{j!}e^{-\lambda}+\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda^j}{j!}e^{-\lambda}\right)=\lambda\cdot(M\xi+1)=\lambda^2+\lambda..$$

Shunday qilib

$$D\xi=M\xi^2-(M\xi^2)=\lambda^2+\lambda-\lambda^2=\lambda$$

yani Puasson taqsimotining dispersiyasi, uning matematik kutilmasi kabi, λ parametrga teng.

15-Misol. $[a,b]$ oralig`ida tekis taqsimlangan ξ tasodifiy miqdorning dispersiyasi (10) formulaga asosan topiladi:

$$D\xi=\int_a^b\left(x-\frac{b+a}{2}\right)^2\frac{1}{b-a}dx=\frac{1}{3(b-a)}\left[\left(b-\frac{b+a}{2}\right)^3-\left(a-\frac{b+a}{2}\right)^3\right]=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

16-Misol. (a,σ^2) parametrli normal taqsimotga ega bo`lgan ξ tasodifiy miqdorning dispersiyasini topamiz:

$$D\xi = \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^2 \varphi_{a,\sigma}(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-a)^2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\} dx;$$

$y = {(x-a)}/{\sigma}$ almashtirish bajarib, quyidagini hosil qilamiz;

$$D\xi = \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y^2}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\} dy.$$

Hosil bo`lgan integralni, $v = {y}/{\sqrt{2\pi}}, du = y\exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\}$ deb olib, bo`laklab integrallaymiz

$$D\xi = \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\} dy = \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y)dy = \sigma^2.$$

Demak, (a,σ^2) parametrli normal qonun bo`yicha taqsimlangan tasodifiy miqdorning dispersiyasi uning ikkinchi parametriga teng ekan.

17-Misol. (α,λ) -parametrli gamma taqsimotning dispersiyasini hisoblaymiz: $M\xi = \frac{\alpha}{\lambda}$ ekanligini hisobga olib, dispersiyaning 1° xossasidan foydalanamiz.

$$M\xi^2 = \int_0^{\infty} \frac{\lambda^{\alpha} x^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda \cdot x} dx = \frac{1}{\lambda^2\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} y^{\alpha+1} e^{-y} dy = \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\lambda^2\Gamma(\alpha)} = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2}.$$

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2} - \frac{\alpha^2}{\lambda^2} = \frac{\alpha}{\lambda^2}$$

5-Tarif. $\xi - (\Omega, \mathcal{A}, P)$ ehtimolliklar fazosida aniqlangan tasodifiy miqdor va k>0 qandaydir son bo`lsin Agar $M|\xi|^k$ matematik kutilma mavjud bo`lsa, u holda $a_k = M\xi^k$ songa ξ tasodifiy miqdorning **k-tartibli boshlang`ich momenti**, $m_k = M|\xi|^k$ songa esa, uning **k-tartibli absolyut momenti** deyiladi.

$\xi - M\xi$ tasodifiy miqdorning momentlarini **markaziy momentlar** deyiladi.

Agar $M\xi = 0$ bo`lsa, u holda markaziy moment boshlang`ich momentga teng bo`ladi. $\xi$ tasodifiy miqdorning birinchi tartibli boshlang`ich momenti uning matematik kutilmasi bilan, ikkinchi tartibli markaziy momenti esa dispersiyasi bilan ustma-ust tushadi.

18- Misol. Normal taqsimotning markaziy momentlari. $\xi - (a,\sigma^2)$ parametrli normal taqsimotga ega bo`lsin. U holda $M\xi = a, D\xi = \sigma^2$ ekanligi bizga malum. ξ tasodifiy miqdorning markaziy momentlarini hisoblaymiz.

$$\beta_m = M(\xi - a)^m = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^m \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\} dx.$$

Bu erda $z = \frac{x-a}{\sigma}$ almashtirish bajarib, topamiz

$$\beta_m = \frac{\sigma^m}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z^m \exp\left\{-z^2/2\right\} dz.$$

Agar m toq bo`lsa, u holda $\beta_m = 0$ bo`ladi, agar m –juft bo`lsa (m=2k) , u holda $\beta_{2k} = M(\xi - a)^{2k} = \frac{2\sigma^{2k}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} z^{2k} \exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\} dz$ da $\frac{z^2}{2} = t$ almashtirish bajarib, topamiz

$$\beta_{2k} = M(\xi - a)^{2k} = \frac{2^k \sigma^{2k}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} t^{k-1/2} e^{-t} dt = \frac{2^k \sigma^{2k}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(k + 1/2\right) = 1 \cdot 3 \cdots (2k-1)\sigma^{2k} = (2k-1)!!\sigma^{2k}.$$

19-Misol. λ - parametrli ko`rsatkichli taqsimotga ega bo`lgan ξ tasodifiy miqdorning yuqori tartibli momentlari hisoblansin.

Echish. ξ tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi

$$p_\xi(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x}, x \geq 0; \\ 0, x < 0 \end{cases}$$

formula orqali ifodalanishi bizga malum. ξ tasodifiy miqdorning k –tartibli momentini 7-teoremadagi (10) formuladan foydalanib topamiz.

$$a_k = M\xi^k = \int_0^{\infty} x^k \lambda \cdot e^{-k\lambda} dx = \lambda \int_0^{\infty} x^k e^{-\lambda \cdot x} dx = \frac{1}{\lambda^k} \int_0^{\infty} t^k e^{-t} dt = \frac{\Gamma(k+1)}{\lambda^k}.$$

19-Maruza. Asosiy tengsizliklar

Matematik analiz kursidan bizga malum bo`lgan yig`indi va integrallar uchun isbotlangan ko`p tengsizliklar ehtimollar nazariyasi va matematik statistika kursida ham keng qo`llaniladi**.** Shu bilan birga ehtimollar nazariyasining o`ziga xos bo`lgan tengsizliklar ham mavjud. Bu tengsizliklarning barchasida matematik kutilma va yuqori tartibli momentlar ishlatiladi. Bu paragrafda biz bunday tengsizliklarning eng muhimlarini keltiramiz.

Yensen tengsizligi. Agar $M|\xi| < \infty$ va $g(x)$ botiq funksiya bo`lsa, u holda

$$Mg(\xi) \geq g(M\xi) \qquad (13)$$

tengsizlik o`rinli.

$g(x)$- $(a,b)(-\infty \leq a < b \leq \infty)$ intervalda aniqlangan funksiya bo`lsin. Agar ihtiyoriy $x_1, x_2 \in (a,b)$ va istalgan $0 \leq \theta \leq 1$ sonlar uchun ushb u

$$g(\theta . x_1 + (1-\theta)x_2) \leq \theta . g(x_1) + (1-\theta) g(x_2) \qquad (14)$$

tengsizlik o`rinli bo`lsa, u holda $g(x)$ funksiya (a,b) intervalda botiq deyiladi.

x_0, (a,v) intervaldan olingan ihtiyoriy son bo`lsin. U holda $a < x_1 < x_0 < x_2 < b$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi ihtiyoriy x_1, x_2 sonlar uchun

$$\frac{g(x_1)-g(x_0)}{x_1-x_0} \le \frac{g(x_2)-g(x_0)}{x_2-x_0} \qquad (15)$$

tengsizlik o`rinli. (15) tengsizlikni isbotlash uchun (14) ifodada $\theta = \frac{x_2-x_0}{x_2-x_1}$ deb olish kifoya. (15) tengsizlikdan

$$\sup_{x_1<x_0} \frac{g(x_1)-g(x_0)}{x_1-x_0} \le C \le \inf_{x_2>x_0} \frac{g(x_2)-g(x_0)}{x_2-x_0}$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi o`zgarmas C soni mavjud ekanligi kelib chiqadi, oxirgi tengsizlik o`z navbatida

$$g(x) \ge g(x_0) + C\cdot(x-a) \qquad (16)$$

5-Mulohaza. Agar g(x) funksiya ikkinchi tartibli hosilaga ega bo`lsa, u holda uning botig`ligi $g''(x) \ge 0 \quad (a<x<b)$ tengsizlik bilan aniqlanishi bizga matematik analiz kursidan malum. Bu holda (16) tengsizlikda $C = g'(x_0)$ deb olish mumkin.

(16) tengsizlikda $x_0 = M\xi, x=\xi$ deb va uning har ikkala tomonidan matematik kutilma olsak (13) tengsizlik kelib chiqadi.

Lyapunov tengsizligi. Ihtiyoriy musbat $r<s$ sonlar uchun

$$\left(M|\xi|^r\right)^{1/r} \le \left(M|\xi|^s\right)^{1/s}$$

Bu tengsizlikni isbotlash uchun $g(x) = x^{s/r}$ botiq funksiya va $|\xi|^r$ tasodifiy miqdorlarga Yensen tengsizligini qo`llash kifoya.

Gelder tengsizligi. r>1,s>1, $1/r + 1/s = 1$ va ξ, η tasodifiy miqdorlar uchun $M|\xi|^r < \infty, M|\eta|^s < \infty$ munosabatlar o`rinli bo`lsin. U holda

$$M|\xi.\eta| \le \left(M|\xi|^r\right)^{1/r}.\left(M|\eta|^s\right)^{1/s} \qquad (17)$$

Isboti. $g(x) = -\ln x, x>0$ funksiya $(0,\infty)$ intervalda aniqlangan botiq funksiya bo`lgani tufayli (13) tengsizlik o`rinli: yani ihtiyoriy $x_1, x_2>0$ va istalgan $0 \le \theta \le 1$ sonlar uchun

$$\ln(x_1\theta + x_2(1-\theta)) \ge \theta \ln x_1 + (1-\theta)\ln x_2 = \ln\left(x_1^{\theta} \cdot x_2^{1-\theta}\right)$$

tengsizlik o`rinli. Endi $x_1 = |a|^r, x_2 = b^s; \theta = \frac{1}{r}, 1-\theta = \frac{1}{s}$ deb olsak

$$|ab| \le \frac{|a|^r}{r} + \frac{|b|^s}{s}$$

tengsizlikning o`rinli ekanligi kelib chiqadi. Bu tengsizlikda $a = \frac{\xi}{\left(M|\xi|^r\right)^{1/r}}, b = \frac{\eta}{\left(M|\eta|^s\right)^{1/s}}$ deb (biz $M|\xi|^r \ne 0, M|\eta|^s \ne 0$ deb faraz qilamiz aks holda

(17) tengsizlik trivial bajariladi) hosil bo`lgan tengsizlikning har ikki tomonidan matematik kutilma olsak, biz Golder tengsizligiga kelamiz.

Chebishev tengsizligi.

ξ tasodifiy miqdor va $H(\xi)=I_{\{\xi>0\}}$ - $\{\xi>0\}$ hodisaning indikatori bo`lsin. $H(\xi)$ funksiyaga Xevisayd funksiyasi deyiladi.

