E.Y. SAFAROV, D.N. RAXMONOV

MATEMATIK KARTOGRAFIYA

O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

MIRZO ULUG‘BEK NOMIDAGI
O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI

E.Y. SAFAROV, D.N. RAXMONOV

MATEMATIK KARTOGRAFIYA

Oliy ta’lim muassasalarining 5311500 – «Geodeziya, kartografiya va kadastr» bakalavriatura ta’lim yo‘nalishi bo‘yicha ta’lim olayotgan talabalari uchun o‘quv qo‘llanma

Cho‘lpon nomidagi nashriyot-matbaa ijodiy uyi
Toshkent – 2019

UO‘K 528
KBK 26.17
S 64

Taqrizchilar:

S.S. Sayyidqosimov – *Toshkent Davlat texnika universiteti professori,*
I.M. Musayev – *TIMI Geodeziya va geoinformatika kafedrasi mudiri, t.f.n., dotsent*

Mas'ul muharrir

A. Egamberdiyev – *Mirzo Ulug‘bek nomidagi O‘zMU dotsenti, g.f.n.*

Safarov E.Y., Raxmonov D.N.
S 64 Matematik kartografiya [Matn]: o‘quv qo‘llanma/ E.Y. Safarov, D.N. Raxmonov / Oliy va o‘rta maxsus ta'lim vazirligi. – T.: Cho‘lpon nomidagi NMIU, 2019. – 288 b.
ISBN 978-9943-5387-9-5

Ushbu o‘quv qo‘llanma oliy ta'lim muassasalarining 5311500 – "Geodeziya, kartografiya va kadastr" yo‘nalishi bo‘yicha ta'lim olayotgan talabalarga mo‘ljallangan bo‘lib, unda kartografik proyeksiyalarning umumiy nazariyasi, proyeksiyalar klassifikatsiyasi; ellipsoid sirtini sharda va tekislikda tasvirlash yo‘llari bayon qilingan. Konusli, azimutal, silindrik, psevdokonusli, psevdoazimutal va boshqa proyeksiyalar nazariyasi ko‘rib chiqilgan. Qo‘llanmada kartografik proyeksiyalarni izlash usullari hamda ilk marotaba matematik kartografiyada GIS-texnologiyalaridan foydalanish masalalari yoritilgan.

O‘quv qo‘llanmadan talabalar, magistrantlar, katta ilmiy xodim izlanuvchilar va umumiy o‘rta ta'lim muassasalarining o‘qituvchilari ham foydalanishlari mumkin.

UO‘K 528
KBK 26.17

ISBN 978-9943-5387-9-5

KIRISH

Kartalarni xalq xo'jaligining turli sohalarida ilmiy va amaliy tavsifdagi vazifalarni hal qilishda, axborotlar manbayi va yaxshi yo'l ko'rsatuvchi hamda ta'lim vositasi sifatida keng miqyosda foydalanilishi, kartalarni tuzishning davlat miqyosidagi muhim masala ekanligidan dalolat beradi.

Ko'plab holatlarda kartalardan foydalanishda ular orqali turli xil o'lchashlarni amalga oshirishni nazarda tutadi, buning natijasida ilmiy va ishlab chiqarish bilan bog'liq masalalarni hal qilishda talab qilingan muhim qonuniyatlar olinishi mumkin. O'lchashlarni bajarish kartalarning matematik asoslari bilan chambarchas bog'liqdir. Bu masalalarni yechish matematik kartografiya kursida o'rganiladi.

Hozirda respublikasining 9 ta oliy ta'lim muassasalarida 5311500 – "Geodeziya, kartografiya va kadastr" bakalavriatura yo'nalishi bo'yicha tahsil oladigan talabalar uchun ***"Matematik kartografiya"*** fani ayni paytda asosiy kurslardan biri hisoblanadi.

Matematik kartografiyaning o'rganish predmeti – kartalarni matematik asosini ishlab chiqishdir, matematik asosni loyihalash esa kartalarni tuzish jarayonining birinchi bosqichi hisoblanadi. Bu vazifani hal qilishda ma'lum aniqlikdagi matematik qonuniyatlardan foydalaniladi, kartaga olinayotgan yuza va tekislik koordinata nuqtalari o'rtasidagi o'zaro bog'liqlik o'rnatiladi, ya'ni u yoki bu kartografik proyeksiya tanlab olinadi va unga to'g'ri keladigan kartografik to'r (ko'pincha meridianlar va parallellar) tuzib chiqiladi, shu bilan bir qatorda, masshtablar, ularning qiymati, karta komponovkasining geometrik o'lchamlari, razgrafkasi va nomenklaturasi masalalari qarab chiqiladi.

Matematik kartografiyaning asosiy vazifalari quyidagilardan tashkil topadi:

– eng avvalo, nisbatan eng yaxshi kartografik proyeksiyalarni olish uchun matematik kartografiya nazariyasini rivojlantirish;

– turli xildagi kartografik proyeksiyalarni, ularning mazmun-mohiyati, o'zaro bog'liqligi va amaliyotda ulardan foydalanishning maqsadga muvofiqligi tadqiq qilinadi;

– mavjud kartografik proyeksiyalarni takomillashtirish hamda fan va ishlab chiqarish talablari asosida yangilarini, turli xildagi mavzuli va kompleks kartalarni yaratish uchun ishlab chiqish;

– yangi kartografik proyeksiyalarni izlab topish usullarini takomillashtirish;

– ko'p varaqli kartalarning matematik elementlarini (komponovkasi, razgrafkasi va nomenklaturasini) ishlab chiqish;

– kartografik proyeksiyalarning xususiyatlarini hisobga olgan holda, kartalar bo'yicha turli xildagi o'lchashlarni bajarish usullari va vositalarini rivojlantirish;

– kartalarni tuzishda hal qiladigan matematik xarakterdagi vazifalarni o'rganish va yechish;

– matematik kartografiyada avtomatlashtirish nazariyasi va metodlarini ishlab chiqish va boshqalar.

Yuqorida keltirilgan vazifalarni an'anaviy metodlar va vositalar hamda zamonaviy texnika va GIS texnologiyalari asosida hal etish haqidagi bilimlarni olish, kartografik proyeksiyalar obzori va geoinformatika haqidagi ma'lumotlarni kitob o'z ichiga oladi. Qo'llanma oxirida matematik kartografiyaning shakllanish tarixi, hozirgi holati va istiqbollari haqida ma'lumot berilgan.

Hozirgacha o'zbek tilida matematik kartografiyadan o'quv qo'llanma yoki darslik yaratilmagan. Kitobga mazkur ta'lim yo'nalishining yangi o'quv rejasi va fanni namunaviy o'quv dasturi asos qilib olindi. Ma'ruza va amaliy mashg'ulotlarda O'zbekistonda va boshqa yaqin va uzoq xorij mamlakatlarida nashr etilgan kartografik proyeksiyalardan keng foydalanildi, bu esa fanda amaliy topshiriqlarni o'z vaqtida bajarish, proyeksiyalar haqida bilimlarni puxta egallash uchun zamin bo'ladi. Ma'ruzalarning mavzuyi dasturda ko'rsatilgan hamma bilimlarni o'z ichiga qamrab olgan.

O'quv qo'llanma XV bobdan iborat.

Kitobni yozishda matematik kartografiyaga oid ko'pgina darsliklar va o'quv qo'llanmalaridan, ma'lumotnoma (spravochnik), ilmiy va xorijiy adabiyotlardan foydalanildi. Shu bilan birga mualliflar o‘zlarining mazkur fan sohasidagi ko‘p yillik ilmiy, ilmiy-uslubiy va pedagogik tajribalariga tayandilar.

Qo‘llanmani yaratishda mualliflar respublikamiz oliy ta’lim muassasalarida matematik kartografiya va kartografiya fanlaridan dars beradigan professor-o‘qituvchilar, soha ishlab chiqarish korxonalari yetakchi mutaxassislarining fikr va mulohazalarini ham e’tiborga oldilar.

Mualliflar qo’llanmani yozishda horijiy olimlarning matematik kartografiyaga oid noyob darslik va o’quv qo’llanmalaridan hamda o’zlarining ko’p yillik ilmiy, ilmiy-uslubiy va pedagogik tajribalariga tayandilar. Shu o’rinda, O’zbekistonda kartografiya sohasiga ixtisoslashgan yuqori malakali mutaxassislarni tayyorlashga o’zlarining katta hissalarini qo’shgan taniqli ustoz olim va olimalardan L.A.Vaxrameyeva, T.V.Vereshaka, A.S.Vasmut, Yu.S.Bilichlarning xizmatlarini alohida ta’kidlash joiz. Mualliflar ushbu taniqli ustozlarga talabalik yillarida bergan chuqur bilimlari, amaliy ko’nikmalari, ilmiy-amaliy maslahatlari uchun o’zlarining cheksiz minnatdorchiliklarini izhor etadilar.

I BOB
KARTOGRAFIK PROYEKSIYALARNING UMUMIY NAZARIYASI. TEKISLIKDA AYLANMA ELLIPSOIDNI TASVIRLASH

1-§. Tekislikda ellipsoidni (sferani) tasvirlash bo'yicha asosiy tushunchalar

Kartaga olinayotgan yuzalar (Yer, Oy, planetalar va ularning yo'ldoshlari) murakkab shaklga ega. Ularni tekislikda tavsirlash uchun tabiiy yuzadan matematik tekislikka o'tish kerak, ya'ni tabiiy yuza matematik tenglamalar bilan ifodalanishi zarur. Matematik kartografiyada kartaga olinayotgan yuza sifatida, odatda, sfera yoki aylanma ellipsoid qabul qilinadi, uning kichik o'qi Yerning aylanish o'qiga mos keladi, deb qabul qilinadi.

Kartalarni tuzishda aylanma ellipsoid yoki sfera yuzalari tekislikda aks ettiriladi. Bunday yuzalarning birortasi ham tekislikda uzilishsiz yoyilishi mumkin emas, shu sababli, kartaga olishda kartografik proyeksiyalardan foydalaniladi, ularda yuzaning tekislikda aks ettirilishi ma'lum bir matematik qonuniyatlar asosida amalga oshiriladi. Bu qonuniyatlar kartaga olinayotgan yuza va tekislikning nuqtalari koordinatalari o'rtasidagi funksional bog'liqlikni o'zida ifodalaydi. Kartografik yuzani bunday tasvirlash asosi sifatida geografik yoki geodezik koordinatalar tizimi va koordinata chiziqlari – meridianlar va parallellar olinadi.

Meridianlar chiziqlari yuzani uning aylanish o'qi orqali o'tuvchi tekislik bilan kesish yo'li orqali hosil qilinadi (aylanma ellipsoidda meridianlar ellipslaridan tashkil topadi, sharda esa – doiralardan), parallellar chiziqlari – aylanish o'qiga perpendikulyar holatda, kartaga olinayotgan yuzaning tekislik bilan kesishishi yo'li asosida hosil qilinadi (parallellar doira ko'rinishida bo'ladi).

Yuzada meridian va parallellarning joylashishi egri chiziqli geografik (yoki geodezik) koordinatalar asosida aniqlanadi: uzoqlik – λ va kenglik – φ (yoki L va B). Meridianlar tenglamasi: $\lambda = const$, parallellar tenglamasi: $\varphi = const$. Qayd etilganlarni hisobga olib, kartografik proyeksiyalar umumiy tenglamasini quyidagicha yozish mumkin:

$$x = f_1(\varphi, \lambda); \quad y = f_2(\varphi, \lambda), \qquad (1)$$

bunda φ va λ – kartaga olinayotgan yuzada joylashgan ayrim nuqtalarning geografik koordinatalari; x va y – ushbu nuqtalarning proyeksiya tekisligidagi to‘g‘ri burchakli koordinatalari, ular f_1 va f_2 funksiyalar bilan aniqlanadi. Bu funksiyalarda bir xil ma’noga ega bo‘lishlik va uzluksizlik sharti amal qiladi (o‘zining xususiy hosilalari bilan birgalikda).

Proyeksiyalarning xususiyatlari (1) tenglamada keltirilgan f_1 va f_2 funksiyalar xossalari va tavsiflariga bog‘liq. Bunday funksiyalar juda ko‘p bo‘lishi mumkin, shu sababli, kartografik proyeksiyalarning turlari ham ko‘p. (1) formuladan kenglikni (φ) chiqarib tashlab, proyeksiyada meridianlar tenglamasini hosil qilamiz:

$$F_1(x, y, \lambda) = 0,$$

shuningdek, uzoqlikni (λ) chiqarib tashlab, parallellar tenglamasi

$$F_2(x, y, \varphi) = 0.$$

Agar $\varphi = \varphi_0 = const$ tenglikni kiritsak, u holda (1) tenglamadan parallellar tenglamasining parametrik shaklini hosil qilamiz:

$$x = f_1(\varphi_0, \lambda); \; y = f_2(\varphi_0, \lambda).$$

Xuddi shunday, $\lambda = \lambda_0 = const$ tenglik orqali meridianlarning parametrik tenglamasini olamiz:

$$x = f_1(\varphi, \lambda_0); \; y = f_2(\varphi, \lambda_0).$$

Proyeksiyada meridian va parallel chiziqlarining tasviri *kartografik to‘r* deyiladi. Agar proyeksiya quyidagi $x = f_1(\varphi)$ va $y = f_2(\lambda)$ tenglamalar asosida ifodalansa, u holda kartografik to‘r nisbatan oddiy ko‘rinishga ega bo‘ladi. Bunday holatda parallel va meridianlar o‘zaro perpendikulyar bo‘lgan ikkita to‘g‘ri chiziq sifatida aks ettiriladi.

Agar $x = f_1(\varphi)$ va $y = f_2(\varphi, \lambda)$ tengliklar bo‘lsa, u holda parallellar Y o‘qiga parallel to‘g‘ri chiziqlar, meridianlar esa – egri chiziqlar bilan ko‘rsatiladi. Agar $x = f_1(\varphi, \lambda)$ va $y = f_2(\lambda)$ tengliklar amal qilsa, u holda meridianlar X o‘qiga parallel to‘g‘ri chiziqlar, paralellar esa egri chiziqlar ko‘rinishida tasvirlanadi.

Agar $x = f_1(\varphi, \lambda)$ va $y = f_2(\varphi, \lambda)$ bo‘lganda turli xildagi kartografik proyeksiyalarni hosil qilishimiz mumkin, bunda ularning ko‘rinishi f_1 va f_2 funksiyalarga bog‘liq bo‘ladi.

Kartaga olinayotgan yuzaning qismlari cho‘zilishi yoki siqilishi u yoki bu kartografik proyeksiyalarda chiziq, maydon va burchak xatoliklarining yuzaga kelishiga sabab bo‘ladi, bu xatoliklar tasvirning xususiyatlariga bog‘liq bo‘ladi. Ayrim proyeksiyalarda maydon xatoligi, boshqa bir proyeksiyalarda esa burchak xatoligini yo‘qotish mumkin, biroq chiziq xatoligi barcha proyeksiyalarda uchraydi (chiziq xatoligi kartaning faqat alohida nuqtalari yoki ayrim chiziqlarida bo‘lmasligi mumkin).

Har qanday kartaning *asosiy masshtabi* bo‘ladi, u kartaga olinayotgan yuzaning (yoki uni qismlarining) tekislikda aks ettirilishining umumiy kichraytirilish darajasini ko‘rsatadi. Bu masshtab kartada yozib qo‘yiladi, biroq bu masshtab faqat alohida nuqtalarda yoki ayrim chiziqlarda saqlanadi, xolos.

Kartografik proyeksiyalarni tadqiq qilishda bosh masshtab μ_0 bilan belgilanadi, uning qiymati birga teng deb olinadi hamda kartografik proyeksiya xususiyatiga ta’sir etmaydi. Masshtab kartada o‘zgaruvchan qiymat bo‘lganligi sababli, amaliyotda kartada chiziq va maydonlarni berilgan nuqtada yoki yo‘nalish bo‘yicha xususiy masshtablari tushunchasi kiritiladi.

Uzunlik xususiy masshtabi (μ) – proyeksiyada cheksiz kichik kesmaning (ds') kartaga olinayotgan yuzadagi tegishli cheksiz kichik kesmaga (ds) nisbatini ifodalaydi:

$$\mu = ds' / ds. \qquad (2)$$

Uzunlik xususiy masshtabi geografik koordinatalar funksiyasi bo‘lib, kartaga olinayotgan yuzada nuqtaning joylashish holatini, shuningdek, yo‘nalish azimutini belgilab beradi, buning asosida xususiy masshtab aniqlanadi:

$$\mu = F_1(\varphi, \lambda, \alpha).$$

Soddalashtirish maqsadida keyinchalik xususiy masshtabni berilgan yo‘nalish bo‘yicha masshtab deb nomlash kiritiladi. Masalan,

– meridianlar uchun: $\alpha = 0$ yoki 180°, $\mu = m$ – meridianlar bo‘yicha masshtab;

– parallellar uchun: $\alpha = 90^{\circ}$ yoki 270°, $\mu = n$ – parallellar bo‘yicha masshtab.

Uzunlik xatoligi (υ_{μ}) – foiz hisobida ifodalanib, xususiy masshtab va 1 qiymati o‘rtasidagi farqni bildiradi, masalan:

$$m = 1{,}58;\ \upsilon_m = (m - 1)\ 100 = +58\%;$$

$$n = 0{,}78;\ \upsilon_n = (n - 1)\ 100 = -22\%,$$

ya’ni, uzunlik xatoligi musbat va manfiy qiymatga ega bo‘lishi mumkin. Uzunlikning xususiy masshtabi $\mu = 0$ holatda tasvir yo‘qoladi.

Maydon xususiy masshtabi (p) – kartada cheksiz kichik (elementar) uchastkaning (dF') kartaga olinayotgan yuzadagi tegishli uchastkasiga (dF) nisbatini ifodalaydi:

$$p = dF' / dF.$$

O‘z navbatida, $dF' \neq dF$, biroq shunday ko‘rinishdagi proyeksiyalar ham mavjud bo‘lishi mumkinki, bunda ularning har bir nuqtasida $dF' = dF$ tenglik o‘rinli, bu proyeksiyalar teng maydonli proyeksiyalar deyiladi. Maydonning xususiy masshtabi faqat tasvirlanayotgan nuqtaning geografik o‘rniga bog‘liq bo‘ladi:

$$p = F_2(\varphi, \lambda).$$

Keyinchalik maydon xususiy masshtabini oddiy ko‘rinishda, maydon masshtabi deb nomlaymiz.

Maydon xatoligi (υ_p) – maydon masshtabi va 1 qiymat o‘rtasidagi farqlanish bo‘lib, foiz o‘lchamida aniqlanadi, masalan:

$$p = 2{,}42;\ \upsilon_p = (p - 1)\ 100 = +142\%.$$

Ayrim holatlarda uzunlik va maydon xatoligi ($\mu - 1$), ($r - 1$) qiymatlari farqlanishlari yoki bo‘linishida birinchi (asosiy) qism ($\mu - 1$) qiymatni ifodalab beruvchi $\ln\mu$ – masshtab logarifmi chalg‘ituvchi qiymat bilan ifodalanishi mumkin.

Xatoliklarning uchinchi turi – bu *burchaklar xatoligi*; bu proyeksiyadagi burchak (u') qiymati va kartaga olinayotgan yuzadagi tegishli burchaklar (u) qiymatlari o'rtasidagi farqni o'zida aks ettiradi. O'z navbatida, $u' \neq u$ tenglik o'rinli, biroq ba'zi proyeksiyaning har bir nuqtasida $u' = u$ tenglik amal qiladi, bunda proyeksiyalar teng burchakli proyeksiyalar deyiladi.

Burchak xatoligi $\Delta u = u' - u$ tenglamasi geografik koordinatalar va yo'nalish azimutlari funksiyasi hisoblanadi:

$$\Delta u = F_3(\varphi, \lambda, \alpha).$$

Proyeksiyaning har bir nuqtasida burchaklarning maksimal darajadagi xatoligi mavjud bo'lib, bu qiymat ω bilan ifodalanadi:

$$\omega = \Delta u_{max} = 2(\alpha - \beta),$$

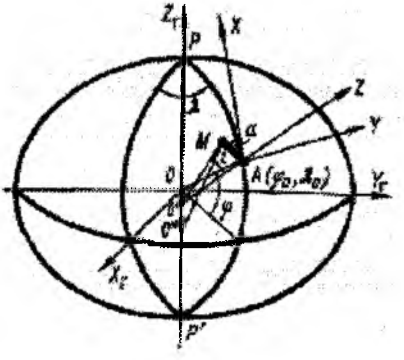
bunda β – proyeksiyada ko'rsatilgan yo'nalish bo'yicha α azimutning ifodalanishi.

Xatoliklar qiymatlari kartografik proyeksiyalarning munosibligini baholashda asosiy mezonlardan biri hisoblanadi.

2-§. Matematik kartografiyada foydalaniladigan asosiy koordinatalar tizimlari

Geografik (geodezik) va geosentrik koordinatalar tizimlari

Ellipsoidda (*sferada*) ko'rsatish mumkin bo'lgan parametrik chiziqlarning cheksiz darajada ko'pligidan kelib chiqib, geografik parallellar va meridianlar sinfini tanlaymiz, ular geografik koordinatalar tizimini tashkil etadi: ya'ni $\varphi = const$ va $\lambda = const.$



1-rasm. **Geosentrik va toposentrik fazoviy koordinatalar tizimlari**

Ellipsoidning ixtiyoriy A (φ, λ) nuqtasidan ushbu yuzaga nisbatan AO' normal (*normal* – egri chiziq yoki sirtning biror nuqtasidan o'tgan urinmaga shu nuqta orqali o'tkazilgan tik chiziq) o'tkazamiz *(1-rasm)*.

Berilgan normal orqali ellipsoidda cheksiz darajada ko'plab normal kesmalar o'tkazilishi mumkin, o'tkazilgan ushbu kesmalardan ikkita asosiysini tanlab olamiz: RAR' meridian tekisligi bilan mos tushuvchi kesma – meridian deb nomlananadi va birinchi kesmaga ortogonal bo'lgan kesma birinchi vertikal kesmasi deb nomlanadi.

Ushbu normal kesmalar egrilik radiusi Mene teoremasiga muvofiq quyidagi tenglama bilan ifodalanadi:

$$M = a(1-e^2)/(1-e^2\sin 2\varphi)^{3/2};$$
$$N = a/(1-e^2\sin 2\varphi)^{1/2}, \qquad (3)$$

bu yerda $e=\sqrt{(a^2-b^2)/a^2}$ – birinchi ekssentrisitet, a va b – mos holatda aylanma ellipsoidning katta va kichik yarim o'qlari.

Endi faraz qilaylik, $0X_rY_rZ_r$ geosentrik fazoviy koordinatalar tizimi berilgan bo'lsin, bunda uning boshi Yer markazi bilan (aylanma ellipsoid markazi bilan) ustma-ust tushadi, Z_r o'qi Yerning shimoliy qutbiga yo'naltirilgan, X_r o'qi – Grinvich meridianining ekvator bilan kesishish nuqtasiga mos keladi, Y_r o'qi esa – sharq tomonga yo'naltirilgan.

Bu holatda, (*3*) tenglamani hisobga olib, geosentrik va geografik koordinatalar tizimi o'rtasidagi bog'liqlikni quyidagi ko'rinishda ifodalash mumkin:

$$X_r = N\cos\varphi\cos\lambda;$$
$$Y_r = N\cos\varphi\sin\lambda;$$
$$Z_r = N(1-e^2)\sin\varphi. \qquad (4)$$

Gorizontal toposentrik va qutbiy sferoidik (*sferik*) koordinatalar tizimi

Gorizontal toposentrik koordinatalar tizimi (1-rasmga qarang) – boshlang'ich qismi yangi qutb nuqtasi – Q_0 (φ_0, λ_0) bilan ustma-ust tushadigan, X o'qi Q_0 nuqta meridianida yotuvchi va shimoliy qutbga yo'nalgan, Z o'qi ellipsoid yuzasida Q_0 nuqtada $0'Q_0$ normal bilan ustma-ust joylashgan va Y o'qi chap tomongacha koordinatalar tizimini to'ldiradigan koordinatalar tizimini ifodalaydi. Q_0 (φ_0, λ_0) qutb nuqtasi uchun A (φ_0, λ_0) nuqta qabul qilinadi, o'z navbatida bu kartaga olinayotgan hudud o'rta nuqtasini ifodalaydi.

Yangi qutb nuqtasining Q_0 (φ_0, λ_0) kengligi, uzoqligini hisobga olgan holda va ushbu nuqtada birinchi vertikalning N_0 kesishish radiusi egriligini e'tiborga olib, toposentrik va geosentrik koordinatalar tizimi o'rtasidagi bog'liqlikni quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$\begin{pmatrix} X_r \\ Y_r \\ Z_r \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z + N_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^2 N_0 \sin\varphi_0 \end{pmatrix}; \qquad (5)$$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = {}^t A \begin{pmatrix} X_r \\ Y_r \\ Z_r + N_0 e^2 \sin\varphi_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ N_0 \end{pmatrix}, \qquad (6)$$

bu yerda A – koordinatalarni o'zgartirish matritsasi,

$$A = \begin{pmatrix} -\cos\lambda_0 \sin\varphi_0 & -\sin\lambda_0 & \cos\lambda_0 \cos\varphi_0 \\ -\sin\lambda_0 \sin\varphi_0 & \cos\lambda_0 & \sin\lambda_0 \cos\varphi_0 \\ \cos\varphi_0 & 0 & \sin\varphi_0 \end{pmatrix}. \qquad (7)$$

bu yerda ${}^t A$ – A ga nisbatan matritsaning transponirlanishini ifodalaydi.

(*6*) tenglamaga (*4*) tenglamadagi qiymatlarni qo'yish orqali va (*7*) tenglamadagi ${}^t A$ qiymatni hisobga olgan holatda, gorizontal toposentrik koordinatalarni hisoblash uchun quyidagi formulalarni keltirib chiqaramiz:

$$X = N[\sin\varphi\cos\varphi_0 - \cos\varphi\sin\varphi_0\cos(\lambda - \lambda_0)] + e^2(N_0\sin\varphi_0 - N\sin\varphi)\cos\varphi_0;$$
$$Y = N\cos\varphi\sin(\lambda - \lambda_0); \qquad (8)$$
$$Z = N[\sin\varphi\sin\varphi_0 + \cos\varphi\cos\varphi_0\cos(\lambda - \lambda_0)] + e^2(N_0\sin\varphi - N\sin\varphi)\sin\varphi_0 - N_0.$$

Qutbiy sferoid koordinatalar tizimini kiritamiz: z = *const*, a = *const*, bu yerda a – Q_0 qutb nuqtasidagi normal tekisliklar o'rtasidagi burchak, z – $0'Q_0$ normal va tegishli normal tekislik bo'ylab yotuvchi M_i ellipsoid yuzasida joylashgan joriy nuqtaga nisbatan $0'$ nuqtadan yo‘nalish o‘rtasidagi burchaklar (1-rasmga qarang). $MO' = N'_0$ qiymatni kiritamiz va keltirilgan rasm asosida quyidagi tenglamani hosil qilamiz:

$$X = N'_0 \sin z \cos a;$$
$$Y = N'_0 \sin z \sin a;$$
$$Z = N'_0 \cos z = N_0. \qquad (9)$$

Agar M nuqtadan ellipsoidga nisbatan MO'' normal o‘tkaziladigan bo‘lsa, u O'' nuqtada ellipsoidning aylanish o‘qini kesib o‘tsa, u holda $O'O''M$ uchburchak hosil bo‘ladi. Ushbu M nuqtada kenglik qiymatini hisobga olgan holda, tomonlar qiymatlari quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$0'M = N'_0;\ 0''M = N;\ 0'0'' = e^2(N \sin\varphi - N_0 \sin\varphi_0)$$

va (*3*) formuladan N qiymatini kosinuslar teoremasi asosida hosil qilamiz:

$$N'_0 = N_0\left\{1 - \frac{e^2}{2}(\sin\varphi - \sin\varphi_0)^2\left[1 + \frac{e^2}{4}(5\sin^2\varphi + \sin^2\varphi_0 + \sin\varphi\sin\varphi_0 - 4)\right] + \ldots\right\}. \qquad (10)$$

Shunga o‘xshash ko‘rinishda,

$$N_0 = N'_0\{1 + e^2(\sin\varphi - \sin\varphi_0)\sin\varphi +$$
$$+ \frac{e^2}{2}\left[\sin\varphi\sin\varphi_0(\sin\varphi + \sin\varphi_0) + (\sin\varphi - \sin\varphi_0)(3\sin^2\varphi - 1)\right] + \ldots\}. \qquad (11)$$

(*8*), (*9*) tenglamalarni tenglashtirish orqali va (*10*), (*11*) tenglamalarni hisobga olib, qutbiy z, a sferoidik koordinatalar va geografik (geodezik) φ va λ koordinatalar o‘rtasidagi bog‘liqlik formulasini keltirib chiqaramiz:

$$\sin z \cos a = t_1 + e^2\tau\left[(t_1 \sin\varphi - \cos\varphi_0) + \frac{e^2}{2}(t_1 t_2 - 2t_3 \cos\varphi_0)\right];$$
$$\sin z \sin a = t_4\left[1 + e^2\tau(\sin\varphi + \frac{e^2}{2}t_2)\right]; \qquad (12)$$
$$\cos z = t_5 + e^2\tau\left[(t_5 \sin\varphi - \sin\varphi_0) + \frac{e^2}{2}(t_2 t_5 - 2t_3 \sin\varphi_0)\right],$$

bu yerda:

$$t_1 = \sin\varphi\cos\varphi_0 - \cos\varphi\sin\varphi_0\cos(\lambda - \lambda_0);$$
$$t_2 = \sin\varphi\sin\varphi_0(\sin\varphi + \sin\varphi_0) + (\sin\varphi - \sin\varphi_0)(3\sin^2\varphi - 1);$$

$$t_3 = \sin^2\varphi - \frac{1}{2}\sin\varphi_0(\sin\varphi - \sin\varphi_0);$$
$$t_4 = \cos\varphi\sin(\lambda - \lambda_0); \qquad (13)$$
$$t_5 = \sin\varphi\sin\varphi_0 + \cos\varphi\cos\varphi_0\cos(\lambda - \lambda_0);$$
$$r = \sin\varphi - \sin\varphi_0.$$

Ko'plab holatlarda hisoblashlarni bajarish davomida (*10*) – (*12*) formulalarda faqat e^2 qiymatgacha hisoblash yetarli yoki qutbiy sferoid koordinatalarni tegishli sferik koordinatalarga almashtiriladi, bunda e^2, e^4,... holatda barcha qismlar nolga teng bo'ladi deb faraz qilinadi.

Qutbiy geodezik koordinatalar tizimi

A (φ, λ) nuqtaning qutbiy geodezik koordinatalari deb qutbdan $Q_0(\varphi_0, \lambda_0)$ ushbu nuqtagacha bo'lgan geodezik chiziq uzunligi s va Q_0 nuqtada Q_0A chiziqning azimutiga α aytiladi (2-rasm). Bu tizimda koordinatalar chiziqlari sinfi sifatida quyidagilar olinadi:

$\alpha = const$ – Q_0 qutbdan chiquvchi geodezik chiziqlar tutami;

$s = const$ – geodezik chiziq hisoblanmaydigan va murakkab ko'rinishdagi ikkilangan egri chiziqlardan tashkil topgan, birinchi sinfga ortogonal bo'lgan geodezik doiralar.

Elliptik koordinatalar

Har qanday kartografik yuzani quyidagi tenglama yordamida aniqlash mumkin:

$\Phi(x, y, z) = 0.$

bu yerda x, y, z – to'g'ri burchakli fazoviy koordinatalar:

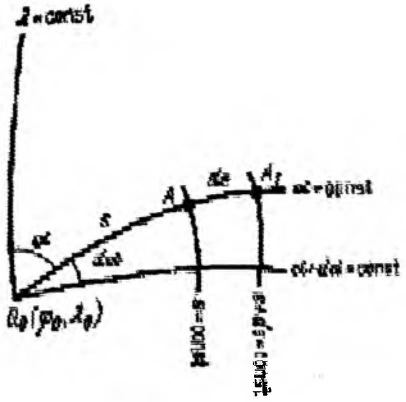
$x = F_1(u, \upsilon);$

$y = F_2(u, \upsilon);$

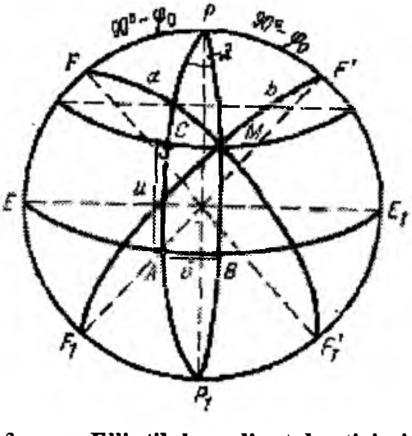
$z = F_3(u, \upsilon).$

Mustaqil o'zgaruvchilar hisoblangan – u va υ qiymatlar egri chiziqli koordinatalar bo'lib, kartaga tushirilayotgan yuzada nuqtaning o'rnini belgilab beradi.

Elliptik koordinatalar tizimini sofokus tavsifga ega bo'lgan ikkita sferik ellipslar tizimi yuzaga keltiradi.



2-rasm. **Qutbiy geodezik koordinatalar tizimi**



3-rasm. **Elliptik koordinatalar tizimi**

3-rasmdagi F fokus MS sferik ellipsi fokusi, uning ikkinchi fokusi F' nuqtada bo'ladi, MV sferik ellips uchun birinchi fokus F, ikkinchi fokusi F_1 nuqtada joylashadi.

Ixtiyoriy holatdagi M nuqtaning joylashish holati uning yaqin joylashgan fokusidan uzoqlashishi bilan aniqlanadi: ya'ni $FM = a$ va $FM = b$. Agar rasm tekisligiga perpendikulyar holatda $PCAP_1$ boshlang'ich meridian tekisligida joylashtirilgan M nuqtaning λ uzoqligi berilgan bo'lsa, shuningdek, ushbu nuqtaning kengligi – φ bilan ifodalansa, u holda sferik trigonomeriya formulalari bo'yicha (markaziy burchak unga tayanuvchi yoy bilan o'lchanishini hisobga olgan holatda) quyidagi tengliklar o'rinli:

$$cos a = \sin\varphi \sin\varphi_0 - \cos\varphi \cos\varphi_0 \sin\lambda;$$
$$cos b = \sin\varphi \sin\varphi_0 + \cos\varphi \cos\varphi_0 \sin\lambda; \qquad (14)$$

bu yerda φ_0 – fokus nuqtasining kengligi.

Elliptik koordinatalar uchun $AC = u$ yoyni va $AB = v$ yoyni qabul qilamiz. a va b qiymatlarni bilgan holatda, quyidagi formulalar yordamida u va v ellips koordinatalarni topish mumkin:

$$\sin u \sin\varphi_0 = \cos\frac{a+b}{2};$$
$$\sin v \cos\varphi_0 = \sin\frac{a-b}{2}. \qquad (15)$$

Natijada, nazorat formulasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi: $\cos u \cos v = \cos\varphi \cos\lambda$.

Keltirilgan formulalardan elliptik koordinatalar shar sirtida sferik ellipslar fokuslarining (*F, F', F1, F'1*) joylashish holatiga bog'liqligi ko'rinadi. Bu belgisi bo'yicha elliptik koordinatalar turli xil tizimlarga ajratiladi (xususiy holatda Gyuy, Pirs, Adams koordinatalari). Bu koordinatalar yordamida ishlab chiqilgan proyeksiyalar keyingi boblarda qarab chiqiladi.

Uch o'qli ellipsoid koordinatalari tizimi

Uch o'qli ellipsoidning tadbiq etilishi bo'yicha olimlar tomonidan geodezik koordinatalar tizimiga turli xilda ta'riflar berilgan. N.E. Bespalov uch o'qli ellipsoidning φ kengligi sifatida uni aylanish o'qi va yuzasiga tushadigan normal o'rtasidagi 90° gacha to'ldiriladigan burchakni, meridianni esa – egrini, uning nuqtasida barcha normallar ba'zilariga nisbatan ellipsoidga perpendikulyar, har bir meridian uchun doimiy, ekvator tekisligidagi to'g'ri chiziqni olishni taklif qiladi.

U shimoliy yo'nalish chizig'i sifatida – urinma holatida har qanday nuqtasi shimolga (yoki janubga) tomon yo'nalgan egri chiziqni tanlaydi. Lyama quyidagi formulalar orqali ifodalanadigan uch o'qli ellipsoidning u va v elliptik koordinatalaridan foydalanishni taklif qiladi.

$$u = b^2 + (a^2 - b^2)\cos^2 u;$$
$$\upsilon = b^2 - (b^2 - c^2)\cos^2 \upsilon,$$

bu yerda a, b, c – uch o‘qli ellipsoidning yarim o‘qlari.

Uch o‘qli ellipsoidning fazoviy koodinatalarda quyidagi tenglamasini hisobga oladigan bo‘lsak,

$$X^2 / a^2 + Y^2 / b^2 + Z^2 / c^2 = 1,$$

ushbu koordinatalarni elliptik koordinatalar bilan bog‘liqligini quyidagi ko‘rinishda ifodalashimiz mumkin:

$$X^2 = a^2 \frac{(a^2 - u)(a^2 - \upsilon)}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)};$$

$$Y^2 = b^2 \frac{(b^2 - u)(b^2 - \upsilon)}{(b^2 - c^2)(b^2 - c^2)};$$

$$Z^2 = c^2 \frac{(c^2 - u)(c^2 - \upsilon)}{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)}.$$

Belgilashlarni kiritgan holda

$$\lambda^2 = (a^2 - b^2)/(a^2 - c^2); \; \lambda^2{}_1 = (b^2 - c^2)/(a^2 - c^2); \; \lambda^2 + \lambda^2{}_1 = 1,$$

tenglikni hosil qilamiz:

$$X = a \sin u \Delta';$$
$$Y = b \cos u \cos \upsilon;$$
$$Z = c \sin \upsilon \Delta, \text{ bunda}$$
$$\Delta' = \sqrt{1 - \lambda_1^2 \sin^2 \upsilon}; \quad \Delta = \sqrt{1 - \lambda_1^2 \sin^2 u}.$$

F.N. Krasovskiy va N.A. Bespalov tadqiqotlaridan X, Y, Z fazoviy to‘g‘ri burchakli koordinatalar va geodezik – φ, λ koordinatalar o‘rtasidagi o‘zaro bog‘liqlik formulalari quyidagi ko‘rinishda keltiriladi:

$$X = a \cos \varphi \cos \lambda / W;$$
$$Y = a(1 - e^2) \cos \varphi \cos \lambda / W;$$
$$Z = a(1 - e^2) \sin \varphi / W,$$

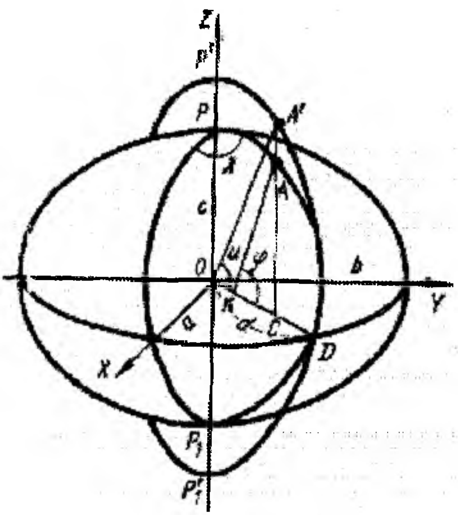
bu yerda:

$$W = \sqrt{1 - e \sin^2 \varphi - e_a^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \lambda},$$
$$e^2 = (a^2 - c^2)/a^2; \quad e_a^2 = (a^2 - b^2)/a^2;$$

bu yerda e va e_a – mos holatda, birinchi qutbiy va ekvatorial ekssentrisitetlar.

Ikkinchi fikrlarga muvofiq, shartli-geodezik va geodezik kengliklar, geodezik uzoqlik, shuningdek, keltirilgan kenglik tushunchalari kiritilgan. *Geodezik uzoqlik* λ deb ellipsoid oʻqi orqali oʻtuvchi, boshlangʻich va joriy punktlarning tekisliklari oʻrtasidagi ikki qirrali burchakga aytiladi.

Kenglik tushunchasini kiritish uchun olaylik AK chiziq (4-rasm) A nuqtada PDP_1 ellipsning normali boʻlsin.



4-rasm. **Uch oʻqli ellipsoid koordinatalari tizimi**

d va c yarim oʻqlar bilan berilgan aylanma ellipsoid uchun bu normal bir vaqtning oʻzida uning yuzasida A nuqtaga nisbatan normal hisoblanishi mumkin va shuningdek, φ burchak ushbu nuqtada geodezik kenglik sifatida olinishi mumkin. Biroq, uch oʻqli ellipsoidda AK nuqta uning yuzasi uchun normal hisoblanmaydi, φ burchak – geodezik kenglik emas. Shu sababli, A nuqtada PAP_1 ellipsga nisbatan AK normal va $0D$ chiziq oʻrtasidagi φ burchakni shartli – geodezik kenglik sifatida belgilaymiz. A nuqtada uch oʻqli ellipsoid yuzasini kesib oʻtuvchi normal va ekvator tekisligi ($Z = 0$) orasidagi φ burchak *geodezik kenglik* deyiladi.

PDP₁ meridian tekisligida $d = 0D$ radiusli doirani o'tkazamiz. Bunda, aylanma ellipsoidga o'xshash ko'rinishda $0A'$ chiziq va $0D$ o'rtasida u burchakni uch o'qli ellipsoid ushbu nuqtasini keltirilgan kengligi deb nomlaymiz. Uch o'qli ellipsoid yuzasida quyidagi parametrik tenglamalarni keltiramiz:

$$X = d\cos u \cos\lambda;$$
$$Y = d\cos u \sin\lambda;$$
$$Z = c\sin u.$$

4-rasmga muvofiq:

$$d = ab(a^2\sin^2\lambda + b^2\cos^2\lambda)^{-1/2}.$$

Quyidagi tenglikni kiritish orqali

$$p^2 = 1 - c^2/d^2,$$

shartli geodezik va keltirilgan geodezik kengliklar o'rtasidagi bog'liqlik formulasini hosil qilamiz:

$$\cos^2 u = \cos^2\varphi/(1 - p^2\sin^2\varphi);$$
$$tg\varphi = \frac{d}{c}tgu.$$

Uch o'qli ellipsoid yuzasiga nisbatan normal tenglamasini yozish orqali berilgan nuqtada va tekislikda ($Z=0$) geodezik kenglik qiymatini aniqlash uchun tenglamani analitik geometriya formulalari bo'yicha keltirib chiqaramiz:

$$\sin\varphi = d^2\sin^2 u / \sqrt{c^2\cos^2\lambda(d_\lambda + d^2) + d^4\sin^2 u},$$

yoki

$$\sin\varphi = \sin\varphi / \sqrt{1 + (d_\lambda/d)^2\cos^2\varphi},$$

bu yerda:

$$d_\lambda\ /d = -\sin 2\lambda\frac{a^2 - b^2}{2}(a^2\sin^2\lambda + |b^2\cos^2\lambda)^{-1}.$$

Qayd qilish joizki, uch o'qli ellipsoidni va nisbatan ko'p darajali tekisliklarni boshqa yuzalarda tasvirlash masalasini, shuningdek geodezik va boshqa masalalarni yuzalar koordinatalari tizimidan foydalanib yechish kelgusida yangi tadqiqotlarning o'tkazilishini talab etadi.

3-§. Xususiy masshtablar formulalarini keltirib chiqarish. Meridianlar va paralellar bo'yicha masshtablar

Uzunlik xususiy masshtabi (2) $\mu = ds'/ds;$ formula bilan aniqlanadi. Elementar sferoidik uchburchakdan (5-rasm),

$$ds' = \sqrt{dx^2 + dy^2}, \quad ds = \sqrt{ds_m^2 + ds_n^2},$$

Bu uchburchakdan meridianning cheksiz kichik yoyi

$$ds_m = Md\varphi, \tag{16}$$

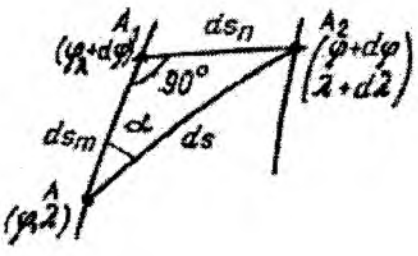
bu yerda M – meridian egrilik radiusi; parallelning cheksiz kichik yoyi,

$$ds_n = rd\lambda, \tag{17}$$

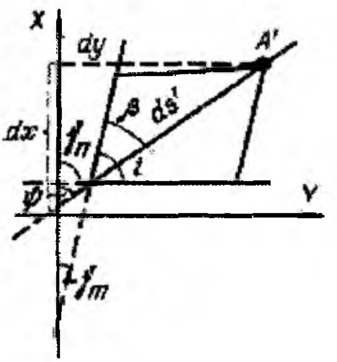
bunda r – parallel radiusi egriligi.

M qiymatini (3) formuladan olib,

$$\mu^2 = (dx^2 + dy^2)/(Md\varphi^2 + r^2 d\lambda^2), \tag{18}$$



5-rasm. **Elementar sferoidik uchburchak**



6-rasm. **Proyeksiyada azimutni tasvirlash**

(1) formuladan dastlabki hosilalarni olib,

$$dx = x_\varphi d\varphi + x_\lambda d\lambda,$$

$dy = y_\varphi d\varphi + y_\lambda d\lambda,$ quyidagicha yozish mumkin:

$$\begin{aligned} d^2 s' &= dx^2 + dy^2 = x_\varphi^2 d\varphi^2 + 2x_\varphi x_\lambda d\varphi d\lambda + x_\lambda^2 d\lambda^2 + y_\varphi^2 d\varphi^2 + \\ &+ 2y_\varphi y_\lambda d\varphi d\lambda + y_\lambda^2 d\lambda^2 = ed\varphi^2 + 2fd\varphi d\lambda + gd\lambda^2, \end{aligned} \tag{19}$$

Oxirgi formulada Gauss koeffitsiyentlari ishlatilgan:

$$ex_{\varphi}^{2}+y_{\varphi},\qquad x_{\varphi}x_{\lambda}+y_{\varphi}y_{\lambda},\tag{20}$$

$$q=x_{\lambda}^{2}+y_{\lambda}^{2},\quad h=\sqrt{eg-f^{2}}=x_{\varphi}y_{\lambda}-x_{\lambda}y_{\varphi},$$

(19) formulani (18) masshtab formulasiga qo'yib,

$$\mu^{2}=\frac{ed\varphi^{2}+2fd\varphi d\lambda+gd\lambda^{2}}{M^{2}d\varphi^{2}+r^{2}d\lambda^{2}},\text{ olamiz.}\tag{21}$$

Formulaga (21) yordamchi funksiya kiritamiz $u=d\varphi/d\lambda$, surat va maxrajni λ^2 bo'lsak, unda:

$$\mu^{2}=\frac{eu^{2}+2fu+g}{M^{2}u^{2}+r^{2}},\tag{22}$$

Elementar sferoidik uchburchakdan yordamchi funksiya *i* qiymatini topamiz (5-rasm)

$$tg\alpha=ds_{n}/ds_{m}=rd\lambda/Md\varphi=r/Mu,$$

$$u=\frac{r}{M}=ctg\alpha\tag{23}$$

(22) formulaga qo'yib,

$$\mu^{2}=\frac{[e\dfrac{r^{2}}{M^{2}}=ctg^{2}\alpha+2f\dfrac{r}{M}ctg\alpha+g]}{[r^{2}(ctg^{2}\alpha+1)]}=$$

$$=\frac{e}{M^{2}}\cos^{2}\alpha+2\frac{f}{Mr}\cos\alpha\sin\alpha+\frac{g}{r^{2}}\sin^{2}\alpha,$$

Oxirgi formulani soddalashtirish uchun quyidagi belgilashni kiritamiz,

$$P=eM^{2};\quad Q=\frac{f}{Mr};\quad R=g/r^{2};\tag{24}$$

va uzunlik masshtabi umumiy formulasini olamiz

$$\mu^{2}=P\cos^{2}\alpha+Q\sin2\alpha+R\sin^{2}\alpha;\tag{25}$$

agar $\alpha=0(180^{0})$, $\mu^{2}=m^{2}=P$, meridianlar masshtabi

$$m=\sqrt{e}/M,\tag{26}$$

$\alpha=90^{0}(270^{0})$, $\mu^{2}=n^{2}=R$, parallellar masshtabi

$$n=\sqrt{g}/r=\sqrt{g}/N\cos\varphi,\tag{27}$$

Shar uchun

$$m=\sqrt{g}/r,\qquad n=\sqrt{g}/R\cos\varphi$$

4-§. Proyeksiyada azimut formulalarini keltirib chiqarish. Meridian va parallellar o'rtasidagi burchak. To'rning ortogonallik shartlari

Tekislikdagi elementar sferoidik trapetsiyaning tasvirini qarab chiqamiz (6-rasm). Bu trapetsiyaning tomonlari sifatida meridianlar va parallellarning elementar yoylari olinadi. Xohlagan azimut yo'nalishini (α) proyeksiyada β orqali belgilaymiz.

X o'qining musbat yo'nalishi va ds' elementar kesma bilan g'arbiy meridian va janubiy parallel tasviridan hosil qilingan ψ, γ_m *va* γ_n burchaklarni aniqlaymiz. 6-rasmdan:

$$tg\psi = dy/dx = (y_\varphi d\varphi + j_\lambda d\lambda)/(x_\varphi d\varphi + x_\lambda d\lambda),$$

Meridianga λ = const, parallelga φ = const qabul qilinganda, quyidagi tenglik olinadi:

$$tgy_m = y_\varphi / x_\varphi; \qquad tgy_n = y_\lambda / x_\lambda;$$

Elementar qism azimuti ds'

$$\beta = \psi - y_m$$

Ma'lumki,

$$tg\beta = \frac{tg\psi - tgy_m}{1 + tg\psi tgy_m},$$

Oxirgi formulaga tg ψ va tg y_m qo'yilganda,

$$tg\beta = \frac{x_\varphi y_\varphi d\varphi + x_\varphi y_\lambda d\lambda - x_\varphi y_\varphi d\varphi - x_\lambda y_\varphi d\lambda}{x_\varphi^2 d\varphi + x_\varphi x_\lambda d\lambda + y_\varphi^2 d\varphi + x_\varphi y_\lambda d\lambda},$$

Ma'lum o'zgartirishlar va qiymatlar (20) formuladan olinib, quyidagi formulani hosil qilamiz:

$$tg\beta = \frac{(x_\varphi y_\lambda - x_\lambda y_\varphi)d\lambda}{(x_\varphi^2 + y_\varphi^2)d\varphi + (x_\varphi x_\lambda + y_\varphi y_\lambda)d\lambda} = \frac{hd\lambda}{ed\varphi + fd\lambda},$$

Yordamchi funksiya $u = d\varphi / d\lambda$ kiritilgandan keyin

$$tg\beta = \frac{h}{eu + f}, \text{hosil bo'ladi.} \qquad (28)$$

Oxirgi tenglikga (23) dan qiymatni qo'ysak,

$$u = \frac{r}{M}, \text{ ctg}\alpha \text{ olamiz,}$$

$$tg\beta = Mh/(erctg\alpha + Mf) \qquad (29)$$

yoki

$$tg\beta = Mhtg\alpha/(er + Mftg\alpha) \tag{30}$$

6-rasmga asoslanib, meridianlar va parallellar tasviri orasidagi burchak (i) qiymatini olish mumkin:

$$i = y_n - y_m \quad \text{so'ngra}$$

$$tgi = \frac{tgy_n - tgy_m}{1 + tgy_n tgy_m} = \frac{y_\lambda / x_\lambda - y_\varphi / x_\varphi}{1 + (y_\lambda / x_\lambda)(y_\varphi / x_\varphi)},$$

Tenglik umumiy maxrajga keltirilgandan so'ng

$$tgi = (x_\varphi y_\lambda - x_\lambda y_\varphi)/(x_\varphi y_\lambda + x_\lambda y_\varphi)$$

Olingan natija Gauss koeffitsiyentlari orqali ifodalanganda

$tgi = h/f$ (31) tenglik olinadi.

Oxirgi formulani boshqa yo'l bilan ham olish mumkin.

α=90° bo'lganda proyeksiyadagi β azimutni meridianlar va parallellar orasidagi tekislikdagi i burchak sifatida qabul qilish mumkin:

$$tgi = tg\beta_{\alpha=90^0} = h/f \tag{31}$$

Burchak i = 90°+ε, bu yerda ε – meridianlar va parallellar orasidagi burchakning 90° dan farqlanishi bo'lib, bu qiymat kartografik to'rning ortogonal emasligini xarakterlaydi.

Agar $tgi = tg(90^0 + \varepsilon) = h/f$, unda i soat yo'nalishi bo'yicha hisoblanganda (birinchi chorakda):

$$tg\varepsilon = -f/h \tag{32}$$

Kartografik to'r ortogonal bo'lishi uchun ε nolga teng bo'lishi kerak, bu faqat quyidagi shart bajarilganda mumkin: $f = 0$. To'rning ortogonallik sharti quyidagi ko'rinishga ega:

$$f = x_\varphi x_\lambda + y_\varphi y_\lambda = 0 \tag{33}$$

Matematik kartografiyaning alohidagi masalalarini o'rganishda nafaqat tg f qiymatni, balki boshqa trigonometrik funksiyalar qiymatini ham bilish foydali. Ma'lumki,

$$\sin^2 i = tg^2 i/(1 + tg^2 i) = h^2/(f^2 + h^2) = h^2/eg$$

$$\sin i = h/\sqrt{eg} \tag{34}$$

sin i burchagi musbat bo'ladi, agar u azimut kabi yo'nalish bo'yicha o'lchansa:

$$\cos^2 i = 1/(1+tg^2 i) = f^2/(f^2+h^2) = f^2/eg$$

$$\cos i = f/\sqrt{eg} \tag{35}$$

Oxirgi formula i burchak qiymatini aniqlash imkonini beradi: agar $f>0$, unda $i<90^0$; $f<0, i>90^0$; $f=0, i=90^0$ va to'r ortogal bo'lganda, ya'ni oldin olingan dalil – kartografik to'rning ortoganal ekanligi isbotlanadi.

Agar azimut proyeksiyadagi formulasi ma'lum bo'lsa, unda uzunlik masshtabi formulasini tekislikdagi koordinata va azimut funksiyalaridan olish mumkin. (22) formuladan

$$\frac{1}{\mu^2} = \frac{M^2u^2+r^2}{eu^2+2fu+g}$$

(28) formuladan qiymatlarni suratga qo'yib, olamiz:

$$u = \frac{h}{e}ctg\beta - \frac{f}{e}$$

va maxrajga qo'yilganda

$eu^2+2fu+g = h^2/e\sin^2\beta$ hosil bo'ladi.

Unda

$$\sin^2\beta = \frac{tg^2\beta}{1+tg^2\beta} = \frac{h^2}{e^2u^2+2fue+f^2+h^2} = \frac{h^2}{e(eu^2+2fu+g)}$$

$$\frac{1}{\mu^2} = \frac{e\sin^2\beta}{h^2}\left[M^2\left(\frac{h}{e}ctg\beta-\frac{f}{e}\right)^2+r^2\right] = \frac{e\sin^2\beta}{h^2}$$

$$\left(\begin{array}{l}\frac{M^2h^2}{e^2}ctg^2\beta - 2\frac{M^2hf}{e^2}ctg\beta + \\ +\frac{M^2f^2+e^2r^2}{e^2}\end{array}\right) =$$

$$= \frac{M^2}{e}\cos^2\beta - 2\frac{M^2f}{eh}\cos\beta\sin\beta + \frac{M^2f^2+e^2r^2}{eh^2}\sin^2\beta$$

Belgilaymiz

$$\frac{M^2}{e} = P_1, \quad \frac{M^2f}{eh} = Q_1, \quad \frac{M^2f^2+e^2r^2}{eh^2} = R_1 \quad \text{unda} \tag{36}$$

$$1/\mu^2 = P_1\cos^2\beta + 2Q_1\cos\beta\sin\beta + R_1\sin^2\beta \tag{37}$$

yoki

$$1/\mu^2 = P_1\cos^2\beta + 2Q_1\cos\beta\sin\beta + R_1\sin^2\beta$$

Olingan formulani (25) formula bilan taqqoslasak, ko'plab umumiyliklarni aniqlash mumkin.

5-§. Berilgan nuqtada uzunlik masshtabi o'zgarishini tadqiq qilish. Asosiy yo'nalishlar

Uzunlik masshtabining azimutga bog'liqligi (*25*) formuladan ma'lum, uzunlik masshtabining ekstremal qiymatini aniqlash uchun azimut bo'yicha masshtab hosilasini olish va uni nolga tenglashtirish kerak. Hosila nolga teng bo'lganda azimut qiymati (α) statsionar qiymat deb nomlanadi, unda estrimum holat qayd qilinishi mumkin.

$$d\mu^2/d\alpha = -2P\cos\alpha_0\sin\alpha_0 + 2Q\cos2\alpha_0 +$$

$$+2R\cos\alpha_0\sin\alpha_0 = (R-P)\sin2\alpha_0 + 2Q\cos2\alpha_0 = 0,$$

bu yerda $\alpha_0 -\ d\mu^2/d\alpha = 0$ tenglamaning asosi hisoblanadi, ya'ni α azimutning xususiy qiymatini ifodalaydi. Undan quyidagi tenglik kelib chiqadi:

$$tg2\alpha_0 = 2Q/(P-R) = 2Mfr/(er^2 - gM^2). \qquad (38)$$

Hosil qilingan sonli qiymat – $tg2\alpha_0$ ikkita α_0 qiymat uchun va ishorasi bo'yicha bir xilda bo'lib, bir-biridan 90° burchak ostida va 0° hamda 180° oralig'ida joylashishi bilan farqlanadi. Ushbu α_0 ning qiymatlari uchun uzunlik masshtabi minimal va maksimal bo'lishi mumkinligini isbotlaymiz.

α_0 bo'yicha μ^2 qiymatdan ikkinchi hosilani topamiz:

$$d^2\mu^2/d\alpha_0^2 = (R-P)\cos2\alpha_0 - 4Q\sin2\alpha_0 = 2\cos2\alpha_0(R-P-2tg2\alpha_0).$$

α_0 azimut uchun va $\alpha_0 +$ 90° holatda ikkinchi hosilaning qarama-qarshi ishoraga ega bo'lishiga ishonch hosil qilish qiyin emas, bunda qavs ichida keltirilgan ifoda ishoraga ta'sir ko'rsatmaydi. O'z navbatida, berilgan nuqtaning tasvirlanishida ikkita o'zaro perpendikulyar holatdagi yo'nalishlar mavjud bo'lib, bu yo'nalishlar bo'yicha uzunlik masshtablari maksimal va minimal qiymatlarga ega hisoblanadi. Ushbu yo'nalishlarning proyeksiyada qanday burchak ostida kesishishini tahlil qilamiz.

Proyeksiyada α_0 azimut β_0 azimutga va ($\alpha_0 + 90^o$) azimut esa – β_1 azimutga mos keladi. (*29*) tenglamaga muvofiq quyidagi tenglik o'rinli:

$$t\beta_0 = Mh/(erctg\alpha_0 + Mf)$$

$$tg\beta_1 = Mh/(-ertg\alpha_0 + Mf).$$

Agar, $\beta_1 = \beta_0 + 90^o$ tenglik o'rinli hisoblansa, u holda ushbu azimutlarning hosila tangensi qiymati minus birga teng bo'lishi kerak:

$$t\beta_0 tg\beta_1 = \frac{M^2h^2}{-e^2r^2 + Mfer(ctg\alpha_0 - tg\alpha_0) + M^2f^2} = -1.$$

Ma'lumki,

$$ctg\alpha_0 - tg\alpha_0 = 2ctg2\alpha_0.$$

(*38*) formuladan

$$2ctg2\alpha_0 = (er^2 - gM^2)/Mfr, \text{ undan:}$$

$$t\beta_0 tg\beta_1 = \frac{M^2h^2}{-e^2r^2 + e^2r^2 - egM^2 + M^2f^2} = \frac{h^2}{f^2 - eg} - 1,$$

o'z navbatida, $\beta_1 = \beta_0 + 90^o$ tenglik kuchga ega bo'ladi.

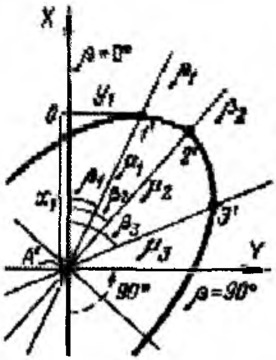
Kartaga olinayotgan yuzada ikkita o'zaro perpendikulyar holatda joylashgan yo'nalishlar mavjud, ular proyeksiyada ham o'zaro perpendikulyar holatda bo'ladi. Bularni *asosiy yo'nalishlar* sifatida qabul qilamiz va bu yo'nalishlar bo'yicha masshtablar ekstremal hisoblanadi. Agar karta to'ri ortogonal bo'lsa, u holda asosiy yo'nalishlar meridianlar va parallellar bilan mos tushadi.

6-§. Xatoliklar ellipsi. Ekstremal masshtablar. Uzunlik xatoligi o'lchamlari

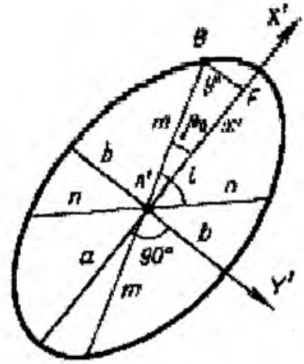
Markazi *A* nuqtada bo'lgan cheksiz darajada kichik radiusga ega, kartaga olinayotgan doira yuzasini qarab chiqamiz va bu doiraning proyeksiyada qanday tasvirlanishini o'rganamiz. Berilgan nuqtada uzunlikning xususiy masshtabi α azimutga bog'liq; kartaga olinayotgan yuzada α_1 azimut proyeksiyada β_1 azimutga mos keladi (*7-rasm*), ushbu yo'nalish bo'yicha masshtabni μ_1 bilan belgilaymiz;

α_2 azimut proyeksiyada β_2 azimutga mos keladi, bu yo'nalish bo'yicha uzunlik masshtabini μ_2 bilan ifodalaymiz va h.k.

Kartaga olinayotgan yuzada berilgan A nuqtaning tasviri bo'lgan A' nuqtadan meridian tasviri bilan tashkil etiluvchi yo'nalishni o'tkazamiz, bu yo'nalish X o'q sifatida qabul qilinadi, burchaklar β_1, β_2 va hokazo qiymatlar bilan ifodalanadi.



8-rasm. **Xatoliklar ellipsi elementlari**



7-rasm. **Xatoliklar ellipsini qurish sxemasi**

Ushbu yo'nalishlarda μ_1, μ_2 va h.k. uzunlikning xususiy masshtablari son qiymatlariga teng bo'lgan kesmalarni tushiramiz. Kesimlarning oxirgi nuqtalarini tutashtirish oraqli, uzunlik masshtabining azimutga bog'liqligini ko'rsatib beruvchi egri chiziqni hosil qilamiz.

