BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI HUZURIDAGI PEDAGOG KADRLARNI QAYTA TAYYORLASH VA ULARNING MALAKASINI OSHIRISH MINTAQAVIY MARKAZI

ZAMONAVIY GEOMETRIYA

2023

Durdiyev D.Q. fizika-matematika fanlari doktori, professor

Beshimova D.R o'qituvchi

O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI HUZURIDAGI PEDAGOG KADRLARNI QAYTA TAYYORLASH VA ULARNING MALAKASINI OSHIRISH MINTAQAVIY MARKAZI

“ZAMONAVIY GEOMETRIYA”

MODULI BO‘YICHA

O‘QUV-USLUBIY MAJMUA

Matematika

Buxoro-2023

Modulning o‘quv-uslubiy majmuasi Oliy va o‘rta maxsus ta’lim vazirligining 2020 yil 7 dekabrdagi 648-sonli buyrug‘i bilan tasdiqlangan o‘quv dasturi va o‘quv rejasiga muvofiq ishlab chiqilgan.

Tuzuvchi: D.Q.Durdiev fizika-matematika fanlari doktori, professor.
D.R Beshimova o‘qituvchi

Taqrizchi: H.R.Rasulov fizika-matematika fanlari nomzodi, dotsent.

O‘quv -uslubiy majmua Buxoro davlat universiteti Ilmiy Kengashining qarori bilan nashrga tavsiya qilingan
(2022 yil “30” dekbardagi 5-sonli bayonnoma)

MUNDARIJA

I. IShChI DASTUR

Kirish

«Zamonaviy geometriya» moduli hozirgi kunda geometriyaning chiziqli fazo va chiziqli akslantirishlar yordamida bayon etilishini, vektor algebrasidan foydalanishni, yevklid fazosi, yevklid fazosida chiziq va sirtlarini, psevdoyevklid fazosini, sferik fazolari va ularning tatbiqlarini amaliyotga keng qo‘llash, hamda ularning kelajakdagi o‘rni masalalarini qamraydi.

Modulning maqsadi va vazifalari

«**Zamonaviy geometriya**» **modulining maqsadi:** pedagog kadrlarni qayta tayyorlash va malaka oshirish kurs tinglovchilarining bu borada mamlakatimizda va xorijiy davlatlarda to‘plangan zamonaviy usullarini o‘rganish, amalda qo‘llash, ko‘nikma va malakalarini shakllantirish.

«**Zamonaviy geometriya**» **modulining vazifalari:**

- zamonaviy talablarga mos holda oliy ta’limning sifatini ta’minlash uchun zarur bo‘lgan pedagoglarning kasbiy kompetentlik darajasini oshirish;
- matematika fanini o‘qitish jarayoniga zamonaviy axborot-kommunikasiya texnologiyalari va xorijiy tillarni samarali tadbiq etilishini ta’minlash;
- matematika sohasidagi o‘qitishning innovasion texnologiyalar va o‘qitishning eng so‘nggi zamonaviy usullaridan foydalanishni o‘rgatish;
- tinglovchilarga «Matematika» masalalari bo‘yicha konseptual asoslar, mazmuni, tarkibi va asosiy muammolari bo‘yicha ma’lumotlar berish hamda ularni mazkur yo‘nalishda malakasini oshirishga ko‘maklashish;

Kurs yakunida tinglovchilarning bilim, ko‘nikma va malakalari hamda kompetensiyalariga qo‘yiladigan talablar:

«**Zamonaviy geometriya**» moduli bo‘yicha tinglovchilar quyidagi yangi bilim, ko‘nikma, malaka hamda kompetensiyalarga ega bo‘lishlari talab etiladi:

Tinglovchi:

- geometriyaning chiziqli fazo va chiziqli akslantirishlar yordamida bayon etilishi, vektor algebrasidan foydalanishni;

- matematik masalalarni matematik tizimlarda yechishni va standart funksiyalardan foydalanishni;

- matematikani o‘qitishda uning tatbiqlari bilan tushuntirishni, hayotiy va sohaga oid misollarni;

- matematik fanlarni o‘qitishning zamonaviy usullarini ***bilishi*** kerak.

Tinglovchi:

- matematik fanlarni o‘qitishda innovasion ta’lim metodlari va vositalarini amaliyotda qo‘llash;

- talabaning o‘zlashtirish darajasini nazorat qilish va baholashning nazariy asoslari hamda innovasion yondashuv uslublarini to‘g‘ri qo‘llay olish ***ko‘nikmalariga e***ga bo‘lishi lozim.

Tinglovchi:

- geometriyaning chiziqli fazo va chiziqli akslantirishlar yordamida bayon etilishi, vektor algebrasidan foydalanish;

- matematikani o‘qitish innovasion jarayonini loyihalashtirish va tashkillashtirishning zamonaviy usullarini qo‘llash ***malakalariga e***ga bo‘lishi lozim.

Tinglovchi:

- matematikani o‘qitishda foydalaniladigan zamonaviy (matlab, mathcad, maple, GeoGebra va boshqalar) matematik paketlarini o‘quv jarayoniga tatbiq etish;

- matematikaning xorij va respublika miqyosidagi dolzarb muammolari, yechimlari, tendensiyalari asosida o‘quv jarayonini tashkil etish;

- oliy ta’lim tizimida matematik fanlar mazmunining uzviyligi va uzluksizligini tahlil qila olish ***kompetensiyalariga e***ga bo‘lishi lozim.

Modulning o‘quv rejadagi boshqa modullar bilan bog‘liqligi va uzviyligi

«**Zamonaviy geometriya**» moduli o‘quv rejadagi boshqa modullar va mutaxassislik fanlarining barcha sohalari bilan uzviy bog‘langan holda pedagoglarning bu soha bo‘yicha kasbiy pedagogik tayyorgarlik darajasini orttirishga xizmat qiladi.

Modulning oliy ta’limdagi o‘rni

Modulni o‘zlashtirish orqali tinglovchilar matematika fanlarini o‘qitishda zamonaviy usullar yordamida ta’lim jarayonini tashkil etishda pedagogik yondashuv asoslari va bu boradagi ilg‘or tajribalarni o‘rganadilar, ularni tahlil etish, amalda qo‘llash va baholashga doir kasbiy layoqatga ega bo‘lish, ilmiy-tadqiqotda innovasion faoliyat va ishlab chiqarish faoliyati olib borish kabi kasbiy kompetentlikka ega bo‘ladilar.

Modul bo‘yicha soatlar taqsimoti

№	Modul mavzulari	Tinglovchining o‘quv yuklamasi, soat			
		Hammasi	Auditoriya o‘quv yuklamasi		
			Jami	jumladan	
				Nazariy mashg‘ ulot	Amaliy mashg‘ ulot
1.	Chiziqli fazo.	4	4	2	2
2	Evklid fazosi	4	4	2	2
3	Evklid fazosida chiziq va sirtlar.	2	2		2
4	Psevdoyevklid fazo.	4	4	2	2
5	Ikkinchi tartibli sirtlar.	4	4	2	4
6	Ko‘pxilliklar.	2	2		2
	Jami	**20**	**20**	**8**	**12**

NAZARIY MAShG‘ULOTLAR MAZMUNI

1 – mavzu. Chiziqli fazo.

Reja:

1. Chiziqli fazo. Chiziqli fazo o‘lchami.
2. Affin fazo. Affin koordinatalar sistemasi.

3. Affin almashtirishlar va tekisliklari.
4. Bichiziqli forma.

2-mavzu. Yevklid fazosi.

Reja:

1. **Ye**vklid fazosi. Yevklid fazosida chiziq va sirtlar.
2. Sirt differensial geometriyasi.
3. Sirt ichki geometriyasi. Sirt tashqi geometriyasi.

3 – mavzu. Psevdoyevklid fazo.

Reja:

1. Psevdoyevklid fazo. Sferik fazo.
2. Riman geometriyasi. Giperbolik fazo.
3. Yarim Yevklid fazolar. Yarim giperbolik fazolar.

4 – mavzu. Ikkinchi tartibli sirtlar.

Reja:

1. Ikkinchi tartibli sirtlar.
2. Ikkinchi tartibli sirt invariantlari.
3. Ko‘pxilliklar. Ko‘pxillik turlari.
4. Ko‘pxillik geometriyasi.

AMALIY MAShG‘ULOTLAR MAZMUNI

1 – mavzu. Chiziqli fazo.

Reja:

1. Chiziqli fazo. Chiziqli fazo o‘lchami.
2. Affin fazo. Affin koordinatalar sistemasi.
3. Affin almashtirishlar va tekisliklari.
4. Bichiziqli forma.

2 – mavzu. Yevklid fazosi.

Reja:

1. **Ye**vklid fazosi.
2. Yevklid fazosida chiziq va sirtlar.

3 – mavzu. Yevklid fazosida chiziq va sirtlar.

Reja:

1. Sirt differensial geometriyasi.
2. Sirt ichki geometriyasi.
3. Sirt tashqi geometriyasi

4 – mavzu. Psevdoyevklid fazo.

Reja:

1. Psevdoyevklid fazo. Sferik fazo.
2. Riman geometriyasi. Giperbolik fazo.
3. Yarim Yevklid fazolar. Yarim giperbolik fazolar.

5 – mavzu. Ikkinchi tartibli sirtlar.

Reja:

1. Ikkinchi tartibli sirtlar.
2. Ikkinchi tartibli sirt invariantlari.

6 – mavzu. Ko‘pxilliklar.

1. Ko‘pxilliklar. Ko‘pxillik turlari.
2. Ko‘pxillik geometriyasi.

II. MODULNI O‘QITIShDA FOYDALANILADIGAN INTERFAOL TA’LIM METODLARI

AQLIY XUJUM METODI

Aqliy xujum - g‘oyalarni generatsiya (ishlab chiqish) qilish metodidir. «Aqliy xujum» metodi biror muammoni yechishda talabalar tomonidan bildi rilgan erkin fikr va mulohazalarni to‘plab, ular orqali ma’lum bir yechimga kelinadigan eng samarali metoddir. Aqliy xujum metodining yozma va og‘zaki shakllari mavjud. Og‘zaki shaklida o‘qituvchi tomonidan berilgan savolga talabalarning har biri o‘z fikrini og‘zaki bildiradi. Talabalar o‘z javoblarini aniq va qisqa tarzda bayon etadilar. Yozma shaklida esa berilgan savolga talabalar o‘z javoblarini qog‘oz kartochkalarga qisqa va barchaga ko‘rinarli tarzda yozadilar. Javoblar doskaga (magnitlar yordamida) yoki «pinbord» doskasiga (ignalar yordamida) mahkamlanadi. «Aqliy xujum» metodining yozma shaklida javoblarni ma’lum belgilar bo‘yicha guruhlab chiqish imkoniyati mavjuddir. Ushbu metod to‘g‘ri va ijobiy qo‘llanilganda shaxsni erkin, ijodiy va nostandart fikrlashga o‘rgatadi.

Aqliy xujum metodidan foydalanilganda talabalarning barchasini jalb etish imkoniyati bo‘ladi, shu jumladan talabalarda muloqot qilish va munozara olib borish madaniyati shakllanadi. Talabalar o‘z fikrini faqat og‘zaki emas, balki yozma ravishda bayon etish mahorati, mantiqiy va tizimli fikr yuritish ko‘nikmasi rivojlanadi. Bildirilgan fikrlar baholanmasligi talabalarda turli g‘oyalar shakllanishiga olib keladi. Bu metod talabalarda ijodiy tafakkurni rivojlantirish uchun xizmat qiladi.

Vazifasi. “Aqliy xujum” qiyin vaziyatlardan qutulish choralarini topishga, muammoni ko‘rish chegarasini kengaytirishga, fikrlash bir xilli - ligini yo‘qotishga va keng doirada tafakkurlashga imkon beradi. Eng asosiysi, muammoni yechish jarayonida kurashish muhitidan ijodiy hamkorlik kayfiyatiga o‘tiladi va guruh yanada jipslashadi.

Ob’ekti. Qo‘llanish maqsadiga ko‘ra bu metod universal hisoblanib tadqiqotchilikda (yangi muammoni yechishga imkon yaratadi), o‘qitish jarayonida (o‘quv materiallarini tezkor o‘zlashtirishga qaratiladi), rivojlantirishda (o‘z-o‘zini bir muncha samarali boshqarish asosida faol fikrlashni shakllantiradi) asqotadi.

Qo‘llanish usuli. “Aqliy xujum” ishtirokchilari oldiga qo‘yilgan muammo bo‘yicha xar qanday muloxaza va takliflarni bildirishlari mumkin. Aytilgan fikrlar yozib borildi va ularning mualliflari o‘z fikrlarini qaytadan xotirasida tiklash imkoniyatiga ega bo‘ldi. Metod samarasi fikrlar xilma-xilligi bilan tavsiflandi va xujum davomida ular tanqid qilinmaydi, qaytadan ifodalanmaydi. Aqliy xujum tugagach, muhimlik jixatiga ko‘ra eng yaxshi takliflar generatsiyalanadi va muammoni yechish uchun zarurlari tanlanadi.

«Aqliy xujum» metodi o‘qituvchi tomonidan qo‘yilgan maqsadga qarab amalga oshiriladi:

1. Talabalarning boshlang‘ich bilimlarini aniqlash maqsad qilib qo‘yilganda, bu metod darsning mavzuga kirish qismida amalga oshiriladi.

2. Mavzuni takrorlash yoki bir mavzuni keyingi mavzu bilan bog‘lash maqsad qilib qo‘yilganda - yangi mavzuga o‘tish qismida amalga oshiriladi.

3. O‘tilgan mavzuni mustahkamlash maqsad qilib qo‘yilganda - mavzudan so‘ng, darsning mustahkamlash qismida amalga oshiriladi.

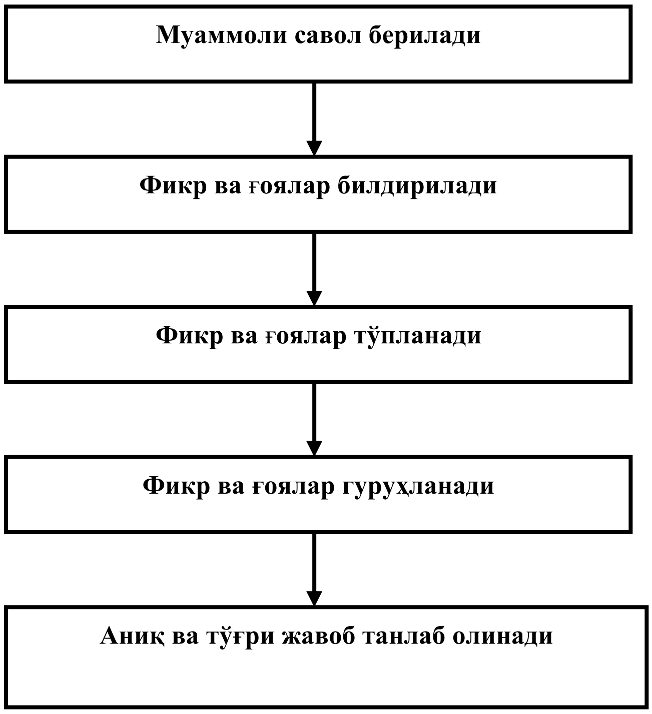
«Aqliy xujum» metodining afzallik tomonlari:

- natijalar baholanmasligi talabalarni turli fikr-g‘oyalarning shakl - lanishiga olib keladi;
- talabalarning barchasi ishtirok etadi;
- fikr-g‘oyalar vizuallashtirilib boriladi;
- talabalarning boshlang‘ich bilimlarini tekshirib ko‘rish imkoniyati mavjud;
- talabalarda mavzuga qiziqish uyg‘otish mumkin.

«Aqliy xujum» metodining kamchilik tomonlari:

- o‘qituvchi tomonidan savolni to‘g‘ri qo‘ya olmaslik;
- o‘qituvchidan yuqori darajada eshitish qobiliyatining talab etilishi.

«Aqliy xujum» metodining tarkibiy tuzilmasi



«Aqliy xujum» metodining bosqichlari:

1. Talabalarga savol tashlanadi va ularga shu savol bo‘yicha o‘z javoblarini (fikr, mulohaza) bildirishlarini so‘raladi;
2. Talabalar savol bo‘yicha o‘z fikr-mulohazalarini bildirishadi;
3. Talabalarning fikr-g‘oyalari (magnitafonga, videotasmaga, rangli qog‘ozlarga yoki doskaga) to‘planadi;
4. Fikr-g‘oyalar ma’lum belgilar bo‘yicha guruhlanadi;
5. Yuqorida qo‘yilgan savolga aniq va to‘g‘ri javob tanlab olinadi.

«Aqliy xujum» metodini qo‘llashdagi asosiy qoidalar:

a) Bildirilgan fikr-g‘oyalar muhokama qilinmaydi va baholanmaydi.

b) Bildirilgan har qanday fikr-g‘oyalar, ular hatto to‘g‘ri bo‘lmasa ham inobatga olinadi.

v) Bildirilgan fikr-g‘oyalarni to‘ldirish va yanada kengaytirish mumkin.

Mavzu bo‘yicha asosiy tushuncha va iboralar

Замонавий таълим воситаси тушунчаси , таълим воситаси турлари, таълим воситасини қўллаш усуллари

Кластер
Кластер - (ўрам, боглам). Билимларни актуаллашишини рагбатлантиради, мавзу бўйича фикрлаш жараёнига янги бирлашган тассавурларни очик ва эркин кириб боришига ёрдам беради.

«Кластерни тузиш коидалари» билан танишадилар. Катта когознинг марказига калит сўзи ёзилади.

Калит сўзи билан бирлашиши учун унинг ён томонларига кичик айланалар ичига «йўлдошлар» ёзилади ва «Катта» айланага чизикчалар билан бирлаштирилади. Бу «йўлдошлар» нинг «кичик йўлдошлари» бўлиши мумкин ва х.о. Мазкур мавзу билан боглик бўлган сўзлар ва иборалар ёзилади.

Мулохаза килиш учун кластерлар билан алмашишади.

Guruxlarda ish olib borish qoidalari

Ўзаро ҳурмат ва илтифот кўрсатган холда ҳар ким ўз дўстларини глай олиши керак;
Берилган топшириқга нисбатан ҳар ким актив, ўзаро ҳамкорликда ва сулиятли ёндашиши керак;
Зарур пайтда гар ким ёрдам сўраши керак;
Сўралган пайтда ҳар ким ёрдам кўрсатиши керак;
Гурух иш натижалари баҳоланаётганда ҳамма қатнашиши керак;
Ҳар ким аниқ тушуниши керакки:
Ўзгаларга ёрдам бериб, ўзимиз ўрганамиз!
Биз бир қайиқда сузаяпмиз: ё бирга кўзлаган манзилга етамиз, ёки га чўкамиз!

Mustaqil o‘rganish uchun savollar

1. Zamonaviy ta’lim vositalari deganda nimani tushunasiz ?
2. Zamonaviy ta’lim vositalarini turlarini tushuntiring ?
3. Zamonaviy ta’lim vositalarini qo‘llash usullarini tushuntiring ?
4. Axborotlarni kodlashtirish nima uchun xizmat qiladi ?

“Davra suhbati” munozarasini o‘tkazish bo‘yicha yo‘riqnoma

1. So‘zga chiqqanlarni diqqat bilan, bo‘lmasdan tinglang.
2. Ma’ruzachining fikriga qo‘shilmasang, o‘z fikringni bildirishga ruxsat so‘ra.
3. Ma’ruzachining fikriga qo‘shilsang, ko‘rib chiqilayotgan masala bo‘yicha qo‘shimcha fikrlar bildir.

Tayanch so‘zlar va iboralar:

- Algoritm
- Ob’ekt
- So‘z
- Aniqlik
- Diskretlik
- Ommaviylik
- Tushunarlilik
- Natijaviylik
- Blok-sxema

III. NAZARIY MATERIALLAR

1 – mavzu. Chiziqli fazo.

Reja:

1. Chiziqli fazo. Chiziqli fazo o‘lchami.
2. Affin fazo. Affin koordinatalar sistemasi.
3. Affin almashtirishlar va tekisliklari.
4. Bichiziqli forma.

Tayanch iboralar: Urinma, chiziq, normal, tenglamma regulyar, nuqta, vektor.

Bizga P maydon ustida V additiv abel gruppasi berilgan bo‘lsin.

Ta’rif 1. Har bir $\lambda \in P$ va $x \in V$ elementlarga $\lambda x \in V$ ko‘paytma aniqlangan bo‘lib, bu ko‘paytma uchun quyidagi shartlar

1. $1 \cdot x = x, \quad 1 \in P; \quad x \in P;$
2. $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x), \ \lambda, \mu \in P; \ x \in P;$
3. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x, \ \lambda, \mu \in P; \ x \in P;$
4. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y, \ \lambda \in P; \ x, y \in P.$

o‘rinli bo‘lsa, V gruppaga P maydon ustida chiziqli yoki vektor fazo deyiladi.

Biz P maydon elementlarini skalyar, V chiziqli fazo elementlarini vektor deb ataymiz. Ko‘pgina adabiyotlarda x vektorni $\vec{x}$ ko‘rinishda yoki qalin qora shrift shaklida yozishadi, lekin biz bu yerda faqat x shaklini ishlatamiz. Masalan, biz O ham P maydon elementi, hamda V fazo elementi sifatida bir xil harf bilan belgilanib boriladi. Agar biror joyda ikkalasi ham bir vaqtda ishtirok etgan bo‘lsa, $O \in P$ yoki $O \in V$ ko‘rsatib o‘tamiz. Bundan tashqari V chiziqli yoki vektorli fazo o‘rniga qisqacha fazo so‘zini ishlatamiz.

Shuni aytish joizki, bitta V abel gruppasini har xil maydonlar ustida ko‘rib, har xil fazolar hosil qilinadi.

Misollar.

1. Har qanday P maydon o‘z ustida fazo tashkil etadi. Bundan tashqari har qanday $V=\{0\}$ elementdan iborat abel gruppasini istalgan P maydon ustida fazo deb qarash mumkin.
2. Bizga geometriyada ma’lum bo‘lgan tekislikdagi va fazodagi vektorlar to‘plami vektorlarni qo‘shish va songa (skalyarga) ko‘paytirish amallariga nisbatan chiziqli fazolar tashkil etadi.
3. P maydon ustida $V=P^n$ arifmetik fazo chiziqli fazo bo‘ladi.
4. P maydon ustida berilgan darajasi $\deg f(x)\le n$ $V=P_n[x]$ ko‘phadlar to‘plami ko‘phadlar qo‘shish va $\lambda\in P$ skalyarga ko‘paytirish amallariga nisbatan fazo tashkil etadi.
5. Hamma $n\times m$ tartibli matrisalar $M_{m,n}(P)$ to‘plam P maydon ustida $V=M_{m,n}(P)$ fazo bo‘ladi. Xususan, $m=n$ da kvadratik $M_n(P)$ fazo, $m=1$ da satrli $M_{1n}(P)$ fazo va $n=1$ da ustunli M_{m1} fazolar bo‘ladi.

Agar V fazoda $x+(-y)=x-y$ deb olsak, u holda ayirmalar uchun quyidagi munosabatlarni ham o‘rinli bo‘lishligi fazo ta’rifidan to‘g‘ridan to‘g‘ri kelib chiqadi:
1. $\lambda(x-y)=\lambda x-\lambda y,\ \forall\lambda\in P,\forall x\in V$;
2. $(\lambda-\mu)x=\lambda x-\mu x,\ \forall\lambda\in P,\forall x\in V$;
3. $\lambda\cdot 0=0,\ \forall\lambda\in P,\ 0\in V$;
4. $\lambda\cdot x=0\in V$ dan yoki $\lambda=0$ yoki $x=0$ kelib chiqadi.

Umuman, $\lambda_i\in P,\ i=\overline{1,n}$ va $x_i\in V,\ i=\overline{1,m}$ uchun

$$(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)x=\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\ldots+\lambda_nx_n,$$
$$\lambda(x_1+x_2+x_m)=\lambda x_1+\lambda x_2+\ldots+\lambda x_m$$

tengliklar o‘rinli bo‘lib, bu tengliklarning o‘zini ham umumlashtirib

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\sum_{j=1}^{m}x_j=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\lambda_i x_j$$

tenglikning o‘rinli bo‘lishligiga komil bo‘lamiz.

Shuni ta’kidlaymizki, V abel gruppasiga P maydon ustida emas, balki K kommutativ birlik yoki umumiy halqa ustida qarasak zamonaviy algebraning muhim tarmoqlaridan bo‘lmish modul tushunchasiga kelamiz.

V fazoda P^n arifmetik fazodagi kabi muhim ahamiyat kasb etuvchi tushuncha, bu vektorlarni chiziqli bog‘lanish tushunchasidir.

Ta’rif 2. Agar $\lambda_i \in P$ va $x_i \in V$, $i = \overline{1,n}$ uchun

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n = 0 \in P \qquad \textbf{(1)}$$

tenglik kamida bittasi noldan farqli λ_i lar uchun o‘rinli bo‘lsa, berilgan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vektorlar sistemasiga chiziqli erksiz (bog‘lanmagan) deyiladi. Aks holda, ya’ni (1) tenglik aynan $\lambda_i = 0$, $i = \overline{1,n}$ o‘rinli bo‘lsa, chiziqli erkli (bog‘langan) vektorlar sistemasi deyiladi.

Shunday qilib, P^n arifmetik fazoda berilgan chiziqli kombinasiya, maksimal chiziqli erkli va rang tushunchalari va bulardan kelib chiqqan xossalar teoremalar (asosiy teorema) to‘g‘ridan to‘g‘ri V fazodagi vektorlar sistemasiga ko‘chiriladi va o‘rinli bo‘ladi. Haqiqatan ham, bu xossalar va teoremalarni to‘g‘ri ekanligiga keyinchalik biz yana bir bor ishonch hosil qilamiz.

Endi biz vektorlarni chiziqli bog‘liqliq ta’rifidan foydalanib, V fazoda markaziy rol o‘ynovchi o‘lcham tushunchalarini kiritamiz.

Ta’rif 3. Agar P maydon ustida V fazo berilgan bo‘lib, bu fazoning biror-bir n vektorlari chiziqli erkli bo‘lib, qolgan hamma $n+1$ vektorlari chiziqli bog‘langan bo‘lsa, V fazoga n o‘lchamli (o‘lchovli) fazo deyiladi va $\dim_P V = n$ yoki $\dim V = n$ ko‘rinishda yoziladi.

Agarda V da istalgancha chiziqli erkli vektorlarni topish mumkin bo‘lsa, u holda V ga cheksiz o‘lchovli fazo deb ataladi va $\dim V = \infty$ ko‘rinishda yoziladi. Cheksiz o‘lchovli fazolar ayrim yo‘nalishli bo‘lim bo‘lib, biz bu yerda ularni o‘rganmaymiz. Shunga qaramasdan chekli va cheksiz o‘lchovli fazolar umumiy xossalarga egadirlar.

Misollar.

1. O‘z ustida berilgan har qanday P maydon 1 o‘lchamli fazodir, chunki noldan farqli $x \in P$ vektor va $\forall y \in P$ lar uchun

$$\lambda_1 x + \lambda_2 y = 0$$

tenglikni qanoatlantiruvchi noldan farqli $\lambda_1, \lambda_2 \in P$ mavjud. Haqiqatan ham, agarda $\lambda_1 \neq 0$ bo‘lsa, u holda

$$\lambda_1 x = -\lambda_2 y$$

bo‘lib,

$$x = -\lambda_1^{-1} \cdot \lambda_2 y$$

hosil bo‘ladi. Shunday qilib, $\dim P = 1$.

2. C kompleks sonlar maydonini o‘z ustida qaralganda, u 1 o‘lchovli. Ammo uni R haqiqiy sonlar maydonida qaralsa, 2 o‘lchamli fazoni tashkil etadi, ya’ni $\dim_C C = 1$ va $\dim_R C = 2$ bo‘ladi. Bu yerda R ustida qaralganda $1, i$ chiziqli erkli va agarda C ustida qaralsa, i chiziqli erkli.

3. P maydon ustida berilgan P^n arifmetik fazo n o‘lchovli fazodir. Haqiqatan ham, u yerda bizga ma’lumki,

$$e_1 = (1, 0, ..., 0),$$
$$e_2 = (0, 1, ..., 0),$$

....

$$e_n = (0, 0, ..., 1)$$

ort vektorlar chiziqli bog‘lanmagan bo‘lib, ixtiyoriy $n+1$ vektorlari chiziqli bog‘liq bo‘ladi, chunki $\forall \alpha = (a_1, a_2, ..., a_n) \in P^n$ uchun

$$\alpha = a_1 e_1 + a_2 e_2 + ... + a_n e_n$$

tenglik o‘rinlidir va demak

$$\alpha,\ e_1, e_2, ..., e_n$$

$n+1$ ta vektorlari chiziqli bog‘langandir va demak $\dim_P P^n = n$ bo‘ladi.

4. $P_n[x]$ fazo $n+1$ o‘lchovlidir, chunki bu yerda $1,\ x,\ x^2,\ ....,\ x^n$ vektorlar chiziqli erkli bo‘lib, $\forall f(x)\in P_n[x]$ uchun

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n,\quad a_i\in P,\ i=\overline{1,n}$$

bo‘lganligi tufayli $f(x),\ 1,\ x, x^2,..., x^n$ $n+2$ ta vektorlari chiziqli bog‘langan va demak $\dim_P P_n[x]=n+1$ bo‘ladi.