$\xi-$ manfiy bўlmagan tasodifiy miқdor va a>0 –ihtiyoriy musbat son bo`lsin. Ushbu bevosita tekshiriladigan

$$H(\xi-a)\le\frac{\xi}{a}$$

tengsizlikning har ikki tomonidan matematik kutilma olib (3-teoremaning 2°punktiga ko`ra bunday qilish mumkin) ushbu

$$P(\xi>a)\le\frac{M\xi}{a} \qquad (18)$$

Markov nomi bilan ataluvchi sodda, lekin juda ham foydali tengsizlikni hosil qilamiz. Agar ξ musbat va chekli matematik kutilmaga ega bo`lsa, bu tengsizlikdan $\xi$ tasodifiy miqdorning berilgan $a$ qiymatdan katta bo`lish ehtimolining yuqori chegarasi kelib chiqadi. Shu bilan birga $M\xi$ qancha kichik bo`lsa, bu chegara shuncha kichik bo`ladi. Agar $M\xi\le a$ bo`lsa (18) aniq tengsizlik bo`ladi, yani shunday ξ tasodifiy miqdor mavjudki uning uchun $M\xi$ oldindan aniqlangan (berilgan) qiymatga ega va (18) munosabatda tenglikka erishish mumkin. Masalan, agar ξ tasodifiy miqdor 0 va a qiymatlarni, mos ravishda $1-\frac{M\xi}{a}$ va $\frac{M\xi}{a}$ ehtimollar bilan qabul qilsa bunday tenglik o`rinli.

Endi musbat bo`lishi shart bo`lmagan, ammo $M\xi$ va $M\xi^2$ matematik kutilmalarning qiymatlari chekli bo`lgan ξ tasodifiy miqdorni olaylik. Yuqoridagi kabi

$$H(|\xi-m|-a)\le\left(\frac{\xi-m}{a}\right)^2$$

tengsizlikni har ikki tomonidan matematik kutilma olib

$$P\big(|\xi-m|>a\big)\le\frac{M(\xi-m)^2}{a^2} \qquad (19)$$

munosibatni hosil qilamiz (bu erda m ihtiyoriy haqiqiy son): yani biz ξ tasodifiy miqdorning m dan berilgan a qiymatga chetlanish ehtimoli uchun $M\xi$ va $M\xi^2$ matematik kutilmalar orqali ifodalangan yuqori chegarasini hosil qildik. $(\xi-m)^2$ kvadratning matematik kutilmasi $M(\xi-m)^2=M\xi^2-2mM\xi+m^2, m$ bo`yicha o`zining eng kichik qiymatiga $m=M\xi$ bo`lganda erishadi.

(19) tengsizlikda $m = M\xi$ deb olsak, biz Chebishev tengsizligini hosil qilamiz:

$$P(|\xi - M\xi| > a) \le \frac{D\xi}{a^2} \ ,$$

bu matematik kutilmadan *a* qiymatga chetlanish ehtimolini ξ tasodifiy miqdorning dispersiyasi bilan bog`laydigan juda muxum tengsizlik.

Agar ξ tasodifiy miqdor nolga teng dispersiyaga ega bo`lsa, yani $M(\xi - M\xi)^2 = 0$ bo`lsa, u holda ξ **o`rta kvadratik manoda** $M\xi$ qiymatga teng deymiz va $\xi \overset{kb}{=} M\xi$ deb yozamiz. $\xi \overset{kb}{=} M\xi$ bo`lsa, Chebishev tengsizligidan ihtiyoriy kichik musbat son *a* uchun $P(|\xi - M\xi| \le a) = 1$ tenglik o`rinli yoki 1 ehtimol bilan $\xi = M\xi$ ekanligi kelib chiqadi.

8-Teorema. $g(x) \ge 0, \xi$ tasodifiy miqdorning qiymatlar sohasida kamaymovchi funksiya bo`lib, $Mg(\xi)$ matematik kutilma mavjud bo`lsin. U holda harqanday *a>0* uchun

$$P(|\xi| > a) \le \frac{Mg(\xi)}{g(a)}$$

tengsizlik ўrinli.

Bu teorema ham (18) va (19) tengsizliklar kabi

$$H(|\xi| - a) \le \frac{g(\xi)}{g(a)}$$

ifodaning har ikkala tomonidan matematik kutilma olib isbotlanadi.

2-Natija. *k*- ihtiyoriy natural son va $M|\xi|^k < \infty$ bo`lsa, u holda har qanday musbat haqiqiy son *a* uchun

$$P(|\xi| > a) \le \frac{M|\xi|^k}{a^k}$$

tengsizlik o`rinli.

Bu tengsizlikka *k* –nchi tartibli momentlar uchun **Chebishev tengsizligi** deyiladi.

20-Maruza. Katta sonlar қonuni.

Bu nom bilan yuritiladigan limit teoremalar juda katta amaliy aҳamiyatga ega bўlib, ular eҳtimollar nazariyasini amaliyotda қўllash uchun kўprik bўlib ҳizmat қiladi. Bu limit munosabatlarning asosida қўshiluvchilar soni cheksiz ravshda ўsib borgan sari tasodifiy miқdorlar yiғindisining қiymatlari uchun “tasodifiylik” yўқolib borishi va bu қiymatlar aniқ bir songa intilib borishi yotadi.

Teorema-1. Ўrta қiymatga ega bўlgan boғliқsiz va bir xil taқsimlangan tasodifiy miқdorlar ketma-ketligi $\{\xi_n\}$ uchun $M\xi_n = a, \quad S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$ bўlsin. U ҳolda xar қanday musbat $\varepsilon > 0$ uchun

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n}-a\right|\geq\varepsilon\right)\to 0,\qquad n\to\infty$$

yaъni, $n\to\infty$ da $\frac{S_n}{n}\xrightarrow{P} a$ bўladi.

Keltirilgan teoremaning ifodasi va ξ_k larni boғliқsizlik sharti ularni bitta eҳtimollik fazosida aniқlangan bўlishligini taқazo қiladi. Bu teorema oddiy matematik teorema bўlib, sodda қilib aytganda, kўrilayotgan tasodifiy miқdorlar uchun “vaқt bўyicha olingan ўrta қiymat” “fazo bўyicha olingan ўrta қiymat”ga yaқinligini kўrsatadi.

Teoremaning isboti. Oldin eslatib ўtilganidek, agar limit tasodifiy miқdor ўzgarmas son bўlsa, tasodifiy miқdorlar ketma-ketligi uchun eҳtimollik bўyicha yaқinlashishi taқsimotlar kuchsiz yaқinlashishi bilan teng kuchli bўladi.

Aytaylik

$$f_n(t)=Me^{itS_n},\qquad f(t)=Me^{it\xi_1}$$

bўlsin. Uzluksizlik teoremesiga asosan (teorema §) ҳar қanday t uchun

$$f_n\left(\frac{t}{n}\right)\to e^{iat},\qquad n\to\infty \tag{1}$$

ekanligini isbotlash etarli bўladi.

Xarakteristik funksiya $f(t)$ uzluksiz ekanligidan O nuқtaning қandaydir atrofida $|f(t)-1|<\frac{1}{2}$ tengsizlik bajariladi. Demak, shu tengsizlikni қanoatlantiruvchi t lar uchun $l(t)=\ln\varphi(t)$ funksiyani aniқlash mumkin (logarifmik funksiyaning bosh қiymati ҳisobga olinadi). Tasodifiy miқdor ξ_k ning ўrta қiymati mavjud bўlgani uchun

$$l'(0)=\frac{\varphi'(0)}{\varphi(0)}=ia$$

tenglik ўrinli bўladi.

Fiksirlangan t ning қiymati uchun n ning etarli katta қiymatlarida $l\left(\frac{t}{n}\right)$ funksiya aniқlangan bўladi va

$$f_n\left(\frac{t}{n}\right)=f^n\left(\frac{t}{n}\right)=e^{nl\left(\frac{t}{n}\right)}$$

formula ўrinli.

Endi $l(0)=0$ ekanligidan $n\to\infty$ da

$$l^{nl\left(\frac{t}{n}\right)}=\exp\left\{t\cdot\frac{l\left(\frac{t}{n}-l(0)\right)}{\frac{t}{n}}\right\}\to l^{tl'(0)}=e^{iat}$$

limit munosabatni olamiz. Bu esa (1) ning tўғri ekanligini kўrsatadi.

Eslatib ўtish mumkinki teorema 1 ga teskari bўlgan teorema ҳam tўғri bўladi, yaъni $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} a$ ekanligidan ξ_k tasodifiy miқdorning ўrta қiymati mavjud bўlib, u a ga teng bўladi. Lekin bu jumlaning isboti keltirilgan isbotga nisbatan murakkab ravishda ўtadi.

Umuman berilgan tasodifiy miқdorlar ketma-ketligi $\{\xi_n\}$ uchun katta sonlar қonuni ўrinli deyiladi, agarda $n \to \infty$ da $\frac{S_n}{n}$ ifoda biror ўzgarmas songa eҳtimollik bўyicha yaқinlashsa. Teorema 1 va unga berilgan izoҳ kўrsatadiki boғliқsiz va bir xil taқsimlangan tasodifiy miқdorlar ketma-ketligi uchun kata sonlar қonuni ўrinli bўlishi uchun ўrta қiymatning mavjud bўlishi etarli va zaruriy shart bўlar ekan. Bu қonun yuқorida aytilganidek katta amaliy xarakterga ega. Buni қuyidagi sodda misolda ҳam kўrish mumkin. Aytaylik a қandaydir nomaъlum miқdor bўlib(er sharining diametri, yadro zarrachasining parchalanish davri va ҳakazo), uni tajriba yordamida aniқlash kerak bўlsin. Tajriba ўtkazilishi xolatlarini ўzgartirmagan ҳolda olingan n marta ўlchov natijalari $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ larni boғliқsiz bir xil taқsimlangan tasodifiy miқdorlar deb қabul қilish mumkin va ular uchun $M\xi_1 = M\xi_2 = ... = M\xi_n = a$ bўladi. Teorema 1 ga kўra

$$\frac{\xi_1 + ... + \xi_n}{n} \approx a$$

munosabat ўrinli ekanligi kelib chiқadi va katta sonlar қonuni amaliyotda nomaъlum miқdorlar uchun tajriba natijalarining ўrta arifmetik ifodasi қўllanishi mumkinligini asoslab beradi.

Ixtiyoriy boғliқsiz tasodifiy miқdorlar uchun katta sonlar қonuni ўrinli ekanligi ҳaқidagi teoremalar қўshimcha shartlarni bajarilishini talab etadi.

Teorema 2. Boғliқsiz bўlgan $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ tasodifiy miқdorlar uchun $M\xi_k = a_k$, $D\xi_k = \sigma_k^2$ bўlsin. Agar

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sigma_k^2}{k^2}$$

қator yaқinlashsa xar қanday musbat ε uchun $n \to \infty$ da

$$P\left(\left| \frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n} - \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \right| \geq \varepsilon \right) \to 0$$

ўrinli bўladi.

Keltirilgan teorema 2 dan kўrinadiki, agar kўrilayotgan tasodifiy miқdorlarning dispersiyalari biror umumiy musbat son bilan chegaralangan bўlsa, yaъni $\sigma_1^2 \leq c,\ \sigma_2^2 \leq c, \ldots,\ \sigma_n^2 \leq c, \ldots, \quad (c > 0)$ tengsizliklar ўrinli bўlsa, bu tasodifiy miқdorlar ketam-ketligi uchun katta sonlar қonuni bajarilar ekan.

21-Maruza. Bir xil taқsimlangan boғliқsiz tasodifiy miқdorlar uchun markaziy limit teorema.