To'g'ri burchakli koordinatalar boshlang'ich nuqtasi sifatida A' nuqtani yassi qutbli koordinatalar uchun qutblarni kiritgan hoatda (β va μ) qabul qilib, quyidagi tenglamani yozishimiz mumkin:

$$x = \mu\cos\beta; \quad y = \mu\sin\beta, \qquad (39)$$

bundan

$$\cos\beta = x/\mu; \quad \sin\beta = y/\mu. \qquad (40)$$

(*40*) tenglamadagi qiymatni (*39*) tenglamaga qo'yish orqali, A' nuqtada belgilangan koordinatalar tizimining markaziy egri chizig'i ikkinchi tartibdagi tenglamasini hosil qilamiz:

$$P_1x^2 + 2Q_1xy + R_1y^2 = 1.$$

Keltirilgan oxirgi tenglamani tadqiq qilib, diskriminant qiymatini topamiz:

$$P_1R_1 - Q_1^2 = \frac{M^2r^2}{h^2} > 0$$

va o'rganilayotgan egri chiziq ellips ekanligini aniqlaymiz. Demak, umumiy holatda (cheksiz kichik qismlarga o'xshashlik saqlanmagan tasvir sharoitida) kartaga tushiriluvchi yuzada cheksiz darajadagi kichik doira proyeksiyada cheksiz darajada kichik ellips bilan tasvirlanadi. Ushbu cheksiz darajada kichik o'lchamdagi ellipsga mos keluvchi yakuniy o'lchamdagi ellips *ellips xatoligi* deb nomlanadi. Ellips xatoligi tushunchasi matematik kartografiyaga Tisso tomonidan kiritilgan.

Bu ellipsning yarim o'qlari qiymati ekstremal masshtablarga, tutash yarim diametrlari esa – meridian va parallellar bo'yicha masshtablarga mos keladi (8-rasm). Ellipsoidning (*sfera*) meridian va parallellari har doim o'zaro perpendikulyar. Bunda proyeksiya afinaviy o'zgartirish tavsiflariga ega bo'lib, yo'nalish tekisligida o'zaro perpendikulyar holatda tasvirlanuvchi ellips xatoligi diametri boshqa diametrlarga parallel holatdagi xordani (*xorda* – egri chiziqning ikkita nuqtasini tutashtiruvchi to'g'ri chiziq) ikki qismga ajratadi, ya'ni tutash ko'rinishda qayd qilinadi.

Xatoliklar ellipsining meridianlar va parallellar chiziqlariga nisbatan oriyentirlanishini aniqlash uchun ellipsning quyidagi ko'rinishdagi umumiy tenglamasidan foydalanamiz:

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1.$$

Bunga (*39*) formuladagi x va y qiymatlarni qo'yish orqali, xususiy holatda (meridianlar uchun) $\mu = m$ va $\beta = -\beta_0$ (soat strelkasi yo'nalishiga qarma-qarshi yo'nalishda) sharti bo'yicha quyidagi tenglikni olamiz:

$$\frac{m^2\cos^2\beta_0}{a^2} + \frac{m^2\sin^2\beta_0}{b^2} = 1.$$

Trigonometrik funksiyalar nazariyasidan ma'lumki,

$\cos^2\beta_0 = 1/(1+tg^2\beta_0)$; $\sin^2\beta_0 = tg^2\beta/(1+tg^2\beta_0)$, undan

$$\frac{m^2}{a^2(1+tg^2\beta_0)} + \frac{m^2 tg^2\beta_0}{b^2(1+tg^2\beta_0)} = 1;$$

$$a^2(m^2-b^2)tg^2\beta_0=b^2(a^2-m^2);$$

$$tg\beta_0=\frac{b}{a}\sqrt{\frac{a^2-m^2}{m^2-b^2}}. \qquad (41)$$

Proyeksiyaning xohlagan nuqtasida ellipsni tuzish uchun yuqorida keltirilgan oltita qiymatni bilish kerak: ya'ni – m, n, a, b, i (yoki ε) va β_0. Ellipsga nisbatan Appoloniy qoidasini tadbiq etish orqali, ekstremal masshtab bilan meridian va parallellar bo'yicha masshtab o'rtasidagi bog'liqlikni topish mumkin.

1-qoida. Ellipsning tutashgan yarim diametrlari kvadratlari yig'indisi – doimiy qiymat bo'lib, uning yarim o'qlari kvardratlari yig'indisiga teng:

$$m^2+n^2=a^2+b^2.$$

2-qoida. Ellipsning tutash yarim diametrlari asosida tuzilgan parallelogrammning maydoni doimiy qiymat bo'lib, uning yarim o'qlari asosida tuzib chiqilgan to'g'riburchak maydoniga teng:

$$mn\sin i=ab. \qquad (42)$$

Keltirilgan tenglamalarni birgalikda yechamiz (keltirilgan oxirgi tenglamaning har ikkala qismini ikkiga ko'paytirish orqali):

$$m^2+n^2+2mn\sin i=(a+b)^2;$$

$$m^2+n^2-2mn\sin i=(a-b)^2$$

va A va V ning yangi ifodalanishlarni kiritamiz:

$$A=a+b=\sqrt{m^2+n^2+2mn\sin i};$$

$$B=a-b=\sqrt{m^2+n^2+2mn\sin i}.$$

Bu holatda asl ekstremal masshtablar quyidagi tenglama bilan ifodalanadi:

$$a=(A+B)/2;\;\; b=(A-B)/2. \qquad (43)$$

$\sin i$ qiymati (*34*) formuladan ma'lum.

Hozirgi vaqtda proyeksiyaning alohidagi nuqtalarida xatoliklarni tavsiflash uchun ko'p holatlarda *izokola*lardan foydalaniladi, izokolalar – teng xatolikli chiziqlar bo'lib, ular kartada turli xil xatoliklarning qiymati va taqsimlanish xarakteri haqida ko'rgazmali tasavvurga ega bo'lishni ta'minlaydi.

Xatoliklarni aniqlashda berilgan yo'nalish bo'yicha nuqtada uzunlik xatoligiga nisbatan o'lchovlarni barcha yo'nalishlar bo'yicha nuqtalardagi uzunlik xatoliklaridan, butun kartaga olinayotgan hudud bo'yicha uzunliklar xatoliklari o'lchamlaridan farqlash muhim hisoblanadi.

Berilgan nuqtada uzunlik xatoligi o'lchovini ε qiymat bilan belgilashni qabul qilamiz. Bu qiymatni asosiy yo'nalish bo'yicha uzunlikni o'rtacha kvadratli xatoligi bo'yicha tavsiflash mumkin:

$$\varepsilon_1^2 = \frac{1}{2}\left[(a-1)^2 + (b-1)^2\right] = \frac{1}{2}(\upsilon_a^2 + \upsilon_b^2) = \frac{1}{2}(\ln^2 a + \ln^2 b)$$

yoki barcha yo'nalishlar bo'yicha olsak, u holda

$$\varepsilon_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\mu-1)^2 d\alpha = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\upsilon_\alpha^2 d\alpha = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln^2\mu d\alpha.$$

Butun kartaga olinayotgan hududda uzunlik xatoligi o'lchovi quyidagi formula bilan aniqlanishi mumkin:

$$E_1^2 = \frac{1}{F}\int_F \varepsilon_1^2 dF \quad \text{yoki} \quad E_2^2 = \frac{1}{F}\int_F \varepsilon_2^2 dF,$$

bu yerda F – tasvirlanayotgan hudud maydoni. Qiymat E_1^2 *Eyri mezoni*, E_2^2 – *Iordan mezoni* deyiladi.

Kartografik proyeksiyalarning munosibligini baholash uchun yuqorida ko'rsatib o'tilgan xohlagan mezonlardan biridan foydalanish mumkin. Kartografiya amaliyotida integral yig'indi bilan almashtiriladi, bunda tasvirlanayotgan hudud ΔF uchastkalarga bo'linadi va har bir uchastka uchun ε qiymati hisobladi. Unda uzunlik o'rtacha kvadrat xatoligi formulasi quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$E = \sqrt{\frac{\Delta F}{F}\sum \varepsilon^2}.$$

7-§. Maydonlar xususiy masshtabi

Maydonlar xususiy masshtabi ta'rifidan kelib chiqib:

$$p = dF'/dF.$$

Kartaga olinayotgan yuzada cheksiz qiymatdagi kichik meridian va parallellar yoylari bilan chegaralangan elementar trapetsiya maydoni (9 *a*-rasm) quyidagi tenglama bilan ifodalanadi:

$$dF = ds_m ds_n.$$

Tekislikda 9 *b*-rasm orqali

$$dF' = ds'_m ds'_n \sin i.$$

Bundan maydon masshtabi tenglamasi

$$p = \frac{ds'_m}{ds_m} \cdot \frac{ds'_n}{ds_n} \sin i = mn \sin i. \qquad (44)$$

(42) formuladan $p = ab$ tenglikni olamiz.

Ma'lumki, $i = 90^\circ + \varepsilon$ unda:

$$p = mn \cos \varepsilon. \qquad (45)$$

Keltirilgan formulalarda maydon xususiy masshtabi uzunlik xususiy masshtablari orqali ifodalangan. Agar (*44*) formulaga uzunlikning xususiy masshtabi hamda meridian va parallellar o'rtasidagi sinus burchak qiymati qo'yilsa, u holda maydon xususiy masshtabi formulasi quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$p = \frac{\sqrt{e}}{M} \cdot \frac{\sqrt{g}}{r} \cdot \frac{h}{\sqrt{eg}} = \frac{h}{Mr}. \qquad (46)$$

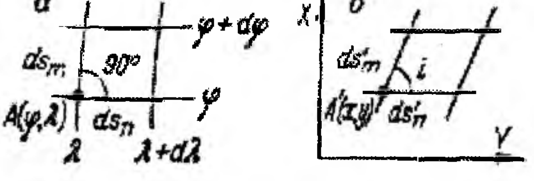
8-§. Burchaklar maksimal xatoligi

Kartaga olinayotgan yuzada ikkita yo'nalish asosida hosil bo'luvchi u burchak (10 *a*-rasm), tekislikda aks ettirilishida *(10 b-rasm)* u' qiymatni oladi:

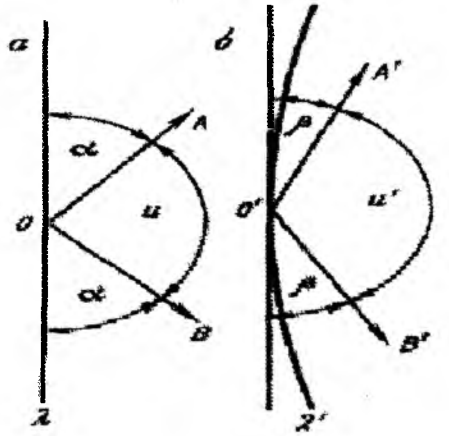
$$u = 180^\circ - 2\alpha; \quad u' = 180^\circ - 2\beta.$$

Bunda burchak xatoligi quyidagi tenglik bilan ifodalanadi: $u' - u = \Delta u = 2(\alpha - \beta)$, undan quyidagi tenglik kelib chiqadi:

$$\Delta u / 2 = \alpha - \beta.$$



9-rasm. **Elementar sferik trapetsiyalar**:
a – yuzada; b – tekislikda



10-rasm. **Ikkita yo'nalish o'rtasidagi Burchak:** *a – yuzada; b – tekislikda*

Ortogonal to'r ($f=0$) bilan ifodalanuvchi proyeksiya uchun (*30*) tenglama quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$tg\beta = \frac{M\sqrt{eg}}{er}tg\alpha = \frac{M}{\sqrt{e}}\frac{\sqrt{g}}{r}tg\alpha = \frac{n}{m}tg\alpha = \frac{b}{a}tg\alpha.$$

Keltirilgan oxirgi tenglamaning o'ng va chap qismlarini $tg\alpha$ qiymatidan ayirib tashlash va $tg\alpha$ qiymatga qo'shish orqali quyidagi tengliklarni hosil qilamiz:

$$tg\alpha - tg\beta = \frac{a-b}{a}tg\alpha;$$

$$tg\alpha + tg\beta = \frac{a+b}{a}tg\alpha,$$

keyin yuqoridagi tenglamani quyidagi tenglamaga bo'lish orqali, bir vaqtning o'zida o'zaro farqlanishni va tangenslar yig'indisi qiymatini ularning qiymatiga quyida keltirilgan, ma'lum bo'lgan tenglamadan kelib chiqqan holatda o'rin almashtirishni amalga oshiramiz:

$$tg\alpha \pm tg\beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

Bu holatda quyidagi tengliklar hosil qilinadi:

$$\sin(\alpha-\beta)/\sin(\alpha-\beta) = (a-b)/(a+b);$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\frac{\Delta u}{2} = \frac{a-b}{a+b}\sin(\alpha+\beta).$$

Agar quyidagi tenglik qiymati amal qilsa, u holda Δu qiymati nisbatan yuqorida bo'lishi mumkin:

$$\sin(\alpha + \beta) = 1.$$

Nisbatan katta qiymatdagi burchak xatoligini ω bilan ifodalaymiz. Bu holatda:

$$\sin(\omega/2) = (a - b)/(a + b), \qquad (47)$$

bu yerdan:

$$\cos(\omega/2) = \sqrt{1 - \sin^2(\omega/2)} = 2\sqrt{ab}/(a + b);$$

$$tg(\omega/2) = (a - b)/2\sqrt{ab}; \qquad (48)$$

$$tg\frac{\omega}{4} = \sqrt{\left(1 - \cos\frac{\omega}{2}\right)/\left(1 + \cos\frac{\omega}{2}\right)} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})/(\sqrt{a} + \sqrt{b});$$

$$tg\left(45^\circ + \frac{\omega}{4}\right) = \left(1 + tg\frac{\omega}{4}\right)/\left(1 - tg\frac{\omega}{4}\right) = \sqrt{a/b}. \qquad (49)$$

Amaliyotda burchak xatoligini aniqlash uchun hisoblashlarni amalga oshirish osonroq bo'lgan formuladan foydalaniladi. Jumladan, teng qiymatga ega proyeksiyalarni hisoblashda tangenslar formulasidan foydalanish maqsadga muvofiq bo'lib, bunda $p = 1$ sharoitda bu formula nisbatan oddiy ko'rinishga ega bo'ladi.

9-§. Tekislikda ellipsoidni teng maydonli va teng burchakli tasvirlash

Matematik kartografiyada teng burchakli va teng maydonli proyeksiyalardan keng miqyosda foydalaniladi. Teng burchakli tasvirlashning asosiy sharti – cheksiz kichik qismlarda o'xshashliklarni ta'minlashdir, demak uzunlik masshtabi yo'nalishga bog'liq emas. Agar uzunlik masshtabi yo'nalishga bog'liq bo'lmasa, u holda uning azimut bo'yicha hosilasi (α) nolga teng bo'ladi:

$$d\mu^2 / d\alpha = (R - P)\sin 2\alpha + 2Q\cos 2\alpha = 0.$$

Bu tenglik faqat $Q = 0$ va $P = R$ holatlardagina amal qiladi.

(24) tenglamaga muvofiq holatda, quyidagi tengliklar olinadi:

$$f/Mr=0; \quad e/M^2=g/r^2 \qquad (50)$$

yoki quyidagi tengliklar amal qiladi:

$$f=0; \quad m^2=n^2; \quad m=n.$$

Demak teng burchakli proyeksiyalarda kartografik to'r ortogonal bo'lib, masshtab $m=n=a=b$ yo'nalishga bog'liq bo'ladi va burchak xatoligi proyeksiyada qayd qilinmaydi, $\omega=0$.

Agar (50) formulada e, f va g qiymatlar o'z o'rniga qo'yilsa, u holda quyidagi tenglik kelib chiqadi:

$$x_\varphi x_\lambda + y_\varphi y_\lambda = 0;$$

$$\frac{1}{M^2}(x_\varphi^2+y_\varphi^2)=\frac{1}{r^2}(x_\lambda^2+y_\lambda^2).$$

Birinchi tenglamadan y_λ qiymatni olib, uni ikkinchi tenglamaga qo'yish orqali quyidagi tenglikni hosil qilamiz:

$$x_\lambda=\pm\frac{r}{M}y_\varphi,$$

x_λ qiymatni aniqlash orqali, topamiz:

$$y_\lambda=\pm\frac{r}{M}x_\varphi.$$

Hosil qilingan tenglamalarda h qiymatning musbat qiymatga ega bo'lishini qayd qiluvchi ishorani tanlaymiz. Teng burchakli proyeksiya tenglamasining yakuniy holatdagi ko'rinishi *Koshi-Riman tenglamasi* deb nomlanadi:

$$x_\lambda=-\frac{r}{M}y_\varphi; \quad y_\lambda=+\frac{r}{M}x_\varphi. \qquad (51)$$

Teng maydonli tasvirlashda kartada tegishli maydonga kartaga olinayotgan yuzaning tegishli maydoni nisbatlari o'zgarmas holatda saqlanadi. Bunda maydon masshtabi $p=const=1$ bilan belgilanadi. (46) formuladan kelib chiqqan holatda

$p=h/Mr=1$ olish mumkin, bundan ellipsoid uchun:

$$h=Mr \qquad (52)$$

($p=const$ holat uchun $h=kMr$, bu yerda k – doimiy koeffitsiyent), shar yuzasi uchun quyidagi tenglik o'rinli:

$$h=R^2\cos\varphi.$$

Nazorat savollari

1. *Meridian va parallellar chiziqlari qanday hosil qilinadi?*
2. *Meridian va parallellar tenglamasini yozib bering.*
3. *Uzunlik xususiy masshtabiga ta'rif bering.*
4. *Uch o'qli ellipsoid koordinatalari tizimi haqida tushuncha bering.*
5. *Kartografik to'r ortogonallik sharti formulasini yozing.*
6. *Tekislikda ellipsoidni teng maydonli va teng burchakli tasvirlash deganda nimani tushunasiz, izoh bering.*

II BOB
SHAR SIRTIDA AYLANMA ELLIPSOIDNI TASVIRLASH

10-§. Shar sirtida aylanma ellipsoidni tasvirlash haqidagi asosiy tushunchalar

Kartografik proyeksiyalar ellipsoidni bevosita tekislikda tasvirlash yo'li bilan yoki ikki martalik tasvirlash usuli bilan hosil qilinishi mumkin, bunda ellipsoid dastlab shar yuzasida tasvirlanadi, keyin esa shar tekislikda aks ettiriladi.

Kartografik amaliyotda ikki martalik tasvirlash usuli proyeksiyadagi xatoliklarni kamaytirish, ularni yanada yaxshiroq darajada proyeksiyada taqsimlash, mehnat va vaqtni tejash nuqtayi nazaridan olib qaralganda, nisbatan oddiy va samarali usul hisoblanadi. Ko'rsatib o'tilgan yuzalarda tasvirlashning vazifalarini hal qilishning asosiy qoidalarini qarab chiqamiz.

Olaylik, S ellipsoidda bitta bog'lamli Δ_1 yopiq soha (hudud) ajratilgan bo'lsin, u shar yuzasida tegishli Δ_2 soha unga mos kelsin va ularda quyidagi koordinatalar tizimi belgilansin: birinchi sohada – geodezik koordinatalar tizimi $\varphi = const$ va $\lambda = const$ qabul qilinsin, ikkinchi sohada esa – geografik koordinatalar tizimi qabul qilinsin, $\varphi' = const$ va $\lambda' = const$.

Birinchi sohaning har bir nuqtasi ikkinchi sohaning bitta nuqtasiga mos tushishi talabini belgilaymiz, unda ushbu nuqtaning cheksiz qiymatda kichik ds siljishi natijasida ikkinchi sohada tegishli nuqtaning cheksiz kichik qiymatga ($d\sigma$) siljishi yoki aksincha holat sharti ta'minlanishi talabi qondiriladi, deb hisoblaymiz. U holda, ellipsoidning shar yuzasida tasvirlanishi tenglamasi umumiy holatda quyidagi ko'rinishda yozilishi mumkin:

$$\varphi' = f_1(\varphi, \lambda); \quad \lambda' = f^2(\varphi, \lambda),$$

bu yerda f_1, f_2 – bir xil qiymatga ega bo'lgan, uzluksiz va mustaqil funksiyalar.

Hozirgi paytda bu ko'rinishda tavsirlashlarning ko'plab har xil usullari ishlab chiqilgan, masalan, geodezik tasvirlash (jumladan, Bessel usuli ham), normallar bo'yicha mos kelish usuli va h.k. Nisbatan oddiy usul sifatida qutb siqilishini e'tiborga olmasa ham bo'ladigan hamda ellipsoid va sharning kenglik va uzoqlik qiymatlari teng deb hisoblanadigan usul ko'rsatib o'tiladi, ya'ni: $\varphi' = \varphi$ va $\lambda' = \lambda$. Bu holatda ellipsoidning o'rnini bosadigan shar radiusini xatolikni kamaytirish uchun kartaga olinayotgan hududning o'rta parallellarining o'rta egrilik radiusi (φ_0) sifatida aniqlanadi:

$$R = \sqrt{M_0 N_0},$$

yoki ushbu hududni chetki parallellaridagi – $\varphi_{ж}$ va $\varphi_{ш}$ o'rtacha egrilik radiusi sifatida aniqlanadi:

$$R = \sqrt{R_{ж} R_{ш}}.$$

Ayrim holatlarda shar yer ellipsoidi hajmiga teng deb olinadi va bunday vaziyatda:

$$R = \sqrt[3]{a^2 b}.$$

bu yerda M, N – meridian kesmaning va birinchi vertikalning kesmasi egrilik radiuslari qiymatlari bo'lib, (*3*) formula bilan aniqlanadi; a va b – aylanma ellipsoidning yarim o'qlari.

Tasvirlashning ko'rsatib o'tilgan usuli mayda masshtabli kartalarni tuzishda foydalanilishi mumkin, bunday tasvirlashda xatoliklarni hisobga olmaslik mumkinligi belgilanadi. Matematik kartografiyada teng burchakli, teng maydonli va teng oraliqli tasvirlash usullari nisbatan keng tarqalgan.

Nisbatan ko'p holatlarda foydalaniladigan usullarda ellipsoid va shar ekvator tekisliklari hamda ularning markazlari o'zaro mos tushadi, deb taxmin qilinadi, ellipsoidning parallellari shar parallellari sifatida tasvirlanadi; ularning o'rta meridianlari o'zaro mos tushadi va nolga teng uzoqlikda, qolgan boshqa barcha meridianlar uzoqligi proporsional, ya'ni ellipsoidning meridianlari va parallellari shar sirtida ortogonal holatda tasvirlanadi, o'z navbatida, tasvirdagi asosiy yo'nalishlar meridianlar va parallellar bilan mos tushadi. Bu usullardan tashqari, ayrim holatlarda o'q (o'rta) meridian uzunligi saqlanishi bilan birgalikdagi tasvirlash usulidan foydalaniladi. Oxirgi vaqtlarda shar yuzasida ellipsoidni perspektiv tasvirlash usullaridan foydalanish rivojlanib bormoqda.

Bunday tasvirlashda hisoblash aniqligi e^4 qismgacha aniqlikda saqlanishida (matematik kartografiya va fotogrammetriyada mutlaqo ko'pchilik masalalarning yechimlari uchun to'liq holatda yetarli bo'lgan darajada) meridian va parallellar ham shar yuzasida ortogonal tasvirlanadi. Ellipsoid (ds) va sharning ($d\sigma$) chiziqli elementlari kvadrat qiymatlarini quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$ds^2 = M^2 d\varphi^2 + r^2 d\lambda^2;$$

$$d\sigma^2 = R^2 d\varphi'^2 + R^2 \cos^2 \varphi' d\lambda'^2,$$

bunda: R – shar radiusi; $R\cos\varphi'$ – sharda parallel egriligi radiusi. Bu holatda, uzunlik xususiy masshtablari xohlagan yo'nalishlarda quyidagi ko'rinishga ega:

$$\mu^2 = \frac{R^2 d\varphi'^2 + R^2 \cos^2 \varphi' d\lambda'^2}{M^2 d\varphi^2 + N^2 \cos^2 \varphi d\lambda^2},$$

Meridianlar bo'ylab yo'nalishda esa:

$$m = \frac{R d\varphi'}{M d\varphi},$$

Parallellar bo'ylab yo'nalishda:

$$n = \frac{R\cos\varphi' d\lambda'}{N\cos\varphi d\lambda} = \alpha \frac{R\cos\varphi'}{N\cos\varphi}, \tag{53}$$

bu yerda: α – uzoqlikning proporsionallik koeffitsiyenti.

Yuqorida ko'rsatib o'tilgan tasvirlash usullari formulalarini hosil qilamiz. Bunda faqat o'rta meridianga nisbatan meridianlar va parallellar simmetrik holatda tasvirlanilishi vaziyatlari qarab chiqiladi.

11-§. Shar sirtida ellipsoidni teng burchakli tasvirlash

Teng burchaklilik shartini quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$m = n = \mu$$

yoki (*53*) formulani hisobga olgan holatda:

$$\frac{Rd\varphi'}{Md\varphi}=\alpha\frac{R\cos\varphi'}{N\cos\varphi};$$

$$\frac{d\varphi'}{\cos\varphi}=\alpha\frac{Md\varphi}{r}=\alpha\frac{Md\varphi}{N\cos\varphi}.$$

Ushbu differensial tenglamaning integrallanishi teng burchakli tasvirlash usullari guruhini olish imkonini beradi. Ulardan ayrimlarini qarab chiqamiz. Buning uchun dastlab, (3) tenglamani hisobga olgan holatda, yuqorida keltirilgan differensial tenglamani qaytadan yozishni quyidagi ko'rinishda amalga oshiramiz:

$$\frac{d\varphi'}{\cos\varphi'}=\alpha\frac{1-e^2}{1-e^2\sin^2\varphi}\frac{d\varphi}{\cos\varphi}.$$

Sur'atda e^2 qiymatni $(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)$ qiymatga ko'paytirish orqali va $\sin\psi=e\sin\varphi$ ifodani kiritish bilan tenglamani hosil qilamiz:

$$\frac{d\varphi'}{\cos\varphi'}=\alpha\frac{\left[(1-e^2\sin^2\varphi)-e^2\cos^2\varphi\right]d\varphi}{1-e^2\sin^2\varphi}=\alpha\frac{d\varphi}{\cos\varphi}-\alpha e\frac{d\varphi}{\cos\psi}.$$

Ushbu differensial tenglamani integrallash va jadvalli integralni hisobga olib,

$$\int\frac{d\varphi'}{\cos\varphi'}=\ln tg(45^\circ+\varphi'/2),$$

quyidagi tenglamni hosil qilamiz:

$$\ln tg(45^\circ+\psi'/2)+\ln C=\alpha\ln tg(45^\circ+\varphi/2)-\frac{e}{2}\alpha\times\ln\frac{1+e\sin\varphi}{1-e\sin\varphi}+\ln C$$

yoki

$$tg(45^\circ+\varphi'/2)=CU^\alpha, \qquad (54)$$

bu yerda

$$U=\frac{tg(45^\circ+\varphi/2)}{tg^e(45^\circ+\psi/2)}=tg(45^\circ+\varphi/2)\left(\frac{1-e\sin\varphi}{1+e\sin\varphi}\right)^{e/2}. \qquad (55)$$

$q'=\ln tg(45^\circ+\varphi'/2)$ va $q=\ln U$ qiymatlar mos ravishda – shar va ellipsoid yuzalarining *izometrik kengliklari* deb ataladi. Izometrik uzoqliklar geodezik uzoqliklar bilan mos tushadi. (*54*), (*55*) formulalar asosida aniq teng burchakli tasvirlash usullarini osonlik bilan hosil qilish mumkin.

Molveyde teng burchakli tasvirlash usuli 1807-yilda tavsiya etilgan, bunda tasvir quyidagi ko'rinishdagi boshlang'ich shartlar bilan tavsiflanadi: uzunlik ekvatorda saqlanadi, ellipsoid va sfera uzoqliklari $\varphi = 0$ sharoitda $\varphi' = 0$.

Teng burchakli tasvirlashda sferik kenglik qiymati taxminiy formula yordamida aniqlanishi mumkin (e^4 qismgacha aniqlik bilan).

$$\varphi' = \varphi - A\sin 2\varphi + B\sin 4\varphi, \qquad (56)$$

bu yerda Krasovskiy ellipsoidi uchun

$$A = \frac{e^2}{2} + \frac{5}{24}e^4 = 692{,}23'';$$

$$B = \frac{5}{48}e^4 = 0{,}96''.$$

(*56*) formula bo'yicha sferik kenglik qiymatining aniqligi 0,1" ni tashkil qiladi.

Sferoid va sferik kengliklar qiymatlari o'rtasidagi nisbatan katta farqlanish $\varphi = 45°$ kenglikdagi parallellarda kuzatiladi va 11' bo'ladi. Butun sekund sferik kenglik qiymati maxsus jadvaldan olinishi mumkin. Uzunlikning xususiy masshtabi formulasi qatorlar bo'yicha parchalanishdan foydalanish asosida ham keltirib chiqarilishi mumkin. Bunda e^2 qismlargacha aniqlikda

$$m = n = \frac{R}{a}(1 + \frac{e^2}{2}\sin^2\varphi).$$

Uzunlikning 0,3% qiymatdagi maksimal xatoligi qutblarda kuzatiladi. Ushbu aniqlik darajasida maydonlar xususiy masshtablari quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$p = m^2 = \frac{R^2}{a^2}(1 + e^2\sin^2\varphi),$$

bu yerda shar radiusi $R = a$; a – yer ellipsoidining katta yarim o'qi. Ma'lumki, Krasovskiy ellipsoidi uchun $R = a = 6378245$ m ga teng.

Agar boshlang'ich belgilashlarda uzunlik ekvatorda emas, balki φ_k kenglikli parallellarda saqlanadi, degan sharti qo'yilsa, unda keltirilgan formulalar haqqoniy hisoblanadi, shar radiusi esa quyidagi tenglama asosida aniqlanadi:

$$R = a\left(1 - \frac{e^2}{2}\sin^2\varphi_k\right).$$

Bu holatda izokolalar parallellar bilan mos tushadi.

Shuningdek, Gauss tomonidan ishlab chiqilgan teng burchakli tasvirlash usuli ham mavjud, bu usulni u 1825-yilda tavsiya qilgan. U Molveyde usulidan farq qiladi, bunda uzunlik ekvatorda saqlanmasdan, balki tasvirlanayotgan sohaning φ_0 o'rta parallellarida saqlanadi. Gauss formulalari V.P. Morozov tomonidan qayta o'zgartirilgan va bu formulalar EHM yordamida yechish uchun qulay shaklga keltirilgan. Aytish mumkinki, ikki martalik tasvirlash usulida proyeksiyalarni olishda ellipsoiddan shar yuzasiga o'tishda ma'lum darajala aniqlikdagi taxminiy formulalar (*56*) asosida amalga oshiriladi. Bu usulning nisbatan aniqroq formulalari sferoidik geodeziya darsliklarida keltirilgan.

12-§. Ellipsoidni shar sirtida teng maydonli va teng oraliqli tasvirlash

Teng maydonli tasvirlash sharti bo'yicha

$$p = mn = 1.$$

(*53*) tenglamani hisobga olgan holatda va sfera uchun geografik kenglikni φ'' bilan belgilab olamiz:

$$\cos\varphi'' d\varphi'' = \frac{\alpha}{R^2} Mr d\varphi = \frac{\alpha}{R^2} MN \cos\varphi d\varphi.$$

(*3*) formuladan *M, N* qiymatlarni qo'yib, quyidagi tenglikni hosil qilamiz:

$$\cos\varphi'' d\varphi'' = \frac{\alpha a^2}{R^2} \frac{(1-e^2)\cos\varphi d\varphi}{(1-e^2\sin^2\varphi)^2};$$

$$\cos\varphi'' d\varphi'' = \frac{\alpha a^2}{R^2}(1-e^2)(1+2e^2\sin^2\varphi + 3e^4\sin^4\varphi + \ldots)\cos d\varphi.$$

Integrallashdan keyin:

$$\sin\varphi'' = \frac{\alpha a^2}{R^2}(1-e^2)\left(\sin\varphi + \frac{2}{3}e^2\sin^3\varphi + \frac{3}{5}e^4\sin^5\varphi \ldots\right) + C.$$

α doimiy qiymatni, sharning R radiusini va integrallash doimiysini S aniqlash shartlarga bog‘liq holatda shar yuzasida ellipsoid yuzasini teng maydonli tasvirlash usullari guruhlarini hosil qilish mumkin.

Quyidagi boshlang‘ich shartlar qabul qilingan usulni qarab chiqamiz: ekvatorda va qutbda kengliklar $\varphi_0'' = \varphi_0 = 0$, $\varphi_{90}'' = 90°$ barcha uzoqliklar $\lambda'' = \lambda$, unda $\alpha = 1$ va $C = 0$.

Shar radiusini ellipsoid va shar yuzalari maydoni tengligi shartidan kelib chiqib aniqlaymiz, bunda quyidagi tenglik olinadi:

$$R^2 = a^2(1-e^2)\left(1+\frac{2}{3}e^2+\frac{3}{4}e^4+...\right) = a^2\left(1-\frac{e^2}{3}-\frac{e^4}{15}+...\right);$$

$$R = a\left(1-\frac{e^2}{6}-\frac{17}{360}e^4+...\right).$$

Bu qiymatni $\sin\varphi''$ formulaga qo‘yish orqali

$$\sin\varphi'' = \sin\varphi\left[a_1'' + \sin^2\varphi(a_3'' + a_5''\sin^2\varphi + ...)\right],$$

bunda

$$a_1'' = 1-\frac{2}{3}e^2-\frac{7}{45}e^4+...; \qquad a_3'' = \frac{2}{3}e^2-\frac{4}{9}e^4+...; \qquad a_5'' = \frac{3}{5}e^4+...$$

Ushbu formulalar bo‘yicha φ'' nuqtaning sferik kengligi qiymatini geodezik kengliklar bo‘yicha (e^4 qismgacha aniqlikda) osonlik bilan hisoblab chiqish mumkin. Ko‘rsatib o‘tilgan formulalarni boshqacha ko‘rinishda yozish ham mumkin:

$$\sin\varphi'' = \sin[(\varphi''-\varphi)+\varphi].$$

$(\varphi''-\varphi) = \Delta\varphi$ qiymatning kichikligini hisobga olib, $\Delta\varphi$ daraja bo‘yicha Teylor qatoriga bo‘lib chiqamiz, hosil qilingan qator bo‘yicha amallarni bajaramiz va uning tarkibidagi daraja funksiyalarni karrali argumentga almashtiramiz. O‘zgartirishlardan keyin e^6 qismgacha aniqlikda quyidagi tenglamani hosil qilamiz:

$$\varphi'' = \varphi - A_1\sin 2\varphi + B_1\sin 4\varphi - ..., \qquad (57)$$

bu yerda

$$A_1 = \frac{e^2}{2}+\frac{31}{180}e^4+...; \qquad B_1 = \frac{17}{360}e^4+...$$

Krasovskiy ellipsoidi elementlarini hisobga olgan holda yozish mumkin:

$$A_1 = 461{,}81''; \quad B_1 = 0{,}44''.$$

Mos holda, teng maydonli tasvirlashda shar radiusi $R = 6371116$ m ga teng. Ushbu proyeksiyada uzunlikning xususiy masshtablari (53) formula bo'yicha topilishi mumkin. Shunday qilib, parallellar bo'yicha uzunlikning xususiy masshtabi quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$n = R\cos\varphi'' / N\cos\varphi,$$

Nyuton binomi bo'yicha e^4 aniqlikda qayta o'zgartirishdan keyin tenglik olinadi:

$$n = 1 - \frac{e^2}{6}\cos^2\varphi + \ldots$$

$$p = mn = 1$$

teng maydonli tasvirlash bo'lgani uchun, unda

$$m = 1 + \frac{e^2}{6}\cos^2\varphi + \ldots$$

Eng katta burchak xatoligi formula bilan hisoblanadi:

$$\sin\frac{\omega}{2} = \frac{m-n}{m+n} = \frac{e^2}{3}\cos^2\varphi \ldots$$

yoki quyidagi tenglik bilan:

$$\omega = \frac{e^2}{3}\rho\cos^2\varphi.$$

φ va φ'' kenglik tafovuti $\varphi = 45^\circ$ parallelda 7'43,8" ga teng bo'ladi. Ushbu tasvirlashdagi izokolalar oldingisi kabi parallellar bilan mos tushadi. Uzunlik, maydonlar va burchaklarning maksimal xatoligi ekvator nuqtasida ($\varphi = 0$) yuzaga keladi va qiymatlari

$$n_э = 0{,}99; \quad m_э = 1{,}001; \quad \omega = 3{,}84'.$$

Shar yuzasida ellipsoidni teng oraliqli tasvirlashda uzunlikning meridianlar bo'yicha saqlanishi yoki parallellarda saqlanishi shartidan kelib chiqqan holatda hosil qilinadi.

Meridianlar bo'yicha teng oraliqli tasvirlash sharti

$$m = 1.$$

(53) formuladan φ', λ' qiymatlarni φ''', λ''' qiymatlarga almashtirishdan quyidagi differensial tenglamani hosil qilamiz:

$$d\varphi''' = \frac{M}{R} d\varphi,$$

Buni integrallash orqali (radian o'lchovida):

$$\varphi''' = \frac{s}{R} + C,$$

bu yerda R – shar radiusi; C – integrallash doimiysi; s – berilgan kenglik φ parallelidan ekvatorgacha meridian yoyi uzunligini ifodalab, sferoidik geodeziyada ma'lum bo'lgan quyidagi tenglama bilan aniqlanadi:

$$s = \frac{a}{1+n'}\left[\left(1+\frac{n'^2}{4}+\frac{n'^4}{64}+\ldots\right)\varphi - \left(\frac{3}{2}n' - \frac{3}{16}n'^3 - \ldots\right)\sin 2\varphi + \left(\frac{15}{16}n'^2 - \frac{15}{64}n'^4 + \ldots\right)\times \sin 4\varphi - \ldots\right],$$

bu yerda $n' = (a-b)/(a+b)$; a, b – ellipsoidning yarim o'qlari.

φ''' qiymatni maxsus jadvaldan olish ham mumkin. Shar radiusini (R) aniqlash uchun sharda va ellipsoidda ekvatordan qutbgacha meridianlar yoyi uzunligi teng bo'lgan holatni olamiz.

Bu holatda quyidagi tenglik kelib chiqadi:

$$R = \frac{s_0^{90}}{90^\circ}\rho = \frac{a}{1+n'}\left(1+\frac{n'^2}{4}+\frac{n'^4}{64}+\ldots\right).$$

Krasovskiy ellipsoidiga nisbatan $R = 6367558{,}5$ m ga teng.

Parallellar bo'yicha uzunlik va maydon xususiy masshtablari (e^2 qismgacha aniqlikda hisoblash saqlangan holatda) quyidagi formula bo'yicha aniqlanishi mumkin:

$$n = p = \frac{R\cos\varphi'''}{N\cos\varphi} = 1 - \frac{e^2}{4}\cos 2\varphi + \ldots$$

Burchak xatoligining nisbatan yirik qiymatda bo'lishi quyidagi tenglik bilan ifodalanadi:

$$\sin\left(\frac{\omega}{2}\right) = (N\cos\varphi - R\cos\varphi''')/(N\cos\varphi + R\cos\varphi''')$$

yoki (e^2 qismgacha aniqlikda):

$$\omega = \frac{e^2}{4}\rho\cos 2\varphi.$$

Parallellar bo'yicha teng oraliqli tasvirlash sharti

$$n = 1.$$

(53) tenglamadan quyidagi differensial tenglamani hosil qilamiz:

$$\cos\varphi''' = \alpha\frac{N\cos\varphi}{R}.$$

(3) formuladan kelib chiqib, N qiymatni hisobga olgan holda, quyidagi tenglikni yozamiz:

$$\cos\varphi''' = \frac{\alpha a}{R}\left(1+\frac{e^2}{2}\sin^2\varphi+\frac{3}{8}e^4\sin^4\varphi+...\right)\cos\varphi.$$

α, R qiymatlarga bog'liq holatda va berilgan boshlang'ich parallellar asosida parallellar bo'ylab teng oraliqli tasvirlash guruhlarini olish mumkin.

Bunda quyidagi boshlang'ich shartlar qabul qilingan faqat bitta usulni qarab chiqamiz: ekvtor va qutb kengligi $\varphi_0'''=\varphi_0=0$, $\varphi_{90}'''=\varphi_{90}=90°$; uzoqlik – $\lambda'''=\lambda$. Bunda, $\alpha=1$ va $R=a$.

Asosiy formula quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\cos\varphi''' = \frac{\cos\varphi}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{1/2}} = \cos\varphi\left(1+\frac{e^2}{2}\sin^2\varphi+\frac{3}{5}e^4\sin^4\varphi+...\right).$$

Bu yerdan:

$tg\varphi''' = (1-e^2)^{1/2}tg\varphi$, ya'ni bunday tasvirlashda kengligi – φ'' keltirilgan kenglikdan u tashkil topadi. Meridianlar bo'yicha uzunlik va maydon xususiy masshtablari formulasini quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$m = p = Rd\varphi'''/Md\varphi = \sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}/\sqrt{1-e^2} = 1+\frac{e^2}{2}\cos^2\varphi+\frac{e^4}{8}(3-2\sin^2\varphi-\sin 4\varphi)...$$

Burchak xatoligining nisbatan katta qiymati

$$\sin\frac{\omega}{2}=\frac{m-n}{m+n}$$

yoki (e^4 qismgacha aniqlikda):

$$\omega=\frac{e^2}{2}\rho\cos^2\varphi$$ hisoblanadi.

Qarab chiqilgan teng burchakli, teng maydonli va teng oraliqli tasvirlash usullaridan tashqari shunga o'xshash boshqa usullar ham ishlab chiqilgan. Masalan, tasvirni hosil qilish shartlarini quyidagicha ifodalab

$$m_0=1;\quad (dm/ds)_0=0;\quad (d^2m/ds^2)_0=0;$$

$$n_0 = 1; \quad (dn/ds)_0 = 0; \quad (d^2n/ds^2)_0 = 0.$$

K.Gauss, I. Frishauf va N.I. Bauman tomonidan mos holatda ellipsoidning shar yuzasida teng burchakli (Gaussning ikkinchi usuli), teng maydoni va teng oraliqli (meridianlar bo'ylab) tasvirlash usullari ishlab chiqilgan, bunda uzunlikning nisbiy xatoligi qiymatlari berilgan nuqtadan parallelgacha bo'lgan nisbatan kichik masofaning uchunchi darajasi qiymatida ifodalanadi.

Teng burchakli va boshqa tasvirlash usullari keng ko'lamda N.Y. Singer, V.P. Morozov va boshqa olimlarning ishlarida keltirilgan.

13-§. Ellipsoid meridianlari va parallellarining sferadagi tasvirlariga mos tushmaydigan ayrim tasvirlash usullari

O'q meridian uzunligi saqlangan holda teng burchakli tasvirlash. Boshlang'ich shartlar sifatida quyidagilarni kiritamiz:

– tasvir o'rta meridianga nisbatan simmetrik joylashgan;

– o'rta meridianlar uzoqligi – $\lambda_0 = \lambda'_0 = 0$, tasvirlanayotgan hudud uzoqligi bo'yicha kichik qiymatdagi cho'zilishga ega;

– o'rta (o'q) meridian yoylari uzunligi saqlanadi;

– ekvator va qutb kengliklari $\varphi'_0 = \varphi_0 = 0$, $\varphi'_{90} = \varphi_{90} = 90°$;

– tasvirlash teng burchakli tavsifga ega.

Birinchi va ikkinchi shartni hisobga olgan holda, (*1*) tenglamani $e = \lambda - \lambda_0$ daraja bo'yicha Teylor qatorlari qismlariga ajratamiz:

$$\varphi = \varphi'_{м} + a_2 e^2 + a_4 e^4 + ..;$$

$$\lambda = a_1 e + a_3 e^3 + a_5 e^5 + \ldots .$$

Uchinchi shartga muvofiq,

$$\varphi'_{м} = s / R,$$

bu yerda s – ma'lum bo'lgan formula asosida aniqlanuvchi meridian yoyining uzunligi:

$$s = \frac{a}{1+n'}\left[\left(1 + \frac{n'^2}{4} + \frac{n'^4}{64} + \ldots\right)\varphi - \left(\frac{3}{2}n' - \frac{3}{16}n'^3 + \ldots\right)\sin 2\varphi + \left(\frac{15}{16}n'^2 - \frac{15}{64}n'^4 + \ldots\right)\sin 4\varphi\right] + \ldots;$$

Shar radiusi – R, to'rtinchi shartga muvofiq:

$$R=\frac{a}{1+n'}\left(1+\frac{n'^2}{4}+\frac{n'^4}{64}+...\right).$$

S va R qiymatini hisobga olganda φ'_m ni hisoblash formulasi quyidagicha:

$$\varphi'_m=\varphi-\left(\frac{3}{2}n'-\frac{3}{16}n'^3-....\right)\sin 2\varphi+\left(\frac{15}{16}n'^2-\frac{15}{64}n'^4-...\right)\sin 4\varphi$$

Teng burchakli tasvirlash sharti bo'yicha:

$$\frac{\partial\lambda}{\partial e}=\frac{N\cos\varphi\partial\varphi''}{\cos\varphi'\partial s}\qquad\frac{\partial\varphi''}{\partial e}=\frac{N\cos\varphi\partial\lambda'}{\cos\varphi'\partial s}$$

Parallellar va meridianlar tenglamasini differensiallab $\varphi'=f_1$, (a,e), $\lambda=f_2(a,e)$ va olingan hosilani teng burchaklilik shartiga qo'yamiz. So'ngra Teylor qatoriga ajratamiz:

$$\cos\varphi=\cos[\varphi_m-(\varphi_m-\varphi)]$$

va cos φ qiymatni uning qatorlari qiymati bilan almashtiramiz. Shunda chap va o'ng tomon bir xil darajali koeffitsiyentlarini tenglashtirib, $a_i, \varphi', \lambda', \varphi$ va e koeffitsiyentlar qiymatlarini teng burchaklik sharti bo'yicha olish mumkin.

Qatorning kengligi 12^0 bo'lganda V.P. Morozov formulasi bo'yicha koordinatlarni 0,0001" xatolikda hisoblab chiqishimiz mumkin. Uzunlik va maydon xususiy masshtablarini kartografik proyeksiyalar umumiy nazariyasi formulalaridan va (53) ifodani nazarda tutib topish mumkin.

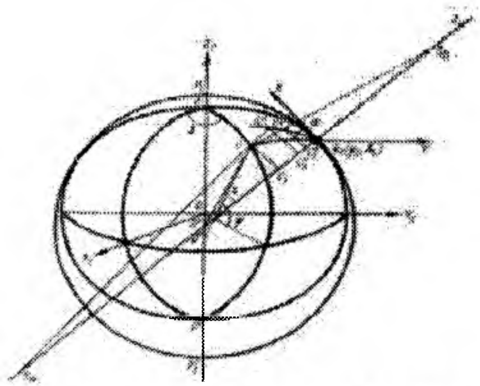
Berilgan nuqtada ellipsoidni shar sirtiga tegib turganda, shar sirtida ellipsoidni perspektiv tasvirlash usulining umumiy holatini ko'rib chiqamiz. Shar sirtida ellipsoidni tasvirlashda, botiqlik tomondan kartaga olinayotgan yuzaga qaralgandagi tasvir – negativ, qavariqlik tomondan esa – pozitiv deyiladi.

Shar sirtida ellipsoidni perspektiv negativ tasvirlash. Masalan, berilgan nuqtada $Q_0(\varphi_0,\lambda_0)$ aylanma ellipsoid shar sirtiga urinma, bu nuqta sferik koordinata tizimi qutbi bo'lsin *(11-rasm).*

Koordinata tizimini qayta o'zgartirishni bajaramiz:

– geosentrik koordinat tizimidan $OX_qY_qZ_q$ toposentrik gorizontal tizimga Q_0XYZ o'tamiz, unda qutb bosh nuqtasi $Q_0\varphi_0\lambda_0$ bo'ladi;

– toposentrik koordinata tizimidan $OXYZ$ qutbiy sferik koordinata tizimiga o'tamiz $z = const$, $a = const$ bunda $z = 0'$ nuqtadagi burchak, u $O'Q_0$ yo'nalish bo'yicha Q_0 nuqtada ellipsoid sirtiga tushirilgan normal va ellipsoid sirti orasidagi burchak, $O'C$ normal tekislikda Q_0CO' o'tuvchi chiziq, u $C(\varphi, \lambda)$ nuqta orqali o'tadi. a – normal tekislik azimuti.



11-rasm. **Sferada ellipsoidni perspektiv tasvirlash**

Belgilashlar kiritamiz:

$$O'Q_0 = N_0;\ O'C = N_0';\ S_nO' = D_H;\ S_pO' = D_p;\ S_pQ_0 = H,$$

bunda S_p – pozitiv, S_n– negativ tasvirlash uchun.

Ushbu holatda geodezik va qutbiy sferoidik koordinatalari bog'liqligi e^4 qismgacha aniqlikda quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$\sin z \cos a = t_1 + e^2\tau(t_1 \sin\varphi - \cos\varphi_0) + ...;$$

$$\sin z \cos a = t_4(1 + e^2\tau \sin\varphi) + ...;$$

$$\cos z = t_5 + e^2\tau(t_5 \sin\varphi - \cos\varphi_0) + ...,$$

bu yerda e – ellipsoidning birinchi ekssentrisiteti; t_1, t_4, t_5, τ – qiymatlarni (*13*) formuladan qarang.

Uchburchaklardan $S_nC'C_1'$ va S_nCC_1 yozish mumkin:

$$\sin z_{sf} = \frac{N_0 \sin z}{D + N_0 \cos z}\left(\cos z_{sf} + \frac{D}{h}\right)$$

Belgilashlarni kiritib

$$t_0 = d\sin z/\left(N_0' + D\cos z\right), \quad k = \frac{N_0'}{R} - 1 = N_0'/N_0' - 1$$

va $\Delta z = z_{sf} - z$ ning qiymati z qiymatidan kamligini e'tiborga olib, sin z_{sf} ni Teylor qatoriga ajratsak, shunda olamiz:

$$z_{sf} - z + t_0 k\left\{1 + \frac{1}{2}t_0^2 k\left[1 + k\left(t_0^2 + \frac{1}{2}\right)\right]\right\} + \ldots..$$

bunda

$$\frac{N_0}{N_0'} = 1 + \frac{e^2}{2}(\sin\varphi - \sin\varphi_0)^2\left\{1 + \frac{e^2}{4}\left[\left(3\sin^4\varphi_0 - 4\right) + \sin\varphi(-2\sin\varphi_0 + 7\sin\varphi)\right]\right\},$$

e^4 hadning aniqligi bo'yicha hisoblasak, unda olamiz:

$$z_{sf} = z - \frac{e^2}{2}\left[\sin z\cos a\cos\varphi_0 + \sin\varphi_0(\sin z - 1)\right]^2 \frac{D\sin z}{N_0 + D\cos z} + \ldots..$$

$$N_0' = N_0\left\{1 - \frac{e^2}{2}\left[\sin z\cos a\cos\varphi_0 + \sin\varphi_0(\sin z - 1)\right]^2\right\}$$

Ushbu darajadagi aniqlikda vertikallar (μ_1) va almukantaratlar bo'ylab (μ_2) uzunlikning xususiy masshtablari, qabul qilingan sferoid koordinatalar tizimi (z, a) hisobga olingan holda, quyidagi formulalar yordamida hisoblanishi mumkin:

$$\mu_1 = \left\{1 + \frac{e^2}{2}\left[\sin z\cos a\cos\varphi_0 + \sin\varphi_0(\cos z - 1)\right]^2\right\}\frac{dz_{c\phi}}{dz};$$

$$\mu_2 = \left\{1 + \frac{e^2}{2}\left[\sin z\cos a\cos\varphi_0 + \sin\varphi_0(\cos z - 1)\right]^2\right\}\frac{dz_{c\phi}}{\sin z}.$$

$Z_{c\phi}$ va uzunlikning xususiy masshtabini hisoblash bo'yicha olingan formulalardan, mavjud qoidaga muvofiq (D qiymat), turli xildagi umumiy perspektiv tasvirlashlarni olish mumkin. Masalan, sfera markazidan loyihani amalga oshirishda $D = 0$ qiymatda, bu holatda:

$$z_{c\phi} = z; \quad \mu_1 = \mu_2 = 1 + \frac{e^2}{2}\left[\sin z\cos a\cos\varphi_0 + \sin\varphi_0(\cos z - 1)\right]^2,$$

ya'ni e^4 daraja aniqligida ellipsoidni shar yuzasida perspektiv tasvirlanishi, berilgan nuqtada ellipsoidga urinma holatida, teng burchakli tasvirlashdir.

Bu V.V. Kavrayskiy keltirgan markaziy perspektiva xossalari xulosalarini umumlashtirish imkonini beradi va shar yuzasida ellipsoidning har qanday perspektiv tasvirlanishida ko'rish nuqtasi shar markazida joylashganda va ushbu markazni uning aylanish o'qi bo'ylab ellipsoid markazidan uzoqlashishiga hamda qutbiy sferik koordinatalar tizimida qutbining joylashish holatiga bog'liq bo'lmagan holda teng burchakli tasvirlashni yuzaga keltiradi (e^2 qismgacha aniqlikda).

Maydon xususiy masshtabi va burchaklar xatoligini ham xuddi shunday darajadagi aniqlikda topish uchun kartografik proyeksiyalarning umumiy nazariyasida ma'lum formulalardan foydalanish mumkin.

$$p = \mu^2 = 1 + e^2[\sin z \cos a \cos\varphi_0 + \sin\varphi_0(\cos z - 1)]^2 \qquad \omega = 0.$$

Ellipsoidni shar sirtida perspektiv pozitiv tasvirlash

S_pCC_1 va $S_pC''C_1''$ uchburchaklardan *(11-rasm)*

$$\sin z_{sf} = \frac{N_0 \sin z}{D - N_0 \cos z}\left(\frac{D}{R} - \cos z_{sf}\right)$$

Belgilashlarni kiritamiz:

$$t_0' = \frac{D\sin z}{N_0' - D\cos z}; \qquad K' = \frac{e^2}{2}(\sin\varphi - \sin\varphi_0)^2;$$

va $\Delta z = z_{sf} - z$ daralasi bo'yicha $\sin z_{sf}$ ni qatorga ajratib olamiz:

$$z_{sf} = z + t_0'K'\left\{1 - \frac{1}{2}t_0'K'\left[1 - K'\left(t_0'^2 + \frac{1}{2}\right)\right]\right\} + ...$$

e^4 hadgacha aniqlik darajada olinganda, oxirgi tenglik

$$z_{sf} = z + \frac{e^2}{2}(\sin\varphi - \sin\varphi_0)^2 \frac{D\sin z}{N_0 - D\cos z}, \qquad (58)$$

Uzunlik xususiy masshtablarini xuddi shunday aniqlik darajasida topamiz. Keltirilgan formulalarni o'zgartirish orqali olamiz:

$$\mu_1 = 1 + \frac{e^2}{2}\tau\left[\tau + \frac{2\tau_1 D\sin z}{N_0 - D\cos z} + \frac{D\tau(N_0\cos z - D)}{(N_0 - D\cos z)^2}\right] + ...$$

$$\mu_2 = 1 + \frac{e^2}{2}\tau^2\left(1 + \frac{D}{N_0 - D\cos z}\right) + ...$$

bunda

$$\tau = \sin z \cos a \cos \varphi_0 - \sin \varphi_0 (1 - \cos z)$$

$$\tau_1 = \cos z \cos a \cos \varphi_0 - \sin z \sin \varphi_0$$

Maydonlar xususiy masshtabi va burchak xatoligi eng katta qiymati quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$p = \mu_1 \mu_2 = 1 + \frac{e^2}{2}\tau\left[2\tau + \frac{D(\tau + 2\tau_1 \sin z)}{N_0 - D\cos z} + \frac{D\tau(N_0 \cos z - D)}{(N_0 - D\cos z)^2}\right] + \ldots$$

$$\omega = 2\arcsin\left(\frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2}\right) = \frac{e^2 \tau D}{2(N_0 - D\cos z)}\left[(2\tau_1 \sin \tau - \tau) + \frac{\tau(N_0 \cos z - D)}{N_0 - D\cos z}\right] + \ldots$$

Hozirda ilmiy va ishlab chiqarishga oid amaliy masalalarni yechishda aero va kosmik fotosuratlar keng qo‘llanilmoqda, shuningdek, stereo va ortofotosuratlar ham, ularning ideal modellari bo‘lib pozitiv va negativ tasvirli perspektiv-azimutal proyeksiyalar hisoblanadi.

Ushbu bo‘limda qarab chiqilgan, shar yuzasida ellipsoidni perspektiv va boshqa usullar asosida tasvirlashlar ko‘rsatilgan azimutal va boshqa proyeksiyalarni olishni ta’minlaydi, ellipsoidning ikkilangan tasvirini berilgan aniqlikda olishni, mehnat va vaqtni birmuncha qisqartiradi, va eng asosiysi, foydalanilayotgan qutbiy sferik koordinatalar tizimida berilgan qutb nuqtasining joylashish holatiga bog‘liq bo‘lmaydi, qarab chiqilayotgan tasvirlashning boshlang‘ich hamda belgilangan shartlaridan qat’iy nazar proyeksiyalarni olish imkoni yaratiladi.

Nazorat savollari

1. *Izometrik kenglik va izometrik uzoqliklarga tushuncha bering va formulalarini keltiring.*
2. *Shar sirtida ellipsoidni tasvirlashning qanday usullari mavjud, ularni izohlang.*
3. *Gauss tomonidan ishlab chiqilgan teng burchakli tasvirlash usulini tushuntiring.*
4. *Uzunlik, maydon va burchaklar maksimal xatoligi haqida tushunchalar bering.*
5. *Teng oraliqli tasvirlash shartlarini tushuntiring, formulalarni yozing.*

III BOB
KARTOGRAFIK PROYEKSIYALAR TASNIFI

Kartografik proyeksiyalarni uchta belgisi bo'yicha tasniflashni qarab chiqamiz: xatoliklari xususiyati bo'yicha (kartografik tasvirning xossalari bo'yicha); meridian va parallellar normal to'ri ko'rinishi hamda kartografik to'rning oriyentirlanishi bo'yicha.

14-§. Xatolik xususiyatlari bo'yicha kartografik proyeksiyalarni tasniflash

Xatoligi xususiyati bo'yicha proyeksiyalar – teng burchakli, teng maydonli va ixtiyoriy turlarga bo'linadi. Teng burchakli proyeksiyalarda tasvirning cheksiz darajada kichik qismlarining o'xshashligi saqlanadi, u o'z navbatida uzunlikning xususiy masshtabi $m = n = a = b = \mu$ yo'nalishga bog'liq bo'lmaydi, burchak xatoligi yo'q – $\omega = 0$, maydon masshtabi uzunlik masshtabi kvadratiga teng bo'ladi – $p = a^2$.

Teng burchaklilik sharti: $f = 0$; $m = n$ yoki

$$x_\lambda = -\frac{r}{M} y_\varphi; \quad y_\lambda = +\frac{r}{M} x_\varphi;$$

shar sirti uchun

$$x_\lambda = -\cos\varphi y_\varphi; \quad y_\lambda = +\cos\varphi x_\varphi.$$

Teng burchakli proyeksiyalarda chekli uchastkalar o'lchamini tasvirlashda uzunlikning xususiy masshtablari o'zgarishi chekli uchastkalarning xatolikda tasvirlanishiga sabab bo'ladi. Bu proyeksiyalarda maydon xatoligi juda katta qiymatda bo'ladi.

Teng maydonli proyeksiyalarda kartaga olinayotgan yuza va uning tekislikdagi maydoni nisbatlari doimiy holatda saqlanadi. Bunda maydonlar nisbatlari o'zgarmasligi nafaqat cheksiz darajadagi kichik maydonlarda, balki oxirgi o'lchamdagi uchastkalarda ham o'zgarmasligi kuzatiladi.

Bu proyeksiyalarda maydonlar xususiy masshtabi

$$p = mn\sin i = ab = \frac{h}{Mr} const,$$

lekin ko‘plab holatda p = 1, shu sababli teng maydonlilik sharti $h = Mr$, shar sirtida esa $h = M^2 \cos\varphi$

Uzunlikning ekstremal masshtablari bir-biriga teskari proporsional:

$$a = 1/b\ ,\ b = 1/a.$$

Burchaklar maksimal xatoligini tangenslar formulasi bo‘yicha hisoblash maqsadlidir, bu teng maydonli proyeksiyalarda quyidagi ko‘rinishga ega:

$$tg(\omega/2) = (a-b)/2, \qquad tg(45^0 + \omega/4) = a$$

Agar kartografik proyeksiya yoki teng burchakli, yoki teng maydonli xususiyatga ega bo‘lmasa, unda u ixtiyoriy proyeksiyalarga tegishli bo‘ladi. Bu proyeksiyalarda ham burchak, ham maydon xatoligi kuzatiladi. Ixtiyoriy proyeksiyalar guruhida teng oraliqli proyeksiyalarni ajratish mumkin, ularda uzunlik xususiy ekstremal masshtabi bitta asosiy yo‘nalish bo‘yicha saqlanadi, ya’ni a =1 yoki b=1. Bu proyeksiyalarda muvofiq ravishda $r = b$ yoki $r = a$.

Burchak maksimal xatoligini hisoblash uchun umumiy formuladan $\sin(\omega/2) = (a-b)/(a+b)$ foydalanish maqsadga muvofiq. Agar teng oraliqli proyeksiya to‘ri ortogonal va asosiy yo‘nalishlar meridianlar yoki parallellarga mos tushsa, unda bu proyeksiya – meridianlar bo‘yicha teng oraliqli yoki parallellar bo‘yicha teng oraliqli proyeksiya deyiladi.

Matematik kartografiya nazariyasi va amaliyoti tadqiqotlari rivojlanishi natijasida proyeksiyalar xususiyatlari va ularning imkoniyatlarini baholash tushunchalari o‘zgarib bormoqda va ularga aniqlik kiritilmoqda. Ixtiyoriy proyeksiyalardan keng ko‘lamda foydalanish natijasida aynan ushbu proyeksiyalarni baholashga nisbatan tadbiq etiluvchi mezonlarga bo‘lgan ehtiyoj ortib bormoqda.

Xatolik xarakteri hozirgi vaqtgacha miqdor jihatdan baholanmagan va intuitiv ravishda aniqlanib kelingan. G.I. Konusova tomonidan amalga oshirilgan tadqiqotlarda xatolik tavsifini turli xildagi xatoliklarning nisbatlari sifatida aniqlash mumkinligi ko‘rsatilgan. Xatolik qiymati tavsiflarida yagona ko‘rsatkich sifatida proyeksiyaning har qanday nuqtasida $\bar{p}$ vektor taklif etilgan bo‘lib, bunda proyeksiya maydon ($r-1$) va shakl xatoliklari ($\omega-1$) bilan ifodalanadi, bunda $\omega=a/b$. Teng burchakli va teng maydonli proyeksiyalar vektorlari ortogonal, o‘zaro mustaqil holatda bo‘lib, shunday bazisni tashkil qiladiki, unga nisbatan har qanday xohlagan proyeksiyada $\bar{p}(p-1,\omega-1)$ vektor qiymatini aniqlash mumkin.

Vektor uzunligi: $\rho=\sqrt{(p-1)^2+(\omega-1)^2}$,

bu tenglik bir vaqtning o‘zida shakl va maydon xatoliklarini kompleks hisoblash uchun qabul qilinadi.

Shakl va maydon xatoligi nisbatlari α burchak qiymati bilan aniqlanib, uning uchun:

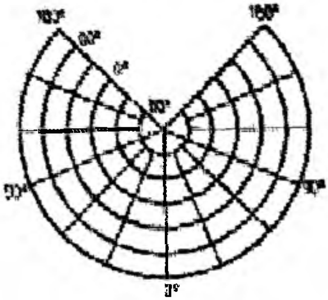
$$tg\alpha=(\omega-1)/(p-1); \quad \sin\alpha=(\omega-1)/\rho; \quad \cos\alpha=(p-1)/\rho.$$

Teng burchakli proyeksiya vektori bilan birgalikda, xohlagan proyeksiyada $\bar{p}$ vektor asosida hosil qilingan α burchak G.I. Kosunova tomonidan berilgan nuqtadagi xatolik tavsifi o‘lchovi sifatida foydalanilishi mumkinligi tavsiya etiladi. Turli xil proyeksiyalarda xatolik tavsiflari 0 dan 2π qiymatgacha o‘zgarishi mumkin. Teng burchakli, teng oraliqli va teng maydonli proyeksiyalarda kartaga olinayotgan hudud doirasida doimiy xatolik tavsiflariga ega bo‘lib, ularning qiymati mos ravishda $0, \pi/4, \pi/2$ ga teng bo‘ladi.