5. $M_{m,n}(P)$ matrisalar fazosi P maydon ustida mn o‘lchovli fazo bo‘ladi, chunki $M_{m,n}(P)$ da

$$e_{11}=\begin{pmatrix}1&0&...&0\\0&0&...&0\\...&...&...&...\\0&0&...&0\end{pmatrix},\ e_{12}=\begin{pmatrix}0&1&...&0\\0&0&...&0\\...&...&...&...\\0&0&...&0\end{pmatrix},...,e_{mn}=\begin{pmatrix}0&0&...&0\\0&0&...&0\\...&...&...&...\\0&0&...&1\end{pmatrix}$$

mn ta matrisalari chiziqli erkli bo‘lib, $\forall f\in M_{m,n}(P)$ uchun

$$A=a_{11}e_{11}+a_{12}e_{12}+...+a_{mn}e_{mn},\quad a_{ij}\in P,\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}$$

va demak unda $mn+1$ vektorlari chiziqli bog‘langandir, ya’ni bundan esa

$$\dim_P M_{m,n}(P)=mn$$

ekanligi kelib chiqadi.

Xususan $M_m(P)$ satrlar fazosi n o‘lchamli va M_{m1} ustunlar fazosi m o‘lchamlidirlar.

Ikkinchi misoldan ko‘rinib turibdiki, V abel gruppasini har xil maydonlar ustida ko‘rib har xil fazolar hosil qilish mumkin, balki har xil o‘lchovli fazolar ham hosil bo‘lar ekan.

n-o‘lchovli Affin fazo va Affin koordinatalar sistemasi. k-o‘lchovli tekislik. Ikki tekislikning o‘zaro vaziyati

V_n vektor fazo va elementlari nuqtalar deb ataladi. $\mho=\{A,B,...\}$ to‘plam berilgan bo‘lsin. $\mho$ to‘plam bilan V_n to‘plam orasidagi shunday moslik o‘rnatamizki, $\mho$ ma'um tartibda olingan ikki M,N nuqta uchun V_n dagi aniq bitta $\vec{a}$

vektor mos kelsin, buni $\vec{a}=\overrightarrow{MN}$deb belgilaymiz. Lekin shuni ta'kidlash zarurki, V_n dagi har bir vektorga Ʊ da nuqtalarning tartiblangan turli juftliklari mos kelishi mumkin. Masalan, $\vec{a}=\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{KL}$, bunda M, N, P, Q, K, L larning barchasi Ʊ ga tegishlidir.

$\vec{a}=\overrightarrow{MN}$ yozuvini quyidagicha ifodalaymiz: $\vec{a}$ vektorni M nuqtadan qo‘yish bilan N nuqta hosil qilinadi.

Yuqorida keltirilgan Ʊ bilan V_n orasidagi moslikning ikki aksiomani qanoatlantirish talab etiladi.

VI_1. ∀ M∈ Ʊ va $\forall\vec{a}\in V_n$ uchun yagona shunday N∈ Ʊ mavjudki, uning uchun $\vec{a}=\overrightarrow{MN}$.

VI_2. ∀A, B, C∈ Ʊ uchun $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

Bu ikki aksioma ba'zan vektorni nuqtadan boshlab qo‘yish aksiomalari deb yuritiladi.

Ta’rif. **E**lementlari yuqoridagi $I_{1-4}, II_{1-4}, III_{1-2}, IV_{1-2}$ aksiomalarini qanoatlantiruvchi bo‘sh bo‘lmagan to‘plam *n* o‘lchovli haqiqiy affin fazo deb ataladi. Uni A_n orqali belgilaymiz. Agar V_n vektor fazo kompleks vektor fazo bo‘lsa, u holda A_n ham kompleks affin fazo deb ataladi.

Demak, n o‘lchovli affin fazoni simvolik ravishda quyidagi ko‘rinishda yozish mumkin: $A_n=V_n\cup$ Ʊ.

V_n vektor fazo A_n ning eltuvchisi deyiladi.

Xususiy holda, n=2 bo‘lsa, A_2 ikki o‘lchovli affin fazo bo‘lib, V_2ning elementlarini odatdagi geometrik fazolar deb olsak, affin tekislik hosil bo‘ladi.

Misol tariqasida quyidagi teoremalarni isbotlaylik,

1-teorema. Ʊ ning ustma-ust tushgan ikki nuqtasiga V_n ning nol vektori mos keladi, ya’ni $\overrightarrow{AA}=\vec{0}$.

Isbot. ∀A ∈ Ʊ bo‘sin. A, A nuqtalarga V_n dan biror $\vec{a}$ mos kelsin: $\forall b\in V_n$ ni olsak, VI_1 ga asosan, shunday B nuqta mavjudki, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, endi VI_2 ni tadbiq qilsak $\vec{a}+\vec{b}+\overrightarrow{AA}+\overrightarrow{AB}=\vec{b}$. Bundan I_3 ga asoasan $\vec{a}=\vec{0}$. Δ

2-teorema. $\overrightarrow{AB}=\vec{a}\Rightarrow\overrightarrow{BA}=-\vec{a}$.

Isbot. $\overrightarrow{BA}=\vec{b}$ desak, VI_2 ga asosan $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}.,\ bundan\, \vec{b}=-\vec{a}.$

3-teorema. $\overrightarrow{OA^1}=k\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB^1}=k\overrightarrow{OB}, \Longrightarrow \overrightarrow{A^1B^1}=k\overrightarrow{AB}.$

Isbot. VI_2 ga asosan

$\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{A^1O}+\overrightarrow{OB^1}=\overrightarrow{A^1B^1}$

Lekin $\overrightarrow{A^1O}=-\overrightarrow{OA^1}$ $\Rightarrow \overrightarrow{A^1O}+\overrightarrow{OB^1}=-\overrightarrow{OA^1}+\overrightarrow{OB^1}$ =-k$\overrightarrow{AO}+k\overrightarrow{OB}=k($-$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})=k\left(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}\right)=k\overrightarrow{AB},$ bundan va yuqoridagi tenglikdan $\overrightarrow{A^1B^1}=$ к$\overrightarrow{AB}.\ \Delta$

Endi affin koordinatalar sistemasi tushunchasini kiritaylik, A_n da ixtiyoriy bir O nuqtani olaylik, V_n ning biror $(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\dots,\overrightarrow{e_n})$ bazisining barcha vektorlari O nuqtadan qo‘yilgan bo‘lsin, natijada O nuqta va $\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\dots,\overrightarrow{e_n}$ basis vektorlaridan tashkil topgan $(O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\dots,\overrightarrow{e_n})$ to‘plam hosil bo‘ladi. Bu to‘plam affin koordinatalar sistemasi deb atalib, uni $\mathcal{B}=(O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\dots,\overrightarrow{e_n})$ биланбелгилаймиз. O nuqta koordinatalar boshi, $\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\dots,\overrightarrow{e_n}$ koordinata vektorlari deb ataladi.

Affin koordinatalar sistemasi deyish o‘rniga bundan buyon qisqacha *affin reper* deymiz. Demak, affin reper ikki turdagi obyektdan –nuqta va vektorlardan tashkil topgan sistemadir. A_n ning ixtiyoriy M nuqtasini olsak va affin reper $\mathcal{B}=(O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\dots,\overrightarrow{e_n})$ ma’lum bo‘lsa, $\overrightarrow{OM}$ vector hosil qilinib, bu vektor M nuqtaning radius-vektori deb ataladi.

U holda $\overrightarrow{OM}\in V_n$ bo‘lgani uchun uning $(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\dots,\overrightarrow{e_n})$ bazisdagi vektorlarini $x_1,x_2,x_3,\dots,x_n$ desak,

$\overrightarrow{OM}=x_1\overrightarrow{e_1}+x_2\overrightarrow{e_2}+\cdots+x_n\overrightarrow{e_n}$ (1)

Ta’rif. M nuqta radius-vektorlarining koordinatalari shu nuqtaning affin koordinatalari deb ataladi: u $M(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n)$ ko‘rinishida belgilanadi, demak (1) $\Leftrightarrow M(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n)$.

Xususiy holda $\overrightarrow{OM_1}$=$\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{OM_2}$=$\overrightarrow{e_2}$,.. $\overrightarrow{OM_n}$=$\overrightarrow{e_n}$ bo‘lsa, avvalgi mavzularga asosan $M_1(1{,}0{,}0\dots0), M_2(0{,}1{,}0\dots0),\dots M_n(0{,}0{,}0\dots1).$

. A_n dagi $\mathcal{B}$ affin reperga nisbatan $M(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$, $N(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$ Nuqtalar berilgan bo'lsin. $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{ON}$ yoki $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}$ ga asosan bazis vektorlar orqali ifodalaylik:

$$\overrightarrow{MN} = y_1\overrightarrow{e_1} + y_2\overrightarrow{e_2} + \dots + y_n\overrightarrow{e_n} - (x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + \dots + x_n\overrightarrow{e_n})$$
$$= (y_1 - x_1)\overrightarrow{e_1} + (y_2 - x_2)\overrightarrow{e_2} + \dots + (y_n - x_n)\overrightarrow{e_n}$$

Bundan $\overrightarrow{MN}(y_1 - x_1,\, y_2 - x_{2,\dots,} y_n - x_n)$

Ta'rif. A_n ning uchlari M, N nuqtalarda bo'lib, $\overrightarrow{MP} = t\overrightarrow{PN}$ tenglikni qanoatlantiruvchi barcha nuqtalar to'pplami MN kesma deyiladi.

MN kesma berilgan bo'lib, $\overrightarrow{MP}=\lambda\overrightarrow{PN}$ (bunda $\lambda \in R, \lambda \neq 1)$ bo'lsa, P nuqta berilgan kesmani λ nisbatda bo'ladi.

A_n dagi $\mathcal{B}$ reperda uchlari $M_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$, $N(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$ nuqtalardagi MN kesmani λ nisbatda bo'luvchi P nuqtaning koordinatalarini $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$ desak,

$$\boldsymbol{z_1 = \frac{x_1+\lambda y_1}{1+\lambda}, z_2 = \frac{x_2+\lambda y_2}{1+\lambda}, \dots., z_n = \frac{x_n+\lambda y_n}{1+\lambda}}$$

Agar $\lambda = 1\ bo\text{'}lsa$ kesmaning o'rtasidagi nuqta paydo bo'ladi.

Endi nuqtaning affin koordinatalarini almashtirish formulalarini topaylik. A_n da $\mathcal{B} = (\,O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ va $\mathcal{B}_1 = \left(O^1, \overrightarrow{\overrightarrow{e_1}^1}, \overrightarrow{\overrightarrow{e_2}^1}, \dots, \overrightarrow{\overrightarrow{e_n}^1}\right)$ affin reperlari berilgan bo'lsin. $\forall M \in A_n$ ning shu bazislardagi kordinatalari mos ravishda $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ va $x_1{}^1, x_2{}^1, \dots, x_n{}^1$ bo'lsin hamda $\mathcal{B}_1$reper elementlari $\mathcal{B}$ reperga nisbatan quyidagicha aniqlangan bo'lsin:

$O^1(c_{10}, c_{20,\dots,}c_{n0})$, $\quad \overrightarrow{e_1}^1(c_{11}, c_{21,\dots,}c_{n1})$, $\quad \dots\dots.,\quad \overrightarrow{e_n}^1(c_{n1}, c_{n2,\dots,}c_{nn})$,

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO^1} + \overrightarrow{O^1M}$ni koordinatalarda yozaylik:

$$x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + \dots + x_n\overrightarrow{e_n} =$$
$$= c_{10_1}\overrightarrow{e_1} + c_{20}\overrightarrow{e_2} + \dots + c_{n0}\overrightarrow{e_n} + x_1^1\overrightarrow{e_1^1} + x_2^1\overrightarrow{e_2^1} + \dots + x_n^1\overrightarrow{e_n^1}$$

$\overrightarrow{e_1^1}, \overrightarrow{e_2^1}, \dots \overrightarrow{e_n^1}$ larni $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots. \overrightarrow{e_n}$ orqali ifodalaymiz.

$$x_1 = c_{11}x_1^1 + c_{21}x_2^1 + \dots + c_{n1}x_n^1 + c_{10}$$

$$x_2 = c_{12}x_1^1 + c_{22}x_2^1 + \dots + c_{n2}x_n^1 + c_{20}$$

…………………………

$x_n = c_{1n}x_1^1 + c_{2n}x_2^1 + \dots + c_{nn}x_n^1 + c_{n0}$

Bu izlangan formulalar bo‘lib, ixtiyoriy nuqtaning $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}_1$ reperlarga nisbatan koordinatalari orasidagi bog‘lanishni aniqlaydi.

Affin fazoda $M_0, M_1, \dots, M_m$ nuqtalar sistemasi berilgan bo‘lsin.

Ta’rif. Agar $\overrightarrow{M_0M_1}$, $\overrightarrow{M_0M_2}, \dots \overrightarrow{M_0M_n}$ vektorlar sistemasi chiziqli erkli bo‘lsa, berilgan nuqtalar sistemasi chiziqli erkli deyiladi, aks holda berilgan nuqtalar sistemasi chiziqli bog‘liq deyiladi.

A_n n o‘lchovli affin fazo, uning eltuvchisi V_n vektor fazo hamda A_n qism fazosi A_k bo‘lib, uning eltuvchisi $V_k \subset V_n$ bo‘lsin. A_n ning tayin P nuqtasni olaylik.

Ta’rif. A_n fazodagi $\overrightarrow{PN} \in V_k$ shartni qanoatlantiruvchi barcha N nuqtalar to‘plami k o‘lchovli tekislik deb ataladi va P_k deb belgilanadi.

Bu ta’rifadan ko‘rinadiki, $V_k \subset P_k$ bo‘lib, P∈ $P_k$dir. Chunki N=P bo‘lsa, $\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{PP} = \vec{0}$ bo‘lib, $V_k$qism fazo bo‘lgani uchun $\vec{0} \in P_k$ dir. P nuqta P_k ning boshlang‘ich nuqtasi, V_k esa eltuvchisi deyiladi.

Ta’rif. A_n dagi ikki tekislik kamida bitta umumiy nuqtaga ega bo‘lsa, ular kesishuvchi kekisliklar deb ataladi.

Demak, ikki tekislik kesishsa, kesimda nuqta-nol o‘lchovli tekislik, to‘g‘ri chiziq-bir o‘chovli tekislik, ikki o‘lhovli tekislik va hokazo lar hosil bo‘lishi mumkin.

Ta’rif. Ikki tekislikning eltuvchi vektor fazolaridan biri ikkinchisining qismi bo‘lsa, bu tekisliklar o‘zaro parallel deb ataladi.

Ta’rif. Agar A_n P_k, P_s tekisliklar kesishmasa hamda o‘zaro parallel bo‘lmasa, ular ayqash tekisliklar deb ataladi.

Teorema. **Agar A_n P_k, P_s tekisliklar o‘zaro parallel bo‘lib, umumiy nuqtaga ega bo‘lsa, ulardan biri ikkinchisiga tegishlidir.**

Nazorat savollari.

1. Evklid fazosi deganda nimani tushunasiz?
2. Koshi tengsizligini isbotlang.
3. Ochiq qism to‘plamni tushuntirib bering?
4. Elementar chiziqning ta’rifi.

5. Oddiy chiziqning ta’rifi.
6. Regulyar chiziqning ta’rifi.
7. Qanday chiziqqa silliq chiziq deb ataladi?
8. E3 fazoda chiziqning parametrik tenglamalari.

2-mavzu: Yevklid fazosi.

Reja:

1. Sirt differensial geometriyasi.
2. Sirt ichki geometriyasi.
3. Sirt tashqi geometriyasi.

Tayanch iboralar: Haqiqiy sonlar to‘plami, shar, ochiq to‘plam, kesishma, uchburchak tengsizligi, urinma, chiziq, normal, tenglamma regulyar, nuqta, vektor.

Haqiqiy sonlar to‘plami, shar, ochiq to‘plam,kesishma, uchburchak tengsizligi. haqiqiy sonlar to‘plamini R^1 bilan belgilaymiz va n≥1 uchun $R^n = \{(x^1, x^2,....x^n): x^i \in R^1, i = 1,2,....n\}$ to‘plamda x=$(x^1, x^2,....x^n)$ va y=$(y^1, y^2,....y^n)$ nuqtalar orasidagi masofani d(x,y)=$\sqrt{(y^1 - x^1)^2 + (y^2 - x^2)^2 + ... + (y^n - x^n)^2}$ formula bilan aniqlaymiz. Bu kiritilgan $d : R^n \times R^n \to R^1$ funktsiya quyidagi shartlarni qanoatlantiradi.

1) musbat aniqlangan ixtiyoriy x,y $\in R^n$ juftlik uchun d(x,y) ≥0 bo‘lib d(x,y)=0 bo‘lishi uchun x=y munosabatni bajarilishi zarur va etarlidir.

2) Simmetrik funktsiyadir: ixtiyoriy x,y juftlik uchun d(x,y)= d(y,x) munosabatlar o‘rinli.

3) Uchburchak tengsizligini qanoatlantiradi: ixtiyoriy x,y,z uchta nuqta uchun d(x,y) ≤d(x,z)+d(z,y) tengsizlik bajariladi. Yuqorida d(x,y) funktsiyaning 1,2- shartlarni qanoatlantirishi ravshan. Bu shartlarning uchinchisi sizga matematik analiz kursidan ma’lum bo‘lgan

$$\left[\sum_{i=1}^{n}\left(a^i-b^i\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{\,2}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^{\,2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Koshi tengsizligidan kelib chiqadi.

Haqiqatdan ham agar x=$\left(x^1, x^2,....x^n\right)$, y=$\left(y^1, y^2,....y^n\right)$ $z=(z^1, z^2,.....z^n).......nuqtalar..uchun.....a^k = x^k - z^k, b^k = z^k - y^k$ belgilashlar kiritsak Koshi tengsizligidan d(x,y) ≤d(x,z)+d(z,y) tengsizlik kelib chiqadi. Kiritilgan d funktsiya bilan birgalikda R^n metric fazo bo‘ladi. evklid fazoda berilgan x nuqta va r>0 soni uchun

$B_r(x)=\{y \in R^n : d(x,y)<r\}$ to‘plam markazi x nuqtada bo‘lgan radiysi r ga teng ochiq shar deb ataladi.

$B_r(x)=\{y \in R^n : d(x,y)\le r\}$ to‘plam markazi x nuqtada bo‘lgan radusi r ga teng yopiq shar deb ataladi.

Sonlar o‘qida ya’ni R$^|$ da $B_r(x)$ ochiq shar (x-r, x+r)ochiq interval, yopiq $B_r(x)$ shar esa [x-r, x+r] yopiq kesma bo‘ladi.

Endi ochiq shar yordamida R^n da ochiq to‘plam tushunchasini kiritamiz. Berilgan A to‘plam va unga tegishli a nuqta uchun shunday r>0 soni mavjud bo‘lib $B_r(a)\subset A$ bo‘lsa a nuqta A to‘plamning ichki nuqtasi deyiladi. Hamma nuqtalari ichki nuqtalar bo‘lgan to‘plam ochiq to‘plam deyiladi. Demak har qanday ochiq shar ochiq to‘plam bo‘ladi chunki $x \in B_r(a)$ bo‘lsa

$r_x = \min\{d(a,x), r-d(a,x)\} > 0$ soni uchun $B_{r_x} \subset B_r(a)$ bo‘ladi. Haqiqatan

$$y \in B_{r_x}(x)..bo'lsa.$$

$...d(a,y)\le d(a,x)+d(y,x)\le d(a,x)+r_x \le d(a,x)+r-d(a,x)=r$ ya’ni d(a,y)<r demak $B_{r_x}\subset B_r(a)$ bo‘ladi Endi biz bo‘sh to‘plamni ⊗ bilan belgilab uni ixtiyoriy to‘plam uchun qism to‘plam deb hisoblaymiz va R^n ning ochiq qism to‘plam deb qabul qilamiz. Ana shunda ochiq qism to‘plamlar uchun quyidagi

teoremani isbotlay olamiz.

Teorema1. Ochiq qism to‘plamlar uchun quyidagilar o‘rinlidir.

1. Butun fazo ya’ni R^n ochiq to‘plamdir.
2. Bo‘sh to‘plam ochiq to‘plamdir.
3. Chekli sondagi ochiq qism to‘plarning kesishmasi (umumiy qismi) ochiq to‘plamdir.
4. har qanday ochiq to‘plamlar oilasi uchun bu oiladagi ochiq to‘plamlar yig‘indisi ochiq to‘plamdir.

Isbot. Teoremaning ikkinchi tasdig‘I isbot talab qilmaydi, chunki bo‘sh to‘plamni ochiq to‘plam deb e’lon qilganmiz. Agar $a \in R^n$ bo‘lsa ixtiyoriy r>0 soni uchun $B_r(a) \subset R^n$ munosabat har doim o‘rinli, shuning uchun ham R^n ochiq to‘plamdir.

Endi, ochiq to‘plamlar berilgan bo‘lsa, A=$\bigcap_{i=1}^{m} A_i$

to‘plamning ochiq, ekanligini ko‘rsataylik. Agar A=$\varnothing$ bo‘lsa, ikkinchi punktga ko‘ra A ochiq, to‘plam bo‘ladi. Shuning uchun A$\neq\varnothing$ deb faraz qilib, A ga tegishli ixtiyoriy a nuqtaning ichki nuqta ekanligini ko‘rsataylik. Agar a$\in$A bo‘lsa, unda aeA$_i$ munosabat barcha i lar uchun bajariladi. Har bir A$_i$ ochiq, to‘plam bo‘lganligi uchun shunda r$_i$>0 soni mavjudki, B$_r$ (a) $\subset$ A$_i$

munosabat bajariladi. Bu chekli sondagi r$_i$ sonlarining eng kichigini r bilan belgilasak, B$_r$(a) $\subset$ B$_r$ (a) $\subset$ A$_i$ munosabat

bajariladi. Demak B$_r$(a) $\subset$A, va a nuqta A to‘plamning ichki nuqtasidir. Eidi teoremaning 4-punktini isbotlaylik. Ochiq,

to‘plamlardan iborat {A$_\alpha$} oila berilgan bo‘lsin. $A = \bigcup_{\alpha} A_\alpha$

yig‘indining ochiq, to‘plam ekanligini ko‘rsataylik. Buning uchun A ga tegishli ixtiyoriy a nuqta olib, uning ichki nuqta ekanligini ko‘rsatamiz. Yig‘indiga tegishli a nuqta yig‘indida qatnashayotgan A$_\alpha$ to‘plamlarning kamida birortasiga tegishli

bo‘ladi. Faraz qilaylik a$\in$ A$_{\alpha0}$ bo‘lsin. A$_{\alpha0}$ to‘plam ochiq, bo‘lganligi uchun birorta r>0 mavjud bo‘lib, $B_r(a) \subset A_{\alpha 0}$ munosabat bajariladi. Demak $B_r(a) \subset A$ va A to‘plam uchun a ichki nuqta bo‘ladi. Bundan esa, A ning ochiq, to‘plam ekanligi kelib chiqadi.

Endi ochiq, to‘plam tushunchasidan foydalanib, yopiq; to‘plam tushunchasini kiritamiz. Berilgan F to‘plamiing to‘ldiruvchisi $CF=R^m \backslash F$ ochiq. to‘plam bo‘lsa, F yopiq, to‘plam deb ataladi. Birinchi teoremadan foydalanib, yopiq to‘plamlar uchun quyidagi teoremani isbotlash mumkin.

Teorema-2. Yopiq, qism to‘plamlar uchun quyidagilar o‘rinlidir.

1. Butun fazo, ya’ni R^n yopiq, to‘plamdir.

2. Bo‘sh to‘plam yopiq; to‘plamdir.

3. Har qanday yopiq qism to‘plamlar oilasi uchun shu oiladagi to‘plamlar kesishmasi yopiq, to‘plamdir.

4. Chekli sondaga yopiq, to‘plamlarning yig‘indisi yopiq, to‘plamdir

Biz R^n ning $x = (x_1, x_2, ..., x^n)$ $y= (y_1,y_2,…y^n)$ elementlari uchun $x+y=(x^1+y^1, x^2+y^2 …. x^n+y^n)$, $\lambda x=(\lambda x^1, \lambda x^2,….. \lambda x^n)$ qoidalar bilan yangi x+y, λx elementlarni aniqlashimiz mumkin. Bu yerda λ haqiqiy son. Bu kiritilgan amallarga nisbatan R^n chiziqli fazo Bu xolda R^n ni chiziqli fazo sifatida qarasak, uning elemenlarini vektor deb ataymiz. Chiziqli fazo uchun belgilashni o‘zgartirmaymiz, chunki har gal tekst mazmunidan R^n ning metrik fazo yoki chiziqli fazo ekanligi ko‘rinib turadi. Metrik R^n fazo nuqtalariining xar bir x, y juftiga boshi x nuqtada, oxiri esa y nuqtada

$x\vec{y}$ vektorni mos qo‘ysak, bu vektor chiziqli R^n fazoning elementi Chiziqli R^n fazoda skalyar ko‘paytma kiritilgandan keyin R^n fazoni Evklid fazosi deb ataymiz. Demak, R^n ni Evklid fazosi deganimizda, unda d funktsiya yordamida metrika kiritilib, unga tegishli nuqtalarning har bir juftiga mos qo‘yilgan vektorlar fazosida skalyar ko‘paytma kiritilgandir.

Evklid fazosida

$$y^i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x^j + a_i = i = 1,2,....n$$

ko‘rinishidagi almashtirishda $\{a_{ij}\}$ matrisaning determinanti noldan farqli bo‘lsa u affin almashtirish deb ataladi. Bu yerda $\bar{x} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ . \\ . \\ x^n \end{pmatrix}, \bar{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ . \\ . \\ a_n \end{pmatrix}, A = (a_{ij})$

belgilashlarni hisobga olib affin almashtirishni y=Ax+a ko‘rinishda yozishimiz mumkin. Agar A matrisa ortogonal matrisa bo‘lsa, F akslantirish harakat deb ataladi. Ma’lumki, A ortogonal matrisa bo‘lsa, x,y, vektorlar uchun

(Ax,Ay) = (x,y)

tenglik o‘rinlidir, ya’ni harakatda skalyar ko‘paytma saqlanadi. Haqiqatdan , A ortogonal matrisa bo‘lsa $A^TA=E$

munosabat o‘rinli bo‘ladi. Bu yerda A^T transponirlangan matrisa, E esa birlik matrisa. Shuning uchun $(Ax,Ay)=(x,A^TAy)=(x,y)$

tenglikni xosil qilamiz. Bizga analitik geometriya kursidai ma’lumki harakat ikki nuqta orasidagi masofani saqlaydi. Agar detA>0 bo‘lsa, ma’lumki F harakat fazoda orientatsiyani ham saqlaydi.

Evklid fazosida bo‘shmas, elementlari nuqtalar bo‘lgan X va Y to‘plamlar berilsin.

Ta’rif. X to‘plamning x *e*lementlari bilan Y to‘plamning y elementlari orasidagi $y = f(x)$ bog‘lanishga X to‘plamni Y to‘plamga **akslantiruvchi** deb ataladi va quyidagicha belgilanadi:

$$f : X \to Y.$$

y elementni x *e*lementning f akslantirishdagi **aksi**, x *e*lementni esa y elementning **asli** deyiladi. X to‘plam barcha elementlarining akslari to‘plami $f(X)$ kabi belgilanib, uni f akslantirishdagi X to‘plamning **aksi** deyiladi.

Ta’rif. X to‘plamni Y to‘plamga f akslantiruvchini **bir qiymatli akslantirish** deb ataladi, agarda bu akslantirishda X to‘plamning har xil nuqtalari Y to‘plamning har xil nuqtalariga mos kelsa.

Ta’rif. Agar $f : X \to Y$ akslantirish bir qiymatli bo‘lsa, u vaqtda Y

to‘plamga qarashli har bir y nuqtaga X to‘plamdagi aniq bir x nuqtani mos keltiruvchi f^{-1} akslantirish mavjud bo‘lib, bu f^{-1} akslantirishni f akslantirishga **teskari akslantirish** deb ataladi.

x va x_o nuqtalar X to‘plamning elementlari bo‘lib, $y = y(x)$ va $y_0 = f(x_o)$ nuqtalar, ularning Y to‘plamdagi akslari bo‘lsin. x va x_o nuqtalar orasidagi masofani $\rho(x, x_o)$ bilan, $y = f(x)$ va $y_0 = f(x_o)$ nuqtalar orasidagi masofani $\rho(y, y_0)$ bilan belgilaymiz.

Ta’rif. $\varepsilon > 0$ son har qanday bo‘lganda ham, uning uchun shunday $\delta > 0$ son mavjud bo‘lsaki, $\rho(x, x_o) < \delta$ bo‘lganda $\rho(y, y_0) < \varepsilon$ bo‘lsa, f akslantirishni x_o nuqtada **uzluksiz** deb ataladi.

Agar f akslantirish X to‘plamning har bir nuqtasida uzluksiz bo‘lsa, u vaqtda f akslantirish X to‘plamda **uzluksiz** deb ataladi.

Ta’rif. Biror intervalning uch o‘lchovli E_3 fazodagi uzluksiz, bir qiymatli va teskarisi ham uzluksiz akslantirishdagi aksiga e**lementar chiziq** deb ataladi.

Masalan, to‘g‘ri chiziq elementar chiziq bo‘ladi.

Haqiqatan, E_3 fazoda ℓ to‘g‘ri chiziq

$$\left.\begin{aligned} x &= a_1 t + x_o, \\ y &= a_2 t + y_o, \\ z &= a_3 t + z_o \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

parametrik tenglamalari bilan berilsa, u vaqtda (1) chiziqli funksiyalar bilan aniqlangan f bog‘lanish, $(-\infty, +\infty)$ interval va ℓ to‘g‘ri chiziq nuqtalari orasidagi uzluksiz, bir qiymatli, teskarisi ham uzluksiz akslantirish bo‘ladi.

Evklid fazosidagi nuqtalar to‘plami G **ochiq to‘plam** deb ataladi, agarda bu to‘plamning har bir x nuqtasi uchun shunday $\varepsilon > 0$ son mavjud bo‘lsaki, fazoning x nuqtadan ε dan kichik masofada joylashgan barcha nuqtalari G to‘plamga tegishli bo‘lsa.