Umuman $\{\xi_n\}$ tasodifiy miқdorlar ketma-ketligi berilgan bўlsa, bu ketma-ketlik uchun markaziy limit teorema ўrinli deyiladi, agar қandaydir $\{A_n\}$ va $\{B_n\}$ ($B_n > 0,\ B_n \to \infty,\ n \to \infty$) sonli ketma-ketliklar uchun

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n - A_n}{B_n} < x\right) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

limit munosabat bajarilgan bўlsa.

Oldingi boblarda Bernulli sxemasi uchun keltirilgan Muavr-Laplas teoremasidan kelib chiқadiki, $\{A_n\}$ va $\{B_n\}$ sonli ketma-ketliklar berilgan tasodifiy miқdorlar ξ_k larni sonli xarakteristikalari orқali ifodalanishi mumkin ekan. Agar $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$ deb қabul қilsak, bu yiғindining ўrta қiymati MS_n sonlar ўқida ixtiyoriy ravishda siljishi mumkin. $\{A_n\}$ ketma-ketlikni tanlash xisobiga esa MS_n ni "markazga" O nuқtaga joylashtirish mumkin, shuning uchun xam $\{A_n\}$ ketma-ketlik "markazlashtiruvchi" vazifani ўtaydi. Ўz navbatida S_n yiғindining taқsimoti $n \to \infty$ da $(-\infty)$ ga, yoki $(+\infty)$ ga "ketib қolishi" mumkin. Bu xolatlarni bartaraf etish uchun $\{B_n\}$ $(B_n \to \infty,\ n \to \infty)$ ketma-ketlik yordamida S_n ning taқsimotini sonlar ўқining chegaralangan қismida "saқlab turish" mumkinligi uchun xam bu ketma-ketlikni "normallashtiruvchi" ketma-ketlik deyiladi.

SHu narsani aloxida қayd etib ўtish kerakki, agar berilgan $\{\xi_n\}$ ketma-ketlik uchun markaziy limit teorema ўrinli bўlsa $\frac{S_n - A_n}{B_n}$ tasodifiy miқdorning taқsimot funksiyasining limiti қўshiluvchilar ξ_k larni taқsimotiga boғliқ emas va қisқaroқ қilib bu tasodifiy miқdor asimptotik normal deb ataladi. Aytilgan fikrdan shu narsa maъlum bўldiki, markaziy limit teorema deganda bitta limit munosabat emas, aksincha ξ_k larni taқsimotlari sinfi xisobga olinsa, bu bir limit teoremalar sinfi yuzaga keladi deb tushunish mumkin. SHuning uchun xam markaziy limit teorema ўz moxiyati bilan қandaydir "yiғma" maъnoga ega.

Endi faraz қilaylik $\{\xi_n\}$-bir xil taқsimlangan boғliқsiz tasodifiy miқdorlar ketma-ketligi bўlsin. Қўyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$M\xi_n = a,\ \ D\xi_n = \sigma^2,\ \ \overline{S}_n = \frac{S_n - na}{\sigma\sqrt{n}},\ \ f(t) = Me^{it\xi_n},\ \ f_n(t) = Me^{it\overline{S}_n}.$$

Teorema 3. Agar $0 < \sigma^2 < \infty$ bўlsa, $n \to \infty$ da

$$\sup_x \left| P\left(\overline{S}_n < x\right) - \Phi(x) \right| \to 0$$

bўladi.

Isbot. Keltirilgan teoremadagi yaқinlashish kuchsiz yaқinlashish va $\Phi(x)$ funksiyaning uzluksiz ekanligidan kelib chiқadi. Umumiylik cheklamagan xolda $a = 0$ deb xisoblash mumkin, chunki aks xolda $\{\xi_n\}$ ning ўrniga $\{\xi'_n = \xi_n - a\}_{n=1}^{\infty}$ tasodifiy miқdorlar ketma-ketligini kўrish mumkin bўlar edi va bunday almashtirish natijada $\{\overline{S}_n\}$ ketma-ketlik ўzgarmasdan қolgan bўlar edi. Demak teoremaning isboti uchun $a=0$ bўlgan ҳolda ҳar қanday t uchun

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \qquad (1)$$

ekanligini kўrsatish etarli bўladi.

Dispersiya σ^2 ni mavjudligidan $f''(t)$ ҳosilaning mavjudligi kelib chiқadi va t ning etarli kichik қiymatlarida

$$f(t) = f(0) + tf'(0) + \frac{t^2}{2} f''(0) + 0(t^2) = 1 - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + 0(t^2)$$

yoyilma ўrinli bўladi.

Endi berilgan tasodifiy miқdorlar boғliқsizligini ҳisobga

$$f_n(t) = f''\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) = e^{n\ln f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)}$$

tenglik ўrinli ekanligini olamiz (Bu erda n ning etarli katta қiymatlarida $\ln f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)$ logarifmning mavjudligi $f(t)$ ning uzluksizligidan kelib chiқadi). Aytilganlarni ҳisobga olgan ҳolda

$$\ln f_n(t) = n\ln\left[1 - \frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)^2 + 0\left(\frac{t^2}{n}\right)\right] = n\left(-\frac{t^2}{2n} + 0\left(\frac{t^2}{n}\right)\right) = -\frac{t^2}{2} + 0(1) \to -\frac{t^2}{2}$$

ekanligiga ishonch ҳosil қilamiz. Oxirgidan (1) tenglikni olamiz. Teorema 3 isbotlandi. Keltirilgan teorema mashҳur fransuz matematigi Levi nomi bilan ҳam yuritiladi.

Асосий адабиётлар.

1. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. М.; Наука. 1987.
2. Боровков А.А. Теория вероятностей. М.; Наука. 1986.
3. Сираждинов С.Х., Маматов М.М. Эщтимоллар назарияси ва математик статистика. Тошкент.; Ы=итувчи, 1980.
4. Севастьянов Б.А. Курс теории вероятностей и математической статистики. М.; Наука. 1982.
5. Абдушукуров А.А., Азларов Т.А., Джомирзаев А.А. Эщтимоллар назарияси ва математик статистикадан масалалар тыплами. Т. 2003.
6. Мешалкин Л.Д. Сборник задач по теории вероятностей. Из-во МГУ. 1982.
7. Севастьянов Б.А., Чистяков В.П., Зубков А.М. Сборник задач по теории вероятностей. М.; Наука, 1980.

+ышимча адабиётлар.

1. Ширяев А.Н. Вероятность. М.; Наука. 1980.
2. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и её приложения 1 и 2 том.М.; Мир. 1984.
3. Лоэв М. Теория вероятностей. М. Из-во ИЛ. 1962.
4. Боровков А.А. Математическая статистика. М., Наука, 1984.
5. Гмурман В.Е. Эщтимоллар назарияси ва математик статистика. Тошкент, 1972.
6. Гмурман В.Е.Эщтимоллар назарияси ва математик статистикадан масалалар ечишга доир =ылланма. Тошкент, 1972.

EHTIMOLLAR NAZARIYASI MISOL VA MASALALARDA

T.M.Zuparov

Toshkent 2010

OZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O`RTA
MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

MIRZO ULUG`BEK NOMLI O`ZBEKISTJN MILLIY
UNIVERSITETI

T.M.Zuparov

EHTIMOLLAR NAZARIYASI MISOL VA MASALALARDA

Matematika mutaxasisligi talabalari, magistrlar va aspirantlar
uchun o`quv qo`llanma

Toshkent – 2010

UDK 519.21

Ehtimollar nazariyasi misol va masalalarda /Oquv qo`llanma/
T.M.Zuparov; O`zMU – T.2010 - bet.

Ehtimollar nazariyasidan misol va masalalarni o`z ichiga oladi. O`quv dasturining har bir bo`lagidan zaruriy nazariy tushuncha va tasdiqlar keltirilib, ehtimollar nazariyasi fanida ishlatiladigan usul va metodlarni oydinlashtiruvchi misol va masalalar yechilgan va mustaqil yechish uchun masalalar javoblari bilan berilgan.

O`quv qo`llanma matematika, amaliy matematika, fizika mutaxasisligi talabalari, magistrlar, aspirantlar va o`qituvchilar uchun mo`ljallangan.

Muqaddima

Ko`zlangan o`quv qo`llanma oliy o`quv yurtlarining ehtimollar nazariyasi va matavatik statistika kursini o`rganuvchi matematika, amaliy matematika, fizika mutaxasisligi talabalari va magistrlariga ,o`ljallangan. O`quv qo`llanmada ehtimollar nazariyasining barcha bo`1lim materiallarini chuqur o`zlashtirish uchun zarur bo`lgan misol va masalalar taqdim etilgan. Bunday masalalarni yechish jarayonida o`quvchi ma’ruzalarda olgan ma’lumotlarni na faqat chuqurlashtiradi va mustahkamlaydi, shu bilan birga u bu ma’lumotlar yordamida yangi matematik muammolarni qo`yishga o`rganadi va ularni muvaffaqiyatli yecha oladigan bo`ladi. Shu sababli ushbu o`quv qo`llanma ehtimollar nazariyasi va matematik statistika sohasida ta’lim oluvchi aspirant va magistrantlar uchun ham foydali ekanligiga ekanligiga ishonchimiz komil.

O`quv qo`llanma ehtimollar nazariyasi va matematik statistika fanini Mirzo Ulug`bek nomidagi O`zbekiston Milliy Universitetida o`qitish tajribasini o`zida aks ettiradi [1] o`quv qo`llanmaga to`liq mos keladi.

Masalalar amaldagi dasturladning tuzikishiga va [1] o`quv qo`llanmaga mos ravishda boblarga, paragraflarga ajratilgan. Har bir paragrafda zaruriy nazariy ma’lumotlar, o`ziga xos masalalarning yechimlari, shuningdek mustaqil yechish uchun ko`p miqdorda misol va masalalar javoblari bilan keltirilgan. Masalalarning yechimlarida asosiy e'tiborni masalalar yechishning faqatsof ehtimolcha usullarigagina emas, shu bilsn birga ularni ehtimollar nazariyasi fani bilan bog`liq bo`lgan asosiy (funksional analiz, matematik analiz, algebra, kombinatorika va sonlar nazariyasi kabi) fanlarda qo`llaniladigan usullarga ham qaratilgan. Har bir paragrafda standart usul va formulalar qo`llab echiladigan sodda masalalar bilan bir qatorda ehtimollar nazariyasi va matematik statidtika fanini chuqur o`zlashtirishni o`zlariga maqsad qilib qo`ygan o`quvchilar uchun mo`ljallangan va ularni yechish uchun prinsipial muhim g`oya va usullarni talab etuvchi masalalar ham keltirilgan.

«Эщтимоллар назариясининг математик асослари » фанидан тест саволлари.

1.Если $\{A_n\}$ – последовательность несовместимых событий, то
А. $\lim_n A_n = \varnothing$ В. $\lim_n A_n = \Omega$ С. Предел не существует Д. ничего нельзя сказать.

2.Класс всех подмножеств пространства Ω
А. Монотонный класс; не σ – алгебра В. Не алгебра; σ – алгебра.
С. Алгебра; σ – алгебра Д. Алгебра; не σ – алгебра

3.Когда $A \cup B = A \cap B$?
А. $A \subset B$ В. $B \subset A$ С. Никогда. Д. А=В

4.Укажите неверное равенство:
А. $A \cap (B - C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ В. $(A - C) \cap (B - C) = (A \cap B) - C$
С. $(A - B) \cap (C - D) = (A \cap C) - (B \cup D)$ Д. $(A - B) - C = A - (B \cup C)$

5.Пусть $\Omega = R.$ Укажите минимальную σ – алгебру содержащую множество $[0,1]$.