15-§. Meridian va parallellar normal to‘rining ko‘rinishi bo‘yicha proyeksiyalarni tasniflash

Normal to‘r – bu meridian va parallellarning shunday to‘rini ifodalaydiki, bunda foydalanilayotgan koordinatalar tizimidagi qutb geografik qutb bilan ustma-ust tushadi; to‘rining bunday ko‘rinishiga ega proyeksiyalar – *normal proyeksiyalar* deyiladi. Normal to‘rli kartografik proyeksiyalar quyidagi sinflarga ajratiladi: konusli, silindrik, azumutal, psevdokonusli, psevdosilindrik, psevdoazimutal, yarim konusli va shartli proyeksiyalar.

Normal konusli proyeksiya (12-rasm) bunda kartografik to‘r meridianlari – to‘g‘ri, tegishli meridianning uzoqligidagi farqiga proporsional ravishdagi burchaklarda bir nuqtada kesishgan chiziqlar; parallellari esa – konsentrik aylana yoylaridan iborat, ularning markazi meridianlar qo'shilish nuqtasida joylashadi.



12-rasm. **Normal konusli proyeksiya**

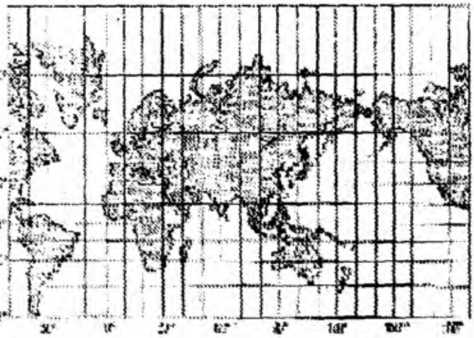
Bunda xususiy masshtablar va xatoliklar faqat kenglik qiymatiga bog'liq bo'ladi, shu sababli, izokolalar parallellar bilan mos tushadi va konsentrik aylana (doira) ko'rinishiga ega bo'ladi.

Agar konusli proyeksiyani hosil qilishda geometrik usuldan foydalanilsa (konus yuzasi tekislikda chiziqli tartibda loyihalansa), u holda perspektiv konusli proyeksiyani hosil qilamiz. Agar tasavvur qilaylik, meridianlarning kesishish nuqtasi cheksiz uzoqlashsa, u holda parallellar to'g'ri chiziqlarga aylanadi va konusli proyeksiya o'rniga silindrik proyeksiya olinadi.

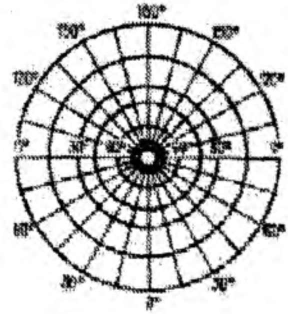
Normal silindrik proyeksiya nisbatan oddiy ko'rinishdagi kartografik to'rga ega *(13-rasm)*; bunda meridianlar teng taqsimlangan parallel to'g'ri chiziqlar, parallellar esa – meridianlarga ortogonal bo'lgan parallel to'g'ri chiziqlar bilan tasvirlanadi.

Xususiy masshtablar va xatoliklar faqat kenglik funksiyalari bo'ladi, shu sababli izokolalar parallellar bilan ustma-ust tushadi va to'g'ri chiziq ko'rinishida bo'ladi. Silindrik proyeksiyalar konusli proyeksiyalar kabi geometrik yo'l bilan hosil qilinishi ham mumkin; bunday proyeksiyalar *perspektiv-silindrik proyeksiyalar* deyiladi.

Azimutal proyeksiyalarda normal to'r meridianlari – to'g'ri chiziq, meridianlari uzoqlik burchagiga mos keladigan bir nuqtada kesishadigan chiziqlar, parallellari – markazi meridianlar kesishish nuqtasida joylashgan konsentrik aylanalardir *(14-rasm)*.



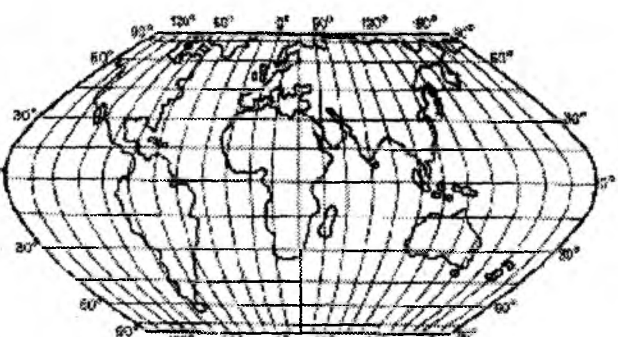
13-rasm. **Normal silindrik proyeksiya**



14-rasm. **Normal azimutal proyeksiya**

Bu proyeksiyalarni ham geometrik yo‘l bilan tuzish mumkin, unda chiziqli perspektiv usuli qo‘llaniladi, bular perspektiv-azimutal yoki oddiy perspektiv proyeksiyalar deyiladi. Azimutal va perspektiv-azimutal proyeksiyalarda xususiy masshtab va izokolalar faqat kenglik funksiyasi bo‘lib, ular parallellar yoki almukantaratlar bilan ustma-ust tushadi hamda aylana shaklda o‘tadi. Bu proyeksiyalar doira shakldagi hududlarni mayda masshtabli kartaga olishda ishlatiladi.

Psevdosilindrik proyeksiyalarda (15-rasm) parallellar – to‘g‘ri chiziqlar, o‘q meridianga nisbatan perpendikulyar to‘g‘ri chiziqlar, meridianlar esa – o‘q meridianga nisbatan simmetrik egri (sinusoid, ellips) chiziqlardan tashkil topadi.



15-rasm. **Psevdosilindrik proyeksiya**

Proyeksiya to'ri ortogonal emas, shu sababli xatolik tavsifiga ko'ra psevdosilindrik proyeksiyalar faqat teng maydonli va ixtiyoriy proyeksiyalar bo'lishi mumkin. Uzunlik va maydon xatoliklari izokolalari to'g'ri chiziqlar bo'lib, parallellar bilan ustma-ust tushadi, meridianlar uzunligi va burchak xatoligi izokolalari – o'q meridian va ekvatorga nisbatan simmetrik giperbolik egri chiziqlardir.

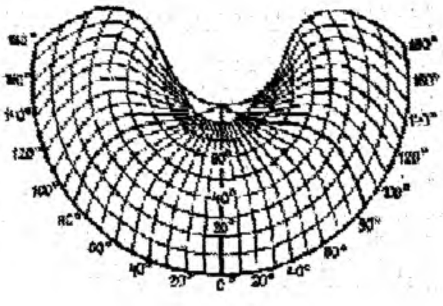
Psevdokonusli proyeksiyalarda (16-rasm) normal to'r parallellari – konsentrik aylana yoylari, meridianlari esa – to'g'ri o'q chiziqqa nisbatan simmetrik egri chiziqlardir.

Proyeksiya to'ri ortogonal emas, shu sababli, xatoligi bo'yicha faqat teng maydonli va ixtiyoriy proyeksiyalar bo'lishi mumkin; ortogonallik tavsiflari o'q meridianda va φ_0 kenglik qiymati bilan birgalikdagi o'rta parallellarda saqlanadi. Izokolalar o'q meridianga nisbatan juft holatda simmetrik ko'rinishga ega bo'lib, egri chiziqlardir.

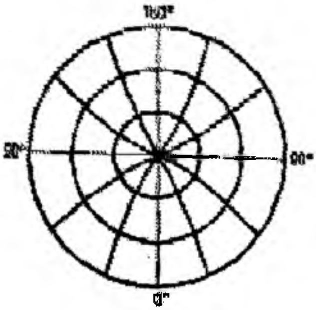
*Psevdoazimutal proyeksiyalar*ni *(17-rasm)* sobiq Ittifoq kartografiyasida paydo bo'lganiga nisbatan unchalik uzoq vaqt bo'lgani yo'q (cho'ziq izokolalarga ega proyeksiyalar). Bu proyeksiyalarda normal to'r parallellari konsentrik aylanalar, meridianlari – egri, 2 tasidan tashqari, ular simmetriya o'qlari sifatida xizmat qiladigan o'zaro perpendikulyarlar.

Yarimkonusli proyeksiyalar zamonaviy kartografiya amaliyotida, ayniqsa, dunyo kartalarini tuzishda keng qo'llaniladi. Bunday proyeksiyalarda parallellar ekssentrik aylana yoylari ko'rinishida aks ettiriladi, meridianlar esa – to'g'ri chiziqli o'q meridian va ekvatorga nisbatan simmetrik joylashgan egri chiziqlardan iborat. Izokolalar murakkab egri chiziqlar ko'rinishida bo'lib, o'q meridian va ekvatorga nisbatan simmetrik holatda joylashadi; ularning shakli proyeksiyani hosil qilishda belgilangan qo'shimcha shartlarga bog'liq bo'ladi. Yarimkonusli proyeksiyalardan biri – aylanali proyeksiyalar bo'lib, ularda parallellar va meridianlar ekssentrik aylana yoylari ko'rinishida tasvirlanadi.

Meridianlar va parallellar normal to'ri ko'rinishi bo'yicha proyeksiyalarning tasniflanishi yakunida aytish kerakki, qarab chiqilgan sinflardan tashqari yana boshqa katta hajmdagi hosila proyeksiyalarni sinfi mavjudligini (shartli), bunda proyeksiyalar berilgan shartlarga muvofiq, mavjud proyeksiyalarning ko'rinishini o'zgartirish asosida hosil qilinadi. Proyeksiyalarning bunday turlari uzluksiz ravishda to'ldirib borilmoqda.



16-rasm. **Psevdokonusli proyeksiya**



17-rasm. **Normal psevdoazimutal proyeksiya**

Yuqorida keltirilgan, V.V. Kavrayskiy tomonidan ishlab chiqilgan tasnif ma'lum ustunlikga ega, u o'zining oddiyligi va ko'rgazmaliligi bilan ajralib turadi. Biroq unda faqat parallellari doimiy egri chiziqlardan iborat proyeksiyalar qarab chiqilgan. Hozirgi paytda kartalarni tuzishda foydalanilayotgan boshqa ko'plab proyeksiyalar bu tasnifda o'z o'rnini topmagan.

So'nggi paytlarda sobiq ittifoq olimlari tomonidan yangi klassifikatsiyalar ishlab chiqilgan. Masalan, G.A. Mesheryakov tomonidan kartografik proyeksiyalarni differensial tenglamalari ko'rinishi bo'yicha tasniflash taklif qilingan – bu bilan u genetik tasniflash asosini yaratgan. Bu klassifikatsiya yetarli darajada to'liq, biroq ko'rgazmalik tavsiflarining pastligi bilan chegaralanadi, chunki bu klassifikatsiya meridianlar va parallellar to'rlari xususiyatlari bilan bog'lanmagan.

MIIGAiKning "Kartografiya" kafedrasida kartografik proyeksiyalarni meridian va parallellarining normal to'ri ko'rinishi bo'yicha tasniflashning yangi usullari ishlab chiqilmoqda, unda mualliflar fikriga ko'ra, klassifikatsiya iloji boricha barcha ko'p miqdordagi mavjud kartografik proyeksiyalarni o'z ichiga qamrab olishi kerakligi qayd qilib o'tiladi.

Bu ko'plik o'z tarkibiga ikkita kichik ko'pliklarni (guruhlarni) qamrab oladi, jumladan, birinchisi doimiy (o'zgarmas) egrilikli parallellar bo'yicha tuzilgan proyeksiyalar, ikkinchisi esa – o'zgaruvchan egrilikka ega bo'lgan parallellar proyeksiyalarni.

Birinchi guruh quyidagi uchta oilaga bo'linadi: birinchisi, parallellari to'g'ri, ikkinchisi – konsentrik aylanali, uchinchisi – ekssentrik aylanalardan tashkil topgan proyeksiyalar. Har bir oila meridianlar ko'rinishi bo'yicha tegishli sinflarga ajratiladi. Birinchi oila (to'g'ri chiziqli parallellar bilan ifodalanuvchi) o'z tarkibiga to'rtta sinfni qamrab oladi.

1. Silindrik proyeksiyalar, umumiy formulasi:

$$x = f(\varphi); \quad y = \beta\lambda,$$

bu yerda β – proyeksiya parametri.

2. Umumlashtirilgan silindrik proyeksiyalar:

$$x = f_1(\varphi); \quad y = f_2(\lambda).$$

Bu sinfni ikkita kichik sinflarga ajratish mumkin – to'ri meridian o'qiga nisbatan simmetrik va assimetrik bo'lgan proyeksiyalar.

3. Psevdosilindrik proyeksiyalar:

$$x = f(\varphi); \quad y = F(\varphi, \lambda).$$

Bu proyeksiyalar sinfini ham ikkita kichik sinflarga ajratish mumkin, bunda ham to'rning meridian o'qiga nisbatan simmetriklik holatlari hisobga olinadi.

4. Silindrik-konusli proyeksiyalar – bu proyeksiyalarda parallellar to'g'ri chiziqlar tutamlari bilan ifodalanib, meridianlari – konsentrik aylanalar bo'lib tasvirlanadi.

Ikkinchi oila (konsentrik parallellar) o'z tarkibiga beshta sinfni qamrab oladi.

1. *Konusli proyeksiyalar*:

$$\rho = f(C, \varphi); \qquad \delta = \alpha\lambda;$$

$$x = q - \rho\cos\delta; \quad y = \rho\sin\delta;$$

$$q = const,$$

bunda α va S – proyeksiya parametrlari.

Qutb nuqtasida tasvirning uzilishi kuzatiladi.

2. Umumlashtirilgan konusli proyeksiyalar, ularda qutb burchagi formulasidan ($\delta = f_2(\lambda)$) tashqari, barcha keltirilgan formulalar saqlanadi. Bunda ham qutb nuqtasida uzilish kuzatiladi.

Bu sinf proyeksiyalarini ikkita kichik sinflarga ajratish mumkin, bunda o'rta meridianga nisbatan to'rlarning simmetrikligi e'tiborga olinadi.

3. Psevdokonusli proyeksiyalar:

$$\rho = f_1(\varphi); \qquad \delta = f_2(\varphi, \lambda);$$
$$x = q - \rho\cos\delta; \quad y = \rho\sin\delta;$$
$$q = f_2\,(\varphi).$$

Bu sinf ikkita kichik sinfdan iborat bo'lib, birinchisida to'r o'rta to'g'ri meridianga nisbatan simmetrik, ikkinchisida – asimmetrik ko'rinishda bo'ladi. Bunda meridian ham to'g'ri, ham egri tasvirlanishi mumkin.

4. Azimutal proyeksiyalar:

$$\rho = f_1(\varphi), \quad \delta = \lambda;$$
$$x = \rho\cos\delta; \; y = \rho\sin\delta$$

5. Psevdoazimutal proyeksiyalar – 0° uzoqlikli meridianlar – to'g'ri chiziqlar; 90°, 180° i 270° – to'g'ri yoki egri chiziqlar. Bu proyeksiyalarning umumiy formulalari:

$$\rho = f_1(\varphi), \quad \delta = f_2(\varphi, \lambda) = \lambda + F(\varphi)\sin k\lambda;$$
$$x = \rho\cos\delta; \; y = \rho\sin\delta;$$

bunda k – butun son.

Bu sinf ikkita kichik sinfga bo'linadi: birinchida 0° i 180° uzoqlikdagi meridianlarga nisbatan kartografik to'r simmetrik, ikkinchida – to'r asimmetrik.

Uchinchi sinfga (ekssentrik parallelli) ikkita sinf proyeksiyalari kiradi.

1. Umumlashgan yarim konusli proyeksiyalar:

$$\rho = f_1(\varphi), \quad \delta = f_3(\varphi, \lambda);$$

$$x = q - \rho\cos\delta; \; y = \rho\sin\delta$$

$$q = f_2(\varphi)$$

Bu sinf o‘z tarkibiga to‘rtta kichik sinfni qamrab oladi. Kichik sinflarga ajratish asosini kartografik to‘rning simmetriklik xususiyatlari tashkil qiladi: bunda to‘g‘ri chiziqli meridianga nisbatan, ekvatorga nisbatan, meridian va ekvatorga nisbatan (yoki uning assimetrikligi bo‘yicha).

2. Yarim konusli proyeksiyalar:

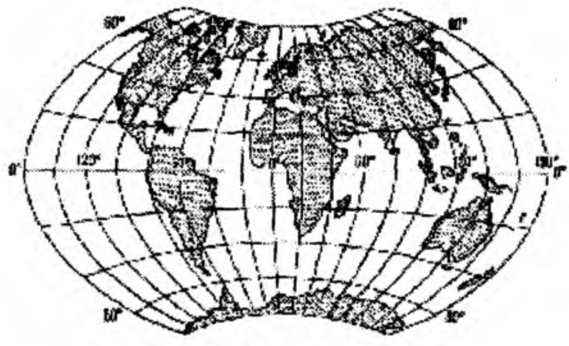
$$\rho = N ctg\varphi; \quad \delta = f(\varphi, \lambda);$$

$$x = q - \cos\delta; \quad y = \rho \sin\delta;$$

$$q = ks + N ctg\varphi,$$

bu yerda s – meridian yoyining uzunligi; k – koeffitsiyent.

Bu sinf o‘z tarkibiga ikkita kichik sinfni qamrab olib, bu kenja sinflarga ajratish asosini to‘rning meridian o‘qiga nisbatan simmetrikligi tashkil qiladi *(18-rasm)*.



18-rasm. **Yarim konusli proyeksiya**

Proyeksiyalarning ikkinchi kichik ko‘pligi o‘z tarkibiga uchta oilani qamrab oladi. Bu bo‘linish asosini qutbning tasvirlanishi va tenglamalarning ko‘rinishi tashkil qiladi. Birinchi oila (qutbda tasvirning uzilishi mavjud emasligi) o‘z ichiga ikkita sinfni qamrab oladi.

1. Yarim azimutal proyeksiyalar – bunda parallellar ellipslar, meridianlar esa – ellipslar markazidan chiquvchi to‘g‘ri yoki egri chiziqlar tutami bilan tasvirlanadi. Bu proyeksiyalar uchun umumiy tenglamalar quyidagi ko‘rinishga ega:

$$\rho = f_1(\varphi, \lambda); \quad \delta = f(\varphi, \lambda);$$

$$x = \rho \cos\delta; \quad y = \rho \sin\delta.$$

2. Umumlashgan yarim azimutal proyeksiyalar – bularda parallellar ixtiyoriy egrilikdagi chiziqlar, meridianlar esa – qutb nuqtasidan chiqadigan to‘g‘ri yoki egri chiziqlar tutamidan iborat bo‘ladi. Proyeksiyalar umumiy tenglamalari yarim azimutal proyeksiyalar sinfidagiga o‘xshash bo‘ladi.

Ikkinchi oilaga taalluqli proyeksiyalar (ularda qutb doirasida uzilish qayd qilinadi) o‘z tarkibiga to‘rtta proyeksiyalar sinfini qamrab oladi, ularni umumlashtirilgan yarim konusli proyeksiyalar deb atash ham mumkin: ularda ellipssimon parallellar, parabolik va giperbolik parallellar, shuningdek, xohlagan egrilikga ega bo‘lgan parallellar mavjudligini qayd qilamiz.

Bunday proyeksiyalar umumiy tenglamalari:

$$\rho = f_1(\varphi, \lambda); \quad \delta = f_3(\varphi, \lambda);$$

$$x = q - \rho\cos\delta; \quad y = \rho\sin\delta;$$

$$q = f_2(\varphi).$$

Umumlashtirilgan yarim konusli proyeksiyalarning barcha sinflari giperbolik parallellarga ega bo‘lgan proyeksiyalardan tashqari, to‘rning simmetriklik tavsiflari belgisi bo‘yicha to‘rtta kichik sinfga ajratiladi, giperbolik parallellarga ega proyeksiyalar esa – ikkita kichik sinfga (ushbu belgisi bo‘yicha) ajratiladi.

Uchinchi oila yarim silindrik proyeksiyalarni ikkita sinfini o‘z ichiga oladi, bunda ham qutb doirasida uzilish mavjud bo‘ladi, biroq proyeksiya tenglamasi faqat to‘g‘ri burchakli koordinatalar tizimida ifodalanadi (bular silindrik proyeksiyalarga xos):

$$x = f_1(\varphi, \lambda); \quad y = f_2(\varphi, \lambda).$$

Bu proyeksiyalarda meridian va parallellar ixtiyoriy egrilikdagi egri chiziqlar bilan tasvirlanadi.

Proyeksiyalar sinflari to‘g‘ri burchakli koordinatalarining berilish usuli asosida ajratiladi. Birinchi sinfga to‘g‘ri burchakli koordinatalari analitik ko‘rinishda berilgan proyeksiyalar kiritiladi, ikkinchi sinfga – to‘g‘ri burchakli koordinatalari jadval ko‘rinishida berilgan proyeksiyalar kiritiladi. Yarim silindrik proyeksiyalar sinflarining har biri o‘z tarkibiga to‘rtta kichik sinflarni qamrab oladi, bunday proyeksiyalar to‘rlarining simmetrikligi bo‘yicha ajralib turadi.

Proyeksiyalarning ushbu qarab chiqilgan tasnifi nafaqat barcha mavjud bo'lgan proyeksiyalarni o'z ichiga qamrab oladi, balki kelgusida ishlab chiqilishi mumkin bo'lgan boshqa proyeksiyalarni ham o'z ichiga olishi mumkin.

16-§. Kartografik to'rning oriyentirlanganligi bo'yicha proyeksiyalarni tasniflash. Geografik koordinalar tizimidan qiyshiq va ko'ndalang sferik koordinatalar tizimiga o'tish; bu tizimlarda qutblarni tanlash

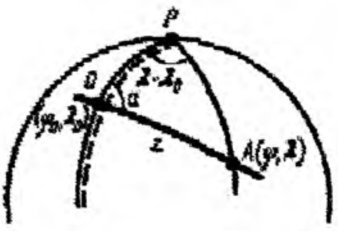
Normal proyeksiyalardan tashqari qiyshiq va ko'ndalang proyeksiyalar ham mavjud. Bunday bo'linish asosiga sferik koordinalar tizimida qutb kengligi qiymati (φ_0) qabul qilingan. $\varphi_0 = 90^\circ$ bo'lganda normal proyeksiya, $\varphi_0 = 0^\circ$ – ko'ndalang proyeksiya va $0^\circ < \varphi_0 < 90^\circ$ – holatda qiyshiq proyeksiyalar olinadi.

Normal proyeksiyalarda normal to'r asosiysi bilan ustma-ust tushadi, ya'ni joylashish holati kartaga olinayotgan yuza geografik koordinatalari (φ, λ) bilan ifodalanuvchi parallellar va meridianlar to'riga mos tushadi. Qiyshiq va ko'ndalang proyeksiyalarda normal to'r asosiyga mos kelmaydi. Bunday proyeksiyalarda normal to'r vertikallar va almukantaratlar to'rlaridan tashkil topadi.

Vertikallar – qiyshiq yoki ko'ndalang tizim $Q(\varphi_0, \lambda_0)$ qutb nuqtalari kesishadigan katta aylanalar hisoblanadi. Kartaga olinayotgan yuzada vertikallarning joylashish o'rni azimut (a) bilan aniqlanadi, bu qiymat joriy va boshlang'ich vertikallar tekisligi o'rtasida joylashgan ikki qirrali burchakka teng. Boshlang'ich vertikal deb qiyshiq yoki ko'ndalang koordinatalar tizimi qutb meridiani bilan mos keluvchi λ_0 uzoqlikka ega bo'lgan vertikalga aytiladi (19-rasm).

Almukantaratlar – vertikallarga perpendikulyar joylashgan kichik aylanalar; ularning kartaga olinayotgan yuzada joylashish holati zenit masofasi *z* koordinatasi bilan aniqlanadi, bu qiymat normal koordinatalar tizimining qutbidan (Q) joriy almukantarat-gacha bo'lgan vertikal yoyiga teng.

Vertikallar va almukantaratlar to'rini aralash holatdagi meridianlar va parallellar to'ri sifatida qarab chiqish mumkin, bunda geografik qutb (P) qiyshiq yoki ko'ndalang koordinatalar tizimi (Q) qutbi bilan almashtiriladi.



19-rasm. **Qiyshiq tizimning z va *a* sferik koordinatalari**

Qiyshiq va ko'ndalang proyeksiyalarda kartaga olinayotgan yuza sifatida radiusi (R) shar yuzasi qabul qilinadi, uning qiymati berilgan shartlarga mos holda aniqlanadi (masalan, shar radiusi sifatida yer ellipsining teng maydonli yuzasi) yoki kartaga olinayotgan yuzaning o'rta egrilik radiusiga teng deb hisoblanadi.

Geografik koordinatalardan sferik qutbiy qiyshiq va ko'ndalang koordinatalar tizimiga o'tish sferik trigonometriyaning ma'lum formulalari bo'yicha amalga oshiriladi:

$$\begin{aligned} \cos z &= \sin\varphi\sin\varphi_0 + \cos\varphi\cos\varphi_0\cos(\lambda_0-\lambda); \\ \sin a\sin z &= \cos\varphi\sin(\lambda_0-\lambda); \\ \cos a\sin z &= \sin\varphi\cos\varphi_0 - \cos\varphi\sin\varphi_0\cos(\lambda_0-\lambda). \end{aligned} \qquad (59)$$

Ikkinchi (*59*) formulani uchinchisiga bo'lish orqali

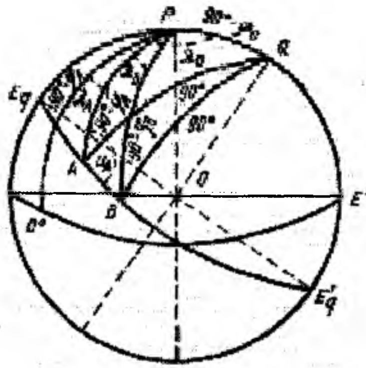
$$tga = \frac{\cos\varphi\sin(\lambda_0-\lambda)}{\sin\varphi\cos\varphi_0 - \cos\varphi\sin\varphi_0\cos(\lambda_0-\lambda)} \qquad (60)$$

yoki hisoblashlarga qulay bo'lishi uchun

$$ctga = tg\varphi\cos\varphi_0\cos(\lambda_0-\lambda) - \sin\varphi_0 ctg(\lambda_0-\lambda). \qquad (61)$$

Qishiq va ko'ndalang qutbiy sferik koordinatalarga o'tish uchun qutb koordinatalarini $Q-\varphi_0,\lambda_0$ aniqlash talab qilinadi, bunda uchta usuldan foydalaniladi. Birinchi usul ko'plab azimutal va perspektiv-azimutal proyeksiyalar uchun qo'llaniladi: bunda qutb tasvirlanayotgan hududning markaziy nuqtasi bilan mos tushadi; qutb koordinatalari bevosita karta yoki globusdan olinadi yoki tasvirlanayotgan hudud chegarasida joylashgan nuqtalarning kengligi va uzoqligi qiymatlari bo'yicha hisoblab topiladi.

Ikkinchi usul qiyshiq va ko'ndalang silindrik proyeksiyalar uchun ishlab chiqilgan, bunda qutb koordinatalari qutbdan 90^0 buriluvchi (qiyshiq yoki ko'ndalang tizim ekvatori) katta aylana yoyi joylashishiga mos holatda aniqlash nazarda tutiladi. Ko'ndalang proyeksiyalarda bu katta aylana meridian bilan ustma-ust tushadi *(20-rasm)*.



20-rasm. **Berilgan ikkita nuqta (A, B) bo'yicha qiyshiq qutb koordinatalar tizimini hisoblash chizmasi**

Bu proyeksiyalarda

$$\varphi_0 = 0; \qquad \lambda_0 = \lambda_{0'r} \pm 90^0,$$

bunda $\lambda_{0'r}$ -- o'rta meridian uzoqligi.

Agar uzoqlikni o'rta meridiandan hisoblasak, unda $\lambda_0 = \pm 90°$.

Qiyshiq koordinata tizimi qutbini aniqlash uchun ikkita uchburchakni yechish kerak. Dastlab APB uchburchakdan u_1 burchakni quyidagi formula bilan aniqlaymiz:

$tgu_1 = tg(\lambda_2 - \lambda_1)\cos x \cos ex(x - \varphi_1)$, bunda x – yordamchi u_1 burchak va $tgx = \sec(\lambda_2 - \lambda_1) tg\varphi_2$, keyin APQ uchburchakdan φ_0 va λ_0 ni quyidagi formula bilan aniqlaymiz:

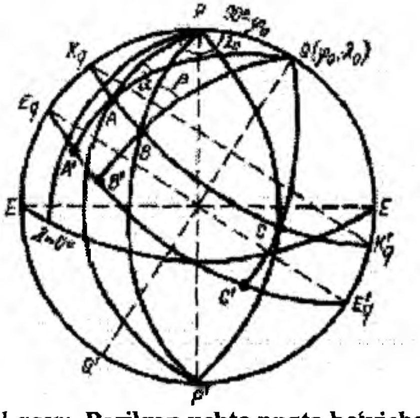
$$\sin \varphi_0 = \cos \varphi_1 \sin u_1$$

$$tg(\lambda_0 - \lambda_1) = \cos ec\varphi_1 ctgu_1 \qquad (62)$$

Uchinchi holatda qiyshiq tizimning qutb koordinatalarini aniqlash tasvirlanuvchi hududning o'rtasidan o'tuvchi kichik aylana asosida amalga oshiriladi. Bu usul qiyshiq konusli proyeksiyalarni olishda foydalaniladi va zamonaviy kartografiya amaliyotida kam ishlatiladi. Biroq qutb koordinatalarini olishning bu usulini o'rganish nazariy jihatdan qiziqish uyg'otadi.

Tasvirlanayotgan hududning o'rta qismidan o'tuvchi kichik aylananing yo'nalishini bilgan holda, kichik aylanaga perpendikulyar holatda joylashgan va φ_1, λ_1, φ_2, λ_2, φ_3, λ_3 koordinatalar bilan belgilanuvchi minimal darajada uchta nuqtadan o'tuvchi katta aylanalarning kesishish nuqtasini topish talab qilinadi.

21-rasmda ushbu uchta nuqta kichik aylanada $K_qK'_q$ joylashib, qiyshiq tizimning qutb $Q(\varphi_0,\lambda_0)$ joylashish o'rnini aniqlab beradi; katta aylana – $E_qE'_q$ ushbu qiyshiq tizim ekvatori bo'lib, u kichik aylanaga $K_qK'_q$ parallel.



21-rasm. **Berilgan uchta nuqta bo'yicha (A, B, C) qutb koordinatalarini hisoblash chizmasi**

Berilgan *PAQ, PBQ, PCQ* uchburchaklardan

$$\begin{aligned} \cos z_k &= \sin\varphi_0 \sin\varphi_1 + \cos\varphi_0 \cos\varphi_1 \cos(\lambda_0 - \lambda_1); \\ \cos z_k &= \sin\varphi_0 \sin\varphi_2 + \cos\varphi_0 \cos\varphi_2 \cos(\lambda_0 - \lambda_2); \\ \cos z_k &= \sin\varphi_0 \sin\varphi_3 + \cos\varphi_0 \cos\varphi_3 \cos(\lambda_0 - \lambda_3). \end{aligned} \tag{63}$$

Ushbu uchta tenglamada uchta noma'lum – z_k, φ_0, λ_0 qiymat mavjud.

Haqiqiy φ_0, λ_0 qiymatlarga nisbatan tenglamani yechish orqali qiyshiq tizim qutb koordinatalarini aniqlaymiz:

$$tg(\lambda_0-\lambda_1)=\frac{(\sin\varphi_1-\sin\varphi_3)[\cos\varphi_1-\cos\varphi_2\cos(\lambda_2-\lambda_1)]}{(\sin\varphi_1-\sin\varphi_3)\cos\varphi_2\sin(\lambda_2-\lambda_1)-(\sin\varphi_1-\sin\varphi_2)\cos\varphi_3\cos(\lambda_3-\lambda_1)}-$$

$$-\frac{(\sin\varphi_1-\sin\varphi_2)[\cos\varphi_1-\cos\varphi_3\cos(\lambda_3-\lambda_1)]}{(\sin\varphi_1-\sin\varphi_3)\cos\varphi_2\sin(\lambda_2-\lambda_1)-(\sin\varphi_1-\sin\varphi_2)\cos\varphi_3\cos(\lambda_3-\lambda_1)}; \qquad (64)$$

$$tg\varphi_0=\frac{\cos\varphi_2\cos(\lambda_0-\lambda_2)-\cos\varphi_1\cos(\lambda_0-\lambda_1)}{\sin\varphi_1-\sin\varphi_2}.$$

φ_0 kenglikni aniqlashni nazorat qilish ishlari bir juft nuqtalar orqali, masalan, birinchi va uchinchi yoki ikkinchi va uchinchi nuqtalar asosida bajarilishi mumkin.

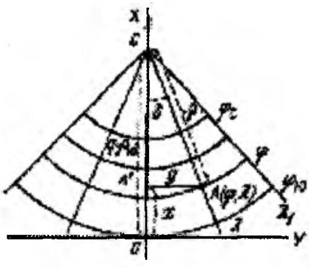
Nazorat savollari

1. *Teng burchakli proyeksiyalarga tushuncha bering va formulalarini keltiring.*
2. *Ixtiyoriy proyeksiyalarda qanday xatoliklar mavjud, ularning qiymatlari qanday aniqlanadi?*
3. *Normal konusli proyeksiyani qanday tushunasiz, uning to'rini chizib ko'rsating.*
4. *Azimutal va psevdosilindrik proyeksiyalarda normal to'rning ko'rinishi qanday, bu proyeksiyalar xatoligi bo'yicha qaysi proyeksiyalar sinfiga tegishli?*
5. *MIIGAiKning "Kartografiya" kafedrasida kartografik proyeksiyalarni tasniflash usullarini asosiy jihatlarini aytib bering.*
6. *Silindrik, konusli, azimutal proyeksiyalar formulalarini keltiring va ularga qisqacha izoh bering.*
7. *Vertikallar va almukantaratlar chiziqlari mohiyati nimada, chizmalarda ko'rsating.*

IV BOB
KONUSLI PROYEKSIYALAR

17-§. Konusli proyeksiyalarning asosiy qoidalari va umumiy formulalari

Normal konusli proyeksiyalarda meridianlar bitta nuqtada tutashadigan bir-biriga mos keladigan uzoqliklarining farqi bilan mos burchaklarga proporsional bo'lgan to'g'ri chiziqlar bilan tasvirlanadi, parallellar esa – markazi meridianlar kesishish nuqtasida bo'lgan konsentrik yoylardan iborat *(12-rasm).* Qiyshiq va ko'ndalang proyeksiyalarda vertikallar va almukantaratlar xuddi shunday ko'rinishda bo'lib, meridian va parallellari murakkab egri chiziqlar bilan tasvirlanadi. Amaliy jihatdan, normal konusli proyeksiyalar asosan, ishlab chiqarishda ko'proq foydalaniladi.



22-rasm. **Normal konusli proyeksiyada koordinatalar tizimi**

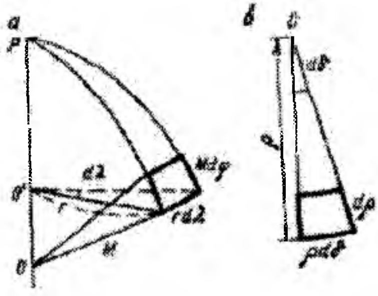
Umumiy ko'rinishda konusli proyeksiyalar tenglamalari yassi to'g'ri burchakli (x, u) va qutbiy koordinatalar bilan (ρ – qutb radiusi, δ – qutb burchagi) ifodalanadi. Bu koordinata tizimida qutb sifatida meridianlarning kesishish nuqtasi qabul qilinadi, qutbiy o'q sifatida esa – o'rta meridian olinadi, undan λ uzoqlik farqlari qiymatlari hisobi boshlanadi *(22-rasm).*

To'g'ri burchakli koordinatalar boshi sifatida kartaning janubiy parallellida o'rta meridianda joylashgan O nuqtani qabul qilamiz, bu holatda:

$$x = q - \rho\cos\delta; \quad y = \rho\sin\delta; \tag{65}$$

$$\delta = \alpha\lambda; \quad \rho = f(\varphi), \tag{66}$$

bu yerda, $q = const$ – qutbiy koordinata tizimi qutbi va to'g'ri burchakli koordinatalar boshi o'rtasidagi masofa; ρ – faqat kenglik funksiyasi bo'yicha o'zgaradigan parallell radiusi. α – parametr, u har doim birdan kichik bo'ladi, ya'ni parallellar to'liq bo'lmagan aylanalar bilan tasvirlanadi *(12-rasm)*. Agar, $\alpha = 1$ bo'lsa, u holda konusli proyeksiyalar azimutal proyeksiyalarga, agar $\alpha = 0$ bo'lsa silindrik proyeksiyalarga aylanadi.



23-rasm. **Cheksiz kichik trapetsiya:**
a – ellipsoidda; b – konusli proyeksiyada

Qutb radiusi ρ qiymatini belgilaydigan funksiya turi dastlab qo'yilgan tasvirlash shartlari bilan bog'liq holda aniqlanadi: ya'ni, meridianlar bo'yicha teng burchakli, teng maydonli yoki teng oraliqli tasvirlashlar bo'yicha. Funksiyaning turiga bog'liq holatda ikkinchi parametr aniqlanadi. Teng burchakli va teng oraliqli proyeksiyalarda bu qiymat ma'lum darajada geometrik ma'noga ega – u proyeksiyadagi ekvator radiusini belgilaydi.

Normal konusli proyeksiyalarda meridianlar va parallellar to'ri ortogonalligini e'tiborga olsak, unda asosiy yo'nalishlar meridian va parallelar bilan ustma-ust tushadi va *m* meridian va *n* parallellar bo'yicha uzunlik xususiy masshtablari ekstremal bo'ladi. Uzunlik xususiy masshtabi ta'rifidan kelib chiqqan holda va 23-rasmdan quyidagi tenglikni hosil qilamiz:

$$m = -\frac{d\rho}{Md\varphi};$$

$$n = \frac{\rho d\delta}{rd\lambda} = \frac{\alpha\rho}{r}. \qquad (67)$$

Bunda minus ishora φ qiymati ortishi bilan ρ radius qiymati kamayib borishini bildiradi. Maydon masshtabi

$$p = mn.$$

Burchaklarning nisbatan eng katta xatoligi qiymati quyidagi formula bo'yicha aniqlanadi:

$$\sin\frac{\omega}{2} = \frac{a-b}{a+b}.$$

Tasvirlanayotgan hududning o'lchami va konusli proyeksiya parametrlarini aniqlash usullariga binoan, proyeksiyada bitta yoki ikkita parallellar mavjud bo'lib, ularning uzunligi xatosiz tasvirlanadi; bunday parallellar – *asosiy parallellar* deyiladi. m, n, p, ω formulalar tahlili shuni ko'rsatadiki, bu proyeksiyalarda xatolik qiymati faqat kenglikka bog'liq bo'ladi, shu sababli izokolalar parallellar bilan mos tushadi va aylana yoylaridan iborat bo'ladi.

Normal konusli proyeksiyalar, ayniqsa, parallellar bo'ylab cho'zilgan va o'rta kengliklarda joylashgan hududlarni tasvirlash uchun juda qulay. Biroq ular nafaqat o'rta, balki janubiy va shimoliy kengliklarda joylashgan, turli xil shaklga ega bo'lgan hududlarni tasvirlash uchun ham keng miqyosda foydalaniladi (faqat qutb hududlarini emas).

18-§. Teng burchakli normal konusli proyeksiyalar

Teng burchakli normal konusli proyeksiyalarda qutb radiusi ρ teng burchakli tasvirlashning asosiy shartidan kelib chiqqan holda aniqlanadi:

$$m = n.$$

(67) formulani hisobga olib, quyidagi tenglamani olamiz:

$$-\frac{d\rho}{Md\varphi} = \frac{\alpha\rho}{r}; \text{ yoki } \frac{d\rho}{\rho} = -\alpha\frac{Md\varphi}{r}; \qquad (68)$$

Integrallashgandan so'ng:

$$\ln \rho = -\ln C - \alpha \int \frac{M d\varphi}{r}; \tag{69}$$

bunda S – integrallash doimiysi.

Integral $\int \frac{M d\varphi}{N \cos \varphi} = q$, ellisoidning teng burchakli tasvirlashning barcha natijalarida uchraydi.

Integrallashgandan so'ng, olamiz:

$$\int \frac{M d\varphi}{N \cos \varphi} = \ln U, \tag{70}$$

bunda

$$U = \frac{tg(45^0 + \varphi / 2}{tg^e(45^0 + \psi / 2)};$$

$$\sin \psi = e \sin \varphi.$$

e – ellipsoidning birinchi ekssentrisiteti.

Unda (69) formula quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\ln \rho = \ln C - \alpha \ln U, \text{ bundan}$$

$$\rho = C / U^{\alpha}. \tag{71}$$

$\varphi = 0$ bo'lganda (ψ=0 bo'ladi) funksiya U birga teng. Unda (71) formuladan

$$\rho_{\varphi=0} = C$$

ya'ni parametr S proyeksiyada ekvator radiusiga teng. Agar φ = 90° bo'lsa, funksiya U cheksiz va $\rho_{\varphi=90^0}$=0, ya'ni geografik qutb nuqta bo'lib tasvirlanadi. (65), (66), (67) va (71) formulalar asosida normal teng burchakli konusli proyeksiyalar formulalarini olamiz:

$$\begin{gathered} x = q - \rho \cos \delta; \quad y = \rho \sin \delta; \\ \rho = C / U^{\alpha}; \quad \delta = \alpha \lambda; \\ \alpha = const; \ C = const; \\ m = n = \alpha \rho / r = \alpha C / r U^{\alpha}; \\ p = m^2; \ \omega = 0; \end{gathered} \tag{72}$$

Agar yer yuzasi sfera sifatida qabul qilinsa, unda

$$U = tg(45^0 + \varphi / 2);$$

$$\rho = C tg^{\alpha}(45^0 + \varphi / 2);$$

$$m = n = \alpha\rho / R\cos\varphi;$$

α va C parametrlar xatoliklar qiymati va ularning taqsimlanishiga ta'sir qiladi. Ularni aniqlash usullarini ko'rib chiqishdan avval, n masshtabni ekstremumligini tekshiramiz va minimal masshtabli parallel kengligini φ_0 topamiz. Buning uchun n ni φ bo'yicha differensiallaymiz:

$$n_\varphi = \alpha(\rho_\varphi r - r_\varphi \rho)/r^2$$

(68) tenglikni e'tiborga olib

$$\rho_\varphi = -\alpha\rho M / r.$$

(3) formula asosida

$$r_\varphi = (N\cos\varphi)_\varphi = N\varphi\cos\varphi - N\sin\varphi = \frac{\alpha e^2 \sin\varphi\cos^2\varphi}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{3/2}} - \frac{a\sin\varphi}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{1/2}} =$$

$$= \frac{a\sin\varphi(e^2\cos^2\varphi + e^2\sin^2\varphi - 1)}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{3/2}} = -\frac{a(1-e^2)\sin\varphi}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{3/2}} = -M\sin\varphi. \tag{73}$$

unda

$$n_\varphi = \frac{\alpha\rho}{r}\frac{M}{r}(\sin\varphi - \alpha).$$

Olingan hosila no'lga teng bo'ladi, qachonki $\alpha = \sin\varphi_0$.

Kenglik bo'yicha ikkinchi hosila

$$(n_{\varphi\varphi})_0 = n_0 \frac{M_0}{N_0},$$

musbat, shuning uchun φ_0 kenglikdagi parallel bo'yicha n_0 masshtab minimal. Shunday qilib, teng burchakli konusli proyeksiyalarda ekstremum tenglamasi quyidagicha bo'ladi.

$$\sin\varphi_0 = \alpha \tag{74}$$

Teng burchakli proyeksiyalarda xohlagan nuqtada uzunlikning xususiy masshtabi yo'nalishga bog'liq emasligini e'tiborga olsak, unda xatolik ellipsi cheksiz kichik radiusli aylana bo'ladi. Uzunlik masshtabi va parallellar oraliqlari φ_0 qiymatli paralleldan har ikkala tomon bo'ylab o'sib boradi, biroq bunda ekvatorga nisbatan qutbga tomon o'sish tezroq qayd qilinadi.

α va C parametrlarni aniqlashning bir nechta usullarini ko'rib chiqamiz.

1. Berilgan asosiy φ_0 kenglikli parallelda n_0 uzunlik xususiy masshtabi (odatda, tasvirlanayotgan hudud uchun o'rtalikda) nisbatan kichik qiymatda yoki birga teng. α parametrni ekstrimum tenglamasidan (*74*), S parametrni esa – (*72*) formula asosida topamiz, bunda qabul qilingan – $n_0 = 1$ shart hisobga olinadi:

$$\alpha C / r_0 U_0^{\alpha} = 1, \text{ bundan:}$$

$$C = r_0 U_0^{\alpha} / \alpha$$

Berilgan bitta asosiy parallelga ega teng burchakli konusli proyeksiyalar kenglik bo'ylab cho'zilishi 6 – 8° dan oshmaydigan hududlarni tasvirlashda foydalaniladi. Bunday holatda uzunlik xatoligi 0,2% dan oshmaydi.

2. φ_0 kenglikli asosiy parallelda n_0 xususiy masshtabi nisbatan kichik qiymatli va birga teng bo'ladi, chetki parallellarda φ_j va φ_{sh} kengliklarda xususiy masshtablar o'zaro teng, ya'ni $n_j = n_{sh}$. α ni aniqlash uchun ikkinchi shartdan ($n_{yu} = n_s =$) foydalanamiz hamda (67) formulani ishlatamiz:

$$\alpha C / r_{yu} U_{yu}^{\alpha} = \alpha C / r_c U_c^{\alpha},$$

undan

$$r_{yu} U_{yu}^{\alpha} = r_c U_c^{\alpha}.$$

logarifmlashdan keyin

$$\alpha = (\lg r_{yu} - \lg r_c) / (\lg U_c - \lg U_{yu}).$$

lg U ning qiymatini maxsus jadvaldan olamiz.

α qiymatini bilgan holda φ_0 kenglikni (74) formula bilan aniqlaymiz, $n_0 = 1$ sharti bo'yicha S qiymatini (72) formuladan topamiz.

3. n_1 va n_2 xususiy masshtablar berilgan kengliklari φ_1 va φ_2 ikkita asosiy parallellarda birga teng ($n_1 = n_2 = 1$).

$n_1 = n_2$ bo'lgani uchun

$$\alpha C / r_1 U_1^{\alpha} = \alpha C / r_2 U_2^{\alpha},$$

bundan

$$\alpha = (\lg r_1 - \lg r_2) / (\lg U_2 - \lg U_1).$$

α ni bilgan holda (74) formuladan φ_o topish mumkin.

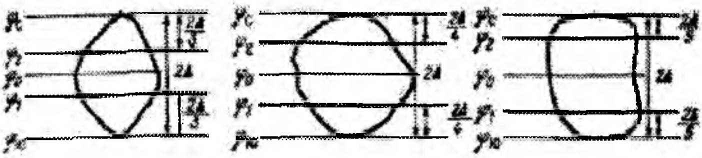
C parametrni bosh parallellarda uzunlik xususiy masshtablari birga tenglik sharti bo'yicha topamiz, unda

$$C = r_1 U_1^{\alpha} / \alpha = r_2 U_2^{\alpha} / \alpha .$$

V.V. Kavrayskiy bosh parallellar kengligini quyidagi formulalar bo'yicha aniqlashni taklif etadi:

$$\varphi_1 = \varphi_j + 2\Delta/K; \quad \varphi_2 = \varphi_{sh} - 2\Delta/K,$$

bunda $2\Delta = \varphi_{sh} - \varphi_j$, K qiymat chegara chizig'i shakliga bog'liq *(24-rasm)*, chegara romb shaklida bo'lganda K=3, doiralida: K=4, to'g'ri burchaklida: K=5.



24-rasm. **Konusli proyeksiyalarda asosiy parallellar kengligini aniqlash usullari**

Ikkita asosiy parallellarga ega bo'lgan teng burchakli konusli proyeksiya «*o'rta*» o'lchamli, kengligi 10 – 30° ga cho'zilgan hududlarni tasvirlashda ishlatiladi. Faqat juda kam holatlarda, maydonni tasvirlashga nisbatan yuqori darajada talablar qo'yilganda teng oraliqli konusli proyeksiyalarga o'tishga to'g'ri keladi, bunda maydon xatoligi taxminan teng burchakli proyeksiyaga nisbatan solishtirilganda ikki marta kam bo'ladi.

4. Kengligi φ_j va φ_{sh} bo'lgan chetki parallellarda uzunlik xususiy masshtablari n_j va n_{sh} bir-biri bilan teng va ular birdan shunchalik kattaki, minimal xususiy masshtab n_o birdan qancha kichik bo'lsa, ya'ni $1 : n_0 - n_j : 1$ yoki $1 : n_2 = n_{sh} : 1$.

Birinchi shart bo'yicha:

$$\alpha = (\lg r_j - \lg r_{sh}) / (\lg U_{sh} - \lg U_j) .$$

α ni bilgan holda φ_0 ni (74) formula bilan topamiz.

Ikkinchi shart quyidagi tenglamalarga olib keladi: $n_j n_o = 1$ va $n_{sh} n_o = 1$ (72) formuladan,

$$\frac{\alpha^2 c^2}{r_j U_j^{\alpha} r_0 U_0^{\alpha}} = 1, \quad \frac{\alpha^2 c^2}{r_{sh} U_{sh}^{\alpha} r_0 U_0^{\alpha}} = 1,$$

undan

$$C = \frac{1}{\alpha}\sqrt{r_j r_0 U_j^{\alpha} U_0^{\alpha}} = \frac{1}{\alpha}\sqrt{r_{sh} r_0 U_{sh}^{\alpha} U_0^{\alpha}}.$$

Bunday holatda asosiy parallellarning kengligi berilmaydi va hisoblash natijasi kasr son bo'ladi. Bu usulni V.V. Kavrayskiy taklif qilgan.

5. Uzunlik o'rtacha kvadrat xatoligi eng kichik bo'lganda. Barcha tasvirlanayotgan hudud kengligi bo'yicha bir xil bo'lgan $\Delta\varphi$ (1^0 kenglik olinganda qulay) va $\lambda = \lambda_{sh} - \lambda_{g}$ uzoqlikga cho'zilgan elementar zonalarga bo'linadi. Har bir zona maydoni uning geometrik vazni sifatida olinadi:

$$p = M\Delta\varphi r\lambda = MN\cos\varphi arc^2 1^0 \cdot \lambda.$$

Xatolik me'yori sifatida masshtab natural logarifmi olinadi, bu uzunlik masshtabi formulasini (72) logarifmlashdan olinadi:

$$v = \ln\mu = \ln(\alpha C) - \ln r - \alpha \ln U.$$

Uzunlik xatoligi o'rtacha kvadratik qiymati quyidagi formula bilan ifoda etiladi:

$$E = \pm\sqrt{\frac{[pvv]}{[p]}}.$$

Belgilaymiz:

$$\ln(\alpha C) = \beta; \quad -\ln U = a; \quad 1 = b; \quad -\ln r = h.$$

Unda $v = \alpha a + \beta b + h$, bunday tenglamalar soni kenglik zonalari soniga teng. α va β noma'lumlar kichik kvadratlar usuli bilan $[pvv]$ = min sharti asosida normal tenglamalar tizimini yechish orqali topiladi:

$$(aa) = [paa] = p_1 a_1 a_1 + p_2 a_2 a_2 + \cdots;$$
$$(aa) = [pab] = p_1 a_1 b_1 + p_2 a_2 b_2 + \cdots;$$

Normal tenglamalarni yechib, topamiz

$$\alpha = [(ah)(bb) - (bh)(ab)]/[(aa)(bb) - (ab)^2];$$
$$\beta = [(bh)(aa) - (ah)(ab)]/[(aa)(bb) - (ab)^2];$$
$$\lg C = \mathrm{mod}\,\beta - \lg\alpha.$$

19-§. Teng maydonli normal konusli proyeksiyalar

Teng maydonli tasvirlash sharti (p=1) bo'yicha ortogonal to'rli proyeksiyalarda mn = 1 bo'ladi.

Xususiy masshtablar qiymatini m va n (67) formuladan qo'yib, olamiz

$$-\frac{\alpha\rho d\rho}{Mrd\varphi}=1, \quad \text{undan}$$

$$\rho d\rho=-\frac{Mr}{\alpha}d\varphi. \qquad (75)$$

Bu tenglikni integrallab:

$$\rho^2=-\frac{2}{\alpha}\int_0^{\varphi}Mrd\varphi=C-\frac{2}{\alpha}S,$$

bunda S = $\int_0^{\varphi}Mrd\varphi$ - uzoqligi bir radian va ekvatordan to kengligi φ parallelgacha cho'zilgan sferoidik trapetsiya maydoni.

Agar $C=\frac{2}{\alpha}c$ olinsa, unda

$$\rho^2=\frac{2}{\alpha}(c-S). \qquad (76)$$

Bunda c – proyeksiyaning ikkinchi parametri.

$\varphi=90^0$ bo'lganda, radius $\rho\neq 0$, chunki (79) va (80) formulalardan $c\neq S$. Demak, teng maydonli proyeksiyalarda qutb nuqta emas, balki qutbiy yoy bo'lib tasvirlanadi.

(65), (66), (67), (76) tenglamalar asosida ellipsoid uchun normal teng maydonli konusli proyeksiyalar formulalarini olamiz:

$$x=q-\rho\cos\delta; \qquad y=\rho\sin\delta;$$

$$\rho^2=\frac{2}{\alpha}(c-S) \qquad \delta=\alpha\lambda$$

$$\alpha=const; \qquad \text{c=const}; \qquad (77)$$

$$n=\frac{\alpha\rho}{r}; \qquad m=\frac{1}{n}=\frac{r}{\alpha\rho};$$

$$\text{p=1}; \qquad tg(45^0+\frac{\omega}{4}=a$$

Uzunlik xususiy masshtabini ekstremum bo'yicha tekshiramiz. Kenglik bo'yicha birinchi hosila:

$$n_{\varphi}=\frac{\alpha(\rho_{\varphi}r-r_{\varphi}\rho)}{r^2}$$

(75) va (73) formulalardan

$$\rho_{\varphi}=-Mr/\alpha\rho; \qquad r_{\varphi}=-M\sin\varphi,$$

bundan

$$n_{\varphi}=\alpha\left(\frac{-Mr^2/\alpha\rho+\rho M\sin\varphi}{r^2}\right)=\frac{\alpha\rho}{r}\frac{M}{r}\left(\sin\varphi\frac{r^2}{\alpha\rho^2}\right).$$

Birinchi hosila nolga teng bo'ladi faqat φ_0 da, ya'ni

$$\sin\varphi_0-r_0^2/\alpha\rho_0^2=0.$$

Unda ekstremum tenglamasi

$$\rho_0=r_0/\sqrt{\alpha\sin\varphi_0}. \qquad (78)$$

Ikkinchi hosila φ_0 kenglikli parallelda $(n_{\varphi\varphi})_0>0$ va masshtab n_0 minimal bo'ladi.

Meridianlar bo'ylab xususiy masshtab (m) parallellar uzunlik masshtabiga (n) teskari proporsional va bu qiymat har ikkala tomon bo'ylab φ_0 parallellardan uzoqlashishi bilan kamayib boradi, biroq qutbga yo'nalishda bu kamayish tezroq bo'ladi. O'z navbatida, mos ravishda qutbga tomon parallellar o'rtasidagi o'zaro oraliqlar ekvatorga nisbatan tezroq kamayib borishi kuzatiladi.

α va C parametrlarni aniqlashning ikkita usulini qarab chiqamiz.

1. Berilgan φ_0 kenglikda asosiy parallelning n_0 xususiy masshtabi minimal va birga teng, ya'ni:

$$n_0=\alpha\rho_0/r_0=1.$$

(78) ekstremum tenglamasidan foydalanib, olamiz:

$$\frac{\alpha r_0}{r_0\sqrt{\alpha\sin\varphi_0}}=1,$$ undan birinchi parametr

$$\alpha=\sin\varphi_0$$ bundan:

$$\rho_0=N_0 ctg\varphi_0.$$

α va ρ_0 bilgan holda, (76) formuladan ikkinchi parametrni olamiz:

$$C = \alpha\rho_0^2 / 2 + S_0 . \qquad (79)$$

2. Uzunlik xususiy masshtabi n_1 va n_2 ikkita φ_1 va φ_2 kenglikli asosiy parallellarda birga teng, ya'ni $n_1 = 1$ va $n_2 = 1$. Unda (77) tenglamaga binoan

$$(\alpha\rho_1)^2 = r_1 ; \quad (\alpha\rho_2)^2 = r_2^2 ,$$

(77) formuladan ρ_1^2 va ρ_2^2 qo'yamiz va birinchi tenglikdan ikkinchisini ayiramiz:

$$2\alpha(S_2 - S_1) = r_1^2 - r_2^2 \text{ .bundan:}$$

$$\alpha = (r_1^2 - r_2^2) / 2(S_2 - S_1) .$$

α ni bilgan holda, bosh parallellarning ρ_1 va ρ_2 qutbiy radiuslarini topish mumkin:

$$\rho_1 = r_1 / \alpha ; \quad \rho_2 = r_2 / \alpha$$

va ikkinchi parametr:

$$c = \frac{\alpha\rho_1^2}{2} + S_1 = \frac{\alpha\rho_2^2}{2} + S_2 . \qquad (80)$$

Agar yer yuzasi R radiusli sfera sifatida qabul qilinsa, unda:

$$\rho^2 = \frac{2R^2}{\alpha}(c - \sin\varphi) ;$$

1) $\alpha = \sin\varphi_0 ;$ 2) $\alpha = \dfrac{r_1^2 - r_2^2}{2R^2(\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1)}$

$$c = \frac{\alpha\rho_0^2}{2R^2} + \sin\varphi_0 . \qquad c = \frac{\alpha\rho_1^2}{2R^2} + \sin\varphi_1 = \frac{\alpha\rho_2^2}{2R^2} + \sin\varphi_2 .$$

20-§. Meridianlar bo'yicha teng oraliqli normal konusli proyeksiyalar

Bunday proyeksiyada qutb radiusi ρ barcha meridianlarning uzunligi saqlanib qolishi sharti asosida aniqlanadi:

$$m = -\frac{d\rho}{Md\varphi} = 1.$$

Unda $d\rho = -Md\varphi$ (81)

va integrallashdan keyin

$$\rho = -s + C = C - s \qquad (82)$$

bunda s – ekvatordan φ kenglikli parallelgacha bo‘lgan meridian yoyi uzunligi, C – proyeksiyada ekvator radiusini ifodalaydigan parametr (φ=0 s =0 va $\rho_{ekv}=C$). Qutb radiusi $\rho = C - s_0^{90^0}$ aylana yoyi bo‘lib tasvirlanadi.

Meridianlari bo‘yicha teng oraliqli normal konusli proyeksiyalar umumiy formulalari (82), (65), (66), (67) formulalar asosida olinganda quyidagi ko‘rinishga ega:

$$x = q - \rho\cos\delta; \quad y = \rho\sin\delta;$$
$$\rho = C - s; \quad \delta = \alpha\lambda;$$
$$\alpha = const; \quad C = const; \tag{83}$$
$$m = 1; \quad n = \alpha(C - s)/r;$$
$$p = n; \quad \sin(\omega/2) = (a-b)/(a+b).$$

n uzunlik xususiy masshtabini ekstremum bo‘yicha tadqiq qilamiz. (81) va (83) formulalardan

$$\rho_\varphi = -M; \quad r_\varphi = -M\sin\varphi; \text{ unda}$$
$$n_\varphi = \alpha\frac{-Mr + M\rho\sin\varphi}{r^2} = \frac{\alpha\rho}{r}\frac{M}{r}\left(-\frac{r}{\rho} + \sin\varphi\right) = n\frac{M}{r}\left(\sin\varphi - \frac{r}{\rho}\right)$$

Birinchi hosila no‘lga teng bo‘ladi, faqat φ_0, ya’ni

$$\sin\varphi_0 - r_0/\rho_0 = 0$$

Unda ekstremum tenglamasi

$$\rho_0 = C - s_0 = N_0 ctg\varphi_0. \tag{84}$$

Ikkinchi hosila $(n_{\varphi\varphi})_0 > 0$, unda φ_0 kenglikli parallelda xususiy masshtab n_0 minimal bo‘ladi:

$$n_0 = \alpha N_0 ctg\varphi_0 / N_0\cos\varphi_0 = \alpha/\sin\varphi_0 \tag{85}$$

α va C parametrlarni aniqlash usullarini ko‘rib chiqamiz.

1. n_0 masshtab berilgan φ_0 kenglikda bosh parallellarda eng kichik va birga teng, ya’ni n_0 = 1. (85) formulani hisobga olib:

$$n_0 = \alpha/\sin\varphi_0 = 1;$$
$$\alpha = \sin\varphi_0,$$
$$C = s_0 + N_0 ctg\varphi_0.$$

2. n_1 va n_2 uzunlik xususiy masshtablari berilgan kengliklardagi φ_1 va φ_2 bosh parallellarda birga teng, ya’ni n_1 = 1 va n_2 = 1. Unda:

$$\alpha(C-s_1)/r_1=1; \quad \alpha(C-s_2)/r_2=1;\ \text{bundan}$$

$$C=s_1+r_1/\alpha; \quad C=s_2+r_2/\alpha;$$

birinchi formuladan ikkinchisini ayirib α parametrni topamiz:

$$s_2-s_1=(r_1-r_2)/\alpha; \qquad \alpha=(r_1-r_2)/(s_2-s_1).$$

3. Parallellar bo'yicha uzunlik xatosi o'rtacha kvadratik qiymati eng kichik. Teng burchakli konusli proyeksiyada ham o'xshash ravishda hudud uzoqlik $\lambda=\lambda_{sh}-\lambda_g$, bo'yicha cho'zilgan elementar kenglik zonalarga bo'linadi.

Har bir zona geometrik vazni

$$p=M\Delta\varphi r\lambda.$$

Bu proyeksiyada xatolik me'yori sifatida qabul qilinadi:

$$v=n-1=\alpha C/r-\alpha s/r-1.$$

Unda parallellar bo'ylab uzunlik xatoligi o'rtacha kvadratik qiymati:

$$E_n=\pm\sqrt{\frac{[pvv]}{[p]}}.$$

$\beta=\alpha C; \quad -s/r=a; \quad l/r=b; \quad l=h$, olamiz

$$\alpha a+\beta b-h=v.$$

Olingan tenglamalar soni zonalar soniga teng bo'ladi.

Bu tenglamalarni minimum sharti bo'yicha yechib $[pvv]$, α va β, so'ngra $C=\beta/\alpha$ qiymatlarni topamiz.

V.V. Kavrayskiy sobiq Ittifoq hududida qutb doirasidan janubga tomon uzunlik xatoligi o'rtacha kvadratik qiymati minimal, sharti asosida α va C parametrlarni aniqlagan. α va C qiymatlarni olish asosida n xususiy masshtab hisoblab chiqilgan, keyin esa n o'zgarish grafigi asosida bosh parallellarning kengligi aniqlangan. Olingan qiymatlarni butun graduslargacha yaxlitlash orqali, V.V. Kavrayskiy α va C qiymatlarini ikkinchi usul formulalari yordamida yana qaytadan aniqlagan. Asosiy parallellar kengligi $\varphi_1=47°$ va $\varphi_2=62°$ bo'lgan.