Bu ta’rifdan kelib chiqadiki, istalgan sondagi ochiq to‘plamlarning birlashmasi ochiq to‘plam bo‘ladi.

x nuqtani o‘z ichiga olgan har qanday ochiq to‘plamni, x nuqtaning **atrofi** deb ataladi.

Evklid fazosidagi nuqtalar to‘plami W **tutash** deb ataladi, agarda W to‘plamni ikki W_1 va W_2 qismga ajratuvchi va W_1 qism to‘plam faqat G_1 ga, W_2 qism to‘plam G_2 ga tegishli bo‘lgan, G_1 va G_2 ochiq to‘plamlar mavjud bo‘lmasa.

Ta’rif. Evklid fazosidagi nuqtalar to‘plami Q tutash bo‘lib, uning har bir nuqtasi shunday atrofga ega bo‘lsaki, Q to‘plamning bu atrofga tegishli qismi elementar chiziq bo‘lsa, u vaqtda Q to‘plamni **oddiy chiziq** deb ataladi.

Masalan, aylana oddiy chiziq bo‘ladi.

Haqiqatan, E_3 fazoda aylana yotgan tekislik, Oxy tekisligi bo‘lgan $O\vec{i}\ \vec{j}\ \vec{k}$ dekart koordinatalar sistemasini tanlasak, u vaqtda

$$\left.\begin{aligned} x &= R\cos t + a, \\ y &= R\sin t + b, \\ z &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2),$$

bu yerda $t\in[0, 2\pi]$, tenglamalar – markazi $M_o(a;\, b;\, 0)$ nuqtada va radiusi R ga teng bo‘lgan aylananing parametrik tenglamalari bo‘ladi. Agar $N(t_o)$ nuqta aylananing $(R\cos t_o + a;\, R\sin t_o + b;\, 0)$ nuqtasi bo‘lsa, u vaqtda yetarli darajada kichik $\varepsilon > 0$ uchun (2) tengliklar bilan aniqlangan f bog‘lanish $(t_o-\varepsilon,\, t_o+\varepsilon)$ intervalni uning aksiga uzluksiz, bir qiymatli va teskarisi ham uzluksiz akslantiruvchi bo‘ladi. Demak, aylananing ixtiyoriy $N(t_o)$ nuqtasining yetarli kichik atrofiga tegishli qismi elementar chiziq bo‘ladi.

Ta’riflardan ko‘rinadiki, har qanday elementar chiziq oddiy chiziq bo‘ladi. Lekin oddiy chiziq har doim ham elementar chiziq bo‘la olmaydi.

E_3 fazoda $O\vec{i}\ \vec{j}\ \vec{k}$ dekart koordinatalar sistemasini olamiz. γ **e**lementar chiziq, ℓ to‘g‘ri chiziqdagi (a, b) intervalni uzluksiz, bir qiymatli va teskarisi ham uzluksiz bo‘lgan f akslantirish natijasida hosil qilingan bo‘lsin. γ **e**lementar chiziqning, (a,b) intervalga tegishli ixtiyoriy t nuqtaga mos keluvchi nuqtasini $N = f\,(t)$ bilan belgilaylik. Agar N nuqtaning koordinatalarini x, y, z bilan belgilasak, f akslantirish

$$\left.\begin{aligned} x &= x(t), \\ y &= y(t), \\ z &= z(t) \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

tenglamalar sistemasi bilan aniqlanadi. f akslantirish uzluksiz, bir qiymatli va teskarisi ham uzluksiz bo‘lgani uchun $x(t)$, y(t), z(t) ifodalar (a, b) intervalda t ning uzluksiz, bir qiymatli va teskarisi ham uzluksiz funksiyalari bo‘ladi.

(3) tenglamalarni γ elementar chiziqning **parametrik tenglamalari** deb ataladi, t o‘zgaruvchini γ elementar chiziqning **parametri** deyiladi. Parametrning har xil qiymatlariga γ elementar chiziqning har xil nuqtalari mos keladi. f akslantirishga γ elementar chiziqni **parametrlash** deb ataladi. Bitta elementar chiziqda bir nechta har xil parametrlash mavjud bo‘lishi mumkin. Parametrlash bilan ta’minlangan chiziqni **parametrlangan chiziq** deb ataladi.

(3) tenglamalar sistemasining birinchi tenglamasini $\vec{i}$ ga, ikkinchisini $\vec{j}$ ga, uchinchisini $\vec{k}$ ga ko‘paytirib, natijani hadma-had qo‘shamiz:

$$x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}.$$

Bu yerda

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

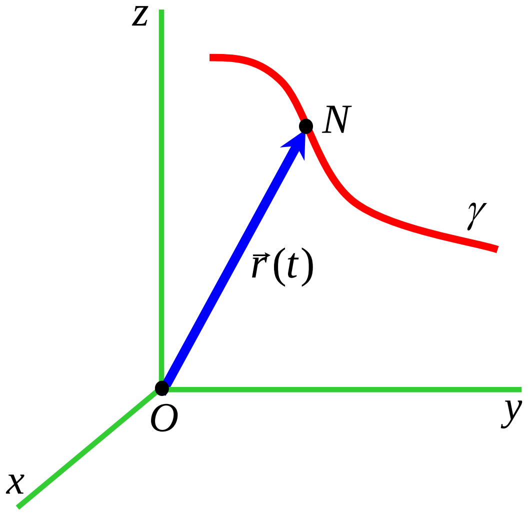
va

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

belgilashlarni kiritsak

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \qquad (4)$$

tenglama hosil bo‘ladi. (4) tenglamaga elementar chiziqning **vektor tenglamasi** deyiladi. Bu erda $\vec{r}(t)$ – koordinatalari $x(t)$, y(t), z(t) bo‘lgan va (a, b) intervalda aniqlangan vektor funksiyadir. Demak, γ elementar chiziqni $\vec{r}(t)$ vektor funksiyaning godografi sifatida qarash mumkin ekan (6–chizma).



6–chizma.

Ta'rif. γ elementar chiziqni **regulyar chiziq** deb ataladi, agarda u

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$$

parametrik tenglamalari bilan berilib, $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ funksiyalar k marta ($k \geq 1$) differensiallanuvchi bo'lib,

$$x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t) \neq 0$$

sharti bajarilsa.

Agar $k = 1$ bo'lsa, u vaqtda γ elementar chiziqni **silliq chiziq** deyiladi.

Chiziq **analitik** deb ataladi, agarda uning parametrik tenglamalari analitik funksiyalardan iborat bo'lsa.

Ba'zi chiziqlarning tenglamalarini

$$\left.\begin{aligned} x &= t, \\ y &= y(t), \\ z &= z(t) \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

bu yerda $t \in (a, b)$, yoki

$$\left.\begin{aligned} y &= y(x), \\ z &= z(x) \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

bu yerda $x \in (a, b)$, ko'rinishda yozish mumkin. Ayrim masalalarni yechishda chiziqning bunday tenglamalari qulaylik tug'diradi. Shu sababli, qanday hollarda chiziqning tenglamasini (5) yoki (6) ko'rinishda yozish mumkin, degan savol tug'iladi. Bu savolga quyidagi teorema javob beradi.

1-teorema. Agar $x=f_1(t)$, $y=f_2(t)$, $z=f_3(t)$ ifodalar γ regulyar chiziqning, parametrning $t = t_o$ qiymatiga mos keluvchi $M_o(x_o;\ y_0;\ z_o)$ nuqtasi atrofida parametrik tenglamalari bo'lib, $f_1'(t_o) \neq 0$ bo'lsa, u vaqtda $M_o(x_o;\ y_0;\ z_o)$ nuqtaning biror atrofida γ chiziq tenglamalarini

$$\left.\begin{aligned} y &= y(x), \\ z &= z(x) \end{aligned}\right\}$$

shaklda yozish mumkin.

Isbot. Oshkormas funksiyalar haqidagi teoremalarga asosan, x_o qiymatning shunday $(x_o-\delta,\ x_o+\delta)$ atrofi topiladiki ($\delta>0$), bu atrofda aniqlangan bir qiymatli, uzluksiz $t = \lambda(x)$ funksiya mavjud bo‘lib, u $t_o = \lambda(x_o)$ va $x = f_1(\lambda(x))$ tenglamalarni qanoatlantiradi. Oxirgi tenglikni $x = x_o$ qiymatda differensiallasak

$$1 = f_1'(\lambda(x_o))\cdot\lambda'(x_o).$$

Teorema shartiga asosan $f_1'(t_o) \neq 0$ bo‘lgani uchun $\lambda'(x_o) \neq 0$ ekanligi kelib chiqadi. Bu tengsizlik esa $\lambda(x)$ funksiyaning $(x_o - \delta,\ x_o + \delta)$ intervalda monoton ekanligini bildiradi. Shu sababli biz $t = \lambda(x)$ funksiyada t ning o‘rniga x ni parametr qilib olishimiz mumkin. $t = \lambda(x)$ ifodani teorema shartidagi $y = f_2(t)$ va $z = f_3(t)$ tenglamalarga qo‘ysak

$$y = f_2(\lambda(x)) = y(x),$$

$$z = f_3(\lambda(x)) = z(x)$$

kelib chiqadi, bu yerda $x_o - \delta < x < x_o + \delta$. Teorema isbot bo‘ldi.

Analitik geometriyadan ma’lumki, fazoda to‘g‘ri chiziqni, shu to‘g‘ri chiziq nuqtalarining x, y,z koordinatalariga nisbatan ikkita birgalikda bo‘lgan chiziqli tenglamalar sistemasi orqali berish mumkin edi. Shu sababli tabiiy ravishda quyidagi savol tug‘iladi.

Qanday hollarda ushbu

$$\left.\begin{aligned}\varphi(x,y,z)=0,\\ \psi(x,y,z)=0\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

tenglamalar sistemasi biror chiziqni ifodalaydi ? Bu savolga quyidagi teorema javob beradi.

2-teorema. Agar G to‘plam koordinatalari (7) sistemani qanoatlantiruvchi nuqtalar to‘plami bo‘lib, $M_o(x_o;\ y_0;\ z_o) \in G$ nuqtaning biror B_o atrofida φ $(x_o;\ y_0;\ z_o)$ $\psi(x,y,z)$ funksiyalar uzluksiz va birinchi tartibli uzluksiz hosilalarga ega bo‘lib, M_o nuqtada

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix}\varphi'_x & \varphi'_y & \varphi'_z\\ \psi'_x & \psi'_y & \psi'_z\end{pmatrix} = 2$$

bo‘lsa, u vaqtda M_o nuqtaning shunday $B'_o \subset B_o$ atrofi mavjudki, G to‘plamning bu atrofdagi qismi silliq chiziq bo‘ladi.

Isbot. Umumiylikni cheklamasdan, M_o nuqtada

$$\begin{vmatrix} \varphi'_y & \varphi'_z \\ \psi'_y & \psi'_z \end{vmatrix} \neq 0$$

bo‘lsin deb faraz qilaylik. U vaqtda oshkormas funksiyalar haqidagi teoremalarga asosan, shunday $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ musbat sonlar topiladiki, $(x_o-\delta_1, x_o+\delta_1)$ intervalga tegishli har bir x uchun (7) tenglamalar sistemasi yagona $y = y(x)$, $z = z(x)$ yechimga ega bo‘lib, bu yechimlar

$$|y_0-y(x)| < \delta_2, \ |z_o-z(x)| < \delta_3$$

tengsizliklarni qanoatlantiradi. Shuningdek $y(x)$ va $z(x)$ funksiyalar mos ravishda $(y_0-\delta_2, y_0+\delta_2)$ va $(z_o-\delta_3, z_o+\delta_3)$ intervalda birinchi tartibli uzluksiz hosilaga ega. Demak, M_o nuqtaning $B'_o=\{(x; y;z): |x_o-x| < \delta_1, |y_0-y| < \delta_2, |z_o-z| < \delta_3\}$ atrofida G to‘plam

$$\left.\begin{aligned} x &= t, \\ y &= y(t), \\ z &= z(t) \end{aligned}\right\}$$

parametrik tenglamalar bilan aniqlanuvchi silliq chiziq bo‘ladi, bu yerda $x_o-\delta_1 < t < x_o+\delta_1$. Teorema isbot bo‘ldi.

(7) tenglamalar sistemasini Evklid fazosidagi chiziqning **oshkormas tenglamalari** deb ataladi.

Ta’rif. Hamma nuqtalari bir tekislikka tegishli bo‘lgan chiziqni **tekis chiziq** deb ataladi.

Tekis chiziq nuqtalari tegishli bo‘lgan tekislikni Ox tekisligi deb hisoblanadi. Shu sababli tekis chiziqning **parametrik tenglamalari** quyidagicha bo‘ladi:

$$\left.\begin{aligned} x &= x(t), \\ y &= y(t) \end{aligned}\right\} \qquad (8).$$

(8) tenglamalar sistemasida t ni yo‘qotsak

$$f(x, y) = 0 \qquad (9)$$

tenglama hosil bo‘ladi. (9) tenglamani tekis chiziqning **oshkormas tenglamasi** deb ataladi.

(9) tenglamani u ga nisbatan yechsak

$$y = y(x) \qquad (10).$$

(10) tenglama tekis chiziqning **oshkor tenglamasi** deb ataladi.

Oshkormas funksiyalar haqidagi teoremalarga asosan, agar tekis chiziq parametrik tenglamalari bilan berilib, parametrning t va t_o qiymati bilan aniqlanuvchi $N_o(x_o;\, y_0)$ nuqtada

$$x'(t_o) \neq 0 \quad \text{yoki} \quad y'(t_o) \neq 0$$

shart bajarilsa, u vaqtda tekis chiziq bu nuqtaning biror atrofida mos ravishda

$$y = y(x) \quad \text{yoki} \quad x = x(y)$$

ko‘rinishdagi oshkor tenglamalarning biri bilan ifoda etiladi.

Xuddi shuningdek, agar tekis chiziq oshkormas tenglamasi bilan berilib, $N_o(x_o;\, u_0)$ nuqtada

$$f_x'(x_o;\, y_0) \neq 0 \quad \text{yoki} \quad f_y'(x_o;\, y_0) \neq 0$$

sharti bajarilsa, u vaqtda tekis chiziq bu nuqtaning biror atrofida mos ravishda

$$y = y(x) \quad \text{yoki} \quad x = x(y)$$

ko‘rinishdagi oshkor tenglamalardan biri bilan ifoda etiladi.

Shunday qilib tekis chiziqning

$$x'(t_o) = 0, \quad y'(t_o) = 0$$

yoki

$$f_x'(x_o;\, y_0) = 0, \quad f_y'(x_o;y_0) = 0$$

tengliklarni qanoatlantiruvchi $M_o(x_o;\, y_0)$ nuqtalarining atrofida chiziq oshkor tenglama bilan ifoda etilmay qolishi mumkin ekan. Bunday nuqtalar maxsus nuqtalar deb ataladi. Tekis chiziqning maxsus nuqtasi atrofidagi tuzilishini keyinroq o‘rganamiz.

EVKLID FAZOSADA SIRTLAR. SIRT TUShUNChASI.

Elementar sirt, oddiy sirt, regulyar sirt, silliq sirt, sirtning egri chiziqli koordinatalari, sirtning parametrik tenglamalari, sirtning vektor tenglamasi, sirtning oshkor tenglamasi, sirtning oshkarmas tenglamasi, koordinat chiziqlar, *u* chiziqlar, *v* chiziqlar, koordinat to‘ri, muntazam to‘r.

Avvalo to‘plamlar nazariyasidan ba’zi-bir tushunchalarni keltiramiz.

Tekislikda nuqtalar to‘plami **G** berilgan bo‘lsin.

Tekislikdagi $M_o(x_o; y_0)$ nuqtaning “atrofi” deb qarash

munosabat bilan aniqlanuvchi M nuqtalar to‘plamini tushunamiz.

Agar **G** to‘plamning M_o nuqtasi biror atrofi bilan **G** to‘plamga to‘la tegishli bo‘lsa, M_o nuqtani **G** to‘plamning **ichki nuqtasi** deb ataymiz.

G to‘plam **ochiq** deyiladi, agarda uning har bir nuqtasi ichki nuqta bo‘lsa.

G to‘plam **bog‘lamli** deb ataladi, agarda uning istalgan ikki nuqtasini shu to‘plamga tegishli siniq chiziq bilan tutashtirish mumkin bo‘lsa.

G to‘plamni **soha** deb ataymiz, agarda u ochiq to‘plam bo‘lib, bog‘lamli bo‘lsa.

Masalan, doiraning, uni o‘rab turgan aylana nuqtalaridan boshqa nuqtalari to‘plami soha bo‘ladi.

G to‘plam tekislikdagi soha bo‘lsin, uni qisqacha **tekis soha** deb ataymiz.

<u>Ta’rif.</u> Tekis sohaning E_3 fazodagi topologik aksiga e**lementar sirt** deb ataymiz.

<u>Ta’rif.</u> E_3 fazodagi nuqtalar to‘plami **Q** bog‘lamli to‘plam bo‘lib, uning har bir nuqtasi shunday fazoviy atrofga ega bo‘lsaki, to‘plamning bu atrofga tegishli qismi elementar sirt bo‘lsa, u holda **Q** to‘plamga **oddiy sirt** deb ataladi.

F oddiy sirt **G** tekis sohani E_3 fazoga topologik akslantirish natijasida hosil bo‘lgan bo‘lsin.

G soha joylashgan tekislikda **u,v** dekart koordinatalar sistemasini kiritamiz (25-chizma).

U vaqtda **G** sohani **F** oddiy sirtga

akslantiruvchi funksiyalar umumiy

shaklda quyidagicha bo‘ladi:

$$\left.\begin{aligned} x &= x(u,v), \\ y &= y(u,v), \\ z &= z(u,v) \end{aligned}\right\} \qquad (1).$$

Bu yerda x=x(u,v) , y=y(u,v) , z=z(u,v)

funksiyalar uzluksiz, bir qiymatli 25-chizma.

va ularga teskari funksiyalar ham uzluksizdir.

(1) tenglamalar sistemasiga **F** oddiy sirtning **parametrik tenglamalari** deyiladi.

u va *v* sonlar jufti **F** sirtdagi nuqtaning holatini to‘la aniqlaydilar va ularga sirtdagi nuqtaning e**gri chiziqli koor-dinatalari** yoki **gauss koordinatalari** deb ataladi.

REGULYAR SIRTLAR.

Ta’rif. **F** oddiy sirtni **regulyar sirt** deb ataymiz, agarda u o‘zining har bir nuqtasi atrofida *x* = *x*(u,v), y = y(u,v), z = z(u,v) parametrik tenglamalari bilan berilib, *x*(u,v), y(u,v),z(u,v) funksiyalar *k* marta differensiallanuvchi $(k \geq 1)$ va ushbu

$$\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}$$

matritsaning rangi ikkiga teng bo‘lsadi.

Teorema. Agar **F** silliq sirt *x* = *x*(u,v), y=y(u,v), z=z(u,v) parametrik tenglamalari bilan berilib, sirtning $M_o(x_o;y_0,z_0)$ nuqtasida

$$\begin{vmatrix} x_u^0 & y_u^0 \\ x_v^0 & y_v^0 \end{vmatrix} \neq 0$$

shart bajarilsa, u vaqtda M_o nuqta atrofida **F** sirt tenglamasini

$$\mathbf{z} = f(x, y) \qquad (1)$$

shaklda yozish mumkin.

Isbot. Oshkormas funksiyalar haqidagi teoremaga asosan:

$$\begin{vmatrix} x_u^0 & y_u^0 \\ x_v^0 & y_v^0 \end{vmatrix} \neq 0$$

bo‘lganda, $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ tenglamalar sistemasini $M_o(u_0,v_0)$ nuqta atrofida u,v larga nisbatan yechish mumkin.

Natijada

$$u = \varphi(x, y)\,, \qquad v = \psi(x,y) \qquad (2)$$

hosil bo‘ladi.

u va v larning bu qiymatlarini sirtning parametrik tenglamalaridagi z=z(u,v) tenglamaga qo‘ysak:

$$z = z(\varphi(x,y), \psi(x, y)) = f(x,y)$$

hosil bo‘ladi. Teorema isbot bo‘ldi.

(1) tenglamaga sirtning **oshkor tenglamasi** deb ataladi.

(1) tenglamani umumiy shaklda quyidagicha yozish mumkin:

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = 0 \qquad (3).$$

(3) tenglamaga sirtning **oshkormas tenglamasi** deb ataladi.

KOORDINAT CHIZIQLAR.

Bizga **F** regulyar sirt

$$\vec{r} = \vec{r}\,(u,v) \qquad (1)$$

vektor tenglamasi bilan berilsin.

(1) tenglamada $v = v_o = const$ deb olsak,

$$\vec{r} = \vec{r}\,(u,v)$$

vektor bitta u o‘zgaruvchining funksiyasi bo‘lib, u **F** sirt ustida yotuvchi qandaydir chiziqning vektor tenglamasi bo‘ladi.

Agar v_o ga har xil qiymatlar qo‘ysak, sirt ustida har xil chiziqlar hosil bo‘la boradi va ular v parametrli chiziqlar oilasini tashkil etadi. Bu chiziqlar oilasida u o‘zgaruvchi bo‘lgani uchun, ularni biz u **chiziqlar** (v = *const*) deb ataymiz.

Xuddi shunga o‘xshash (1) tenglamada $u = u_o = const$ deb olsak, **F** sirt ustida yotuvchi chiziqlarning u_o parametrli ikkinchi oilasini hosil qilamiz. Bu chiziqlar oilasini biz v **chiziqlar** ($u = const$) deb ataymiz.

Koordinat chiziqlarning ikkala oilasini **koordinat to‘ri** deb ataymiz.

Silliq sirtning har bir nuqtasidan koordinat to‘riga tegishli ikkita chiziq o‘tadi.

Sirtda joylashgan biror sohaning har bir nuqtasidan koordinat to‘rining faqat ikkita chizig‘i o‘tsa, bunday to‘rga **muntazam to‘r** deyiladi.

Silliq sirt ustidagi to‘r muntazam bo‘ladi.

F sirtda $M_o(u_o; v_o)$ nuqta berilsin. U vaqtda chiziqlar na-zariyasidan ma’lumki, $\vec{r}_u$ (u_o, v_o) vektor u chiziqning $M_o(u_o;vv_o)$ nuqtasidagi urinma vektori bo‘ladi. $\vec{r}_u$ (u_o,v_o) vektor esa v chiziqning

$M_o(u_o;v_o)$ nuqtasidagi urinma vektori

bo‘ladi (26-chizma).

F sirt regulyar bo‘lgani uchun,

$M_o(u_o;v_o)$ nuqta atrofida

matritsaning rangi ikkiga teng bo‘ladi.

Shu sababli $M_o(u_o;v_o)$ nuqtada ushbu

vektor noldan farqlidir:

.

Bu esa $M_o(u_o;v_o)$ nuqtada $(u_o;v_o)$ va

$(u_o;v_o)$ urinma vektorlar noldan farqliligini, hamda bu vektorlar kollinear emasligini ko‘rsatadi. Demak, regulyar sirtning har bir nuqtasida va urinma vektorlar kollinear bo‘lmas ekan.

SIRT ICHKI GEOMETRIYASI

Ta’rif. Sirt birinchi kvadratik formasining koeffisentlari bilan aniqlanuvchi xossalarini o‘rganuvchi bo‘limga **sirt ichki geometriyasi** deb ataladi.

Ma'lumki sirt birinchi kvadratik formasining koeffisentilari orqali sirt ustidagi chiziq yoyining uzunligi, sirt ustidagi ikki chiziq orasidagi burchak va sirt ustidagi sohaning yuzi aniqlanar edi. Demak, yuqoridagi ta'rifga asosan sirt ustidagi chiziq yoyining uzunligi, sirt ustidagi ikki chiziq orasidagi burchak va sirt ustidagi sohaning yuzi sirt ichki geometriyasining ob'ekti bo'ladi.

GAUSS TEOREMASI.

Teorema (**Gauss teoremasi**). Sirtning to'la egriligi birinchi kvadratik forma koeffisentlari va ularning birinchi hamda ikkinchi tartibli hosilalari orqali ifodalanadi, ya'ni sirtning to'la egriligi sirt ichki geometriyasining ob'ekti bo'ladi.

Isbot. Ma'lumki, sirtning to'la egriligi ushbu formula bilan hisoblanar edi:

$$K=\frac{DD_2-D_1^2}{EG-F^2}\ .$$

Bu yerda

$$D\cdot D_2=\frac{\begin{vmatrix} x_{uu} & y_{uu} & z_{uu}\\ x_u & y_u & z_u\\ x_v & y_v & z_v\end{vmatrix}}{\sqrt{EG-F^2}}\cdot\frac{\begin{vmatrix} x_{vv} & y_{vv} & z_{vv}\\ x_u & y_u & z_u\\ x_v & y_v & z_v\end{vmatrix}}{\sqrt{EG-F^2}}=\frac{1}{EG-F^2}\begin{vmatrix} x_{uu} & y_{uu} & z_{uu}\\ x_u & y_u & z_u\\ x_v & y_v & z_v\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} x_{vv} & y_{vv} & z_{vv}\\ x_u & y_u & z_u\\ x_v & y_v & z_v\end{vmatrix}.$$

Determinantlarni "sartlarni sartlarga" qoidasi bilan ko'-paytirib, ushbu

$$x_{uu}\cdot x_{vv}+y_{uu}\cdot y_{vv}+z_{uu}\cdot z_{vv}=\vec r_{uu}\vec r_{vv}\ ,\qquad x_u\cdot x_{vv}+y_u\cdot y_{vv}+z_u\cdot z_{vv}=\vec r_u\vec r_{vv}\ ,$$

$$x_v\cdot x_{vv}+y_v\cdot y_{vv}+z_v\cdot z_{vv}=\vec r_v\vec r_{vv}\ ,\qquad x_{uu}\cdot x_u+y_{uu}\cdot y_u+z_{uu}\cdot z_u=\vec r_{uu}\vec r_u\ ,$$

$$x_u^2+y_u^2+z_u^2=\vec r_u^{\,2}=E\ ,\qquad x_u\cdot x_v+y_u\cdot y_v+z_u\cdot z_v=\vec r_u\vec r_v=F\ ,$$

$$x_{uu}\cdot x_v+y_{uu}\cdot y_v+z_{uu}\cdot z_v=\vec r_{uu}\vec r_v\ ,\qquad x_v^2+y_v^2+z_v^2=\vec r_v^{\,2}=G$$

tengliklarni e'tiborga olsak

$$DD_2=\frac{1}{EG-F^2}\begin{vmatrix}\vec r_{uu}\vec r_{vv} & \vec r_{uu}\vec r_u & \vec r_{uu}\vec r_v\\ \vec r_u\vec r_{vv} & E & F\\ \vec r_v\vec r_{vv} & F & G\end{vmatrix}$$

hosil bo'ladi.

Xuddi shu yo'l bilan quyidagini hosil qilamiz:

$$D_1^2 = D_1 D_1 = \frac{\begin{vmatrix} x_{uv} & y_{uv} & z_{uv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG-F^2}} \cdot \frac{\begin{vmatrix} x_{uv} & y_{uv} & z_{uv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG-F^2}} = \frac{1}{EG-F^2} \cdot \begin{vmatrix} \vec{r}_{uv}^{\,2} & \vec{r}_{uv}\vec{r}_u & \vec{r}_{uv}\vec{r}_v \\ \vec{r}_u\vec{r}_{uv} & E & F \\ \vec{r}_v\vec{r}_{uv} & F & G \end{vmatrix}.$$

Demak,

$$K = \frac{1}{\left(EG-F^2\right)^2}\left\{\begin{vmatrix} \vec{r}_{uu}\vec{r}_{vv} & \vec{r}_{uu}\vec{r}_u & \vec{r}_{uu}\vec{r}_v \\ \vec{r}_u\vec{r}_{vv} & E & F \\ \vec{r}_v\vec{r}_{vv} & F & G \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \vec{r}_{uv}^{\,2} & \vec{r}_{uv}\vec{r}_u & \vec{r}_{uv}\vec{r}_v \\ \vec{r}_u\vec{r}_{uv} & E & F \\ \vec{r}_v\vec{r}_{uv} & F & G \end{vmatrix}\right\}.$$

Bu ifodadagi ikkala determinantning ham birinchi ustun, birinchi satr elementidan tuzilgan birinchi tartibli minorlarining qo‘shimcha minorlari bir xil bo‘lgani uchun, uni quyidagicha yozish mumkin:

$$K = \frac{1}{\left(EG-F^2\right)^2}\left\{\begin{vmatrix} \vec{r}_{uu}\vec{r}_{vv} - \vec{r}_{uv}^{\,2} & \vec{r}_{uu}\vec{r}_u & \vec{r}_{uu}\vec{r}_v \\ \vec{r}_u\vec{r}_{vv} & E & F \\ \vec{r}_v\vec{r}_{vv} & F & G \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \vec{r}_{uv}\vec{r}_u & \vec{r}_{uv}\vec{r}_v \\ \vec{r}_u r_{uv} & E & F \\ \vec{r}_v\vec{r}_{uv} & F & G \end{vmatrix}\right\} \qquad (1).$$

Endi $\vec{r}_u^{\,2} = E$, $\vec{r}_u\vec{r}_v = F$, $\vec{r}_v^{\,2} = G$ tengliklarni u va v larga nisbatan differensiallasak:

$$2\cdot\vec{r}_u\cdot\vec{r}_{uu} = E_u, \qquad \text{bu yerdan} \qquad \vec{r}_{uu}\cdot\vec{r}_u = \frac{1}{2}E_u\ ,$$

$$2\cdot\vec{r}_u\cdot\vec{r}_{uv} = E_v, \qquad \text{bu yerdan} \qquad \vec{r}_{uv}\cdot\vec{r}_u = \frac{1}{2}E_v\ ,$$

$$2\cdot\vec{r}_v\cdot\vec{r}_{uv} = G_u, \qquad \text{bu yerdan} \qquad \vec{r}_{uv}\cdot\vec{r}_v = \frac{1}{2}G_u\ ,$$

$$2\cdot\vec{r}_v\cdot\vec{r}_{vv} = G_v, \qquad \text{bu yerdan} \qquad \vec{r}_{vv}\cdot\vec{r}_v = \frac{1}{2}G_v\ ,$$

$$\vec{r}_{uu}\cdot\vec{r}_v + \vec{r}_u\cdot\vec{r}_{uv} = F_u\ , \qquad \text{bu yerdan} \qquad \vec{r}_{uu}\cdot\vec{r}_v = F_u - \frac{1}{2}E_v\ ,$$

$$\vec{r}_{uv}\cdot\vec{r}_v + \vec{r}_u\cdot\vec{r}_{vv} = F_v\ , \qquad \text{bu yerdan} \qquad \vec{r}_{vv}\cdot\vec{r}_u = F_v - \frac{1}{2}G_u\ .$$

Bu yerda beshinchi tenglikni v bo‘yicha, uchinchi tenglikni u bo‘yicha differensiallab, ularni hadlab ayirsak

$$\vec{r}_{uuv}\cdot\vec{r}_v + \vec{r}_{uu}\cdot\vec{r}_{vv} - \vec{r}_{uuv}\cdot\vec{r}_v - \vec{r}_{uv}\cdot\vec{r}_{uv} = F_{uv} - \frac{1}{2}E_{vv} - \frac{1}{2}G_{uu}$$

yoki

$$\vec{r}_{uu}\cdot\vec{r}_{vv}-\vec{r}_{uv}^{\,2}=-\frac{1}{2}G_{uu}+F_{uv}-\frac{1}{2}E_{vv}$$

hosil bo‘ladi. Bu tengliklarni (1) ga qo‘ysak:

$$K=\frac{1}{\left(EG-F^2\right)^2}\left\{\begin{vmatrix}-\frac{1}{2}G_{uu}+F_{uv}-\frac{1}{2}E_{vv} & \frac{1}{2}E_u & F_u-\frac{1}{2}E_v\\ F_v-\frac{1}{2}G_u & E & F\\ \frac{1}{2}G_v & F & G\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}0 & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u\\ \frac{1}{2}E_v & E & F\\ \frac{1}{2}G_u & F & G\end{vmatrix}\right\} \qquad (2).$$

Teorema isbot bo‘ldi.