А. Не существует. В. $\{R;[0,1];(-\infty,0)\cup(1,\infty);\varnothing\}$ С. Множество всех подмножеств пространства R. Д. σ – алгебра борелевских множеств пространства R.

6.Пусть $I_A = I_A(\omega)$ – индикатор события А. Укажите неверное высказывание.

А. Неравенство $I_A(\omega) \le I_B(\omega)$ имеет место для всех $\omega \in \Omega$ тогда и только тогда,

когда $A \subset B$.

В. $I_{A\cup B} = I_A + I_B - I_{A\cap B}$

С. $I_{\varnothing}(\omega) \equiv 0; I_{\Omega}(\omega) \equiv 1.$

Д. $I_{A\cap B} \ne I_A \cdot I_B$

7.Пусть Ω – дискретное пространство элементарных событий. $\Re$ – совокупность всех его подмножеств. Положим $\mu(A) = 0$ если А конечно и $\mu(A) = \infty$, если А бесконечно. Какими свойствами аддитивности обладает функция множеств $\mu(\cdot)$.

А. Конечно – аддитивна, но не счетно – аддитивна

В. И конечно – аддитивна, и счетно – аддитивна

С. Счетно – аддитивна, но не счетно – аддитивна

Д. Не является аддитивной.

8.Система $\aleph$ подмножеств пространства элементарных событий Ω называется монотонным классом, если

А.из того, что $A_n \in \aleph$, $n = 1, 2, ...$ и $A_n \uparrow A$ или $A_n \downarrow A$ следует, что $A \in \aleph$..

В.для любой последовательности $A_n \in \aleph$, $n = 1, 2, ...$ $\cup A_n \in \aleph$ и $\cap A_n \in \aleph$.

С.для всех монотонно возрастающих последовательностей событий $A_n, n = 1, 2, ...$ $\lim\limits_n A_n \in \aleph$

Д.для любой последовательности $A_n, n = 1, 2, ...$ $\limsup\limits_n A_n \in \aleph$.

9.Функция множеств Р определенная в классе событий $\Im$ называется вероятностью, если выполнены следующие условия:

А.1^0. $\Im$ - алгебра множеств.

2^0.Для любого $A \in \Im, P(A) < 0.$

3^0. $P(\Omega) = 1$,т.е. вероятность достоверного события Ω равна 1.

4^0.Если А и В несовместимые события, то $P(A+B) = P(A) + P(B).$

В.1^0. $\Im$ - алгебра множеств.

2^0.Для любого $A \in \Im, P(A) \ge 0.$

3^0. $P(\Omega) < 1$,т.е. вероятность достоверного события Ω меньше 1.

4^0.Если А и В несовместимые события, то $P(A+B) = P(A) + P(B).$

С.1^0. $\Im$ - алгебра множеств.

2^0.Для любого $A \in \Im, P(A) \ge 0.$

3^0. $P(\Omega)=1$,т.е. вероятность достоверного события Ω равна 1.

4^0.Если А и В несовместимые события, то $P(A+B)=P(A)+P(B)$.

Д.1^0. $\Im$ - алгебра множеств.

2^0.Для любого $A\in\Im, P(A)>0$.

3^0. $P(\Omega)=1$,т.е. вероятность достоверного события Ω равна 1.

4^0.Если А и В несовместимые события, то $P(A+B)=P(A)+P(B)$.

10. Если $P(A)>0,$ то как находятся условная вероятность события В при условии, что произошло события А?

А. $P_A(B)=P(A)(P(A)+P(B))$. В. $P_A(B)=P(A)/(P(A)+P(B)$. С. $P_A(B\ )=P(A)/P(AB)$.

Д. $P_A(B)=P(AB)/P(A)$.

11. Если А и В независимые события, то вероятность того, что произошло хотя бы одно из этих событий равна

А. $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$. В. $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

С. $P(A+B)=P(A)+P(B)+P(AB)$. Д. $P(A-B)=P(A)-P(B)+P(AB)$.

12. Вероятность того, что при n независимых испытаниях наблюдаемая события А произошло ровно k раз, по формуле Бернулли равняется:

А. $P_n(k)=C_n^k p^{n-k}q^k$, где $p=P(A), q=1+p$.

В. $P_n(k)=C_n^k p^{n-k}q^k$, где $p=P(A), q=1-p$.

С. $P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}$, где $p=P(A), q=1-p$.

Д. $P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}$, где $p=P(A), q=1+p$.

13.Пусть $P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}, 0<p<1, q=1-p$. Если $np\to\lambda>0,$ то, какое из следующих
соотношений справедливо?

А. $P_n(k)\approx\lambda^k e^{-\lambda}/k!$, В. $P_n(k)\approx\lambda^k e^{-\lambda}/k$. С. $P_n(k)\approx\lambda\ e^{-\lambda}/k!$

Д. $P_n(k)\approx\lambda^k e^{\lambda}/k!$

14.Пусть $P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}, 0<p<1, q=1-p$. Если $n\to\infty, k\to\infty$, то какое из следующих соотношений справедливо?

А. $P_n(k)\approx\varphi(x_k)/\sqrt{npq}$, где $\varphi(x\ )=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2\ /2}, x_k=(k-np)/\sqrt{npq}.$

В. $P_n(k)\approx\varphi(x_k)/\sqrt{npq}$, где $\varphi(x\ )=e^{-x^2\ /2}, x_k=(k-np)/\sqrt{npq}.$

С. $P_n(k)\approx\varphi(x_k)/\sqrt{np}$, где $\varphi(x\ )=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2\ /2}, x_k=(k-np)/\sqrt{npq}.$

Д. $P_n(k)\approx\varphi(x_k)/\sqrt{np}$, где $\varphi(x\ )=e^{-x^2\ /2}, x_k=(k-np)/\sqrt{np}.$

15.Величина, возможные значения которой является некоторые фиксированные
числа и она принимает их с определенными вероятностями, является

А.Сингулярная случайная величина.
В. Дискретная случайная величина.
С. Непрерывная случайная величина.
Д.Пуассоновское распределение.

16.Если число независимых испытаний большое, а вероятность наблюдаемого
события очень маленькое, то вероятность появления события А при n испытаниях ровно k раз, нужно вычислить по формуле:

А. $P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \lambda = np.$ $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$.

В. $P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}}\left[\Phi\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}\right)\right]$, где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-x^2/2}dx.$

С. $P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right)$, где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$.

Д. $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$.

17.Пусть Ω – дискретное пространство элементарных событий. $\Im$ – совокупность всех его подмножеств. Положим $\mu(A)=0$, если А конечно и $\mu(A)=\infty$, если А бесконечно. Какими свойствами аддитивности обладает функция множеств $\mu(\cdot)$?

А. Не является аддитивной.
В. Конечно - аддитивна, но не счетно – аддитивна
В. И конечно – аддитивна, и счетно – аддитивна
С. Счетно – аддитивна, но не конечно – аддитивна
Д. Не является аддитивной.

18. Система $\Im$ подмножеств пространства элементарных событий Ω называется монотонным классом, если

А. Для любой последовательности $A_n \in \Im, n = 1,2,...$ $\bigcup A_n \in \Im$ и $\bigcap A_n \in \Im.$

В. для всех монотонно возрождающих последовательностей событий $A_n, n = 1,2,... \lim\limits_n A_n \in \Im$

С. для любых последовательностей $A_n, n = 1,2,... \lim\sup\limits_n A_n \in \Im$.

Д. из того, что $A_n \in \Im, n = 1,2,...$ и $A_n \uparrow A$ или $A_n \downarrow A$ следует, что $A \in \Im.$

19.Чему равны $\lim\sup A_n$ и $\lim\inf A_n$ в случае, когда Ω есть действительная прямая и A_n суть интервалы $(-\infty, a_n); n = 1,2,...$?

А. $\left(-\infty, \sup\limits_{n\geq 1}\inf\limits_{k\geq n} a_k\right)$; $\left(-\infty, \inf\limits_{n\geq 1}\sup\limits_{k\geq n} a_k\right)$ В. $\overline{\lim}\, a_n$; $\underline{\lim}\, a_n$

С. $\left(-\infty, \inf\limits_{n\geq 1}\sup\limits_{k\geq n} a_k\right)$; $\left(-\infty, \sup\limits_{n\geq 1}\inf\limits_{k\geq n} a_k\right)$ Д. $\lim\inf\limits_n a_n; \lim\sup\limits_n a_n.$

20Укажите борелевские множества среды следующих подмножеств множества R.

$1)\,(-\infty,0)\bigcup(1,+\infty)$ 2) $\{a\}, a \in R$ 3) $\max a_n$, где $a_n \in R, n = 1,2,\dots,m$

4)Множество всех рациональных чисел 5)Множество всех иррациональных чисел

А. 1); 4);5) В. 1); 2);3);4);5) С. 1);4) Д. 1);2);3);4).

21.Укажите борелевские множества среди следующих подмножеств множества R^∞

$1)\left\{x \in R^\infty; \overline{\lim} x_n \le a\right\}$ $2)\left\{x \in R^\infty; \lim x_n > a\right\}$ $3)\left\{x \in R^\infty; \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < a\right\}$

$4)\{\, x \in R^\infty; \sum_{k=1}^{n} x_k = 0$, по крайней мере для одного $n \ge 1\}$

А. 1);2);3);4) В.1);2);3) С. Среди них нет борелевских множеств Д.1);2).

22.Какое из следующих множеств является борелевскими в $R^{[0,1]}$?

А. $\left\{x \in R^{[0,1]}, 0 \le x(0) < 1; x(1) \ge 1\right\}$ В. $\left\{x \in R^{[0,1]}, \sup_t x(t) < C; \forall t \in [0,1]\right\}$

С. $\{\, x \in R^{[0,1]}, x(t) = 0$ по крайней мере для одного $t \in [0,1]$ $\}$

Д. $\{\, x \in R^{[0,1]}, x(t)$ непрерывна в фиксированной точке $t \in [0,1]$ $\}$.

23.Укажите определение сингулярных мер, определенных в измеримом пространстве $(R, B(R))$.

А. Это меры, функция распределения которых непрерывны, но они не абсолютно непрерывны.

В. Эта меры, функция распределения которых дискретны, но точки их роста образуют множество положительной меры Лебега.

С. Эта меры, функция распределения которых непрерывны, но точки их роста имеет меры Лебега равной 1.

Д. Эта меры, функция распределения которых непрерывны, но точки их роста образуют множество нулевой меры Лебега.

24. Пусть (Ω, A, P) - вероятностное пространство. Укажите верное высказывание

А. Всякая $(R, B(R))$ измеримая функция, определенная в Ω является случайной величиной.

В. Произвольная функция, определенная в Ω является случайной величиной.

С. Всякая A измеримая функция является случайной величиной. величиной.

Д. Произвольная функция, определенная в Ω и принимающая дискретные значения является случайной величиной.

25. Пусть случайные величины $\xi_i, i = 1,2$ независимые, имеют нормальные распределения с параметрами $\left(a_i, \sigma_i^2\right), i = 1,2$. Чему равно математическое ожидание и дисперсия суммы $\xi_1 + \xi_2$?