4. Sobiq Ittifoq hududi uchun F.N. Krasovskiyning meridianlar bo'yicha teng oraliqli proyeksiyasida qator (mintaqa) maydoni saqlanadi, uning cho'zilishi ma'lum; φ_1 va φ_2 kenglikli bu qator chetki parallellarida uzunlik xususiy masshtablari ($n_1=n_2$) tengligi saqlanadi;

butun hudud bo'ylab parallellar bo'yicha uzunlik xatoligi kvadratlari yig'indisi eng kichik qiymat oladi. 20^0 kenglik bo'yicha qator uzunligi berilgan, α va φ_1 parametrlar quyidagi shart bo'yicha topilgan:

$$E_n = \pm\sqrt{\frac{[pvv]}{[p]}} = \min,$$

bunda $v = n - 1$, p – kengligi φ bo'lgan parallellar uzoqlashishi, ularning geometrik vaznini bildiradi. Meridianlar bo'yicha uzunlik xususiy masshtabi bu shart bo'yicha no'lga teng emas. Proyeksiyaning asosiy formulalarini keltiramiz, bunda yer yuzasi radiusi R = 1 bo'lgan sfera sifatida olinadi.

$\rho = \rho_1 + m(\varphi_1 - \varphi) = \rho_2 + m(\varphi_2 - \varphi)$, bunda φ_1, φ_2 – qatorning (mintaqa) chetki parallellari kengligi,

$$\varphi_1 = 73°28'42''; \qquad \varphi_2 = 39^0 28' 42''$$

$$\varphi_2 - \varphi_1 = 2\theta = 34^\circ, \ \varphi_m = (\varphi_1 + \varphi_2)/2 = 66^0 28' 42'';$$

$$\rho_1 = \cos\varphi_1 / \sqrt{\alpha\cos\theta\sin\varphi_m}; \qquad \rho_2 = \cos\varphi_2 / \sqrt{\alpha\cos\theta\sin\varphi_m}$$

$$\alpha = 0{,}851568; \qquad n = \alpha\rho/\cos\varphi;$$

$$m = \frac{\sin\theta}{\theta}\sqrt{\frac{\sin\varphi_m}{\alpha\cos\theta}} = 0{,}99703$$

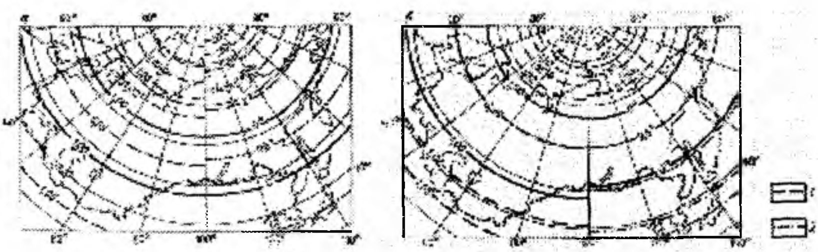
1-jadval

Proyeksiyalar parametrlari	Kavrayskiy ma'lumotlari		Krasovskiy ma'lumotlari	
α	0,8118238		0,8515680	
S (km)	10575,2		5968,3	
m	1,00000		0,99703	
φ_0 (gradus)	n	ω	n	ω
30	1,065	3°38'	1,084	4°45'
40	1,020	1 07	1,031	1 56
50	0,995	0 18	0,998	0 05
60	0,996	0 15	0,987	0 35
70	1,041	2 19	1,010	0 45
80	1,235	12 03	1,136	7 28

1-jadvalda sobiq Ittifoq kartalari uchun Kavrayskiy va Krasovskiy tomonidan ishlab chiqilgan teng oraliqli konusli proyeksiyalarda uzunlik, maydon xususiy masshtablari va burchaklar xatoligi eng katta qiymatlari keltirilgan.

Keltirilgan 1-jadvaldan ko'rish mumkinki, Krasovskiy proyeksiyasida 80-parallelda uzunliklar va burchaklar xatoligi Kavrayskiy proyeksiyasiga nisbatan solishtirilganda, deyarli ikki marta kichik qiymatga egaligi ko'rinadi. Har ikkala proyeksiyada xatoliklarning taqsimlanishi 25-rasmda ko'rsatilgan.

Kavrayskiy proyeksiyasini sobiq Ittifoq hududi uchun qo'llash mumkin, qachonki uning materikli qismini minimal xatolikda tasvirlash uchun, Krasovskiy proyeksiyasini esa – nafaqat materikli qismni, balki qutb basseyni rayonini ham minimal xatolikda tasvirlash uchun ishlatsa bo'ladi.



25-rasm. **Teng oraliqli konusli proyeksiyalarda izokolalar – r (1) va ω (2).** *a – Kavrayskiy ma'lumotlari; b – Krasovskiy ma'lumotlari.*

21-§. Qiyshiq va ko'ndalang konusli proyeksiyalar

Normal konusli proyeksiyalar ko'proq parallellar bo'ylab cho'zilgan hududlarni tasvirlash uchun qulay. Agar hudud parallel bilan ustma-ust tushmaydigan, kichik aylana, ya'ni almukantarat bo'ylab cho'zilgan bo'lsa, unda qiyshiq yoki ko'ndalang konusli proyeksiyalardan foydalanish mumkin.

Bu proyeksiyalarda yer yuzasi R radiusli sfera sifatida qabul qilinadi, bunda vertikallar va almukantaratlar chiziqlari bilan mos tushuvchi z va a qutbli sferik koordinatalar tizimi kiritiladi. Qiyshiq proyeksiyalarda qutbli sferik koordinatalar qutb φ_0 kengligi $0 < \varphi_0 < 90°$, ko'ndalang proyeksiyalarda – $\varphi_0 = 0$ bo'ladi.

Qiyshiq va ko'ndalang konusli proyeksiyalarda vertikallar bitta nuqtadan azimutlari farqiga proporsional bo'lgan burchak ostida o'tuvchi to'g'ri chiziqlar bilan ifodalanadi, almukantaratlar esa – markazi vertikallar tutashadigan nuqtada bo'lgan konsentrik aylana yoylari. Qutb meridiani Q (bir vaqtning o'zida u qutb vertikali P ham hisoblanadi) to'g'ri chiziq bilan tasvirlanadi va proyeksiyaning abssissa o'qi sifatida qabul qilinadi, bunda u egri chiziqlar bilan tasvirlanuvchi qolgan boshqa meridianlar va parallellar uchun simmetriya o'qi hisoblanadi.

Odatda, to'ri burchakli koordinatalar boshi sifatida nisbatan kichik kenglikli parallellar va abssissa o'qining kesishish nuqtalari olinadi. Qiyshiq va ko'ndalang konusli proyeksiyalarda asosiy yo'nalishlar vertikallar va almukantaratlar bilan mos tushadi, shu sababli vertikallar va almukantaratlar bo'yicha uzunlik masshtablari (μ_1, μ_2) ekstremal bo'ladi.

Qiyshiq va ko'ndalang konusli proyeksiyalarni hisoblash jarayoni bir nechta bosqichlardan tashkil topadi:

- ellipsoiddan sferaga o'tish va sfera radiusini R tanlash;
- qiyshiq yoki ko'ndalang tizim qutb koordinatalarini (φ_0, λ_0) aniqlash;
- geografik (φ, λ) koordinatalardan z, a koordinatalarga o'tish;
- ρ, δ; x, y koordinatalarni, masshtablar va burchaklar xatoligini hisoblash.

Qiyshiq va ko'ndalang konusli proyeksiyalarning umumiy formulasini (*65*), (*66*), (*67*) formulalar bo'yicha keltirib chiqarish mumkin, bunda φ va λ qiymatlar o'rniga $(90° - z)$ va a qiymatlar qo'yiladi. Ular quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\begin{gathered} x = q - \rho\cos\delta; \quad y = \rho\sin\delta; \\ \rho = f(z); \qquad \delta = \alpha a; \\ \mu_1 = d\rho / Rdz; \quad \mu_2 = \alpha\rho / R\sin z; \\ p = \mu_1\mu_2; \ \sin(\omega/2) = (a-b)/(a+b); \\ \alpha = const. \end{gathered} \tag{86}$$

Keltirilgan (*86*) formuladan ko'rish mumkinki, qiyshiq va ko'ndalang konusli proyeksiyalarda xatolik faqat z zenit masofaga bog'liq bo'ladi, izokolalar – almukantaratlar bilan ustma-ust tushuvchi konsentrik aylana yoylaridir. Qutb radiusi ρ tasvirlash shartlariga bog'liq holatda topiladi.

Qiyshiq va ko'ndalang teng burchakli konusli proyeksiyalar uchun mos ravishda z_0, yoki z_1 va z_2 qiymatlarda berilgan zenit masofada bitta yoki ikkita asosiy almukantaratlar belgilanishi bo'yicha formulalarni keltiramiz, bunda $\mu_2 = 1$ sharti bajariladi:

$$x = q - \rho\cos\delta; \quad y = \rho\sin\delta;$$

$$\rho = Ctg^{\alpha}\frac{z}{2}; \quad \delta = \alpha a;$$

$$\mu_1 = \mu_2 = \alpha Ctg^{\alpha}\frac{z}{2} / R\sin z;$$

$$\alpha = const.$$

$$1)\ \alpha = \cos z_0; \quad C = Rtgz_0 ctg^{\cos z_0}\frac{z_0}{2}.$$

$$2)\ \alpha = (\lg\sin z_1 - \lg\sin z_2)/\left(\lg ctg\frac{z_2}{2} - \lg ctg\frac{z_1}{2}\right); \quad C = R\sin z_1 ctg\frac{z_1}{2}/\alpha.$$

Qiyshiq va ko'ndalang teng burchakli konusli proyeksiyalar ayronavigatsiya marshrutli kartalarini tuzishda ishlatilishi mumkin.

Nazorat savollari

1. *Normal teng burchakli konusli proyeksiyalar formulalarini keltiring, ularga izohlar bering.*
2. *2. α va S parametrlarni aniqlash usullari mohiyati nimada, eng muhim formulalarni keltiring va qisqacha izoh bering.*
3. *Teng maydonli normal konusli proyeksiyalarda uzunlik xususiy masshtablari qanday aniqlanadi?*
4. *Teng oraliqli normal konusli proyeksiyalarga tushuncha bering va asosiy formulalarini keltiring.*
5. *Qiyshiq va ko'ndalang konusli proyeksiyalar haqida nimalarni bilasiz, ularni hisoblash jarayoni qanday bosqichlardan iborat?*

V BOB
AZIMUTAL VA PERSPEKTIV-AZIMUTAL PROYEKSIYALAR

22-§. Azimutal proyeksiyalarning asosiy qoidalari va umumiy formulalari

Azimutal proyeksiyalarni konusli proyeksiyalarning xususiy holati sifatida qarash mumkin, bunda parametr α birga teng. Azimutal proyeksiyalar ko'p holatlarda mayda masshtabli kartalar uchun ishlatiladi, shu sababli Yer yoki boshqa planetalar yuzasi, odatda, sfera radiusi sifatida *R* qabul qilinadi. Agar proyeksiyalardan o'rta va yirik masshtabli kartalarni tuzishda foydalanilsa, u holda yer yuzasi ellipsoid sifatida ham qabul qilinishi mumkin.

Azimutal proyeksiyalar normal $(\varphi_0 = 90^\circ)$, qiyshiq $(0^0 < \varphi_0 < 90^0)$ va ko'ndalang $(\varphi_0 = 0^0)$ turlarga bo'linadi. Sferik koordinata tizimida qutb Q (φ_0, λ_0) uchun kartaga olinayotgan hudud markazidagi nuqta tanlanadi.

Normal azimut proyeksiyalarda *(26-rasm)* meridianlar to'g'ri chiziqlar bo'lib tasvirlanadi, ular tegishli meridianlar uzoqligi farqi qiymatiga teng burchak ostida bitta nuqtada kesishadi, parallellar esa markazi meridianlar kesishishi nuqtasida joylashgan konsentrik aylana chiziqlardan iborat. Parallellar oraliqlari qabul qilingan tasvirlash xarakteri yoki tasvir tekisligida yuza bo'ylab nuqtalarni loyihalash (*perspektiv-azimutal proyeksiyada*) usullari asosida aniqlanadi. Qiyshiq va ko'ndalang proyeksiyalarda vertikal va almukantaratlar to'ri ham shunday ko'rinishda bo'ladi, bunda meridianlar va parallellar ko'pincha egri chiziqlar bo'ylab tasvirlanadi *(27-rasm)*.

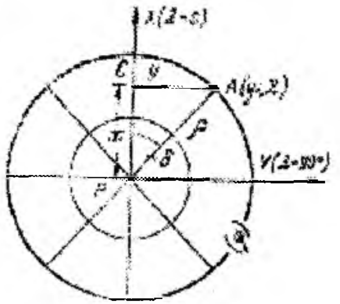
Qiyshiq va ko'ndalang azimutal proyeksiyalarni hosil qilish bir nechta bosqichlarni o'z ichiga oladi:

1) yirik va o'rta masshtabli kartalar uchun – ellipsoiddan sharga o'tish (II bobga qarang), mayda masshtabli kartalar uchun – shar radiusini R tanlash;

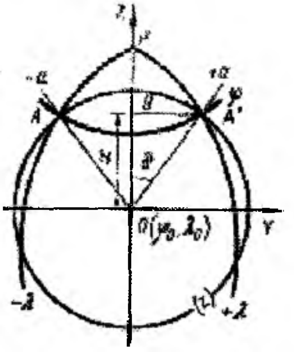
2) qutbiy sferik koordinatalar polyusi Q koordinatalarini φ_0 va λ_0 aniqlash;

3) geografik koordinatalardan (φ va λ) (59), (60), (61) formulalar orqali qiyshiq yoki ko‘ndalang qutbiy sferik koordinatalar (z va a) tizimiga o‘tish;

4) proyeksiyaning koordinatalari, xususiy masshtablari va burchak xatoliklarini hisoblash.



26-rasm. **Normal azimutal proyeksiya koordinatalari tizimi**



27-rasm. **Qiyshiq va ko‘ndalang azimutal proyeksiyalarda koordinatalar tizimi**

Azimutal proyeksiyalarda ikkita koordinata tizimi ishlatiladi – qutbiy (ρ va δ) va to‘g‘ri burchakli (x, y) (26-rasm).

Azimutal proyeksiyalarning umumiy formulasidan kelib chiqib, qiyshiq proyeksiyalar uchun quyidagilarni olish mumkin:

$$x = \rho\cos\delta; \quad \lambda = \rho\sin\delta;$$

$$\rho = f(z); \quad \delta = a$$

$$\mu_1 = d\rho / Rdz = \rho z / R; \quad \mu_2 = \rho / R\sin z; \qquad (87)$$

$$\rho = \mu_1\mu_2; \quad \sin\frac{\omega}{2} = \frac{a-b}{a+b} \text{ yoki } tg(45^0 + \omega/4) = \sqrt{a/b}$$

bunda μ_1 – vertikallar bo‘yicha uzunlik xususiy masshtablari; μ_2 – almukantaratlar bo‘yicha uzunlik xususiy masshtablari; a va b – uzunlik ekstremal xususiy masshtablari. Normal azimutal proyeksiyalar formulalari (87) bo‘yicha z ni $(90^o - \varphi)$ a ni λ ga almashtirish natijasida olinadi.

Qutb radiusi ρ qiymatini aniqlovchi funksiya tasvirlashning berilgan shartiga bog'liq holda aniqlanadi, ya'ni vertikallar bo'yicha (meridianlar bo'yicha) teng burchakli, teng maydonli, teng oraliqli yoki boshqa xatolikka bog'liq holda aniqlanadi. Azimutal proyeksiyalarda vertikallar va almukantaratlar o'zaro perpendikulyarligini inobatga olsak, ular bilan asosiy yo'nalishlar mos tushadi va μ_1, μ_2 masshtablar ekstremal bo'ladi ($\mu_1 = b$, $\mu_2 = a$). Masshtablar va xatoliklar faqat zenit masofasi (kenglik) funksiyalari hisoblanadi, shu sababli izokolalar almukantaratlar (parallellar) bilan ustma-ust tushadi va aylana ko'rinishida bo'ladi. Azimutal proyeksiyalar aylana tuzilishga ega hududlarni tasvirlashda ancha qulay.

(87) formula asosida aniqlanuvchi proyeksiyalarda, proyeksiyaning markaziy nuqtasida barcha xatoliklar mavjud emas va undan uzoqlashish bilan ularning qiymati ortib boradi. Xatoliklarning bir tekisda taqsimlanishi uchun ρ qiymatni hisoblashda formulaga reduksion koeffitsiyent – $k < 1$ kiritilishi mumkin, u markaziy nuqtada uzunlik masshtabiga teng. Bunda asosiy masshtab asosiy almukantarat bo'ylab (normal proyeksiyalar uchun – asosiy parallellarda) saqlanadi.

Normal azimutal proyeksiyalar qutbiy hududlarni, shimoliy va janubiy yarim sharlarni tasvirlash uchun foydalaniladi. Ko'plab holatlarda qiyshiq va ko'ndalang proyeksiyalar materiklar, g'arbiy va sharqiy yarim sharlar va Yer yuzasining boshqa qismlari hamda planetalar qismlarini kartaga olishda qo'llaniladi.

23-§. Teng burchakli azimutal proyeksiyalar

Teng burchakli azimutal proyeksiyalarda qutb radiusi berilgan nuqtada uzunlik xususiy masshtabi yo'nalishga bog'liq emas, sharti asosida aniqlanadi, ya'ni

$$\mu_1 = \mu_2.$$

(87) formuladan bu shartni μ_1 va μ_2 qiymatini qo'yib, olamiz

$$d\rho / R dz = \rho / R \sin z ; \quad d\rho / \rho = dz / \sin z .$$

Bu tenglikni integrallab

$$\lg \rho = \lg tg \frac{z}{2} + \ln C \text{, natijada,}$$

$$\rho = Ctg \frac{z}{2} \text{, bunda C – integral doimiysi.}$$

μ_2 formulasiga ρ ning qiymatini qo'yib, μ uzunlik xususiy masshtabi qiymatini topamiz:

$$\mu = (Ctg \frac{z}{2}) / R \sin z = (C \sec^2 \frac{z}{2}) / 2R$$

markaziy nuqtada ($z = 0$) uzunlik xususiy masshtabi birga teng sharti bo'yicha S parametrni topamiz. Unda $C = 2R$.

Bu holat uchun teng burchakli azimutal proyeksiya formulalari:

$$x = \rho \cos \delta; \quad y = \rho \sin \delta;$$

$$\rho = 2Rtg(z/2); \quad \delta = a; \qquad (88)$$

$$\mu = \sec^2(z/2); \quad p = \mu^2; \quad \omega = 0.$$

Agar uzunlik xususiy masshtabi zenit masofasi z_k bo'lgan bosh almukantaratda birga teng sharti qo'yilsa, unda

$$C = 2R \cos^2(z_k/2).$$

$$\cos^2(z_k/2) = k \text{, belgilab olamiz:}$$

$$C = 2Rk,$$

k – reduksiya koeffitsiyenti. Unda ρ, μ va p aniqlash (87) formula quyidagicha bo'ladi:

$$\rho = 2Rktg(z/2);$$

$$\mu = k \sec^2(z/2); \quad p = \mu^2.$$

$z = 0$ bo'lganda $k = \mu$, ya'ni k - proyeksiyaning markaziy nuqtasida uzunlik masshtabi.

Agar (88) formuladagi z ni (90°– φ) ga, a ni λ ga almashtirsak, unda teng burchakli normal azimutal proyeksiya formulasini olamiz, bunday holatda geografik qutbda uzunlik xususiy masshtabi birga teng bo'ladi:

$$x = \rho \cos \delta; \quad y = \rho \sin \delta;$$

$$\rho = 2Rtg(45^0 - \varphi/2); \quad \delta = \lambda; \qquad (89)$$

$$m = n = \sec^2(45^0 - \varphi/2); \quad p = m^2.$$

Xatoliklarning bir tekis taqsimlanishi uchun formulalarga reduksion koeffitsiyent qiymati kiritilishi mumkin:

$$k = \cos^2(45^2 - \varphi_k/2).$$

Unda (89) formula quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\rho = 2Rktg(45^0 - \varphi/2);$$

$$m = n = ksek^2(45^0 - \varphi/2);$$

bunda φ_k – xatolikning barcha turlari no'lga teng bo'lgan bosh parallel kengligi, k – geografik qutb nuqtasida uzunlik masshtabi.

Teng burchakli azimutal proyeksiyalarda almukantaratlar (parallellar) o'rtasidagi masofa proyeksiyaning markaziy nuqtasidan uzoqlashish bilan ortib boradi. Sharning normal teng burchakli azimutal proyeksiyasi yulduzlar osmoni kartasini tuzishda ishlatiladi.

24-§. Ellipsoidning teng burchakli azimutal proyeksiyalari

Bu proyeksiyalarni olishning uchta usulini qarab chiqamiz:

1. Qutbiy hudUdlarni tasvirlash uchun ellipsoidning teng burchakli azimutal proyeksiyasi. Bu proyeksiya teng burchakli konusli proyeksiyalarning $\alpha = 1$ holatdagi bitta xususiy holati. Bunda (*71*) formula quyidagi ko'rinishni oladi:

$$x = \rho\cos\delta; \qquad y = \rho\sin\delta;$$

$$\rho = \frac{C}{U}; \quad \delta = m^2$$

$$m = n = C/rU; \quad p = m^2;$$

$$C = r_0U_0,$$

bu yerda r_0 va U_0 asosiy parallelni berilgan φ_0 kengligi bo'yicha aniqlanadi, uning xususiy masshtabi birga teng deb olinadi.

2. Aylanali hudUdlarni (qutbiy hudUdlardan tashqari) tasvirlash uchun ellipsoidning teng burchakli azimutal proyeksiyasi. $\alpha = 1$ sharoitda teng burchakli Lagranj proyeksiyasining (Lagranj proyeksiyasi keyinroq qarab chiqiladi) xususiy holati hisoblangan proyeksiya formulasini keltiramiz:

$$x = \frac{k \sin \delta}{1 + \cos \delta \cos \lambda}; \quad y = \frac{k \cos \delta \sin \lambda}{1 + \cos \delta \cos \lambda};$$

$$m = n = \frac{k \cos \delta}{r(1 + \cos \delta \cos \lambda)}; \quad p = m^2;$$

$$tg(45^\circ + \delta / 2) = \beta U.$$

bu yerda, β va k – quyidagi formula bilan aniqlanadigan proyeksiya parametrlari:

$$\beta = \frac{1 + \sin \varphi_0}{1 - \sin \varphi_0} U_0; \quad k = m_0 r_0 (1 + \sec \delta_0),$$

$$tg(\delta / 2) = \sin \varphi_0,$$

φ_0 – berilgan parallel (o‘rta) kengligi.

3. *Qiyshiq qutbiy sferoid koordinatalar tizimidan foydalanish orqali hosil qilingan ellipsoidning teng burchakli azimutal proyeksiyasi.* Qutbiy va geodezik koordinatalar formulalarini hisobga olgan holda, ellipsoidning yuzasi chiziqli elementi kvadrati (e^4 aniqlikda hisoblashda) quyidagi ko‘rinishda ifodalanadi:

$$ds^2 = P^2 (dz^2 + \sin^2 z da^2), \tag{90}$$

bu yerda

$$P = N_0 \left\{ 1 - \frac{e^2}{2} [\sin z \cos a \cos \varphi_0 + \sin \varphi_0 (\cos z - 1)]^2 \right\} + ...;$$

N_0 – qutb nuqtasida birinchi vertikalning kesishish egrilik radiusi; z va a – (*59*) va (*60*) yoki (*61*) formulalar bo‘yicha aniqlanadi. (87) va (90) formulalarni e’tiborga olib, vertikallar va almukantaratlar bo‘ylab cho‘zilgan uzunlik xususiy masshtabini quyidagi tenglik bilan aniqlash mumkin:

$$\mu_1 = d\rho / P dz; \quad \mu_2 = \rho / P \sin z. \tag{91}$$

Teng burchaklik shartini yozib $\mu_1 = \mu_2$, $f = 0$, olamiz

$$d\rho / \rho = dz / \sin z.$$

Differensial tenglamalar qutbda uzunlik xususiy masshtabi sharti bo‘yicha birga tengligi hisobga olinib integrallanganda

$\rho = 2N_0 tg(z/2)$ ni olamiz.

(90), (91) tengliklar hisobga olinib, uzunlik xususiy masshtabi

$$\mu = \sec^2\frac{z}{2}\{1+\frac{e^2}{2}[\sin z\cos a\cos\varphi_0 + \sin\varphi_0(\cos z - 1)]^2\} + \cdots;$$

Bu proyeksiya formulasi:

$$x = \rho\cos\delta; \qquad y = \rho\sin\delta;$$

$$P = 2N_0 tg\frac{z}{2}; \qquad \delta = a;$$

$$\mu = \sec^2\frac{z}{2}\{1+\frac{e^2}{2}[\sin z\cos a\cos\varphi_0 + \sin\varphi_0(\cos z - 1)]^2\} + \cdots;$$

$$tga = t_4/(t_1 - e^2\tau\cos\varphi_0); \qquad (92)$$

$$\sin z\cos a = t_1 + e^2\tau(t_1\sin\varphi - \cos\varphi_0);$$

$$\sin z\sin a = t_4(1 + e^2\tau\sin\varphi);$$

$$\cos z = t_5 + e^2\tau(t_5\sin\varphi - \sin\varphi_0);$$

bunda:

$$t_1 = \sin\varphi\cos\varphi_0 - \cos\varphi\sin\varphi_0\cos(\lambda - \lambda_0);$$

$$t_4 = \cos\varphi\sin(\lambda - \lambda_0);$$

$$t_5\sin\varphi\sin\varphi_0 + \cos\varphi\cos\varphi_0\cos(\lambda - \lambda_0);$$

$$\tau = \sin\varphi - \sin\varphi_0,$$

φ_0, λ_0 – yangi qutb nuqtasi geografik koordinatalari.

Bu proyeksiya aylana ko‘rinishdagi o‘rta va yirik masshtabli har qanday hududni kartaga olishda qo‘llanilishi mumkin.

25-§. Teng maydonli azimutal proyeksiyalar

Bu proyeksiyalarda uzunlik xususiy masshtabi proyeksiyaning markaziy nuqtasida birga teng, qutb radiusi ρ quyidagi teng maydonlilik tenglamasi sharti bilan aniqlanadi:

$$\rho = \mu_1\mu_2 = 1.$$

(87) formuladan uzunlik xususiy masshtabi qiymatini qo'ygandan so'ng

$$\frac{d\rho}{Rdz}\frac{\rho}{R\sin z}=1,\text{ undan}$$

$$\rho d\rho = R^2 \sin z dz.$$

Bu tenglikni integrallab:

$$\rho^2/2 = C - R^2 \cos z \text{ ni olamiz.}$$

Integrallash doimiysi S ni proyeksiyaning markaziy nuqtasi $(z=0)$, $\rho=0$ sharti bo'yicha aniqlaymiz, unda $C=R^2$ va

$$\rho^2 = 2R^2(1-\cos z) = 4R^2 \sin^2(z/2);$$

$$\rho = 2R\sin(z/2). \qquad (93)$$

Teng maydonli azimutal proyeksiya formulasi

$$x=\rho\cos\delta;\quad y=\rho\sin\delta;$$

$$\rho = 2R\sin(z/2);\quad \delta = a;$$

$$\mu_1 = \cos(z/2);\ \mu_2 = \sec(z/2); \qquad (94)$$

$$p=1;\quad tg(45^0+\omega/4)=\sec(z/2).$$

Bunday holda proyeksiyaning markaziy nuqtasida hech qanday xatolik turi kuzatilmaydi.

Agar uzunlik xususiy masshtabi μ_2 zenit masofasi z_k bo'lgan bosh almukantaratda birga teng sharti qo'yilsa, unda maydon masshtabi o'zgarmas bo'ladi, lekin birga teng bo'lmaydi.

Bu holat uchun (94) formula quyidagicha bo'ladi:

$$\rho = 2Rk\sin(z/2);\quad \delta = a;$$

$$\mu_1 = k\cos(z/2);\qquad \mu_2 = k\sec(z/2)$$

$$\rho = k^2;\quad tg(45^0+\omega/4)=\sec(z/2)$$

Bunda reduksiya koeffitsiyenti $k=\cos(z_k/2)$ proyeksiya markaziy nuqtasidagi uzunlik masshtabiga teng, chunki . $z=0$; $k=\cos(z_k/2)=1$.

(94) formuladagi z_k ni $(90^2-\varphi)$ ga va α ni λ ga almashtirib, teng maydonli normal azimutal proyeksiya uchun

$$x=\rho\cos\delta;\quad y=\rho\sin\delta;$$

$$\rho = 2R\sin(45^0-\varphi/2);\quad \delta=\lambda;$$

$$m=\cos(45^0-\varphi/2);\qquad n=\sec(45^0-\varphi/2);$$

$p = 1$; $tg(45^{0} + \frac{\omega}{4}) = \sec(45^{0} - \varphi/2)$; ni olamiz.

Bu holatda xatolikning hech qanday turi geografik qutbda kuzatilmaydi ($\varphi = 90^{0}$).

Teng maydonli azimutal proyeksiyalarda (*Lambert proyeksiyasi*) almukantaratlar (*parallellar*) o'rtasidagi masofa proyeksiyaning markaziy nuqtasidan $\sin\frac{z}{2}$ qiymatga proporsional holatda uzoqlashish bilan kamayib boradi. Qiyshiq va teng maydonli azimutal proyeksiyalar yarim sharlar va materiklar (Antarktidadan tashqari) kartalarini tuzishda keng foydalaniladi.

26-§. Vertikallar (meridianlar) bo'yicha teng oraliqli azimutal proyeksiyalar

Bu proyeksiya uchun uzunlik xususiy masshtabi vertikallar bo'yicha birga teng degan sharti qo'yiladi.

$$\mu_1 = d\rho / Rdz = 1.$$

Integrallashgandan so'ng

$$\rho = Rz + C,$$

bunda C – integral doimiysi. $z = 0$, $\rho = 0$ ga teng, unda S = 0, shu sababli $\rho = Rz$, ya'ni qutbiy radius ρ vertikalning to'g'rilangan yoyiga teng va almukantaratlar orasidagi masofa o'zgarmas. Unda vertikallar bo'yicha teng oraliqli azimutal proyeksiya formulalari quyidagicha bo'ladi:

$$x = \cos\delta; \quad y = \sin\delta;$$
$$\rho = Rz; \quad \delta = a; \tag{95}$$
$$\mu_1 = 1; \quad \mu_2 = z/\sin z;$$
$$\rho = \mu_2; \quad \sin(\omega/2) = (\mu_2 - 1) - (\mu_2 + 1).$$

Bunday holatda proyeksiyaning markaziy nuqtasida $z = 0$ xatolikning hech qanday turi kuzatilmaydi.

Agar bosh almukantaratda (z_k) uzunlik xususiy masshtabi birga teng sharti qo'yilsa, unda vertikallar bo'yicha uzunlik xususiy masshtabi o'zgarmas bo'ladi, lekin qiymati birdan kam bo'ladi:

$$\mu_1 = \sin z_k / z_k .$$

Unda (95) formula quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$\rho = Rkz; \quad \delta = a$$

$$\mu_1 = k = (\sin z_k)/z_k; \quad \mu_1 = k(z/\sin z);$$

$$\rho = \mu_1\mu_2; \quad \sin(\omega/2) = (\mu_2 - k)/(\mu_2 + k)$$

Meridianlari bo‘yicha teng oraliqli normal proyeksiya uchun:

$$x = \rho\cos\delta; \quad y = \rho\sin\delta;$$

$$\rho = R(90^0 - \varphi); \quad \delta = \lambda .$$

$$n = p = (90^0 - \varphi)/\cos\varphi; \quad \sin(\omega/2) = (n-1)/(n+1) .$$

Agar bosh parallelda φ_k xususiy masshtab $n_k = 1$ sharti qo‘yilsa, unda

$$\rho = kR(90^0 - \varphi); \; m = k = \cos\varphi_k /(90^0 - \varphi_k).$$

Vertikallar (meridianlar) bo‘yicha teng oraliqli azimutal proyeksiya ko‘pincha *Postel proyeksiyasi* deyiladi. Bu proyeksiyada vertikallar (meridianlar) uzunligi xatoliksiz tasvirlanadi, undan markaziy nuqtadan xohlagan boshqa nuqtagacha bo‘lgan masofani aniqlash talab qilinadigan maxsus kartalarni tuzishda foydalaniladi. Normal proyeksiyalardan Arktika va Antarktika kartalarini tuzishda foydalaniladi.

27-§. Sferaning perspektiv-azimutal proyeksiyalarining umumiy nazariyasi

Perspektiv-azimutal proyeksiyalarda kartaga olinayotgan yuza sfera radiusi – R yoki aylanma ellipsoid sifatida qabul qilinadi. Tasvir tekislikka ko‘rish nuqtasidan chiziqli perspektiv tasvirlash qonuniyati asosida loyihalanadi; bunda ko‘rish nuqtasi sfera diametrlaridan birining davomi sifatida joylashtiriladi. Bu diametr asosiy hisoblanadi va loyihalashning asosiy nuri bilan ustma-ust tushadi. Tasvir tekisligi asosiy diametrga perpendikulyar joylashgan bo‘lib, o‘z navbatida tasvirlanayotgan hududning markaziy nuqtasiga nisbatan yuzaga urinma bo‘ladi. Ushbu nuqta bilan qutbli sferik koordinatalar ($Q(\varphi_0, \lambda_0)$) qutbi mos tushadi.

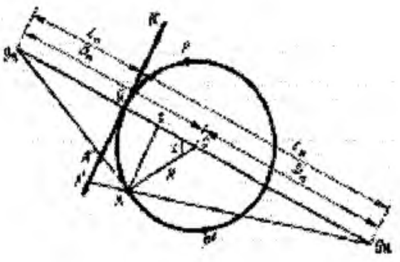
Perspektiv-azimutal proyeksiyalar negativ va pozitiv tasvirli proyeksiyalarga bo'linadi. Negativ proyeksiyalarda tavsir tekisligi K sferaning kuzatish nuqtasidan (S_n) nisbatan uzoq masofada joylashgan qismlari loyihalanadi *(28-rasm)*. Pozitiv tasvirli proyeksiyalarda esa kuzatish nuqtasiga (S_n) qaragan sferaning qismi tasviri loyihalanadi.

Agar ko'rish nuqtasidan tasvir tekisligigacha masofa L qiymat bilan, ko'rish nuqtasidan sfera markazigacha bo'lgan mosafa esa D bilan belgilansa, u holda negativ tasvirli perspektiv-azimutal proyeksiyada

$$L_н = D + R,$$

perspektiv-azimutal proyeksiyalar pozitiv tasvirida

$$L_n = D - R.$$



28-rasm. **Negativ va pozitiv tasvirli perspektiv proyeksiyalarni hosil qilish sxemasi**

D masofaga ko'ra perspektiv-azimutal proyeksiyalar gnomonik (D = 0), stereografik (D = R), tashqi $(R < D < \infty)$ va ortografik $(D = \infty)$ proyeksiyalarga bo'linadi.

Qutbiy sferik koordinata tizimi qutbi kengligi φ_0 qiymati bo'yicha perspektiv-azimutal proyeksiyalar normal $(\varphi_0 = 90^0)$, qiyshiq $(0° < \varphi_0 < 90°)$, ko'ndalang ($\varphi_0 = 0$) proyeksiyalarga bo'linadi.

Vertikallar va almukantaratlar to'ri bunda ham azimutal proyeksiyalarga o'xshash tasvirlanadi. Asosiy tenglamalar azimutal proyeksiyalarga o'xshash, biroq qutbiy radius geometrik yo'l bilan topiladi. Eng umumiy holatda qiyshiq tashqi proyeksiyalar uchun r ning qiymatini negativ va pozitiv tasvirlash uchun topamiz, *(28-*

rasmga qarang). Negativ tasvirlash uchun $g_H QA'$ va $g_H CA$ uchburchaklardan olamiz .

$$QA'/CA = g_H Q / g_H C;$$

$$\Delta OCA: CA = R\sin z; \quad OC = R\cos z, \text{ unda:}$$

$$g_H Q = L_H; \quad g_H O = D_H; \quad g_H C = D_H + R\cos z \text{ unda:}$$

$$\frac{\rho_H}{R\sin z} = \frac{L_H}{D + R\cos z}; \quad \rho_H = \frac{L_H R\sin z}{D + R\cos z} = \frac{(D+R)R\sin z}{D + R\cos z}. \qquad (96)$$

Pozitiv tasvirlashda o'xshash uchburchaklardan $g_p QA'$ va $g_p CA$ ni olamiz:

$$QA'/CA = g_n Q / g_p C.$$

Qiymatlarni qo'yib

$$g_p Q = L_n, \; g_n O = D; \quad g_p C = D - R\cos z \text{ ni olamiz,}$$

$$\rho_p = \frac{L_p R\sin z}{D - R\cos z} = \frac{(D-R)R\sin z}{D - R\cos z}.$$

Azimutal proyeksiyalar umumiy formulalarini qo'llab (87), negativ va pozitiv tasvirli perspektiv-azimutal proyeksiyalar formulalarini olamiz:

$$x = \rho\cos\delta; \quad y = \rho\sin\delta;$$

$$\delta = a.$$

$$\rho_H = \frac{(D+R)R\sin z}{D + R\cos z}; \quad \rho_p = \frac{(D-R)R\sin z}{D - R\cos z}; \qquad (97)$$

$$(\mu_1)_H = \frac{(D+R)(D\cos z + R)}{(D + R\cos z)^2}; \qquad (\mu_1)_p = \frac{(D-R)(D\cos z - R)}{(D - R\cos z)^2};$$

$$(\mu_2)_H = \frac{D+R}{D + R\cos z}; \qquad (\mu_2)_p = \frac{D-R}{D - R\cos z}$$

$$p = \mu_1\mu_2; \quad \sin(\omega/2) = (\mu_2 - \mu_1)/(\mu_2 + \mu_1).$$

Izokolalar aylana ko'rinishida bo'lib, almukantaratlar bilan mos tushadi, shuning uchun perspektiv-azimutal proyeksiyalar aylana shaklga ega hududlarni tasvirlashda ishlatiladi. Pozitiv tasvirli tashqi proyeksiyalar fotokameraning optik o'qi kartaga olinayotgan yuzaga nisbatan perpendikulyar holatda joylashganda yoki egilish burchagi mavjud bo'lganda aerokosmik suratlardan kartografik to'rni tuzishda foydalanishi mumkin. Sfera uchun keng miqyosda foydalanilayotgan negativ tasvirlash perspektiv-azimutal proyeksiyalarning xususiy holatini qarab chiqamiz.

28-§. Gnomonik, stereografik va ortografik proyeksiyalar

G n o m o n i k proyeksiya.

Bu proyeksiyada kuzatish nuqtasi sfera markazida joylashadi. (97) formulaga D = 0 qiymatini qo'yib, quyidagilarni olamiz:

$$x = \rho\cos\delta;\quad y = \rho\sin\delta;$$
$$\rho = Rtgz;\quad \delta = a;$$
$$\mu_1 = \sec^3 z;\quad \mu_2 = \sec z; \qquad (98)$$
$$\rho = \mu_1\mu_2;\quad \sin(\omega/2) = (\mu_1 - \mu_2)/(\mu_1 + \mu_2) = tg^2(z/2).$$

Ko'ndalang proyeksiyada x, y koordinatalar formulalar bilan aniqlanadi:

$$x = Rtg\varphi\sec\lambda;\quad y = Rtg\lambda.$$

z ni (90°–φ) va α ni λ ga almashtirib, (98) formuladan normal proyeksiya formulalarini olish mumkin

$$x = Rctg\varphi\cos\lambda;\qquad y = Rctg\varphi\sin\lambda.$$
$$m = \cos ec^2\varphi;\ n = \cos ec\varphi;$$
$$p = mn;\quad \sin(\omega/2) = tg^2(45^0 - \varphi/2).$$

Almukantaratlar (*parallellar*) o'rtasidagi masofa markaziy nuqtadan uzoqlashgan sari tezlik bilan o'sib boradi. Ko'ndalang va qiyshiq gnomonik proyeksiyalarda meridianlar va ekvator to'g'ri chiziqlar bilan ifodalanadi (29-rasm).

Qiyshiq proyeksiyalarda φ_0 kenglikli markaziy parallel parabola, $\varphi > \varphi_0$ kenglik qiymatiga ega bo'lgan parellellar ellips, $\varphi_0 > \varphi$ bo'lganda – giperbolaga o'xshash tasvirlanadi. Sferada eng qisqa masofa chizig'i (*ortodromiya*) katta aylana yoyi hisoblanadi. Bu aylana markazi sfera markazi bilan ustma-ust tushadi, demak gnomonik proyeksiya kuzatish nuqtasida, ortodromiya bu proyeksiyada to'g'ri chiziq bo'lib tasvirlanadi. Bu muhim hisoblangan xossa ortodromiyaning oraliq nuqtalarini aniqlashda va har qanday boshqa proyeksiyada tuzilgan ortodromiyani bu kartaga o'tkazishda qo'llaniladi.

Stereografik proyeksiyalar

Bu proyeksiyalarda kuzatish nuqtasi sferada joylashadi, ya'ni D=R. Unda (96) formuladan

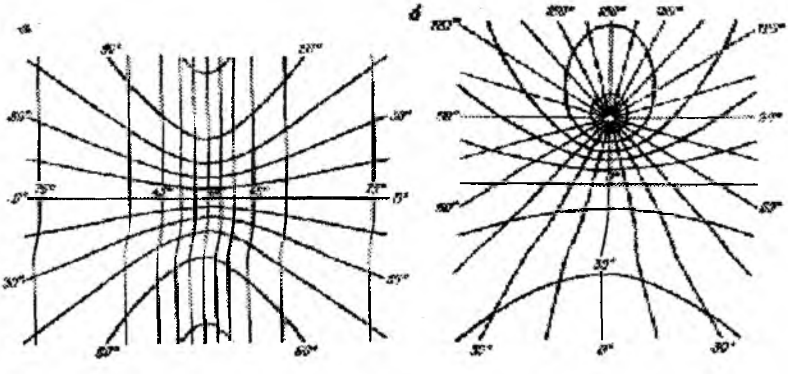
$$\rho = (2R\sin z)/(1+\cos z) = 2Rtg(z/2); \;\; ;$$

Proyeksiyaning umumiy formulalari:

$$x = \rho\cos\delta; \quad y = \rho\sin\delta;$$

$$\rho = 2Rtg(z/2); \quad \delta = a.$$

$$\mu = \sec^2(z/2); \quad p = \mu^2; \quad \omega = 0.$$



29-rasm. **Gnomonik proyeksiyalar:** *a – ko'ndalang; b – qiyshiq*

(88) formuladan ko'rinadiki, stereografik proyeksiya teng burchakli azimutal proyeksiyaga o'xshash. Normal proyeksiyani hisoblash uchun quyidagi formulalardan foydalaniladi:

$$x = \frac{2R\cos\varphi\cos\lambda}{1+\sin\varphi};$$

$$y = \frac{2R\cos\varphi\sin\lambda}{1+\sin\varphi}.$$

Stereografik proyeksiya muhim xossaga ega – sferada har qanday aylananing yakuniy holatdagi o'lchamlari proyeksiyada aylana bo'lib tasvirlanadi. Buni geometrik jihatdan isbotlaymiz.

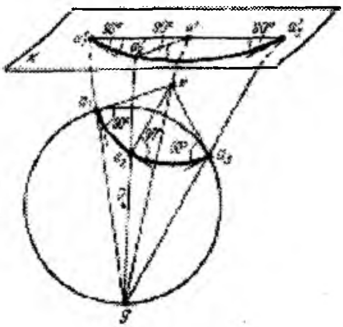
Sferada cheklangan o'lchamlar qiymati $a_1a_2a_3$ bilan ifodalanuvchi aylanani olamiz *(30-rasm)*. Ushbu aylana bo'yicha sferaga urinma konus v yuqorida a_1v, a_2v va a_3v yasamalarga ega, bular

a_1, a_2, a_3 urinma nuqtalarga perpendikulyar. Loyihalashda tasvir tekisligi proyeksiya tepasidagi $a_1'a_2'a_3'$ egri tekislikni va yasama konusni olamiz. Tasvirlash teng burchakli, shunda yasama va urinma proyeksiyalar o'rtasidagi burchak 90° ga teng, demak, $a_1'a_2'a_3'$ egri bir nuqtada tutashuvchi normallarga ega, ya'ni bular aylanalar.

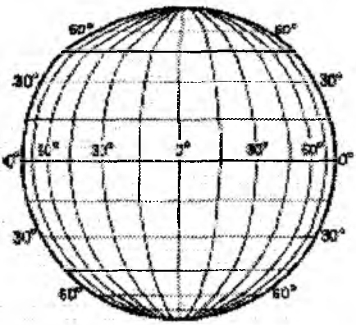
Stereografik proyeksiyaning bu xossasi sferik astronomiya masalalarini grafik jihatdan yechish uchun foydalaniladi. Proyeksiya to'rini osonlik bilan tuzib chiqish mumkin, bunda meridianlar va parallellar aylanalar, o'q meridian esa – to'g'ri chiziq bilan tasvirlanadi.

Ortografik proyeksiyalar

Bu proyeksiyada ko'rish nuqtasi cheksizlikda $(D=\infty)$ joylashadi, ya'ni loyihalash parallel nurlar tutami bo'ylab amalga oshiriladi.



30-rasm. **Stereografik proyeksiyaning asosiy xossasini isbotlash sxemasi**



31-rasm. **Ko'ndalang ortografik proyeksiya**

Agar (96) formulaning surati va maxrajini D ga bo'lsak, $\rho = R\sin z$ ni olamiz.

Unda ortografik proyeksiya formulasi:

$$x = \rho\cos\delta;\quad y = \rho\sin\delta;$$

$$\rho = R\sin z;\ \delta = a; \tag{99}$$

$$\mu_1 = \cos z;\ \mu_2 = 1.$$

$$\rho = \mu_1 = \cos z;\ \sin(\omega/2) = tg^2(z/2).$$

Almukantaratlar bo'yicha teng oraliqli (parallellar bo'yicha normal) ortografik proyeksiyada xususiy masshtab $\mu_2 = 1$. Ko'ndalang proyeksiyani hisoblash uchun quyidagi formulalar ishlatiladi:

$$x = R\sin\varphi;\ y = R\cos\varphi\sin\lambda;$$

$$n = \cos\lambda;\ m = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\sin^2\lambda};$$

$$p = \cos\varphi\cos\lambda;\ \sin(\omega/2) = (m-n)/(m+n).$$

Normal proyeksiya uchun:

$$x = R\cos\varphi\cos\lambda.$$

$$y = R\cos\varphi\sin\lambda.$$

$$m = \sin\varphi;\ \ n = 1;\ p = m;$$

$$\sin(\omega/2) = tg^2(45^0 - \varphi/2)$$

Normal proyeksiyada parallellar o'rtasidagi masofa qiyshiq va ko'ndalang proyeksiyalarda almukantaratlar bo'yicha kuzatilgani kabi tezda kamayib boradi *(31-rasm).*

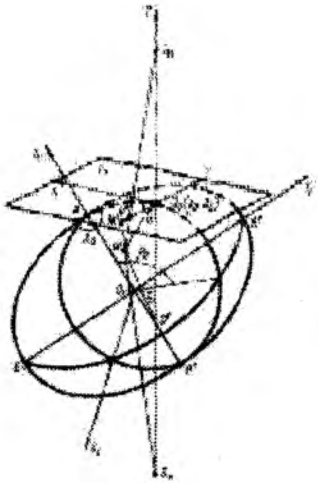
Qiyshiq va ko'ndalang ortografik proyeksiyalar kartaga olinayotgan yuzalarni sferiklik ko'rinishini ancha mukammal ifodalaydi. Ko'ndalang proyeksiyalarda parallellar o'zaro parallel to'g'ri chiziqlar bilan, meridianlar esa – ellips yoylari bilan tasvirlanadi. Bu proyeksiya Oy kartasini tuzishda ishlatilgan.

29-§. Ellipsoidning perspektiv-azimutal proyeksiyalari

Gorizontal tasvir tekisligida ellipsoidni negativ va pozitiv tasvirli perspektiv-azimutal proyeksiyasi

Perspektiv-azimutal proyeksiyadan kartografiya amaliyotida foydalanishda Yer shar sifatida qabul qilinadi. Biroq qator o'rta va yirik masshtabli hududlar (1 mln km^2 dan ortiq) kartalarini tuzishda ellipsoidning qutbiy siqilishini hisobga olish kerak.

Misol uchun, aylanma ellipsoid yuzasida *(32-rasm)* yangi qutbning $Q(\varphi_0, \lambda_0)$ nuqtasi berilgan bo'lsin, unga urinma teksilik – T_0 va normal – $Q_0 0'$ o'tkazilsin; Q_0 nuqtada fazoviy to'g'ri burchakli toposentrik Q_0XYZ koordinatalar tizimi o'rnatilgan bo'lsin, X o'qi Q_0P meridian bo'ylab shimolga tomon yo'naltirilgan bo'lib, Z o'qi $Q_0 0'$ normal bilan mos tushsin, Y o'qi esa – tizimni chap tomon bo'ylab to'ldiradi.



32-rasm. **Gorizontal tasvir tekisligida perspektiv-azimutal proyeksiyani tasvirlash**

Belgilaymiz:

$$S_H O' = D_H;\ S_P O' = D_P;\ O'Q_0 = N_0;\ Q_0 S_P = H;\ O'M = N_0';$$

bunda S_H, S_p – negativ va pozitiv tasvirlashda loyihalash (kuzatish) nuqtasi; $N_0 - Q_0(\varphi_0, \lambda_0)$ qutb nuqtasida birinchi vertikal kesma egriligi radiusi. Izlangan proyeksiyani olish uchun z, a qutbiy sferoidik koordinata tizimidan foydalanamiz (2-§ ga qarang), (12, 13) formulalarda bu tizimning geografik koordinata tizimi bilan bog'liqligini e^4 darajada hisoblash formulalari keltirilgan. 32-rasmdan negativ (r_n) va pozitiv (r_p) tasvirlash qutbiy radiuslari qiymati

$$\rho_H = (N_0 + D)\frac{N'_0 \sin z}{D + N'_0 \cos z};$$

$$\rho_P = \frac{N'_0 \sin z}{D - N'_0 \cos z}; \qquad (100)$$

unda

$$\begin{aligned} N'_0 &= N_0[1-\frac{e^2}{2}(\sin z\cos a\cos\varphi_0+\sin\varphi_0(\cos z-1)]^2+\cdots \\ &= N_0[1-\frac{e^2}{2}(\sin\varphi-\sin\varphi_0)^2]+\cdots \end{aligned} \tag{101}$$

(*92*), (*100*) formulalarni hisobga olgan holatda, e^4 aniqlik darajasida x, y to‘g‘ri burchakli proyeksiya koordinatalari quyidagi ko‘rinishni oladi:

– negativ tasvirli perspektiv-azimutal proyeksiyalar uchun:

$$\begin{aligned} X_n &= \frac{N_0(N_0+D_n)}{D_n+N_0t_5}\left\{t_1+\frac{e^2}{2}\tau\left[2(t_1\sin\varphi-\cos\varphi_0)-(\tau D_n+t_6)\frac{t_1}{D_n+N_0t_5}\right]+\ldots\right\}; \\ Y_n &= \frac{N_0(N_0+D_n)}{D_n+N_0t_5}\left\{t_4\left[1+\frac{e^2}{2}\tau(2\sin\varphi-\frac{\tau D_n+t_6}{D_n+N_0t_5})\right]+\ldots\right\}; \end{aligned} \tag{102}$$

Perspektiv tasvirli perspektiv-azimutal proyeksiyalarda:

$$\begin{aligned} X_n &= \frac{HN_0(N_0+D_n)}{D_n-N_0t_5}\left\{t_1+\frac{e^2}{2}\tau\left[2(t_1\sin\varphi-\cos\varphi_0)-(\tau D_n-t_6)\frac{t_1}{D_n-N_0t_5}\right]+\ldots\right\}; \\ Y_n &= \frac{HN_0}{D_n-N_0t_5}\left\{t_4\left[1+\frac{e^2}{2}\tau\left(2\sin\varphi-\frac{\tau D_n-t_6}{D_n-N_0t_5}\right)\right]+\ldots\right\}, \end{aligned} \tag{103}$$

bu yerda t_1, t_4, t_5, τ (*92*) formula yordamida aniqlanadi,

$$t_6=2N_0(t_5\sin\varphi-\sin\varphi_0);$$

$$D=N_0+H.$$

Xususiy masshtablar va nisbatan katta qiymatdagi burchak xatoligi uchun (*90*) tenglama va kartografik proyeksiyalarning umumiy formulalaridan foydalaniladi:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{1}{P}(x_z^2+y_z^2)^{1/2}; \\ \mu_2 &= \frac{1}{P\sin z}(x_a^2+y_a^2)^{1/2}, \end{aligned} \tag{104}$$

bunda

$$P=N_0\left(1-\frac{e^2}{2}\tau^2\right).$$

(*102*), (*103*) tenglamalarni z va a qiymatlar bo‘yicha differensiallash va (*104*) formulani hisobga olish orqali, vertikallar va almukantaratlar bo‘ylab uzunlik xususiy masshtablarini aniqlash uchun quyidagi formulalarni hosil qilamiz:

– negativ tasvirli perspektiv-azimutal proyeksiyalar uchun

$$\mu_1 = (N_0 + D)\frac{D\cos z + N_0}{(D + N_0\cos z)^2}\left\{1 - \frac{e^2}{2}\times\left[t_z\frac{\sin z(D + N_0\cos z)}{D\cos z + N_0} - \tau^2\frac{N_0\cos z}{D + N_0\cos z}\right]\right\}; \qquad (105)$$

$$\mu_2 = \frac{N_0 + D}{D + N_0\cos z}\left(1 + \frac{e^2}{2}\tau^2\frac{N_0\cos z}{D + N_0\cos z}\right),$$

bu yerda:

$$t_z = \frac{2\tau}{D + N_0\cos z}\left[D(\cos z\cos a\cos\varphi_0 - \sin z\sin\varphi_0) + \frac{\tau D N_0\sin z}{2(D + N_0\cos z)}\right].$$

Pozitiv tasvirli perspektiv-azimutal proyeksiyalar uchun quyidagi tenglamlar o‘rinli:

$$\mu_{1r} = \frac{H(D\cos z - N_0)}{(D - N_0\cos z)^2}\left\{1 - \frac{e^2}{2}\times\left[p_z\frac{\sin z(D - N_0\cos z)}{D\cos z - N_0} + \tau^2\frac{N_0\cos z}{D - N_0\cos z}\right]\right\}; \qquad (106)$$

$$\mu_{2r} = \frac{H}{D - N_0\cos z}\left(1 - \frac{e^2}{2}\tau^2\frac{N_0\cos z}{D - N_0\cos z}\right), \qquad (107)$$

bu yerda:

$$P_z = \frac{2\tau}{D - N_0\cos z}\left[D(\cos z\cos a\cos\varphi_0 - \sin z\sin\varphi_0) - \frac{\tau D N_0\sin z}{2(D - N_0\cos z)}\right].$$

Maydon xususiy masshtabi va nisbatan burchak xatoligi yirik qiymatlari yuqoridagi aniqlik darajasida quyidagi tenglamalar bilan aniqlanishi mumkin:

$$p = \mu_1\mu_2; \quad \sin(\omega/2) = (\mu_2 - \mu_1)/(\mu_2 - \mu_1). \qquad (108)$$

Keltirilgan ushbu formulalar loyihalash nuqtalarining (S_n va S_p) joylashish holatiga (ya’ni D masofadan uzoqligi asosida) bog‘liq ravishda, ellipsoidning negativ va pozitiv ko‘rinishli ko‘plab perspektiv-azimutal proyeksiyalarini hosil qilish, shu bilan bir qatorda, sferaning gnomonik, ortografik va stereografik proyeksiyalariga mos variantlarini olish imkonini ham beradi.

Markaziy perspektiva uchun D = 0.

(102), (105) va (108) formulalar quyidagi ko‘rinishni oladi:

$$x = N_0\{t_1 + \frac{e^2}{2}\tau[2(t_1\sin\varphi - \cos\varphi_0) - t_1 t_6 / N_0 t_5]\}\frac{1}{t_5};$$

$$y = N_0\{t_4[1+\frac{e^2}{2}\tau(2\sin\varphi - t_6 / N_0 t_5]\}\frac{1}{t_5};$$

$$\mu_1 = \sec^2 z(1+e^2\tau^2/2); \qquad \mu_2 = \sec^2 z(1+\tau^2 e^2/2);$$

$$\rho = \sec^3 z(1+e^2\tau^2); \qquad \sin(\omega/2) = (\sec z - 1)/(\sec z + 1) = tg^2(z/2)$$

Bu proyeksiyada eng qisqa masofa egri bo'lib tasvirlanadi. Ellipsoidning ortografik proyeksiyasi uchun $D \to \infty$.

Yuqoridagi formulalardan

$$x = N_0\{t_1 + \frac{e^2}{2}\tau[2(t_1\sin\varphi - \cos\varphi_0) - \tau t_1]\};$$

$$y = N_0\{t_4[1+\frac{e^2}{2}\tau(2\sin\varphi - \tau]\};$$

$$\mu_1 = \cos z[1 - e^2\tau(\sin z\cos a\cos\varphi_0 - \sin z tgz\sin\varphi_0)];$$

$$\mu_2 = p = 1;$$

$$\sin\frac{\omega}{2} = \frac{1-\cos z[1-e^2\tau(\sin z\cos a\cos\varphi_0 - \sin z tgz\sin\varphi_0)]}{1+\cos z[1-e^2\tau(\sin z\cos a\cos\varphi_0 - \sin z tgz\sin\varphi_0)]}$$

Ko'rsatib o'tilgan proyeksiyadan nafaqat kartografik masalalarni yechishda, balki yirik hududlar o'rta masshtabli ortofotosuratlarini olishda ham foydalansa bo'ladi.

Qiyshiq tasvir tekisligida tashqi perspektiv-azimutal proyeksiyani pozitiv tasvirlash (aero- va kosmofotosuratlar proyeksiyalari)

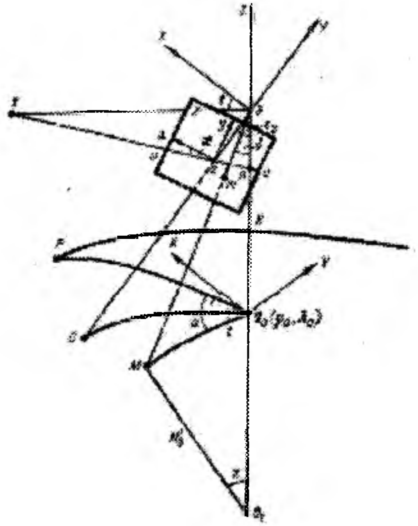
Aytaylik, (*103*) formula bo'yicha gorizontal tasvir tekisligida va tashqi perspektiv-azimutal proyeksiyani pozitivli tasvirlash to'g'ri burchakli koordinatali X, Y hisoblangan va pozitiv fotosuratni tegishli ichki va tashqi oriyentirlash elementlari qiymati ma'lum bo'lsin *(33-rasm)*. Ichki oriyentirlash elementlariga fotoapparat obyektivining fokus masofasi, fotosuratdagi asosiy *O* nuqtaning to'g'ri burchakli koordinalari – x_0, y_0 kabilar kiritiladi.

Tashqi oriyentirlash elementlariga quyidagilar kiritiladi:

– chiziqli elementlar: geodezik koordinatalar – φ_0, λ; nadir nuqtasi (qutb nuqtasi) *Q* va fotosuratga olish balandligi (yoki loyihatashtirish balandligi) – *N* kabilar.

– burchakli elementlar: t – «asosiy vertikal tekisligi – fotosuratga olish tekisligi» yo'nalishi azimuti; ε_0 – bosh optik nur va S ko'rish nuqtasidan ellipsoidga nisbatan o'tkazilgan normal o'rtasidagi bosh vertikal tekisligidagi burchak; $\aleph$ – surat abssissa o'qi va bosh vertikal orasidagi burchak – bosh vertikal va surat tekisliklari kesishish chizig'i o'rtasidagi burchak.

Fotosuratning to'g'ri burchakli koordinatalarini aniqlash masalasi (qiyshiq tasvir tekisligida qarab chiqilayotgan proyeksiya) quyidagicha yechilishi mumkin. Q_0XYZ koordinatalar tizimini parallel holatda shunday burish kerakki, bunda uning boshlanishi S nuqtada joylashsin va bu koordinatalar tizimi t, ε_0, $\aleph$ burchakka burish amalga oshirilsin.



33-rasm. **Qiyshiq tasvir tekisligida perspektiv-azimutal proyeksiyani pozitivli tasvirlash**

Agar X, Y koordinatalarni (*103*) formula yordamida aniqlashda sferoid a qiymat o'rniga $a' = a - t$ qiymatdan foydalanilsa va o'z navbatida, abssissa va ordinata o'qlari (x, u) t burilish hisobga olingan holda hisoblansa, unda qolgan ε_0, $\aleph$ burchaklarni hisobga olgan holatda koordinatalarning o'zgartirilishi matritsasi quyidagi ko'rinishni oladi:

$$A=\begin{pmatrix} \cos\varepsilon_0\cos\aleph - \sin\varepsilon_0\sin\aleph - \sin\varepsilon_0 \\ \sin\aleph\cos\aleph 0 \\ \sin\varepsilon_0\cos\aleph - \sin\varepsilon_0\sin\aleph - \cos\varepsilon_0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1a_2a_3 \\ b_1b_2b_3 \\ c_1c_2c_3 \end{pmatrix}. \qquad (109)$$

Fotosuratning qiyshiq tasvir tekisligidagi x, u nuqtalarining koordinatalari (koordinata boshi asosiy nuqtada) va gorizontal teksilikda X, Y nuqtalarning koordinatalari (koordinata bosh qutb nuqtasida Q – nadir nuqtasida) ma'lumki, gomografik moslikda joylashadi:

$$x=-f\frac{a_1X+b_1Y-c_1H}{a_3X+b_3Y-c_3H}; \qquad y=-f\frac{a_2X+b_2Y-c_2H}{a_3X+b_3Y-c_3H};$$

$$X=-H\frac{a_1x+a_2y-a_3f}{c_1x+c_2y-c_3f}; \qquad Y=-H\frac{b_1x+b_2Y-b_3f}{c_1x+c_2y-c_3f},$$

bu yerda: a_i, b_i, c_i – (*109*) formula yordamida aniqlanuvchi yo'naltiruvchi kosinuslar; f, H – fokus masofasi va loyihalash (suratga olish) balandligi.

Kengaytirilgan holda bu formula quyidagicha bo'ladi:

$$x=f\frac{(X\cos\varepsilon_0-H\sin\varepsilon_0)\cos\aleph+Y\sin\aleph}{X\cos\varepsilon_0+H\sin\varepsilon_0}; \qquad (110)$$

$$u=f\frac{-(X\cos\varepsilon_0-H\sin\varepsilon_0)\cos\aleph+Y\sin\aleph}{X'\cos\varepsilon_0+H\sin\varepsilon_0};$$

$$X=H\frac{(\cos\varepsilon_0\cos\aleph)x-(\cos\varepsilon_0\sin\aleph)y+f\sin\varepsilon_0}{-(\sin\varepsilon_0\cos\aleph)x+(\sin\varepsilon_0\sin\aleph)y+f\cos\varepsilon_0}; \qquad (111)$$

$$Y=H\frac{x\sin\aleph+y\cos\aleph}{-(\sin\varepsilon_0\cos\aleph)x+(\sin\varepsilon_0\sin\aleph)y+f\cos\varepsilon_0}.$$

Agar koordinata boshini x, y nadir nuqtaga p qiyshiq tasvirlash tekisligiga T ko'chirilsa hamda almukantaratlar bo'ylab uzunlik xususiy masshtabi ushbu nuqtada birga teng deb olinsa, koordinatalarni metrda ifodalash uchun quyidagi:

$$tg\beta=X/H$$

belgilashni kiritib va Yerni aylanma ellipsoid sifatida emas, balki shar sifatida qabul qilsak, unda (110) formuladan quyidagini olamiz:

$$x=X\frac{\cos\beta}{\cos(\beta-\varepsilon_0)}; \qquad y=Y\frac{\cos\beta\cos\varepsilon_0}{\cos(\beta-\varepsilon_0)}$$

Bu formulalarni xususiy holat uchun N.M. Volkov taklif etgan.