Shuni ham aytib o‘tish kerakki, agarda sirtning birinchi kvadratik formasi

$$\Phi_1=du^2+Gdv^2$$

ko‘rinishda bo‘lsa, u vaqtda (2) formulaga asosan, bu sirtning gauss egriligi quyidagiga teng bo‘ladi:

$$K=-\frac{1}{\sqrt{G}}\left(\sqrt{G}\right)_{uu}.$$

SIRTNI EGISH.

Ta’rif. Sirt ustidagi chiziq yoyining uzunligini o‘zgartirmasdan sirtni uzluksiz deformatsiyalashga **sirtni egish** deb ataladi.

Masalan, bir varaq qog‘ozni o‘rab, uni silindrga yoki konusga aylantirish qog‘ozni **egish** demakdir.

F sirtni egish natijasida $\mathbf{F}^1$ sirt hosil qilingan bo‘lsin. U vaqtda bu sirtlardagi bir-biriga mos yoylarning uzunligi tengdir:

$$\int_a^b\sqrt{Edu^2+2Fdudv+Gdv^2}=\int_a^b\sqrt{E^1du^2+2F^1dudv+G^1dv^2}\,.$$

Bu tenglik chiziqlardagi istalgan M(t) nuqta, ya’ni istalgan t parametr uchun bajarilgani sababli, integral ostidagi ifodalar bir-biriga aynan tengdir:

$$Edu^2+2Fdudv+Gdv^2=E^1du^2+2F^1dudv+G^1dv^2.$$

Bu shart esa istalgan $du:dv$ yo‘nalish uchun bajarilgani sababli, kvadratik formalarning koeffisentlari teng bo‘ladi:

$$E=E^1,\qquad F=F^1,\qquad G=G^1.$$

Shunday qilib ushbu teoremaga keldik.

Teorema. Sirtni egishda uning birinchi kvadratik formasining koeffisentlari o‘zgarmaydi.

Sirt ustidagi ikki chiziq orasidagi burchak, sirt ustidagi sohaning yuzi va sirtning to‘la egriligi faqat birinchi kvadratik forma koeffisentlariga bog‘liq bo‘lgani uchun, yuqoridagi teoremaga asosan ushbu natijaga kelamiz.

Natija. Sirtni egishda sirt ustidagi ikki chiziq orasidagi burchak, sirt ustidagi sohaning yuzi va sirtning to‘la egriligi o‘zgarmaydi.

BIRINCHI KVADRATIK FORMASI

Bizga **F** sirt $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ vektor tenglamasi bilan berilsin. Bu tenglamani differensiallaylik:

$$d\vec{r} = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv .$$

Bu tenglikni kvadratga ko‘taraylik:

$$d\vec{r}^{\,2} = \vec{r}_u^{\,2} du^2 + 2\,\vec{r}_u \vec{r}_v\, du\, dv + \vec{r}_v^{\,2} dv^2.$$

Yozishni soddalashtirish maqsadida

$$\vec{r}_u^{\,2} = E, \qquad \vec{r}_u \vec{r}_v = \boldsymbol{F}, \qquad \vec{r}_v^{\,2} = G \qquad (1)$$

belgilashlarni kiritsak:

$$d\vec{r}^{\,2} = \mathrm{E}\, du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2$$

hosil bo‘ladi.

Ta’rif. Ushbu

$$d\vec{r}^{\,2} = \mathrm{E}\, du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2$$

ifodaga sirtning **birinchi kvadratik formasi** deb ataymiz va $\mathbf{F}_1$ bilan belgilaymiz.

Demak,

$$\mathbf{F}_1 = d\vec{r}^{\,2} = \mathrm{E}\, du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2 \ (2).$$

Sirtning birinchi kvadratik formasini ba’zan sirtning **chiziqli elementi** deb ham ataladi.

$\boldsymbol{E}$ $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{G}$ larga sirt birinchi kvadratik formasining **koeffisentlari** deb ataladi.

(1) belgilashlarga asosan **,** **E** va G ning har biri noldan katta bo‘lib, F **e**sa manfiy, nol va musbat qiymatlarni qabul qilishi mumkin.

$\mathbf{F}_1 = d\vec{r}^{\,2}$ bo‘lgani uchun, sirtning birinchi kvadratik formasi har doim musbatdir.

Sirt $x = x(u,v)$, $y=y(u,v)$, $z=z(u,v)$, parametrik tenglamalari bilan berilsa

$$\vec{r} = x\cdot\vec{i} + y\cdot\vec{j} + z\cdot\vec{k} ,$$

$$\vec{r}_u = x_u\cdot\vec{i} + y_u\cdot\vec{j} + z_u\cdot\vec{k} ,$$

$$\vec{r}_v = x_v\cdot\vec{i} + y_v\cdot\vec{j} + z_v\cdot\vec{k}$$

bo‘lgani uchun, sirt birinchi kvadratik formasining koeffisentlari quyidagicha bo‘ladi:

$$\left.\begin{aligned} E &= x_u^2 + y_u^2 + z_u^2, \\ F &= x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v, \\ G &= x_v^2 + y_v^2 + z_v^2 \end{aligned}\right\} \qquad (3).$$

(3) formula parametrik tenglamalari bilan berilgan sirt birinchi kvadratik formasining koeffisentlarini topish formulasi bo‘ladi.

Agar sirt $z = f(x, y)$ oshkor tenglamasi bilan berilsa, $u = v = y$ belgilashlar kiritamiz. U vaqtda $x_u = 1$, $x_v = 0$, $y_u = 0$, $y_v = 1$ bo‘lgani uchun, (3) formulalarga asosan:

$$\underline{E} = 1 + zx2 ,$$

$$F = z_x z_y ,$$

$$G = 1 + z_y^2.$$

Bu yerda $z_x = p$, $z_y = q$ belgilashlarni kiritsak:

$$\left.\begin{aligned} E &= 1 + p^2, \\ F &= pq, \\ G &= 1 + q^2 \end{aligned}\right\} \qquad (4).$$

(4) formula oshkor tenglamasi bilan berilgan sirt birinchi kvadratik formasining koeffitsiyentlarini topish formulasi bo‘ladi.

<u>1-misol.</u> $x = u\cos v$, $y=u\sin v$, $z=u^2$ aylanma paraboloidning birinchi kvadratik formasini toping.

E<u>chish.</u> Sirt parametrik tenglamalari bilan berilgan. Shuning uchun sirt birinchi kvadratik formasining koeffisentlarini topish uchun (3) formuladan foydalanamiz. Sirtning berilgan parametrik tenglamalaridan xususiy hosilalar olamiz:

$$X_u = \cos v, \qquad y_u = \sin v, \qquad z_u = 2u,$$

$$X_v = -u\sin v, \qquad y_v = u\cos v, \qquad z_v = 0.$$

Bu topilgan hosilalarni (3) formulalarga qo‘yamiz:

$$E = \cos^2 v + \sin^2 v + 4u^2 = 1 + 4u^2,$$

$$F = -u\cos v\sin v + u\sin v\cos v = 0,$$

$$G = u^2 \sin^2 v + u^2 \cos^2 v = u^2.$$

E **F**, **G** larning bu qiymatlarini (2) formulaga qo‘ysak, aylanma paraboloidning birinchi kvadratik formasi hosil bo‘ladi:

$$\mathbf{F}_1 = (1 + 4u^2)\, du^2 + u^2\, dv^2.$$

<u>2-misol.</u> $z = \frac{1}{2}(ax^2 + by^2)$ sirtning birinchi kvadratik formasini toping.

<u>Yechish.</u> Sirt oshkor tenglamasi bilan berilgan. Shu sababli sirt birinchi kvadratik formasining koeffisentlarini topishda (4) formu-ladan foydalanamiz. Sirtning berilgan tenglamasidan xususiy hosilalar olamiz:

$$p = z_x = ax, \qquad q = z_y = by.$$

p va *q* larning topilgan bu qiymatlarini (4) formulaga qo‘yamiz:

$$E = 1 + a^2x^2,$$

$$F = abxy,$$

$$G = 1 + b^2y^2.$$

E **,** **F** **,** **G** larning topilgan bu qiymatlarini (2) formulaga qo‘ysak, sirtning birinchi kvadratik formasi hosil bo‘ladi:

$$\mathbf{F}_1 = (1 + a^2x^2)dx^2 + 2abxydxdy + (1 + b^2y^2)dy^2.$$

SIRT USTIDAGI ChIZIQ.

Sirt ustidagi chiziqning vektor tenglamasi, sirt ustidagi chiziqning parametrik tenglamalari, sirt ustidagi chiziqning egri chiziqli koordinatalarga nisbatan tenglamalari, loksodrom, sirt ustidagi chiziq yoyining uzunligi.

Bizga **F** regulyar sirt $\vec{r} = \vec{r}(u.v)$ vektor tenglamasi bilan berilsin. Bu sirt ustida shunday nuqtalar to‘plamini qaraylikki, ularning u va *v* *e*gri chiziqli koordinatalari biror t *e*rkli o‘zgaruvchining funksiyalari bo‘lsin:

$$\left.\begin{array}{l} u = u(t), \\ v = v(t) \end{array}\right\} \qquad (1),$$

bunda u(t) va v(t) - uzluksiz va differensiallanuvchi funksiyalar bo‘lsin. Bu tenglamalar berilgan sirtda yotuvchi qandaydir chiziqni ifodalaydi. Chunki sirtning $\vec{r} = \vec{r}$(u,v) vektor tenglamasiga (1) ifodalarni qo‘ysak:

$$\vec{r} = \vec{r}(u,v) = \vec{r}(u(t), v(t)) = \vec{r}(t)$$

ya’ni

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \qquad (2)$$

tenglama hosil bo‘lib, chiziqlar nazariyasidan ma’lumki, bu (2) tenglama chiziqning vektor tenglamasidir.

Shuning uchun (2) tenglamaga sirt ustidagi **chiziqning vektor tenglamasi** deb ataladi. (1) tenglamalar sistemasiga sirt ustidagi **chiziqning parametrik tenglamalari** deyiladi. (1) tenglamalardan t ni yo‘qotish mumkin:

$$f(u,v) = 0 \qquad (3).$$

Bu (3) tenglama sirt ustidagi chiziqning **e**gri chiziqli koor-dinatalarga nisbatan **oshkormas tenglamasi** deyiladi.

(3) tenglamani *v* ga nisbatan echsak:

$$v=v(u) \qquad (4).$$

(4) tenglama sirt ustidagi chiziqning **e**gri chiziqli koor-dinatalarga nisbatan **oshkor tenglamasi** deyiladi.

Xususiy holda:

$$u = const$$

v chiziqning tenglamasi bo‘ladi.

$$v = const$$

*e*sa *u* chiziqning tenglamasi bo‘ladi.

Sirtdagi chiziqning (2) tenglamasini t bo‘yicha differen-tsiallasak ushbu

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}_u \frac{du}{dt} + \vec{r}_v \frac{dv}{dt} \qquad (5)$$

vektor hosil bo‘lib, u chiziq urinmasi bo‘ylab yo‘naladi. $\vec{r}_u$ va $\vec{r}_v$ vektorlar esa shu nuqtadan o‘tuvchi koordinat chiziqlarning urinmalari bo‘ylab yo‘naladi.

Tekislikda chiziqning yo‘nalishi *dx:dy* yoki *dy:dx* nisbatlarga bog‘liq bo‘lgani kabi, sirt ustidagi chiziqning yo‘nalishi ham *dv:du* yoki *du:dv* nisbatlarga bog‘liqdir. Haqiqatan, (5) tenglikdan ko‘rinadiki, $\frac{d\vec{r}}{dt}$ hosila $\vec{r}_u$ va $\vec{r}_v$ hamda $\frac{du}{dt}$ va $\frac{dv}{dt}$ larning funksiyasidir. Biroq $\vec{r}_u$ va $\vec{r}_v$ vektorlar berilgan nuqtada o‘zgarmas vektorlar bo‘ladi. Shu sababli $\frac{d\vec{r}}{dt}$ hosila $\frac{du}{dt}$ va $\frac{dv}{dt}$ larning funksiyasi bo‘ladi. $\frac{du}{dt} : \frac{dv}{dt}$ nisbatni olsak *du:dv* hosil bo‘ladi, yoki $\frac{dv}{dt} : \frac{du}{dt}$ nisbatni olsak *dv:du* hosil bo‘ladi.

Endi sirt ustidagi chiziqqa misol keltiramiz.

LOKSODROM. Sferaning hamma meridianlarini bir xil burchak ostida kesib o‘tuvchi chiziqqa **loksodrom** deb ataladi.

Uning tenglamasini topaylik.

Sferaning vektor tenglamasini qaraymiz:

$$\vec{r} = \{R\cos u\cos v;\ R\cos u\sin v; R\sin u\} \qquad (6).$$

Meridianning tenglamasi shu (6) tenglamada $v = const$ bo‘lgan holdir.

Meridianning urinmasi bo‘ylab yo‘naluvchi vektorni topamiz. U (6) dan $v = const$ bo‘lgan holda topiladi:

$$\vec{r}_u = \{-R\sin u\cos v;\ -R\sin u\sin v; R\cos u\} \qquad (7).$$

Loksodromning tenglamasini v=v(u) shaklda izlaymiz. U vaqtda ta’rifga asosan:

$$\frac{\vec{r}_u \frac{d\vec{r}}{du}}{|\vec{r}_u|\left|\frac{d\vec{r}}{du}\right|} = const = \cos m \qquad (8)$$

Bo‘ladi.

$$\frac{d\vec{r}}{du} = \{-Rsinucosv - Rcosusinv\frac{dv}{du};$$

$$-\mathrm{Rsinusinv} + Rcosucosv\frac{dv}{du};\mathrm{Rcosu}\} \qquad (9).$$

(7) dan

$$|\vec{r}_u| = \sqrt{R^2\sin^2 u\cos^2 u + R^2\sin^2 u\sin^2 v + R^2\cos^2 u} = R,$$

(9) dan

$$\left|\frac{d\vec{r}}{du}\right| = \sqrt{\left(R\sin u\cos v + R\cos u\sin v\frac{dv}{du}\right)^2 + \left(-R\sin u\sin v + R\cos u\cos v\frac{dv}{du}\right)^2 + R^2\cos^2 u} = =$$

$$\sqrt{R^2\sin^2 u + R^2\cos^2 u\left(\frac{dv}{du}\right)^2 + R^2\cos^2 u} = R\cdot\left(\sqrt{1+\cos^2 u\left(\frac{dv}{du}\right)^2}\right).$$

(7) va (9) dan: $\vec{r}_u\frac{d\vec{r}}{du} = R\sin u\cos v\left(R\sin u\cos v + R\cos u\sin v\frac{dv}{du}\right) +$

$$+ R\sin u\sin v\left(R\sin u\sin v - R\cos u\cos v\frac{dv}{du}\right) + R^2\cos^2 u = \mathrm{R}^2.$$

$|\vec{r}_u|$, $\left|\frac{d\vec{r}}{du}\right|$ va $\vec{r}_u\frac{d\vec{r}}{du}$ larning qiymatlarini (8) ga qo‘yib, uni ixchamlasak:

$$\frac{1}{\sqrt{1+\cos^2 u\left(\frac{dv}{du}\right)^2}} = \cos m,$$

$$1+\cos^2 u\left(\frac{dv}{du}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 m},$$

$$\cos^2 u\left(\frac{dv}{du}\right)^2 = \frac{\sin^2 m}{\cos^2 m},$$

$$\cos u\frac{dv}{du} = \pm\ \mathrm{tg}\ m,$$

$$\frac{\cos u}{du} = \pm\frac{tgm}{dv},$$

$$\frac{du}{\cos u} = \pm\, dv\cdot\mathrm{ctg}\ m \qquad (10).$$

(10) tenglama loksodromning ***differensial tenglamasi*** bo‘ladi.

Agar (10) differensial tenglamani integrallasak:

$$\ln\left|tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{u}{2}\right)\right| = \pm \text{vctg } m + \ln C$$

yoki

$$tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{u}{2}\right) = Ce^{\pm v\cdot ctgm} \qquad (11).$$

(11) formula loksodromning **oshkormas tenglamasi** bo‘ladi. Bu (11) tenglamadagi $\pm$ ishorasi sferada ikkita loksodrom mavjudligini ko‘rsatadi.

SIRTNING IKKINCHI KVADRATIK FORMASI

Bizga **F** regulyar sirt $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$ vektor tenglamasi bilan berilgan bo‘lsin.

<u>Ta’rif.</u> **F** sirtning berilgan M nuqtasidagi urinma tekisligiga perpendikulyar bo‘lgan birlik vektorga sirtning shu nuqtasidagi **birlik normal vektori** deb ataymiz va $\vec{n}$ bilan belgilaymiz

Agar $M(u,v)$ nuqta **F** sirt bo‘ylab harakatlansa, u vaqtda sirtning shu nuqtasidagi birlik normal vektori $\vec{n}$ ham harakatlana boradi, ya’ni bu $\vec{n}$ vektor u va v o‘zgaruvchilarning vektor funksiyasi bo‘ladi:

$$\vec{n} = \vec{n}(u,v) \qquad (1).$$

Sirtning vektor tenglamasini va (1) tenglamani differen-tsiallaymiz:

$$d\vec{r} = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv,$$

$$d\vec{n} = \vec{n}_u du + \vec{n}_v dv.$$

Bu $d\vec{r}$ va $d\vec{n}$ vektorlarni skalyar ko‘paytiraylik:

$$d\vec{r}\cdot d\vec{n} = (\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv)(\vec{n}_u du + \vec{n}_v dv) = \vec{r}_u\vec{n}_u du^2 + (\vec{r}_u\vec{n}_v + \vec{r}_v\vec{n}_u)dudv + \vec{r}_v\vec{n}_v dv^2.$$

<u>Ta’rif.</u> Ushbu

$$\mathbf{F}_2 = -d\vec{r}\cdot d\vec{n} = -\vec{r}_u\vec{n}_u du^2 - (\vec{r}_u\vec{n}_v + \vec{r}_v\vec{n}_u)dudv - \vec{r}_v\vec{n}_v dv^2 \qquad (2)$$

ifodaga sirtning **ikkinchi kvadratik formasi** deb ataladi.

Sirtning ikkinchi kvadratik formasi uchun quyidagi belgi-lashlarni kiritamiz:

$$\left.\begin{aligned} -\vec{r}_u\vec{n}_u &= D, \\ -\left(\vec{r}_u\vec{n}_v + \vec{r}_v\vec{n}_u\right) &= 2D_1, \\ -\vec{r}_v\vec{n}_v &= D_2 \end{aligned}\right\} \qquad (3).$$

U vaqtda ikkinchi kvadratik forma ushbu ko‘rinishni oladi:

$$\mathbf{F}_2 = D\,du^2 + 2\,D_1\,du\,dv + D_2\,dv^2 \qquad (4).$$

Bizga ma’lumki $\vec{r}_u$ va $\vec{r}_v$ vektorlar sirtning urinma tekis-ligiga parallel bo‘lar edi. Demak, bu vektorlarning chiziqli kombina-tsiyasi bo‘lgan $d\vec{r} = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv$ vektor ham sirtning urinma tekisligiga parallel bo‘ladi. Ta’rifga asosan $\vec{n}$ vektor urinma tekislikka per-pendikulyardir. Shuning uchun $d\vec{r}$ va $\vec{n}$ vektorlar o‘zaro perpendikulyar bo‘lib, ularning skalyar ko‘paytmasi nolga teng bo‘ladi:

$$d\vec{r}\cdot\vec{n} = 0.$$

Bu tenglikni differensiallaylik:

$$d(d\vec{r}\cdot\vec{n}) = d^2\,\vec{r}\cdot\vec{n} + d\vec{r}\cdot d\vec{n} = 0.$$

(2) ga asosan:

$$d^2\,\vec{r}\cdot\vec{n} = -\,d\vec{r}\cdot d\vec{n} = \mathbf{F}_2.$$

Demak,

$$\mathbf{F}_2 = d^2\,\vec{r}\cdot\vec{n}.$$

Bu yerda

$$d^2\,\vec{r} = d(d\vec{r}) = d(\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv) = \vec{r}_{uu}du^2 + 2\vec{r}_{uv}dudv + \vec{r}_{vv}dv^2 + \vec{r}_u d^2u + \vec{r}_v d^2v$$

bo‘lib, $\vec{r}_u \perp \vec{n}$ va $\vec{r}_v \perp \vec{n}$ bo‘lgani uchun:

$$\mathbf{F}_2 = d^2\,\vec{r}\cdot\vec{n} = \vec{r}_{uu}\vec{n}du^2 + 2\vec{r}_{uv}\vec{n}dudv + \vec{r}_{vv}\vec{n}dv^2 + \vec{r}_u\vec{n}d^2u + \vec{r}_v\vec{n}d^2v =$$

$$= \vec{r}_{uu}\vec{n}du^2 + 2\vec{r}_{uv}\vec{n}dudv + \vec{r}_{vv}\vec{n}dv^2.$$

Demak,

$$\mathbf{F}_2 = \vec{r}_{uu}\vec{n}du^2 + 2\vec{r}_{uv}\vec{n}dudv + \vec{r}_{vv}\vec{n}dv^2.$$

Bu tenglama bilan (4) ni taqqoslasak, quyidagilar kelib chiqadi:

$$D = \vec{r}_{uu}\vec{n}, \qquad D_1 = \vec{r}_{uv}\vec{n}, \qquad D_2 = \vec{r}_{vv}\vec{n} \qquad (5).$$

Yuqorida aytdikki, $\vec{r}_u$ va $\vec{r}_v$ vektorlar sirtning urinma tekisligiga parallel bo‘ladi. Shuning uchun bu vektorlarning vektor ko‘paytmasi bo‘lgan

$[\vec r_u\,\vec r_v]$ vektor sirtning normaliga parallel bo‘ladi. Demak, $\dfrac{[\vec r_u\vec r_v]}{\left\|[\vec r_u\vec r_v]\right\|}$ birlik vektor sirtning normali bo‘ylab yo‘naladi. Shu sababli bu vektorni sirt normalining birlik vektori sifatida olish mumkin, ya’ni:

$$\vec n=\frac{[\vec r_u\vec r_v]}{\left\|[\vec r_u\vec r_v]\right\|}=\frac{[\vec r_u\vec r_v]}{\sqrt{[\vec r_u\vec r_v]^2}}=\frac{[\vec r_u\vec r_v]}{\sqrt{\vec r_u^{\,2}\vec r_v^{\,2}-(\vec r_u\vec r_v)^2}}\,.$$

$\vec n$ vektorning bu qiymatini (5) tengliklarga qo‘ysak:

$$D=\vec r_{uu}\frac{[\vec r_u\vec r_v]}{\sqrt{\vec r_u^{\,2}\vec r_v^{\,2}-(\vec r_u\vec r_v)^2}}=\frac{\vec r_{uu}[\vec r_u\vec r_v]}{\sqrt{\vec r_u^{\,2}\vec r_v^{\,2}-(\vec r_u\vec r_v)^2}}=\frac{(\vec r_{uu},\vec r_u,\vec r_v)}{\sqrt{\vec r_u^{\,2}\vec r_v^{\,2}-(\vec r_u\vec r_v)^2}}\,.$$

$$D_1=\vec r_{uv}\frac{[\vec r_u\vec r_v]}{\sqrt{\vec r_u^{\,2}\vec r_v^{\,2}-(\vec r_u\vec r_v)^2}}=\frac{\vec r_{uv}[\vec r_u\vec r_v]}{\sqrt{\vec r_u^{\,2}\vec r_v^{\,2}-(\vec r_u\vec r_v)^2}}=\frac{(\vec r_{uv},\vec r_u,\vec r_v)}{\sqrt{\vec r_u^{\,2}\vec r_v^{\,2}-(\vec r_u\vec r_v)^2}}\,.$$

$$D_2=\vec r_{vv}\frac{[\vec r_u\vec r_v]}{\sqrt{\vec r_u^{\,2}\vec r_v^{\,2}-(\vec r_u\vec r_v)^2}}=\frac{\vec r_{vv}[\vec r_u\vec r_v]}{\sqrt{\vec r_u^{\,2}\vec r_v^{\,2}-(\vec r_u\vec r_v)^2}}=\frac{(\vec r_{vv},\vec r_u,\vec r_v)}{\sqrt{\vec r_u^{\,2}\vec r_v^{\,2}-(\vec r_u\vec r_v)^2}}$$

Demak,

$$D=\frac{(\vec r_{uu},\vec r_u,\vec r_v)}{\sqrt{\vec r_u^{\,2}\vec r_v^{\,2}-(\vec r_u\vec r_v)^2}}\,,\qquad D_1=\frac{(\vec r_{uv},\vec r_u,\vec r_v)}{\sqrt{\vec r_u^{\,2}\vec r_v^{\,2}-(\vec r_u\vec r_v)^2}}\,,\qquad D_2=\frac{(\vec r_{vv},\vec r_u,\vec r_v)}{\sqrt{\vec r_u^{\,2}\vec r_v^{\,2}-(\vec r_u\vec r_v)^2}}\qquad (6).$$

(3) va (6) formulalar vektor tenglamasi bilan berilgan sirt ikkinchi kvadratik formasining koeffisentlarini topish formulalari bo‘ladi.

F regulyar sirt $x=x(\mathrm{u,v})$, $y=y(\mathrm{u,v})$, $z=z(\mathrm{u,v})$ parametrik tenglamalari bilan berilsin. Bu vaqtda:

$$\vec r_u=x_u\vec i+y_u\vec j+z_u\vec k\quad,\quad \vec r_v=x_v\vec i+y_v\vec j+z_v\vec k\,,$$

$$\vec r_{uu}=x_{uu}\vec i+y_{uu}\vec j+z_{uu}\vec k\;,\qquad \vec r_{uv}=x_{uv}\vec i+y_{uv}\vec j+z_{uv}\vec k\;,\qquad \vec r_{vv}=x_{vv}\vec i+y_{vv}\vec j+z_{vv}\vec k$$

bo‘lib, koordinatalari bilan berilgan uch vektorning aralash ko‘paytmasi quyidagicha aniqlanar edi:

$$(\vec r_{uu},\vec r_u,\vec r_v)=\begin{vmatrix}x_{uu}&y_{uu}&z_{uu}\\x_u&y_u&z_u\\x_v&y_v&z_v\end{vmatrix},\quad(\vec r_{uv},\vec r_u,\vec r_v)=\begin{vmatrix}x_{uv}&y_{uv}&z_{uv}\\x_u&y_u&z_u\\x_v&y_v&z_v\end{vmatrix},\quad(\vec r_{vv},\vec r_u,\vec r_v)=\begin{vmatrix}x_{vv}&y_{vv}&z_{vv}\\x_u&y_u&z_u\\x_v&y_v&z_v\end{vmatrix}.$$

Sirt birinchi kvadratik formasining koeffisentlari:

$$\mathrm{E}=\vec r_u^{\,2}\,,\qquad F=\vec r_u\,\vec r_v\,,\qquad G=\vec r_v^{\,2}.$$

Bu tengliklarni hisobga olib, (6) tengliklardan quyidagi ifodalarni yoza olamiz:

$$D = \frac{\begin{vmatrix} x_{uu} & y_{uu} & z_{uu} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG-F^2}}; \qquad D_1 = \frac{\begin{vmatrix} x_{uv} & y_{uv} & z_{uv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG-F^2}}; \qquad D_2 = \frac{\begin{vmatrix} x_{vv} & y_{vv} & z_{vv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG-F^2}} \qquad (7).$$

Bu (7) formulalar parametrik tenglamalari bilan berilgan sirt ikkinchi kvadratik formasining koeffisentlarini topish formulalari deyiladi.