А. $0; \sigma_1^2 + \sigma_2^2$ В. $a_1 + a_2; \sigma_1^2 + \sigma_2^2$ С. $a_1 + a_2; \sigma_1 + \sigma_2$ Д. $(\sigma_1 - a_1)^2; (\sigma_2 - a_2)^2$

26. Случайные элементы X_1 и X_2 со значениями в метрическом пространстве $(\aleph, B(\aleph))$, называются независимыми, если

А. $P\left(X_1 \in B_1, X_2 \in B_2\right) = P\left(X_1 \in B_1\right) + P\left(X_2 \in B_2\right)$, для всех $B_1, B_2 \in B(\aleph)$.

В. $P\left(X_1 \in B_1, X_2 \in B_2\right) = P\left(X_1 \in B_1\right) P\left(X_2 \in B_2\right)$, для всех $B_1, B_2 \in B(\aleph)$.

С. $P\left(X_1 \in B_1, X_2 \in B_2\right) = P\left(X_1 \in B_1 / X_2 \in B_2\right)$ для всех $B_1, B_2 \in B(\aleph)$.

Д. $P\left(X_1 \in B_1, X_2 \in B_2\right) = P\left(X_1 \in B_1\right) / P\left(X_2 \in B_2\right)$ для всех $B_1, B_2 \in B(\aleph)$.

27. Случайная величина ξ имеет распределение Пуассона с параметром $\alpha > 0$, если

А. $p_k = 0, k < 0; p_k = \dfrac{\alpha^k}{k!} e^{-\alpha}, k = 0,1,\ldots$, где $p_k = P(\xi = k)$.

В. $p_k = 0, k < 0; p_k = \dfrac{\alpha^k}{k!} e^{\alpha}, k \geq 0$, где $p_k = P(\xi = k)$.

С. $p_k = \alpha^k e^{-\alpha}, k = 0,1,\ldots$, где $p_k = P(\xi = k)$.

Д. $p_k = \dfrac{\alpha^k}{k!} e^{-\alpha}, k = 0,1,\ldots$, где $p_k = P(\xi = k)$.

28.Случайная величина ξ имеет геометрическое распределение с параметром р,

если

А. При некотором $0 < p < 1, p_k = P(\xi = k) = p(1-p)^k, k = 0,1,\ldots$

В. При некотором $0 < p < 1, p_k = P(\xi = k) = p^k(1-p)\ , k = 0,1,\ldots$

С. При некотором $0 < p < 1, p_k = P(\xi = k) = p^k(1-p)\ , k = 1,2\ldots$

Д. При некотором $0 < p < 1, p_k = P(\xi = k) = p^k(1-p)^{n-k}, k = 1,2\ldots$

29.Пусть случайная величина ξ имеет распределение Пуассона с параметром α .

Найти $M\xi$ и $D\xi$.

А. $M\xi = \alpha \quad D\xi = \infty$. В. $M\xi = \alpha; D\xi = \alpha^2 - \alpha$. С. $M\xi = 0; D\xi = \alpha$. Д. $M\xi = \alpha; D\xi = \alpha.$,

30.Пусть случайная величина ξ имеет показательное распределение с параметром
$\lambda > 0$. Найти $M\xi$ и $D\xi$.

А. $M\xi = \frac{1}{\lambda^2}; D\xi = \lambda.$ В. $M\xi = \lambda; D\xi = \frac{1}{\lambda^2}.$ С. $M\xi = \frac{1}{\lambda}; D\xi = \frac{1}{\lambda^2}.$ Д. $M\xi = \frac{1}{\lambda}; D\xi = \lambda.$

31. ξ имеет биномиальное распределение с параметрами $(n;p)$. Найти $M\xi$ и $D\xi$.

А. $M\xi = np; D\xi = np^2$ В. $M\xi = p; D\xi = p(1-p)$ С. $M\xi = 0; D\xi = np$
Д. $M\xi = np; D\xi = np(1-p)$

32.Пусть ξ стандартная нормальная случайная величина. Найти $M\xi^k, k = 1,2,...$

А. $M\xi^k = 0$, если $k-$нечетное и $M\xi^k = 1\cdot 3\cdots(2k-1)$ если $k-$четное.
В. $M\xi^k = 0$, если $k-$нечетное и $M\xi^k = 1\cdot 3\cdots(2k-1)$ если $k-$четное.
С. $M\xi^k = a^k$, если $k-$нечетное и $M\xi^k = 1\cdot 3\cdots(2k-1)$ если $k-$четное.
Д. $M\xi^k = (2k-1)!!$, если $k-$нечетное и $M\xi^k = 1$ если $k-$четное.

33.Как определяется математическое ожидание соответственно дискретных, абсолютно непрерывных и в общих случаев?

А. $M\xi = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k; M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx; M\xi = \int_{\Omega} \xi(\omega)dP(\omega)$.

В. $M\xi = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k; M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} xdF_{\xi}(x); M\xi = \int_{\Omega} \xi(\omega)dP(\omega).$

С. $M\xi = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k; M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx; M\xi = \lim_{n} M\xi_n,$ где ξ_n-простые с.в. и $\xi_n \uparrow \xi.$

Д. $M\xi = 0 : M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} xdF_{\xi}(x); M\xi = \int_{\Omega} \xi dP.$

34.Класс всех подмножеств дискретного пространства Ω

А. Монотонный класс; не $\sigma-$алгебра В. Алгебра; не $\sigma-$алгебра
С. Алгебра; $\sigma-$алгебра Д. Не алгебра; $\sigma-$алгебра.

35. Какое из следующих равенств неверно? $F(x, y)-$совместное функция распределения случайной величины (ξ, η).

А. $F(-\infty, y) = 0.$ В. Если $x_1 < x_2$, то $F(x_1 y) \le F(x_2, y)$ С.Если $y_1 < y_2$, то $F(x, y_1) \le F(x, y_2)$
Д. $F(-\infty, y) = 0.$

36.Случайные величины ξ,η называются независимыми, если

А. $F_{\xi,\eta}(x,y)=F_{\xi}(x)F_{\eta}(y)$ В. $F_{\xi,\eta}(x,y)=F_{\xi}(x)+F_{\eta}(y)$ С. $F_{\xi,\eta}(x,y)=1$

Д. $F_{\xi,\eta}(x,y)=F_{\xi}(x)/F_{\eta}(y)$

37.Чему равен $k-$й момент дискретной случайной величины ξ?

А. $M\xi^k=\sum_{i=1}^{\infty}x_i\ p_i^k$ В. $M\xi^k=\sum_{i=1}^{\infty}x_i^k p_i^k$ С. $M\xi^k=\sum_{i=1}^{\infty}x_i^k p_i$ Д. $M\xi^k=\sum_{i=1}^{\infty}x_i\ p_i$.

38.Как называется производная функция от функции распределения?

А. Функция плотности В. Непрерывная функция С. Четная функция

Д.Положительная функция

39.Пусть $f(x)$ плотность случайной величины X. Определите верное равенство.

А. $P(a<x\le b)=\int_a^b f(x)dx$ В. $P(a<x\le b)=f(a)-f(b)$ С. $P(a<x\le b)=f(b)$

Д. $P(a<x\le b)=\int_a^{\infty} f(x)dx$

40.Какими основными свойствами обладает функция плотности?

А. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx>0; f(x)\ge 0$ В. $\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx=1; f(x)\ge 0$ С. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=0; f(x)\ge 0$

Д. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1; f(x)\ge 0$

41.Чему равно математическое ожидание абсолютно непрерывной случайной величины?

А. $MX=\sum_{i=1}^{\infty}x_i\ p_i$ В. $MX=\int_{-\infty}^{a} xf(x)dx$ С. $MX=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$ Д. $MX=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx$

42.Чему равно $M\varphi(X)$, если X абсолютно непрерывная случайная величина?

А. $\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)f(x)dx$ В. $\int_{-\infty}^{\infty}x\varphi(x)f(x)dx$ С. $\int_{-\infty}^{\infty}x\varphi(x)dF(x)$ Д. $\sum_{i=1}^{\infty}\varphi(x_i)\ p_i$

43.Чему равна дисперсия абсолютно непрерывной случайной величины?

А. $DX=x_1^2p_1+x_2^2p_2+...+x_n^2p_n$ В. $DX=\int_{-\infty}^{\infty}x^2\varphi(x)dx$ С. $DX=MX^2+(MX)^2$

Д.. $DX=\int_{-\infty}^{\infty}x^2\varphi(x)dx-\left[\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx\right]^2$

44.Говорять, что последовательность независимых, одинаково распределенных случайных величин $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ...$ подчиняется закону больших чисел, если для любого положительного ε

A. $P\left[\left|\frac{\varepsilon_1+...+\varepsilon_n}{n}-M\varepsilon_1\right|<\varepsilon\right]\to 0$ B. $P\left[\left|\frac{\varepsilon_1+...+\varepsilon_n}{n}+M\varepsilon_1\right|<\varepsilon\right]\to 0$

C. $P\left[\left|\frac{\varepsilon_1+...+\varepsilon_n}{n}\right|<\varepsilon\right]=1$ Д. $\varepsilon_1+...+\varepsilon_n \xrightarrow{P} a$

45.Чему равна плотность стандартного нормального закона?

A. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(x-1)^2/2}$ B. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$ C. $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(x-a)^2/2\sigma^2}$

Д. $f(x)=\frac{1}{3\sqrt{2\pi}}e^{-(x-1)^2/2}$

46.Как определяется совместная функция распределения случайных величин Х,У?

A. $F(x,y)=P(X\le x)/P(Y\le y)$ B. $F(x,y)=P(X\le x)P(Y\le y)$ C. $F(x,y)=P\left(X\le x, Y\le y\right)$

Д. $F(x,y)=P(X\le x)+P(Y\le y)$.

47.Если $F(x,y)$ – функция распределения двумерной случайной величины, то чему
равна её плотность $f(x,y)$?

A. $f(x,y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}F(x,y)dxdy$ B. $f(x,y)=\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}$ C. $f(x,y)=\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}$ Д. $f(x,y)=\frac{\partial F(x,y)}{\partial x\partial y}$

48.Если

$\eta \backslash \xi$	-1	0	1
-1	1/8	1/12	7/24
1	5/24	1/6	1/8

закон распределения двумерной случайной величины то найти закон распределения случайной величины ξ

A. ξ: -1 0 1   P: 1/3 1/4 5/12

B. ξ: -1 0 1   P: 1/3 1/3 1/3

C. ξ: -1 0 1   P: 1/4 1/3 5/12

D. ξ: -1 0 1   P: 1/4 1/3 3/12

49.Пусть $\{\xi_k\}$ – последовательность независимых, одинаково распределенных с.в., $M\xi_k=a, D\xi_k=\sigma^2, S_n=\xi_1+...+\xi_n, \Phi(x)$ – функция распределения стандартной нормальной случайной величины. Тогда, какое утверждение имеет центральная предельная теорема?

А. $P\left(\frac{S_n - an}{\sigma\sqrt{n}} < x\right) \to \Phi(x)$ В. $P\left(\frac{S_n - a}{\sigma\sqrt{n}} < x\right) \to \Phi(x)$ С. $P\left(\frac{S_n - \sigma n}{\sigma\sqrt{n}} < x\right) \to \Phi(x)$

Д. $P\left(\frac{S_n - x_n}{\sigma\sqrt{n}} < x\right) \to \Phi(x)$.