Endi xususiy masshtablar va proyeksiyaning boshqa tavsiflarini aniqlash masalalarini qarab chiqamiz. O‘z tekisligida yassi koordinatalar tizimining burilishi va siljishi bo‘lishiga qaramasdan proyeksiyaning xatolik qiymatlari o‘zgarmaydi, burchak $\varkappa = 0$ bo‘lganda (*110*) tenglik amal qiladi. Bu qiymatlarni z va a bo‘yicha differensiallab, (*104*), (*105*) formulalarga hosila qiymatlarini qo‘yish bilan vertikallar bo‘ylab qiyshiq tasvirlash tekisligida (perspektiv fotosurat) uzunlik xususiy masshtabini aniqlash (e^4 qismgacha darajada aniqlikda) uchun quyidagi tenglamani hosil qilamiz:

$$\mu_1 = \mu_{1_r} k^2 (1 - \sin^2 a \sin^2 \varepsilon_0)^{1/2}, \qquad (112)$$

bunda μ_{1_r} qiymat (*106*) tenglama bo‘yicha aniqlanadi:

$$k = H/(H\cos\varepsilon_0 + X\sin\varepsilon_0); \qquad (113)$$

almukantaratlar bo‘ylab

$$\mu_2 = \mu_{2_g} k^2 [\sin^2 a] + (\cos a \cos\varepsilon_0) + \frac{p}{h}\sin\varepsilon_0)^2 +$$

$$+ 2\frac{p_a}{p}\sin a \sin\varepsilon_0 (\frac{p}{h}\cos\varepsilon_0 - \cos a \sin\varepsilon_0)]^{1/2}, \qquad (114)$$

bunda:

$$\frac{\rho_a}{\rho} = e^2 \tau \frac{D \sin z \sin a \cos\varphi_0}{D - N_0 \cos z}$$

μ_2, k, ρ – (107), (113), (91) formulalar bo‘yicha aniqlanadi.

Asosiy vertikal nuqtalari uchun (112), (114) tenglikdan olish mumkin

$$\mu_1 = \mu_{1_g} k^2; \; \mu_2 = \mu_{2_g} k.$$

Xususan, asosiy nuqtada *o*, no‘l xatolikli nuqtalar c va nadir n nuqtasi uchun quyidagilarni olamiz:

$$\mu_{1\,o} = \mu_{1_g} cos^2\varepsilon_0\,; \qquad \mu_{2\,o} = \mu_{2_g} cos^2\varepsilon_0\,;$$

$$\mu_{1\,c} = \mu_{1\,c_g}; \qquad \mu_{2\,c} = \mu_{2\,c_g};$$

$$\mu_{1\,c} = sec^2\varepsilon_0; \qquad \mu_{2\,n} = \sec\varepsilon_0;$$

Demak, nadir nuqtasida faqat tasvir tekisligining ε_0 burchak qiyaligi hisobiga xatolik mavjud bo‘ladi, no‘l xatolikli nuqtalarda – faqat yuzaning sferoidik (*sferik*) tasvirlanishi hisobiga xatolik vujudga keladi, asosiy nuqta va proyeksiyaning boshqa qolgan barcha nuqtalarida kerltirilgan har ikkala omilning ta'siri hisobiga xatolik qayd qilinadi.

Proyeksiya nuqtalarida burchak maksimal xatoligi va maydon xususiy masshtablari qiymatlari e^4 darajadagi aniqlikda quyida keltirilgan, oldindan ma'lum bo'lgan formulalar bilan aniqlanadi:

$$p = \mu_1\mu_2; \quad \sin(\omega/2) = (\mu_2 - \mu_1)/(\mu_2 + \mu_1).$$

Ushbu proyeksiyani perspektiv aerofotosurat ideal modeli deb hisoblasak, uning borgan sari keng ko'lamda foydalanilishi kuzatilmoqda. Teskari o'zgartirish usulini, ya'ni qiyshiq tasvir tekisligida (perspektiv fotosurat) to'g'ri burchakli *x, y* koordinatalar bo'yicha ellipsoid yuzasida nuqtalarining geografik koordinatalarini aniqlash usulini ko'rib chiqamiz. Ketma-ket hisoblash (e^4 darajadagi aniqlikda) quyidagi ko'rinishga bo'ladi. *x, u* koordinatalar qiymatlaridan foydalanib, (*111*) formula bo'yicha to'g'ri burchakli *X, Y* koordinatalarni hisoblaymiz, so'ng quyidagi qiymatlarni topamiz:

$$ctga = X/Y; \quad \rho = \sqrt{X^2 + Y^2}; \quad tg\,\nu = \rho/H.$$

33-rasmga binoan:

$$z = \arcsin\left(\frac{H + N_0}{N_0'}\sin\nu\right) - \nu, \tag{115}$$

bunda qabul qilingan aniqlik bo'yicha

$$N_0' = N_0[1 - \frac{e^2}{2}(\sin\varphi - \sin\varphi_0]^2 =' N_0\{1 - \frac{e^2}{2}[\sin z\cos a\cos\varphi_0 +$$

$$+ \sin\varphi_0(\cos z - 1)]^2\}$$

birinchi umumlashtirishni nazarda tutib $N'_0 = N_0$, ni olamiz.

$$z^{(1)} \approx \arcsin[(1 + H/N_0)\sin\nu] - \nu \tag{116}$$

(92) formuladan foydalanib, qatorni umumlashtirib olamiz:

$$\sin\varphi = [1 + e'^2(\sin\varphi_0 - t_0)t_0]t_0, \tag{117}$$

bunda e, e'– ellipsoid birinchi va ikkinchi ekssentrisitetlari,

$$t_0 = \frac{\sin z\cos a\cos\varphi_0 + \cos z\sin\varphi_0 - e^2\sin\varphi_0}{1 - e^2} \tag{118}$$

(118) formulaga $z^{(1)}$ qiymatini (116) olib qo'ysak, unda $t_0^{(1)}$ ni, keyin esa (117) formula bilan $\varphi^{(1)}$ qiymatni topamiz. (101) formulani hisobga olib va unga $\varphi^{(1)}$ qiymatini qo'yib, $N_0^{1(2)}$ ni (115 dan) topamiz,

(118), (117) qiymati $z^{(2)}, t_0^{(2)}, \varphi^{(2)}$ ikkinchi iteratsiya (qaytarish). Keyin shunga o'xshash $z^{(3)}$, $\varphi^{(3)}$ ni topamiz; so'ngra $z^{(4)}$, $\varphi^{(4)}$ va boshqalarni.

$\varphi^{(n)} - \varphi^{(n-1)} \le \delta$ bo'lganda, bunda δ, – yo'l qo'yilarli qiymat.

Nuqtalar uzoqligini aniqlash uchun (92) formuladan

$$\lambda = \lambda_0 + \arcsin[t_1'(1 - e^2 t_2')], \quad \text{bunda}$$

$$t_1' = \sin z \sin a \sec\varphi;$$

$$t_2' = \sin\varphi(\sin\varphi - \sin\varphi_0).$$

30-§. Azimutal proyeksiyalarning umumlashgan formulalari

Azimutal proyeksiyada (jumladan, perspektiv-azimutal proyeksiyalarda) ρ qutb radiusi formulasini tahlil qilish asosida turli xil xatolikli proyeksiyalarni olish imkonini beruvchi umumlashgan formulalar tavsiya qilingan. Masalan, G.A. Ginzburg quyidagi umumlashgan formulani tavsiya etadi:

$$\rho = R[L_1 \sin(z/k_1) + L_2 tg(z/k_2)].$$

Parametrlar L va k o'zgaruvchan qiymatlari bilan bir qator ma'lum va turli xildagi oraliq proyeksiyalar formulalarini olishimiz mumkin. Masalan, $L_1 = 0$ va $L_2 = k_2$ bo'lganda proyeksiyalarni «tangensli tarmoq» uchun r tenglamani olamiz (bu yerda parametr k indeksi chiqarib tashlanadi):

$$\rho = Rktg(z/k)$$

Shubhasiz, k = 2 bo'lganda proyeksiya teng burchakli azimutal (stereografik), k = 1 gnomonik bo'ladi. $L_2 = 0$, $L_1 = k$ bo'lganda proyeksiyani "sinus tarmoq" uchun r ning formulasini olamiz:

$$\rho = Rk\sin(z/k)$$

k = 2 holat uchun teng maydonli azimutal proyeksiyani; k = 1 – ortografik; k = 2, 7–3 ga yaqin bo'lganda maydon xatoligi katta bo'lmagan proyeksiyalarni (34-rasm); k = 1,2–1,5 – kartaga olinayotgan tekislikning sferiklik xususiyatini beruvchi proyeksiyalarni olamiz. «Sinus tarmoq»ga tegishli proyeksiyalarda

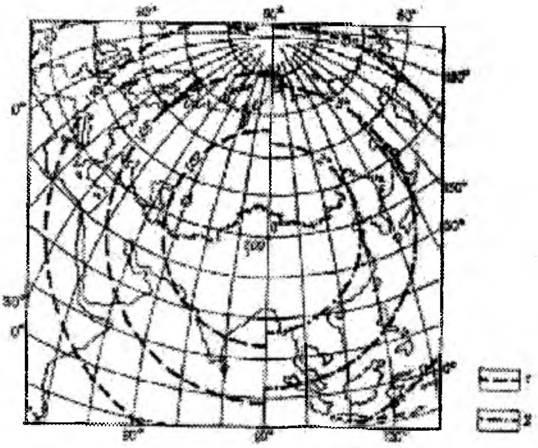
$$\mu_1 = \cos(z/k); \ \mu_2 = k\sin(z/k)\operatorname{cosec} z$$

Azimutal proyeksiyalarning umumlashgan ρ formulasini A.K. Malovichko taklif etgan:

$$\rho = R[2\sin(z/2)]^k[2tg(z/2)]^{(1-k)}.$$

$k = 1/2$ bo'lganda Breyzing proyeksiyasini olamiz, unda ρ qiymat teng burchakli va teng maydonli azimutal proyeksiyalardagi ρ ning o'rtacha geometrik qiymatlari orqali topiladi:

$$\rho = 2R\sqrt{tg(z/2)\sin(z/2)}$$



34-rasm. **«Sinus tarmoq»li azimutal proyeksiyalarda r (1) va ω (2) izokolalari**

Nazorat savollari

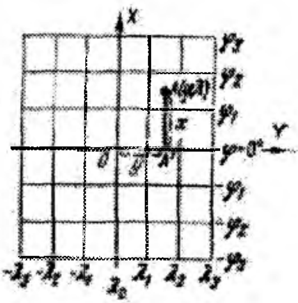
1. *Azimutal proyeksiyalar φ_0 qiymati bo'yicha qanday turlarga bo'linadi? Ularning kartografik to'ri qanday ko'rinishda?*
2. *Azimutal proyeksiyalar koordinata tizimlarini tushuntiring.*
3. *Teng burchakli azimutal proyeksiya formulalarini yozing, ularga qisqacha izoh bering.*
4. *Teng maydonli azimutal proyeksiyalar xususiyatini ifodalang va formulalarini keltiring.*
5. *Negativ va pozitiv tasvirli perspektiv proyeksiyalar haqida ma'lumotlar bering, ular qanday hosil qilinadi?*
6. *Gnomonik, stereografik va ortografik proyeksiyalar qanday olinadi? Ularnngi bir-biridan farqlarini formulalar orqali ko'rsating.*

VI BOB
SILINDRIK PROYEKSIYALAR

31-§. Silindrik proyeksiyalarning asosiy qoidalari va umumiy formulalari

Silindrik proyeksiyalarning normal to'ri oddiy ko'rinishga ega, bunda barcha meridianlar bir-biridan bir xil masofadagi uzoqlikda joylashgan, o'zaro parallel to'g'ri chiziqlardan tashkil topadi, parallellar – meridianlarga perpendikulyar holatda joylashgan to'g'ri chiziqlar sifatida tasvirlanadi; ular orasidagi masofa proyeksiyaning xossalariga bog'liq holda o'zgaradi.

Bu proyeksiyalarning to'g'ri burchakli koordinatalari: $x = f(\varphi); y = \beta\lambda,$ bunda proyeksiya parametric $\beta = const$. X o'qi sifatida meridianlardan biri, Y o'qi sifatida esa ekvator yoki parallellardan biri olinadi *(35-rasm).*



35-rasm. **Silindrik proyeksiya (teng maydonli)**

Proyeksiya abssissasini aniqlab beruvchi funksiyalar tasvirning teng burchakli, teng maydonli yoki teng oraliqli kabi tavsiflari sharti asosida topiladi; o'z navbatida, silindrik proyeksiyalar meridianlari bo'yicha teng burchakli, teng maydonli yoki teng oraliqli tavsiflarga ega bo'lishi mumkin. Bundan tashqari, kartografik amaliyotda xatoligi tavsifiga ko'ra ixtiyoriy proyeksiyalar ham ajratiladi. Bu proyeksiyalarda kartaga tushiriluvchi yuza ellipsoid yoki sfera sifatida qabul qilinadi.

Normal silindrik proyeksiyada asosiy yo‘nalishlar meridianlar va parallellar bilan ustma-ust tushadi, shu sababli meridian va parallellar bo‘ylab masshtablar ekstremal bo‘ladi. Ellipsoidning normal silindrik proyeksiyalari umumiy formulalari quyidagilar:

$$x = f(\varphi); y = \beta\lambda,$$

$$m = \sqrt{e / M = dx / Md\varphi}, \text{ chunki } e = (dx / d\varphi)^2;$$

$$n = \sqrt{g / r} = \beta / r, \text{ chunki } g = (dy / d\lambda)^2 = \beta^2 \qquad (119)$$

$$p = mn = \beta dx / Mrd\varphi$$

$$\sin(\omega / 2) = (a - b)/(a + b) \text{ yoki } tg = (45° + \omega / 4) = \sqrt{a / b},$$

bunda a va b– uzunlik ekstremal masshtablari; $\beta = const.$ β parametrni olishda bosh masshtab kengligi $\pm\varphi_k$ bo‘lgan parallelda o‘zgarmas degan sharti qo‘yiladi:

$$n_k = \beta / r_k = 1, \quad \text{bundan}$$

$$\beta = r_k, \qquad (120)$$

bunda r_k – asosiy parallellar radiuslari.

Agar $\varphi_k = 0°$, unda $\beta = a$, bunda a – ellipsoidning katta yarim o‘qi.

Normal silindrik proyeksiyalarda izokolalar kenglik funksiyasi bo‘ladi, shuning uchun ular parallellar bilan ustma-ust tushadi va to‘g‘ri chiziqlar ko‘rinishida bo‘ladi. Normal silindrik proyeksiyalardan geografik ekvator bo‘ylab cho‘zilgan hududlar kartalarini tuzishda foydalanish maqsadlidir.

32-§. Normal teng burchakli silindrik proyeksiyalar, ularning xossalari va qo‘llanilishi

Bu proyeksiyalarda x abssissa o‘qi uzunlik masshtabi yo‘nalishiga bog‘liq emasligi sharti asosida aniqlanadi:

$$m = n.$$

Masshtablar qiymatini qo‘yib,

$$dx / Md\varphi = \beta / r \text{ ni olamiz. Unda:}$$

$$dx = \beta \frac{Md\varphi}{r} = \beta \frac{Md\varphi}{N \cos\varphi}$$

bundan

$$x = \beta \int \frac{M d\varphi}{N \cos\varphi}$$

(70) tenglikni e'tiborga olib,

$$x = \frac{\beta}{\text{mod}} \lg U + C,$$

bunda S – integral doimiysi.

Agar oʻq Y ekvator bilan ustma-ust tushsa, unda S = 0 va

$$x = \frac{\beta}{\text{mod}} \lg U \text{ bunda}$$

$$U = \frac{tg(45° + \varphi/2)}{tg^{e}(45° + \psi/2)};$$

$$\sin\psi = e\sin\varphi; \ \ \text{mod} = \ln e.$$

Shar sirti uchun

$$x = \frac{\beta}{\text{mod}} \lg tg(45° + \varphi/2).$$

Normal teng burchakli silindrik proyeksiyalar formulalari:

$$x = \frac{\beta}{\text{mod}} \lg U; \ \ y = \beta\lambda$$

$$m = n = \beta / r; \ \ \beta = r_k; \qquad (121)$$

$$p = m^2; \ \omega = 0$$

Teng burchakli silindrik proyeksiyalar *Merkator proyeksiyalari* deyiladi; ular bir-biridan β parametri bilan farqlanadi, bu parametr abssissa qiymati va xatoliklar taqsimlanishiga ta'sir koʻrsatadi. Proyeksiyada kengliklari $\pm\varphi_k$ boʻlganda $\beta = r_k$ ikkita bosh parallel va bittasi asosiy boʻlishi mumkin, unda $\beta = a$ (ellipsoidni katta yarim oʻqi) yoki $\beta = R$ (shar radiusi).

Uzunlik minimal masshtabi ekvatorda boʻladi, shu sababli kenglik qiymati oshirilishi bilan parallellar oʻrtasidagi masofa ortib boradi. Bu proyeksiyalarda geografik qutbni tasvirlash mumkin emas, uning tasviri bu holatda cheksizlikka tomon yoʻnaladi.

Normal teng burchakli silindrik proyeksiyalardan dengiz kartalarini tuzishda foydalaniladi, chunki ular loksodromiklik xususiyatga ega. *Loksodromiya* – kartaga olinayotgan yuza tekisligi meridianlarini bir xil burchak ostida kesib o‘tadigan chiziq. Teng burchakli silindrik proyeksiyalarda loksodromiyalar to‘g‘ri chiziqlar bilan tasvirlanadi. Loksodromiyalar va ortodromiyalar *holat chiziqlari* deb ataladi; ulardan kartalar bo‘yicha amaliy masalalarni yechishda foydalaniladi. Holat chiziqlari bo‘yicha G.M. Kiryakov qiziqarli tadqiqotlarni olib borgan va ularning xossalari baholangan.

Merkator proyeksiyasida x abssissa meridianlar qismi deb nomlanadi va D' (minut hisobida) bilan belgilanadi:

$$x = D' = \frac{a}{\text{mod}} \lg U,$$

bunda: $a = 3437747$ dengiz mili (d.m.); $a/mod = 7915{,}705$ d.m.

$$y = a\lambda = \lambda.$$

Dengiz navigatsiyasida masofa dengiz milida o‘lchanadi (1 mil = 1852 m). Oddiy teng burchakli silindrik proyeksiya – bu bitta asosiy parallelga ega sfera proyeksiyasi hisoblanadi (Merkator proyeksiyasi).

Bu proyeksiya formulalari:

$$x = \frac{R}{\text{mod}} \lg tg(45° + \varphi/2); \quad y = R\lambda; \qquad (122)$$

$$m = n = \sec\varphi; \quad p = \sec^2\varphi; \quad \omega = 0.$$

Formulalar tahlili shuni ko‘rsatadiki, masshtab ekvator yaqinida sekinroq o‘zgaradi, demak, normal silindrik proyeksiyalardan ekvatorial zona kartalarini yoki parallellar bo‘ylab cho‘zilgan tor polosalarni (jumladan, yirik masshtabli dengiz) kartalarini tuzishda foydalanish ancha qulay.

Mayda masshtabli kartalarni tuzishda teng burchakli silindrik proyeksiyalar kartaga olinayotgan yuzada ekvator chizig‘i bo‘ylab cho‘zilgan, yirik hududlarni tasvirlashda va butun dunyo obzor kartalarini tuzishda foydalanilish maqsadga muvofiq. Kartaga olinayotgan yuzada loksodromiya va teng burchak $tga = ds_n / ds_m = rd\lambda / Md\varphi$,

Bundan:

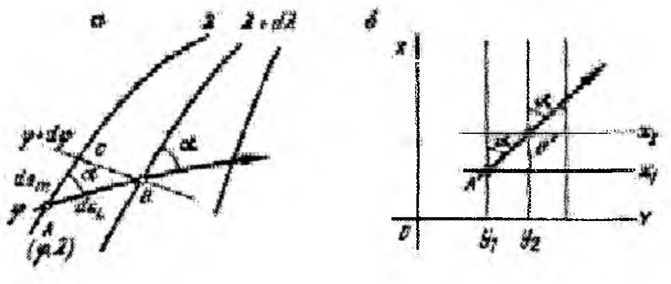
$$\beta = const.$$

$$\int_{\lambda_A}^{\lambda_B} d\lambda = tga \int_{\varphi_A}^{\varphi_B} \frac{Md\varphi}{N\cos\varphi}.$$

Integrallashdan so‘ng

$$\lambda_B - \lambda_A = tga(\ln U_B - \ln U_A);$$

kli silindrik proyeksiya tenglamasini olamiz *(36 a, b-rasmlar)*:



36-rasm. **Loksodromiya va uning tasviri:** *a) ellipsoidda; b) yuzada*

Shar yuzasida U o‘rniga $tg(45° + \varphi/2)$ ni qo‘yamiz va A nuqtani $(\varphi_1 = 0, \lambda_1 = 0)$ boshlang‘ich hisoblab, loksodromiya formulasini sfera uchun olamiz,

$$\lambda = \mathrm{tg}a \ln tg(45° + \varphi/2), \text{ bundan}$$

$$tg(45° + \varphi/2) = e^{\lambda ctga},$$

bunda e – natural logarifm asosi. Demak, loksodromiya – qutbda asimptotik nuqta spiralli egri. Teng burchakli silindrik proyeksiyada

$$\mathrm{tg}a = (y_B - y_A)/(x_B - x_A),$$

ya’ni to‘g‘ri chiziq tenglamasini olamiz.

Loksodromiya – ikki nuqta orasidagi eng qisqa masofa emas. Uning taxminiy uzunligini quyidagi formula bilan aniqlash mumkin:

$$S_L = S_{\varphi_A}^{\varphi_B} \sec a.$$

33-§. Meridianlari bo‘yicha normal teng maydonli va teng oraliqli silindrik proyeksiyalar

Teng maydonli proyeksiyalarda abssissa x maydonli nisbatni saqlash sharti bo‘yicha topiladi:

$$p = mn = 1$$

(119) formuladan

$$p=\frac{\beta dx}{Mr d\varphi}=1, \qquad \text{unda} \qquad dx=\frac{Mr}{\beta}d\varphi$$

Teng maydonli silindrik proyeksiyadan mayda masshtabli obzor kartalarni tuzishda foydalaniladi, shu sababli kartografik yuzani sfera sifatida qabul qilish maqsadga muvofiq, unda

$$dx=\frac{R^2\cos\varphi}{\beta}d\varphi,$$ va integrallashdan so'ng

$$x=\frac{R^2}{\beta}\sin\varphi+C.$$

Yo'qi ekvator bilan ustma-ust tushganligi sababli, integrallash doimiysi C no'lga teng, unda:

$$x=\frac{R^2}{\beta}\sin\varphi$$

Teng maydonli silindrik proyeksiyalar formulalari:

$$x=\frac{R^2}{\beta}\sin\varphi; \quad y=\beta\lambda$$

Ikkita asosiy parallelli proyeksiyalarda $\beta=r_k=R\cos\varphi_k$;

$$x=R\sec\varphi_k\sin\varphi; \quad y=R\lambda\cos\varphi_k;$$

Bitta asosiy parallelli proyeksiyalarda $\varphi_k=0$ bo'lganda $\beta=R$

$$x=R\sin\varphi; \qquad y=R\lambda;$$

$$n=\beta/r=r_k/r; \qquad m=1/n=r/\beta$$

$$p=1; \qquad tg(45°+\omega/4)=a,$$

bunda $\beta=const$, a– uzunlik maksimal masshtabi.

Ikkita asosiy parallelli proyeksiyalarda masshtab ushbu parallellarda birga teng ($\pm\varphi_k$), bitta asosiy parallelli proyeksiyalarda – ekvatorda. Masshtab parallellar bo'ylab ekvatordan qutbga tomon ortib boradi, meridianlar bo'yicha esa kamayib boradi, shu sababli parallellar o'rtasidagi masofa ekvatordan uzoqlashish bilan kamayib boradi. Geografik qutb chiziq bilan tasvirlanadi. Ekvator uzunligi saqlanuvchi ($\beta=R$) teng maydonli silindrik proyeksiyalar – *izosilindrik proyeksiyalar* deb nomlanadi. Bunday proyeksiya formulalari

$$x=R\sin\varphi; \; y=R\lambda;$$

$$n = \sec\varphi; \quad m = \cos\varphi;$$

$$p = 1; \qquad tg(45^\circ + \omega/4) = \sec\varphi.$$

Meridianlar bo'yicha teng oraliqli silindrik proyeksiyalarda abssissa barcha meridianlarining uzunligi saqlanib qolishi kerak va quyidagi shart bo'yicha aniqlanadi:

$$m = dx / Rd\varphi = 1; \quad dx = Rd\varphi,$$

Bunda quyidagi tenglik o'rinli:

$$x = R\varphi + C, \text{bu yerda: } S - \text{integrallash doimiysi.}$$

Agar Y o'qi ekvator bilan mos tushsa, u holda $C = 0$ va $x = R\varphi$, ya'ni proyeksiyaning abssissa o'qlari meridanlarning to'g'rilangan yoylariga teng bo'ladi. Bu proyeksiyalarning umumiy formulalari

$$x = R\varphi; \; y = R\lambda;$$

$$m = 1; \; n = p = \beta / r = r_k / r;$$

$$\sin(\omega/2) = (a-b)/(a+b),$$

bunda: *a* va *b* – uzunlikning ekstremal masshtablari.

Agar $\beta = r_k = R\cos\varphi_k$ bo'lsa, u holda:

$$x = R\varphi; \; y = R\lambda\cos\varphi_k.$$

Agar $\varphi_k = 0$ bo'lsa, $\beta = R$ bo'lganda

$$x = R\varphi; \; y = R\lambda.$$

Keltirilgan oxirgi formulalar *kvadrat proyeksiya* deb nomlanuvchi proyeksiyani ta'riflaydi; bu proyeksiyada burchak xatoligi va masshtablar quyidagi formulalar bo'yicha aniqlanadi:

$$m = 1; \; n = p = \sec\varphi;$$

$$\sin(\omega/2) = (\sec\varphi - 1)/(\sec\varphi + 1) = tg^2(\varphi/2).$$

34-§. Berilgan xatoliklar taqsimlanishi bo'yicha ixtiyoriy silindrik proyeksiyalar

Berilgan xatolik qiymatlarining taqsimlanishi bo'yicha silindrik proyeksiyalar N.A. Urmayev tomonidan taklif qilingan, bu bilan u birinchilardan bo'lib matematik kartografiyaning teskari masalasini – «*berilgan xatolik yoki masshtablari bo'yicha proyeksiyalar tenglamalarini qidirish*»ni ta'riflab bergan.

Silindrik proyeksiyalarda meridianlar bo'yicha masshtablar kenglik funksiyasi hisoblanadi. Agar $m = dx/d\varphi$ qabul qilinsa va uning ba'zi nuqtalari qiymati berilsa, unda abssissani integrallab topish mumkin:

$$x = \int m d\varphi.$$

Masalani qulay va oson yechish maqsadida masshtabni kenglikka nisbatan juft ko'phad ko'rinishida tasavvur qilish mumkin:

$$m = a_0 + a_2\varphi^2 + a_4\varphi^4 + ...,$$

bunda a_0, a_2 va a_4 – koeffitsiyentlar, ularni uch noma'lumli uchta tenglamani yechish orqali yoki interpolyatsiya yo'li bilan topish mumkin. Misol sifatida N.L. Urmayev taklif etgan ixtiyoriy silindrik proyeksiyani olishni ko'rib chiqamiz. *f(z)* funksiyaning z argumentga nisbatan qiymatini Nyutonning taqsimlangan ayirmalar interpolyatsiya formulasi orqali olish mumkin:

$$f(z) = f(a_0) + (z - a_0)f_{01} + (z - a_0)(z - a_1)f_{012} + ...,$$

bunda f_{01} va f_{012} – birinchi va ikkinchi taqsimlangan ayirmalar:

$$f_{01} = \frac{f(a_1) - f(a_0)}{a_1 - a_0}; \qquad f_{12} = \frac{f(a_2) - f(a_1)}{a_2 - a_1};$$

$$f_{012} = \frac{f_{12} - f_{01}}{a_2 - a_0} = \left[\frac{f(a_2) - f(a_1)}{a_2 - a_1} - \frac{f(a_1) - f(a_0)}{a_1 - a_0}\right] / (a_2 - a_0).$$

Kengligi $\varphi_0 = 0°$, $\varphi_1 = 60°$ va $\varphi_2 = 80°$ parallellarda masshtablar $m_0 = 1$ $m_1 = 1{,}5$; $m_2 = 2{,}0$.

Taqsimlangan ayirmalarni hisoblash quyidagi jadvlaga muvofiq amalga oshiriladi:

φ, **gradus**	A	$f(a) = \gamma$	f_{01}, f_{02}	f_{012}
0	0	1.0		
			+ 1/72	+1/16 128
60	36	1.5		
			+ 1/56	
80	64	2.0		

a argument sifatida graduslarning o'nlab kvadratida (to'r chastotasi $\Delta\varphi = \Delta\lambda = 10°$) ifodalangan parallellar kengligini olamiz, *f(a)* funksiya sifatida - *m* masshtab qiymatini.

Argument z sifatida $\varphi / arc1 0^\circ$ qiymatni qabul qilamiz. Unda:

$$m = 1 + \frac{z^2}{72} + \frac{z^2(z^2 - 36)}{16128} = 1 + \frac{188z^2}{16128} + \frac{z^4}{16128}$$

va integrallashdan keyin:

$$x = z + \frac{188z^3}{48384} + \frac{z^5}{80640}$$

Proyeksiyaning to'g'ri burchakli koordinatalarini muayyan yuza karta masshtabi uchun quyidagi qiymatlarini olamiz:

$$x_{sm} = R(\mu_0 100)x \quad \text{va} \quad y_{sm} = R(\mu_0 100)\lambda arc1^\circ$$

35-§. Qiyshiq va ko'ndalang silindrik proyeksiyalar

Ko'ndalang silindrik proyeksiyalardan meridianlar bo'ylab cho'zilgan hududlar kartalarini tuzishda, qiyshiq silindrik proyeksiyalardan esa – ixtiyoriy oriyentirlangan katta aylanalar bo'ylab cho'zilgan hududlarni kartaga olishda foydalanish maqsadga muvofiq.

Qiyshiq va ko'ndalang silindrik proyeksiyalarda kartaga olish yuzasi sifatida sfera qabul qilinadi. Proyeksiyalarni olish ishlari quyidagi bosqichlardan iborat:

– ellipsoiddan shar yuzasi tekisligiga o'tish (yirik masshtabli kartalar uchun) yoki shar radiusini (R) aniqlash;

– qutb ($Q(\varphi_0, \lambda_0)$) koordinatalarini aniqlash;

– geografik koordinatalar tizimidan qiyshiq yoki ko'ndalang qutbiy sferik koordinatalar tizimiga o'tish;

– proyeksiyalar koordinatalari, masshtablari va burchak xatoliklari qiymatlarini hisoblash.

Yirik masshtabli kartalar uchun, masalan, aeronavigatsiya kartalari uchun qiyshiq va ko'ndalang proyeksiyalarni olishda ko'pincha teng burchakli proyeksiyalardan foydalaniladi, bunda ellipsoiddan shar yuzasi tekisligiga o'tish teng burchakli tasvirlash sharti asosida bajarilishi talab qilinadi. Bunda sferik kenglik qiymati kartografik jadvallardan olinishi mumkin. Shar radiusi (R) qiymati ham ushbu shartlar asosida topiladi.

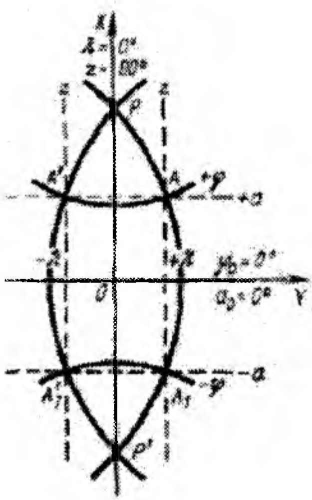
Ko'ndalang proyeksiyalarda qutb kengligi $\varphi_0 = 0$, uzoqlik – $\lambda_0 = \pm 90°$.

Geografik koordinatalardan ko'ndalang koordinatalar tizimiga o'tish quyidagi formulalar asosida amalga oshiriladi:

$$\cos z = \cos\varphi \cos(90° - \lambda) = \cos\varphi \sin\lambda;$$

$$tga = ctg\varphi \sin(90° - \lambda) = ctg\varphi \cos\lambda.$$

Qiyshiq proyeksiyalarda boshlang'ich vertikal sifatida qiyshiq koordinatalar tizimi qutbiy meridiani bilan mos keluvchi vertikal olinadi. Ko'ndalang proyeksiyalarda boshlang'ich vertikal geografik ekvator bilan ustma-ust tushadi, ya'ni 90° ga burilgan *(37-rasm)*, shu sababli, azimutni aniqlash formulasining o'ng qismi teskari qiymatga almashtirilishi kerak: $tga = tg\varphi \sec\lambda$.



37-rasm. **Ko'ndalang silindrik proyeksiyalarda koordinatalar tizimi**

Ko'ndalang silindrik proyeksiyalarda to'g'ri burchakli koordinatalarni hisoblash formulalari to'g'ri proyeksiyalar formulalari kabi hosil qilinishi mumkin (vertikallar va almukantaratlar bo'yicha masshtablardan foydalanish orqali teng burchakli, teng maydonli yoki teng oraliqli tasvirlash sharti asosida), biroq bunda normal proyeksiyalar formulalaridan foydalanish maqsadga muvofiq, λ qiymatni a va φ qiymatni $(90^{\circ}-z)$ almashtirib hamda bir vaqtning o'zida proyeksiya to'rini 90° ga burish orqali ish yuritiladi.

Teng burchakli ko'ndalang silindrik proyeksiyalarni hosil qilish uchun Merkator proyeksiyasi formulasidan (*122*) foydalanamiz, bunda yuqori ko'rsatib o'tilgan murakkab bo'lmagan o'zgartirishdan keyin formula teng burchakli ko'ndalang silindrik proyeksiya formulasiga mos tushadi, bu *Gauss – Lambert proyeksiyasi* deb nomlanadi *(38-rasm)*,

$$x = Ra;\ y = \frac{R}{\mathrm{mod}} \lg ctg \frac{z}{2};$$

$$\mu = \cos ecz;\ p = coec^{2} z;$$

$$\omega = 0,$$

bu yerda μ – uzunlik masshtabi.

Shunga o'xshash kvadrat proyeksiyani qo'llab, Kassini – Zoldner nomi bilan mashhur bo'lgan vertikallar bo'yicha teng oraliqli ko'ndalang silindrik proyeksiya tenglamalarini olamiz *(39-rasm):*

$$x = Ra;\ y = R(90^{\circ} - z);$$

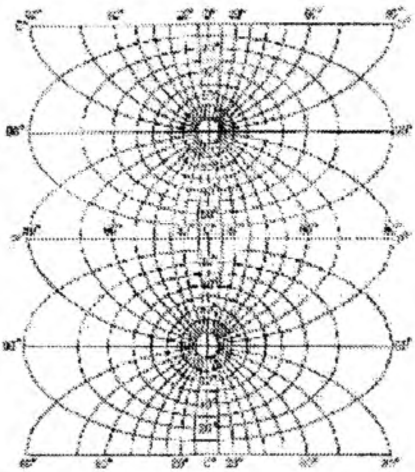
$$\mu_1 = 1;\quad \mu_2 = p = sosesz;$$

$$\sin(\omega/2) = tg^{2}(45^{\circ} - z/2)$$

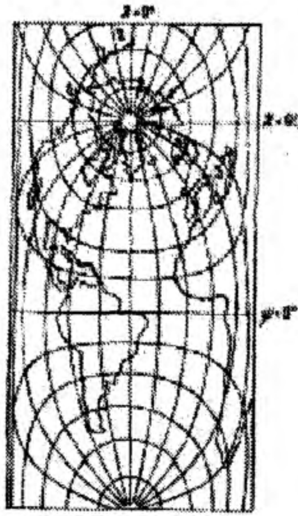
bunda μ_1 va μ_2, – mos ravishda vertikallar va almukantaratlar masshtablari. Bu proyeksiya Zoldner geodezik koordinatalariga asos sifatida tanlangan.

Ko'ndalang silindrik proyeksiyalarda *(37-rasm)* to'g'ri chiziqli o'q meridian ko'ndalang koordinatalar tizimining ekvatori bilan mos tushadi, qolgan almukantaratlar – o'q meridianga parallel holatda joylashgan to'g'ri chiziqlar bilan tasvirlanadi; vertikallar o'q meridianga perpendikulyar to'g'ri chiziqlar bo'lib, boshlang'ich vertikal $a = 0$ geografik ekvator bilan ustma-ust tushadi. Xatolik zenit masofasiga bog'liq, shu sababli izokolalar almukantaratlar bilan mos tushadi va to'g'ri chiziq ko'rinishida bo'ladi.

Qiyshiq silindrik proyeksiyalardan kartaga olinayotgan yuzada meridianga nisbatan o'tkir yoki o'tmas burchak ostida cho'zilgan holatda joylashgan uzun polosalarni tasvirlashda foydalanish tavsiya etiladi. Bu proyeksiyalarni olish uchun quyidagilar talab qilinadi:



38-rasm. **Teng burchakli ko'ndalang silindrik proyeksiya**



39-rasm. **Vertikallar bo'yicha teng oraliqli ko'ndalang silindrik proyeksiya**

– yirik masshtabli kartalar uchun ellipsoiddan shar yuzasiga o'tish yoki mayda masshtabli kartalarni tuzishda shar radiusini (R) aniqlash;

– III bobda keltirilgan formulalar bo'yicha qiyshiq tizim qutb koordinatalarini hisoblash $Q(\varphi_0, \lambda_0)$: qiyshiq tizim ekvatori yo'nalishini aniqlab beruvchi, yordamchi burchakni – u_1 aniqlash, keyin esa – (*62*) formula bo'yicha φ_0 va λ_0 koordinatalarni aniqlash. Odatda, koordinatalar qiymatlari butun graduslargacha yaxlitlanadi;

– geografik koordinatalardan qiyshiq tizim qutbiy sferik koordinatalar tizimiga o'tishni amalga oshirish. Bunday o'tish (*59*) va (*60*) yoki (*61*) formulalar bo'yicha bajariladi.

Agar, φ_0 va λ_0 qiymatlar besh gradusga karrali bo'lsa va kartografik to'r chastotasi ham beshga yoki o'ng gradusga teng bo'lsa, u holda geografik koordinatalardan qiyshiq tizimning qutbiy sferik koordinatalar tizimiga o'tishni «Kartografik jadval» (SNIIGAiK ishlari to'plami, Moskva, «Geodezizdat» nashriyoti, 1960-yil, 132-son) tarkibida keltirilgan tayyor z va a qiymatlardan olish mumkin.

z va a qiymatlar aniqlanishi orqali quyidagi formulalar bo'yicha proyeksiyaning to'g'ri burchakli koordinatalari va masshtablarini hisoblashga o'tiladi:

$$x = f(z);\ y = \beta a;$$

$$\mu_1 = -\beta / Rdz;\ \mu_2 = \beta / R\sin z;\ p = \mu_1\mu_2;$$

$$\sin(\omega/2) = (a-b)/(a+b) \quad \text{yoki} \quad tg(45^{\circ}+\omega/4) = \sqrt{a/b};$$

$$\beta = R\sin z_k \quad \text{yoki} \quad \beta = R.$$

a va b – ekstremal masshtablar.

Proyeksiyalar variantlari aniq formulalari yuqorida keltirilgan umumiy formulalardan teng burchakli, teng maydonli yoki teng oraliqli tasvirlash sharti asosida abssissa qiymatlarini aniqlash yo'li bilan yoki normal proyeksiyalar formulalarini murakkab bo'lmagan tarzda o'zgartirish yo'li bilan hosil qilinishi mumkin.

Masalan, ko'plab holatlarda aeronavigatsion kartalarni tuzib chiqishda foydalaniluvchi teng burchakli qiyshiq silindrik proyeksiyalar formulalari teng burchakli normal silindrik proyeksiyalar formulalari asosida, φ qiymatni $(90^{\circ}-z)$ qiymatga va λ qiymatni a qiymatga o'rin almashtirish orqali hosil qilinishi mumkin. (*122*) formulada ko'rsatilgan o'zgartirishlar amalga oshirilgandan keyin,

$$x = \frac{\beta}{\text{mod}} \lg ctg(z/2);\ y = \beta a;$$

$$\mu_1 = \mu_2 = \beta / R\sin z;$$

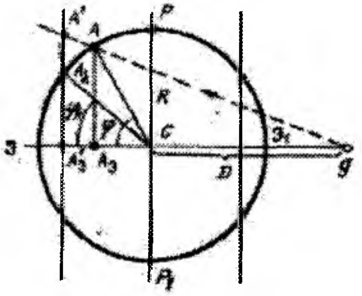
$$p = \mu^2;\ \omega = 0;$$

$$\beta = R\sin z_k \text{ yoki } \beta = R.$$

36-§. Perspektiv-silindrik proyeksiyalar

Yuqorida ko'rsatib o'tilganidek, silindrik proyeksiyalar geometrik yo'l bilan ham hosil qilinishi mumkin, ular silindrik proyeksiyalarga tegishli bo'lgan barcha umumiy xossalarga ega bo'ladi. Bu proyeksiyalarni hosil qilish masalasini qarab chiqamiz.

Qutb o'qi kartaga olinayotgan yuza (sfera) bilan ustma-ust tushuvchi silindrni tasavvur qilamiz. Bu silindr sferani kesib o'tishi yoki ekvator bo'yicha urinma hosil qilishi mumkin. Hosil qilingan silindrda karta to'ri chastotasi berilgan qiymati bilan muvofiqlikda har bir meridian tekisligida alohida ko'rinishda, perspektiv proyeksiya usuli bilan meridianlar yoyini loyihalaymiz *(40-rasm)*.



40-rasm. **Normal perspektiv-silindrik proyeksiyani hosil qilish**

Bunda ko'rish nuqtasini loyihalayotganda hayoliy ko'rinishda ekvator tekisligi bo'yicha siljitishni amalga oshiramiz, bu holatda bitta meridiandan boshqasiga tomon harakatlantirish bajariladi, barcha holatda shar markazidan bir xil masofa saqlab qolinadi. Bir xil nom bilan ataluvchi meridianlar va parallellar chiziqlari bilan loyihalanayotganda nuqtani tutashtirish orqali va silindrning yon yuzasini burash asosida kartalash to'ri tekisligida normal perspektiv-silindrik proyeksiyani hosil qilamiz.

Agar X o'qini meridianlardan biri va Y o'qi ekvator yoki parallel ravishda eng kichik kenglikda bo'lsa, u holda bu proyeksiyaning to'g'ri burchakli koordinatalari uchun formulalar quyidagi shaklga ega bo'ladi:

$$x = f(\varphi); \qquad Y = \beta\lambda .$$

Meridianlar va parallellar ushbu proyeksiyada ikkita tizimli o'zaro perpendikulyar to'g'ri chiziqlar bilan ifodalanadi; meridianlar orasidagi masofalar normal silindrik proyeksiyalardagi kabi aniqlanadi, parallellar orasidagi esa – perspektiv proyeksiyalar metodi bo'yicha. Normal perspektiv-silindrik proyeksiyalarni olishda kartaga olinayotgan yuzani aylanma ellipsoid sifatida qabul qilish mumkin, lekin bu proyeksiyalar mayda masshtabli obzor kartalar uchun foydalanilishi maqsadli, shuning uchun faqat shar proyeksiyalarini ko'rib chiqish bilan chegaralanamiz.

Abssissa x qiymatini geometrik yo'l bilan topamiz. 40-rasmdan A nuqta g ko'rish nuqtasidan hosil etuvchi silindr sirtiga loyihalanmoqda, A_k nuqta sharni φ_k kenglikli parallel bilan kesib o'tadi. Bunda ko'rish nuqtasi shar markazidan D masofada joylashgan. Agar $A_e^{'}$ nuqtani to'g'ri burchakli koordinatalar boshi bilan tutashtirsak, A' nuqta A nuqtaning proyeksiyasi, $A_e^{'}$ kesma esa tasvirlanayotgan A nuqtaning abssissasi bo'ladi.

$gAA_e igA' A_e^{'}$ o'xshash uchburchaklardan

$$x = \frac{AA_e A_e^{'} g}{A_e g}, \text{ ya'ni}$$

$$A_e^{'} g = D + A_e^{'} C.$$

$$\Delta AA_e C \text{ dan}$$

$$AA_e = R\sin\varphi; \quad A_e C = R\cos\varphi, \text{ unda}$$

$$x = \frac{R\sin\varphi(D + \cos\varphi_k)}{D + \cos\varphi}.$$

Agar $D/R = k$, unda

$$x = \frac{R\sin\varphi(k + \cos\varphi_k)}{D + \cos\varphi}.$$

$(k + \cos\varphi_k)$ qiymat proyeksiyani olishda o'zgarmas, uni C bilan belgilab, quyidagini olamiz:

$$x = CR\frac{\sin\varphi}{k + \cos\varphi}.$$

Agar $\varphi_k = 0$ (silindr tegishli bo'ladi), unda $C = k+1$.

Normal perspektiv-silindrik proyeksiyalar umumiy formulalari:

$$x = CR\frac{\sin\varphi}{k+\cos\varphi}; \qquad y = \beta\lambda$$

$$m = dx/Rd\varphi = C(1+k\cos\varphi)/(k+\cos\varphi)^2; \; n = \beta/r;$$

$$p = mn; \qquad \sin\left(\frac{\omega}{2}\right) = (a-b)/(a+b),$$

bunda a va b – uzunlik ekstremal masshtabi.

$C = k+\cos\varphi_k$; $\beta = R\cos\varphi_k$ bo'lganda kesuvchi silindr,

$C = k+1$; $\beta = r$ bo'lganda urinma.

Proyeksiyalar to'ri ortogonal, shu sababli m va n masshtablar ekstremal. Xatoliklar xususiyati bo'yicha perspektiv-silindrik proyeksiyalar ixtiyoriy hisoblanadi. Ular bir-biridan φ_k parallel kengligi va ko'rish nuqtasi D shar S markazidan g uzoqligi bilan farq qiladi.

Bir nechta xususiy holatlarni ko'rib chiqamiz.

$k = 0$ – gnomonik proyeksiyalar usuli bo'yicha loyihalashda $\varphi_k = 0°$; – urinma silindr;

$$x = Rtg\varphi; \; y = R\lambda;$$

$$m = \sec^2\varphi; \qquad n = \sec\varphi;$$

$$p = \sec^3\varphi; \qquad \sin\left(\frac{\omega}{2}\right) = tg^2(\varphi/2).$$

Bu variant ancha ma'lum hisoblangan Uyetch proyeksiyasiga tegishli.

$k = 1$ – sterografik proyeksiya metodi bo'yicha loyihalashda. $\varphi_k = 0°$ – urinma silindr;

$$x = 2Rtg(\varphi/2); \; y = R\lambda;$$

$$m = \sec^2(\varphi/2); \; n = \sec\varphi;$$

$$p = \sec^2(\varphi/2)\sec\varphi; \quad \sin(\omega/2) = (a-b)/(a-b),$$

bunda a va b – uzunlik ekstremal masshtabi. Bu variant Braun proyeksiyasiga tegishli.

3. $k = 1$.

$\varphi_k = 45° -$ kesuvchi silindr;

$$x = (1+\cos\varphi_k)R\,tg(\varphi/2); \qquad y = R\cos\varphi_k\lambda;$$

$$m = \frac{(1+\cos\varphi_k)}{2}\sec^2(\varphi/2); \qquad n = \cos\varphi_k \sec\varphi;$$

$$p = mn; \qquad \sin(\omega/2) = (a-b)/(a+b);$$

bunda a va b – uzunliklar ekstremal masshtablari.

Bu variant Goll proyeksiyasi nomi bilan ma'lum. $\varphi_k = 30°$ bo'lganda I tom BSAM dunyo kartalarini tuzish uchun ishlatilgan.

Normal perspektiv-silindrik proyeksiyalarda xatolik faqat kenglik qiymatlariga bog'liq, shu sababli izokolalar parallellar bilan ustma-ust tushadi va to'g'ri chiziq ko'rinishiga ega hisoblanadi. Proyeksiyalarda ikkita parametr mavjud – k va φ_k, bu parametrlar to'r ko'rinishiga (parallellar va meridianlar o'rtasidagi masofaning o'zgarishi) va xatolikning taqsimlanishiga o'z ta'sirini ko'rsatadi.

Qiyshiq perspektiv-silindrik proyeksiyalarda meridianlar va parallellar to'ri normal bilan ustma-ust tushmaydi. Meridinalar va parallellar egri chiziqlar bo'lib, vertikallar va almukantaratlar esa o'zaro perpendikulyar ko'rinishdagi to'g'ri chiziqlar tizimi bilan tasvirlanadi. Bu proyeksiyalar yuqorida ko'rsatilgan usullar bilan hosil qilinishi mumkin, biroq bunda tasvir tekisligiga loyihalashda ko'rish nuqtasi ekvator tekisligida emas, balki zenit masofasi $z = 90°$ bo'lgan almukantarat tekisligida joylashadi. Qiyshiq perspektiv-silindrik proyeksiyalarning umumiy formulalarini φ qiymatni $(90° - z)$ qiymatga va λ qiymatni a qiymatga almashtirish yo'li bilan, normal perspektiv-silindrik proyeksiyalar tenglamalaridan oddiy usulda olish mumkin:

$$x = CR\frac{\cos z}{k+\sin z}; \quad y = \beta a;$$

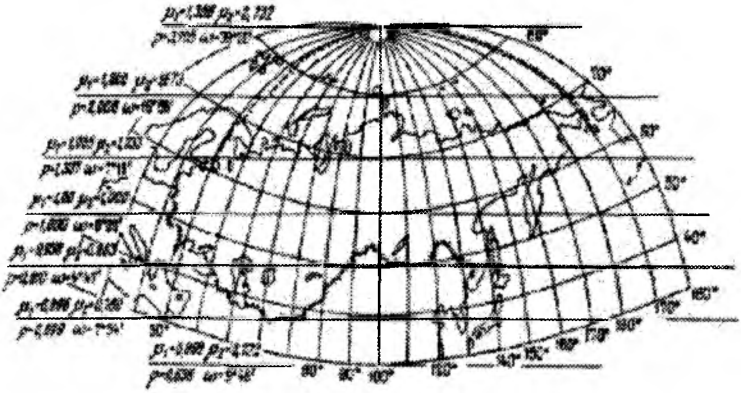
$$\mu_1 = C(1+k\sin z)/(k+\sin z)^2; \; \mu_2 = \beta / R\sin z;$$

$$p = \mu_1\mu_2; \; \sin(\omega/2) = (a-b)/(a+b),$$

bu yerda a va b – uzunlikning ekstremal masshtablari.

$C = k + \sin z_k$; $\beta = R \sin z_k$ holatda kesuvchi silindr kuzatiladi,
$C = k + 1$; $\beta = R$ holatda urinma silindr qayd qilinadi.

Xatolik faqat z koordinatalarga bog'liq, shu sababli izokolalar almukantaratlar bilan ustma-ust tushadi va to'g'ri chiziqli meridianga perpendikulyar bo'lgan, o'zaro parallel holatdagi to'g'ri chiziqlardan tashkil topadi. Qiyshiq perspektiv-silindrik proyeksiyalar o'quv kartalarini tuzib chiqish uchun ishlab chiqilgan. Qarab chiqilayotgan proyeksiyalarda quyidagi uchta qiymat mavjud: φ_0, k va z_k, bu qiymatlar to'r ko'rinishi va xatolik qiymatlari taqsimlanishiga o'z ta'sirini ko'rsatadi. Tanlash yo'li bilan bu parametrlarni parallellar egri chiziqli, kartografik to'r o'lchamlari va xatoliklarning qayta taqsimlanishiga o'rin almashtirish mumkin.



41-rasm. **Qiyshiq ko'ndalang-silindrik proyeksiya (M.D. Solovyov varianti)**

Bu proyeksiyalardan kartada tasvirlanuvchi hudud ma'lum bir aniq o'lchamdagi ramka bilan chegaralangan vaziyatlarda foydalanish maqsadga muvofiq. Qiyshiq perspektiv-silindrik proyeksiyalarning variantlaridan biri M.D. Solovyov tomonidan ishlab chiqilgan bo'lib (41-rasm), maktab kartalarini tuzib chiqishda keng miqyosda foydalanilgan, bunday kartalarda geografik qutb va Shimoliy Muz okeani to'liq tasvirlanadi.

$$(\varphi_0 = 75°,\ \lambda_0 = -80°,\ k = 1 \text{ va } z_k = 45°).$$

Nazorat savollari

1. *Ellipsoid normal silindrik proyeksiyalari formulalarini yozing.*
2. *Merkator proyeksiyalarining qanday xususiyatlari bor? Ularni izohlang.*
3. *Loksodromiyalar va ortodromiyalar chiziqlariga ta'rif bering. Ularning mohiyatini tushuntiring.*
4. *Teng maydonli va teng oraliqli silindrik proyeksiyalar qanday proyeksiya turiga kiradi va ulardan qaysi kartalarni tuzishda foydalaniladi?*
5. *N.L.Urmayev taklif etgan ixtiyoriy silindrik proyeksiyalar xususiyatini ta'riflang va proyeksiya to'g'ri burchakli koordinatalarini aniqlashni tushuntiring.*
6. *Qiyshiq va ko'ndalang silindrik proyeksiyalarni olish ishlarini nechta bosqichga bo'lish mumkin?*
7. *Normal perspektiv silindrik proyeksiyalarda xatoliklar qanday taqsimlangan, ularning kartografik to'ri qanday ko'rinishga ega bo'ladi?*

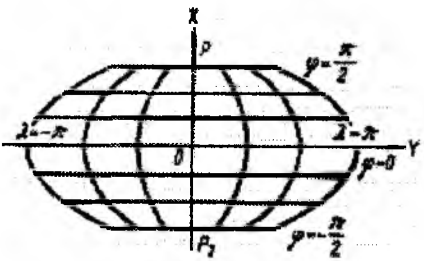
VII BOB
PSEVDOSILINDRIK PROYEKSIYALAR

37-§. Asosiy qoidalar va umumiy formulalar

Psevdosilindrik proyeksiyalarning normal to'ri quyidagicha ko'rinishga ega: parallellari to'g'ri, meridianlari esa egri chiziqlar. Bunday proyeksiyalarni ko'rinishi o'zgargan normal silindrik proyeksiya sifatida qarab chiqish mumkin, ularda proyeksiyaning barcha meridianlari (o'q meridiandan tashqari) egri chiziqlar bilan tasvirlanadi. To'g'ri burchakli koordinatalar tizimida proyeksiyaning umumiy tenglamasi quyidagi ko'rinishga ega:

$$x = f(\varphi); \quad y = F(\varphi, \lambda),$$

bunda koordinata boshi ekvatorning o'qi meridian bilan kesishish nuqtasida joylashadi *(42-rasm).*



42-rasm. **Psevdosilindrik proyeksiyalar koordinatalari tizimi**

Psevdosilindrik proyeksiyalarda kartaga olinayotgan yuza to'liq tasvirlanadi, zarur bo'lgan holatlarda uzoqlik bo'yicha yuzaning bir qismini qayta qo'shib tasvirlash ham mumkin. Geografik qutbni parallellarga parallel bo'lgan nuqtalar yoki chiziqlar bilan ko'rsatish mumkin, ular *qutb chiziqlari* deyiladi.

Meridianlar ko'pincha ellips yoki sinusoid kabi chiziqlar ko'rinishida tasvirlanadi, biroq meridianlari parabola, giperbola va boshqa ko'rinishda bo'lgan chiziqlardan tashkil topgan psevdosilindrik proyeksiyalar ham mavjud.

Psevdosilindrik proyeksiyalarda to'r ortogonal emas:

$$tg\varepsilon = -f/h = -y_\varphi y_\lambda / x_\varphi x_\lambda = -y_\varphi / y_\varphi \text{ bundan}$$

$$Y\varphi = -x_\varphi tg\varepsilon. \quad (123)$$

Umumiy formuladan meridian va parallellar bo'yicha xususiy masshtabni aniqlaymiz:

$$m = \sqrt{e/M}; \quad n = \sqrt{g/r}.$$

Psevdosilindrik proyeksiyalar uchun $e = x_\varphi^2 + y_\varphi^2$ yoki (123) formulani hisobga olib,

$$e = x_\varphi^2(1 + tg^2\varepsilon) = x_\varphi^2 \sec^2\varepsilon, \text{bundan}$$

$$m = \frac{x\varphi}{M}\sec\varepsilon; \; g = x_\lambda^2 + y_\lambda^2; \; x_\lambda^2 = 0, \text{ chunki } g = y_\lambda^2.$$

g ning qiymatini parallellar masshtabi formulasiga qo'yib, quyidagini olamiz:

$$n = \frac{y\lambda}{r} = \frac{y\lambda}{N\cos\varphi} = \frac{y\lambda}{N}\sec\varphi.$$

Maydon masshtabi $p = mn\cos\varepsilon = x_\varphi x_\lambda / Mr$.

Qarab chiqilayotgan proyeksiyalarda asosiy yo'nalishlar meridian va parallellar bilan mos tushmaydi, shuning uchun meridian va parallellar bo'ylab masshtablar ekstremal emas. Ekstremal masshtablar – a va b (*43*) formula bo'yicha aniqlanadi. Bu proyeksiyalarda burchaklar maksimal xatoligini quyidagi formula bo'yicha aniqlash maqsadga muvofiq:

$$tg\frac{\omega}{2} = \frac{B}{2p} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m^2 + n^2 - 2p}{p}}.$$

O'z navbatida, psevdosilindrik proyeksiyalar mayda masshtabli kartalarni tuzish uchun foydalaniladi, shu sababli, odatda, kartaga olinayotgan yuza radiusi (*R*) sfera sifatida qabul qilinadi. Psevdosilindrik proyeksiyalarning sfera uchun umumiy tenglamasi:

$$x = f(\varphi); \quad y = F(\varphi; \lambda);$$

$$tg\varepsilon = -y_\varphi / x_\varphi;$$

$$m = \frac{x_\varphi}{R}\sec\varepsilon; \quad n = \frac{y\lambda}{R\cos\varphi} = \frac{y\lambda}{R}\sec\varphi; \quad (124)$$

$$p=\frac{x_\varphi y\lambda}{R^2\cos\varphi};\qquad tg\frac{\omega}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{m^2+n^2-2p}{p}}.$$

Xatoliklar xarakteri bo‘yicha psevdosilindrik proyeksiyalar teng maydonli va ixtiyoriy turlarga bo‘linadi; teng maydonli proyeksiyalar nisbatan keng tarqalgan. Agar maydon masshtabi quyidagi tenglama bilan ifodalansa,

$p=\frac{x_\varphi y_\lambda}{Mr}=k^2$, bunda k – doimiy qiymat, u holda

$y=\frac{k^2 Mr}{x_\varphi}$ · tenglama integrallashdan keyin:

$y=\frac{k^2 Mr}{x_\varphi}\lambda+F(\varphi)$, bu yerda F – φ kenglikning ixtiyoriy funksiyasi. $\lambda=0$ va $y=0$ bo‘lganda X o‘qi meridian bilan ustma-ust tushadi, $F(\varphi)=0$ bo‘ladi. Ko‘p holatlarda $k=1$ tenglik o‘rinli. Unda:

$$y=\frac{Mr}{x_\varphi}\lambda.$$

Shar uchun $y=\frac{R^2\cos\varphi}{x_\varphi}$. (125)

Keltirilgan oxirgi ifoda teng maydonli psevdosilindrik proyeksiyalarning barchasiga xos.

38-§. Teng maydonli psevdosilindrik proyeksiyalar

Psevdosilindrik proyeksiyalar anchadan buyon ma’lum, ularni olishda olimlar tomonidan kartografik to‘rni hosil qilishning turli usullari tavsiya qilingan. Sobiq Ittifoq olimlari V.V. Kavrayskiy va N.A. Urmayevlar teng maydonli psevdosilindrik proyeksiyalarni olishning yangi, umumlashgan usulini taklif qilishgan. Meridianlar va geografik qutb tasvirlanishidan kelib chiqqan holda, parametrik ko‘rinishdagi psevdosilindrik proyeksiyalarda to‘g‘ri burchakli koordinatalar tenglamasi quyidagicha bo‘ladi:

– meridianlari sinusoidal proyeksiyalar uchun

$$x=C\alpha; \tag{126}$$

$$y = (A\cos\alpha + B)\lambda; \qquad (127)$$

– meridianlari elliptik proyeksiyalarda

$$x = C\sin\alpha;$$

$$y = (A\cos\alpha + B)\lambda, \qquad (128)$$

bunda A, B, S – to‘r o‘lchamlarini tavsiflovchi parametrlar; $a = f(\varphi)$.

Teng maydonli psevdosilindrik proyeksiyalarni hosil qilish uchun uchta shartni qo‘yamiz:

1. *Cheklilik sharti*, bu shart kenglik ($\varphi = 0°$) va kenglikning yordamchi funksiyasi (α) o‘rtasidagi bog‘liqlikni belgilab beradi: bunda $\varphi = 0°$ holatda $\alpha = 0°$; $\varphi = \pi/2$ da esa – $\alpha = \pi/2$ ga teng.

2. *To‘rning bir o‘lchamdalik sharti* (umumiy holat uchun, ya’ni qutbi chiziq ko‘rinishida bo‘lgan proyeksiyalar uchun):

$x_p = y_p = y_э/2.$

Agar qutb nuqta bilan tasvirlansa, u holda $y_p = 0$.

3. *Teng maydonlilik sharti* [(*125*) formula asosida]

$$y = \frac{R^2\cos\varphi}{x_\varphi}\lambda.$$

O‘rnatilgan shartlardan kelib chiqib, A, B va C parametrlar o‘rtasidagi nisbatlar aniqlanadi; keyin esa – bu parametrlar kartaga olinayotgan yuzaning elementlari orqali ifodalanadi va nihoyat, kenglik va yordamchisi funksiya (α) o‘rtasidagi bog‘liqlik topiladi.

Formulalarni keltirib chiqarishda ordinatalarning ikkita tenglamasidan foydalaniladi: parametrik ko‘rinishdagi umumiy tenglamalardan, boshqasi – teng maydonlilik shartidan. Ixtiyoriy psevdosilindrik proyeksiyalarni hosil qilish uchun teng maydonlilik sharti o‘rniga boshqa shartlardan foydalaniladi.

39-§. Teng maydonli sinusoidal qutbi nuqta ko‘rinishidagi psevdosilindrik proyeksiyalar

Proyeksiya sinusoidal, shu sababli (126) formuladan $x = aC$. Geografik qutblar nuqta bo‘lib tasvirlanadi, unda (127) formuladan

$y = A\lambda\cos a$. Proyeksiya teng maydonli, shuning uchun (125) formuladan

$$y = \frac{R^2 \cos\varphi}{x_\varphi}\lambda.$$

Qarab chiqilayotgan proyeksiya uchun *to'rning bir o'lchamdalik shartidan* kelib chiqib:

$$x_p = y_z / 2\,.$$

Kartaga olinayotgan butun yuzani tasvirlash uchun

$$x_p = C\frac{\pi}{2}; \quad y_z = A\pi. \text{ unda:}$$

$$c\frac{\pi}{2} = \frac{A\pi}{2}; \qquad C = A \text{ bundan:}$$

$y = C\lambda\cos a$ – ordinatalar qiymatini tenglab:

$$C\cos a = R^2\cos\varphi / x_\varphi = R^2\cos\varphi / Ca\varphi$$

$$C^2\cos a da = R^2\cos\varphi d\varphi \text{ integrallab}$$

$$C^2\sin a = R^2\sin\varphi + C_1$$

Agar $\varphi = 0$ va $a = o$ unda integrallash doimiysi no'lga teng:

$$C^2\sin a = R^2\sin\varphi. \tag{129}$$

Agar $\varphi = \pi/2$ va $a = \frac{\pi}{2}$; $C^2 = R^2$ qiymatini (129) formulaga qo'ysak, unda olamiz: $\sin a = \sin\varphi$; $a = \varphi$.