Agar sirt $z = f(x,y)$ oshkor tenglamasi bilan berilsa, $x = u$, $y=v$ almashtirishlarini olib, (7) formuladan quyidagi ifodalarni hosil qilamiz:

$$D = \frac{z_{xx}}{\sqrt{1+p^2+q^2}}; \qquad D_1 = \frac{z_{xy}}{\sqrt{1+p^2+q^2}}; \qquad D_2 = \frac{z_{yy}}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \qquad (8).$$

Bu (8) formulalar oshkor tenglamasi bilan berilgan sirt ikkinchi kvadratik formasining koeffisentlarini topish formulalari deyiladi.

Bu holda sirtning ikkinchi kvadratik formasi ushbu ko‘rinishni oladi:

$$F_2 = Ddx^2 + 2D_1 dx\,dy + D_2 dy^2 \qquad (9).$$

<u>1-misol.</u> $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z=av$ to‘g‘ri gelikoidning ikkinchi kvadratik formasini toping.

E<u>chish.</u> To‘g‘ri gelikoidning parametrik tenglamalaridan hosilalar olamiz:

$X_u = \cos v$, $y_u = \sin v$, $z_u = 0$,

$X_v = -u\sin v$, $y_v = u\cos v$, $z_v = a$,

$X_{uu} = 0$, $y_{uu} = 0$, $z_{uu} = 0$,

$X_{uv} = -\sin v$, $y_{uv} = \cos v$, $z_{uv} = 0$,

$X_{vv} = -u\cos v$, $y_{vv} = -u\sin v$, $z_{vv} = 0$.

Sirt birinchi kvadratik formasining koeffisentlarini topamiz:

$E = \cos^2 v + \sin^2 v = 1$,

$F = -u\sin v\cos v + u\sin v\cos v = 0$,

$G = u^2 \sin^2 v + u^2 \cos^2 v + a^2 = u^2 + a^2$.

Sirt ikkinchi kvadratik formasining koeffisentlarini topamiz. Sirt parametrik tenglamalari bilan berilgani uchun (7) formulalardan foydalanamiz.

$$D=\frac{\begin{vmatrix}0 & 0 & 0\\ \cos v & \sin v & 0\\ -u\sin v & u\cos v & a\end{vmatrix}}{\sqrt{u^2+a^2}}=0, \qquad D_1=\frac{\begin{vmatrix}-\sin v & \cos v & 0\\ \cos v & \sin v & 0\\ -u\sin v & u\cos v & a\end{vmatrix}}{\sqrt{u^2+a^2}}=-\frac{a}{\sqrt{u^2+a^2}},$$

$$D_2=\frac{\begin{vmatrix}-u\cos v & -u\sin v & 0\\ \cos v & \sin v & 0\\ -u\sin v & u\cos v & a\end{vmatrix}}{\sqrt{u^2+a^2}}=0$$

Topilgan qiymatlarni (4) formulaga qo‘yamiz:

$$\Phi_2=-\frac{2adudv}{\sqrt{u^2+a^2}}\ .$$

Bu to‘g‘ri gelikoidning ikkinchi kvadratik formasi bo‘ladi.

2-misol. $z = xy$ sirtning ikkinchi kvadratik formasini toping.

Echish. Sirt tenglamasidan xususiy hosilalar olamiz:

$$p=z_x=y\ , \qquad q=z_y=x\ ,$$

$$z_{xx}=0\ , \qquad z_{xy}=1\ , \qquad z_{yy}=0.$$

Sirt oshkor tenglamasi bilan berilgani uchun (8) formulalardan foydalanib, ikkinchi kvadratik formaning koeffisentlarini topamiz:

$$D=\frac{0}{\sqrt{1+y^2+x^2}}=0; \qquad D_1=\frac{1}{\sqrt{1+y^2+x^2}}\ ; \qquad D_2=\frac{0}{\sqrt{1+y^2+x^2}}=0.$$

Topilgan qiymatlarni (9) formulaga qo‘yamiz:

$$F_2=\frac{2dx\,dy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\ .$$

SIRT USTIDAGI ChIZIQNING EGRILIGI.

Tayanch iboralar: Sirt ustidagi chiziqning egriligi, normal kesim, normal kesimning egriligi, Mene formulasi, egrilik (Dyupen) indikatrisasi, indikatrisa tenglamasi, sirtning elliptik nuqta, sirtning giperbolik nuqta, sirtning parabolik nuqta, qo‘shma yo‘nalishlar, bosh yo‘nalishlar, bosh egriliklar.

Sirt ikkinchi kvadratik forma tushunchasining kiritilishi, sirt ustidagi chiziqlarning egriligini aniqlashga imkon beradi.

Bizga **F** regulyar sirt $\vec{r}=\vec{r}\,(u,v)$ vektor tenglamasi bilan berilsin. Bu sirtda yotuvchi γ chiziqni qaraylik. γ chiziqqa s tabiiy parametrni kiritamiz. U vaqtda bu chiziq nuqtalarining u va v egri chiziqli koordinatalari s tabiiy parametrning funksiyalari bo‘ladi:

$$u = u(s)\,, \qquad v = v(s)\,.$$

Bu ifodalarni sirtning vektor tenglamasiga qo‘ysak:

$$\vec{r} = \vec{r}(u,v) = \vec{r}(u(s),v(s)) = \vec{r}(s)$$

yoki

$$\vec{r} = \vec{r}(s) \tag{1}$$

hosil bo‘ladi.

Bu (1) tenglama **F** sirt ustidagi γ chiziqning tabiiy parametrli vektor tenglamasi bo‘ladi.

Chiziqlar nazariyasida ma’lumki

$$\ddot{\vec{r}} = k\vec{v}\,.$$

Bu yerda $\vec{v}$ vektor γ chiziq bosh normalining birlik vektori, k esa chiziqning egriligi.

$\ddot{\vec{r}}$ vektor bilan sirt birlik normal vektori $\vec{n}$ ning skalyar ko‘paytmasini qaraylik:

$$\ddot{\vec{r}} \cdot \vec{n} = k\vec{v}\,\vec{n} = k\cos\theta\,.$$

Demak,

$$\ddot{\vec{r}} \cdot \vec{n} = k\cos\theta\,, \tag{2}$$

bu yerda $\theta = \angle(\vec{v},\vec{n})$.

Ikkinchi tomondan:

$$\dot{\vec{r}} = \vec{r}_u \frac{du}{ds} + \vec{r}_v \frac{dv}{ds}$$

va

$$\ddot{\vec{r}} = \vec{r}_{uu}\frac{du^2}{ds^2} + 2\vec{r}_{uv}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \vec{r}_{vv}\frac{dv^2}{ds^2} + \vec{r}_u\frac{d^2u}{ds^2} + \vec{r}_v\frac{d^2v}{ds^2}$$

bo‘lgani uchun

$$\ddot{\vec{r}} \cdot \vec{n} = \left(\vec{r}_{uu}\frac{du^2}{ds^2} + 2\vec{r}_{uv}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \vec{r}_{vv}\frac{dv^2}{ds^2} + \vec{r}_u\frac{d^2u}{ds^2} + \vec{r}_v\frac{d^2v}{ds^2}\right)\cdot\vec{n} =$$

$$= \vec{r}_{uu}\vec{n}\frac{du^2}{ds^2} + 2\vec{r}_{uv}\vec{n}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \vec{r}_{vv}\vec{n}\frac{dv^2}{ds^2} + \vec{r}_u\vec{n}\frac{d^2u}{ds^2} + \vec{r}_v\vec{n}\frac{d^2v}{ds^2}.$$

Bu yerda $\vec{r}_u \perp \vec{n}$ va $\vec{r}_v \perp \vec{n}$ bo‘lib, $\vec{r}_u\vec{n} = 0$ va $\vec{r}_v\vec{n} = 0$ bo‘ladi.

Shuning uchun:

$$\ddot{\vec{r}} \cdot \vec{n} = \vec{r}_{uu}\vec{n}\frac{du^2}{ds^2} + 2\vec{r}_{uv}\vec{n}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \vec{r}_{vv}\vec{n}\frac{dv^2}{ds^2} = D\frac{du^2}{ds^2} + 2D_1\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + D_2\frac{dv^2}{ds^2} =$$

$$= \frac{Ddu^2 + 2D_1dudv + D_2dv^2}{ds^2} = \frac{\Phi_2}{\Phi_1}.$$

Demak,

$$\ddot{\vec{r}} \cdot \vec{n} = \frac{\Phi_2}{\Phi_1} \qquad (3).$$

(2) va (3) tengliklarga asosan:

$$k\cos\theta = \frac{\Phi_2}{\Phi_1} \qquad (4).$$

Bu munosabat sirtlar nazariyasining asosiy formulalaridan biri bo‘ladi. Uning o‘ng tomoniga ikkala kvadratik formaning koeffisentlari kiradi. Tayin M nuqta berilganda bu koeffisentlar o‘zgarmas sonlar bo‘ladi.

Demak, $k\cos\theta$ ifoda faqatgina $du{:}dv$ nisbatga, ya’ni γ chiziqning yo‘nalishiga bog‘liqdir. Shu sababli M nuqtada bitta urinmaga ega bo‘lgan **F** sirtda yotuvchi hamma chiziqlar uchun $k\cos\theta$ bir xil bo‘ladi, ya’ni

$$k\cos\theta = const \qquad (5).$$

Endi **F** sirtdagi γ chiziq sifatida normal kesim deb ataluvchi chiziqni qaraymiz.

Ta’rif. Sirtning berilgan nuqtasidagi normalidan o‘tuvchi tekislik bilan shu sirtni kesishdan hosil bo‘lgan chiziqqa **normal kesim** deb ataladi.

Normal kesimning bosh normali kesuvchi tekislikda yotgani uchun, bosh normalning birlik vektori $\vec{\nu}$ va sirt normalining birlik

vektori $\vec{n}$ bir to‘g‘ri chiziqda yotib, ular orasidagi burchak yoki $0°$, yoki $180°$, ya’ni $\cos\theta = \pm 1$ bo‘ladi.

Shunday qilib, agar normal kesimning egriligini k_o deb belgilasak, (5) ga asosan

$$k\cos\theta = \pm k_o \qquad (6)$$

hosil bo‘ladi. Bu (6) tenglik **Mene formulasi** deb ataladi.

(4) va (6) ga asosan:

$$\frac{\Phi_2}{\Phi_1} = \pm k_o \qquad (7)$$

bo‘lishligi kelib chiqadi.

Bu formula sirtning birinchi va ikkinchi kvadratik formalari bilan sirt normal kesimining egriligi orasida bog‘lanishni ifodalaydi.

EGRILIK INDIKATRISASI.

Bizga **F** sirt $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$ vektor tenglamasi bilan berilib, uni *M* nuqtasidagi normalidan o‘tuvchi tekislik bilan kesib, normal kesim hosil qilingan bo‘lsin.

Agar normal kesimni hosil qiladigan kesuvchi tekislikni *M* nuqtasidagi normal atrofida aylantirsak, hosil bo‘lgan normal kesimlarning k_o egriliklari o‘zgara boradi. Biz shu o‘zgarishning xarakterini o‘rganamiz. Buning uchun sirtning *M* nuqtasidagi urinma tekisligida har bir normal kesimning urinmasiga

$$MP = \frac{1}{\sqrt{|k_0|}} \qquad (1)$$

kesmani mos qo‘yamiz.

<u>Ta’rif.</u> Sirtning berilgan M nuqtasidagi urinma tekislikdagi (1) tenglikni qanoatlantiruvchi P nuqtalar to‘plamiga e**grilik indikatrisasi** deb ataladi, ba’zan uni **Dyupen indikatrisasi** deb ham aytiladi.

Silliq sirtning har bir nuqtasida aniq bir egrilik indikat-risa mavjuddir. Dyupen indikatrisasi qanday figuradan iborat ekanli-gini aniqlaylik.

Buning uchun urinma tekislikda shunday affin koordinatalar sistemasini quramizki, bunda *M* urinish nuqtasini koordinatalar boshi, $\vec{r}_u$ va $\vec{r}_v$ vektorlar bo‘ylab yo‘nalgan to‘g‘ri chiziqlarni *Ox* va *Oy* o‘qlari, $\vec{r}_u$ va $\vec{r}_v$ vektorlarni bazis vektorlar deb olamiz.

Tanlangan koordinatalar sistemasiga nisbatan P nuqtaning koordinatalarini x, y deb belgilasak

$$\overline{MP} = x\vec{r}_u + y\vec{r}_v \qquad (2)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Chiziqlar nazariyasidan ma’lumki normal kesim urinmasining birlik vektori $\vec{\tau}$ orqali belgilanar edi. Shuning uchun

$$\overline{MP} = [\overline{MP}]\vec{\tau}$$

yoki (1) ga asosan

$$\overline{MP} = \frac{1}{\sqrt{|k_0|}} \cdot \vec{\tau}.$$

Bu yerda

$$\vec{\tau} = \dot{\vec{r}} = \vec{r}_u \frac{du}{ds} + \vec{r}_v \frac{dv}{ds}$$

bo‘lgani uchun

$$\overline{MP} = \frac{1}{\sqrt{|k_0|}} \left(\vec{r}_u \frac{du}{ds} + \vec{r}_v \frac{dv}{ds} \right).$$

Agar (2) ni hisobga olsak:

$$x\vec{r}_u + y\vec{r}_v = \frac{1}{\sqrt{|k_0|}} \left(\vec{r}_u \frac{du}{ds} + \vec{r}_v \frac{dv}{ds} \right).$$

Bu yerda $\vec{r}_u$ va $\vec{r}_v$ vektorlar kollinear bo‘lmagani uchun

$$x = \frac{1}{\sqrt{|k_0|}} \cdot \frac{du}{ds}, \qquad y = \frac{1}{\sqrt{|k_0|}} \cdot \frac{dv}{ds}$$

yoki $$\frac{du}{ds} = x\sqrt{|k_0|}, \qquad \frac{dv}{ds} = y\sqrt{|k_0|} \qquad (3).$$

Ma’lumki

$$\pm\, k_o = \frac{\Phi_2}{\Phi_1}$$

edi, yoki

$$\pm\, k_o = \frac{Ddu^2 + 2D_1 du dv + D_2 dv^2}{ds^2} = D\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2D_1 \frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + D_2\left(\frac{dv}{ds}\right)^2.$$

(3) ni e’tiborga olsak:

$$\pm\ k_o = Dx^2|k_0| + 2D_1xy|k_0| + D_2y^2|k_0|$$

yoki

$$Dx^2 + 2D_1xy + D_2y^2 = \pm 1 \qquad (4).$$

Hosil bo‘lgan (4) formula e**grilik indikatrisa tenglamasi** deyiladi. Bu tenglama x va y ga nisbatan ikkinchi tartibli tenglamadir. Demak, indikatrisa ikkinchi tartibli chiziq ekan.

Bizga ma’lumki ikkinchi tartibli chiziq uch xil bo‘ladi. Shu sababli indikatrisalar ham uch xil bo‘ladi.

I. Agar $DD_2 - D_1^2 > 0$ bo‘lsa, indikatrisa ellipsdan iborat bo‘lib, sirtning M nuqtasi e**lliptik nuqta** deb ataladi.

II. Agar $DD_2 - D_1^2 < 0$ bo‘lsa, indikatrisa ikkita qo‘shma giperboladan iborat bo‘lib, M nuqtaga **giperbolik nuqta** deyiladi.

III. Agar $DD_2 - D_1^2 = 0$ bo‘lsa, indikatrisa ikkita parallel to‘g‘ri chiziqdan iborat bo‘lib, M nuqtaga **parabolik nuqta** deb ataladi.

Misol. $x = u^2 + v^2$, $y = u^2 - v^2$, $z = uv$ sirtning $P(u = 1; v = 1)$ nuqtasidagi egrilik indikatrisasining tenglamasini tuzing.

Echish. Sirtning parametrik tenglamalaridan xususiy hosi-lalar olamiz:

$$X_u = 2u, \qquad y_u = 2u, \qquad z_u = v,$$
$$X_v = 2v, \qquad y_v = -2v, \qquad z_v = u,$$
$$X_{uu} = 2, \qquad y_{uu} = 2, \qquad z_{uu} = 0,$$
$$X_{uv} = 0, \qquad y_{uv} = 0, \qquad z_{uv} = 1,$$
$$X_{vv} = 2, \qquad y_{vv} = -2, \qquad z_{vv} = 0.$$

E, F, G, D, D_1, D_2 koeffisentlarning $P(u = 1; v = 1)$ nuqtadagi qiymatlarini topamiz.

$E = 4u^2 + 4u^2 + v^2 = 8u^2 + v^2$, $\qquad E = 8\cdot1^2 + 1^2 = 9.$

$F = 4uv - 4uv + uv = uv$, $\qquad F = 1\cdot1 = 1.$

$G = 4v^2 + 4v^2 + u^2 = 8v^2 + u^2$, $\qquad G = 8\cdot1^2 + 1^2 = 9.$

$$D=\frac{\begin{vmatrix}2 & 2 & 0\\ 2 & 2 & 1\\ 2 & -2 & 1\end{vmatrix}}{\sqrt{9\cdot 9-1^2}}=\frac{2}{\sqrt{5}}\ ;$$

$$D_1=\frac{\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ 2 & 2 & 1\\ 2 & -2 & 1\end{vmatrix}}{\sqrt{9\cdot 9-1^2}}=-\frac{2}{\sqrt{5}}\ ; \qquad D_2=\frac{\begin{vmatrix}2 & -2 & 0\\ 2 & 2 & 1\\ 2 & -2 & 1\end{vmatrix}}{\sqrt{9\cdot 9-1^2}}=\frac{2}{\sqrt{5}}\ .$$

Demak, egrilik indikatrisa tenglamasi

$$\frac{2}{\sqrt{5}}x^2-\frac{4}{\sqrt{5}}xy+\frac{2}{\sqrt{5}}y^2=\pm 1$$

NAZORAT SAVOLLARI

1. Oddiy chiziqning ta’rifi.
2. Regulyar chiziqning ta’rifi.
3. Qanday chiziqqa silliq chiziq deb ataladi ?
4. E_3 fazoda chiziqning parametrik tenglamalari.
5. Evklid fazosida chiziqning vektor tenglamasi.
6. Regulyar chiziq haqidagi teorema.
7. E_3 fazoda chiziqning oshkormas tenglamalari.
8. Tekis chiziqning ta’rifi.
9. Tekis chiziqning parametrik tenglamalari.
10. Tekis chiziqning oshkormas tenglamasi.
11. Tekis chiziqning oshkor tenglamasi.
12. Tekis chiziqning vektor tenglamasi

3 – mavzu. Psevdoyevklid fazo.

Reja:

1. Psevdoyevklid fazo. Sferik fazo.
2. Riman geometriyasi. Giperbolik fazo.
3. Yarim Yevklid fazolar. Yarim giperbolik fazolar

Tayanch iboralar: Sirt ustidagi chiziqning egriligi, normal kesim, normal kesimning egriligi, Mene formulasi, egrilik (Dyupen) indikatrisasi, indikatrisa tenglamasi, sirtning elliptik nuqta, sirtning giperbolik nuqta, sirtning parabolik nuqta, qo‘shma yo‘nalishlar, bosh yo‘nalishlar, bosh egriliklar.

A_n- affin fazo berilgan bo‘lsin. Bu fazoda ortonormal bo‘lgan n ta vektor mavjud: $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,...,\vec{e}_n\}$. Bizga A_n fazoda ikkita $\vec{X}(x_1,x_2,...,x_n)$ va $\vec{Y}(y_1,y_2,...,y_n)$ vektor berilgan bo‘lsin.

Ta’rif-1 $\vec{X},\vec{Y} \in A_5$ vektorlarning skalyar ko‘paytmasi, quyidagicha:

$$(\vec{X},\vec{Y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + ... + x_my_m - x_{m+1}y_{m+1} - x_{m+2}y_{m+2} - ... - x_ny_n$$

shaklida aniqlangan affin fazo n o‘lchovli psevdoyevklid fazo deyiladi va quyidagicha yoziladi: ${}^mR_n$.

Ta’rif-2 Vektorlarning normasi deb, shu vektorlarning o‘zini-o‘ziga skalyar ko‘paytmasidan olingan kvadrat ildizga aytiladi.

$$\left|\vec{X}\right| = \sqrt{(\vec{X},\vec{X})}$$

Tabiiyki, vektorlarni o‘zini-o‘ziga skalyar ko‘paytmasi manfiy, musbat va nol bo‘lishi mumkin.

a) $(\vec{X},\vec{X}) > 0$ $|\vec{X}|$- haqiqiy son   b) $(\vec{X},\vec{X}) = 0$ $|\vec{X}| = 0$, $\vec{X} \neq 0$

Bunday vektorlar izotrop vektorlar deb ataladi.

c) $(\vec{X},\vec{X}) < 0$ $|\vec{X}|$- mavhum son.

Bu holda vektorlarning normasi mavhum bo‘lib, qiymati kompleks sonlar tekisligining yuqori yarim tekisligi olinadi. Misol sifatida 5 bo‘lgan holni qaraymiz va yuqoridagi ta’riflarni keltirib o‘tamiz.

A_5- affin fazo berilgan bo‘lsin. Bu fazoda ortonormal 5 ta vektor mavjud: $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3,\vec{e}_4,\vec{e}_5\}$. Bizga A_5 fazoda ikkita $\vec{X}(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)$ va $\vec{Y}(y_1,y_2,y_3,y_4,y_5)$ vektor berilgan.

Ta’rif-3 $\vec{X},\vec{Y} \in A_5$ vektorlarning skalyar ko‘paytmasi, quyidagicha:

$$(\vec{X},\vec{Y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - x_4y_4 - x_5y_5$$

shaklida aniqlangan affin fazo 5 o‘lchovli psevdoyevklid fazo deyiladi va quyidagicha yoziladi: ${}^2R_5$.

Ta’rif-4 Vektorlarning normasi deb, shu vektorlarning o‘zini-o‘ziga skalyar ko‘paytmasidan olingan kvadrat ildizga aytiladi.

$$\left|\vec{X}\right| = \sqrt{(\vec{X},\vec{X})}$$

Tabiiyki, vektorlarni o‘zini-o‘ziga skalyar ko‘paytmasi manfiy, musbat va nol bo‘lishi mumkin.

a) $(\vec{X},\vec{X}) > 0 \quad |\vec{X}|-$ haqiqiy son b) $(\vec{X},\vec{X}) = 0 \quad |\vec{X}| = 0,\ \vec{X} \neq 0$

Bunday vektorlar izotrop vektorlar deb ataladi.

c) $(\vec{X},\vec{X}) < 0 \quad |\vec{X}|-$ mavhum son.

Bu holda vektorlarning normasi mavhum bo‘lib, qiymati kompleks sonlar tekisligining yuqori yarim tekisligi olinadi.

Izoh-1 Psevdoyevklid fazo fizika masalalarida ko‘p ishlatilgani uchun fizika fanida haqiqiy vektorlar so‘zi o‘rniga fazoviy vektor tushunchasi ishlatiladi.

Psevdoyevklid fazosida ikki nuqta orasidagi masofa aniqlaymiz. A va B nuqtalarni olaylik.

$$A(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \quad B(y_1,y_2,y_3,y_4,y_5)$$

Ta’rif-5. Psevdoyevklid ${}^2R_5$ fazoda ikkita A va B nuqtalar orasidagi masofa deb $\overrightarrow{AB}$ vektorning normasiga teng kattalikka aytiladi.

$$d_{AB} = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(y_1-x_1)^2 + (y_2-x_2)^2 + (y_3-x_3)^2 - (y_4-x_4)^2 - (y_5-x_5)^2}$$

ikki nuqta orasidagi masofa.

Aytaylik bizga ${}^2R_5$ psevdoyevklid fazo berilgan bo‘lsin. Unda $U(x,y,z,y,z) \subset {}^2R_5$ qism fazoni qaraymiz.

Bu qism fazoda $\vec{X}(x_1,x_2,x_3,x_2,x_3)$ va $\vec{Y}(y_1,y_2,y_3,y_2,y_3)$ vektorlaning skalyar ko‘paytmasi

$$(\vec{X},\vec{Y})_1 = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - x_2y_2 - x_3y_3 = x_1y_1$$

Agar $(\vec{X},\vec{Y})_1 = 0$ bo‘lsa $(\vec{X},\vec{Y})_2 = x_2y_2 + x_3y_3$ teng.

Vektorlarning normasi shu vektorlarning o‘zini-o‘ziga skalyar ko‘paytmasini ildizdan chiqarilganiga teng.

$$\left|\vec{X}\right| = \sqrt{(\vec{X},\vec{X})}.$$

$A(x_1,x_2,x_3,x_3,x_4)$ va $B(y_1,y_2,y_3,y_2,y_3)$ ikkita nuqta orasidagi masofa quyidagicha hisoblanadi.

$$AB_1 = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+(y_3-x_3)^2-(y_2-x_2)^2-(y_3-x_3)^2} = |y_1-x_1|.$$

$AB_1 = |\overrightarrow{AB}| = 0$ bo‘lsa, $AB_2 = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(y_2-x_2)^2+(y_3-x_3)^2}$ teng.

Shuningdek A_5 fazoda beshta $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3,\vec{e}_4,\vec{e}_5\}$ chiziqli bog‘lik bo‘lmagan vektorlarni bazis vektorlar sifatida olib, har qanday oltinchi vektorni affin koordinatalarini topish mumkin.

$$\vec{X} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 + x_4\vec{e}_4 + x_5\vec{e}_5$$

$U(x,y,z,y,z)\subset R_5$ qism fazoda $x_2 = x_4$, $x_3 = x_5$ tengligidan

$$\begin{cases} \vec{e}_1 = \vec{i} \\ \dfrac{\vec{e}_2+\vec{e}_4}{2} = \vec{j} \\ \dfrac{\vec{e}_3+\vec{e}_5}{2} = \vec{k} \end{cases} \tag{3.5}$$

almashtirish bajarsak bu $\{i, j, k\}$ vektor uch o‘lchovli fazoda bazis vektorlarni tashkil qiladi.

Yarim yevklid fazosining umumiy tushunchalari.

Birorta bo‘sh bo‘lmagan V to‘plam berilgan bo‘lsin. Biz V to‘plamning elementlari nimadan iborat ekanligi haqida ma’lumot bermagan holda, unda quyidagi ikkita amal kiritilgan bo‘lishini talab qilamiz.

Birinchi amal: bu to‘plamga tegishli har qanday ikkita elementga berilgan qoidaga ko‘ra bu to‘plamning bitta elementi mos qo‘yilgan; Biz shartli ravishda V to‘plamning a,b elementlariga mos qo‘yilgan elementni $a+b$ ko‘rinishda yozamiz.

Ikkinchi amal: berilgan haqiqiy son va V to‘plamning berilgan elementiga V

to‘plamning bitta elementi mos qo‘yilgan. Biz shartli ravishda V to‘plamning a elementlariga va l haqiqiy songa mos qo‘yilgan V to‘plamning elementlarini $l\,a$ ko‘rinishda yozamiz.

Ta’rif-1.1 Berilgan V to‘plamning yuqorida kiritilgan ikkita amal uchun

1) Ixtiyoriy a,b,c element uchun $a+(b+c)=(a+b)+c$ tenglik,

2) Ixtiyoriy a,b element uchun $a+b=b+a$ tenglik,

3) V to‘plamga tegishli shunday 0 element mavjudki har qanday a element uchun $a+0=a$ tenglik,

4) Har bir a element uchun shunday $-a$ element mavjudki $a+(-a)=0$ tenglik,

5) Har bir l,m haqiqiy sonlar uchun va har bir a element uchun $(l+m)a=l\,a+ma$ tenglik,

6) Har qanday l,m haqiqiy sonlar uchun va har bir a element uchun $(l\,m)a=l\,(ma)$ tenglik,

7) Har qanday l haqiqiy son va ixtiyoriy a,b elementlar uchun $l\,(a+b)=l\,a+l\,b$ tenglik,

8) Har bir a element uchun $1\cdot a=a$ tenglik o‘rinli bo‘lsa, V to‘plam chiziqli fazo, uning elementlari esa vektorlar deb ataladi.

Uchinchi aksiomada mavjudligi ta’kidlangan 0 element chiziqli fazoning nol elementi yoki nol vektor deyiladi.

Ta’rif-1.2 Chiziqli fazoning $a_1,a_2,...,a_m$ element uchun kamida bittasi noldan farqli $l_1,l_2,...,l_m$ haqiqiy sonlar mavjud bo‘lib, $l_1a_1+l_2a_2+...+l_ma_m=0$ munosabat o‘rinli bo‘lsa, $a_1,a_2,...,a_m$ vektorlar oilasi chiziqli bog‘lanishli, aks holda esa bu oila chiziqli erkli deyiladi.

Biz chiziqli n-o‘lchovli L_n fazoni qaraylik. Ma’lumki bu fazoda n -ta chiziqli erkli element mavjud. Agar ikki $x,y\in L_n$ bo‘lsa, ularning chiziqli kombinasiyasi $\alpha x+\beta y\in L_n$ bo‘ladi. Chiziqli L_n fazo elementlarini nuqtalar deb ataymiz. Chiziqli fazoning $A,B\in L_n$ ikki elementiga bitta $\vec{x}=\overline{AB}$ vektorni mos qo‘yamiz.

Bu $\vec{x}$ vektor uchun quyidagi aksiomalar bajarilishi talab qilinadi.

1^0 $\forall \vec{x}$ va A nuqta uchun $\overrightarrow{AB} = \vec{x}$ nuqta mavjud.

2^0 $\forall A, B, C$ nuqtalar uchun $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

Ta'rif-1.3 Keltirilgan 1^0, 2^0 aksiomalarni qanoatlantiruvchi L_n chiziqli fazo A_n - n - o'lchovli vektor affin fazo, affin fazo deb ataladi.

Misol-1.1 1) To'g'ri chiziq – bir o'lchovli chiziqli fazo – bir o'lchovli affin vektor fazoga misol bo'ladi.

2)Tekislik ikki o'lchovli affin vektor fazoga misol bo'ladi.