50.Найти функцию плотности случайной величины $\eta = \sqrt{\xi}$, если ξ имеет показательное распределение с параметром $\lambda > 0$.

А. $2\lambda\sqrt{xe^{-\lambda x}}$ $(x>0)$ В. . $2\lambda x e^{-\lambda x^2}$ $(x>0)$ С. . $\lambda e^{-\lambda\sqrt{x}}$ $(x>0)$ Д. $\lambda e^{-\lambda x}$

51.Чему равна вероятность того, что непрерывная случайная величина принимает конкретное значение x_0?

А. 0 В. 1/2 С. 1 D. Нельзя определить.

“Ehtimollar nazahiyasi va matematik statistika” фанидан тест саволлари.

1. A щодиса =андай былганда $A \bigcup \overline{A} = A$ тенглик ыринли былади?

А. $A = \varnothing$ В. $A = \Omega$ С. $A = \Omega \setminus A$ Д. Щеч=ачон.

2. A ва B щодисалар =андай былганда $(A \bigcup B) \setminus B = A$ тенглик ыринли?

А. $AB = \varnothing$ В. $A = \varnothing$ С. $B = \varnothing$ Д. Щардоим.

3.+уйидаги ифодани соддалаштиринг: $(A+B)(A+\overline{B})$.

А. A В. B С. $\varnothing$ Д. $A+B$.

4. +уйидаги ифодани соддалаштиринг: $(\overline{A}+B)(A+B)$.

А. B В. A С. $\varnothing$ Д. Ω.

5. Агар $A \subseteq B$ былса AB нимага тенг?

А. A В. B С. $B-A$ Д. $A-B$.

6. $A \subseteq B$ былса ABC ифодани соддалаштиринг.

А. AC В. BC С. A Д. B.

7.+андай шарт бажарилганда $A+B; \overline{A}+B; A+\overline{B}$ щодисалар биргаликда былади?

А. $AB \neq \varnothing$ В. $AB = \Omega$ С. $A \neq \varnothing$ Д. $B \neq \varnothing$.

8.Идишда 3 та о= ва 7 та =ора шар бор. Идишдан таваккалига олинган шар о= щар былиш эщтимоли топилсин.

А. 0,3 В. 0,7 С. 1/15 D. 7/15.

9. 36талик карталар дастасидан таваккалига иккита карта олинган. Уларнинг щар иккаласи щам туз былиш эщтимолини топинг.

А. 1/105 В. 1/81 С. 1/9 D. 0.

10.Таваккалига танланган иккита ра=амлар ичида 0 ра=ами йы= былиш эщтимоли топилсин.

А. 0,81 В. 0,9 С. 0,8 Д. 0,99.

11. Таваккалига танланган иккита ра=амлар ичида 0 ра=ами ёки 1 ра=ами йы= былиш эщтимоли топилсин.
А. 0,98 В. 0,64 С. 0,99 Д. 0,81
12.6 та о= ва 8 та =ора шар солинган идишдан таваккалига иккита шар олинган. Икала шар щам бир хил рангли былиш эщтимолини топинг.
А. 43/91 В. 25/49 С. 3/7 D. 4/7.
13.Учта симметрик танга бир ва=тда ташланганда икки марта герб чи=иш эщтимоли =анча?
А. 3/8 В. 1/2 С. 3/4 D. 5/8.
14.Ыйин со==аси бир марта ташланаётган былсин. Агар А – тушган сон жуфт былиш щодисаси, В – тушган сон учга =олди=сиз былинади щодисаси былса $P(A+B)$ щисоблансин.
А. 2/3 В. 5/6 С. 1/6 D. ½
15.А ва В щодисалар бо\ли=сиз былиб $P(A)=0,6; P(B)=0,5$ былса $P(A+B)$ щисоблансин.
А. 0,5 В. 0,6 С. 0,3 Д. 0,8
16.Агар А ва В биргаликда былмаган щодисалар былса, ты\ри тенгликни кырсатинг.
А. АВ=$\varnothing$ В. $A+B=\Omega$ С. $A\subseteq B$ Д. А – В = $\varnothing$
17. Агар А ва В биргаликда былмаган щодисалар былса ва $P(A)=p_1; P(B)=p_2$ былса $P(A+B)$ щисоблансин.
А. p_1+p_2 В. $p_1+p_2-p_1p_2$ С. p_1 Д. p_2.
18. Агар $P(A)=1/4; P(B)=2/3$ ва $P(A+B)=5/6$ былса $P(AB)$ щисоблансин.
А. 1/12 В. 1/6 С. 7/12 D. 12/15.
19. $\{(x,y;0\le x,y\le 1\}$ квадратга тасодифан ну=та ташланган. Ушбу $A=\{(x,y);x\le 1/2\}, B=\{(x,y);y\ge 1/2\}$ щодисалар учун ушбу тасди=ларнинг =айсиниси ыринли?
А. А ва В щодисалар бо\ли=сиз В. А ва В щодисалар биргаликда эмас С. А ва В щодисалар бо\ли=ли Д. А ва В ищтиёрий щодисалар.
20. $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ тыпламдан 3 та кетма – кет (=айтарилмас) танловдан иборат былган тасодифий тажрибага мос келган Ω - элементар щодисалар фазосининг элементлар сони топилсин.
А. 720 В. 1000 С. 30 Д. 60.
21. $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ тыпламдан 3 та кетма – кет (=айтарилувчан) танловдан иборат былган тасодифий тажрибага мос келган Ω - элементар щодисалар фазосининг элементлар сони топилсин.
А. 1000 В. 720 С. 60 Д. 30.
22. А,Б,Е,Т,Ш щарфлари ёзилган 5 та бирщил карточкалардан кетма – кет учтаси танлаб олинди ва олиниш тартибида бир =аторга жойлаштирилди. Натижада «БЕШ» сызи щосил былиш эщтимоли нимага тенг?
А. 1/60 В. 1/120 С. 3/5 D. 1/30.
23. Агар $P(A)=0,6; P(A+B)=0,8$ былса $P(\overline{A}B)$ щисоблансин.
А. 0,2 В. 0,32 С. 0,48 Д. 0,4.
24. $\xi-[2,4]$ орали\ида текис та=симланган тасодифий ми=дор былса $M\xi$ топилсин.
А. 3 В. 1 С. 6 Д. 0
25. 5;3;5;5;2;2;4;24;5 танланма учун частотали вариацион =атор тузилсин.
А. Х: 2 3 4 5 В. Х: 2 3 4 5 С. Х: 3 2 5 4 Д. Х: 5 4 3 2
n_i : 3 1 2 4 n_i : 0,3 0,1 0,2 0,4 n_i : 1 3 4 2 n_i :0,4 0,2 0,1 0,3
26. 5;3;5;5;2;2;4;24;5 танланма учун эмпирик та=симот топилсин.
А. Х: 2 3 4 5 В. Х: 2 3 4 5 С.Х: 5 3 4 2 Д. Х: 3 2 5 4
$\frac{n_i}{n}$: 0,3 0,1 0,2 0,4 n_i : 3 1 2 4 $\frac{n_i}{n}$: 0,4 0,1 0,2 0,3 n_i : 1 3 4 2
27. 5;3;5;5;2;2;4;24;5 танланма учун эмпирик та=симот функция ёзилсин.

А. $F_n(x)=\begin{cases}0; x<2\\ 0,3; 2\le x<3\\ 0,4; 3\le x<4\\ 0,6; 4\le x<5\\ 1; x\ge 5.\end{cases}$ В. $F_n(x)=\begin{cases}0; x\le 2\\ 1; x\ge 5.\end{cases}$ С. $F_n(x)=\begin{cases}0; x<1\\ 0,1; 1\le x<2\\ 0,3; 2\le x<3\\ 0,4; 3\le x<4\\ 0,5; 4\le x<5\\ 1; x\ge 5.\end{cases}$

Д. $F_n(x)=\begin{cases}0; x<2\\ 0,3; 2\le x<3\\ 0,6; 3\le x<4\\ 1; x\ge 4.\end{cases}$

28. Эмпирик та=симот функциянинг ани=ланиш сощаси ва =ийматлар сощасини ёзинг.

A. $(-\infty,\infty);[0,1]$ B. $(-\infty,\infty);(0,1)$ C. $(-\infty,\infty);(0,1)$ Д. $(-\infty,\infty);(-\infty,\infty)$.

29. Ушбу X: 2 3 4 5 частотали вариацион =аторга эга былган

n_i : 3 1 2 4

танланманинг модаси ва медианаси топилсин.

A. 5; 4 B. 4;4 C. 3;5 Д. 4;5

30. Частотали вариацион =атори X: 2 3 4 5 былган танланма учун $\overline{X}$

n_i : 3 1 2 4

топилсин.

A. 3,7 B. 3,5 C. 4 Д. 2,5.

31. Частотали вариацион =атори X: 2 3 4 5 былган танланма учун S^2

n_i : 3 1 2 4

топилсин.

A. 1,608 B. 1,53 C. 1,5 Д. 1,6.

32. Ушбу X: 3 4 5 6 7 эмпирик та=симотнинг асимметрия

v_i : 0,15 0,25 0,2 0,25 0,15

коэффициенти топилсин.

A. 0 B. 5 C. 10 Д. – 1.

33. Танланманинг медианасини таърифланг.

A. Вариацион =аторни тенг иккига былувчи варианта.

B. Частотаси энг катта былган варианта

C. Вариацион =атордаги энг кичик варианта

Д. Энг катта ва энг кичик варианталарнинг айирмаси.

34. Танланманинг модаси деб нимага айтилади?

A. Частотаси энг катта былган вариантага

B. Вариацион =аторни тенг иккига былувчи вариантага

C Вариацион =атордаги энг катта вариантага

Д. Ищтиёрий иккита вариантанинг фар=ига

35. ξ ва η тасодифий ми=дорларнинг ковариацияси =айси формулада ты\ри кырсатилган?

A. $M\left(\xi-M\xi\right)\left(\eta-M\eta\right)$ B. $\dfrac{M\left(\xi-M\xi\right)\left(\eta-M\eta\right)}{\sqrt{D\xi}\sqrt{D\eta}}$ C. $M\left(\xi-M\xi\right)^2\left(\eta-M\eta\right)^2$ Д. $M\xi\eta$.

36. Агар ξ ва η тасодифий ми=дорлар бо\ди=сиз ва $D(\xi+\eta)=10; D\xi=6$ былса $D\eta$ топилсин.

A. 4 B. 0,4 C. 0,6 Д. 1.

37. Агар ξ ва η тасодифий ми=дорлар былиб $M\xi=3; M\eta=-2$ былса $M(4\xi+3\eta)$ топилсин.

A. 6 B. 18 C. -6 Д. 30.

38. Агар ξ ва η тасодифий ми=дорлар бо\ди=сиз ва $D\xi=4, D\eta=2$ былса $D(2\xi-3\eta)$ щисоблансин.

A. 34 B. 24 C. 44 Д. 16.

39. ξ - симметрик тангани 3 марта ташланганда тушган герблар сони былса ξ нинг та=симот =онуни ёзилсин.