Olingan natijalani (124) formulaga qo'yib, teng maydonli sinusoidal psevdosilindrnk proyeksiya tenglamasini yozamiz, bu esa Sanson proyeksiyasi nomi bilan ma'lum.

$$x = R\varphi; \quad y = R\lambda\cos\varphi$$

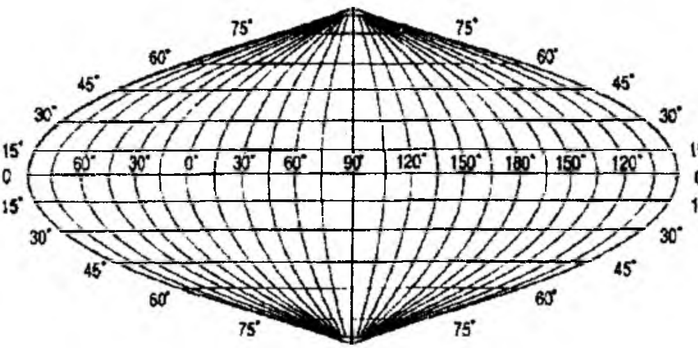
$$tg\varepsilon = \lambda\sin\varphi;$$

$$m = \sec\varepsilon; \quad m_0 = 1; \quad n = 1;$$

$$p = 1; \ tg\left(\frac{\omega}{2}\right) = tg\varepsilon / 2.$$

Sanson proyeksiyasida (43-rasm) barcha parallellar va o'q meridian uzunliklari saqlanadi. Meridianlar bo'yicha masshtab va burchaklar xatoligi kenglik va uzoqlik funksiyalari hisoblanadi (quyida uzunlik masshtablari qiymatlari keltirilgan), meridianlar uzunligi xatoligini va burchak xatoligini ifodalaydigan izokolalar giperbola egri chiziqlari bo‘lib, ekvator va o‘q meridianga nisbatan simmetrik holatda joylashadi. Mayda masshtabli dunyo kartalari Sanson proyeksiyasida tuziladi, undan atlas kartalarini yaratish uchun ko‘proq foydalaniladi.

φ, gradus	0	15	30	45	60
0	1.0	1,000	1.000	1.000	1,000
15	1.0	1,002	1.009	1.020	1,036
30	1.0	1,009	1.034	1.074	1,129
45	1.0	1,017	1,066	1,144	1,244
60	1.0	1,025	1,098	1.209	1,350



43-rasm. **Teng maydonli sinusoidal psevdosilindrik Sanson proyeksiyasi**

40-§. Qutbi chiziq ko‘rinishida bo‘lgan teng maydonli sinusoidal psevdosilindrik proyeksiyalar

Bunday proyeksiyalarda geografik qutblar parallellarga parallel bo‘lgan qutbiy chiziqlar bilan tasvirlanadi, bu chiziqlarning uzunligi ekvator uzunligidan ikki marta qisqa bo‘ladi (15-rasm). Proyeksiya sinusoidal, (126) formuladan $x = aC$. Geografik qutblar chiziq sifatida tasvirlanadi, shu sababli (128) formuladan $y = (A\cos a + B)\lambda$.

Proyeksiya teng maydonli, (125) formuladan $y = \frac{R^2 \cos\varphi}{x_\varphi}\lambda$. Qarab chiqilayotgan proyeksiya uchun to'rning *bir o'lchamdalik* sharti asosida

$$x_p = y_p = y_z / 2;$$

$$x_p = C\frac{\pi}{2}; \quad y_p = B\pi; \quad y_z = (A+B)\pi;$$

$$C\frac{\pi}{2} = B\pi = \frac{A+B}{2}\pi;$$

$$A = B = C/2.$$

Unda

$$y = \frac{c}{2}(\cos a + 1)\lambda;$$

$$y = \frac{R^2 \cos\varphi}{x_p}\lambda = \frac{R^2 \cos\varphi}{C\left(\frac{da}{d\varphi}\right)}\lambda.$$

Ordinatalar qiymatini tenglashtirib, differensial tenglamani olamiz: $\frac{c^2}{2}(1 + \cos a)da = R^2 \cos\varphi d\varphi$, integrallashdan so'ng

$$\frac{c^2}{2}(a + \sin a) = R^2 \sin\varphi.$$

Integrallash doimiysi no'lga teng, chunki $\varphi = 0$ va $a = 0$. Agar $\varphi = \pi/2$ va $a = \pi/2$

$$\frac{c^2}{2}\left(\frac{\pi}{2} + 1\right) = R^2.$$ Undan

$$C = \frac{2R}{\sqrt{\pi + 2}}; \quad A = B = R/\sqrt{\pi + 2}.$$

Olingan S ning qiymatini (131) formulaga qo'yib:

$$\alpha + \sin\alpha = \frac{\pi + 2}{2}\sin\varphi, \qquad (132)$$

bu yerda α – radian o'lchamida.

Keltirilgan oxirgi tenglama transsendent hisoblanadi va faqat yaqinlashtirish (ketma-ket yaqinlashtirish usulida) natijasida yechimiga ega. Berilgan va haqiqiy qiymatlar aniqlanishida, odatda, jadvalda ular umumlashtiriladi, shu sababli α qiymatni aniqlash usuli juft jadval usuli deb ham nomlanadi.

Birinchi jadval bo'yicha α qiymat asosida φ qiymat topiladi, bu qiymat butun graduslar qiymatida bo'lmaydi. Ikkinchi jadvalga butun gradusli kenglik qiymati kiritiladi: φ_1, φ_2, φ_3 va h.k. Interpolyasiya yo'li bilan α qiymati har bir kenglik uchun topiladi.

Quyidagi jadvalda α qiymati keltirilgan.

φ, gradus	"	15	30	45	60	75	90
A	0	19°15'	38° 12'	56°25'	72°49'	85°11'	90°00'

Qutblari chiziq bo'lgan teng maydonli sinusoidal psevdosilindrik proyeksiya formulalari (bu proyeksiyani Ekkert proyeksiyasi deyishadi, lekin bu proyeksiya teng maydonli psevdosilindrik proyeksiyaning xususiy holati sifatida qaraladi):

$$x = \frac{2R}{\sqrt{\pi+2}} a; \quad y = \frac{2R\lambda}{\sqrt{\pi+2}} \cos^2 \frac{a}{2};$$

$$a + \sin + a = \frac{\pi+2}{2} \sin\varphi; \quad tg\varepsilon = \frac{\lambda}{2} \sin\varphi;$$

$$m = \frac{\sqrt{\pi+2}}{2} \sec^2 \frac{a}{2} \cos\varphi \sec\varepsilon; \qquad n = \frac{2}{\sqrt{\pi+2}} \cos^2 \frac{a}{2} \sec\varphi;$$

$$p = 1; \qquad tg\frac{\omega}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{m^2} + n^2 - 2.$$

Proyeksiyada parallellar bo'yicha uzunlik xatosi faqat kenglik funksiyasidir, shu sababli bu turdagi xatolikni tavsiflab beruvchi izokolalar parallellar bilan ustma-ust tushadi va to'g'ri chiziq ko'rinishida bo'ladi. Meridianlar bo'yicha uzunlik xatoligi va burchak xatoligi kenglik va uzoqlikka bog'liq, bu turdagi xatoliklarni tavsiflovchi izokolalar giperbola egri chiziqlaridan tashkil topgan bo'lib, o'q meridianga va ekvatorga simmetrik holatda joylashadi. Qarab chiqilgan ushbu proyeksiyalar urushgacha sobiq Ittifoqda geografik atlaslarni tuzishda keng qo'llanilgan.

41-§. Kavrayskiyning teng maydonli sinusoidal psevdosilindrik proyeksiyasi

Bu proyeksiya yuqorida qarab chiqilgan teng maydonli sinusoidal qutbli chiziq bo'lgan proyeksiyaga juda yaqin. Proyeksiyani olish uchun V.V. Kavrayskiy tomonidan ikkita qo'shimcha shart belgilangan, ya'ni parametr $B=0$ va kenglik funksiyasi $\alpha=\pi/3$ bo'lganda $\varphi=\pi/2$ proyeksiya sinusoidal, shuning uchun:

$$x=Ca; \qquad y=a\lambda\cos a.$$

To'rning *bir o'lchamlilik* shartiga asosan:

$$x_p=y_p=y_e/2;$$

$$x_p=c\left(\frac{\pi}{3}\right); \qquad y_p=A\pi\cos\left(\frac{\pi}{3}\right); \qquad y_z=A\pi;$$

$$C\left(\frac{\pi}{3}\right)=A\pi\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=A\pi/2,$$

$$A=\frac{2}{3}C.$$

Proyeksiya teng maydonli, shuning uchun:

$$y=\frac{R^2\cos\varphi}{x_\varphi}\lambda.$$

Ordinatlar tenglamasidan

$\frac{2}{3}C\cos a=R^2\cos\frac{\varphi}{c}\frac{da}{d\varphi}$ differensial tenglamalarni olamiz.

$$\frac{2}{3}C^2\cos a da=R^2\cos\varphi d\varphi.$$

Integrallashgandan keyin

$$\frac{2}{3}C^2\sin a=R^2\sin\varphi,$$

Bunda integrallash doimiysi no'lga teng, chunki $\varphi=0$; $a=0$.

$\varphi=\frac{\pi}{2}$; $a=\frac{\pi}{3}$ bo'lganda, undan $C^2=\sqrt{3R^2}$

(135) ni (134) ga qo'yib, φ va α qiymatlari orasidagi munosabat topiladi:

$$\sin a = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\varphi.$$

Yordamchi funksiya α qiymatini topish oson, buning uchun maxsus jadvallarni tuzish shart emas, chunki 40-§ da qarab chiqilgan proyeksiyaga nisbatan Kavrayskiy proyeksiyasida meridianlar egriligi o'zgarishi ancha sekin.

Teng maydonli sinusoidal Kavrayskiy proyeksiyasi formulalari:

$$x = R\sqrt[4]{3}a; \quad y = \frac{2}{3}R\sqrt[4]{3}\lambda\cos a$$

$$\sin a = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\varphi; \qquad tg\varepsilon = \frac{2}{3}\lambda\sin\varphi;$$

$$m = \frac{3}{2\sqrt[4]{3}}\sec a\cos\varphi\sec\varepsilon; \qquad n = \frac{2}{3}\sqrt[4]{3}\cos a\sec\varphi;$$

$$p = 1; \qquad tg\frac{\omega}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{m^2 + n^2 - 2.}$$

42-§. Qutblari nuqta bo'lgan teng maydonli elliptik psevdosilindrik proyeksiyalar

Qarab chiqilayotgan proyeksiya *Molvayde proyeksiyasi* deb nomlanadi. Proyeksiyaning kartografik to'ri 44-rasmda keltirilgan. Bunda barcha meridianlar ellipslardan iborat, faqat to'g'ri chiziqli o'q meridian va aylana ko'rinishidagi $\lambda = 90°$ meridian hisobga olinmaganda.

Proyeksiya to'ri butun yer yuzasini ko'rgazmali tasvirlashni ta'minlaydi, shuning uchun hozirgacha undan okeanlar kartalarini hamda atlaslarda dunyoning obzor kartalarini tuzishda foydalaniladi. Proyeksiya elliptik, shu sababli (127) formuladan

$$x = C\sin a.$$

Geografik qutb nuqta bo'lib tasvirlanadi, (128) formuladan $y = A\lambda\cos a$. Proyeksiya teng maydonli, (125) formuladan

$$y = \frac{R^2\cos\varphi}{x_\varphi}\lambda.$$

To‘rning *bir o‘lchamlilik* shartidan

$$x_p = y_z/2 \text{ bo‘ladi, chunki}$$

$$x_p = C; \quad y_z = A\pi$$

$$C = \frac{A\pi}{2}; \quad A = 2C/\pi \text{ unda}$$

$$y = \frac{2C}{\pi}\lambda\cos a \quad \text{va teng maydonlilikdan}$$

$$y = \frac{R^2\cos\varphi}{x_p}\lambda = \frac{R^2\cos\varphi}{C\cos a\left(\frac{da}{d\varphi}\right)}\lambda.$$

$$\frac{2C}{\pi}\cos a = \frac{R^2\cos\varphi}{C\cos a\left(\frac{da}{da}\right)}.$$

O‘zgaruvchilari ajratilgan differensial tenglik va uni qayta tuzib

$$\frac{2C^2}{\pi}\cos^2 ada = R^2\cos\varphi d\varphi;$$

$$\frac{C^2}{\pi}(1+\cos 2a)da = R^2\cos\varphi d\varphi \text{ integrallashdan so‘ng}$$

$$\frac{C^2}{2\pi}(2a+\sin 2a) = R^2\sin\varphi.$$

Integrallash doimiysi no‘lga teng, chunki $\varphi = 0;\ a = 0,$ unda, $\varphi = \frac{\pi}{2};\ a = \pi/2,$ bundan $\frac{C^2}{2} = R^2$ qiymatini (137) formulaga qo‘yib, Molveyde tenglamasini olamiz:

$$2a + \sin 2a = \pi\sin\varphi,$$

bu kenglik φ ni α yordamchi funksiyasi bilan aloqasini xarakterlaydi. Bu tenglik transsendent; u ketma-ket yaqinlashtirish usuli orqali yechiladi (40-§ ga qarang). Molveyde proyeksiyasi formulalari:

$$x = \sqrt{2}R\sin a; \quad y = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}R\lambda\cos a;$$

$$2a + \sin 2a = \pi\sin\varphi; \qquad tg\varepsilon = \frac{2\lambda}{\pi}tga;$$

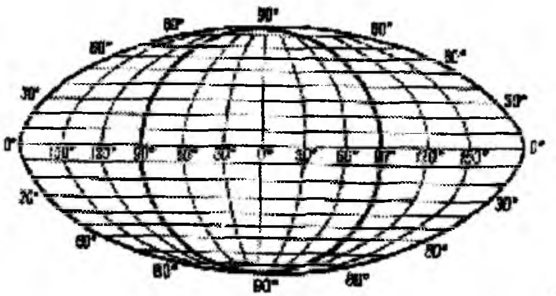
$$m=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\sec\alpha\cos\varphi\sec\varepsilon;\ n=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\cos\alpha\sec\varphi;$$

$$tg\frac{\omega}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{m^2+n^2-2}.$$

2-jadval

Molveyda proyeksiyasida uzunliklar xususiy masshtablari va burchak xatoligi qiymatlari

φ, gradus	N	Belgisi	λ gradusda			
			0	30	60	90
0	0,900	*T*	1,111	1,111	1,111	1,111
		ω, gradus	12.0	12.0	12,0	12,0
30	0,951	*T*	1,052	1.063	1.096	1.150
		ω, gradus	5.8	10.5	18.5	26,7
60	1.165	*T*	0,858	0,922	I.0&1	1,326
		ω, gradus	17.4	25.7	40.7	55,7
90	3,665	*T*	0.273	1,305	2,568	3.840
		ω, gradus	180.0	180,0	180,0	180.0



44-rasm. **Qutbi nuqta bo'lgan teng maydonli elliptik psevdosilindrik proyeksiya**

43-§. Kavrayskiyning ixtiyoriy elliptik psevdosilindrik proyeksiyasi

Proyeksiya elliptik, shunda

$$x=C\sin\alpha.$$

O'q meridian uzunligi bu proyeksiyada xatosiz tasvirlanishi sharti qo'yilsa, unda $x=R\varphi$, bundan

$$\sin a = \frac{R\varphi}{C};$$

$$\cos a = \sqrt{1 - \frac{R^2\varphi^2}{C^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{C^2 - R^2\varphi^2}. \qquad (139)$$

$\cos a$ ni $y = A\lambda \cos a$ formulaga qo'yib, quyidagini olamiz:

$$y = \frac{A\lambda}{C}\sqrt{C^2 - R^3\varphi^2}.$$

To'rning *bir o'lchamlilik* shartidan

$$y_p = \frac{y_e}{2} = \frac{A\lambda}{C}\sqrt{C^2 - R^2\frac{\pi^2}{4}} = \frac{A\lambda}{2C}\sqrt{4C^2 - R^2\pi^2};$$

$$y_e = \frac{A\lambda}{C}\sqrt{C^2}; \qquad \sqrt{C^2} = \sqrt{4C^2 - R^2\pi^2};$$

$$3C^2 = R^2\pi^2; \; C = R\pi / \sqrt{3}.$$

Meridianlardan biri aylana shaklida, bu meridian uchun $C = A\lambda_1$, bunda λ_1– uning uzoqligi. Bu tenglikni (140) formulaga qo'yib, quyidagini olamiz:

$$y = \frac{\lambda R}{\lambda_1}\sqrt{\frac{\pi^2 - 3\varphi^2}{3}}.$$

Aylana bo'lib tasvirlanadigan (λ_1) meridian uzoqligini, parallellarda berilgan $\pm\varphi_k$ kenglikda xususiy masshtab $n_k = 1$ sharti bilan aniqlash mumkin, ya'ni bu parallellar uzunligi kartada xatoliksiz tasvirlanadi:

$$\lambda_1 = \sqrt{\pi^2 - 3\varphi_k^2} / \sqrt{3}\cos\varphi_k.$$

Agar λ_1 uzoqlik qiymati berilsa, unda xatosiz tasvirlanadigan $\pm\varphi_k$ parallellar kengligini olamiz. V.V. Kavrayskiy proyeksiya uchun $\lambda_1 = 120°$ qabul qildi. Bunday shartda kengligi $\varphi_k = \pm 35°31'34''$ bo'lgan ikkita parallellar uzunligi saqlanadi (45-rasm).

Kavrayskiy proyeksiyasining umumiy formulalari:

$$x = R\varphi; \; y = \frac{\lambda R}{\lambda_1\sqrt{3}}\sqrt{\pi^2 - 3\varphi^2};$$

$$tg\varepsilon = \frac{\lambda\sqrt{3}\varphi}{\lambda_1\sqrt{\pi^2 - 3\varphi^2}}; \qquad (141)$$

$$m = \sec\varepsilon; \; n = \frac{\sqrt{\pi^2 - 3\varphi^2}}{\lambda_1\sqrt{3}\cos\varphi} = p;$$

$$tg\frac{\omega}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m^2 + n^2 - 2p}{p}}.$$

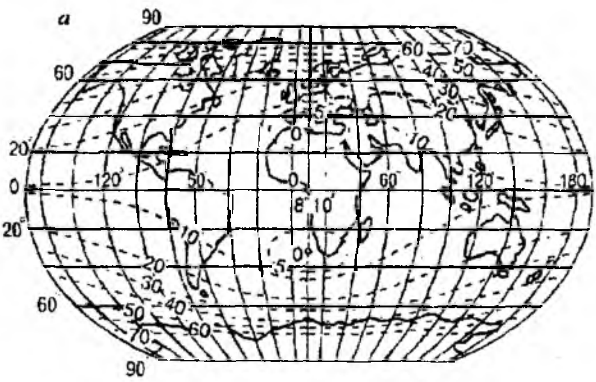
Odatda, proyeksiya soddalashgan formulalar asosida hisoblanadi:

$$x = R\varphi; \; y = \frac{\lambda}{\lambda_1}k\cos a;$$

$$\sin a = \sqrt{3}\varphi / \pi;$$

$$k = R\pi / \sqrt{3};$$

$$tg\varepsilon = \frac{\lambda}{\lambda_1}tga; \; m_0 = 1;$$



45-rasm. **V.V. Kavrayskiyning ixtiyoriy elliptik psevdosilindrik proyeksiyasi.**

$$m = \sec\varepsilon; \;\; n_e = \pi / \lambda_1\sqrt{3} = 0{,}866026;$$

$$n = n_e\frac{\cos a}{\cos\varphi} = p; \qquad tg\frac{\omega}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m^2 + n^2 - 2p}{p}},$$

bunda $\lambda_1 = \frac{2}{3}\pi$; k – aylanali meridian radiusi.

3-jadval

Kavrayskiy proyeksiyasida uzunliklar xususiy masshtabi va burchak xatoligi qiymatlari

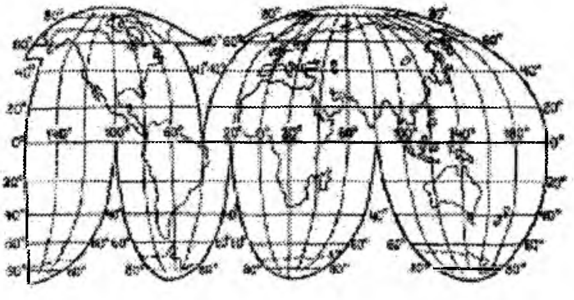
φ, gradus	n=p	Belgisi	λ, gradus							
				0	20	40	80	120	160	180
0	0.866	m	m, ω	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
		ω, gradus	gradus	8.2	8.2	8.2	8.2	8.2	8.2	8.2
20	0.904	m	m, ω	1.000	1.001	1.002	1.009	1.019	1.034	1.042
		ω, gradus	gradus	5.7	6.1	7.0	9.7	13.1	16.6	18.5
40	1.043	m	m, ω	1.000	1.002	1.010	1.038	1.083	1.144	1.180
		ω, gradus	gradus	2.4	4.6	8.1	15.7	23.2	30.5	34.1
60	1.414	m	m, ω	1.000	1.007	1.027	1.106	1.225	1.374	1.458
		ω, gradus	gradus	19.8	20.5	22.7	29.6	38.0	46.8	51.2
80	3.183	m	m, ω	1.000	1.020	1.078	1.283	1.567	1.894	6.067
		ω, gradus	gradus	62.9	63.1	63.8	66.2	69.9	74.5	76.9

Qarab chiqilayotgan proyeksiyada izokolalar turli shakllarga ega: jumladan, parallellar uzunligi xatoligi va maydon xatoligini tavsiflovchi izokolalar to‘g‘ri chiziq ko‘rinishida bo‘lib, parallellar bilan ustma-ust tushadi; meridianlar uzunligi xatoligi va burchak xatoligini tavsiflovchi izokolalar esa – giperbola ko‘rinishidagi egri chiziqlardan iborat bo‘lib, o‘q meridianga va ekvatorga nisbatan simmetrik holatda joylashadi.

44-§. Gud usulining psevdosilindrik proyeksiyalarda qo‘llanilishi

Psevdosilindrik proyeksiyalardagi xatoliklar tahlili shuni ko‘rsatadiki, ularning qiymati yuqori kengliklarda sezilarli darajada oshadi. Angliyalik olim Gud butun kartaga olinayotgan yuzani tasvirlashda psevdosilindrik proyeksiyalardan foydalanishni taklif etgan, bu tasvirlanayotgan hududning alohida qismlari uchun ishlab chiqilgan alohida tizimni o‘z ichiga oladi. Har bir qism (kontinent yoki okean) uchun o‘q meridian shunday ko‘rinishda tanlanadiki, bunda xatolik qiymati juda katta bo‘lmasligi talab qilinadi, so‘ngra – barcha alohida qismlar ekvator bo‘yicha birlashtiriladi. Bu birlashtirish natijasida dunyo kartasi uchun hosil qilingan proyeksiyada kontinentlar (qit’alar) kam xatolik bilan tasvirlanadi, biroq okeanlarda tasvir uzilishlari yuzaga keladi, yoki aksincha proyeksiya olinishi mumkin.

Ko‘pincha o‘q meridiani uzoqligi qit’alar kartalari uchun Shimoliy Amerikaga $\lambda_0 = -100°$; Janubiy Amerikaga $\lambda_0 = -60°$; Yevroosiyo uchun $\lambda_0 = +60°$; Afrikaga $\lambda_0 = +20°$; Avstraliya uchun $\lambda_0 = +140°$ tanlanadi. Gud usulida xohlagan psevdosilindrik proyeksiya olinishi mumkin *(46-rasm)*.



46-rasm. **Molveyda-Gud proyeksiyasi**

Nazorat savollari

1. *Psevdosilindrik proyeksiyalarning sfera uchun umumiy tenglamasini yozing va unga izoh bering.*
2. *Teng maydonli sinusoidal psevdosilindrik proyeksiya tenglamasini olishni tushuntiring.*
3. *Sanson proyeksiyasi xususiyatlari qanday? Proyeksiya to‘rini chizing.*
4. *Molveyde proyeksiyasi to‘ri qanday ko‘rinishga ega? Uning formulalarini keltiring.*
5. *V.V. Kavrayskiyning ixtiyoriy elliptik psevdosilindrik proyeksiyasi formulalarini yozing va izohlab bering.*

VIII BOB
PSEVDOKONUSLI VA PSEVDOAZIMUTAL PROYEKSIYALAR

45-§. Psevdokonusli proyeksiyalarning asosiy qoidalari va umumiy formulalari

Psevdokonusli proyeksiyalarda parallellar konsentrik aylana yoylaridan, meridianlar – o'rta meridian to'g'ri chiziq, qolganlari unga nisbatan simmetrik egrilar, ularning markazi parallellar markaziga mos keladi *(16-rasm).* Ta'rifga asosan bunday proyeksiyalarning umumiy formulalari

$$x = p - p\cos\delta; \qquad y = p\sin\delta;$$
$$p = \mathrm{f}(\varphi); \qquad \delta = \mathrm{F}(\varphi,\lambda); \tag{143}$$

bunda q=const -- janubiy parallelning tekislikdagi qutbiy masofasi.

(143) tenglikni φ va λ bo'yicha defferensiyalab, hosila natijasini kartografik proyeksiyalar umumiy nazariyasi tenglamalariga qo'yib, quyidagini olamiz:

$$\begin{aligned}
&f = x_\varphi x_\lambda + y_\varphi y_\lambda = \rho^2\delta_\varphi\delta_\lambda;\\
&h = x_\varphi y_\lambda - x_\lambda y_\varphi = -\rho\rho_\varphi\delta_\lambda;\\
&tg\varepsilon = -f/h = (\rho\delta_\varphi)/\rho_\varphi;\\
&\mathrm{n} = \frac{1}{r}\left(x_\lambda^2 + y_\lambda^2\right)^{1/2} = \frac{\rho\delta\lambda}{r};\\
&p = h/Mr = -(\rho\rho_\varphi\delta_\lambda)/Mr;\\
&\mathrm{m} = \frac{p}{n}\sec\varepsilon = -\frac{\rho_4}{M}\sec\varepsilon;\\
&tg\frac{\omega}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m^2+n^2}{p} - 2};
\end{aligned} \tag{145}$$

$$a = (A + B)/2; \qquad b = (A - B)/2;$$

bunda

$$A = \sqrt{m^2 + n^2 + 2p}; \qquad B = \sqrt{m^2 + n^2 - 2p};$$

m, n, a, b – meridianlar, parallellar va asosiy yo'nalishlar bo'ylab maydonlar va chiziqlar xususiy masshtablari (a, b – ekstremal masshtablar).

Psevdokonusli proyeksiyalarning ta'rifi va (*144*), (*146*) – (*150*) formulalarning tahlilidan kelib chiqib qayd qilish mumkinki, bu proyeksiyalarda kartografik to'r ortogonal emas, meridianlar yoyi uzunligi kenglik va uzoqlik funksiyalari hisoblanadi. Shu sababli, bu proyeksiyalar teng burchakli bo'la olmaydi va meridianlar yaqinida uzunlik saqlanadi. Ular xatoliklari bo'yicha faqat teng maydonli va ixtiyoriy bo'lishi mumkin.

Xususiy holatda, $\delta = \alpha\lambda$ yoki $\delta = \lambda$ shart bajarilganda, meridianlar to'g'ri chiziqlardan iborat bo'lib, hosil qilingan proyeksiyalar konusli yoki azimutal xususiyatdagi ortogonal kartografik to'rga mos tushadi va berilgan xatoliklar tavsiflari o'rinli hisoblanadi. Bu proyeksiyalarda parallellar teng bo'lingan aylanalar bo'lib, ularda yoylar uzunligi saqlanadi yoki uzunlik masshtablari qiymati o'zgarmaydi. Psevdokonusli proyeksiyalardan teng maydonli *Bonn proyeksiyalari* keng foydalaniladi, u 1752-yilda taklif etilgan.

46-§. Teng maydonli psevdokonusli proyeksiyalar. Bonn proyeksiyasi

(145) va (147) formulalardan teng maydonlilik sharti bo'yicha $h = -\rho\rho_\varphi\delta_\lambda = -\rho_\varphi nr = Mr$; Bundan qutbiy masofa

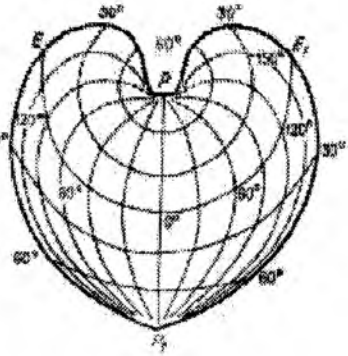
$\rho = C - \int \frac{M}{n} d_\varphi = C - s$; C – integrallash doimiysi.

(147) formuladan qutbiy burchak qiymatini topamiz:

$$\delta = \int \frac{nr}{\rho} d\lambda + F(\varphi)$$

$\rho = f(\varphi)$ sharti bo'yicha, (152) formuladan parallellar bo'yicha uzunlik xususiy masshtabi n, bunday proyeksiyalarda faqat φ kenglik funksiyasi bo'ladi yoki u o'zgarmas qiymat oladi. Agar proyeksiya o'rta to'g'ri meridianga nisbatan simmetrik bo'lsa, unda

$\delta = 0$ faqat $\lambda = \lambda_0 = 0$ bo'lganda. Bu proyeksiyalar uchun $F = (\varphi) = 0$; $\delta = \dfrac{nr}{\rho}\lambda$ $n = f(\varphi)$ ko'rinishli funksiya shartini belgilab, (152) va (153) tengliklardan va (143), (146), (150) – (153) umumiy formulalar orqali turli xil teng maydonli psevdokonusli proyeksiyalarni olish mumkin.



47-rasm. **Teng maydonli psevdokonusli Bonn proyeksiyasi**

Bonn proyeksiyasini olish uchun (47-rasm) o'rta meridian va parallellar bo'ylab xususiy masshtablar birga teng, degan shartni qo'yish kerak, ya'ni

$$n = 1; \qquad m_0 = 1.$$

Unda (152), (153), (146), (148) – (150) tengliklardan

$$\rho = C - s; \qquad \delta = \frac{r}{\rho}\lambda;$$

$$tg\varepsilon = \frac{\rho}{M}\left(\frac{\lambda\rho M \sin\varphi - r\lambda M}{\rho^2}\right) = \lambda\left(\sin\varphi - \frac{r}{\rho}\right);$$

$$m = \sec\varphi; \qquad p = 1;$$

$tg(\omega/2) = tg\varepsilon/2$, bunda s – ekvatordan berilgan parallelgacha bo'lgan meridian yoyi uzunligi.

Demak, ushbu formuladan barcha xatolik turlari (ε, ω, υ) o'rta meridianda no'lga teng $\lambda = \lambda_0 = 0$ va berilgan parallelda φ_0

$$\sin\varphi_0 - r_0/\rho_0 = 0$$

Bu ifodadan p_0 qiymatini (154) formula orqali topib, integrallash doimiysi S qiymatni topamiz va qutbiy masofalarni hisoblash yakuniy formulalarini olamiz:

$$C = s_0 + N_0 ctg\varphi_0;$$
$$\rho = (s_0 - s) + N_0 ctg\varphi_0. \qquad (155)$$

Bonn psevdokonusli proyeksiyasi uchun

$$x = q - \rho\cos\delta; \qquad y = \rho\sin\delta;$$
$$q = const;$$
$$\rho = (s_0 - s) + N_0 ctg\varphi_0. \qquad \delta = \frac{r}{\rho}\lambda;$$
$$tg\varepsilon = \lambda\left(\sin\varphi - \frac{r}{\rho}\right); \qquad tg(\omega/2) = tg\varepsilon/2,$$
$$m = \sec\varphi; \qquad n=1; \quad q=1;$$
$$a = (A+B)/2; \qquad b = (A+B)/2;$$
$$A = \sqrt{4 + tg^2\varepsilon}; \qquad B = \pm tg\varepsilon.$$

Ushbu proyeksiya formulalari tahlilidan qayd etish joizki, ularda izokolalar o‘q meridiani yaqinida va o‘rta parallellarda ushbu chiziqlarga nisbatan simmetrik teng tomonli giperbola xarakterga ega bo‘ladi.

Bu proyeksiya xossalari bo‘yicha teng maydonli Sanson psevdosilindrik proyeksiyasiga juda yaqin, ular teng maydonli psevdokonusli Bonn proyeksiyasining xususiy holati sifatida qarab chiqilishi mumkin. 1940-yillarda M.D. Solovyov tomonidan ko‘rinishi o‘zgartirilgan formulalar tavsiya qilingan, bunda uchta doimiy parametrlar kiritilishi yo‘li bilan Bonn proyeksiyasida parallellarning tasvirlanish egriligi qiymati kamaytirilgan. Bu formulalar quyidagicha ifodalanadi:

$$x = q - \rho\cos\delta; \qquad y = \rho\sin\delta;$$
$$q = const;$$
$$\rho = C_0 + C_1(S_0 - S); \qquad \delta = C_2\frac{r}{\rho}\lambda;$$
$$tg\varepsilon = C_2\lambda\left(\frac{\sin\varphi}{C_1} - \frac{r}{\rho}\right);$$

$$tg\frac{\omega}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(C_1-C_2)^2+C_1^2tg^2\varepsilon}{C_1C_2}};\qquad(156)$$

$$m=C_1\sec\varepsilon;\quad n=C_2;\quad q=C_1C_2:$$

$$a=(A+B)/2;\qquad b=(A+B)/2;$$

$$A=\sqrt{(C_1\sec\varepsilon)^2+C_2^2+2C_1C_2}$$

$$B=\sqrt{(C_1\sec\varepsilon)^2+C_2^2-2C_1C_2}$$

bunda $C_0, C_1 va C_2$ – amaliy masalalarni yechishda tanlab olinadigan doimiy parametrlar.

C_0, C_1, C_2 parametrlarning aniqlash masalasini qo'yilgan shart va parallellar egriligi bo'yicha qarab chiqamiz. Parallellar egriligi quyidagi formula bo'yicha aniqlanishi mumkin:

$$K_p=\frac{x_\lambda y_{\lambda\lambda}+y_\lambda x_{\lambda\lambda}}{\left(x_\lambda^2+y_\lambda^2\right)^{3/2}}=\frac{1}{nr}\left\{\left[(mM)_\lambda tg\varepsilon+(nr)_\varphi\sec\varepsilon\right]\frac{1}{mM}+\varepsilon_\lambda\right\}.\qquad(157)$$

Demak, K_p qiymatini hisoblash uchun proyeksiyaning tenglamalari asosida uning hosilasini topish yetarli, ya'ni $m_\lambda, (nr)_\varphi, \varepsilon_\lambda$ Lekin psevdokonusli proyeksiyalar uchun parallellar egriligi quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$K_p=-1/\rho.$$

(156) tenglikni hisobga olib:

$$-1/K_p=C_0+C_1(S_0-S)$$

φ_1 va φ_2 kenglikli ikkita parallel egriligi qiymatlarini belgilab, (159) formuladan C_1 va C_2 koeffitsiyentlar qiymatini topamiz:

$$C_1=\frac{K_{p1}-K_{p2}}{K_{p1}-K_{p2}(S_2-S_1)};$$

$$C_0=-1/K_{p1}-C_1(S_0-S_1)=-1/K_{p2}-C_1(S_0-S_2).\qquad(160)$$

C_2 ni parallellar uzunasi bo'ylab berilgan o'zgarmas chiziq xususiy masshtabi bo'yicha aniqlash mumkin: $n=n_k$ yoki o'zgarmas qiymatli maydon xususiy masshtabi orqali $p=p_k$

Birinchi holat uchun:

$$C_2 = n_k \tag{161}$$

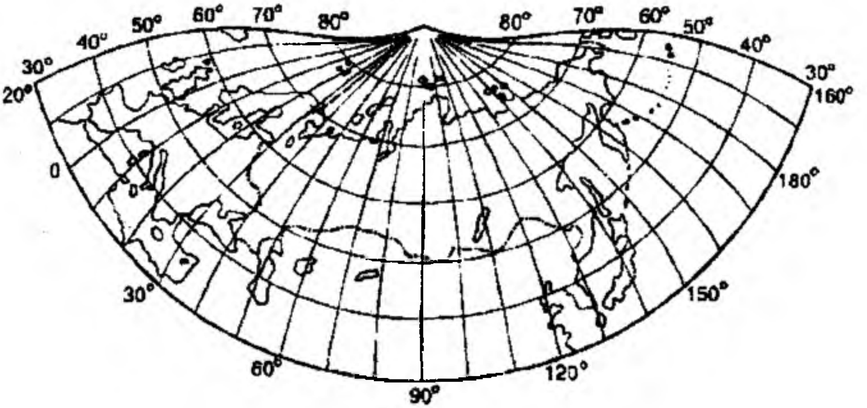
ikkinchi holatda:

$$C_2 = p_k / C_1 \tag{162}$$

$p = 1$ sharti bo'lganda:

$$C_2 = 1/C_1 \tag{163}$$

Ushbu proyeksiya parallellari bo'yicha teng bo'lingan hisoblanadi (47-§ ga qarang). Parallellari va o'rta meridiani bo'yicha uzunlik xususiy masshtabi va maydon xususiy masshtabi o'zgarmas qiymatlar. Parallellarining egriligi kamayib borishi tufayli shakli o'zgartirilgan Bonn proyeksiyasi hududlarning geografik joylashishini tasvirlashda samara beradi, kartaning o'quvchanligini oshiradi, masalan, maktab kartalarida *(48-rasm)*.



48-rasm. **Ko'rinishi o'zgartirilgan Bonn proyeksiyasi**

Qayd etilgan psevdokonusli proyeksiyalarda parallellar bo'ylab uzunlik xususiy masshtabi (n) o'zgarmas qiymatda deb faraz qilinadi (masalan, birga teng). Umumiy holat uchun belgilangan barcha qo'shimcha shartlar bilan

$n = f(\varphi)$ yoki, funksiya berilganda,

$$n = \sum_{i-1}^{k} a_i \cos(i\varphi); \qquad k = 1,2,3,.......,$$

bunda a_i – o'zgarmas koeffitsiyentlar turli kenglikdagi parallellar uchun berilgan funksiyani $n = f(\varphi)$ qiymatlari bo'yicha va o'rnatilgan shartlar asosida kichik kvadratlar usuli bilan aniqlanadi.

Tegishli n qiymatni (*152*) formulaga qo'yish orqali va bu tenglikni integrallash bilan qo'shimcha shartlarni qoniqtiruvchi teng maydonli psevdokonusli proyeksiyalarni hosil qilishimiz mumkin.

47-§. Parallellari teng bo'lingan kartografik proyeksiyalar

N.A. Urmayev 1953-yilda parallellari teng bo'lingan kartografik proyeksiyalar nazariyasini ishlab chiqdi, ularning xususiy holati sifatida bir qator psevdokonusli va psevdosilindrik proyeksiyalarni ta'riflab berdi. Teng bo'lingan parallellarga ega bo'lgan kartografik proyeksiyalar formulalarini olish uchun N.A. Urmayev shar sirtida yagona radius bilan ifodalangan yer yuzasini qabul qilgan, parallellar bo'ylab uzunlikning xususiy masshtablari maydonning xususiy masshtabiga teng ekanligi shartidan kelib chiqqan holatda ish olib borilgan, bu holatlar faqat kenglik funksiyasi hisoblanadi.

$$n = p = f(\varphi), \qquad \text{o'z navbatida:}$$

$$m = \sec\varepsilon. \tag{164}$$

Uzunlikning xususiy masshtabi formulasi asosida

$$m^2 = x_\varphi^2 + y_\varphi^2;$$

$$v^2 = n^2\cos^2\varphi = x_\lambda^2 + \lambda_\lambda^2$$

xususiy masshtabi sharti qarab chiqilganda, $v = n\cos\varphi$ tenglik berilgan bo'xususiy hosilalarning qiymatlari quyidagicha ifodalangan:

$$x_\varphi = m\cos(\varepsilon + \tau); \qquad x_\lambda = \vartheta\sin\tau;$$

$$y_\varphi = m\sin(\varepsilon + \tau); \qquad y_\lambda = \vartheta\cos\tau. \tag{165}$$

bunda ε – proyeksiyada meridian va parallellar orasidagi i burchakning 90° dan farqi; τ – abssissa o'qi va ushbu nuqtadan parallelga o'tkazilgan normal o'rtasidagi burchak.

Tenglamani integrallanish sharti (165):

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}(x_\varphi)=\frac{\partial}{\partial\varphi}(x_\lambda); \qquad \frac{\partial}{\partial\lambda}(y_\varphi)=\frac{\partial}{\partial\varphi}(y_\lambda); \tag{166}$$

(165) formulani differensiyasini φ , λ bo‘yicha olib va (166) formula hosilasi qiymatini qo‘yib, (164) tenglamadagi natijani e’tiborga olib, quyidagilarni olamiz:

$$tg\varepsilon\tau_\lambda = \vartheta\tau_\varphi; \tag{167}$$

$$\tau_\lambda + (tg\varepsilon)_\lambda = -v_\varphi = -dv/d\varphi. \tag{168}$$

Bu $v=n\cos\varphi$ kenglik funksiyasi bo‘lganligi sababali, ko‘rilayotgan proyeksiya esa o‘rta meridianga nisbatan simmetrikligi hisobga olinsa, ifodaning integrali (168) quyidagini beradi:

$$\tau + tg\varepsilon = -\lambda v_\varphi \tag{169}$$

Unda (167) tenglama (169) ni hisobga olib,

$$v\tau_\varphi - (\tau + \lambda v_\varphi)\tau_\lambda = 0 \tag{170}$$

Parallellar bo‘yicha uzunlikning lib, (*170*) tenglama yechimi birinchi darajadagi xususiy hosila bo‘yicha bir jinsli chiziqli differensial tenglama integraliga olib keladi, umumiy integral o‘z tarkibida odatdagi differensial tenglama sifatida, ixtiyoriy doimiyni saqlashi emas, balki ixtiyoriy funksiyani saqlashi qayd qilinadi. Bu munosabatni hisobga olgan holda va (*170*) tenglamani integrallash orqali quyidagi ifodani hosil qilamiz:

$$\tau\varphi + \lambda v = f(\tau), \tag{171}$$

bu yerda $f(\tau)$ – ixtiyoriy funksiya.

(169) va (171) tenglamalar parallellari teng bo‘lingan kartografik proyeksiyalar nazariyasi asosini tashkil etadi, bunda $n=p=f(\varphi)$ sharti amal qiladi. Xususiy holatda, agar $\tau=0$, unda (169) dan olamiz:

$$tg\varepsilon = -\lambda v_\varphi, \tag{172}$$

va (165), (164) tenglikni e’tiborga olib,

$$x_\varphi = 1; \qquad y_\varphi = \lambda v_\varphi$$

$$x_\lambda = 0; \qquad y_\lambda = v = n\cos\varphi.$$

Integrallashdan so‘ng (173) tenglik

$$x = \varphi; y = \lambda n \cos\varphi,$$

bu teng maydonli psevdosilindrik Sanson proyeksiyasi formulasi. Agar (171) tenglama $f(\tau)$ – chiziqli funksiya deb hisoblansa, unda $f(\tau) = C\tau$, undan:

$$\tau = \lambda v / (C - \varphi) = \lambda n \cos\varphi / (C - \varphi) \qquad (174)$$

τ qiymatini (169) ga qo'yib, $n = p - 1$ bo'lganda:

$$tg\varepsilon = \lambda[-v_\varphi - v/(C - \varphi)] = \lambda[\sin\varphi - \cos\varphi/(C - \varphi)] \qquad (175)$$

λ, $n\cos\varphi$ proyeksiyadagi ikkita nuqta orasidagi parallellar yoyi uzunligi, τ esa normal va parallel o'rtasidagi nuqtalar burchagi ekanligini e'tiborga olsak, unda (174) tenglamadan $(C - \varphi)$ – parallel egriligi radiusi kelib chiqadi:

$$\rho = C - \varphi. \qquad (176)$$

Ushbu ko'rinishda bu qiymat uzoqlikka bog'liq emas, shu sababli parallellar bo'yicha barcha nuqtalarda doimiy qiymat φ kenglik qayd qilinadi. Shunday qilib, (*174*) – (*176*) formulalardan hosil qilingan proyeksiya teng maydonli Bonn psevdokonusli proyeksiyasi hisoblanadi.

48-§. Psevdoazimutal proyeksiyalar haqida tushuncha

1952-yilda G.A. Ginzburg tomonidan shar sirtini tekis yuzaga nisbatan tasvirlashga tadbiq etilgan proyeksiyalar ishlab chiqilgan. Psevdoazimutal proyeksiyalarda parallellar konsentrik aylanalar yoki ularning yoylari, meridianlar – paralellar markazida tutashadigan egrilar, bitta yoki ikkita to'g'ri chiziqli meridianlarga nisbatan simmetrik egri chiziqlar bilan tasvirlanadi.

Uzoqligi $0^0, 360^0$ meridianlar hamma vaqt to'g'ri chiziq bo'lib tasvirlanadi, 90°, 180°, 270° uzoqlikli meridianlar to'g'ri yoki egri, qolgan meridianlar – egri chiziqlar bo'lib tasvirlanadi (17-rasmga qarang).

Ta'rifga ko'ra, bu proyeksiyalarning umumiy tenglamasi:

$$x = \rho \cos \delta; \qquad y = \rho \sin \delta$$
$$\rho = f_1(z); \qquad \delta = a + f_2(z) \sin ka.$$

bunda z, a – (59) va (61) formulalar orqali aniqlanadigan qutbiy sferik koordinatalar; k – o'zgarmas son, qiymati proyeksiya xususiyati va meridianlar ko'rinishini belgilaydi. Masalan, agar k = 1 bo'lsa, 0°, 180°, 360° uzoqlikdagi meridianlar to'g'ri chiziq bo'lib tasvirlanadi, agar k = 2 – 0°, 90°, 180°, 270°, 360° uzoqlikdagi meridianlar to'g'ri chiziq bo'lib tasvirlanadi. Agar k parametr kasr son bo'lsa, proyeksiya psevdoazimutal emas, balki psevdokonusliga aylanadi.

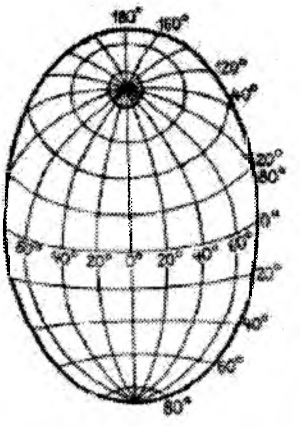
G.L. Ginzburg proyeksiya meridianlari orasidagi qutbiy burchakni δ aniqlash uchun quyidagi formulani taklif etgan:

$$\delta = a - C(z / z_{max})^q \sin ka,$$
$$q = \text{const}, \qquad (179)$$

bunda z_{max} – kartaga olinayotgan hudud zenit masofasining eng yirik qiymati.

Shu bilan bir qatorda, karta ramkasi shakliga o'xshash egrining katta yarim o'qi o'rta meridian bo'ylab yo'nalishga ega, sharti qo'yiladi. Agar egrining katta yarim o'qi va o'rta meridian orasidagi farq 90^0 bo'lsa:

$$\delta = (90^0 + a) - C(Z / Z_{max})^q \sin[k(90^0 + a)] \qquad (180)$$



49-rasm. **Atlantika okeani kartasi uchun ishlab chiqilgan qiyshiq psevdoazimutal proyeksiya**

Kartografik to'rning ko'rinishi va kartografik proyeksiya xususiyatlari C, Z_{max} q va k o'zgarmas doimiylarga bog'liq. Parametrlar qiymatlari istalgan kartografik to'rga bog'liq holatda tanlab olinadi. $\rho = f_1(z)$ funksiyaning ko'rinishi psevdoazimutal proyeksiyaning xatoliklar tavsiflariga ta'sir ko'rsatadi, biroq ular teng burchakli bo'lishi mumkin emas, chunki meridianlarda (ayrimlaridan tashqari) uzunlik saqlanmaydi.

Psevdoazimutal proyeksiyalar bitta qimmatli xossaga ega – ular yer yuzasining sferikligini yaxshi ko'rgazmali tasvirlaydi. Odatda, bu proyeksiyalar mayda masshtablarda yirik hududlar kartalarini tuzishda qiyshiq oriyentirovkada tasvirlash uchun (ovalsimon ramka bilan) foydalaniladi *(49-rasm)*. Masalan, psevdoazimutal proyeksiyalar dunyo atlasining Atlantika okeani kartasini tuzishda foydalanilgan, bunda maydon xatoligini kamaytirish maqsadida quyidagi tenglikdan foydalanilgan:

$$p = 3R\sin(z/3).$$

Nazorat savollari

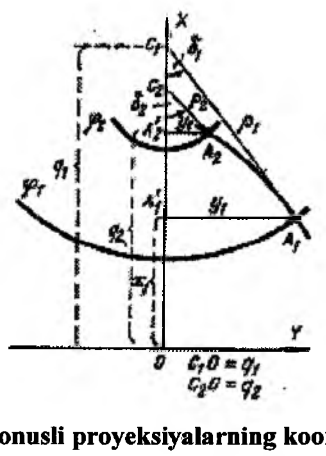
1. *Psevdokonusli proyeksiyalarda kartografik to'r qanday ko'rinishda bo'ladi? Bonn proyeksiyalari formulalarini keltiring.*
2. *Psevdoazimutal proyeksiyalar haqida nimalarni bilasiz? Ularning umumiy formulalarini keltiring.*
3. *N.A.Urmayev tomonidan 1953-yilda taklif etilgan parallellari teng bo'lingan kartografik proyeksiyalar nazariyasi haqida ma'lumot bering.*
4. *1952-yilda G.A.Ginzburg tomonidan shar sirtini tekis yuzaga tasvirlashga tadbiq etilgan qanday proyeksiyalarni bilasiz?*
5. *Psevdoazimutal proyeksiyalarning qanday qimmatli xossasi bor?*

IX BOB
YARIM KONUSLI PROYEKSIYALAR

49-§. Yarim konusli proyeksiyalarning umumiy nazariyasi

Yarim konusli proyeksiyalar normal to‘rining ko‘rinishi quyidagicha: parallellari – markazi o‘q meridianda joylashgan ekssentrik aylana yoylari, o‘q meridian to‘g‘ri chiziqlar bilan tasvirlanadi, barcha qolgan meridianlar o‘q meridianga nisbatan simmetrik holatda joylashuvchi egri chiziqlardan iborat bo‘ladi.

Odatda, kartografik to‘r ortogonal emas (ortogonallik sharti qo‘yilishi mumkin, biroq kartografiya amaliyotida hozirgi vaqtda ortogonal to‘rga ega bo‘lgan yarim konusli proyeksiyalardan juda kam foydalaniladi. Bunday proyeksiyalarda normal konusli proyeksiyalarda kuzatilgani kabi, ikkita yassi koordinatalar tizimidan foydalaniladi: qutbiy va to‘g‘ri burchakli *(50-rasm).*



50-rasm. **Yarim konusli proyeksiyalarning koordinatalari tizimi**

Qutb burchagi – $\delta = F(\varphi, \lambda)$; parallellar radiusi – $\rho = f_1(\varphi)$. Parallellar markazi abssissalari q bu proyeksiyalarda o‘zgaruvchan qiymat bo‘lib, u kenglikka bog‘liq, ya’ni $q = f_2(\varphi)$. Agar X o‘qi o‘q meridian bilan ustma-ust qo'yilsa, unda U o'qi ekvator chizig'i bilan mos tushadi, bunda:

$$x = q - \rho\cos\delta; \qquad y = \rho\sin\delta$$

To'g'ri burchakli koordinatalar tenglamasini differensiyallab:

$$x_\varphi = q_\varphi - \rho_\varphi \cos\delta + \delta_\varphi \rho\sin\delta;$$

$$x_\lambda = \delta_\varphi \rho\sin\delta;$$

$$y_\varphi = \rho_\varphi \sin\delta + \delta_\varphi \rho\cos\delta;$$

$y_\lambda = \delta_\lambda \rho\cos\delta$, bundan (20) va (32) formulalarni inobatga olib:

$$tg\varepsilon = -f/h;$$

$$f = \rho\sigma_\lambda(q_\varphi \sin\delta + \rho\delta_\varphi);$$

$$h = \rho\delta_\lambda(q_\varphi \cos\delta + \rho_\varphi);$$

$$tg\varepsilon = -\frac{q_\varphi \sin\delta + \rho\delta_\varphi}{q_\varphi \cos\delta - \rho_\varphi}$$

Proyeksiyaning boshqa formulalari:

$$n = \sqrt{g/r} = \rho\delta_\lambda / r;$$

$$p = \frac{h}{Mr} = \rho\delta_\lambda \frac{q_\varphi \cos\delta - \rho_\varphi}{Mr};$$

$$m = \frac{p}{n}\sec\varepsilon = \frac{q_\varphi \cos\delta - \rho_\varphi}{M}\sec\varepsilon;$$

$$tg\frac{\omega}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m^2 + n^2 - 2p}{p}};$$

$$a = (A+B)/2; \qquad b = (A-B)/2 \qquad \text{bunda}$$

$$A = \sqrt{m^2 + n^2 + 2p}; \qquad B = \sqrt{m^2 + n^2 - 2p};$$

Yarim konusli proyeksiyalar xatoliklar xarakteri bo'yicha teng burchakli, teng maydonli va ixtiyoriy turlarda bo'lishi mumkin, biroq nisbatan ko'p holatlarda ixtiyoriy proyeksiyalardan foydalaniladi. Ixtiyoriy yarim konusli proyeksiyalar ko'pincha mayda masshtabli dunyo kartalarini tuzishda ishlatiladi. Bu proyeksiyalarni hisoblashda raqamli (sonli) tahlil usulidan keng foydalaniladi. Yuqorida ta'kidlab o'tilganidek, yarim konusli proyeksiyalar – oddiy va murakkab turlarga bo'linadi.

Oddiy proyeksiyalar sifatida – oddiy yarim konusli proyeksiyani olish mumkin. Murakkab yarim konussimon proyeksiyalar sifatida doiraviy proyeksiyalar, N.A. Urmayeva proyeksiyasi, G.A. Ginzburg proyeksiyasi (SNIIGAaK) kabilarni keltirish mumkin. Yarim konusli proyeksiyalarni izlashda grafikli tahlil usulidan foydalaniladi *(52-§ ga qarang).*

50-§. Oddiy yarim konusli proyeksiya

Oddiy yarim konusli proyeksiyani olish uchun qo'shimcha shartlar belgilanadi:

– parallellar radiusi – $\rho = Nctg\varphi$ ushbu parallellar bo'yicha ellipsoidga (sharga) urinma asosida hosil bo'lgan konusga teng;

– barcha parallellarning uzunligi xatosiz uzatiladi $(n = 1)$;

– o'q meridan xam o'z uzunligini saqlab qoladi $(m_0 = 1)$.

Birinchi va ikkinchi shartlar asosida:

$$n = \frac{\rho \partial \delta}{r \partial \lambda} = 1, \text{ bundan}$$

$\partial \delta = \frac{r}{\rho} \partial \lambda,$ integrallashdan so'ng:

$\partial = \frac{r}{\rho} \lambda + F(\varphi),$ bunda $F(\varphi)$– kenglikning ixtiyoriy funksiyasi.

Agar $\lambda = 0, \delta = 0$ bo'lganda, unda $F(\varphi) = 0$ va

$$\delta = \frac{r}{\rho} \lambda.$$

r va ρ qiymatini qo'yib, quyidagini olamiz:

$\delta = \lambda \sin \varphi.$

$m_0 = 1$ sharti parallellar markazi abssissalari q ni aniqlash uchun xizmat qiladi. Agar o'q meridian uzunligi xatoliksiz tasvirlansa, unda:

$q = \rho + s = Nctg\varphi + s,$ bunda s – ekvatordan berilgan parallelgacha bo'lgan meridian uzunligi. Unda oddiy yarim konusli proyeksiya tenglamalari quyidagicha bo'ladi:

$$x = s + Nctg\varphi(1 - \cos\delta) = s + Nctg\varphi[1 - \cos(\lambda \sin\varphi)];$$
$$y = Nctg\varphi \sin\delta = Nctg\varphi \sin(\lambda \sin\varphi);$$

$$\rho = Nctg\varphi; \qquad \delta = \lambda \sin\varphi;$$
$$q = Nctg\varphi + s.$$

Oddiy yarim konusli proyeksiya uchun $tg\,\varepsilon$ xususiy masshtablar va burchak xatoligi formulalarini qoidaga ko'ra yarim konusli proyeksiyalar umumiy formulalaridan olamiz. Qiymatlarni qo'yamiz:

$$\rho_\varphi = -M - Nctg^2\varphi,$$
$$q_\varphi = Nctg^2\varphi;$$
$$\delta_\varphi = \lambda\cos\varphi$$

(181) formuladan:

$$tg\varepsilon = -\frac{-Nctg^2\varphi\sin\delta + N\lambda ctg\varphi\cos\varphi}{-Nctg^2\varphi\cos\delta + M + Nctg^2\varphi} = -\frac{\lambda\sin\varphi - \sin\delta}{(M/N)ctg^2\varphi + 1 - \cos} =$$

$$= -\frac{\delta - \sin\delta}{(M/N)tg^2\varphi + 2\sin^2\delta/2}$$

$$P = N\cos\varphi\frac{-Nctg^2\varphi\cos\delta + M + Nctg^2\varphi}{Mr} = 1 + \frac{N}{M}ctg^2\varphi(1-\cos\delta) =$$

$$= 1 + 2\frac{N}{M}ctg^2\varphi\sin^2\frac{\delta}{2}$$

$$m = \left(1 + 2\frac{N}{M}ctg^2\varphi\sin^2\frac{\delta}{2}\right)\sec\varepsilon.$$

$$tg\frac{\omega}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m^2 + n^2 - 2p}{p}}$$

Olingan formulalardan xulosa shuki, oddiy yarim konusli proyeksiyada xatolik kenglik va uzoqlikka bog'liq bo'ladi; izokolalar ko'rinishi o'q meridianga simmetrik bo'lgan egrilar. Bu proyeksiyada meridianlar bo'yicha cho'zilgan hududlarni eng kam xatolikda ifodalasa bo'ladi. Oddiy yarim konusli proyeksiyaning kamchiligi parallellarning katta miqdordagi egriligi (ayniqsa yuqori kengliklarda) va meridianlar uzunligi, maydon hamda burchak xatoliklarining o'q meridiandan uzoqlashib borgan sari sezilarli darajada oshib borishidir *(4-jadval)*.

O'q meridian yaqinida xatolik sekin oshib boradi, masalan, 30^0 kenglik polosalar uchun $U_m = U_p \leq 3.4\%$, $\omega = 2^0$ keyinchalik ancha tez ortadi va ekvatorni $\lambda = \pm 90°$ uzoqlikdagi meridian bilan kesishish nuqtasida quyidagi qiymatni oladi:

$$\upsilon_m = \upsilon_p \leq 123\% \qquad \omega = 44.9^0$$

Hozirgi vaqtda yirik hududlarni kartaga olishda oddiy yarim konusli proyeksiyalardan deyarli foydalanilmaydi, bunda kartografik to'rning xomaki chizmalari (*eskizi*) grafikli tahlil usulida qurilgan yarim konusli proyeksiyalar ma'qul ko'riladi.

4-jadval

Oddiy yarim konusli proyeksiya meridianlari uzunlik xususiy masshtabi va burchak xatoligi qiymatlari

φ, gradus	Belgisi	λ. gradus				
		0	15	30	60	90
0	m	1,000	1,034	1.137	1,548	2,231
	ω, gradus	0.0	1.9	7.4	24.9	44,9
15	m	1.000	1.032	1,128	1.509	2.141
	ω, gradus	0,0	1.8	6.9	23,5	42,8
30	m	1.000	1.026	1.102	1.404	1,894
	ω, gradus	0.0	1.5	5,6	19,6	36,7
GO	m	1.000	1.009	1.034	1,129	1,270
	ω, gradus	0.0	0.5	1.9	7,2	14,1
90	m	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	ω, gradus	0.0	0,0	0.0	0.0	0,0

Oddiy yarim konusli proyeksiya 1:1 000 000 masshtabdagi Xalqaro dunyo kartasi asosiy proyeksiyasi sifatida tanlab olingan. AQSHda oddiy yarim konusli proyeksiyalar "Qirg'oq hududi va geodezik syomkaga olish ishlari boshqarmasida" nisbatan yirik masshtabli topografik kartalarni tuzishda foydalaniladi, shu sababli oddiy yarim konusli proyeksiyani ba'zi holatlarda Amerika proyeksiyalari ham deyishadi. Oddiy yarim konusli proyeksiyalardan trapetsiya yoki meridian zonalarini tasvirlashda foydalaniladi, ularning kengligi, odatda, olti gradusdan oshmaydi, ya'ni o'q meridiandan hisoblanadigan uzoqlik kam qiymatga ega ($\lambda \leq 3^{\circ}$). Shu sababli, bu proyeksiyalarda formulalarni keltirib chiqarishda ajratilgan qatorlardan foydalanish mumkin, bu chegaralangan ajratishlar tarkibida λ^2 va λ^3 qismlarga ega bo'ladi.

51-§. Tor meridian zonasi uchun oddiy yarim konusli proyeksiya

Qatorlar nazariyasidan ma'lumki,

$$\sin\delta = \sin(\lambda\sin\varphi) = \lambda\sin\varphi - \frac{\lambda^3}{6}\sin^3\varphi + ...;$$

$$\cos\delta = \cos(\lambda\sin\varphi) = 1 - \frac{\lambda^2}{2}\sin^2\varphi + ...;$$ unda

$$1 - \cos\delta = \frac{\lambda^2}{2}\sin^2\varphi + ...;$$

Oxirgi olingan natijalarni (180) formulaga qo'yib, quyidagilarni olamiz:

$$x = s + \frac{\lambda^2}{2}N\cos\varphi\sin\varphi...; \quad ;$$

$$y = \lambda N\cos\varphi - \frac{\lambda^3}{6}N\cos\varphi\sin^2\varphi....;$$

Tor zona uchun $M \approx N$ qabul qilinsa, unda:

$$tg\varepsilon = -\frac{\lambda^3\sin^3\varphi}{6tg^3\varphi} = -\frac{\lambda^3}{6}\sin\varphi\cos^2\varphi$$ bundan

$$\varepsilon'' = -\frac{\left(\lambda^0\right)^3}{6}\frac{\rho''}{\left(\rho^0\right)^3}\sin\varphi\cos^2\varphi....; \quad ;$$

Lekin

$$\rho''/6\left(\rho^0\right)^3 = 0.18'',$$ natijada,

$$\varepsilon'' = -0.18''\left(\lambda^0\right)^3\sin\varphi\cos^2\varphi....$$

$\lambda \leq 3^{\circ}$ bo'lganda e'' qiymati ikki sekunddan oshmaydi, shu sababli olti gradusli zona uchun tuzilgan oddiy yarim konusli proyeksiya kartografik to‘rini amaliy jihatdan ortogonal desa bo‘ladi, unda:

$$p = m = 1 + \frac{(\lambda^0)^2}{2(\rho^0)^2}\cos^2\varphi, \quad \text{chunki}$$

$$1/2(\rho^0)^2 = 0.000152, \qquad \text{unda:}$$

$$p = m = 1 + 0.000152(\lambda)^2\cos^2\varphi$$

(183) formuladan foydalanib, quyidagilarni olamiz:

$$tg\frac{\omega}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m^2+1-2m}{m}} \approx \frac{m-1}{2}.$$

$$\omega' = \frac{\rho'}{(\rho^0)^2}\frac{(\lambda^0)^2}{2}\cos^2\varphi....;$$

Lekin $\rho'/2(\rho^0)^2 = 0.52'$ unda

$$\omega' = 0.52'(\lambda^0)^2\cos^2\varphi$$

Bu proyeksiyalarda barcha turdagi xatoliklar o‘q meridiandan uzoqlashishi hamda kenglik qiymati kamayishi bilan ortib boradi; maksimal xatolik zonalarning chetki meridianlarining ekvator bilan kesishish nuqtalarida kuzatiladi, bunda quyidagi tenglik amal qiladi:

$$\upsilon_m = \upsilon_p = 0{,}14\%; \quad \omega = 4{,}7'.$$

52-§. Dunyo kartalarini tuzish uchun kartografik to‘r eskizlari bo‘yicha olingan ixtiyoriy yarim konusli proyeksiyalar

Proyeksiyalarni olishning turli xil usullari bilan bir qatorda, nuqtalar koordinatalari va xatoliklarni aniqlashni raqamli tahlil usulidan ham foydalaniladi. Matematik kartografiyada raqamli (sonli) tahlil usulidan foydalanish g‘oyasini N.A. Urmayev taklif etgan. U raqamli tahlil usuli va yaqinlashtirish nazariyasi hamda interpolyatsiya funksiyalaridan foydalanib, kartografik to‘rlar eskizlari bo‘yicha proyeksiyalarni olish nazariyasini ishlab chiqdi. G.A. Ginzburg tomonidan esa dunyo kartasi uchun ixtiyoriy yarim konusli proyeksiyalarni olish usuli ishlab chiqilgan.