Tekislikda ikkita ixtiyoriy e_1 va e_2 chiziqli erkli vektorlarni olaylik. O (0,0) chiziqli erkli vektorlarni qaraylik. U holda har qanday uchinchi vektorni $\vec{a} = a_1e_1 + b_1e_2$ shaklida yozish mumkin. Bunda (a_1, b_1) $\vec{a}$ vektorning $O(e_1, e_2)$ koordinat sistemasidagi affin koordinatalari deb ataladi.

Shuning uchun A_n da n ta $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ chiziqli bog'liq bo'lmagan vektorlarni bazis vektorlar sifatida olib, har qanday $(n+1)$ vektorning affin koordinatalarini aniqlash mumkin.

$$\vec{a} = a_1e_1 + a_2e_2 + \ldots + a_ne_n \tag{1.1}$$

Ta'rif-1.4 A_n-fazoda vektorlarning o'zaro chiziqli munosabatini saqlovchi va yangi vektor hosil qilmaydigan akslantirish affin akslantirish deb ataladi.

Demak, $A, B, \ldots, Q, H$ nuqtalar A_n dagi biror figuraning nuqtalari bo'lib va $p, q, \ldots, s$ sonlar uchun $p\overrightarrow{AB} + q\overrightarrow{BC} + \ldots + s\overrightarrow{GH} = 0$ tenglik o'rinli bo'lsa, bu nuqtalarning asosi $A', B', \ldots, Q', H$ nuqtalar uchun

$$p\overrightarrow{A'B'} + q\overrightarrow{B'C'} + \ldots + s\overrightarrow{G'H'} = 0 \tag{1.2}$$

tenglik bajarilishi zarur.

Shuningdek, yangi vektor hosil bo'lmasligi uchun bu shartni aksi bajarilishi zarur.

Agar (1.2) tenglikni matrisalar yordamida ifodalasak yangi X' va eski X vektorlar koordinatalari orasidagi munosabatni $X' = AX + B$ shaklida yozish mumkin.

Bunda $A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ - kvadrat matrisa $B=\begin{matrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{matrix}$ parallel ko‘chiruvchi vektor.

Biz n o‘lchovli A_n affin fazosini qaraylik. Bu fazoda $(Ox_1x_2...x_n)$ koordinat sistemasi berilgan bo‘lsin. Bunda har qanday $\vec{X}$ vektor o‘zining koordinatalariga ega bo‘ladi. Berilgan $X\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ va $Y\{y_1, y_2, ..., y_n\}$ vektorlar uchun ularning skalyar ko‘paytmasi deb atalgan son kattalik kiritamiz.

Ma’lumki (1.3) tenglikni o‘ng tomonini ikki o‘zgaruvchilik kvadratik formadan iborat. Bu kvadratik forma affin almashtirishlarida yana kvadratik formaga o‘tadi.

Ta’rif-1.5 Ikkita A va B nuqtalar orasidagi masofa deb, $\overrightarrow{AB}$ ning normasiga teng kattalikka aytiladi.

Agar $\bar{X}=\bar{Y}$ bo‘lsa, $\bar{X}^2=(\bar{X}\cdot\bar{X})=x_1^2+x_2^2+...+x_n^2$ vektorning o‘zni - o‘ziga skalyar ko‘paytmasi yoki vektorning kvadrati deb ataladi.

Ta’rif-1.6 Vektorning o‘zini - o‘ziga skalyar ko‘paytmasidan olingan kvadrat ildiz vektorning moduli yoki normasi deb ataladi.

Vektor moduli $|\bar{X}|=\sqrt{(\bar{X}\cdot\bar{X})}=\sqrt{x_1^2+x_2^2+...+x_n^2}$ tenglik bilan hisoblanadi.

Endi AB masofani hisoblash formulasini keltirib chiqaramiz.

Ma’lumki $\overline{AB}=\overline{OB}-\overline{OA}$ bundan $\overline{AB}=\{y_1-x_1, y_2-x_2, ..., y_n-x_n\}$ ekani kelib chiqadi. Demak, $AB=\sqrt{(\overline{AB}\cdot\overline{AB})}=\sqrt{(y_1-x_1)^2+...+(y_n-x_n)^2}$. Bu esa bizga tanish ikki nuqta orasidagi masofa formulasidir.

Agar (1.3) tenglamaning o‘ng tomoni musbat aniqlangan kvadratik forma bo‘lmasa, Yevklid geometriyasidan farqli geometriya hosil bo‘ladi.

Ma’lumki musbat aniqlangan kvadratik forma kononik ko‘rinishga keltirilganda koeffisentlari musbat yoki manfiy bo‘lgan to‘la kvadratik shaklga keladi. Bunda manfiy koeffisentlar soni kvadratik formaning indeksi deb ataladi va u invariant kattalik bo‘ladi.

NAZORAT SAVOLLARI

1. **E**lementar chiziqning ta’rifi. Oddiy chiziqning ta’rifi.
2. Regulyar chiziqning ta’rifi.
3. Qanday chiziqqa silliq chiziq deb ataladi ?
4. E_3 fazoda chiziqning parametrik tenglamalari.
5. Evklid fazosida chiziqning vektor tenglamasi.
6. Regulyar chiziq haqidagi teorema.
7. E_3 fazoda chiziqning oshkormas tenglamalari.
8. Tekis chiziqning ta’rifi.
9. Tekis chiziqning parametrik tenglamalari.
10. Tekis chiziqning oshkormas tenglamasi.
11. Tekis chiziqning oshkor tenglamasi.
12. Tekis chiziqning vektor tenglamasi.

4 – mavzu: Ikkinchi tartibli sirtlar.

Reja:

1. Ikkinchi tartibli sirtlar.
2. Ikkinchi tartibli sirt invariantlari.
3. Ko‘pxilliklar. Ko‘pxillik turlari.
4. Ko‘pxillik geometriyasi.

Tayanch iboralar: Sirt ustidagi chiziqning egriligi, normal kesim, normal kesimning egriligi, Mene formulasi, egrilik (Dyupen) indikatrisasi, indikatrisa tenglamasi, sirtning elliptik nuqta, sirtning giperbolik nuqta, sirtning parabolik nuqta, qo‘shma yo‘nalishlar, bosh yo‘nalishlar, bosh egriliklar.

Uch o‘lchovli Oxyz Dekart sistemasida har qanday sirt biror F(x,y,z) = 0 tenglama bilan yoziladi, bu yerda x,y,z– sirt ixtiyoriy nuqtasining koordinatasi. Agar F (x,y,z) o‘zgaruvchilarga nisbatan ikkinchi darajali ko‘phad bo‘lsa, u holda F(x,y,z) = 0 tenglama ikkinchi tartibli tenglama deyiladi, shu tenglama yordamida tasvirlanadigan sirt esa ikkinchi tartibli sirt deyiladi.

Agar sirtning koordinatalar sistemasiga nisbatan joylashishi alohida xususiyatga ega bo‘lsa (masalan, ba’zi koordinatalar tekisliklariga nisbatan simmetrik joylashgan bo‘lsa), u holda uning tenglamasi juda sodda ko‘rinishga ega bo‘ladi va u kanonik tenglama deyiladi.

1. Ikkinchi tartibli sirtlar.
2. Sfera. Ellipsoid
3. Bir va ikki pallali giperboloidlar.

Sfera.

Tayanch iboralar:Sfera, sferaning tenglamalari, aylanma sirt, aylanma sirt-ning tenglamasi, tor, torning tenglamasi, psevdosfera, psevdosferaning tenglamasi. Sferaning parametrik tenglamalarini keltirib chiqarishni o‘rganadi. Sferaning turli tenglamalarini o‘rganadi.

Ta’rif. Evklid fazosida berilgan nuqtadan bir xil masofada joylashgan nuqtalar to‘plamiga sfera deb ataladi.

Berilgan nuqtani sferaning markazi deb ataladi.

Sfera markazidan sferaning istalgan nuqtasigacha bo‘lgan masofani sferaning radiusi deb ataladi.

Sferaning tenglamasini keltirib chiqaramiz. Buning uchun sfera sirtida ixtiyoriy M nuqta olib, uning u,v egri chiziqli koor-dinatalarini quyidagicha kiritamiz. Sferaning M nuqtasidan RMA katta aylana o‘tkazamiz va NOM burchakni u orqali belgilaymiz, bu yerda $NM \perp O$A. U OM radius vektor bilan XOU tekislik orasidagi burchak bo‘ladi. M nuqtadan o‘tuvchi RMA meridian tekislik bilan XOZ tekislik orasidagi burchakni v orqali belgilaymiz (27-chizma).

Bu u va v lar quyida-gicha o‘zgaradi:

$$-\pi \le v \le \pi \qquad (1).$$

Chizmadan:

$$z = \pm NM = \text{R}\, sin u\ ,$$

$$x = \pm OD = \pm ON \cos v ,$$

$$y = \pm DN = \pm ON \ \sin v ,$$

bu yerda R sfera radiusi.

Chizmada $\pm ON = R \cos u$

ekanligini hisobga olsak

$$x = R\cos u \cos v$$

$$y = R\cos u \sin v$$

bo‘ladi. 27-chizma.

Demak, markazi koordinatalar boshida joylashgan va radiusi R ga teng sferaning parametrik tenglamalari

$$x = R\cos u \cos v, \quad y = R\cos u \sin v , \quad z = R\sin u \qquad (2)$$

ko‘rinishda bo‘lar ekan.

Vektor tenglamasi esa

$$\vec{r} = \{ R\cos u \cdot \cos v; R\cos u \cdot \sin v; R\sin u \},$$

yoki

$$\vec{r} = R\cos u \cdot \cos v \cdot \vec{i} + R\cos u \cdot \sin v \cdot \vec{j} + R\sin u \cdot \vec{k} .$$

Agar (2) tenglamalarni kvadratga ko‘tarib qo‘shsak:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \qquad (3).$$

(3) formula sferaning oshkormas tenglamasi bo‘ladi.

Ta’rif: Sanoqli bazali W^n Xausdorf topologik fazoning har bir nuqtasi R^n dagi ochiq to‘plamga gomeomorf atrofga ega bo‘lsa, u holda uni n - o‘lchamli topologik ko‘pxillik deyiladi.

n - sonini ko‘pxillikning o‘lchami deyiladi, hamda $\dim W^n$ belgilanadi. Topologik ko‘pxillik so‘zi o‘rniga odatda ko‘pxillik so‘zini ishlatamiz. Ta’rifga ko‘ra har qanday $a \in W^n$ nuqta uchun shu nuqta atrofi U va shu atrofni birorta $G \subset R^n$ ochiq to‘plamga akslantiruvchi φ gomeomorfizmdan iborat (U,φ) juftlik mavjud.

R^n dagi $b = \varphi(a) \in G$ nuqta $V \subset G$ sharsimon atrofga ega bo‘lib, $\varphi^{-1} : G \to U$ akslantirishning gomeomorfizmligidan $\varphi^{-1}/_v : V \to \varphi^{-1}(V)$ akslantirish ham gomeomorfizmdir.

U holda a nuqta W^n da $V \subset R^n$ ochiq sharga gomeomorf $U_1 = \varphi^{-1}(V)$ atrofga ega bo‘ladi. φ gomeomorfizm U_1 qadar torayib akslantirishdir.

Shunday qilib, topologik ko‘pxillik ta’rifidagi R^n ga tegishli ochiq to‘plamga gomeomorf atrofning mavjud bo‘lishi haqidagi talab R^n dagi ochiq sharga gomeomorf atrofning mavjudligi yoki R^n ning o‘ziga yoki undagi ochiq kubga gomeomorf atrofning mavjudligi talabi bilan teng kuchlidir. Bunda R^n dagi ochiq sharning R^n bilan yoki R^n undagi ochiq kub bilan gomeomorfligiga e’tibor qilinadi.

Birorta ko‘pxillik W mavjud bo‘lib, uning ba’zi bir nuqtalari bir vaqtda va R^n *ва* $R^m\,(n \neq m)$ ga gomeomorf atrofga ega bo‘lsa, ko‘pxillik o‘lchamining ta’rifida korrektlik bajarilmaydi. L. Brauer teoremasi deb atalgan qo‘yidagi teoremada yuqoridagi muammo yechiladi.

37 – teorema. Agar R^n va R^m evklid fazolari gomeomorf bo‘lsa, u holda $n = m$

Teoremaning isboti ancha murakkab, biz buni keltirmaymiz. Teoremaning isbotini A. D. Aleksandrovning «Qabariq ko‘pyoqlar» M.L. 1950 kitobida uchratish mumkin.

Bu teoremadan topologik ko‘pxillikning o‘lchami uning topologik invarianti ekanligi kelib chiqadi.

38 – teorema Bir o‘lchamli kompakt (yopiq) bog‘lanishli har kanday topologik ko‘pxillik S^1 aylanaga gomeomorf. Bir o‘lchamli har kanday bog‘lanishli nokompakt (ochiq) topologik ko‘pxillik R^1 ga gomeomorf.

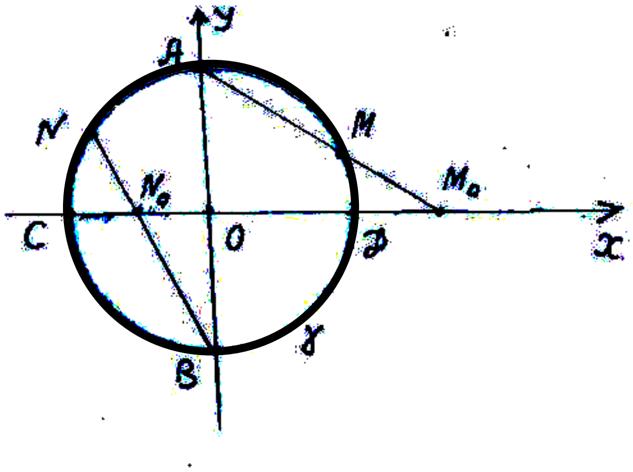
Teoremaning isboti R^1 da bog‘lanishli ochiq to‘plam interval, ochiq nur yoki R^1 ning o‘zi ekanligiga asoslanadi. Teoremaning isboti V. A. Roxlin va D. B. Fuksning «Nachalniy kurs topologii» M .1979 kitobida keltirilgan.

Ikki o‘lchamli kompakt ko‘pxillikni klassifikasiyalash uchun qo‘shimcha yangi tushunchalar kiritish lozim bo‘ladi.

Endi ko‘pxillikka doir yana bir misol keltiraylik.

$\gamma(o,r)$ aylana Evklid tekisligiga tegishli. γ aylana OXY koordinatalar sistemasi o‘qlarini kesib o‘tadi. OY o‘q bilan A va B nuqtalarda kesishsin. γ aylanadan A nuqtani o‘yib tashlab qolgan qismini $U_1 = \gamma \setminus \{A\}$ belgilaymiz. Shuningdek $U_2 = \gamma \setminus \{B\}$ aylananing B nuqtasisiz qismi bo‘lsin. $\varphi : U_1 \to (OX), \psi : U_2 \to (OX)$ akslantirishni qaraylik.

$$\varphi(M) = M_0 \in (OX), \psi(N) = N_0 \in (OX).$$



6-shakl.

φ akslantirish γ - ni (OX) o‘qka A markazdan proeksiyalash, ψ esa γ ni (OX) o‘qka B markazdan proeksiyalashdan iborat. γ va (OX) o‘q nuqtalari orasida markaziy proeksiyalash orqali o‘rnatilgan moslik gomeomorfizmdir.

Aylanani A nuqta, ya’ni nol o‘lchamli ko‘pxillik va U_1 bir o‘lchamli ko‘pxillik bilan yoki B nuqta va U_2- bir o‘lchamli ko‘pxillik bilan yopish mumkin. A, B, U_1, U_2 – lar kataklardan iborat.

Ko‘ramizki, γ aylana bir o‘lchamli kompakt ko‘pxillikdir.

Sfera, ellipsoid, giperboloidlar, paraboloidlar, 2 – tartibli silindrlar 2 o‘lchamli ko‘pxilliklardir. Sfera va elipsoidlarning chegaralanganligidan ularning kompaktligi, qolganlari esa noqompakt ko‘pxilliklar bo‘lishi o‘z-o‘zidan ayon

Chetli ko‘pxillik

R^n da R gipertekislik bilan chegaralangan biror R_+^n yopiq yarim fazoni fiksirlaylik.

Ta’rif: n - o‘lchamli chetli ko‘pxillik deb, har bir nuqtasi R^n ga yoki R_+^n ga gomeomorf atrofga ega bo‘lgan sanoqli bazali topologik Xausdorf fazosiga aytiladi va W^n belgilanadi.

W^n chetli ko‘pxillikning R^n ga gomeomorf atrofga ega bo‘lgan nuqtalarini ichki nuqtalar, R^n_+ ga gomeomorf atrofga ega bo‘lgan nuqtalarini esa chetki nuqtalar deyiladi.

Birorta $a \in W^n$ nuqta bir vaqtda ichki va chetki nuqta bo‘lishi mumkinmi ? degan savol tug‘iladi. Bu hol o‘rinli emas, chunki ichki va chetki nuqtalar korrekt ta’rifga ega.

W^n chetli ko‘pxillikning barcha ichki nuqtalar to‘plamini int Wⁿ bilan belgilaymiz.

int W^n W^n da o‘lchamli ochiq topologik ko‘pxillikdir. W^n ning chetki nuqtalar to‘plami yopiq bo‘lib, ushbu to‘plamni ∂W^n bilan belgilanadi.

∂W^n int W^n ning chegarasi bo‘lib, W^n ga tegishli bo‘lishi yoki tegishli bo‘lmasligi ham mumkin. Ya’ni n- o‘lchamli ko‘pxillikning cheti bo‘sh to‘plamdan iborat bo‘lishi ham mumkin.

39 – teorema. Agar n - o‘lchamli chetli ko‘pxillikning ∂W^n cheti bo‘sh bo‘lmasa, u holda y n o‘lchamli ko‘pxillikdan iboratdir.

W^n kompakt bo‘lsa, u holda uning cheti kompakt (yopiq) to‘plamdir.

Teoremaning isboti V. A. Roxlin kitobida keltirilgan.

Misollar keltiraylik:

41 – misol $R^n_+ (n \geq 1)$ yopiq yarim fazo chetli ko‘pxillikdir. Ko‘pxillikning cheti

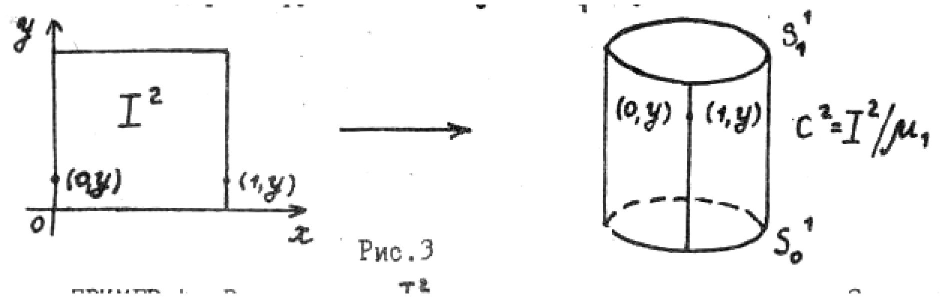
$$\partial R^n_+ = R^{n-1}$$

$n=1$ da R^1_+ - nur, ∂R^1_+ esa nuqtadan iborat. $n=2$ da R^2_+- yarimtekislik, ∂R^2_+ esa to‘g‘ri chiziqdir.

42 – misol R^n da $(n \geq 1) D^n$ - yopiq shar chetli ko‘pxillikdir. Ko‘pxillikning ∂D^n cheti S^{n-1} sferadan iborat. $n=1$ da D^1 - kesma, S^0 - kesmaning chetlari bo‘lgan ikkita nuqta $n=2$ da D^2- doira, $\partial D^2 = S^1$ doiraning chegarasi bo‘lgan aylanadir.

43 – misol R^2 tekislikda $I^2 = \{(x, y),\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$ kvadratni qaraylik. I^2 da ekvivalentlik munosabati μ_1 ni shunday kiritaylikki, $(0, y)$ va $(1, y)$ nuqtalar ekvivalent hisoblansin.

$C^2 = I^2/\mu_1$ faktor to‘plam ikki o‘lchamli chetli ko‘pxillik bo‘lib, xalqaga gomeomorfdir. Uning cheti ∂C^2 ikkita S_0^1 va S_1^1 aylanalardan iborat.

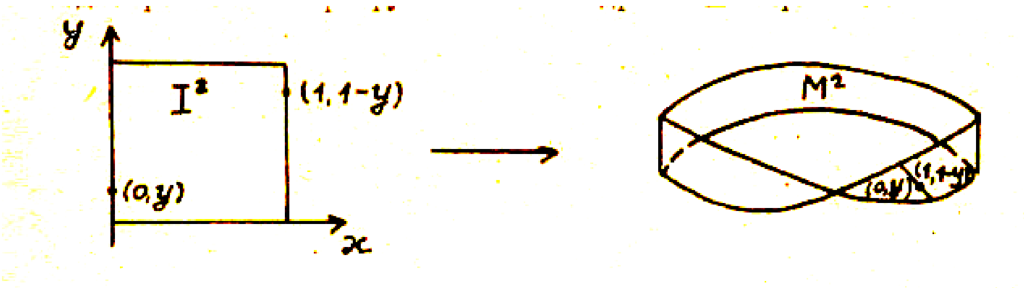


7-shakl.

44 – misol 43 – misoldagi I^2 kvadratda ekvivalentlik munosabati μ_2 ni qo‘yidagicha kiritaylik.

$(0, y)$ va $(1, 1-y)$ ekvivalent nuqtalar bo‘lsin. $\mu^2 = I^2/\mu_2 \to M^2 = I^2/\mu_2$ faktor fazo « Myobius yaprog‘i» deb nomlanadi.

Oldingi misolda xalqa I^2 (kvadrat)ning qarama-qarshi ikkita yon tomonlarini “burmay” to‘g‘ridan – to‘g‘ri «yelimlab» yopishtirish orqali hosil qilingan bo‘lsa, «Myobius yaprog‘i» I^2 ning qarama – qarshi yon tomonlarini 180 gradusga aylantirib yopishtirish bilan hosil qilinadi.



8-shakl.

«Myobius yaprog‘i» M^2 ning chetli ko‘pxillik bo‘lib, uning cheti ∂M^2 *aylana* S^1 ga gomeomorf. Bundan μ^2 xalqaga gomeomorf emasligi ko‘rinadi. Xalqaning cheti ikkita aylanadan iboratdir.

45 – misol Agar T^2 tordan ochiq doiraga gomeomorf to‘plam chetlatilsa, ya’ni «qirqilsa» torning qolgan qismi N^2 chekli o‘lchamli chetli ko‘pxillik bo‘lib, uning cheti S^1 aylanadan iborat.

N^2 – ni «dasta» yoki “katak” deyiladi.

9-shakl.

Ko‘pxillikning eyler xarakteristikasi.

Biz 14-§ da topologik fazoni kataklarga ajratish shartlari bilan tanishdik. Shu asosda har qanday n-o‘lchovli chetli ko‘pxillikni ham kataklarga ajratish mumkinligini isbotlashimiz mumkin.

Agar n – o‘lchovli chetli w^n ko‘pxillik kompakt bo‘lsa, uning kataklarga ixtiyoriy ajratmasi Ye={e_i^k }uchun bir xil o‘lchovli kataklar soni ushbu bo‘linishda cheklidir. Ye bo‘linishda α_i orqali i o‘lchovli kataklar sonini belgilaylik, bunda i=0,1,…,p.

$$X(w^n)=\sum_{i-0}^{n} \quad (-1)^i \alpha_i (2\cdot 1)$$

sonni w^n chetli kompakt ko‘pxillikning Eyler xarakteristikasi deyiladi $X\left(w^n\right)$ sonning kataklarga ajratish usullariga nisbatan bog‘liqmasligi (invariantligi)ni, ya’ni ta’rifning korrektligini isbot qilishimiz mumkin. Ikki o‘lchovli sfera S^2 uchun invariantlik xossasining isboti qo‘yida keltiriladi.

Ba’zi bir ko‘pxilliklar uchun Eyler xarakteristikasini aniqlaylik.

46-misol. E^{m+1} fazodagi sharning chegarasi sfera bitta nol o‘lchovli katak-x_0 nuqta va $S^m \setminus \{x_0\}$ dan iborat bitta m-o‘lchovli kataklarga ajraladi. Shuning uchun

$$X(S^m)=1+1(-1)^m=\begin{cases} 2_1 \ m-juft \quad bo'lsa \\ 0_1 \ m-toq \quad bo'lsa \end{cases} \qquad (2.2)$$

$m=0$ da S^0 -ikkita nuqtdan iborat, shuning uchun $X(S^m)=2,$ m-juft.

47-misol. Ikki o‘lchovli T^2 torni, uning paralleli va meridiani bitta nol o‘lchovli katakka, ya’ni parallel va meridianning kesishish nuqtasiga, ikkita bir o‘lchovli va bitta ikki o‘lchovli kataklarga ajratadi. Shuning uchun $X\left(T^2\right)=0$

48-misol. n-o‘lchovli proektiv fazo P^n ning modeli R^{n+1} dagi sfera S^n da diametral qarama-qarshi nuqtalarni ayniylashtirib (yelimlab) hosil qilinadi. Ko‘ramizki, P^n ni ekvivalentlik sinfiga ikkita diametral qarama qarshi nuqtalardan tashkil topgan ekvivalentlik munosabati bo‘yicha S^n faktorfaza kabi qarash mumkin: P^n da P^{n-1} qism fazoni olamiz, P^{n-1} da P^{n-2} qism fazoni olamiz va h.k. P^0-nol o‘lchovli qism fazo nuqtagacha ajratish davom etadi.

Kataklar qo‘yidagicha aniqlanadi:

$e^0 = p^0, e^1 = p^1 \setminus p^0, \dots e^n = p^n \setminus p^{n-1}$

$$\mathrm{X(R^n)}=\sum_{i=0}^{n}(-1)^n=\begin{cases}1_1\ agar\ \ n\ \ juft\ \ bo'lsa\\ \hline 0_1\ agar\ \ n\ \ toq\ \ bo'lsa\end{cases} \qquad (2.3)$$

49-misol. $D^n n>1$ yopiq sharning kataklarga ajratish $S^{n-1}=\partial D^n$ ning kataklarga ajratib, so‘ngra S^{n-1}ga bitta n-o‘lchovli katakni yopishtirishdan yuzaga kelishi mumkin. Shuning uchun

$X(D^n)=1+(-1)^{n-1}+(-1)^n=1$ (2.4)

$n=1$ uchun $X(D^1)=1$, chunki D^1 kesma bitta bir o‘lchovli katak va ikkita nol o‘lchovli kataklar – kesma uchlaridan tashkil topadi.

50-misol. «Myobius yaprog‘i» M^2 ni kataklarga ajratish qo‘yidagicha o‘tkaziladi: I^2 kvadratda $(0,0)$ uchdan $(1,1)$ uchga d diagonal o‘tkazamiz. Ushbu uchlarni «yelimlab yopishtirib» ayniylashtiriladi. Bundan M^2 ajratilgan kataklar bitta nol o‘lchovli katak e^0 dan I^2 kvadratning ichki nuqtlar to‘plamidan iborat bitta ikki o‘lchovli katakdan va d-diagonal hamda $S^1=\partial M^2$ chegaradan iborat ikkita bir o‘lchovli kataklardan tashkil topadi.

Shuning uchun $X(M^2)=1-2+1=0$ (2.5)

Har qanday toq o‘lchovli kompakt chetsiz ko‘pxillikning Eyler xarakteristikasi nolga tengligini ta’kidlaymiz. Biz qo‘yida asosan ikki o‘lchovli ko‘pxillikni qaraymiz

40-teorema. $W_1,\dots W_2,\dots,W_s$ kompakt ko‘pxillik yoki chetli ko‘pxillik bo‘lib, ba’zi bir kompakt chegaralardan $\partial W_1,\dots\partial W_2,\dots,\partial W_s$ juftlari orasidagi

$\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_r$ gomeomorfizmlar berilgan bo‘lsin. Har bir komponenta faqat bitta juftga tushadi.

$W_1,...,W_s$ ko‘pxilliklardan $\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_r$ akspantirishlar bo‘yicha yelimlab-yopishtirib chetli W ko‘pxillik olinsa, u holda

$X(W) = X(W_1) + X(W_2) + ...X(W_{s)})$ (2.6)

Isbot. Birinchidan, ko‘pxillikni kataklarga ajratib ixtiyoriy bir o‘lchamli katakning ichiga nol o‘lchamli katakni qo‘shib, biz yana kataklarga ajratgan bo‘lamiz.

Bundan (2.1) yig‘indi o‘zgarmaydi, chunki har bir bunday ajratmada bir o‘lchovli kataklar soni ham bittaga oshadi.

Shuning uchun $W_1,...W_2,...,W_s$ chetli ko‘pxilliklarning shunday $E_{1,}E_2,...,E_s$ kataklarga bo‘lishlarga ega bo‘lindiki, $\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_r$ gomeomorfizmlarda nol o‘lchovli har bir katak nol o‘lchovli katak bilan bir o‘lchovli katak bir o‘lchovli bilan «yopishtiriladi». E_i katakka ajratishlar W da E katakka ajratishni aniqlaydi.

$\alpha_i^j(\alpha_i)$ E_i dagi (i=0,1,2) o‘lchovli kataklar soni bo‘lsin. Yopiq ko‘pburchakda tomonlar soni uchlar soniga tengligidan bir o‘lchovli sikllarni yopishtirsak, yelimlashdan so‘ng nol o‘lchovli kataklar soni va bir o‘lchovli kataklar soni bir xilda kamayadi.

Shuning uchun $\alpha_2^1+\ldots+\alpha_2^s-\alpha_0=\alpha_1^1+\ldots+\alpha_1^s-\alpha_1$ (2.7)

Bundan tashqari $\alpha_2^1+\ldots+\alpha_2^s=\alpha_2$ (2.8)

(2.8) va (2.7) dan (2.6) kelib chiqadi.