A. ξ : 0 1 2 3 B. ξ : 0 1 2 3 C. ξ : 0 1 2 3 Д. ξ : 1 2 3

P_ξ : 1/8 3/8 3/8 1/8 P_ξ : 1/4 1/4 1/4 1/4 P_ξ : 1/8 1/4 3/8 1/4 P_ξ : 1/3 1/3 1/3

40. Агар ξ тасодифий ми=дор (*n;p*) параметрли биномиал та=симотга эга былса, унинг математик кутилмаси ва дисперсиясини щисобланг.

A. $np; np(1-p)$ B. $np; pq$ C. $npq; np$ Д. $0; np(1-p)$.

41. $[a,b]$ орали\ида текис та=симланган тасодифий ми=дорнинг математик кутилмаси ва дисперсияси топилсин.

A. $\dfrac{a+b}{2};\dfrac{(b-a)^2}{12}$ B. $\dfrac{b-a}{2};\dfrac{(a+b)^2}{12}$ C. $\dfrac{a+b}{2};\dfrac{(b-a)^2}{6}$ Д. $\dfrac{b-a}{2};\dfrac{(a-b)^2}{12}$.

42. α параметрли Пуассон та=симотига эга былган тасодифий ми=дорнинг математик кутилмаси ва дисперсияси топилсин.

A. $\alpha;\alpha$ B. $\alpha;\alpha^2$ C. $\alpha;\dfrac{1}{\alpha}$ Д. $\dfrac{1}{\alpha};\dfrac{1}{\alpha}$.

43. α параметрли экспоненциал та=симотга эга былган тасодифий ми=дорнинг математик кутилмаси ва дисперсияси топилсин.

A. $\dfrac{1}{\alpha};\dfrac{1}{\alpha^2}$ B. $\alpha;\dfrac{1}{\alpha}$ C. $\dfrac{1}{\alpha};\dfrac{1}{\alpha}$ Д. $\alpha;\alpha^2$.

44. (a,σ^2) параметрли нормал та=симотга эга былган тасодифий ми=дорнинг математик кутилмаси ва дисперсияси топилсин.

A. $a;\sigma^2$ B. $a;\sigma$ C. $0;\sigma^2$ Д. $0;1$.

45. ξ ва η тасодифий ми=дорларнинг корреляция коэффициенти 1га тенг. ξ ва η ми=дорлар ща=ида нима дейиш мумкин?

А. улар чизи=ли бо\ли=ли В. Улар бо\ли=сиз С. улар ща=ида щеч нарса деб былмайди Д. улар ищтиёрий функционал бо\ланишга эга.

46. +андай тасодифий ми=дорлар учун $D(X-Y)=DX+DY$ тенглик ыринли?

А. Бо\ли=сиз тасодифий ми=дорлар В. Дискрет тасодифий ми=дорлар
С. Ищтиёрий тасодифий ми=дорлар С.Бу тенглик щеч =ачон бажарилмайди.

47.Ыйин со==аси 10 марта ташланганда тушган сонлар йи\индисининг математик кутилмаси топилсин.
А. 35 В. 175 С. 70 Д. 30.

48. ξ_k тасодифий ми=дорлар мос равишда k параметрли Пуассон та=симотига эга былса ($k=1,2,...,n$) $M(\xi_1+...+\xi_n)$ щисоблансин.

А. $\frac{n(n+1)}{2}$ В. nk С. $1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}$ Д. $n(n+1)$.

49. ξ ва η тасодифий ми=дорларнинг математик кутилмалари учун =айси муносабат щусусан ыринли эмас?

А. $M\xi\eta=M\xi M\eta$ В. $M(\xi+\eta)=M\xi+M\eta$ С. $MC\xi=CM\xi$ Д. $\xi\le\eta\Rightarrow M\xi\le M\eta.$

50.Ноты\ри тенгликни кырсатинг.

А. $DC\xi=CD\xi$ В. $D\xi=M\xi^2-(M\xi)^2$ С. $DC=0$ Д. $D(\xi+C)=D\xi.$

51.А ва В ищтиёрий бо\ли=сиз щодисалар , $P(A)>0, P(B)>0.$ Ноты\ри тенгликни кырсатинг.

А. $P(A/B)=P(B)$ В. $P(A/B)=P(A)$ С. $P(B/A)=P(B)$ Д. $P(AB)=P(A)P(B).$

52.А ва В бо\ли=сиз щодисалар былса, $\overline{A}$ ва $\overline{B}$ ща=ида нима дейиш мумкин?
А. бо\ли=сиз В. бо\ли=ли С. биргаликда Д. биргаликда эмас.

53. Агар А ва В щодисалар биргаликда былмаган бо\ли=сиз щодисалар былса ты\ри тенгликни ани=ланг.

А. $\min\{P(A);P(B)\}=0$ В. $max\{P(A);P(B)\}=0$ С. $P(A)=0$ Д. $P(B)=0.$

54. ξ - $[0,1]$ орали=да текис та=симланган тасодифий ми=дор ва $\eta=2\xi+1$ былса $M\eta$ топилсин.
А.2 В. 3 С. 5 Д. 0,5.

55. ξ тасодифий ми=дорнинг та=симот функцияси $F(x)=\begin{cases}0, x<0;\\ 1-cos2x, 0\le x\le\pi/4\\ 1, x>\pi/4\end{cases}$

формула ор=али берилган. ξ нинг зичлик функцияси топилсин.

А. $f(x)=\begin{cases}0, x\,\overline{\in}\,[0,\pi/4];\\ 2\sin 2x, x\in[0,\pi/4]\end{cases}$ В. $f(x)=\sin 2x$ С. $f(x)=\begin{cases}0, x\,\overline{\in}\,[0,\pi/4];\\ 4/\pi, x\in[0,\pi/4]\end{cases}$

Д. $f(x)=\begin{cases}0, x\,\overline{\in}\,[0,\pi/4];\\ \sin 2x, x\in[0,\pi/4]\end{cases}$.

56. ξ тасодифий ми=дорнинг зичлик функцияси $f(x)=\begin{cases}0, x\,\overline{\in}\,[0,\pi/4];\\ 2\sin 2x, x\in[0,\pi/4]\end{cases}$

формула ор=али берилган. ξ нинг та=симот функцияси топилсин.

А. $F(x)=\begin{cases}0, x<0;\\ 1-cos2x, 0\le x\le\pi/4\\ 1, x>\pi/4\end{cases}$ В. $F(x)=\begin{cases}0, x<0;\\ cos2x, 0\le x\le\pi/4\\ 1, x>\pi/4\end{cases}$

С. $F(x)=1-\cos 2x$ Д. $F(x)=\begin{cases}0, x<0;\\ 1-cos2x, 0\le x\le\pi/2\\ 1, x>\pi/2.\end{cases}$.

57.Нишонга кетма-кет ы= отишда нисбий частота 0,6 га тенг былиб 12 марта ы= нишонга тегмаган былса неча марта ы= отилган?
А. 30 В. 20 С. 72 Д. 54.

58.Махсулотнинг 200 таси текширилганда 25 таси сифатсиз экан. Сифатли махсулот нисбий частотасини топинг.
А. 0,875 В. 0,125 С. 0,25 Д. 1,25.

59. Агар $P(A+B)=0,8; P(A)=0,5$ былса $P(\overline{A}B)$ эщтимолни топинг.
А. 0,3 В. 0,6 С. 0,4 Д. 0,5.

60.Идишдаги 25 та махсулотдан 5 таси сифатсиз былса, улардан кетма-кет учтаси олинганда (такрорсиз), уччаласини сифатли былиш эщтимолини топинг.
А. 57/115 В. 1/2 С. 58/115 D. 1145/2300.

61.Биринчи мерганнинг нишонга тегиш эщтимоли 0,8 ва иккинчисиники 0,7 га тенг. Мерганлар нишонга бир ва=тда ы= отганларида бита ы=ни нишонга тегиш эщтимолини топинг.

А. 0,38 В. 0,62 С. 0,16 Д. 0,21.

62.Эщтимолнинг классик таърифи быйича =андай тажрибалардаги щодисалар эщтимоли топилади?
А. Элементар щодисалар сони чеклита ва улар тенг имкониятли.
В. Элементар щодисалар фазоси элементлари чеклита.
С. Элементар щодисалар сони кыпи билан сано=лита.
Д. Ищтиёрий тажрибаларда.

63.5 та танга ташлашда бита щам «герб» тушмаслик эщтимоли топилсин.

А. 1/32 В. 5/32 С. 31/32 D. 1/5.

64.Идишда 8 та шар былиб улардан 5 таси о= =олганлари =ора. 4 та шар олинганда 2 таси о= былиш эщтимоли топилсин.

А. 3/7 В. $(5/8)^4$ С. 3/10 D. 1.

65.+андай тасодифий ми=дорлар учун $M\xi\eta = M\xi M\eta$ тенглик ыринли?

А. бо\ли=сиз тасодифий ми=дорлар. В. Дискрет тасодифий ми=дорлар.
С.Нормал та=симланган тасодифий ми=дорлар Д. Ищтиёрий тасодифий ми=дорлар.

66.(a,σ^2) - параметр билан нормал та=симланган ξ тасодифий ми=дор учун $M(\xi-a)^3$ ни топинг.

А. 0 В. a С. a^3 Д. $a\sigma^2$.

67Агар ξ_1 ва ξ_2 бо\ли=сиз ва щар бири мос равишда (2;1) щамда (1;4) параметрлар билан нормал та=симланган былса, $D(\xi_1-\xi_2)$ ни топинг.

А. 5 В.1 С. 2 Д. 6

68.+андай шартда $M(\xi+\eta) = M\xi + M\eta$ тенглик ыринли?

А. Щар доим В. ξ ва η бо\ли=сиз С. ξ ва η лар узлуксиз та=симотга эга
Д. ξ ва η лар дискрет та=симланган.

69.Агар ξ ва η лар бо\ли=сиз ва щар бири стандарт нормал =онунга эга былса $\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi+\eta)$ щандай та=сиотга эга?

А. Стандарт нормал В.Биномиал С.(0,2) орали=да текис Д.Экспоненциал.

70.Марказий лимит теоремага кыра тасодифий ми=дорларнинг марказлаштирилган ва нормалаштирилган йи\индиси та=симот функцияси =андай функцияга интилади?

А. $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}du$ В. $1-e^{-\lambda x}; \lambda>0; x>0$ С. $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{x} e^{-u^2/2}du; x>0$ Д.Пуассон та=симотига.

71.Эмпирик дисперсияни щисоблашнинг ты\ри формуласини ани=ланг.

А. $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ В. $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(X_i-\overline{X})^2$ С. $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ Д. $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})$.

72.Танланма быйича $r-$ корреляция коэффициенти щисобланган былса, =айси натижа ноты\ри?

А. $r=\sqrt{1,4}$ В. $r=0$ С. $r=1$ Д. $r=0,75.$

73.Бо\ли=сиз иккита тасодифий ми=дор корреляция коэффициенти нимага тенг?

А. 0 В. 1 С. – 1 Д. 0,5.

74.Танланмадан частотали вариацион =атор тузилган былса эмпирик дисперсияни щисоблашнинг ты\ри формуласини ани=ланг.