Bu usulning mohiyati quyidagicha: dastlab, tavsifga ko'ra va tasvirlanayotgan hudud bo'yicha xatoliklarning tahminiy taqsimlanishi asosida u yoki bu talablarni qoniqtiruvchi kartografik to'r eskizi (xomaki nusxasi) tuzib chiqiladi. So'ngra tuzib chiqilgan eskiz asosida to'rning tugun nuqtalari koordinatalari, uzunlik, maydon va burchak xatoligi aniqlanadi, ya'ni yaqinlashtirilgan tahliliy proyeksiya ifodasi topiladi. Bunda proyeksiya tenglamasi berilmaydi, koordinatalar raqamli qiymatlari jadvali bilan cheklaniladi.

Ko'rsatib o'tilgan usulda dunyo kartasi uchun proyeksiyalarni ishlab chiqishda yarim konusli proyeksiyalar tanlab olingan, bu proyeksiyalar to'rining transformatsiyasi nisbatan ma'lum bo'lgan moslashish xususiyatiga egaligi va berilgan topshiriqqa nisbatan yuqori darajada javob berishi, yangi to'rlar eskizlarini tuzib chiqish uchun xatoliklar qiymatlarining taqsimlanishi va ayrim qiymatlarning o'zgarishga ega bo'lishi xarakterlanadi. Proyeksiyani ishlab chiqishni ikkita bosqichga bo'lish mumkin: to'r eskizini tuzib chiqish va eskizni matematik jihatdan qayta ishlash.

To'r eskizini tuzib chiqish

Eskizni ishlab chiqishda quyidagilar aniqlanadi: to'rning ekvator va o'q meridianga nisbatan simmetrikligi, to'rning o'q meridiani (kartada materiklar o'zaro joylashishiga ta'sir ko'rsatadi), o'q meridian va to'r parallellari bo'linishi, qutblar tasvirlanishi (nuqtalar yoki chiziqlar bilan), qutb chiziqlari uzunligi, xatoliklarning taqsimlanishi, xarakteri va boshqalar.

Bitta yoki ikkita boshlang'ich proyeksiyalar variantini asosiy deb tanlab olib va unda tegishli o'zgartirishlarni kiritish bilan millimetrli qog'ozda mayda masshtabda meridianlar va parallellar to'rlarining eskizi tuzib chiqiladi. To'rni ratsional transformatsiyalash va eskizni berilgan talablar asosida takomillashtirish uchun boshlang'ich proyeksiyaning xossalarini, xatoliklarning taqsimlanishi va to'rning ko'rinishi bilan xatolikning bog'liqligi haqidagi talablarni yaxshi bilish kerak.

Parallellarni qurishda to'g'ri chiziqli o'q meridian bo'yicha uzunlik masshtabining umumiy holati juft ko'phad bilan berilishi mumkin:

$m_0 = a_0 + a_2\varphi^2 + a_4\varphi^4 + ...,$ amaliy masalalarni yechish uchun qatorda ikkinchi had bilan cheklansa ham bo'ladi;

$m_0 = a_0 + a_2\varphi^2 + ...,$ agar, ikkita kenglik uchun m masshtab berilgan bo'lsa, bunda a_0 va a_2 koeffitsiyentlar topilishi mumkin. U holda o'q meridianning abssissa nuqtalari:

$$x_0 = a_0\varphi + \frac{a_2}{3}\varphi^3.$$

$m_0 = 1$ shart bajarilgan holatda

$x_0 = R\varphi\mu_0$, bu yerda μ_0 – kartaning masshtabi.

Boshlang'ich proyeksiya varianti to'rlari bo'yicha talab qilingan tegishli tahlillar amalga oshirilgandan so'ng, o'q meridianning aniqlangan bo'linish nuqtasi orqali aylanaga yaqin bo'lgan, silliq ko'rinishdagi egri chiziqlar – parallellar o'tkaziladi. Bunda parallellarning egrilik qiymati ortishi burchak xatoligi qiymati kamayishiga va maydon xatoligi qiymatining ortishiga olib kelishini hisobga olish kerak. Meridianlarni o'tkazish quyidagi tartibda amalga oshiriladi. Agar parallellar teng bo'lingan bo'lsa, u holda nisbatan qulay holatni belgilab olish orqali va chetki meridianlarning konturi ($\lambda = 180°$) bo'ylab parallellar teng qismlarga bo'lib chiqiladi va qolgan meridianlar o'tkaziladi.

Chetki meridianlarni chizishda masshtabi $n_k = 1$ ga teng bo'lgan φ_k parallel kengligini belgilab olish qulay. Kenglikni bilish orqali o'q meridiandan chetki meridiangacha bo'lgan ushbu parallelning yoyi uzunligini aniqlash mumkin – $s_n = \pi R \cos\varphi_k$. n masshtab qiymati belgilanishi ham mumkin. Chetki meridianning nisbatan qulay holatda chizilishi uchun proyeksiyaning boshlang'ich variantlari to'rlari tahlil qilib chiqiladi. Birlamchi eskiz asosida xususiy masshtablar va burchak xatoligi aniqlanadi.

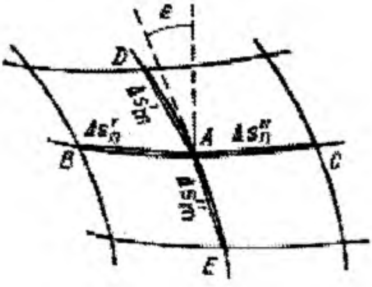
Bunda bevosita o'lchash yo'li bilan $\Delta s'm$, $\Delta s''m$ va $\Delta s'n$, $\Delta s''n$ xorda qiymatlari aniqlanadi *(51-rasm)*.

Xususiy masshtablar – m va n qiymatlarni aniqlash formulasi:

$$m \approx (\Delta s'_m + \Delta s''_m)/(2\Delta s_m \mu_0);$$

$$n \approx (\Delta s'_n + \Delta s''_n)/(2\Delta s_n \mu_0),$$

bu yerda Δs_m va Δs_n – yer yuzasida tegishli yoylarning kesmalari.



51-rasm. **m va n qiymatlarni aniqlash chizmasi**

Burchak i va ε to'g'ridan-to'g'ri o'lchash orqali aniqlanadi.

m, n, i qiymatlarni bilish orqali maydon xususiy masshtabini – p va burchak xatoligi – ω qiymatini topish mumkin. Odatda, bu aniqlash yaqinlashtirish asosida nomogrammadan foydalanish bo'yicha amalga oshiriladi. Olingan qiymatlar tarkibida p bo'yicha 2 – 3% gacha va ω - 2 – 3° gacha xatolik bo'lishi mumkin.

To'rning ba'zi nuqtalaridagi xatoliklar qiymatini bilish orqali yaqinlashtirilgan izokolalarni tuzib chiqish mumkin, ular murakkab egri chiziqlardan tashkil topadi. Agar olingan xatoliklar qiymatlari va ularning taqsimlanishi qo'yilgan talablarni qoniqtirmasa, u holda eskizga tuzatmalar kiritiladi. Misol sifatida 1950-yilda SNIIGAiK tomonidan ishlab chiqilgan yarim konusli proyeksiyani qarab chiqamiz. Bu proyeksiyadan o'rta maktab o'qituvchilari atlasidagi dunyoning siyosiy kartasini tuzishda foydalanilgan.

Proyeksiyani ishlab chiqishda meridian va parallellar to'rlari o'q meridian va ekvatorga nisbatan simmetrik degan shart qo'yiladi, shuningdek, o'q meridian va parallellar teng bo'linganligi qayd qilinadi. Parallellar, jumladan qutb yaqinida joylashgan parallellar kam miqdorda egrilikka ega bo'lishi kerak. Xatoliklarga nisbatan belgilangan asosiy talablar shundan iboratki, maydon xatoligi quruqlikning muhim uchastkalari uchun 100% dan oshmasligi, shuningdek, shakl xatoligi ham yirik bo'lmasligi kerak.

Eskizni matematik qayta ishlash

Eskizning matematik jihatdan qayta ishlanishining maqsadi – to'rning tugun nuqtalari to'g'ri burchakli koordinatalarini aniqlash va xatoliklar qiymatini topishdan iborat. Buning uchun boshlang'ich ma'lumotlar tuzib chiqilgan eskizdan olinadi. Eskizni qayta ishlash matematik apparati N.A. Urmayeva tomonidan ishlab chiqilgan.

1. *To'g'ri burchakli koordinatalarni hisoblash*

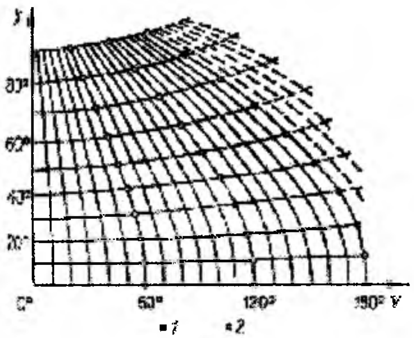
Dastlab o'rtamiyyona boshlang'ich tugun nuqtalar koordinatalari aniqlanadi, so'ngra interpolyatsiya va ekstropolyatsiya usullari orqali to'rning boshqa tugun nuqtalari koordinatalari topiladi. Hisoblash quyidagicha olib boriladi:

– chetki meridian ($\lambda = 180^0$) boshlang'ich tugun nuqtalari koordinatalarini to'g'rilangan qiymatlari hisoblab chiqiladi (52-rasm);

– ushbu meridianning qolgan tugun nuqtalari koordinatalarini aniqlash uchun belgilangan qiymatlar interpolyatsiya va ekstrapolyatsiya yo'li bilan topiladi;

– asosiy oraliq meridianlar nuqtalari koordinatalari hisoblanadi;

– to'rning qolgan tugun nuqtalari koordinatalarini aniqlash uchun barcha ma'lumotlar interpolyatsiya va ekstrapolyatsiya yo'li bilan topiladi.



52-rasm. **SNIIGAiK yarim konusli proyeksiyasida *x* va *u* koordinatalar qiymatini hisoblash chizmasi.** *Bu yerda 1 – chetki meridianning boshlang'ich tugun nuqtalari; 2 – oraliq meridianlarning tugun nuqtalari*

$\lambda = 180^\circ$ *meridian boshlang'ich tugun nuqtalari koordinatalarining to'g'rilangan qiymatini hisoblashda* boshlang'ich sifatida teng bo'lingan o'q meridian tugun nuqtalari va ekvator qabul qilinadi, ularning koordinatalari chizma bo'yicha aniqlanadi. Agar, o'q meridianga nisbatan 180° chetki meridianning nuqtalari koordinatalari aniq bo'lsa, to'r ekvatorga nisbatan simmetrik holatda, yarim konusli proyeksiya o'q meridiani va bo'lingan parallellari aniqlanadi. Chetki meridianda boshlang'ich tugun nuqtalarni tanlashda bunday nuqtalar soni uncha ko'p bo'lmasligi asosida meridianning yakuniy holatdagi tasviri eskiz holatidan farq qilinishi hisobga olinadi. Biroq, boshlang'ich sifatida qancha kam nuqta olinsa, qolgan tugun nuqtalarning to'g'rilangan koordinatalarini olish shunchalik darajada osonlashadi, chunki ushbu meridian bo'yicha keltirilgan nuqtalar koordinatalarini ko'phad daraja tartibi belgilaydi va u past darajada bo'ladi.

Chetki meridianning boshlang'ich nuqtalari sifatida 0°, 20°, 40°, 60° va 80° (5 ta nuqta) kenglik nuqtalar qabul qilinishi ancha qulay. Berilgan beshta nuqta orqali o'tuvchi meridian ekvatorga nisbatan simmerik holatda joylashadigan abssissa tenglamasini toq ko'phadni 7-darajada ifodalash, ordinata tenglamasini – juft ko'phadli 8-darajasida ifodalash mumkin:

$$x = a_1\varphi + a_3\varphi^3 + a_5\varphi^5 + a_7\varphi^7;$$

$$y = a_0 + a_2\varphi^2 + a_4\varphi^4 + a_6\varphi^6 + a_8\varphi^8.$$

Eskizdan hosil qilingan, boshlang'ich nuqtalar abssissasi va ordinatalarining qiymatlari kvadrat yaqinlashtirish usuli bo'yicha to'g'rilanadi. Bu usuldan foydalanishda ko'phad darajasini pasaytirishga harakat qilinadi, ya'ni meridianning birmuncha to'lqinsimonligi silliqlanadi. Agar abssissa ko'phadi 5-daraja bilan, ordinata 6-daraja bilan belgilansa, u holda oltinchi (abssissa uchun) va yettinchi (ordinata uchun) ayirmalar nolga teng bo'ladi. Chetki meridian boshlang'ich nuqtalarini olishni qarab chiqamiz. Yettinchi darajali ayirma:

$$f_{0,5}^{VII} = 35f_0 - 56f_1 + 28f_2 - 8f_3 + f_4,$$

bu yerda f_i – ordinata qiymati.

Bu tenglamani no'lga tenglashtirish orqali yagona shartli tenglamani hosil qilamiz:

$$a_0f_0 + a_1f_1 + a_2f_2 + a_3f_3 + a_4f_4 = 0,$$ bu yerda koeffitsiyentlar

$$a_0 = +35,\ a_1 = -56,\ a_2 = +28,\ a_3 = -8,\ a_4 = +1$$

Agar bu tenglamaga ordinatalar o'lchangan qiymati qo'yilsa, unda $f = y_{izm}$ bunda uning chap tomoni no'lga teng bo'lmaydi, unda:

$$[af] = w.$$

$\upsilon_0, \upsilon_1, \upsilon_2 ......$ tuzatmalarni ordinatalar o'lchangan qiymatlari bo'yicha quyidagicha topish mumkin:

$$\upsilon_0^2 + \upsilon_1^2 + \upsilon_2^2 + ... = \min .$$

Demak, korrelata k bo'yicha ifodalangan tuzatmalar tenglamalari

$$\upsilon_0 = a_0 k, \qquad \upsilon_1 = a_1 k, \qquad \upsilon_2 = a_2 k, ...$$

Aniq bo'lmagan ko'phadning – korrelataning qiymati normal tenglamalarni yechish orqali aniqlanadi:

$$[aa]k + W = 0; \qquad k = -W/[aa].$$

k ni bilib, v tuzatmalarning qiymatlarini va ordinatalarning to'g'rilangan qiymatlarini hisoblash mumkin *(5-jadval).*

Tekshirish:

$$[av] = -[af] = -W$$

$$W = [af] = +2.8; \qquad [aa] = 5210; \qquad [av] = -2.8$$

$$k = -W/[aa] = -2.8/5210 = -0.000537$$

Xuddi shunday to'g'rilangan abssissalar qiymatlari ham topiladi, bunda oltinchi daraja ayirmasi no'lga tenglanadi:

$$f_1^{v1} = -14f_1 + 14f_2 - 6f_3 + f_4 .$$

Tenglashtirishdan keyin ordinatalar oltinchi va abssissalar beshinchi farqlari doimiy qiymatlar bo'ladi, bu esa tenglashning to'g'ri bajarilganligini bildiradi *(5-jadval).*

5-jadval

Ordinatalarning to'g'rilangan qiymatlarini hisoblash

φ gradusda	f. mm=y o'lch.	a	af	aa	$v = ak$	av	y. mm=y o'lch+v
0	266,5	+35	+9 327,5	1225	-0,02	-0,70	266,48
20	256,2	–56	–14 347,2	3136	+0,03	–1,68	256,23
40	228.2	+28	+6 389,6	784	-0,01	-0,42	228,18
60	187,9	-8	-1 503.2	64	0	0	187,90
80	136,1	+1	+136.1	1	0	0	136.10

Chetki meridianning qolgan boshqa nuqtalari koordinatalarini olish uchun interpolyatsiya va ekstrapolyatsiya usulida chetki meridianning abssissa va ordinatalari qiymatlari yakuniy sifatida qabul qilinadi, bunda 10° kenglik oraliqlarida joylashgan chetki meridianning oraliq nuqtalari koordinatalari aniqlanadi. Bunda Stirling interpolyatsiya formulasidan foydalanish qulay. Shuningdek, 20° kenglik oraliqlari bo'yicha mos keluvchi f qiymatning boshlang'ich farqlari bo'yicha 10° kenglik oraliqlariga mos keluvchi yangi ψ farqlanish boshlang'ich qiymatlari aniqlanadi.

Interval ulushi $n = 10^0/20^0 = 0.5$ bo'lganda juft funksiyalar (ordinatalar) uchun:

$$\psi_0^{II} = 0.250000 f_0^{II} - 0.015625 f_0^{VI} + 0.001953 f_0^{VI};$$

$$\psi_0^{IV} = \quad -0.062500 f_0^{IV} \quad -0.007812 f_0^{IV}$$

$$\psi_0^{VI} = \quad -0.015625 f_0^{IV}.$$

n = 0,5 bo'lganda toq funksiyalar (abssissalar) uchun

$$\psi_{0.5}^{I} = 0.500000 f_0^{I} - 0.062500 f_0^{III} + 0.001719 f_0^{V};$$

$$\psi_{0.5}^{I} = 0.500000 f_0^{I} - 0.062500 f_0^{III} + 0.001719 f_0^{V};$$

$$\psi_{0.5}^{III} = \quad -0.125000 f_0^{III} + 0.023438 f_0^{V}$$

$$\psi_0^{V} = \quad +1,031250 f_0^{V}.$$

Har 10° kenglikda chetki meridian ordinata nuqtalarini olishni qarab chiqamiz. Dastlab 20^0 kenglik oraliqdagi ordinatalar farqining boshlang'ich qiymatlari olinadi *(6-jadval).*

Yangi dastlabki ayirma uchun:

$$\psi_0^{II} = 0.250000(-20.500) - 0.015625(+5.410) + 0.001953$$
$$(-5.120) = -5.2195$$

$$\psi_0^{IV} = 0.3781; \qquad \psi_0^{VI} = -0.0800.$$

Juft funksiyalar xususiyati bo'yicha:

$$\psi_{0.5}^{V} = 0.5\psi_0^{VI} = -0.0400$$

$$\psi_{0.5}^{III} = 0.5\psi_0^{IV} = +0.1890;$$

$$\psi_{0.5}^{I} = 0.5\psi_0^{II} = -2.6098$$

6-jadval

20° kenglik bo'yicha chetki meriadian nuqtalari ordinatalari farqli qiymatlari

φ gradus	y, mm	f_0^I	f_0^{II}	f_0^{III}	f_0^{IV}	f_0^V	f_0^{VI}	f_0^{VII}
0	266.480		-20.500		+5.410		-5.120	
		-10.250		+2.705		-2.560		
20	256.230		-17.795		+2.850		-5.120	
		-28.045		+5.555		-7.680		
40	228.185		-12.240		-4.830			
		-40.285		+0.725				
60	187.900		-11.515					
		-51.800						
80	136.100							

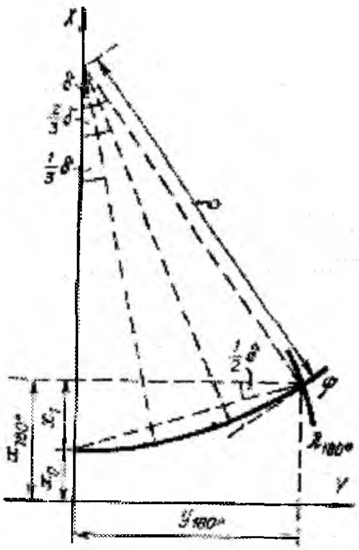
Oltinchi ayirma o'zgarmaslini e'tiborga bo'lib, o'ng tomonda joylashgan ustunlardan chap tomonga yo'nalishda beshinchi, to'rtinchi, uchinchi va hokazo tartib asosidagi ketma-ketlikda yig'indini olish mumkin *(7-jadval)* va nihoyat, ordinatalarning asl qiymati aniqlanadi. y_{90° ordinata qiymati ekstrapolyatsiya yo'li bilan aniqlanadi (qavsda keltirilgan sonlar).

7-jadval

10° kenglik oraliqlari bo'yicha chetki meridian nuqtalari ordinatalarini hisoblash

φ gradus	u, mm	ψ^i	ψ^{II}	ψ^{III}	ψ^{IV}	ψ^V	ψ^{VI}
0	266.48		-5.2195		+0.3781		-0.8800
		-2.6098		+0.1890		-0.0400	
10	263.87		-5.0305		+0.3381		
		-7.6403		+0.5271		-0.1200	
20	256.23		-4.5034		+0.2181		
		-12.1437		+0.7452		-0.2000	

30	244.09		-3.7582		+0.0181		
		-15.9019		+0.7633		-0.2800	
40	228.18		-2.9949		-0.2619		
		-18.8968		+0.5014		-0.3600	
50	209.29		-2.4935		-0.6219		
		-21.3903		-0.1205		-0.4400	
60	187.90		-2.6140		-1.0619		
		-24.0043		-0.1824		(-0.5200)	
70	163.89		-3.7964		(-1.5819)		
		-27.8007		(-2.7643)			
80	133.09		(-6.5607)				
		(-34.3614)					
90	(101.73)						



53-rasm. **Asosiy oraliq meridianlarda ($\lambda = 60^\circ$ va $\lambda = 120^\circ$) nuqtalar x va u koordinatalarini aniqlash chizmasi**

Asosiy oraliq meridianlarda tugun nuqtalar koordinatalarini hisoblash quyidagicha amalga oshiriladi. Har bir parallelda o‘q ($\lambda = 0$) va chetki ($\lambda = 180^\circ$) meridianlar nuqtalarining to‘g‘ri burchakli koordinatalarini bilish orqali, trigonometriya formulalari bo‘yicha ikkita asosiy oraliq meridianlarda ($\lambda=60°$ va $\lambda=120°$) nuqtalar koordinatalari topiladi.

Parallellar aylananing teng bo'lingan yoylaridan tashkil topgan, parallellarning asosiy tugun nuqtalarida δ va ρ qutb koordinatalarini osonlik bilan olish mumkin.

λ = 180' meridian nuqtalari uchun *(53-rasm)* δ va ρ qimatlarini quyidagi formulalar bilan topish mumkin:

$$\tan(\delta_{180^0}/2)=x_1/y_{180^0}$$

$$\rho=y_{180^0}\operatorname{cosec}\delta_{180^0}, \text{ bunda:}$$

$$x_1=x_{180^0}-x_o$$

ρ ning qiymati har bir parallel uchun o'zgarmas, asosiy oraliq meridianlar nuqtalari uchun σ ni quyidagicha olish mumkin:

$$\delta_{60^0}=1/3\delta_{180^0};\quad \delta_{120^0}=2/3\delta_{180^0};$$

to'g'ri burchakli koordinatalarni esa mana bu formulalardan olamiz:

$$x=x_o+\rho(1-\cos\delta), y=\rho\sin\delta$$

Barcha qolgan tugun nuqtalar koordinatalarini aniqlash uchun interpolyatsiya va ekstrapolyatsiya metodida har bir parallelni to'rtta tayanch nuqtalar oralig'ida beshta nuqtani belgilab olish kerak. Buning uchun ham $n=10°/60°=1/6$ bo'lganda uzunlik funksiyasining juft bo'lmagan (ordinatalar) va juftligi (abssissa) uchun Stirling formulalaridan foydalaniladi. Abssissalar uchun

$$\psi_0^{II}=0.027778f_0^{II}-0.002250f_0^{IV}+0.000298f_0^{VI};$$

$$\psi_0^{IV}=\qquad -0.000772f_0^{IV}+0.000125f_0^{IV}$$

$$\psi_0^{VI}=\qquad -0.000021f_0^{IV}$$

Ordinatalar uchun:

$$\psi_{0.5}^{I}=0.166667f_{0.5}^{I}-0.027006f_{0.5}^{III}+0.005364f_{0.5}^{V};$$

$$\psi_{0.5}^{III}=\qquad +0.004630f_{0.5}^{III}-0.001125f_{0.5}^{V}$$

$$\psi_{0.5}^{v}=\qquad +0.000129f_{0.5}^{v}$$

2. *Xatolikning aniqlashtirilgan qiymatlarini hisoblash*

Xususiy masshtablar va burchak xatoliklari qiymatlarini aniqlashtirilgan holda hisoblash xatoliklar nazariyasi bo'yicha ma'lum bo'lgan formulalar asosida amalga oshiriladi:

$$m=\frac{1}{R}\sqrt{x_\varphi^2+y_\varphi^2};\qquad n=\frac{1}{R}\sec\varphi\sqrt{x_\lambda^2+y_\lambda^2};$$

$$p = \frac{1}{R^2}\sec\varphi(x_\varphi y_\lambda - x_\lambda y_\varphi);$$

$$tg\frac{\omega}{2} = \sqrt{\frac{m^2+n^2}{4p} - \frac{1}{2}}.$$

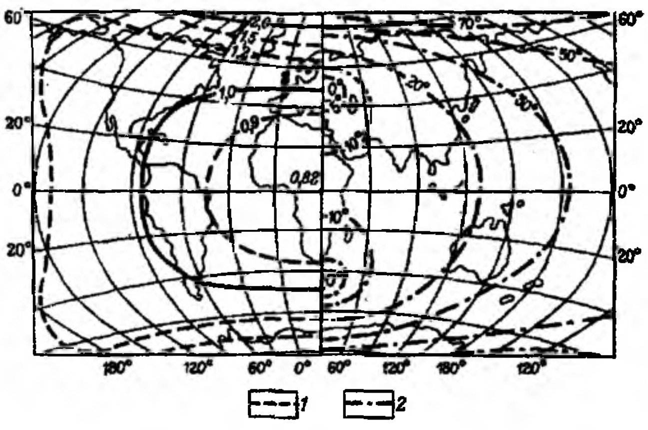
Bunda xususiy hosilalar qiymatini mavjud koordinatalar qiymatlari uchun tuzib chiqilgan ayirmalar jadvali bilan birgalikda sonli differensial formulalar bo'yicha aniqlanadi. Shunday qilib, erkin holatdagi z o'zgaruvchan orqali qandaydir funksiya hosilasining yaqinlashtirilgan qiymati toq farqli qiymatlardan foydalanish bilan quyidagi formula yordamida aniqlanishi mumkin:

$$f(z)_k = \frac{1}{\omega}\left(f_k^I - \frac{1}{6}f_k^{III} + \frac{1}{30}f_k^V - ...\right),$$

bunda ω – funksiyaning o'zaro qo'shni holatda joylashgan oraliqlari qiymatini ifodalaydi ($\omega = arc10^\circ$). Uchinchi had, odatda, hisobga olmaydi. Teng bo'lingan parallellarda uzunlik xususiy masshtabini hisoblash osonlashadi:

$$n = \rho\delta_{180'} / R\pi\cos\varphi.$$

Izokolalarni tuzish uchun 30° uzoqlik va 20° kenglik qiymatidan kam bo'lmagan qator joylashgan nuqtalar xatoligi aniqlanadi. R izokolalari bilan ω qiymati birgalikdagi to'rning ko'rinishi 54-rasmda keltirilgan.



54-rasm. **Dunyo kartasida yarim konusli proyeksiya izokolalari** – *r (1)* va *ω (2).*

Katta Sovet Ensiklopediyasi (BSE) dunyo kartasi, so'ngra dunyo atlasidagi dunyoning siyosiy kartasi uchun foydalanilgan yarim konusli proyeksiyada o'q meridian bo'ylab parallellar o'rtasidagi oraliq qutbga tomon ortib boradi, parallellari – yuqorida qarab chiqilgan variantga nisbatan ko'proq egrilikka ega bo'ladi. Natijada taxminan burchak xatoligi 10° ga kamayishida maydon xatoligi tasvirlanayotgan materiklar doirasida (Antarktidadan tashqari) 180% ga ortishi kuzatiladi.

Dunyoning devoriy kartalari uchun to'rning g'arbiy qismida teng bo'lingan, sharqiy qismida esa – teng bo'linmagan parallellarga ega proyeksiyadan foydalaniladi. Bunda meridianlar oralig'i kamayishi hisobiga Tinch okeani maydoni teng bo'lingan parallellar proyeksiyasidan uncha katta bo'lib tasvirlanmaydi.

To'r eskizlari bo'yicha ixtiyoriy proyeksiyalarni ishlab chiqish usuli V.M. Boginskiy ishlarida rivoj topdi. Kartografik to'r eskizining meridian va parallellarini murakkab egri chiziq bilan tasvirlanuvchi proyeksiyalar uchun ham tuzib chiqish mumkin.

Eskizlarning approksimatsiyalanishi, ya'ni to'rning tugun nuqtalarida to'g'ri burchakli va geografik koordinatalar o'rtasidagi funksional bog'liqlikni aniqlash uchun, ikkita o'zgaruvchan (φ va λ) darajali ko'phaddan foydalaniladi:

$$f(\varphi,\lambda)=\sum_{i=0}^{i=s}\sum_{j=0}^{j=t}k_{ij}\varphi^{i}\lambda^{j},$$

bu yerda $i=0,...,s;$ $j=0,...,t;$ $i+j\le n;$ n – ko'phad darajasi; k_{ij} – doimiy koeffitsiyentlar.

Agar kartografik to'r X va Y o'qlariga nisbatan simmetrik bo'lsa, u holda abssissa uzunlikning juft darajali ko'phadi va kenglikning toq darajali ko'phadi bilan, ordinatalar esa – uzoqlikning toq darajali ko'phadi va kenglikning juft darajali ko'phadi bilan ifodalanadi:

$$x=a_1\varphi+a_2\varphi\lambda^2+a_3\varphi^3+...;$$

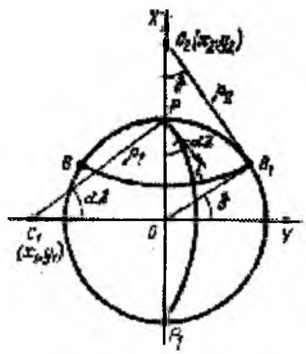
$$y=b_1\varphi+b_2\varphi^2\lambda+b_3\lambda^3+...$$

Doimiy koeffitsiyentlarni (a_i va b_i) topish uchun eskiz bo'yicha to'g'ri burchakli koordinatalar taxminiy qiymati topiladi, ular nisbatan kichik kvadratlar usuli bo'yicha tenglashtiriladi.

53-§. Lagranj proyeksiyasi

Lagranj proyeksiyasini xatolik tavsifi bo'yicha teng burchakli yarim konusli proyeksiyalarning xususiy holati sifatida qarab chiqish mumkin. Bu proyeksiyalarda meridianlar va parallellar ekssentrik aylana yoylari ko'rinishida tasvirlanadi.

Aylana radiusi – k ni tasavvur qilamiz (55-rasm), bunda k – proyeksiyaning birinchi parametri. Aylana diametrlaridan birini λ_0 uzoqlik bilan ifodalanuvchi o'q meridian sifatida qabul qilamiz, uning qiymatini no'lga tenglashtiramiz; bu meridian X o'qi bilan ustma-ust tushadi va asosiy aylanani R va R_1 geografik qutb nuqtalarida kesib o'tadi.



55-rasm. **Lagranj proyeksiyasi koordinatalari tizimi.**

Boshqa barcha meridianlar aylana yoylaridan tashkil topgan bo'lib, qutb nuqtasi orqali o'tadi; ularning markazi φ_1 kenglik qiymatiga ega bo'lgan to'g'ri chiziqli parallellarda joylashadi, Y o'qiga mos tushadi. Qolgan barcha parallellar – aylana yoylari hisoblanib, ularning markazi to'g'ri chiziqli meridianda joylashadi. R va R_1 nuqtalarda meridianga nisbatan urinma o'q meridian bilan $\alpha\lambda$ burchakni hosil qiladi, bu yerda α– proyeksiyaning ikkinchi parametri. Meridianlar va parallellar to'ri ortogonal bo'ladi.

$A(\varphi, \lambda)$ nuqtadan PAP_1 meridian va parallel BAB_1 ni o'tkazamiz; meridian markazi koordinatasi $C_1 - x_1, y_1$, parallellar markazi $C_2 - x_2, y_2$.

Markazi c_1 bo'lgan meridian uchun:

$$x_1 = 0 \qquad y_1 = -kctg(\alpha\lambda); \; p_1 = k \text{ cosec } (\alpha\lambda),$$

bunda p_1 – meridian yoyi radiusi; markazi c_2 parallel uchun:

$$x_2 = k \cos ec(\delta) \qquad y_2 = 0;$$

$p_2 = k \;\; ctg\delta$ bunda p_2 – parallel yoyi radiusi.

Bu formulalarda $\delta = f(\varphi)$ – kenglikning yordamchi funksiyasi. Koordinatalar markazini bilgan holda, meridianlar tenglamasini:

$$x^2 + [y + k \; ctg \;\; (\alpha\lambda)]^2 = k^2 \cos ec^2(\alpha\lambda)$$

va parallellar formulasini tuzamiz:

$$(x - k \text{ cosec } \delta)^2 + y^2 = k^2 ctg^2\delta .$$

So'ngra oson qayta o'zgartirishlardan keyin, quyidagi formulalar olinadi:

$$x^2 + 2ky \; ctg(\alpha\lambda) + y^2 = k^2,$$

$$x^2 - 2ky \cos ec\delta + y^2 = -k^2 .$$

Bularni yechib, proyeksiya to'g'ri burchakli koordinatalarini topamiz:

$$x = \frac{k \sin\delta}{1 + \cos\delta\cos(\alpha\lambda)} \qquad y = \frac{k\cos\delta\sin(\alpha\lambda)}{1 + \cos\delta\cos(\alpha\lambda)}$$

δ funksiyasi Koshi-Riman tenglamasidan foydalanib, teng burchaklilik sharti bo'yicha aniqlanadi (51). Buning uchun $x_\varphi, y_\lambda, y_\varphi$ va y_λ xususiy hosilalarini topamiz va ularni keltirilgan formulalarga qo'yamiz:

$$x_\varphi = x_\delta\delta_\varphi = \frac{k[\cos\delta + \cos(\alpha\lambda)]}{[1 + \cos\delta(\alpha\lambda)]^2}\delta_\varphi;$$

$$x_\lambda = \frac{\alpha k \sin\delta\cos\delta\sin(\alpha\lambda)}{[1 + \cos\delta\cos(\alpha\lambda)]^2}$$

$$y_\varphi = y_\delta\delta_\varphi = -\frac{k\sin\delta\sin(\alpha\lambda)}{[1 + \cos\delta\cos(\alpha\lambda)]^2}\delta_\varphi;$$

$$y_\lambda = \frac{\alpha k\cos\delta[\cos\delta + \cos(\alpha\lambda)]}{[1 + \cos\delta\cos(\alpha\lambda)]^2},$$

Bu tenglamalarni yechib, quyidagilar olinadi:

$$\alpha\cos\delta = \frac{r}{M}\frac{d\delta}{d\varphi} \qquad \text{yoki}$$

$$\frac{d\delta}{\cos\delta} = \alpha\frac{Md\varphi}{N\cos\varphi} .$$

Integrallashgandan so'ng lntg $(45^\circ + \delta/2) = \alpha \ln U + \ln\beta$

Bu yerda β – proyeksiyaning uchinchi parametri. Bundan

$$\operatorname{tg}(45^0+\delta/2)=\beta U^2,$$

bu yerda:

$$U=\frac{tg(45^0+\varphi/2)}{tg^e(45^0+\psi/2)};$$

$$\psi=\arcsin(e\sin\varphi).$$

Proyeksiya teng burchakli, shu sababli meridianlar i parallellar bo'yicha xususiy masshtablar bir-biriga teng:

$$m=n=\frac{1}{r}\sqrt{x^2{}_\lambda+y^2{}_\lambda}\ \text{undan}$$

$$m=n=\frac{\alpha k\cos\delta}{r[1+\cos\delta\cos(\alpha\lambda)]}.$$

Lagranj proyeksiyasida uchta parametr mavjud: α,β va k; ularni aniqlash uchun proyeksiyaning markaziy nuqtasida (φ_0,λ_0) masshtab ekstremal xususiyatga ega sharti belgilanadi. Masshtabning hosilasini olish orqali va uni no'lga tenglashtirish bilan $\lambda_0=0$ qiymatni topamiz:

$$tg(\delta_0/2)=\sin\varphi_0/\alpha. \qquad (190)$$

Keltirilgan oxirgi formulada φ_0 va α qiymatlar ma'lum bo'lsa, δ_0 qiymatni topish imkonini beradi. Asosiy aylana radiusi – k qiymati markaziy nuqtada masshtab – m_0 qiymatini berish orqali aniqlanadi,

$$k=\frac{m_0r_0}{\alpha}(1+\sec\delta_0). \qquad (191)$$

Keltirilgan (*190*) va (*191*) formulalar α parametr qiymati ma'lum bo'lgan holatni o'zida ifodalaydi. Bu parametr markaziy nuqta yaqinida izokolalar shaklini tadqiq qilish yo'li bilan topiladi.

Izokolalar tenglamasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\frac{m}{m_0}-1=\upsilon_m=\left(\frac{1}{2R^2}-\frac{\alpha^2-\sin^2\varphi_0}{4R^2\cos^2\varphi_0}\right)x^2+\frac{\alpha^2-\sin^2\varphi_0}{4R^2\cos^2\varphi_0}y^2,$$

ya'ni izokola ikkinchi darajali markaziy egri chiziqdir.

Agar meridian bo'yicha yo'naltirilgan izokola yarim o'qini a va parallel bo'yicha yo'naltirilgan yarim o'qni –b deb belgilasak, unda:

$$a^2=\frac{1}{1/2R^2-(\alpha^2-\sin^2\varphi_0)/4R^2\cos^2\varphi_0}=\frac{4R^2\cos^2\varphi_0}{2\cos^2\varphi_0+\sin^2\varphi_0-\alpha^2},$$

$$b^2=\frac{1}{(\alpha^2-\sin^2\varphi_0)/4R^2\cos^2\varphi_0}=\frac{4R^2\cos^2\varphi_0}{\alpha^2-sin^2\varphi_0},$$

izokola yarim o'qlari nisbatini p bilan belgilasak, unda:

$$n^2 = \frac{b^2}{a^2} = \frac{2\cos^2\varphi_0 - (\alpha^2 - \sin^2\varphi_0)}{\alpha^2 - \sin^2\varphi_0} = \frac{2\cos^2\varphi_0}{\alpha^2 - \sin^2\varphi_0} - 1 \text{ yoki}$$

$$n^2\alpha^2 - n^2\sin^2\varphi_0 = 2\cos^2\varphi_0 - \alpha^2 + \sin^2\varphi_0.$$

Bundan

$$\alpha = \sqrt{1 + \frac{1-n^2}{1+n^2}\cos^2\varphi_0}. \qquad (192)$$

(*192*) formuladagi α parametr izokola shaklini belgilaydi va bu o'z navbatida xatoliklarning taqsimlanishiga ham ta'sir etadi.

Agar $\alpha = 1$ bo'lsa, u holda izokolalar aylana ko'rinishida, proyeksiya esa – stereografik, $\alpha > 1$ – izokolalar meridianlar bo'ylab cho'zilgan oval, $\alpha < 1$ holatda esa – izokolalar parallellar bo'ylab cho'zilgan oval, $\alpha = 0$ holatda izokolalar parallel chiziqlarga aylanadi, unda teng burchakli silindrik proyeksiya hosil bo'ladi. Lagranj proyeksiyasi izokolalar shaklini boshqarish imkonini beruvchi birinchi proyeksiya hisoblanadi.

Proyeksiyani hosil qilish uchun:

– xohlagan proyeksiya va xohlagan masshtabda tuzib chiqilgan eskiz to'rida tasvirlanayotgan hudud chegaralari doirasida belgilanuvchi izokolalar qayd qilinadi va a, b, n va φ_0 qiymatlar aniqlanadi;

– proyeksiyaning markaziy nuqtasida berilgan masshtab qiymati bo'yicha (m_0) hisoblanadi:

$$tg(\delta_0/2) = \sin\varphi_0/\alpha;$$

$$\beta = tg(45° + \delta_0/2)U_0^{-\alpha};$$

$$k = \frac{m_0 r_0}{\alpha}(1 + \sec\delta_0);$$

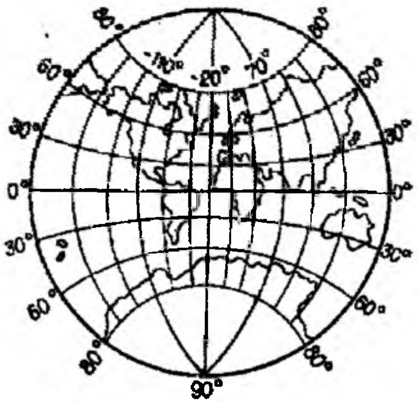
– (*188*) formula bo'yicha har bir parallel uchun δ qiymat aniqlanadi;

– (*187*) va (*189*) formulalar bo'yicha proyeksiyaning har bir nuqtasi uchun to'g'ri burchakli koordinatalar va masshtab hisoblanadi. Barcha meridianlar markazlari joylashgan to'g'ri chiziqli parallel φ_1 kengligini topish uchun (*188*) formuladan foydalanib yordamchi funksiyani aniqlaymiz.

Bu parallelda $\delta = 0$, ya'ni formulaning chap tomoni birga teng. O'ng tomoni esa (shar sirti uchun) teng bo'ladi:

$$\beta U^{\alpha} = \beta tg^{\alpha}(45^0 + \varphi_1/2),$$

bundan: $\quad \mathrm{tg}(45^0 + \varphi_1/2) = \sqrt[\alpha]{\beta}.$



56-rasm. **Lagranj proyeksiyasida kartografik to'rning ko'rinishi**

Nazorat savollari

1. *Yarim konusli proyeksiyalarning umumiy nazariyasini tushuntiring.*
2. *Oddiy yarim konusli proyeksiyani olishda qanday shartlar qo'yiladi?*
3. *Dunyo kartasi uchun ixtiyoriy yarim konusli proyeksiyalarni olish kim tomonidan ishlab chiqilgan? Proyeksiyaning mohiyatini tushuntiring.*
4. *Eskizni matematik qayta ishlashni tushuntiring, uning maqsadini izohlang.*
5. *To'g'ri burchakli koordinatalarni hisoblash qanday olib boriladi?*
6. *Lagranj proyeksiyasi koordinatalar tizimini nima tashkil etadi? Proyeksiyada qanday parametrlar aniqlanadi?*

X BOB
1:1 000 000 va 1:2 500 000 MASSHTABLI KARTALAR PROYEKSIYALARI

54-§. Ko'rinishi o'zgartirilgan oddiy yarim konusli proyeksiya va undan 1:1 000 000 masshtabli kartalarni tuzishda foydalanish

Xalqaro butun dunyo kartasini tuzib chiqish g'oyasi o'tgan asrning oxirlarida taklif etilgan. 1909-yilda Londonda o'tkazilgan Xalqaro geografik Kongressda ushbu kartaning masshtabi belgilangan (1:1 000 000), shuningdek, uning proyeksiyasi (ko'rinishi o'zgartirilgan oddiy yarim konusli proyeksiya), grafikli tavsiflari va varaqlari nomenklaturasi, kartani tuzib chiqish tartib-qoidalariga aniqlik kiritilgan. 1913-yilda Parijda o'tkazilgan Xalqaro anjumanda «Million masshtabli Xalqaro dunyo kartasini tuzib chiqish bo'yicha asosiy qoidalar» qabul qilingan. Ko'rinishi o'zgartirilgan oddiy yarim konusli proyeksiyani va uning 1:1 000 000 masshtabdagi kartasini tuzishda foydalanish imkoniyatlarini ko'rib chiqamiz.

Bu proyeksiya ko'p qirrali, aylanma ellipsoid sifatida qabul qilinadigan yer yuzasi meridian va parallel chiziqlari bo'yicha trapetsiyalarga bo'linadi. Har bir trapetsiya kartaning alohida varag'ida, ko'rinishi o'zgartirilgan oddiy yarim konusli proyeksiyada 1:1 000 000 masshtabli karta uchun bir xildagi proyeksiya bo'yicha tasvirlanadi. Varaqlarni ramkasi bo'yicha birlashtirishdan ko'p qirrali shakl hosil bo'ladi. Trapetsiyalar tomonlari uchun ma'lum aniqlikdagi o'lchamlar qabul qilingan – meridianlar bo'ylab – 4°, parallellar – 6°. 60° dan 76° gacha kenglikda varaq ikkilanadi va parallellar bo'yicha 12° o'lchamga yetadi; 76° dan yuqorida varaqlar to'rt hissaga oshiriladi va parallellar bo'yicha 24° bo'ylab cho'ziladi.

Proyeksiyaning ko'p qirralik bo'lishi foydalanilish uchun nomenklatura kiritilishini talab etadi, ya'ni alohida varaqlarni belgilash tizimini. 1:1 000 000 masshtabli karta uchun kenglik bo‘ylab trapetsiyalarni lotin alfaviti harflari bilan (*A, B, C, D* va hokazo) ekvatordan qutbga tomon yo‘nalishda belgilash va kollonnalar bo‘yicha arab raqamlari bilan (1, 2, 3, 4 va hokazo) belgilash qabul qilingan, bu holat 180° uzoqlikdagi meridiandan (Grinvich bo‘yicha) boshlanib, soat strelkasiga qarama-qarshi yo‘nalishda hisoblanadi; Toshkent shahri tasvirlangan varaq K-42 nomenklaturasi bilan belgilanadi. Ikki va to‘rt hissa oshirilgan karta varaqlari nomenklaturasi belgilangan kenglik mintaqasida va mos ravishda, ikki yoki to‘rtta kollonnadan tashkil topadi, masalan – *P* – 39, 40. Ko‘rinishi o‘zgartirilgan oddiy yarim konusli proyeksiyaning xossalarini va xatoliklar taqsimlanishini 1:1 000 000 masshtabli kartaning alohida varaqlari doirasida qarab chiqamiz. Barcha meridianlar to‘g‘ri chiziqlar bilan tasvirlanadi. O‘rta meridiandan ±2° uzoqlikda joylashgan (ikki hissa oshirilgan varaqlarda ±4° va to‘rt hissa oshirilganlarda esa ±8°) ikki meridian uzunligida xatolik qayd qilinmaydi. Har bir varaqning chetki parallellari (shimoliy va janubiy) $\rho = Nctg\varphi$ aylana radiusi yoylari hisoblanadi; parallellarning markazi o‘rta meridianda joylashadi; uzunlik xatoligi kuzatilmaydi, ya’ni $n_{sh} = n_j = 1$.

London kongressida ichki parallellarni o‘tkazish bo‘yicha ko‘rsatmalar berilmagan. Odatda, ularni o‘tkazish uchun Xinks usulidan foydalaniladi: barcha meridianlarni to‘rtta teng qismlarga bo‘lib chiqish bilan hosil qilingan nuqtalar orqali parallellar o‘tkaziladi. Kartografik to‘r kenglik va uzoqlik bo‘yicha 1° oraliqda o‘tkaziladi, ikki hissa oshirilgan varaqlarda uzoqlik bo‘yicha 2°, to‘rt hissa oshirilgan varaqlarda esa – 4° bo‘yicha o‘tkaziladi. Shunday qilib, 1:1 000 000 masshtabli kartaning barcha varaqlarida beshta parallel va yettita meridian bo‘ladi. Karta varag‘i chetki parallellari to‘g‘ri burchakli koordinatalari (*184*) formulaga mos holatda aniqlanadi:

$$x = \frac{\lambda^2}{2} N \cos\varphi \sin\varphi + \ldots;$$

$$y = \lambda N \cos\varphi - \frac{\lambda^3}{6} N \cos\varphi \sin^2\varphi \ldots$$

Bu proyeksiyada meridianlar bo'yicha masshtab oddiy yarim konusli proyeksiya meridianlari bo'yicha masshtabni qisqartirish yo'li bilan hosil qilinadi.

$$m=\left(1+\frac{\lambda^2}{2}\cos^2\varphi\right)/\left(1+\frac{4}{2}\cos^2\varphi\right)=\left(1+\frac{\lambda^2}{2}\cos^2\varphi\right)\left(1+\frac{4}{2}\cos^2\varphi\right)^{-1}=1+\frac{\lambda^2-4}{2}\cos^2\varphi.$$

$(\rho^{\circ})^2/2=0{,}000152$ (λ gradusda) qiymat kiritilganidan keyin

$$m=1+0{,}000152\left[(\lambda)^2-4\right]\cos^2\varphi. \qquad (193)$$

Chetki meridianlar uchun $\lambda=\pm3^{\circ}$ bo'lganda:

$$\upsilon_m=+0{,}076\%,$$

o'rta meridian uchun $\lambda=0$ holatda:

$$m_0=1-0{,}00061\cos^2\varphi;\ \upsilon_m=-0{,}061\%.$$

Kartaning varag'i balandligi:

$H=s_{janubiy}^{shimoliy}m_0$, bu erda $s_{janubiy}^{shimoliy}$ – chetki parallellar o'rtasidagi meridian yoyi uzunligi, undan:

$$H=s_{janubiy}^{shimoliy}(1-0{,}00061\cos^2\varphi)=s_{janubiy}^{shimoliy}(1-0{,}000305-0{,}000305\cos2\varphi)=$$
$$s_{janubiy}^{shimoliy}(0{,}999695-0{,}000305\cos2\varphi).$$

Oddiy yarim konusli proyeksiyalarda egri chiziqlar bilan ifodalangan meridianlar ko'rinishi, o'zgartirilgan yarim konusli proyeksiyaning chetki parallellarida to'g'ri chiziqlarga almashtiriladi, shu sababli ichki parallellar qiymati birdan kichik. Minimal masshtab faqat o'rta parallelda saqlanadi, bu parallel kengligini φ_0 bilan belgilaymiz. n_0 masshtabni topamiz (57-rasm).

$n_0=1-\dfrac{A_0'A_0}{C_0A_0}$ bunda $A_0'A_0$ – o'rta parallel uzunligining qiyshiq chiziqli meridiandan to'g'ri chiziqliga o'tishdagi kamayishi.

$$C_cA_c=N_c\cos\varphi_c\lambda\ C_{ю}A_{ю}=N_{ю}\cos\varphi_{ю}\lambda$$
$$C_0A_0=N_0\cos\varphi_0\lambda$$

Qabul qilamiz:

$$C_0A_0'=\frac{1}{2}(C_CA_C+C_{ю}A_{ю})=\frac{1}{2}(N_{ю}\cos\varphi_{ю}+N_c\cos\varphi_c)\text{bundan}$$
$$A_0'A_0=C_0A_0-\frac{1}{2}(C_cA_c+C_{ю}A_{ю})=\lambda\left[N_0\cos\varphi_0-\frac{1}{2}(N_{ю}\cos\varphi_{ю}+N_c\cos\varphi_c)\right]$$

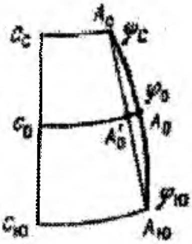
Ma'lumki, $\varphi_c-\varphi_{ю}=4^{\circ}$, shu sababli $N_C=N_0=N_{ю}$ va bunda

$$A_0'A_0 = \lambda N_0\left(\cos\varphi_0 - \cos\frac{\varphi_C+\varphi_{\text{ю}}}{2}\cos\frac{\varphi_C-\varphi_{\text{ю}}}{2}\right) = \lambda N_0\cos\varphi_0\left(1-\cos\frac{\varphi_C-\varphi_{\text{ю}}}{2}\right).$$

$\varphi_C - \varphi_{\text{ю}} = \Delta\varphi$ ni qabul qilib, $\cos(\Delta\varphi/2)$ ni $\Delta\varphi$ ikkinchi darajada cheklab, qatorga ajratsak, unda:

$$A_0'A_0 = \frac{\lambda(\Delta\varphi)^2}{8} N_0 \cos\varphi_0$$

$$n_0 = 1 - \frac{\left(\Delta\varphi^0\right)^2}{8\left(\rho^0\right)^2} = 1 - 0{,}000152\frac{(\Delta\varphi)^2}{4}$$



57-rasm. **Masshtabni aniqlash chizmasi**

1:1 000 000 masshtabli kartaning har bir varag'ida o'rta parallel bo'ylab xatolik qiymati $\upsilon_n = -0{,}06\%$ ni tashkil qiladi. Bu kartada meridian va parallellar bo'ylab masshtablar ekstremal (a va b), chunki proyeksiya to'ri deyarli ortogonal. Kartaning bitta varag'ida xatoliklarning taqsimlanishini qarab chiqamiz (58-rasm).

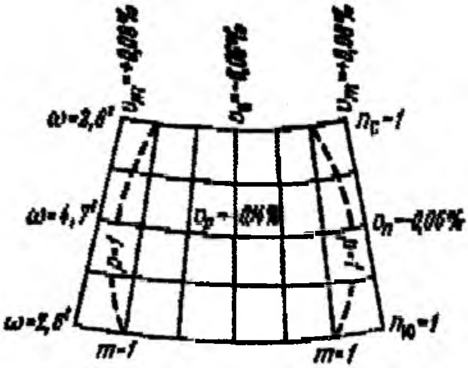
Har bir varaqda barcha turdagi xatoliklar uchramaydigan 4 ta nuqta mavjud – bu nuqtalar varaqning chetki parallellarining o'rta meridiandan ikki gradus g'arbga va sharqqa tomon uzoqlashgan meridianlari bilan kesishish nuqtalarida joylashgan.

Maydon maksimal xatoligi (υ_p) varaqning o'rtasida kuzatiladi, uning qiymati minus ishoraga ega va 0,14% gacha yetadi. Maydonning no'l xatoligiga ega bo'lgan izokolalar egri chiziq bo'lib, xatolik mavjud bo'lmagan nuqtalar orqali o'tadi va chetki meridianlar bo'ylab cho'zilgan ko'rinishda tasvirlanadi. Maydon masshtabini chetki parallellarda quyidagi formulalar bo'yicha (λ gradus hisobida) aniqlash mumkin:

$$p = m = 1 + 0{,}000152\left[(\lambda)^2 - 4\right]\cos^2\varphi,$$

o'rta parallellar bo'yicha quyidagi tenglik o'rinli:

$$p_0 = m_0 n_0 = 0 + 0{,}000152\left\{\left[(\lambda)^2 - 4\right]\cos^2\varphi - (\Delta\varphi)^2/4\right\} \qquad (195)$$



58-rasm. **1:1 000 000 masshtabli karta varag'ida xatoliklarning taqsimlanishi.**

Burchak xatoligi, aksincha, varaqning o'rta qismida deyarli qayd qilinmaydi; uning maksimal qiymati varaqning chetki meridianlarida, ekvator va $\varphi = 60^\circ$ kenglikdagi parallellar yaqinida kuzatiladi, uning qiymati $\omega \le 4{,}7'$ ga yetishi mumkin. Chetki parallellarda burchak xatoligi quyidagicha hisoblanadi (minut hisobida):

$$\omega_{shimoliy} = \omega_{janubiy} = 0{,}52'\left[(\lambda)^2 - 4\right]\cos^2\varphi;$$

o'rta parallellar uchun esa:

$$\omega_0 = 0{,}52'\left\{\left[(\lambda)^2 - 4\right]\cos^2\varphi + (\Delta\varphi)^2/4\right\} \qquad (196)$$

Ko'p qirrali ko'rinishi o'zgartirilgan oddiy yarim konusli proyeksiyaning afzalligi – unda xatolikning nisbatan katta bo'lmasligi bilan belgilanadi. Karta varag'i doirasida xatoliklarni tahlil qilish natijalariga ko'ra, uzunlik xatoligi 0,1% dan, maydon xatoligi – 0,15% va burchak xatoligi – 5' dan ortiq emas, ya'ni amaliy jihatdan deyarli sezilarsiz.

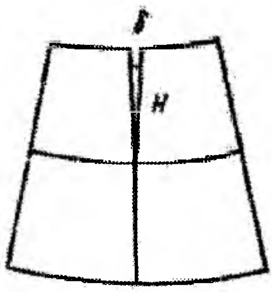
Proyeksiyaning kamchiligi – meridian va parallellar bo'yicha varaqlarni birlashtirishda uzilishlar hosil bo'lishini ko'rsatib o'tish mumkin. 4 ta varaqni birlashtirishda bu uzilishlar (V.V. Kavrayskiy tadqiqotlari bo'yicha) 1:1 000 000 masshtabli kartada birlashtiriluvchi trapetsiyada bitta sferik ortiqlik qiymatiga teng *(59-rasm)*, ya'ni:

$$\delta = \Delta\lambda\Delta\varphi\cos\varphi\frac{\rho'}{(\rho^0)^2},$$ bu yerda $\rho'/(\rho^\circ)^2 = 1{,}048$ ga teng, bu holatda quyidagi tenglik amal qiladi:

$$\delta = 25{,}15'\cos\varphi$$

va uzilishning *mm* hisobidagi chiziqli qiymati

$$\bar{\delta} = \delta H / \rho' = 3{,}25\cos\varphi.$$



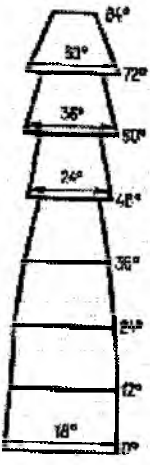
59-rasm. **1:1 000 000 masshtabli kartani 4 ta varag'ini birlashtirishda yuzaga keladigan uzilishlar**

55-§. 1:2 500 000 masshtabli dunyo kartasini tuzishda foydalaniladigan proyeksiyalar

Dunyoning 1:2 500 000 masshtabli kartasi – bu Yer yuzasini yagona masshtabda, komponovka va jihozlash asosida tasvirlaydigan umumgeografik karta; u bir xil mazmunga, legenda va tushuntirish qoidalariga ega. Bu karta yirik hududlar mavzuli kartalarini tuzish uchun kartografik asos vazifasini bajaradi. U yirik tabiiy geografik va iqtisodiy rayonlar, davlatlar va davlatlar guruhlarini bir xilda batafsillik asosida alohida varaqlarda tasvirlash imkonini beradi. Ko'rsatib o'tilgan xossalar uning matematik asosini ishlab chiqishga (proyeksiya, *komponovka*) alohida talablar qo'yilishini belgilaydi.

Kartaning asosiy maqsadi – uning ma'lumotnomali tavsifga egaligidir, shu sababli barcha turdagi xatoliklar (uzunlik, maydon, burchak, shakl) nisbatan kichik qiymatda bo'lishi talab etiladi. Biroq, eslatish joizki, xatolikni kamaytirishga urinish har doim kartada tasvirlanayotgan hudud maydonining kamayishiga olib keladi, bu esa proyeksiyaning ko'p qirralik sifatidan foydalanishga majbur qiladi va o'z navbatida iste'molchining karta varaqlarini uzilishsiz bloklar ko'rinishida komponovka qilash imkoniyatidan mahrum qiladi, bu ma'qul emas. Karta masshtabi mayda (joyda 1 km masofa kartada 0,4 *mm* ga teng), generalizatsiya darajasi sezilarli darajada yuqori, karta orqali barcha o'lchashlar taqriban bo'lishini hisobga olsak, unda barcha xatolik turlari qiymati uncha katta bo'lmasligi kerak.

Yuqorida ta'kidlab o'tilganlarni e'tiborga olgan holatda, quyidagi xulosaga kelishimiz mumkin: 1:2 500 000 masshtabli karta uchun nisbatan muvofiq hisoblangan xatolikni beradigan proyeksiya – bu ixtiyoriy proyeksiya hisoblanadi. Uzunlik va burchak xatoliklari mos ravishda 3 – 4% va 2 – 3^0 dan oshmasligi kerak.



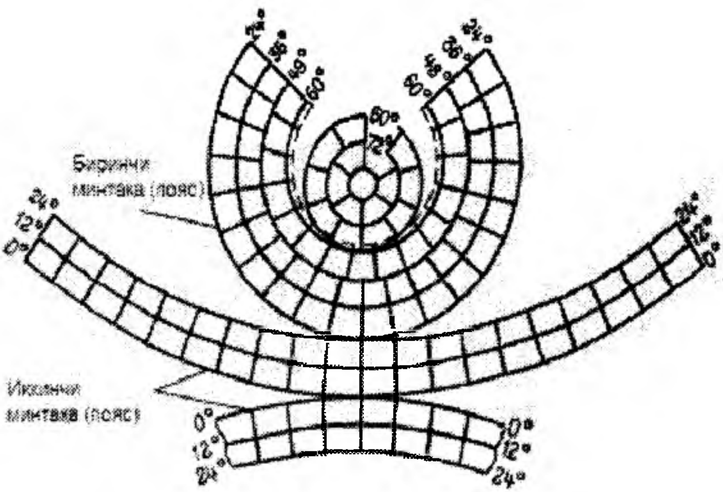
60-rasm. **1:2 500 000 masshtabli kartaning varaqlarga bo'linishi (razgrafkasi)**

Meridian va parallellari bo'yicha 1:2 500 000 masshtabli karta varag'i tomonlari cho'zilishi 1:1 000 000 masshtabdagi karta varaqlari tomonlari uzunligining karrali qiymati bo'yicha qabul qilinadi; 1:2 500 000 masshtabli kartaning bitta varag'i o'z tarkibiga 1:1 000 000 masshtabli kartaning 9 tadan 12 tagacha varag'ini qamrab oladi. Har bir varaqda chetki parallellarning (qutbiy holat hisobga olinmaganda) farqlanishi 12° ni tashkil qiladi; $\Delta\lambda$ uzoqlik bo'yicha karta varaqning cho'zilishi kenglikka bog'liq holda o'zgaradi *(60-rasm)*:

Karta qutbiy varaqlari aylanali ramkali bo‘lib, radiusi 6 gradusli. Karta varaqlarini tuzish uchun Krasovskiy ellipsoidi qabul qilingan.

Kartada tasvirlash uchun yer yuzasi 6 ta yirik zonalarga bo‘lib chiqiladi, ulardan ikkitasi qutbiy (±90° dan ±60° gacha) bo‘lib, meridiani bo‘yicha teng oraliqli bo‘lgan azimutal proyeksiyada tuziladi, qolgan to‘rttasi – meridiani bo‘yicha teng oraliqli konusli proyeksiyada tuziladi (har bir yarim sharda ikkitadan proyeksiya): birinchi mintaqa (*poyas*) ±24° dan ±64° gacha, ikkinchisi – 0° dan ±24° gacha tasvirlanadi *(61-rasm)*.