1-natija. S^2 sferadan G_1, G_2, … G_p p-kesishmaydigan ochiq doira (R «tuynukli» sferalar) ga gemeomorf sohalarni chetlatishdan hosil qilingan S_r^2 chetli ko‘pxillikning Eyler xarakteristikasi 2-r ga teng.

2-natija. «dasta» (16-§. 45-misol)ning Eyler xarakteristikasi -1ga teng.

Ta’rif: Kesmaning gomeomorf obraziga sodda yoy deb aylananing gomeomorf obraziga esa sodda yopiq chiziq yoki bir o‘lchovli sikl deyiladi.

S^2 sfera uchun (2.1) yig‘indining kataklarga ajratish usuliga bog‘liq bo‘lmasligining isboti K. Jordanning qo‘yidagi teoremasiga asoslanadi.

41-teorema. Har qaysi sikl S^2 sferani ikkita sohalarga ajratadi va ular uchun umumiy chegara bo‘ladi.

Teoremaning isboti P.A. Aleksandrovning «Vvedenie v gomologicheskuyu teoriyu razmernosti» kitobida 172 betida keltirilgan.

Ta’rif: S^2 dagi Σ to‘r deb chekli sondagi A_1, A_2, … A_m nuqtalar va uchlari ushbu nuqtlarda bo‘lib, chekli sondagi ichki nuqtalarda o‘zaro kesishmaydigan $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$ sodda yoylarning ixtiyoriy tanloviga aytiladi, ya’ni $\sum$ to‘r S^2 dagi bir o‘lchovli kataksimon qism fazodir.

A_1, A_2, … A_n nuqtalarga to‘rning uchlari, $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$ yoylarga to‘rning qirralari deyiladi.

$\sum$ to‘rning sohalari deb $S^2 \setminus (\bigcup_i A_i) \cup (\bigcup_i \gamma_i)$ to‘plam komponentlariga aytiladi. sfera uchun qo‘yidagi teorema o‘rinli.

42-teorema. $\sum$ S^2 sferadagi to‘r bo‘lib, α_0 - uning uchlari soni, α_1 - qirralari soni, α_2 - sohalari soni va l esa uning bog‘lanishli komponentlari soni bo‘lsa, u holda $\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - l = 1$ (2.9)

<u>Isbot</u>. To‘r bo‘sh to‘plam bo‘lgan holda (2.9) formulaningsh to‘g‘riligiga shubha yo‘q, chunki $\alpha_0 = \alpha_1 = l$ bo‘lib, $\alpha_2 = 1$

Endi ixtiyoriy $\sum$ to‘rdan bo‘sh to‘r Σ_0 ga uchlari va qirralarini chetlashtirish orqali o‘tamiz va har gal bunday chetlashtirishlarda $\lambda(\Sigma) = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = l$ ifodaning o‘zgarmasligini tekshirib boramiz.

Oxir oqibatda bo‘sh to‘r uchun $\lambda(\sum_0) = 1$ kelib chiqadi, u holda boshlang‘ich Σ to‘r uchun $\lambda(\sum) = 1$

Teoremaning isboti shu usul bilan o‘tkaziladi. Boshlang‘ch to‘rdan bo‘sh to‘rga qo‘yidagi bosqichlar orqali o‘tishimiz mumkin.

Σ to‘rdan Σ^1 to‘rga yakkalangan nuqtalarni chetlatish orqali o‘tiladi. U holda α_0 va l sonlarning har biri bir xilda kamayadi, bunda α_1 va α_2 o‘zgarmaydi. Shuning uchun $\lambda(\sum^1) = \lambda(\sum)$

Barcha yakkalangan nuqtalarni chiqarib va Σ to‘r bittadan γ_j qirra o‘tuvchi A_i erkin uchga ega bo‘lsin deb faraz qilib shu A_i uchni va γ_j qirrani chetlashtiramiz. γ_j ning ikkinchi uchi o‘zgarishsiz qoladi (10-shakl). Biz Σ^1 to‘rga ega bo‘lamiz. Ushbu to‘r uchun α_0 va α_1 lar bir birlikdanga kamayadi. α_2 va l esa o‘zgarmaydi. Ko‘ramizki $\lambda(\sum^1) = \lambda(\sum)$.

10-shakl.

11-shakl.

1 va 2 bosqichlarni ketma-ket takrorlab shunday Σ to‘r hosil qilamizki unda yakkalangan uchlar va erkin oxirlar bo‘lmaydi. Bu to‘r bo‘sh emas. Uning qirralaridan kamida bitta sikl tuzish mumkin. (11-shakl). 41-teoremaga ko‘ra sikl tarkibidagi har bir γ_j qirra Σ da turli 2 ta sohalarning chegarasida yotadi. Shuning uchun γ_j ni chetlashtirib, uchlarini o‘zgarishsiz qoldirib Σ to‘rdan Σ^1 to‘rga o‘tamiz. Σ^1 da α_1 va α_2 lar bittadanga kamayadi, α_0 va L- o‘zgarishsiz qoladi. Yanada $\lambda(\sum^1) = \lambda(\sum)$ tenglik kelib chiqdi. 1,2,3 bosqichlarni bajarib Σ to‘rdan bo‘sh to‘rga o‘tish mumkin. bunda $\lambda(\sum)$ o‘zgarmaydi. Teoremaning isboti yakunlandi. S^2 sferaning kataklarga ajralishini ta’minlovchi Σ to‘rning har bir sohasi ochiq doiraga gomeomorf bo‘lganidan, bunday to‘r uchun $l=1$, chunki ushbu to‘r faqat bitta komponentga ega. Aks holda to‘rning sohalari orasida kamida ikkita komponentani o‘z ichiga oluvchi chegaraga ega bo‘lib, bu komponentalar to‘rining turli komponentalariga tegishli bo‘lishi mumkin. Buning iloji yo‘q, chunki har bir soha doiraga gomeosorf bo‘lib, uning chegarasi bitta komponentadan iboratdir. Shuning uchun 24-teoremadan sferaning kataklar soni har qanday bo‘lnishga nisbatan bir xilda.

$\alpha_0 - \alpha_0 + \alpha_0 = 2$ (2.10)

kelib chiqadi. Shu bilan S^2 sferaning Eyler xarakteristikasi korrekt ta’riflandi.

S^2 sferaga gomeomorf har qanday R yopiq ko‘pyoq uni kataklariga ajratish usulga bog‘liq bo‘lmagan holda (2.10) formula bilan xarakterlanadi. Bu formula R ko‘pyoq uchun Eyler teoremasining analitik ifodasi bo‘lib, bunda α_0 - uchlar soni, α_1 - qirralar soni, α_2- yoqlar soni.

Yo‘nalmali va yo‘nalmasiz ko‘pxilliklar.

W ikki o‘lchovli chetli ko‘pxillik bo‘lib, T uning birorta kataklariga ajratmasi bo‘lsin. Agar T da har bir $t_i \in T$ ikki o‘lchovli to‘rning chegarasi uchta turlicha bir o‘lchovli τ_1^i, τ_2^i, τ_3^i kataklaridan tashkil topsa, hamda har bir 1 o‘lchovli katak $\gamma \in T$ ning oxirlari T bo‘linishda ikkita nol o‘lchovli kataklarda yotsa, u xolda T ajratmani triangulyatsiya deyiladi.

T triangulyatsiyada nol o‘lchovli kataklarni uning qirralari, chegarasini qo‘shgan holda ikki o‘lchovli kataklarni undagi topologik uchburchaklar deb nomlanadi.

Ikkinchidan yuqori o‘lchovlar uchun triangulyasiyaning o‘xshatmasi simplisial bo‘linishlardir. Bunday katakli ajratmalar topologik simplekslardan tuzilgan bo‘lib, qo‘shni simplekslar bir-bir bilan o‘lchovli kichik yoqalar bo‘yicha tutashadi. Ikki va uch o‘lchovli ko‘pxilliklarni simplisial ajratishlar mumkinligi isbotlangan.

Chegarasining oxiri A va B nuqtalarda bo‘lgan w chetli ko‘pxillikda γ T triangulyatsiyaning qirrasi bo‘lsin. γ qirraning yo‘nalmasi deb uning uchlari juftligidagi tartibga aytiladi. γ uchun (A,B) va (B,A) dan iborat ikkita yo‘nalma mavjud. Ularni qarama qarshi yo‘nalma deb nomalanadi.

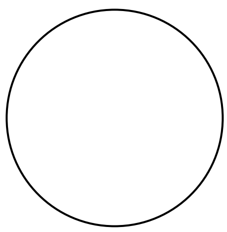
Agar γ qarradagi ikkita yo‘nalmalardan biri tanlansa, u holda γ ni yo‘nalmali deyiladi. Endi ularni A, B, C nuqtalarda bo‘lgan $t \in T$ topolgik uchburchakni qaraylik.

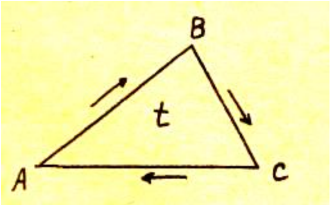
t uchburchakdagi yo‘nalma deb, uning uchlaridan iborat uchlikdagi tartibga aytiladi. Sikllik o‘rin almashtirishdan hosil qilingan yo‘nalmalarni bir xildagi e’ni ekivalent deyiladi. Ushbuni

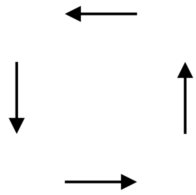
(A, B, C)~(B, C, A)~(C, A, B)~ va

(C, B, A)~(B, A, C)~(A, C, B)

belgilanadi.







12-shakl. 13-shakl.

Shunday qilib t uchburchak ikkita yo‘nalmaga ega. Shulardan biri ko‘rsatilsa, uchburchakni yo‘nalmali deyiladi.

t uchburchak uchlarining (A, B, C) tartibi uning tomonlaridagi (A, B), (B, C) va (C, A) yo‘nalmalarni yuzaga keltiradi. (12-shakl).

T dagi ikkita qo‘shni yo‘nalmali uchburchaklarda, ya’ni umumiy tomonga ega bo‘lgan uchburchaklarda umumiy tomon bo‘yicha qarama-qarshi yo‘nalmalar induksiyalangan bo‘lsa, u holda ularni kelishilgan yo‘nalmali deyiladi.

Agar ikki o‘lchovli chetli W ko‘pxillikning T triangulyatsiyasi mavjud bo‘lib, undagi barcha uchburchaklarda shunday yo‘nalma ko‘rsatishi mumkin bo‘lsaki, har qanday qo‘shni ikkita uchburchaklar kelishilgan yo‘nalmali bo‘lsa u holda W ni kelishilgan yo‘nalmali deyiladi. Misollar keltiraylik.

Ikki o‘lchovli ko‘pxilliklarning topologik klassifikasiyasi.

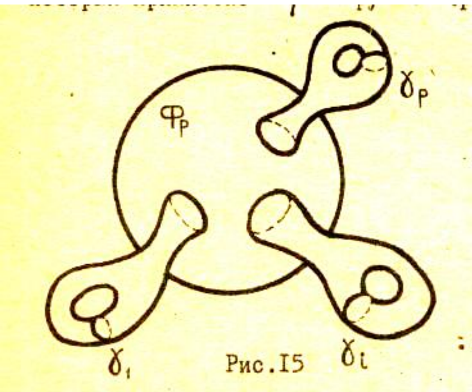
W-ko‘pxillik chetli yoki ko‘pxillikning o‘zi bo‘lsin. Agar W ko‘pxillikda $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_p$ ta juft jufti bilan kesishmaydigan sikllar sistemasi mavjud bo‘lib, ∂W chegarani kesmasa, va $W \setminus (\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup, \ldots, \cup \gamma_n)$ bog‘lanishi bo‘lsa, u xolda r sonni W ning jinsi (rod) deyiladi. S^2 sfera va R^2 tekislik R=0 jinsli ko‘pxilliklardir. Proektiv tekislik va tor R=1 jinsli ko‘pxillikdir. Kompakt ko‘pxillik w ning g(w) jinsi har doim chekli songa tengdir.

Kompakt bo‘lmagan ko‘pxilliklar cheksiz jinsli bo‘lishlari mumkin.

Р jinsli yo‘nalmali ko‘pxillikka “Р dektalli sfera” deb ataluvchi figura misol bo‘lishi mumkin Φ_p ko‘pxillik Р ta «tuynuk» li sferaning tuynuklar chegarasiga r ta «dasta» ni yopishtirib xosil qilinadi, (14-shakl)

Chizmadagi $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ sikllar «dasta»ga tegishli bo‘lib, Φ_p ni ajratmaydi. Yo‘nalmali bo‘lmagan r jinsi Φ_p ko‘pxillik S_p^2 sferaning barcha Р dona teshiklariga chegara bo‘ylab «Myobius yaprog‘i» ni yopishtirish orqali hosil qilinadi.

Ma’lumki, «Myobius yaprog‘i» ning cheti S^1 aylanaga gomemorf. Bundan xar bir «tuynuk» chegarasiga yaproq chetini yelimlash mumkinligi kelib chiqadi.



17-shakl.

Proektiv tekislik R^2 1-ta «tuynuk» ka ega bo‘lgan S^2 sferaga «Myobius yaprog‘i» ni yelimlash bilan hosil qilinadi.

$X(S_p^2)=2-p$ dan tor uchun $X(M^2)=0$, «dasta»ning Eyler xarakteristikasi -1 ga teng.

Eyler xarakteristikasining additivlik xossasiga ko‘ra

$X(\Phi_p)=(2-p)-p=2(1-p)$ (2.11)

$X(\Phi_p)=2-p$ (2.12). bu formulalar ko‘pxilliklarning jinsi va Eyler xarakteristikalari orasidagi munosabatni aniqlaydi.

43-teorema. Ikkita ikki o‘lchovli bog‘lanishli kompakt ko‘pxilliklar gomeomorf bo‘lishi uchun ular bir vaqtda yo‘nalmali bo‘lishi yoki yo‘nalmali bo‘lmasligi, shuningdek ular teng Eyler xarakteristikaga ega bo‘lishi zarur va yetarlidir.

Muntazam ko‘pyoqlar klassifikasiyasi

Yopiq ko‘pyoqlar uchun (2.10) Eyler formulasi muntazam ko‘pyoqlarni klassifikasiyalash imkoniyatini beradi.

Ta’rif: E^3 fazodagi S^2 sferaga gomeorf P ko‘pxillikning barcha yoqlari bir xil sondagi (m) qirralarga ega bo‘lib, har bir uchidan bir xil sondagi (n) qirralar o‘tsa, u holda P ni topologik muntazam ko‘pyoq deyiladi.

$m \geq 3, n \geq 3$ ekanligiga shubha yo‘q.

P ko‘pyoq uchlari sonini α_0 orqali, qirralar sonini α_1 orqali, yoqlar sonini α_2 orqali belgilasak, P ning har bir uchdan n ta qirra o‘tib, har qaysi qirra 2 ta uchni birlashtirgani uchun $n\alpha_0 = 2\alpha_1$ (2.13)

Har bir qirraning ikkita yoqqa tegishligidan $m\alpha_3 = 2\alpha_1$ (2.14)

(13) va (14) dan α_0 va α_3 larni aniqlab, Eyler formulasi (2.10) ga qo‘ysak,

$\frac{2\alpha_1}{n} - \alpha_1 + \frac{2\alpha_1}{m} = 2$ (2.15) kelib chiqadi.

Bundan $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{2} > \frac{1}{2}$ (2.16)

$m \geq 3, n \geq 3$ bo‘lgani uchun (2.16) tengsizlik qo‘yidagi 5 juft yechimlarga ega bo‘lishi mumkin:

1) $m = 3, n = 3$ 2) $m = 3, n = 4$ 3) $m = 3, n = 5$ 4) $m = 4, n = 3$ 5) $m = 5, n = 3$

m, n larga mos $\alpha_0, \alpha 1, \alpha_2$ qiymatlarni jadval ko‘rinishida yozaylik.

m	n	α_0	α_1	α_2	Ko‘pyoq nomi
3	3	4	6	3	tetraedr
3	4	6	12	8	oktaedr
3	5	12	30	20	ikosaedr
4	3	8	12	6	kub (geksaedr)
5	3	20	30	12	dodekaedr

Har bir yog‘i muntazam ko‘pburchaklardan iborat bo‘lib, har bir uchida muntazam ko‘pyoqli burchaklarga ega bo‘lgan boshqa tipdagi ko‘pyoqlar mavjud emas.

NAZORAT SAVOLLARI

1. Sirt ichki geometriyasi ob’ektlariga misollar keltiring.
2. Regulyar sirt ta’rifini yozing.
3. Silliq sirt ta’rifini yozing.
4. Silliq sirt haqidagi teoremani yozing.
5. Silliq sirt haqidagi teoremani isbotlang.

IV. AMALIY MAShG‘ULOTLARINING MAZMUNI

1 – Amaliyot. Chiziqli fazo.

Reja:

1. Chiziqli fazo. Chiziqli fazo o‘lchami.
2. Affin fazo. Affin koordinatalar sistemasi.
3. Affin almashtirishlar va tekisliklari.
4. Bichiziqli forma.

Tayanch iboralar: Sirt ustidagi chiziqning egriligi, normal kesim, normal kesimning egriligi, Mene formulasi, egrilik (Dyupen) indikatrisasi, indikatrisa tenglamasi, sirtning elliptik nuqta, sirtning giperbolik nuqta, sirtning parabolik nuqta, qo‘shma yo‘nalishlar, bosh yo‘nalishlar, bosh egriliklar.

1. O‘z ustida berilgan har qanday P maydon 1 o‘lchamli fazodir, chunki noldan farqli $x \in P$ vektor va $\forall y \in P$ lar uchun

$$\lambda_1 x + \lambda_2 y = 0$$

tenglikni qanoatlantiruvchi noldan farqli $\lambda_1, \lambda_2 \in P$ mavjud. Haqiqatan ham, agarda $\lambda_1 \neq 0$ bo‘lsa, u holda

$$\lambda_1 x = -\lambda_2 y$$

bo‘lib,

$$x = -\lambda_1^{-1} \cdot \lambda_2 y$$

hosil bo‘ladi. Shunday qilib, $\dim P = 1$.

2. C kompleks sonlar maydonini o‘z ustida qaralganda, u 1 o‘lchovli. Ammo uni R haqiqiy sonlar maydonida qaralsa, 2 o‘lchamli fazoni tashkil etadi, ya’ni $\dim_C C = 1$ va $\dim_R C = 2$ bo‘ladi. Bu yerda R ustida qaralganda $1, i$ chiziqli erkli va agarda C ustida qaralsa, i chiziqli erkli.

3. P maydon ustida berilgan P^n arifmetik fazo n o‘lchovli fazodir. Haqiqatan ham, u yerda bizga ma’lumki,

$$e_1=(1,0,\dots,0),$$
$$e_2=(0,1,\dots,0),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$e_n=(0,0,\dots,1)$$

ort vektorlar chiziqli bog‘lanmagan bo‘lib, ixtiyoriy $n+1$ vektorlari chiziqli bog‘liq bo‘ladi, chunki $\forall\alpha=(a_1,a_2,\dots,a_n)\in P^n$ uchun

$$\alpha=a_1e_1+a_2e_2+\dots+a_ne_n$$

tenglik o‘rinlidir va demak

$$\alpha,\ e_1,e_2,\dots,e_n$$

$n+1$ ta vektorlari chiziqli bog‘langandir va demak $\dim_P P^n=n$ bo‘ladi.

4. $P_n[x]$ fazo $n+1$ o‘lchovlidir, chunki bu yerda $1,\ x,\ x^2,\ \dots.,\ x^n$ vektorlar chiziqli erkli bo‘lib, $\forall f(x)\in P_n[x]$ uchun

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n,\quad a_i\in P,\ i=\overline{1,n}$$

bo‘lganligi tufayli $f(x),\ 1,\ x,x^2,\dots,x^n$ $n+2$ ta vektorlari chiziqli bog‘langan va demak $\dim_P P_n[x]=n+1$ bo‘ladi.

5. $M_{m,n}(P)$ matrisalar fazosi P maydon ustida mn o‘lchovli fazo bo‘ladi, chunki $M_{m,n}(P)$ da

$$e_{11}=\begin{pmatrix}1&0&\dots&0\\0&0&\dots&0\\\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&\dots&0\end{pmatrix},\ e_{12}=\begin{pmatrix}0&1&\dots&0\\0&0&\dots&0\\\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&\dots&0\end{pmatrix},\dots,e_{mn}=\begin{pmatrix}0&0&\dots&0\\0&0&\dots&0\\\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&\dots&1\end{pmatrix}$$

mn ta matrisalari chiziqli erkli bo‘lib, $\forall f\in M_{m,n}(P)$ uchun

$$A=a_{11}e_{11}+a_{12}e_{12}+\dots+a_{mn}e_{mn},\quad a_{ij}\in P,\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}$$

va demak unda $mn+1$ vektorlari chiziqli bog‘langandir, ya’ni bundan esa

$$\dim_P M_{m,n}(P) = mn$$

ekanligi kelib chiqadi.

Xususan $M_m(P)$ satrlar fazosi n o‘lchamli va M_{m1} ustunlar fazosi m o‘lchamlidirlar.

Ikkinchi misoldan ko‘rinib turibdiki, V abel gruppasini har xil maydonlar ustida ko‘rib har xil fazolar hosil qilish mumkin, balki har xil o‘lchovli fazolar ham hosil bo‘lar ekan.

2– Amaliyot. Yevklid fazosi.

Reja:

1. Yevklid fazosi.
2. Yevklid fazosida chiziq va sirtlar.

Tayanch iboralar: Sirt ustidagi chiziqning egriligi, normal kesim, normal kesimning egriligi, Mene formulasi, egrilik (Dyupen) indikatrisasi, indikatrisa tenglamasi, sirtning elliptik nuqta, sirtning giperbolik nuqta, sirtning parabolik nuqta, qo‘shma yo‘nalishlar, bosh yo‘nalishlar, bosh egriliklar.

1. Yevklid fazosi deganda nimani tushunasiz?
2. Koshi tengsizligini isbotlang.
3. Ochiq qism to‘plamni tushuntirib bering?
4. Elementar chiziqning ta’rifi.
5. Oddiy chiziqning ta’rifi.
6. Regulyar chiziqning ta’rifi.
7. Qanday chiziqqa silliq chiziq deb ataladi ?
8. Ye_3 fazoda chiziqning parametrik tenglam
9. Yevklid fazosi deganda nimani tushunasiz?
10. Koshi tengsizligini isbotlang.
11. Ochiq qism to‘plamni tushuntirib bering?

12. Elementar chiziqning ta’rifi.
13. Oddiy chiziqning ta’rifi.
14. Regulyar chiziqning ta’rifi.
15. Qanday chiziqqa silliq chiziq deb ataladi ?
16. Ye_3 fazoda chiziqning parametrik tenglamalari.
17. Yevklid fazosida chiziqning vektor tenglamasi.
18. Regulyar chiziq haqidagi teorema.
19. Ye_3 fazoda chiziqning oshkormas tenglamalari.
20. Tekis chiziqning ta’rifi.
21. Tekis chiziqning parametrik tenglamalari.
22. Tekis chiziqning oshkormas tenglamasi.
23. Tekis chiziqning oshkor tenglamasi.
24. Tekis chiziqning vektor tenglamasi. . Sirtning birinchi kvadratik formasini yozing.
25. Sirt birinchi kvadratik formasining koeffisentlarini topish formulalarini yozing.
26. Sirtning ikkinchi kvadratik formasini yozing.
27. Sirt ikkinchi kvadratik formasining koeffisentlarini topish formulalarini yozing.
28. Sirt to‘la egriligining ta’rifini yozing.
29. Sirtning gauss egriligini hisoblash formulasini yozing.
30. Gauss teoremasini yozing.
31. Gauss teoremasini isbotlang. Sirtni egishning ta’rifini yozing.
32. Sirtni egishga misollar keltiring.
33. Sirt ustidagi chiziq yoyining uzunligini hisoblash formulasini yozing.
34. Sirtni egish haqidagi teoremani yozing.
35. Sirtni egish haqidagi teoremani isbotlang.
36. Sirt ustidagi ikki chiziq orasidagi burchakni topish formulasini yozing.
37. Sirt ustidagi sohaning yuzini topish formulasini yozing.
38. Sirtning to‘la egriligini hisoblash formulasini yozing.

39. Elementar chiziqning ta’rifi. Oddiy chiziqning ta’rifi.
40. Regulyar chiziqning ta’rifi.
41. Qanday chiziqqa silliq chiziq deb ataladi ?
42. Ye_3 fazoda chiziqning parametrik tenglamalari.
43. Yevklid fazosida chiziqning vektor tenglamasi.
44. Regulyar chiziq haqidagi teorema.
45. Ye_3 fazoda chiziqning oshkormas tenglamalari.
46. Tekis chiziqning ta’rifi.
47. Tekis chiziqning parametrik tenglamalari.
48. Tekis chiziqning oshkormas tenglamasi.
49. Tekis chiziqning oshkor tenglamasi.
50. Tekis chiziqning vektor tenglamasi.
51. . Sohaning ta’rifini yozing.
52. . Elementar sirtning ta’rifini yozing.
53. Oddiy sirtning ta’rifini yozing.
54. Sirtning parametrik tenglamalarini yozing.
55. Sirtning gauss koordinatalari qanday yoziladi ?
56. Sirtning vektor tenglamasini yozing. Sirt ichki geometriyasining ta’rifini yozing.
57. Sirt ustidagi chiziq yoyining uzunligini hisoblash formulasini yozing.
58. Sirt ustidagi chiziqlar orasidagi burchakni topish formulasini yozing.
59. Sirt ustidagi sohaning yuzini topish formulasini yozin.
60. u chiziqlarning ta’rifini yozing.
61. u chiziqlarning tenglamasini yozing.
62. v chiziqlarning ta’rifini yozing.
63. v chiziqlarning tenglamasini yozing.
64. Koordinat chiziqlari deb qanday chiziqlarga aytiladi?
65. Koordinat to‘rining ta’rifini yozing.
66. Muntazam to‘r ta’rifini yozing.
67. Regulyar sirt nuqtalarida va urinma vektorlar qanday joylashadi.

68. Sirt ichki geometriyasi ob’ektlariga misollar keltiring.
69. Regulyar sirt ta’rifini yozing.
70. Silliq sirt ta’rifini yozing.
71. Silliq sirt haqidagi teoremani yozing.
72. Silliq sirt haqidagi teoremani isbotlang.
73. Sirtning oshkor tenglamasini yozing.

3–Amaliyot. Yevklid fazosida chiziq va sirtlar.

Reja:

1. Sirt differensial geometriyasi.
2. Sirt ichki geometriyasi.
3. Sirt tashqi geometriyasi.

Tayanch iboralar: Sirt ustidagi chiziqning egriligi, normal kesim, normal kesimning egriligi, Mene formulasi, egrilik (Dyupen) indikatrisasi, indikatrisa tenglamasi, sirtning elliptik nuqta, sirtning giperbolik nuqta, sirtning parabolik nuqta, qo‘shma yo‘nalishlar, bosh yo‘nalishlar, bosh egriliklar.

1. Elementar chiziqning ta’rifi.
2. Oddiy chiziqning ta’rifi.
3. Regulyar chiziqning ta’rifi.
4. Qanday chiziqqa silliq chiziq deb ataladi ?
5. Ye_3 fazoda chiziqning parametrik tenglamalari.
6. Yevklid fazosida chiziqning vektor tenglamasi.
7. Regulyar chiziq haqidagi teorema.
8. Ye_3 fazoda chiziqning oshkormas tenglamalari.
9. Tekis chiziqning ta’rifi.
10. Tekis chiziqning parametrik tenglamalari.
11. Tekis chiziqning oshkormas tenglamasi.
12. Tekis chiziqning oshkor tenglamasi.

13. Tekis chiziqning vektor tenglamasi.
14. Sirt egrilik indikatrisasining ta’rifini yozing.
15. Egrilik indikatrisasi ba’zan nima deb ataladi ?
16. Egrilik indikatrisa tenglamasini yozing.
17. Egrilik indikatrisa tenglamasini keltirib chiqaring.
18. Sirtning elliptik nuqtasi deb, qanday nuqtaga aytiladi ?
19. Sirtning giperbolik nuqtasi deb, qanday nuqtaga aytiladi ?
20. Sirtning parabolik nuqtasi deb, qanday nuqtaga aytiladi
21. Chiziq egriligining ta’rifini yozing.
22. Chiziq vektor tenglamasi bilan berilganda, egrilikni hisoblovchi formulani yozing.
23. Chiziq tabiiy parametrli vektor tenglamasi bilan berilganda egriligini hisoblash formulasini yozing.
24. Chiziq bosh normalining ta’rifini yozing.
25. Chiziq bosh normalining birlik vektorini yozing.
26. Sirt ustidagi chiziq egriligini topish formulasini yozing.
27. Sirt normal kesimining ta’rifini yozing.
28. Sirt normal kesimining egriligini hisoblash formulasini yozing.
29. Mene formulasini yozing.
30. Sirtning birinchi va ikkinchi kvadratik formalari bilan sirt normal kesim egriligi orasidagi bog‘lanishni yozing. Chiziq egriligining ta’rifini yozing.
31. Chiziq vektor tenglamasi bilan berilganda, egrilikni hisoblovchi formulani yozing.
32. Chiziq tabiiy parametrli vektor tenglamasi bilan berilganda egriligini hisoblash formulasini yozing.
33. Chiziq bosh normalining ta’rifini yozing.
34. Chiziq bosh normalining birlik vektorini yozing.
35. Sirt ustidagi chiziq egriligini topish formulasini yozing.
36. Sirt normal kesimining ta’rifini yozing.