А. $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}n_i(X_i-\overline{X})^2$ В. $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}n_i(X_i-\overline{X})^2$ С. $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}n_iX_i^2$ Д. $S^2 = \left(\overline{X}\right)^2 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$.

75.Бош тыплам номаълум математик кутилмаси учун силжимаган θ_n бащони топинг.

А. $\theta_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ В. $\theta_n = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2}$ С. $\theta_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}X_i^2, k\neq n$ Д. $\theta_n = \frac{X_{\min}+X_{\max}}{2}$

76.Номаълум θ параметр учун θ_n бащо силжимаган бащо дейилади, агарда =уйидаги шарт бажарилса:

А. $M\theta_n = \theta$ В. $P\{|\theta_n-\theta|>\varepsilon\}\to 0$ С. $D\theta_n=\theta$ Д. $D\theta_n = 0.$

77.Номаълум θ параметр учун θ_n бащо асосли бащо дейилади, агарда $n\to\infty$ =уйидаги шарт бажарилса:

А. $P\{|\theta_n-\theta|>\varepsilon\}\to 0$, $\forall\varepsilon>0$ В. $M\theta_n=\theta$ С. $M\theta_n\to\theta$ Д. $D\theta_n\to 0.$

78. Бош тыплам номаълум дисперсияси учун силжимаган θ_n бащони кырсатинг.

А. $\theta_n = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ В. $\theta_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ С. $\theta_n = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ Д. $\theta_n = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})$.

79. Номаълум θ параметр учун θ_n^1 ва θ_n^2 силжимаган бащолардан θ_n^1 бащо θ_n^2 бащога нисбатан эффективро= бащо дейилади, агарда =уйидаги шарт бажарилса:

А. $D\theta_n^1 < D\theta_n^2$ В. $D\theta_n^1 > D\theta_n^2$ С. $D\theta_n^1 = D\theta_n^2$ Д. $M\theta_n^1 > M\theta_n^2$.

80.Бир щил шароитда ыт=азилган тажрибалар натижалари нима деб аталади?

А. танланма В.статистик тыплам С. бош тыплам Д. Вариацион =атор.

81.Танланмадан олинган ищтиёрий функция нима деб аталади?

А. Статистика В. Та=симот функция С. Ишончли орали= Д. Дисперсия.

82.Узлуксиз типдаги ξ тасодифий ми=дорнинг зичлик функцияси $p(x;\theta)$ былса, ща=и=атга ыхшашлик функцияси нимага тенг?

А. $L_n(\theta) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i;\theta)$ В. $L_n(\theta) = \sum_{i=1}^{n} p(x_i;\theta)$ С. $L_n(\theta) = p(x_i;\theta)$ Д. $L_n(\theta) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p(x_i;\theta)$.

83.Дискрет типдаги ξ тасодифий ми=дор та=симоти: $p(x_i;\theta) = O\{\xi = x_i\}.i = 1,2,...$ былса,ща=и=атга ыхшашлик функцияси нимага тенг?

А. $L_n(\theta) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i;\theta)$ В. $L_n(\theta) = \sum_{i=1}^{n} p(x_i;\theta)$ С. $L_n(\theta) = p(x_i;\theta)$ Д. $L_n(\theta) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p(x_i;\theta)$.

84. α ишончлилик эщтимоли былсин. (a,b) орали= θ номаълум параметр учун ишнчли орали= дейилади, агарда =уйидаги шарт бажарилса:

А. $P(a \le \theta \le b) = \alpha$ В. $P(a \le \theta \le b) = 1-\alpha$ С. $P(a \le \theta \le b) = 1+\alpha$ Д. $P(a \le \theta \le b) = 1+\alpha^2$

85.Гурущларга ажратиш усули билан варивцион =атор тузилганда асоси гурущ интервалларидан ва баландлиги мос интервалларнинг частотасига тенг былган тыртбурчаклардан иборат шаклга нима деб сталади?

А. гистограмма В. полигон С. кыпбурчак Д. диограмма.

86.Танланманинг энг катта ва знг кичик =ийматлари орасидаги фар= нима деб аталади?

А. +ылам (размах) В. мода С. медиана Д. стандарт.

Эщтимоллар назариясининг математик асослари фанидан саволлар ва масалалар

1. Алгебры и σ – алгебры. Аксиоматика Колмогорова. Вероятностное пространство $(\Omega, \Im, P)$.
2. Измеримое пространство (R,B(R)).
3. Основные свойства вероятности.
4. Функции распределения и их основные свойства.
5. Многомерные функции распределения и их основные свойства.
6. Измеримое пространство $(R^\infty, B(R^\infty))$. Задание вероятностной меры в $B(R^\infty)$.
7. Измеримое пространство $(R^T, B(R^T))$. Вероятностные меры в $B(R^T)$.
8. Математическое ожидание действительных случайных величин. Интеграл Лебега. Основные свойства математического ожидания.
9. Определения условных математических ожиданий. Основные свойства условных математических ожиданий.
10. Различные виды сходимости: сходимость по вероятности, сходимость почти всюду и слабая сходимость. Сходимость в среднем.

Задачи

1. Пусть Ω - некоторое счетное множество и F – совокупность всех его подмножеств. Положим $\mu(A) = 0$, если А конечно и $\mu(A) = \infty$, если А бесконечно. Показать, что функция множеств μ конечно – аддитивна но не счетно – аддитивна.
2. Доказать что $P(A\Delta B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$.

3. Пусть $\Omega = \{0,1,2,3,4,5,6\}$. Описать все алгебры множеств, которые содержат множества $A = \{2,3,4\}$ и $B = \{4,6\}$. Указать минимальную алгебру, которая содержит множества A и B.
4. Если события A,B,C независимы в совокупности, то события A и $B - C$ либо A и $B \cup C$ независимы. Доказать это.
5. Пусть $\xi(\omega)$ – случайная величина на вероятностном пространстве (Ω, F, P). Доказать, что множества $\{\omega; \xi(\omega) < x\}, \{\omega; a \le \xi(\omega) < b\}. \{\omega; a < \xi(\omega) < b\}$, $\{\omega; \xi(\omega) = x\}$ являются случайными событиями.
6. Выразить вероятности событий из примера 5 через функции распределения $F(x)$.
7. На окружности радиуса R берут наудачу две точки A и B. Найти функцию распределения и математическое ожидание длины хорды AB.
8.Плотность распределения случайного вектора (ξ, η) равна

$$p(x,y) = \begin{cases} \\ 24x^2 y(1-x), 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0, вовсехосталныхслучаях. \end{cases}$$ Доказать, что ξ и η независимы.

9. Дано: $P(A/B) = 0,7; P(A/\overline{B}) = 0,3; P(B/A) = 0,6.$ Вычислить $P(A)$.
10. События $A_1,\ldots,A_n$ независимы в совокупности и $P(A_k)=p_k$. Какова вероятность того, что не произойдет ни одно из событий $A_1,\ldots,A_n$.
1. Алгебралар ва $\sigma -$ алгебралар. Колмогоров аксиомалари. $(\Omega, \Im, P)$ эщтимоллар фазоси.
2. (R,B(R)) ылчовлм фазо. (R,B(R)) ылчовлм фазода эщтимол ылчовлари.
3. Эщтимолнинг асосий хоссалари.
4. Та=симот функция ва унинг хоссалари.
5. Кып ылчовли та=симот функция. Кып ылчовли та=симот функциянинг асосий хоссалари.
6. $(R^\infty, B(R^\infty))$ ылчовли фазо. $B(R^\infty)$ да эщтимол ылчовини киритиш.
7. $(R^T, B(R^T))$ ылчовли фазо. $B(R^T)$ да ани=ланган эщтимол ылчовлари.
8. Ща=и=ий тасодифий ми=дорларнинг математик кутилмалари. Математик кутилманинг асосий хоссалари.
9.Шартли математик кутилмалар ва уларнинг асосий хоссалари.
10. Я=инлашиш турлари: Эщтимол быйича я=инлашиш, 1 зщтимол билан я=инлашиш, суст я=инлашиш. Ыртача я=инлашиш.

Масалалар

1. Ω - сано=ли тыплам ва $\mathrm{F} -$ унинг барча =исм тыпламларидан ташкил топган $\sigma -$ алгебра былсин. Агар A чекли былса $\mu(A) = 0$ ва агар A чексиз былса $\mu(A) = \infty$ дейлик. μ тыплам функцияси чекли аддитив, аммо сано=ли аддитив эмаслиги кырсатилсин.
2. $P(A \Delta B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$ тенглик исботлансин.
3. $\Omega = \{0,1,2,3,4,5,6\}$ ва $A = \{2,3,4\}$, $B = \{4,6\}$ былсин. A ва B ни ыз ичига олган барча алгебралар топилсин. A ва B ни ыз ичига олган минимал $\sigma -$ алгера ифодалансин.

4. A,B,C щодисалар биргаликда бо\ли=сиз былса, у щолда ёки A ва $B-C$, ёки A ва $B\bigcup C$ щодисалар бо\ли=сиз эканлиги исботлансин.
5. $\xi(\omega)-(\Omega,\mathrm{F},P)$ фазода ани=ланган тасодифий ми=дор былсин. Ушбу $\{\omega;\xi(\omega)<x\},\{\omega;a\le\xi(\omega)<b\}.\{\omega;a<\xi(\omega)<b\}$, $\{\omega;\xi(\omega)=x\}$ тыпламлар тасодифий щодисалар эканлиги исботлансин.
6. 5 мисолдаги щодисаларнинг эщтимолларини $F(x)-$ та=симот функция ор=али ифодаланг.
7.Радиуси Rга тенг былган айланадан иккита A ва B ну=талар таваккалига танланган. AB ватар узунлигининг та=симот функцияси ва математик кутилмаси топилсин.
8. (ξ,η) тасодифий векторнинг зичлик функцияси

$$p(x,y)=\begin{cases} 24x^2y(1-x), 0<x<1, 0<y<1 \\ 0, \text{\textit{бошкабарчахолларда.}} \end{cases}$$

былса, ξ ва η тасодифий ми=дорлар бо\ли=сиз эканлиги исботлансин.
9. Агар $P(A/B)=0,7; P(A/\overline{B})=0,3; P(B/A)=0,6$ былса $P(A)$ щисоблансин.
10. Агар$A_1,...,A_n$ ходисалар биргаликда бо\ли=сиз ва $P(A_k)=p_k$ былса $A_1,...,A_n$ щодисаларнинг бирортаси щам бажарилмаслик эщтимолини топинг.

Малакавий битирув иш ва магистрлик диссертацияси мавзулари.

1. Об одной задаче блуждания частицы на плоскости.
2. Метрическая теория рядов Льюрота.
3. О некоторых проблемах актуарной математики.
4. Некоторые применения законов больших чисел в статистике.
5. Лемма Бореля – Кантелли и её обобщение.
6. Теорема Пуассона для зависмых бернуллиевских случайных величин.
7. Моментлар методи ёрдамида бо\ли=ли тасодифий ми=дорлар кетма - кетлиги учун марказий лимит теорема исботлаш.
8. Щосил =илувчи функциялар методи ёрдамида эщтимоллар назариясининг классик масалаларини ечиш.
9. Об одной задаче оптимизации.
10. Об одном прямом доказательстве центральной предельной теоремы.
11. Применение метода моментов для зависимых наблюдений.
12. Об одной стохастической модели актуарной математики.