37. Sirt normal kesimining egriligini hisoblash formulasini yozing.
38. Mene formulasini yozing.
39. Sirtning birinchi va ikkinchi kvadratik formalari bilan sirt normal kesim egriligi orasidagi bog‘lanishni yozing. Sirt birinchi kvadratik formasining ta’rifini yozing.
40. Sirt birinchi kvadratik formasi yana nima deb ataladi ?
41. Sirtning birinchi kvadratik formasini keltirib chiqaring.
42. Sirt birinchi kvadratik formasining koeffisentlari deb nimaga aytiladi ?
43. Sirt birinchi kvadratik formasining koeffisentlari qanday qiymatlarga teng bo‘lashi mumkin ?
44. Sirtning birinchi kvadratik formasi qanday qiymatlarga teng bo‘lishi mumkin ?
45. Sirt vektor tenglamasi bilan berilganda birinchi kvadratik forma koeffitsiyentlarini topish formulasini yozing.
46. Sirt parametrik tenglamalari bilan berilganda birinchi kvadratik forma koeffisentlarini topish formulasini yozing.
47. Sirt oshkor tenglamasi bilan berilganda birinchi kvadratik forma koeffisentlarini topish formulasini yozing. Sirt ustidagi chiziqning vektor tenglamasini yozing.
48. Sirt ustidagi chiziqning vektor tenglamasini keltirib chiqaring.
49. Sirt ustidagi chiziqning parametrik tenglamalarini yozing.
50. Sirt ustidagi chiziqning egri chiziqli koordinatalarga nisbatan oshkormas tenglamasini yozing.
51. Sirt ustidagi chiziqning egri chiziqli koordinatalarga nisbatan oshkor tenglamasini yozing.
52. u chiziqning tenglamasini yozing.
53. v chiziqning tenglamasini yozing.
54. Sirt ustidagi chiziqning yo‘nalishi qanday aniqlanadi ?
55. Loksodromning ta’rifini yozing.
56. Loksodromning differensial tenglamasini yozing.

57. Loksodromning oshkormas tenglamasini yozing.

58. Loksodromning oshkormas tenglamasini keltirib chiqaring.

4 – Amaliyot. Psevdoyevklid fazo.

Reja:

1. Psevdoyevklid fazo. Sferik fazo.
2. Riman geometriyasi. Giperbolik fazo.
3. Yarim Yevklid fazolar. Yarim giperbolik fazolar.

Tayanch iboralar: Sirt ustidagi chiziqning egriligi, normal kesim, normal kesimning egriligi, Mene formulasi, egrilik (Dyupen) indikatrisasi, indikatrisa tenglamasi, sirtning elliptik nuqta, sirtning giperbolik nuqta, sirtning parabolik nuqta, qo‘shma yo‘nalishlar, bosh yo‘nalishlar, bosh egriliklar.

37 – misol: R^n fazo $n-$ o‘lchamli ko‘pxillikdir. R^n dagi har kanday ochiq to‘plam ham $n-$ o‘lchamli ko‘pxillikdir.

38 – misol: $S^n \subset R^{n+1}$ sfera n - o‘lchamli ko‘pxillikdir. S^n R^{n+1} ning qism fazosi sifatida sanoqli bazaga ega bo‘lgan Xaucdorf fazosidir.

$a \in S^n$ ga $a^1 \in S^n$ diametral qarama-qarshi nuqta bo‘lsin. $U_a = S^n \setminus \{a^1\}$ atrof S^n ning a nuqtadagi urinma tekislik R_a^n ga gomeomorfdir. Gomeomorfizm a' markazdan proeksiyalash orqali o‘rnatiladi.

39 – misol: Proektiv fazo P^n $n-$o‘lchamli topologik ko‘pxillikdir. P^n ning har bir nuqtasi $S^n \subset R^{n+1}$ fazoning yelimlangan (ayniylashtirilgan) nuqtalar jufti bo‘lib, R^n ga gomeomorf atrofga ega. Bu atroflar S^n dagi markazi mos nuqtalarda bo‘lgan diametral qarama-qarshi ochiq sharlar juftligidir.

40 – misol: T^2 tor ikki o‘lchamli ko‘pxillikdir.

n- o‘lchamli ko‘pxillik ta’rifidan uning har bir nuqtasi uchun chiziqli bog‘lanishli atrofining mavjudligi kelib chiqadi. 1 – bobdagi 33 – teoremaga ko‘ra ko‘pxillikning bog‘lanishli ekanligidan uning chiziqli bog‘lanishli bo‘lishi kelib chiqadi.

n- o‘lchamli ko‘pxillik har bir bog‘lanishli komponentasining o‘zi n- o‘lchamli ko‘pxillikdir.

Biz qo‘yida bog‘lanishli ko‘pxilliklarni qaraymiz. Yakka nuqtalar to‘plami nol o‘lchamli bog‘lanishli ko‘pxillik bo‘lishini eslatib utamiz. Bir o‘lchamli kompakt ko‘pxilliklarni qo‘yidagi teorema asosida klassifikasiyalash mumkin. Kubda triangulyasiya qirralar va yoqlarning diagonallari orqali berilgan. Kubning biror qirrasidagi yo‘nalmaning berilishi o‘zaro kelishilgan uchburchaklar uchun birdan bir yo‘nalmaning aniqlashishini ko‘rsating.

E^3 da barcha yoqlari oltiburchaklardan iborat qabariq ko‘pyoqning mavjud bo‘lmasligini isbotlang.

Yechish. Faraz qilaylik shunday ko‘pyoq mavjud bo‘lsinki, $\alpha_0 = 2+\alpha_2, \ \ \alpha_1 = 3\alpha_2$ bajarilsin. Ko‘pyoqning har bir uchidan uchtadan kam bo‘lmagan qirralar o‘tadi. Shuning uchun $\alpha_0 \le \dfrac{\alpha_1}{3} = \alpha_2 \quad 2+2\alpha_2 \le \alpha_2$ tengsizlik bo‘lishi mumkin emas.

Nol jinsli ko‘pyoqda barcha ko‘pyoqli burchaklar to‘rttadan ko‘p bo‘lmagan yoqlarni o‘z ichiga oladi, hamda yoqlardan hech qaysi birida to‘rttadan ortiq bo‘lmagan uchlar yotsin. Uchyoqli burchaklar va uchburchakli yoqlar sonining yig‘indisi 8 ga teng bo‘lishini isbotlang.

Nol jinsli har qanday ko‘pyoqda α_0 - uchlar soni, α_1 -qirralar soni va α_2 - yoqlar soni bo‘lsa, qo‘yidagi tengsizliklarning o‘rinliligini isbotlansin.

$$\alpha_1 + 6 \le 3\alpha_0 \le 2\alpha_1, \quad \alpha_1 + 6 \le 3\alpha_2 \le 2\alpha_1, \quad \alpha_0 + 4 \le 2\alpha_2 \le 4\alpha_0 - 8, \quad \alpha_2 + 4 \le 2\alpha_0 \le 4\alpha_2 - 8.$$

Qog‘oz varag‘idan to‘g‘ri burchakli yo‘lak qirqing. Yo‘lakka o‘rta chiziq o‘tkazing. Yo‘lak chetlarini yelimlab silindr yasang. Silindr yo‘nalmalimi? Silindrni o‘rta chiziq bo‘ylab qirqilsa nima hosil bo‘ladi?

To‘g‘ri burchakli yo‘lakda, silindrda va Myobius yaprog‘ida chetlarini aniqlang. U necha qismdan iborat?

Qog‘ozdan kvadrat qirqing. Uni diagonal bo‘yicha buklab chetini yopishtiring. Sfera (kub)ga gomeomorf sirtning modeli kelib chiqdi. Ko‘pxillik triangulyasiyasini yasang.

5 – Amaliyot. Ikkinchi tartibli sirtlar.

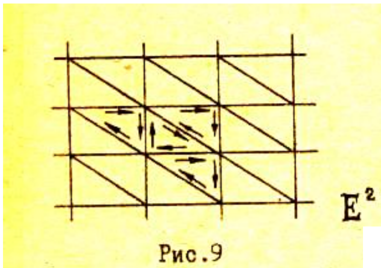
Reja:

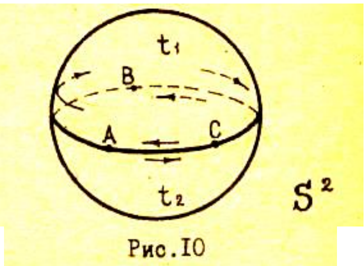
1. Ikkinchi tartibli sirtlar.
2. Ikkinchi tartibli sirt invariantlari

Tayanch iboralar: Sirt ustidagi chiziqning egriligi, normal kesim, normal kesimning egriligi, Mene formulasi, egrilik (Dyupen) indikatrisasi, indikatrisa tenglamasi, sirtning elliptik nuqta, sirtning giperbolik nuqta, sirtning parabolik nuqta, qo‘shma yo‘nalishlar, bosh yo‘nalishlar, bosh egriliklar.

1. Sferaning ta’rifini yozing.
2. Sferaning parametrik tenglamalarini yozing.
3. Sferaning parametrik tenglamalarini keltirib chiqaring.
4. Sferaning vektor tenglamasini yozing.
5. Sferaning oshkormas tenglamasini yozing

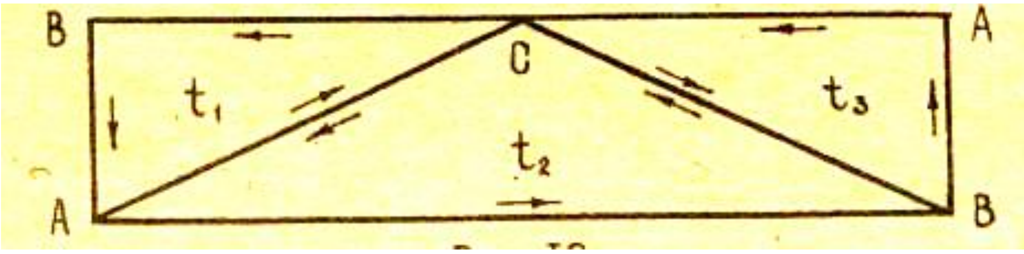
51-misol. Yevklid tekisligi Ye^2 va S^2 sfera yo‘nalmali. Mos triangulyatsiyalar va uchburchaklarning yo‘nalmasi 14-15 shakllarda tasvirlangan S^2 sfera ikkita t_1 va t_2 topologik uchburchaklarga ajratilgan bo‘lib, ulardan biri yuqori yarim sfera, ikkinchi quyi yarim sferadir.





14-shakl. 15-shakl.

52-misol. «Myobius yaprog‘i» yo‘nalmasiz sirtdir. Buni izohlash uchun M^2 ni uchta t_1 , t_2 , t_3 uchburchaklarga ajratamiz (16-shakl). (t_1 , t_2) va (t_2 , t_3) juftliklaridagi yo‘nalma kelishilgan, lekin (t_1 , t_3) juftliklarda AV tomonga nisbatan kelishilganlik yo‘q (umumiy tomon AV bir xil yo‘nalmali)



16-shakl.

44-misolda «Myobius yaprog‘i» qanday hosil qilinishi izohlandi va shakli keltirildi. U qo‘yidagi xossalarga ega:

1) «Myobius yaprog‘i» ning cheti aylanaga gemeomorf egri chiziqdan iborat.
2) «Myobius yaprog‘i» o‘rta chiziq bo‘yicha qirqilsa, u ikki bo‘lakka ajralmaydi.

«Myobius yaprog‘i» bir tomoni sirtdir, chunki mo‘y qalamni uzmay o‘rta chiziq bo‘ylab bo‘yasak, sirtning ichi va tashqi qismi bo‘yalgan bo‘ladi Kubda triangulyatsiya qirralar va yoqlarning diagonallari orqali berilgan. Kubning biror qirrasidagi yo‘nalmaning berilishi o‘zaro kelishilgan uchburchaklar uchun birdan bir yo‘nalmaning aniqlashishini ko‘rsating.

E^3 da barcha yoqlari oltiburchaklardan iborat qabariq ko‘pyoqning mavjud bo‘lmasligini isbotlang.

Yechish. Faraz qilaylik shunday ko‘pyoq mavjud bo‘lsinki, $\alpha_0 = 2+\alpha_2,\ \ \alpha_1 = 3\alpha_2$ bajarilsin. Ko‘pyoqning har bir uchidan uchtadan kam bo‘lmagan qirralar o‘tadi. Shuning uchun $\alpha_0 \le \frac{\alpha_1}{3} = \alpha_2 \quad 2+2\alpha_2 \le \alpha_2$ tengsizlik bo‘lishi mumkin emas.

Nol jinsli ko‘pyoqda barcha ko‘pyoqli burchaklar to‘rttadan ko‘p bo‘lmagan yoqlarni o‘z ichiga oladi, hamda yoqlardan hech qaysi birida to‘rttadan ortiq bo‘lmagan uchlar yotsin. Uchyoqli burchaklar va uchburchakli yoqlar sonining yig‘indisi 8 ga teng bo‘lishini isbotlang.

Nol jinsli har qanday ko‘pyoqda α_0 - uchlar soni, α_1-qirralar soni va α_2- yoqlar soni bo‘lsa, qo‘yidagi tengsizliklarning o‘rinliligini isbotlansin.

$\alpha_1 + 6 \le 3\alpha_0 \le 2\alpha_1, \quad \alpha_1 + 6 \le 3\alpha_2 \le 2\alpha_1, \quad \alpha_0 + 4 \le 2\alpha_2 \le 4\alpha_0 - 8, \quad \alpha_2 + 4 \le 2\alpha_0 \le 4\alpha_2 - 8.$

Qog‘oz varag‘idan to‘g‘ri burchakli yo‘lak qirqing. Yo‘lakka o‘rta chiziq o‘tkazing. Yo‘lak chetlarini yelimlab silindr yasang. Silindr yo‘nalmalimi?

Silindrni o‘rta chiziq bo‘ylab qirqilsa nima hosil bo‘ladi?

To‘g‘ri burchakli yo‘lakda, silindrda va Myobius yaprog‘ida chetlarini aniqlang. U necha qismdan iborat?

Qog‘ozdan kvadrat qirqing. Uni diagonal bo‘yicha buklab chetini yopishtiring. Sfera (kub)ga gomeomorf sirtning modeli kelib chiqdi. Ko‘pxillik triangulyatsiyasini yasang.

6– Amaliyot. Ko‘pxilliklar.

Reja:

1. Ko‘pxilliklar. Ko‘pxillik turlari.
2. Ko‘pxillik geometriyasi.

Tayanch iboralar: Sirt ustidagi chiziqning egriligi, normal kesim, normal kesimning egriligi, Mene formulasi, egrilik (Dyupen) indikatrisasi, indikatrisa tenglamasi, sirtning elliptik nuqta, sirtning giperbolik nuqta, sirtning parabolik nuqta, qo‘shma yo‘nalishlar, bosh yo‘nalishlar, bosh egriliklar.

1. Affin fazo A^n, yevklid fazosi E^n ning n- o‘lchamli ko‘pxillik bo‘lishini ko‘rsating.
2. Ko‘pxillik bog‘lanishli bo‘lsa, uning chiziqli bog‘lanishli bo‘lishini isbotlang.
3. Bog‘lanishli bo‘lmagan nol o‘lchamli ko‘pxillikka misol keltiring.
4. Kompakt va kompakt bo‘lmagan ko‘pxilliklarga misollar keltiring.
5. E^2 tekislikda $M=\{x(x_{1,}x_2)\in E^2 / x_2\geq 0, x_1(x_1^2-x_2^3)=0\}$ qism fazo lokal Yevklid fazosi bo‘lmay $M\setminus\{0\}$ va $N=\{x\in M / x_1\geq 0\}$ qism fazolar lokal Yevklid fazosi ekanini ko‘rsating.
6. $q\in R^1$ nuqtani qaraylik $\{(R^1x\{0\})\cup(R^1x\{1\})\}$ topologik yig‘indida $(P,0)$ va $(P,1)$ nuqtalar $P=P\neq 2$ shart bajarilganda ayniylashtirilgan (yelimlangan) bo‘lsin. Ushbu fazo Xausdorf fazosi bo‘lmay lokal Yevklid fazosi bo‘lishini ko‘rsating.
7. Qo‘yidagi X fazo ko‘pxillik emasligini ko‘rsating.

8. a) $X=(R^1\cup R^2)/_T$, bunda $xTy, x=y, y<0$

b) $X=[0,3]\subset R^1$. Barcha nuqta atroflari (1 nuqta bundan istisno) R^1 dagi atroflar sistemasi orqali induksiyalangan. 1- nuqta esa $U=]0,1]\cup]2,b[$ atrofga ega, bunda $a<1$, $b>2$

v) Trivial topologiya bilan ta'minlangan X

g) R^2 dagi ikkita koordinat o'qlarining birlashmasi.

9. Qo'yidagi $A_i\subset R^1$ qism fazolar chetli ko'pxillik bo'lishi mumkinmi?

a) $A_1=\{x(x_1,x_2)/0\le x_1<1\}$

b) $A_2=\{x(x_1,x_2)/0\le x_1\le 1\}$

v) $A_3=\{x(x_1,x_2)/0<x_1<1, 0\le x_2\le 1\}$

g) $A_4=\{x(x_1,x_2)/x_1=0, x_2=0\}$

d) $A_5=\{x(x_1,x_2)/0<x_1<1, 0<x_2<1\}$

ye) $A_6=A_5\cup\{(\frac{1}{2},0)\}$

j) $A_7=\{x(x_1,x_2)/0\le x_2<1, 0<x_1<1\}$

10. Qaysi topologik ko'pxillik μ^n va ekvivalentlik munosabati T uchun n dan kichiq o'lchamli ko'pxillik bo'la oladi? Misol keltiring.

11. S^2 ning katakli ajratmalarini tekshiring:

12. Bitta nol o'lchovli va bitta ikki o'lchovli;

13. b) Ikkita ochiq sferalardan, nuqtadan va ekvatorial tekislikda bitta bir o'lchovli kataklardan iborat bo'lsin. $X(S^2)=?$

14. Qo'yidagilar uchun katakli ajratishlarni yasang va Eyler xarakteristikasini toping.

15. E^3 dagi tor uchun;

16. P^k proektiv tekislik uchun;

17. D^n-yopiq shar uchun;

18. I^n-kub va simpleks uchun;

19. Myobius yaprog‘i uchun;

20. S^2 sferadan ochiq doiraga golmemorf kesishmaydigan sohalarni chetlashtirish orqali hosil bo‘lgan ko‘pxilliklar (r ”tuynuk”li sferalar) uchun;

21. “dasta”lar uchun;

22. r dastali sferalar uchun;

23. “Kleyn butilkasi” uchun.

24. $f : M^2 \to N^2$ M^2 ko‘pxillikning N^2 ko‘pxillikka golmemorfizm bo‘lsin.

25. M^2 da triangulyatsiyaning berilishi N^2 da triangulyatsiyaning yuzaga keltirishini ko‘rsating. Agar $f(M^2) \neq N^2$ bo‘lsa, N^2 da triangulyasiya sodir bo‘ladimi?

26. ABCD tetraedrning bir yog‘i (ABC)da ko‘rsatilgan orientatsiya (yo‘nalma) boshqa yoqlardagi birdan bir kelishilgan yo‘nalmali aniqlashi ko‘rsatilsin.

27. Kubda triangulyasiya qirralar va yoqlarning diagonallari orqali berilgan. Kubning biror qirrasidagi yo‘nalmaning berilishi o‘zaro kelishilgan uchburchaklar uchun birdan bir yo‘nalmaning aniqlashishini ko‘rsating.

28. E^3da barcha yoqlari oltiburchaklardan iborat qabariq ko‘pyoqning mavjud bo‘lmasligini isbotlang.

29. Yechish. Faraz qilaylik shunday ko‘pyoq mavjud bo‘lsinki, $\alpha_0 = 2 + \alpha_2$, $\alpha_1 = 3\alpha_2$ bajarilsin. Ko‘pyoqning har bir uchidan uchtadan kam bo‘lmagan qirralar o‘tadi. Shuning uchun $\alpha_0 \leq \frac{\alpha_1}{3} = \alpha_2$ $2 + 2\alpha_2 \leq \alpha_2$ tengsizlik bo‘lishi mumkin emas.

30. Nol jinsli ko‘pyoqda barcha ko‘pyoqli burchaklar to‘rttadan ko‘p bo‘lmagan yoqlarni o‘z ichiga oladi, hamda yoqlardan hech qaysi birida to‘rttadan ortiq bo‘lmagan uchlar yotsin. Uchyoqli burchaklar va uchburchakli yoqlar sonining yig‘indisi 8 ga teng bo‘lishini isbotlang.

31. Nol jinsli har qanday ko‘pyoqda α_0 - uchlar soni, α_1 -qirralar soni va α_2 - yoqlar soni bo‘lsa, qo‘yidagi tengsizliklarning o‘rinliligini isbotlansin.

32. $\alpha_1 + 6 \leq 3\alpha_0 \leq 2\alpha_1$, $\alpha_1 + 6 \leq 3\alpha_2 \leq 2\alpha_1$, $\alpha_0 + 4 \leq 2\alpha_2 \leq 4\alpha_0 - 8$, $\alpha_2 + 4 \leq 2\alpha_0 \leq 4\alpha_2 - 8$.

33. Qog‘oz varag‘idan to‘g‘ri burchakli yo‘lak qirqing. Yo‘lakka o‘rta chiziq o‘tkazing. Yo‘lak chetlarini yelimlab silindr yasang. Silindr yo‘nalmalimi?silindrni o‘rta chiziq bo‘ylab qirqilsa nima hosil bo‘ladi?

34. To‘g‘ri burchakli yo‘lakda, silindrda va Myobius yaprog‘ida chetlarini aniqlang. U necha qismdan iborat?

35. Qog‘ozdan kvadrat qirqing. Uni diagonal bo‘yicha buklab chetini yopishtiring. Sfera (kub)ga gomeomorf sirtning modeli kelib chiqdi. Ko‘pxillik triangulyatsiyasini yasang. Ko‘pxillik jinsini aniqlang. Ko‘pxillik yo‘nalmalik bo‘ldimi?

V. GLOSSARIY

Termin	O‘zbek tilidagi sharhi
Argument	erkli o‘zgaruvchi
Eyler	(Eyler Leonhard, 1707 - 1783) fransuz matematiki Peterburg FA a’zosi.
Koshi	(Avgustin Lavis, 1789 - 1857) fransuz matematiki
Umumiy yechim	tenglama yechimi oshkor ko‘rinishda

Belgi	Atalishi	Kim kiritgan?	Qachon kiritgan?
+	qo‘shish	Ya. Vidman	XV asr oxiri
-	qo‘shish	Ya. Vidman	XV asr oxiri
*	ko‘paytirsh	Outred	1631
·	ko‘paytirish	G. Leybnis	1698
:	bo‘lish	G. Leybnis	1684
a^n	daraja	R. Dekart	1637
$\surd$	ildiz	X.Rudolf, A.Jiror	1525, 1629
$\log_a x$	logarifm	I.Kepler	1624
$\sin x$	sinus	B.Kavaleri	1632
$\cos x$	kosinus	A.Eyler	1748
tgx	tangens	A.Eyler	1753
$\arcsin x$, $arctgx$	Arksinus, arktangens	J.Lagranj	1772
$dx, d^2x, \ldots$	Differensial	G. Leybnis	1675
$\int f(x)dx$	Integral	G.Leybnis	1675
$y'(x)$	Xosila	G.Leybnis	1675
$\int_a^b f(x)dx$	Aniq integral	J.Fure	1819-1822

$\sum$	Yig‘indi	L.Eyler	1755
$k!$	Faktorial	X.Kramp	1803
lim	Limit	U.Gamilton	1853
$f(x)$	Funksiya	I.Bernulli, L.Eyler	1718, 1734
i	Kompleks son	L.Eyler	1777
x, y, z	O‘zgaruvchilar	R.Dekart	1637
$\rightarrow$	Vektor	O.Koshi	1853
$=$	Tenglik	R.Rekord	1557
$><$	Katta, kichik	T.Garriot	1631
$\equiv$	Tenglik	K.Gauss	1801
$\parallel$	Parallellik	U.Outred	1677
$\perp$	Pperpendikulyarlik	P.Erigon	1634
Arab raqamlari	Matematik belgilar	Hind matematiklari	V asr
$\lvert \square \rvert$	Modul	K.Veershtrass	
Rim raqamlari	Matematik belgilar	Rus matematiklari	Eramizdan V asr avval
$\leq \geq$	Noqat’iy tengsizliklar	P.Buge	1734
[ ]	Kvadrat qavs	R.Bombelli	1550
( )	Qavs	N.Tartalya	1556
{ }	Sistemali qavs	F.Viet	1593
e	Natural logarifm asosi	L.Eyler	1736
$\equiv$	Tenglik belgisi	B.Riman	1857
$\cap$	Kesishma	Dj.Peano	1895

VI. ADABIYOTLAR RO‘YXATI

I. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining asarlari

1. Mirziyoev Sh.M. Buyuk kelajagimizni mard va olijanob xalqimiz bilan birga quramiz. – T.: “O‘zbekiston”, 2017. – 488 b.

2. Mirziyoev Sh.M. Milliy taraqqiyot yo‘limizni qat’iyat bilan davom ettirib, yangi bosqichga ko‘taramiz. 1-jild. – T.: “O‘zbekiston”, 2017. – 592 b.

3. Mirziyoev Sh.M. Xalqimizning roziligi bizning faoliyatimizga berilgan eng oliy bahodir. 2-jild. T.: “O‘zbekiston”, 2018. – 507 b.

4. Mirziyoev Sh.M. Niyati ulug‘ xalqning ishi ham ulug‘, hayoti yorug‘ va kelajagi farovon bo‘ladi. 3-jild.– T.: “O‘zbekiston”, 2019. – 400 b.

5. Mirziyoev Sh.M. Milliy tiklanishdan – milliy yuksalish sari. 4-jild.– T.: “O‘zbekiston”, 2020. – 400 b.

II. Normativ-huquqiy hujjatlar

6. O‘zbekiston Respublikasining Konstitutsiyasi. – T.: O‘zbekiston, 2018.

7. O‘zbekiston Respublikasining 2020 yil 23 sentyabrda qabul qilingan “Ta’lim to‘g‘risida”gi O‘RQ-637-sonli Qonuni.

8. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2012 yil 10 dekabrdagi “Chet tillarni o‘rganish tizimini yanada takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi PQ-1875-sonli qarori.

9. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2015 yil 12 iyun “Oliy ta’lim muasasalarining rahbar va pedagog kadrlarini qayta tayyorlash va malakasini oshirish tizimini yanada takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi PF-4732-sonli Farmoni.

10. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017 yil 7 fevral “O‘zbekiston Respublikasini yanada rivojlantirish bo‘yicha Harakatlar strategiyasi to‘g‘risida”gi 4947-sonli Farmoni.

11. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017 yil 20 aprel "Oliy ta’lim tizimini yanada rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi PQ-2909-sonli qarori.

12. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2018 yil 21 sentabr “2019-2021 yillarda O‘zbekiston Respublikasini innovasion rivojlantirish strategiyasini

tasdiqlash to‘g‘risida”gi PF-5544-sonli Farmoni.
13. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2019 yil 27 may “O‘zbekiston Respublikasida korrupsiyaga qarshi kurashish tizimini yanada takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi PF-5729-son Farmoni.
14. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2019 yil 17 iyun “2019-2023 yillarda Mirzo Ulug‘bek nomidagi O‘zbekiston Milliy universitetida talab yuqori bo‘lgan malakali kadrlar tayyorlash tizimini tubdan takomillashtirish va ilmiy salohiyatini rivojlantiri chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi PQ-4358-sonli Qarori.
15. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2019 yil 27 avgust “Oliy ta’lim muassasalari rahbar va pedagog kadrlarining uzluksiz malakasini oshirish tizimini joriy etish to‘g‘risida”gi PF-5789-sonli Farmoni.
16. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2019 yil 8 oktabr “O‘zbekiston Respublikasi oliy ta’lim tizimini 2030 yilgacha rivojlantirish konsepsiyasini tasdiqlash to‘g‘risida”gi PF-5847-sonli Farmoni.
17. O‘zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasining 2019 yil 23 sentabr “Oliy ta’lim muassasalari rahbar va pedagog kadrlarining malakasini oshirish tizimini yanada takomillashtirish bo‘yicha qo‘shimcha chora-tadbirlar to‘g‘risida”gi 797-sonli qarori.

III. Maxsus adabiyotlar

18. Avilova L.V., Bolotyuk V.A., Bolotyuk L.A. Analiticheskaya geometriya i lineynaya algebra// 2013. Izdanie: 1-e izd. 421 s.
19. Aleksandrov A.D., Nesvetaev N.Yu. Geometriya, M.: Nauka, 1990. – 672 s.
20. Matematik analiz./ Azlarov T., Mansurov H.: Universitet va ped. institutlar talabalari uchun darslik: 2 qismli. 1-q.— Qayta ishlangan va to‘ldirilgan 2-nashri.— T.: Uqituvchi, 1994.—416 b.
21. Dodajonov N., Yunusmetov R., Abdullaev T. Geometriya, 2 qism.
22. Narmanov A. Differensial geometriya.
23. Sobirov M.A., Yusupov A.Yo. Differensial geometriya kursi.
24. Ergashev B. Yevklid fazosida chiziqlar.
25. Ergashev B. Yevklid fazosida sirtlar.

26. Belko I.V. i dr. Sbornik zadach po differensialnoy geometrii.

IV. Internet saytlar

27. http://edu.uz – O‘zbekiston Respublikasi Oliy va o‘rta maxsus ta’lim vazirligi

28. http://lex.uz – O‘zbekiston Respublikasi Qonun hujjatlari ma’lumotlari milliy bazasi

29. http://bimm.uz – Oliy ta’lim tizimi pedagog va rahbar kadrlarini qayta tayyorlash va ularning malakasini oshirishni tashkil etish bosh ilmiy-metodik markazi

30. www.ams.mathscinet.org

31. www.ziyonet.uz – Ta’lim portali