Δφ, gradusda	**0 – 48**	**48 – 60**	**60 – 72**	**72 – 84**	**84 – 90**
Uzoqlik bo‘yicha varaqning cho‘zilishi Δλ (gradus hisobida)	18	24	36	60	360
Qatorda varaqlar soni *q*=360/Δλ	20	15	10	6	1



61-rasm. **1:2 500 000 masshtabli kartada zonalarning joylashish sxemasi.**

Varaqlarning keltirilgan o‘lchamlari bo‘yicha har bir yarim sharda 112 ta asosiy karta va kengligi 4° bo‘lgan (+60° dan +64° gacha) 10 ta qo‘shimcha kartalar (shimoliy yarim sharda) hosil bo‘ladi. Alohida zonalarning tutash joylari ekvator bo‘yicha ±24° va

±60° kenglikdagi parallellar bo'ylab o'tkaziladi; ushbu parallellarda kenglik bo'yicha bir necha gradus qiymatdagi qoplama soha beriladi. 1:2 500 000 masshtabli kartani tuzish uchun qo'llaniladigan proyeksiyani qarab chiqamiz.

Meridianlari bo'yicha teng oraliqli normal azimutal proyeksiya:

$$p = k\left(s_{e}^{90} - s\right) \delta = \lambda$$

bunda s_{o}^{90}– ekvatordan qutbgacha meridian yoyi uzunligi, k meridianlar masshtabini aniqlaydigan parametr, m=0,99.

Bunda, parallellar uzunligi saqlanadi $s_{\varphi} = \pm 76°$

$$x = p\cos\delta;\ y = p\sin\delta;$$

$$m = k = 0{,}99;\ n = p/r$$

$$p = mr;\ \sin(\omega/2) = (n - 0{,}99)/(n + 0{,}99)$$

± 60° kenglikli parallellarda maksimal xatolik $v_n = +3{,}7\%$ $v_p = 2{,}6\%$ va $\omega = 2{,}6°$ ga teng.

Meridianlari bo'yicha teng oraliqli normal konusli proyeksiya:

$$x = q - p\cos\delta;\ y = p\sin\delta;$$

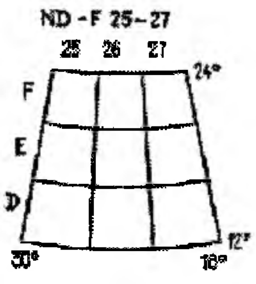
$$p = C - s\ \delta = \alpha\lambda$$

$$m = 1\ n = p = \alpha p/r$$

$$tg(45° + \omega/4) = \sqrt{n},$$ bunda parametrlar:

$$\alpha = (r_1 - r_2)/(s_2 - s_1);\ C = s_1 + r_1/\alpha = s_2 - r_2/\alpha;$$

Bosh parallellarning kengligi birinchi poyasda $\varphi_1 = \pm 32°, \varphi_2 = \pm 64°$. $\varphi = \pm 48°$ kenglikdagi paralellarning maksimal xatoligi $\vartheta_n = \vartheta_p = -39\%$; $\omega = 2{,}2°$ ga va $\varphi = \pm 24°$, parallellarda esa $\vartheta_n = \vartheta_p = +4{,}0\%$, $\omega = 2{,}3°$ ga teng. Ikkinchi poyasda esa $\varphi_1 = \pm 4°$ i $\varphi_2 = \pm 21°$, maksimal xatoliklar $\vartheta_n = \vartheta_p \leq 1\%$, $\omega < 0{,}7°$ ga teng.



62-rasm. **1: 2 500 000 masshtabli karta nomenklaturasi**

Karta varaqlari nomenklaturasi yarim sharlarni belgilash *(62-rasm)*, 1:2 500 000 masshtabli karta varaqlari tarkibiga kiritilgan 1:1 000 000 masshtabli karta varaqlari nomenklaturasi va tuzilayotgan karta varag'i tartib raqami birlashmasidan hosil qilinadi, varaq tartib raqami "yig'ma varaq"dan olinadi. Bundan tashqari, har bir varaq shahar yoki boshqa geografik obyekt bilan nomlanadi, masalan, «*53 Rim*», «*91 Yashil Burun orollari*».

Nazorat savollari

1. *1:1 000 000 masshtabli karta varaqlari o'lchamlarining turli kengliklarda o'zgarib borishini tushuntiring.*
2. *1:1 000 000 masshtabli karta varag'ida xatoliklar qanday taqsimlangan, uni chizmada ko'rsating.*
3. *Maydon masshtabi chetki parallellarda qaysi formulalar bilan aniqlanadi?*
4. *1:1 000 000 masshtabli kartaning 4 ta varag'ini birlashtirishda yuzaga keladigan uzilishlar miqdori qancha va ular qanday aniqlanadi?*
5. *1:2 500 000 masshtabli dunyo kartasini tuzishda qanday proyeksiyalardan foydalaniladi?*
6. *1:2 500 000 masshtabli kartaning varaqlarga bo'linishi (razgrafkasi) qanday tashkil etiladi?*

XI BOB
TEKISLIKDA AYLANMA ELLIPSOIDNING TENG BURCHAKLI PROYEKSIYALARI

56-§. Umumiy ma'lumotlar

Masalan, ikkita yuzani olaylik, S va σ, bunda ularda $u = const$, $\upsilon = const$ va $\xi = const$, $\eta = const$ ko'rinishga ega bo'lgan ikkita egri chiziqli koordinatalar tizimi o'rnatilgan bo'lsin. Bitta tekislikni ikkinchisida tasvirlash uchun yuqorida qayd qilib o'tilganidek, ushbu tekisliklar koordinatalari o'rtasida o'zaro bir xillikdagi moslikni qaror topishi talab etiladi:

$$\xi = f_1(u,\upsilon);\ \eta = f_2(u,\upsilon),$$

bu yerda f_1 va f_2 funksiyalar va ularning ikkinchi darajadagi hosilalari ham uzluksiz, bir xil qiymatga ega va o'zaro mustaqil bo'lishi kerak, ya'ni hududi tasvirlanayotgan sohaning barcha nuqtalarida $\partial(\xi,\eta)/\partial(u,\upsilon)$ qiymat no'lga teng bo'lishi talab qilinadi.

Yuzaning chiziqli elementlarini s metrli shaklda yozamiz:

$$dS^2 = Edu^2 + 2Fdud\upsilon = Gd\upsilon^2,$$

bu yerda *E, F, G* – birinchi *S* yuzaning birlamchi kvadrat shakllari koeffitsiyentlari (*Gauss koeffitsiyentlari*).

S yuzaning σ yuzada teng burchakli tasvirlanishi uchun, σ yuza uchun chiziqli element tenglamasi quyidagi ko'rinishda bo'lishi kerak:

$$d\sigma^2 = E'd\xi^2 + 2F'd\xi d\eta + G'd\eta^2 = Q^2(u,\upsilon)\times\left[Edu^2 + 2Fdud\upsilon + Gd\upsilon^2\right],$$

bu yerda *E', F' va G'* – σ yuzaning birlamchi kvadrat shakllari koeffitsiyentlari; $Q(u,\upsilon)$ – birinchi va ikkinchi yuzaning chiziqli elementlari farqlanishlari funksiyasi. Bunda belgilangan har ikkala egri chiziqli koordinatalar tizimida o'zaro proporsionallik saqlanishi ta'minlanishi talab etiladi:

$$\frac{E'd\xi^2}{Edu}=\frac{F'd\xi d\eta}{Fdudv}=\frac{G'd\eta^2}{Gdv^2}=Q^2(u,v).$$

Biroq, bunday proporsionallik mavjud emas va uni egri chiziqli koordinatalar tizimlari o'rtasida qaror toptirish yetarlicha darajada murakkab masala hisoblanadi. Shu sababli, ko'plab holatlarda teng burchakli tasvirlashlarni hosil qilish maqsadida birlamchi kvadrat shakllar izometrik ko'rinishda keltiriladi:

$$ds^2=P^2(\tau,\nu)[d\tau^2+d\nu^2]$$

$$d\sigma^2=\theta^2(p,t)[dp^2+dt^2]$$

yoki Gauss usuli bo'yicha yoki uyg'un funksiyalar nazariyasi asosida ish tutiladi.

Ikkinchi yuzaning yoylari differensialini birinchi yuza yoylari differensiali orqali ifodalab,

$$dp=p_\tau d\tau+p_\nu d\nu;$$

$$dt=t_\tau d\tau+t\nu d\nu,$$

shu asosda σ yuzada tasvirlanayotgan s yuza uchun xususiy masshtablar formulalarini hosil qilish mumkin:

$$m^2=\frac{\theta^2(p,t)}{P^2(\tau,\nu)}[p_\tau^2+t_\tau^2]$$

$$n^2=\frac{\theta^2(p,t)}{P^2(\tau,\nu)}[p_\nu^2+t_\nu^2]$$

Olingan formulalardan bitta ixtiyoriy yuzada ikkinchisini tasvirlash uchun foydalaniladi. Qayd qilish kerakki, murakkab tavsifga ega bo'lgan yuzalarni tasvirlashda (uch o'qli ellipsoid va nisbatan murakkab yuzalar) berilgan u, v yoki ξ, η egri chiziqli koordinatalar bo'yicha izometrik koordinatalarni aniqlash masalasi sezilarli darajada qiyinchilik tug'diradi. Lekin aylanma ellipsoidni geodezik koordinatalari bo'yicha izometrik koordinatalarni aniqlash ancha oson. Bu holatda ellipsoid yuzasi tekislikda τ, ν; u, v va p, t; ξ, η koordinatalar tizimi bilan birgalikda, $P(u,v)$, $\theta(p,t)$ metrik elementlar uchun quyidagini olamiz:

– ellipsoid yuzasida q, λ – izometrik koordinatalar; φ, λ – geodezik koordinatalar; parallellarning egrilik radiusi: $r = P(u,\upsilon) = N\cos\varphi$;

– tekislikda x, y – to'g'ri burchakli koordinatalar, ular bilan ma'lum bog'liqlikdagi geodezik koordinatalar (φ, λ), yoki ellipsoid yuzasi izometrik koordinatalari (q, λ) bilan; bunda qism $\theta(p,t) = 1$.

Aylanma ellipsoid yuzasida izometrik va geodezik koordinatalar o'rtasidagi bog'liqlik quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$q = \int \frac{Md\varphi}{r} = \ln U = \ln \frac{tg(45° + \varphi/2)}{tg^e(45° + \psi/2)}; \psi = \arcsin(e\sin\varphi),$$

uzunlik xususiy masshtablari formulalari quyidagicha:

$$m = \frac{1}{M}\left(x_\varphi^2 + y_\varphi^2\right)^{1/2} = \frac{1}{r}\sqrt{x_q^2 + y_q^2}; n = \frac{1}{r}\sqrt{x_\lambda^2 + y_\lambda^2}$$

I bobda teng burchakli proyeksiyani hosil qilishni qoniqtiruvchi shartlarga oydinlik kiritilgan edi. Tasvirlashga belgilangan talablardan kelib chiqqan holda, turli teng burchakli proyeksiyalarni hosil qilish mumkin, ularning ko'pchiligidan kartografik amaliyotda keng foydalanilmoqda. Bunday proyeksiyalar ma'lum afzallik va kamchiliklarga ega. P.L. Chebishev teoremasiga muvofiq, bir qator teng burchakli proyeksiyalar mavjud. Bu bobda shunday proyeksiyalarni va hali keng qo'llanilishi qayd etilmagan proyeksiyalarni qarab chiqamiz.

57-§. Gauss-Kryuger proyeksiyasi va undan sobiq Ittifoq topografik kartalarini tuzishda foydalanish

1928-yilda sobiq Ittifoqda o'tkazilgan III Geodezik kengashda barcha geodezik va topografik ishlarda Bessel ellipsoidida Gauss-Kryuger proyeksiyasidan foydalanish qarori qabul qilindi. Bu proyeksiya asosida 1:500 000 dan yirik masshtabli barcha topografik kartalarni tuzish boshlangan. 1939-yildan Gauss-Kryuger proyeksiyasidan 1:500 000 masshtabli kartalarni tuzishda ham foydalanila boshlangan.

Gauss-Kryuger proyeksiyasida ellipsoidni tekislikda tasvirlash meridian zonalari bo'yicha amalga oshiriladi, zona kengligi olti gradusga teng (1:10 000 – 1:500 000 masshtabli kartalar uchun), uch gradusli zona 1:2 000 – 1:5 000 masshtabli planlar uchun qo'llaniladi. Meridian va parallellar zona o'q meridiani va ekvatorga nisbatan simmerik joylashgan egri chiziqlar bilan tasvirlanadi. Bunda meridianlar egri chiziqlari shu darajada kichik qiymatga egaki, kartaning g'arbiy va sharqiy ramkalari o'zaro mos tushadi va to'g'ri chiziqlar bilan tasvirlanadi. Kartaning shimoliy va janubiy ramkalari bilan mos tushuvchi parallellari faqat yirik masshtabli (1:2 000 – 1:50 000) kartalardagina tasvirlanadi, nisbatan mayda masshtabdagi kartalarda ular egri chiziqlar bilan tasvirlanadi. Har bir zonada to'g'ri burchakli koordinatalar boshi o'q meridianning ekvator bilan kesishish nuqtasida joylashadi. Sobiq Ittifoqda 1:1 000 000 masshtabli kartalar kolonnalari raqamlaridan o'ttizta birlikka farqlanuvchi zonalar raqamlanishi qabul qilingan, ya'ni $L_0 = 21^\circ$ o'q meridian uzunligi bilan belgilanuvchi, chetki g'arbiy zona 4 raqamiga ega bo'lib, sharqqa tomon zonalar raqamlanishi ortib boradi (Chukotka hududida 32 gacha yetadi).

Bu proyeksiya 1825-yilda Gauss tomonidan ishlab chiqilgan bo'lib, unda birinchi marta bitta yuzaning ikkinchisida tasvirlanishida cheksiz darajada kichik qismlarning o'xshashligi saqlanishi bo'yicha umumiy masalani yechish amalga oshirilgan. Ushbu umumiy masalaning xususiy holati aylanma ellipsoid yuzasining tekislikda tasvirlanishi bo'yicha kartografik masalani yechishdan iborat. Gauss proyeksiyadan Gannover triangulyatsiyasini qayta hisoblash uchun foydalandi, shundan keyin bu proyeksiya deyarli ishlatilmadi.
1912-yilda Kryuger Gauss bajargan ilmiy ishlarni nashr qilish va sharhlash ishlarini olib borgan, shunda bu proyeksiya ishchi formulalarini ishlab chiqdi. Shundan keyin, bu proyeksiya *Gauss-Kryuger proyeksiyasi* nomi bilan atalgan va topografik ishlarni bajarishda keng qo'llanila boshlangan.

Proyeksiyaning qoidasini ko'rib chiqamiz. 56-§ orqali teng burchakli proyeksiyaning umumiy formulasini yozish mumkin:

$$x + iy = F(q + i\lambda),$$

bunda q va λ – izometrik koordinatalar, funksiya F har xil usullar bilan olinishi mumkin: chiziqli, darajali, Teylor qatorini bo'lish orqali.

$$F = (q + i\lambda) = F(q) + i\lambda\frac{dF(q)}{dq} + \frac{(i\lambda)^2}{2!}\frac{d^2F(q)}{dq^2} + \frac{(i\lambda)^3}{3!}\frac{d^3F(q)}{dq^3} + \ldots,$$

lekin $i = \sqrt{-1}$; $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = +1$ va h.k., (198) formuladan

$$x + iy = F(q) + i\lambda\frac{dF(q)}{dq} - \frac{\lambda^2}{2}\frac{d^2F(q)}{dq^2} - i\frac{\lambda^3}{6}\frac{d^3F(q)}{dq^3} + \frac{\lambda^4}{24}\frac{d^4F(q)}{dq^4} + i\frac{\lambda^5}{120}\frac{d^5F(q)}{dq^5} - \ldots,$$

bundan teng burchakli proyeksiyalar umumiy formulalari

$$x = F(q) - \frac{\lambda^2}{2}\frac{d^2F(q)}{dq^2} + \frac{\lambda^4}{24}\frac{d^4F(q)}{dq^4}\ldots, \tag{199}$$

$$y = \lambda\frac{dF(q)}{dq} - \frac{\lambda^3}{6}\frac{d^3F(q)}{dq^3} + \frac{\lambda^5}{120}\frac{d^5F(q)}{dq^5}\ldots;$$

$F(q)$ qiymat tavsif deb nomlanadi; kartografik to'r o'q meridianga nisbatan simmetrik holatda bo'lgan proyeksiyalarda bu qiymat ushbu meridian bo'yicha abssissani tavsiflaydi.

Gauss-Kryuger proyeksiyasini olishda quyidagi shartlarni belgilash kerak: proyeksiya o'rta meridian va ekvatorga nisbatan simmetrik va teng burchakli tavsifga ega; *X* o'qi bilan ustma-ust tushuvchi zona o'q meridiani to'g'ri chiziq bilan ifodalanadi; o'q meridian uzunligi xatoliksiz tasvirlanadi, ya'ni $m_0 = 1$. Oxirgi shart quyidagi tenglikka olib keladi: $F(q) = s_m = X$, bunda X – geodeziyada qabul qilingan ekvatordan joriy parallelgacha bo'lgan meridian yoyi uzunligi belgisi.

Olingan xarakteristikani (199) tenglikka qo'yib, quyidagini olamiz:

$$x = S_m - \frac{\lambda^2}{2}\frac{d^2s_m}{dq^2} + \frac{\lambda^4}{24}\frac{ds^4_m}{dq^4}\ldots;$$

$$y = \lambda\frac{ds_m}{dq} - \frac{\lambda^3}{6}\frac{d^3s_m}{dq^3} + \frac{\lambda^5}{120}\frac{d^5s_m}{dq^5} - \ldots;$$

$\frac{ds_m}{dq}, \frac{d^2s_m}{dq^2}, \frac{d^3s_m}{dq^3}$ hosilalarni topamiz va (200) tenglikni qo‘yib:

$\frac{ds_m}{dq} = \frac{ds_m}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dq}$, lekin $d\varphi/dq = r/M$ (197) formuladan va $ds_m/d\varphi = M$ shu sababli $ds_m/dq = r = N\cos\varphi$ ya’ni birinchi hosila olingan parallel radiusiga teng;

$$\frac{d^2s_m}{dq^2} = \frac{dr}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dq} \text{ lekin } dr/d\varphi = -M\sin\varphi; d\varphi/dq = r/M,$$

bundan $\frac{d^2s_m}{dq^2} - r\sin\varphi = -N\cos\varphi\sin\varphi;$

$$\frac{d^3s_m}{dq^3} = -\frac{d(N\cos\varphi\sin\varphi)}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dq},$$

yoki

$$\frac{d(N\cos\varphi\sin\varphi)}{d\varphi} = r_\varphi\sin\varphi + N\sin^2\varphi = -M\cos^2\varphi + N\sin^2\varphi,$$

$$\frac{d^3s_m}{dq^3} = -N\cos^3\varphi\left(\frac{N}{M} - \frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}\right),$$

agar belgilasak $\frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi} = t^2$

Unda $\sin^2\varphi \; 1-(\cos^2\varphi)$ formula bilan almashtirib,

$$N/M = \frac{1-e^2\sin^2\varphi}{1-e^2}, \text{ni olamiz:}$$

$$N/M = 1 + \left[e^e/(1-e^2)\right]\cos^2\varphi = 1 + e'^2\cos^2\varphi = 1 + \eta^2,$$

bunda e'^2 – ikkinchi ekssentrisitet kvadrati; unda

$$\frac{d^3s_m}{dq^3} = -N\cos^3\varphi(1 - t^2 + \eta^2),$$

To‘rtinchi va beshinchi hosilani quyidagicha yozish mumkin:

$$\frac{d^4s_m}{dq^4} = -N\cos^3\varphi\sin\varphi(5 - t^2 + 9\eta^2 + 4\eta^4),$$

$$\frac{d^5s_m}{dq^5} = -N\cos^3\varphi\sin\varphi(5 - 18t^2 + t^4 - 14\eta^2 - 58\eta^2t^2)$$

(198) formulaga hosilani qo‘yib, mana buni olamiz:

$$x = S_m + \frac{\lambda^2}{2} N\cos\varphi\sin\varphi + \frac{\lambda^4}{24} N\cos^4\sin\varphi(5 - t^2 + 9\eta^2 + 4\eta^4) + ...;$$

$$y = \lambda N\cos\varphi + \frac{\lambda^3}{6} N\cos^3\varphi(1 - t^2 + \eta^2) + \frac{\lambda^5}{120} N\cos^5\varphi(5 - 18t^2 + t^2 - ...)$$

1:50 000 masshtabli kartalarni tuzishda tarkibida λ^4 va λ^5 mavjud bo'lgan formula qismlari, odatda, hisobga olinmaydi.

Qarab chiqilgan Gauss-Kryuger proyeksiyasi qat'iy ravishda to'g'ri burchakli emas, chunki uni hosil qilishda shunday qatorlar parchalanishidan foydalanilganki, unda Koshi-Riman shartining faqat bitta holati bajariladi; agar proyeksiya tenglamasiga yana bitta qo'shimcha qism qatori kiritilsa, u holda ikkinchi shart bajarilishi boshlanadi, oldin bajarilgan birinchisi esa bajarilmaydi. Proyeksiyani formulalarida yetarlicha sonli miqdorda (7–8 ta) qismlar saqlanishi deyarli teng burchakli tavsifga ega, shu sababli ta'kidlash joizki, uning tarkibida ham to'rning ortogonallik sharti, ham masshtablar tengligi sharti bajariladi.

Tarkibida λ^2 mavjud bo'lgan qismlarning cheklanishi asosida uzunlik xususiy masshtabi formulasini keltirib chiqaramiz. Uzunlik xususiy masshtabini topish uchun ma'lum bo'lgan formuladan foydalanamiz:

$m = n = \frac{\sqrt{g}}{r} = \frac{1}{r}\sqrt{x_\lambda^2 + y_\lambda^3}$ x_λ y_λ hosilalari qiymati bilan.

Unda Gauss koeffitsiyenti g teng:

$$g = N^2\cos^2\varphi\,|\lambda^2 \text{sip}^2\varphi + 1 + \lambda^2\cos^2\varphi\,(1 - t^2 + \eta^2)\ \ ] =$$
$$= N^2\cos^2\varphi\,[1 + \lambda^2\cos^2 f\,(\sin^2\varphi/\cos^2\varphi + 1 - t^2 + \eta^2)] =$$
$$= N^2\cos^2\varphi\,[1 + \lambda^2\cos^2 f\,(1 + \eta^2)].$$

g qiymatini formulaga qo'ysak (λ va ρ gradusda):

$$m = n = [1 + \lambda^2\cos^2\varphi\,(1 + \eta^2)^{1/2} = 1 + [(\lambda)^2/2(p)^2]\cos^2\varphi\,(1 + \eta^2) = 1 + 0{,}000\,152\,(\lambda)^2\cos^2\varphi\,(1 + \eta^2).$$

Kartografik amaliyotda $+\eta^2$ qiymati e'tiborga olinmaydi. Unda

$$m = n = 1 + 0{,}000\,152\,\lambda^2\cos^2\varphi \qquad (201)$$

O'tkazilgan tadqiqotlarga ko'ra, Gauss-Kryuger proyeksiyasida izokolalar o'q meridian bo'ylab cho'zilgan bo'lib, oval ko'rinishga ega. Har bir zonada uzunlikning maksimal xatoligi $\varphi = 0$ va $\lambda = \pm 3°$ sharoitda kuzatiladi; bu nuqtalarda xatolik $\upsilon_m = 0{,}14\%$ gacha yetadi.

Uch gradusli zona o'q meridianlari navbatma-navbat olti gradusli o'q meridianlarga mos tushadi, yoki zonalarning chetki meridianlari bilan ustma-ust tushadi.

Gauss-Kryuger proyeksiyasi 35-§ da qarab chiqilgan teng burchakli ko'ndalang silindrik Gauss-Lambert proyeksiyasi bilan ko'plab umumiyliklarga ega, biroq unga to'liq mos tushmaydi; bunga proyeksiyalarni solishtirish yo'li bilan osonlikcha ishonch hosil qilish mumkin. Birinchi proyeksiya bevosita ellipsoidni tekislikdagi tasviri, ikkinchisi (Gauss-Lambert proyeksiyasi) – shar proyeksiyasidir.

Qator mamlakatlarda hozirgi vaqtda topografik kartalar uchun zonasi olti gradusli universal ko'ndalang-silindrik Merkator proyeksiyasidan (*UTM*) foydalaniladi. Bu proyeksiyalar o'z xossalari va xatoliklari taqsimlanishi bo'yicha Gauss-Kryuger proyeksiyasiga juda yaqin, ularda har bir zona o'q meridianida masshtab $m_0 = 1$ ga emas, balki 0,9996 ga teng.

O'q meridandan har ikki tomonga 200 km atrofida masofa bo'ylab va unga parallel holatda uzunlik bo'yicha no'l xatolikli ikkita izokolalar joylashgan. O'q meridiandan uzoqlashgan sari uzunlik masshtabi birdan kattalashadi va zona chetki meridianlarning ekvator bilan kesishish joyida qiymati maksimal bo'ladi ($\upsilon_m = +0{,}05\%$).

58-§. Sobiq Ittifoq topografik kartalari razgrafkasi va nomenklaturasi

Ko'p varaqli kartalardan foydalanishni osonlashtirish uchun barcha varaqlar ma'lum bir tizimda belgilanadi (nomenklatura kiritiladi). Sobiq Ittifoqda qabul qilingan topografik kartalarning nomenklaturasi va varaqlarga bo'linishini (razgrafkani) eslatib o'tamiz. Ularning asosini 1:1 000 000 masshtabli karta nomenklaturasi va razgrafkasi tashkil etadi. Razgrafkada kartalar ramkasi o'lchamlari 8-jadvalda keltirilgan.

Bitta 1:1 000 000 masshtabli karta trapetsiyasida 4 ta 1 : 500 000 masshtabli trapetsiya, 9 ta 1:300 000 masshtabli trapetsiya, 36 ta 1:200 000 masshtabli trapetsiya va 144 ta 1:100 000 masshtabli trapetsiya joylashadi.

1:500 000 masshtabli karta rus alfaviti bosh harflari bilan belgilanadi A, Б, B, Г, u 1 : 1 000 000 masshtabli karta nomenklaturasidan keyin yoziladi, masalan M-39-Б; 1:300 000 masshtabli karta varaqlari rim raqamlari bilan belgilanadi i-IX, ular 1:1 000 000 masshtabli karta nomenklaturasidan oldin yoziladi, masalan, VIII-M-39. 1:200 000 mastabli karta varaqlari ham rim raqamlari bilan belgilanadi I-XXXVI, ular 1:1 000 000 masshtabli karta nomenklaturasidan keyin yoziladi, masalan, M-39-XXVII; va nihoyat, 1:100 000 masshtabli karta trapetsiyasi arab raqamlari bilan 1 dan 144 gacha belgilanadi, ular ham 1:1 000 000 masshtabli karta nomenklaturasidan keyin yoziladi, masalan, M-39-120. Bunda raqamlarni qo'yib chiqish chapdan o'ngga qatorlar bo'ylab, shimoldan janubga tomon hisoblanadi *(63,a-rasm).*

8-jadval

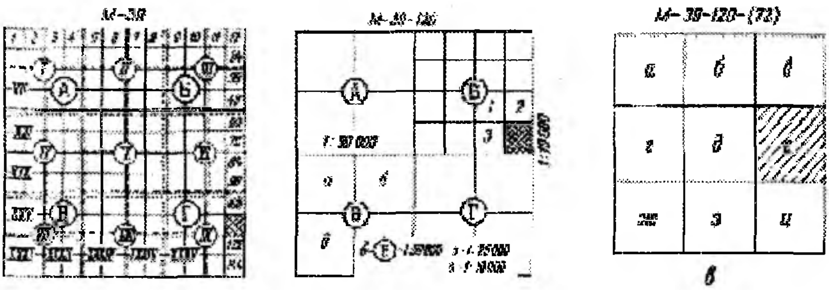
Kartalar ramkasi o'lchamlari

Karta masshtabi	Tomonlar o'lchami		Karta masshtabi	Tomonlar o'lchami	
	Meridianlar bo'yicha	Parallellar bo'yicha		Meridian-lar bo'yicha	Parallellar bo'yicha
1 : 1 000	4⁰00'	6°00'	1 : 50 000	10' 00'	15' 00
1 : 500 000	2° 00	3°00	1 : 25 000	5 00	7 30
1 : 300 000	1° 20	2° 00	1 : 10 000	2 30	3 45
1 : 200 000	0°40	1°00	1 : 5 OOO	1 15	1 52.5
1 : 100 000	0°20	0°30	1 : 2 000	0 25	0 37,5

1:100 000 masshtabli karta varag'i yirik masshtabli kartalar razgrafkasi va nomenklaturasiga asos qilib olingan; bitta 1:100 000 masshtabli karta varag'ida 4 ta 1:50 000 masshtabli karta varaqlari joylashadi, ular rus alfavitining bosh harflari bilan belgilanadi A, Б, B, Г, masalan, M-39-120-Б. 1:50 000 masshtabli karta varag'ida 4 ta 1:25 000 masshtabli karta varaqlari joylashadi, ular rus alfaviti kichik harflari bilan belgilanadi *a, б, в, г*, masalan, M-39-120-Б-г *(63,b-rasm).*

1:25 000 masshtabli karta varag'ida 1:10 000 masshtabli kartaning 4 ta varag'i joylashadi, ular 1, 2, 3, 4 arab raqamlari bilan belgilanadi, masalan: *M-39-120-Б-г-4*. Bundan tashqari, 1:100 000 masshtabli karta varag'i tarkibida 1:5 000 masshtabli kartaning 256 ta varag'i joylashadi, ular qavslarga olingan holda 1 dan 256 gacha arab raqamlari bilan belgilanadi, masalan *(63-rasm)*: *M*-39-120-(72).

1:5 000 masshtabli karta varag'ida 1:2 000 masshtabli kartaning 9 ta varag'i joylashadi, bu varaqlar *a* dan *i* gacha bo'lgan harflar bilan belgilanadi. 60^0 – 70° kenglikda topografik kartalar varaqlari nomenklaturasi ikki karra oshiriladi, $\varphi = 76^\circ$ kenglikdagi shimoliy parallellarda esa to'rt karra oshiriladi.



63-rasm. **Sobiq Ittifoq topografik kartalarining razgrafkalarini ishlab chiqish va ularning nomenklaturasi**

59-§. Keng polosalar uchun Gauss-Kryuger proyeksiyasi

Keng polosalar uchun Gauss-Kryuger proyeksiyasi formulalarini ishlab chiqish bilan ko'p olimlar L. Kryuger, V.V. Kavrayskiy, V.P. Morozov va boshqalar keng ko'lamda shug'ullanishgan. Bunday izlanishlar eng avvalo, proyeksiyaning afzallik jihatlari va undan topografik kartalarni tuzishda hamda geodezik o'lchashlarni qayta ishlashda keng miqyosda foydalanish bilan bog'liq bo'ldi. Shuningdek, Gauss-Kryuger formulalari ellipsoidni tekislikda tasvirlashda, asosan, faqat tor zonalar bo'yicha masalalar yechish uchun yaroqli hisoblanishi bo'yicha tadqiqotlar olib borilishiga turtki bergan. Aslida bu proyeksiya berilgan shartlar bo'yicha teng burchakli hisoblanib, o'z navbatida unda Koshi-Riman sharti bajarilishi talab qilinadi:

$x_q = y_\lambda; \quad x_\lambda = -y_q$ yoki Laplas tenglamasiga amal qilinadi:

$$x_{qq}+x_{yy}=0;\ y_{qq}+y_{\lambda\lambda}=0,$$

$$\ln\mu_{qq}+\ln\mu_{\lambda\lambda}=0;\ \gamma_{qq}+\gamma_{\lambda\lambda}=0.$$

Biroq, yuqorida qayd qilib o'tilganidek, unda bir vaqtning o'zida faqat Koshi-Riman shartlaridan biri bajariladi va Laplas tenglamasi esa to'liq holda bajarilmaydi. Masalan, Gauss-Kryuger proyeksiyasida abssissani hisoblash uchun to'rtta qismga ega bo'lgan (faqat kenglik funksiyalari hisoblangan uzilish tavsifidagi A_i koeffitsiyent bilan birgalikda) va ordinatani hisoblashga mos keluvchi uchta qismga ega bo'lgan λ darajasi bo'yicha o'zaro simmetrik qatorlar ko'rinishida berilgan bo'lsin.

Belgilaymiz:

$$x=X+\Delta x;\ y=Y+\Delta y,$$

bu yerda X, Y – Gauss-Kryuger proyeksiyasi koordinatalari; Δx, Δy – X, Y koordinatalardan teng burchakli proyeksiya x, y koordinatalarga o'tishda kiritilgan tuzatmalar.

$$\Delta x_{qq}+\Delta x_{\lambda\lambda}=56A_8\lambda^6$$

$$\Delta y_{qq}+\Delta y_{\lambda\lambda}=42A_7\lambda^5$$

Bunda:

$$A_8 = 1/6!N\cos^7\varphi\sin\varphi\,(1385-3111\,tg^2\varphi+543\,tg^4\varphi-tg^6\varphi);$$

$$A_7 = 1/5!N\cos^7\varphi\,(61-479\,tg^2\varphi+179\,tg^4\varphi-tg^6\varphi).$$

Shu sababli Gauss-Kryuger proyeksiyasi formulalaridan foydalanishda kartaga olinayotgan zonaning kengaytirilishi yoki tuzib chiqiluvchi karta masshtablarini yiriklashtirish talab qilinishi sharoitida ko'rsatib o'tilgan formulalarda parchalanishning saqlanuvchi qismlari son miqdorini oshirish ehtiyoji tug'iladi.

Bu holat hisoblash hajmining sezilarli darajada ortishiga olib keladi, A.Z. Sazonov tadqiqotlarida 60° ga yaqin uzoqlikli farqlarda bu hisoblashni hatto EHMdan foydalanib ham bajarish mumkin emas. Qarab chiqilayotgan proyeksiyani olish uchun bir nechta usullardan foydalanish mumkin. Bunda L.Kryuger taklif etgan va V.V. Kavrayskiy, M.D. Solovyov, V.P. Morozov tomonidan batafsil o'rganilgan Gauss-Kryuger proyeksiyasini olish usulini keltiramiz.

Bunda proyeksiya uchlangan tasvirlash usulida hosil qilinadi:

– ellipsoid sirti shar yuzasida Molvayde usulida teng burchakli tasvirlanadi;

– tekislikda sharning Gauss-Lambert teng burchakli proyeksiyasi hosil qilinadi;

– o‘rta meridianda uzunlikning saqlanishida hosil qilingan proyeksiyaning konform shaklda qayta o‘zgartirilishi amalga oshiriladi.

Shar yuzasida ellipsoidni tasvirlashda ellipsoid nuqtalari geodezik koordinatalari φ, λ va geografik koordinatalar $\varphi_ш$, $\lambda_ш$ o‘rtasidagi bog‘liqlik quyidagi tenglama bilan ifodalanadi:

$$\lambda_ш = \lambda; q_ш = q \ln U \text{ yoki}$$

$$tg(45^\circ + \varphi_ш/2) = tg(45^\circ + \varphi/2)[(1 - e\sin\varphi)/(1 + e\sin\varphi)]^{e/2}. \qquad (202)$$

Oxirgi tenglikni Teylor qatoriga taqsimlash natijasida

$$\varphi_{sh} = \varphi - \alpha_2 \sin 2\varphi + \alpha_4 \sin 4\varphi - \alpha_6 \sin 6\varphi + ... \text{ unda}$$

$$\alpha_2 = 2\left(n' - \frac{1}{3}n'^2 - \frac{2}{3}n'^3 + ...\right)$$

$$\alpha_4 = \frac{5}{3}n'^2 - \frac{16}{15}n'^3 + ...;$$

$$\alpha_6 = \frac{26}{15}n'^3 + ...;$$

$n' = (\alpha - b)/(\alpha + b)$, bunda a va b – ellipsoid yarim o‘qlari.

Krasovskiy ellipsoidiga qo‘llanganda:

$$a_2 = 0.0033560728; \ a_4 = 0.0000046932;$$

$$a_6 = 0.0000000082.$$

Olingan qiymatlar φ_{sh}, λ_{sh} Gauss-Lambert proyeksiyasi to‘g‘ri burchakli $x_{Г-Л}$, $y_{Г-Л}$ koordinatalarini hisoblashda foydalaniladi, qulaylik uchun bularni $R\xi$ va $R\eta$ bilan belgilashni kiritamiz, unda

$$\xi = arctg(tg\varphi_ш \sec\lambda_ш);$$

$$\eta = \frac{1}{2}\ln\frac{1 + \cos\varphi_ш \sin\lambda_ш}{1 - \cos\varphi_ш \sin\lambda_ш}. \qquad (205)$$

Uchinchi o‘zgartirishni bajarish uchun, ya’ni Gauss-Lambert proyeksiyasidan Gauss-Kryuger proyeksiyasiga o‘tish uchun quyidagi ko‘rinishdagi analitik funksiyadan foydalaniladi:

$$x + iy = F(\xi + i\eta). \qquad (206)$$

O‘rta meridian nuqtalari uchun bu funksiya quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$x_0 = F(\xi_0) = F(\varphi_{sh}).$$

Gauss-Kryuger proyeksiyasi sharti bo‘yicha uzunlik o‘rta meridianda saqlanadi, ya’ni $x_0 = s_m$, bu yerda s_m – ekvatordan berilgan parallelgacha meridian yoyi uzunligi.

Sferoidik geodeziyadan meridian yoyi uzunligi s_m va ellipsoidni geodezik kengligi φ o‘rtasidagi bog‘liqlik formulasi ma’lum. Biroq, φ va φ_{sh} kengliklar bog‘liqligi formulasini hisobga olgan holda, o‘zgartirishlar amalga oshirilganidan keyin x_0 qiymatni hisoblash uchun quyidagi tenglamani hosil qilish mumkin:

$$x_0 = s_m = R(\varphi_{sh} + \alpha_2 \sin 2\varphi_{sh} + \alpha_4 \sin 4\varphi_{sh} + \ldots),$$

bunda

$$R = \frac{a}{1+n'}\left(1 + \frac{n'^2}{4} + \frac{n'^4}{64} + \ldots\right);$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2}n' - \frac{2}{3}n'^2 + \frac{15}{16}n'^3 + \ldots;$$

$$\alpha_4 = \frac{13}{48}n'^2 - \frac{3}{5}n'^3 \ldots$$

Krasovskiy ellipsoidiga nisbatan tadbiq etish bo‘yicha

$$R = 6367558{,}4969;\ \alpha_2 = 0{,}0008376118;\ \ \alpha_4 = 0{,}0000007606.$$

O‘rta meridianda $x = x_0$ va $\xi = \xi_0 = \varphi_{sh}$ tenglik amal qilishini hisobga olgan holda, umumiy holatda analitik funksiyada x_0 qiymati o‘rniga $x + iy$ qiymatni qo‘yish va shuningdek, ξ_0 qiymat o‘rniga $\xi + i\eta$ qiymatni qo‘yish orqali yozish amalga oshiriladi.

U holda, kompleks o‘zgaruvchi funksiya formulalarini tadbiq etish orqali, hosil qilingan tahliliy funksiyada haqiqiy qismni hayoliy qismdan ajratishni amalga oshiramiz va natijada Gauss-Kryuger teng burchakli proyeksiyasida qat’iy tartibdagi to‘g‘ri burchakli koordinatalar formulalarini hosil qilamiz:

$$x = R(\xi + \alpha_2 \sin 2\xi ch2\eta + \alpha_4 \sin 4\xi ch4\eta + \ldots);$$

$$y = R(\eta + \alpha_2 \cos 2\xi sh2\eta + \alpha_4 \cos 4\xi sh4\eta + \ldots).$$

Uzoqlik Δλ=30° bo‘lganda, proyeksiyaning to‘g‘ri burchakli koordinatalarini hisoblash xatoligi 0,1 m dan kam bo‘ladi.

Proyeksiyada uzunlikni xususiy masshtabi

$$m = m_1 m_2 m_3$$

bu yerda m_1, m_2, m_3 – yuqorida keltirilgan 3 xil teng burchakli tasvirlashning xususiy masshtablari.

Umumiy holatda

$$m = \frac{R\cos\varphi_{u}}{N\cos\varphi}\sqrt{\frac{x_\xi^2 + y_\xi^2}{1-\cos^2\varphi_{u}\sin^2\lambda_{u}}}$$

V.P.Morozov belgilarini kiritib, olamiz

$$m = \frac{H\cos\varphi_{u}}{\cos\varphi}\sqrt{1+e'^2\cos^2\varphi}\sqrt{\frac{x_\xi^2 + y_\xi^2}{1+\cos^2\varphi\sin^2\lambda}}$$

bunda H = 0,994 977 825; e'^2 = 0,006 738 525 4 (Krasovskiy ellipsoidi uchun). Quyidagi tenglikdan xususiy hosilalarni yetarlicha aniqlikda topish mumkin

$$x_\xi = 1 + 2\alpha_2\cos 2\xi ch2\eta + 4\alpha_4(2ch2\eta - 1)(2\cos_\xi^2 - 1);$$

$$y_\xi = -2sh2\eta\sin 2\xi(\alpha_2 + 8\alpha_4 ch2\eta\cos 2\xi).$$

Ko'rib chiqilayotgan Gauss-Kryuger proyeksiyasida meridianlar yaqinlashishi

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 \text{ , bunda}$$

$$\gamma_1 = arctg(\sin\varphi_{u} tg\lambda_{u});$$

$$\gamma_2 = -y_\xi / x_\xi$$

x_ξ, y_ξ – yuqorida keltirilgan xususiy hosilalar.

Gauss-Kryuger proyeksiyasini olishni bunday usulining afzalligi shundaki, formulalari nisbatan oddiy va xoxlagan uzoqlik farqlarida ($\varphi = 0$, $\lambda = 90°$ nuqtalar va ularning chetlari bundan mustasno) proyeksiyani hisoblash imkoni bor.

60-§. Moslashuvchan izokolali teng burchakli proyeksiyalar

Bu proyeksiyalar tarkibiga Sxols, Labord, Yung, Lagranj proyeksiyalarini kiritish mumkin. Sxols proyeksiyasi maydoni bo'yicha kichik hududlarni (masalan, Gollandiya hududini) kartaga olish, Labord proyeksiyasida topografik kartalarni tuzish, Madagaskar orolida geodezik o'lchashlarni amalga oshirishga mo'ljallangan; Yung proyeksiyasi dastlabki ikkita proyeksiyaga o'xshash. Lagranj proyeksiyasi ham kichik va ham yirik hududlar kartalarini tuzishda qo'llanilishi mumkin. Quyida ularning ba'zi xossalari qarab chiqiladi. Moslashuvchan izokolali teng burchakli proyeksiyalarni olish va ulardan foydalanish haqidagi masalalar L.A.Vaxrameyeva tadqiqotlarida bayon qilingan. Bu proyeksiyalar bir jinsli uyg'un ko'phad va funksiyaning qatorlarga bo'linishidan hosil bo'ladi.

Proyeksiyalarni olishning birinchi usulini karab chiqamiz.

Haqiqiy D hududda ikkita o'zgaruvchan (x, u) ning uyg'un funksiyasi deb, bu hududda uzluksiz ikki marta defferensiallanish xususiyatiga ega va Laplas tenglamasini qoniqtiradigan funksiyaga aytiladi.

$u_{qq} + u_{\lambda\lambda} = 0$ bunda $q va \lambda$ – izometrik koordinatalar.

Bu tenglamaning yechimi sifatida funksiya $u = F(x + iy)$ D hudud uchun uzluksiz. Taxmin qilamiz:

$$u = F(x + iy) = (x + iy)^n. \tag{207}$$

Unda ketma-ket (207) tenglik n (n = 1, 2, 3, . . .) darajaga ko'tariladi va haqiqiy va mavhum hadlar ajratiladi, shunda teng burchakli proyeksiyalar to'g'ri burchakli formulalarini quyidagicha tasavvur etish mumkin:

$$x = \sum_{i=1}^{k} (a_i\psi_i - b_i\theta_i); \; y = \sum_{i=1}^{k} (a_i\theta_i - b_i\psi_i);$$

bunda a_i, b_i – doimiy koeffitsiyentlar, ψ_i, θ_i – uyg'un ko'phad bo'laklari, masalan, ular V.P. Morozov formulari asosida aniqlanadi:

$$\psi_1 = (q - q_0) = \xi; \; \theta_1 = (\lambda - \lambda_0) = \eta$$
$$\psi_2 = \xi\psi_1 - \eta\theta_1; \; \theta_2 = \xi\theta_1 + \eta\psi_1$$
$$\psi_k = \xi\psi_{k-1} - \eta\theta_{k-1}; \; \theta_k = \xi\theta_{k-1} + \eta\psi_{k-1};$$

(208) formulalar simmetrik yoki asimmetrik shaklga ega bo'lgan hududlarni kartaga olish uchun zarur bo'lgan teng burchakli kartografik proyeksiyalar formulalarini olish imkonini beradi. Birinchi holat uchun (208) tenglikni quyidagicha ifodalash mumkin:

$$x = \sum_{i=1}^{k} a_i \psi_i; \; y = \sum_{i=1}^{k} a_i \theta_i.$$

Kartografik proyeksiyalarning umumiy nazariyasiga asosan, bunday proyeksiyalarda uzunlik xususiy masshtabi va meridianlar yaqinlashishi formulalari quyidagicha bo‘ladi:

$$\mu = \frac{1}{r}\sqrt{x_\xi^2 + y_\xi^2} = \frac{1}{r}\sqrt{x_\eta^2 + y_\eta^2};$$

$$tg\gamma = y_\xi / x_\xi$$

$$x_\xi = \left[\sum_{i=1}^{k} a_i \psi_i\right]\xi = \sum_{i=1}^{k} i a_i \psi_{i-1};,$$

$$y_\xi = \left[\sum_{i=2}^{k} a_i \theta_i\right]\xi = \sum_{i=2}^{k} i a_i \theta_{i-1};$$

$$r = N\cos\varphi; \quad N = a/\left(1 - e^2 \sin^2\varphi\right)^{1/2}$$

a, e – ellipsoidni katta yarim o‘qi va birinchi ekssentrisiteti.

Amaliyotda bu formulalardan foydalanishda ikkita savol tug‘iladi:

– tenglikda nechta uyg‘un ko‘phadlar sonini saqlash kerak;

– o‘zgarmas koeffitsiyentlar a_i, b_i aniqlash usullarini tanlash kerak.

Ilmiy tadqiqotlar natijasiga ko‘ra, agar (*209*) formulada faqat bitta parametr (a_0) saqlansa, Merkator proyeksiyasi olinadi, agar ikkita parametr (a_0, a_1) saqlansa, u holda teng burchakli konusli proyeksiya hosil qilinadi. Har ikkala proyeksiyada ham izokolalar parallellar (almukantaratlar) bilan o‘zaro mos tushadi, ya’ni a_0, a_1 parametrlar izokolalar shakliga (izokolalar shakli kartadagi hudud tasviriga yaqinlashishi) ta’sir ko‘rsatmaydi.

Xatoliklar qiymatlaridagi keskin o‘zgarishlar va ularning taqsimlanishi izokolalar shaklida ko‘rinadi va uchinchi parametrning kiritilishidan (a_3) yuzaga keladi. Keyingi parametrlarning saqlanishi xatoliklar qiymatlarini birmuncha darajada kamaytirilishida kuzatiladi, izokolalarning kartaga olinayotgan hudud konturiga yaqinlashishi darajasi yaxshilanadi, biroq hisoblashlarning hajmi sezilarli darajada ortadi.

Bundan ta’kidlash mumkinki, ushbu parametr qiymatiga bog‘liq holda xatolik qiymatlari ham o‘zgaradi, ularning taqsimlanishi va izokolalarning shakli o'zgaradi, ya'ni bundan har xildagi teng burchakli proyeksiyalarni hosil qilish mumkin. Shunday yaqinlashtirishni Gauss-Kryuger proyeksiyalari, teng burchakli konusli va azimutal va ular o'rtasidagi oraliq proyeksiyalarda ko'rish mumkin.

Doimiy a_i parametrlar kichik kvadratlar usuli bo'yicha aniqlanishi mumkin, biroq ularning qiymatlarini, shuningdek, a_3 parametrning proyeksiya xossalariga va izokolalar shakliga ta'siri o'zgarishlarini tahlil qilish asosida aniqlash mumkin. Olib borilgan tahlillar natijasiga ko'ra, bu parametrning qiymati quyidagiga teng: Gauss-Kryuger proyeksiyasiga yaqin proyeksiyani olish uchun:

$$a_3 = \frac{N_0}{6}\cos\varphi_0 \sin^2\varphi_0 - \frac{N_0}{6}\cos^3\varphi_0;$$

teng burchakli konusli proyeksiyaga yaqin proyeksiyalarni olishda:

$$a_3 = \frac{N_0}{6}\cos\varphi_0 \sin^2\varphi_0;$$

azimutal proyeksiyalarni olishda:

$$a_3 = \frac{N_0}{6}\cos\varphi_0 \sin^2\varphi_0 - \frac{N_0}{12}\cos^3\varphi_0;$$

Agar oraliq xususiyatli proyeksiyalarni olish zarur bo'lganda parametrni quyidagi formula bilan aniqlash mumkin:

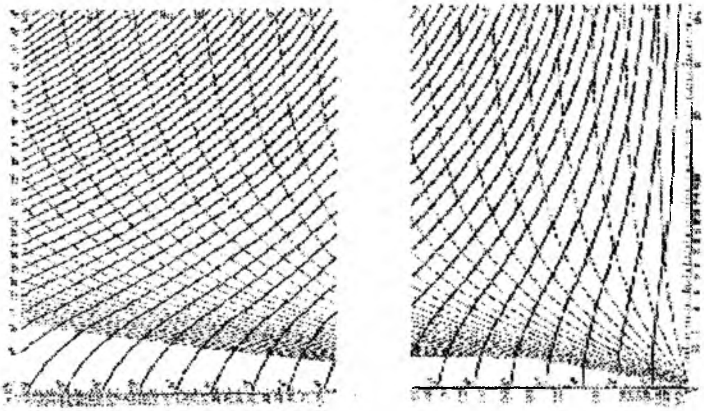
$$a_3 = \frac{N_0}{6}\cos\varphi_0 \sin^2\varphi_0 - \frac{N_0}{k}\cos^3\varphi_0; \text{ bunda } 6<k<\infty.$$

holatda izokolalar o'q meridian bo'ylab joylashadi, $k=12$ shartida – aylana shaklida, $k=\infty$ – izokolalar parallelar bilan ustma-ust tushadi yoki ularga yaqinlashadi, $k<6$ – giperbola shaklida, $6<k<12$ – cho'ziq ko'rinishida, meridianlar bo'ylab cho'zilgan, $12<k<\infty$ – izokolalar parallellar bo'ylab cho'zilgan oval holatda. Kenglik va uzoqlik bo'yicha cho'zilgan kartaga olinayotgan hudud bilan moslikda k koeffitsiyentning aniqlanishini 64-rasmda keltirilgan nomogramma bo'yicha amalga oshirish mumkin.

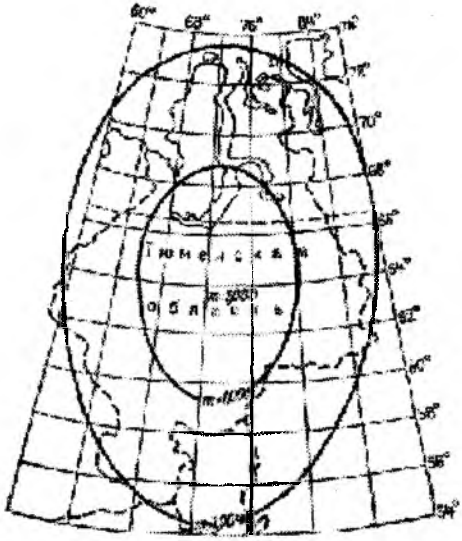
Bu nomogramma ekvator uchun tuzib chiqilgan, biroq har qanday xohlagan kenglik uchun ham foydalanilishi mumkin, buning uchun b qiymat ushbu parallel bo'yicha kenglikning kosinus qiymatiga ko'paytirilishi kerak:

$$b_{np} = b\cos\varphi_{cp};\ n = b_{np} / a,$$

bu yerda a – o‘rta meridian bo‘ylab hududning cho‘zilishini ifodalaydi. k qiymatni o‘nning bir ulushi darajasigacha aniqlash yetarlidir.



64-rasm. **Qatorlar yordamida hosil qilingan proyeksiyada k koeffitsiyent va $m-1$ uzunlik xatoligini aniqlash nomogrammasi.**



65-rasm. **Qatorlardan foydalanish yo‘li bilan hosil qilingan Tyumen viloyati kartasi proyeksiyasi.**

Misol sifatida Tyumen viloyatining kartasi uchun hosil qilingan ($k=4{,}8$) moslashuvchan izokolalar bilan birgalikdagi kartografik to‘r maketini keltiramiz *(65-rasm).*

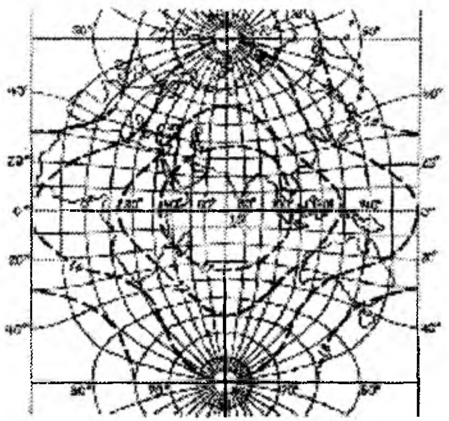
61-§. Elliptik koordinatalar yordamida hosil qilingan teng burchakli proyeksiyalar

2-§ da ko‘rsatib o‘tilganidek, elliptik koordinatalar shar sirtida sferik ellips markazining joylashish holatiga bog‘liq. Gyuy elliptik koordinatalarida sferik ellips fokuslari $\varphi_0=\pm45^\circ$ kenglik qiymatiga ega. Bu holatda koordinatalarni hisoblash formulasi quyidagicha bo‘ladi:

$$\cos a=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\varphi-\cos\varphi\sin\lambda);$$

$$\cos b=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\varphi+\cos\varphi\cos\lambda);$$

$$\sin u=\sqrt{2}\cos[(a+b)/2]; \ \sin\upsilon=\sqrt{2}\sin[(a-b)/2].$$



66-rasm. **Gyuy proyeksiyasida *p* izokolalari**

Ko‘rsatib o‘tilgan formulalardan foydalanish bo‘yicha hosil qilingan Gyuy proyeksiyasida dunyo kartasi ikkita yarim shardan iborat. Bunda har bir yarim sharda o‘q meridianlarning ekvator bilan kesishish nuqtasida xatolik mavjud emas va har bir yarim sharni chegaralovchi meridianlarning kesishish nuqtasida u maksimal qiymatga egaligi kuzatiladi. Bu meridianlar to‘g‘ri chiziqlar bilan tasvirlanadi, natijada har bir yarim shar tasviri kvadrat shaklda bo‘ladi *(66-rasm).*

Pirs elliptik koordinatalarida barcha to‘rtta fokus geografik ekvatorda $(\varphi_0 = 0)$, uning $\lambda_0 = \pm 45°$uzoqlik qiymatiga ega bo‘lgan meridianlari bilan kesishish nuqtasida joylashadi. Bu holatda yakuniy formulalar quyidagicha bo‘ladi:

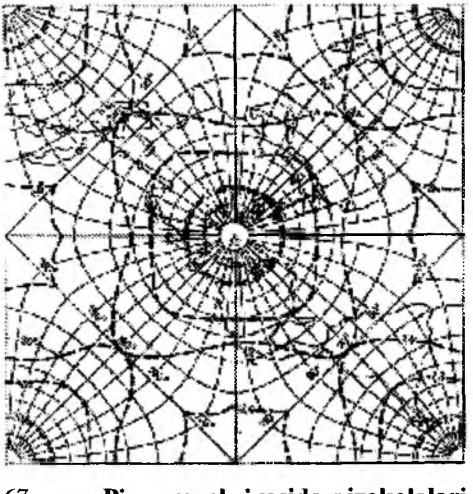
$$\cos a = \cos\varphi \cos(45° + \lambda);$$

$$\cos b = \cos\varphi \cos(45° - \lambda).$$

Barcha holatda $\sin u$ va $\sin \upsilon$ hisoblash formulalari bir hilda bo‘ladi. Pirs koordinatalari 90° ga buralgan Gyuy koordinatalarini eslatadi. Bu koordinatalar yordamida hosil qilingan proyeksiyalar butun yer yuzasining o‘ziga xos tasvirini beradi. Bu proyeksiyalarda xatoliklar geografik qutblar nuqtalarida mavjud emas; maksimal xatolik qiymati kvadrat shakliga ega bo‘lgan ekvatorning qayrilish burchagida kuzatiladi *(67-rasm).*

Elliptik koordinatalarning uchinchi tizimi – *Adams koordinatalari* nomi bilan mashhur bo‘lib, qutblarda va ekvatorda sferik ellipslar fokuslariga ega. Bu koordinatalar tizimida formulalar quyidagi ko‘rinishga ega:

$$a = 90° - \varphi, \cos b = \cos\varphi \sin\lambda.$$



67-rasm. **Pirs proyeksiyasida *r* izokolalari**

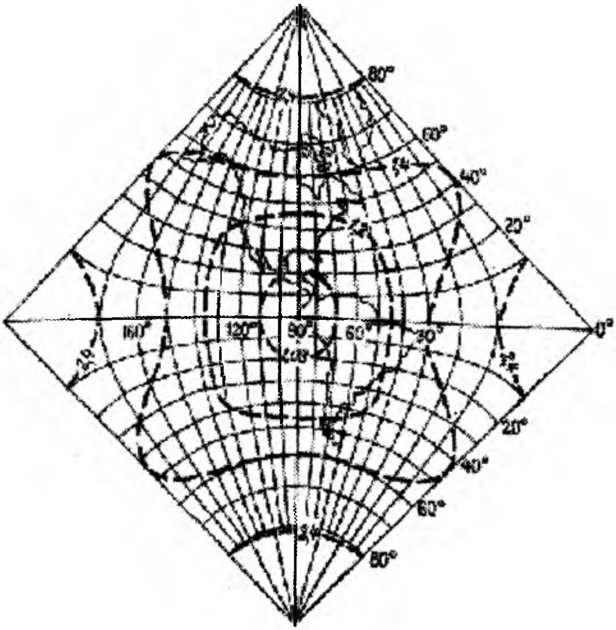
Bunday koordinatali proyeksiyalarda kartaga olinayotgan yuza yarim sharlarga bo'linib tasvirlanadi; har bir yarim shar (g'arbiy yoki sharqiy) romb shaklida bo'ladi.

Xatolik o'q meridian bilan ekvator kesishish nuqtasida mavjud emas, uni maksimal qiymati qutblarda, ekvatorning yarim sharni chetki meridianlari bilan kesishish nuqtasida kuzatiladi *(68-rasm)*. Qarab chiqilgan ushbu elliptik koordinatalar tizimi izometrik koordinatalar hisoblanib, ular yordamida quyidagi formulalar bo'yicha teng burchakli proyeksiyalarni hosil qilish mumkin:

$$x = \xi;\ y = \eta,\ \text{bunda}$$

$$\xi = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{1-\sin^2 u \sin^2 \varphi_0}};\ \eta = \int_0^\upsilon \frac{du}{\sqrt{1-\sin^2 \upsilon \cos^2 \varphi_0}},$$

ya'ni, ular birinchi turdagi elliptik koordinatalar hisoblanib, qiymatlari jadvallardan aniqlanishi mumkin [Yanke E. va boshqalar. Maxsus funksiyalar. Formulalar. Grafiklar. Jadvallar. Moskva, «Fan» nashriyoti, 1968].



68-rasm. **Adams proyeksiyasida *r* izokolalari**

Tadqiqotlar natijalari ko'rsatishicha, elliptik koordinatalardan foydalanish bo'yicha olingan proyeksiyalarda uzunlik masshtablari quyidagi formula yordamida hisoblanadi:

$$\mu = \sqrt{\cos eca \cos ecb}.$$

Har bir yarim sharni markaziy nuqtasi atrofida izokolalar aylana shakliga ega; ushbu nuqtadan uzoqlashish bilan izokolalarning shakli murakkablashib boradi va to'rtta yaproqli shakl ko'rinishini oladi.

62-§ Chebishev proyeksiyasi

1853-yilda P.L. Chebishev nisbatan eng yaxshi teng burchakli proyeksiyalar haqidagi teoremani ishlab chiqdi. Bu teoremaga muvofiq, berilgan aniq hudud bo'yicha kartalarni tuzib chiqish uchun nisbatan eng yaxshi hisoblangan teng burchakli proyeksiyalarda ushbu hudud konturida masshtabning natural logarifmi no'l qiymatni qabul qilishi kerak. Bu teoremani 1894-yilda D.A. Grave isbotlagan. Proyeksiyalarni amaliy jihatdan olishning dastlabki usullari 1947-yilda N.A. Urmayev tomonidan tavsiya qilingan.

Chebishev proyeksiyasi va unga yaqin bo'lgan teng burchakli proyeksiyalarni ishlab chiqish ishlari V.V. Kavrayskiy, L.A.Vaxrameyeva, N.Y. Vilenkin, L.M. Bugayevskiy, G.I. Konusova, G.A. Mesheryakov va boshqa olimlarga tegishlidir.

Chebishev proyeksiyasini hisoblashda quyidagi ikkita masalani yechish zarur:

– kartaga olinayotgan hudud nuqtalarida berilgan uzunlikning xususiy masshtabi (μ) logarifmi doimiy qiymati bo'yicha shu kontur doirasida proyeksiyaning xususiy masshtablari hamda boshqa tavsiflari qiymatlarini aniqlash;

– kartaga olinayotgan hudud nuqtalarida uzunlikning xususiy masshtablari qiymati bo'yicha proyeksiya nuqtalari *x, u* teng burchakli koordinatalarini aniqlash.

Masalaning birinchi qismi no'l qiymatdagi chegaraviy shartlar bilan birgalikda Puasson tenglamasini yechish orqali hal qilinadi yoki berilgan chegaraviy shartlar asosida Laplas tenglamasi yordamida yechiladi, ya'ni Dirixle ichki masalasi yechiladi:

$$\ln \mu_{qq} + \ln \mu_{\lambda\lambda} = 0;$$

belgilangan shartlar bo‘yicha

$\ln \mu|_{\Gamma} = \ln r_{\Gamma}$, bu erda q, λ – izometrik koordinatalar;

$$r = N \cos \varphi; \ \ln m = \ln \mu - \ln r.$$

Laplas tenglamasi yechimi quyidagi funksiyani ifodalaydi:

$$\ln \mu = F(q + i\lambda), \tag{211}$$

Bu funksiya G kontur bilan chegaralangan, kartaga tushiriluvchi hudud uzluksiz tavsifga ega bo‘ladi. (*211*) tenglamani (*208*) tenglama ko‘rinishida tasavvur qilish mumkin va xohlagan konturga ega hududni kartaga olish uchun bir jinsli uyg‘unlikdagi ko‘phad bo‘yicha Laplas tenglamasi yechimini olish mumkin:

$$\ln \mu = \sum_{i=0}^{k} a_i \psi_i + \sum_{i=1}^{k} b_i \theta_i, (i = 1,2,3,...) \tag{212}$$

bu yerda ψ_i, θ_i – (*208*) tenglama asosida aniqlanadi; a_i, b_i – proyeksiyaning doimiy parametrlari, belgilangan shartlar asosida aniqlanadi (*210*). Kartaga olinayotgan hudud o‘rta to‘g‘ri meridianga nisbatan simmetrik holdagi konturga ega bo‘lganda (*212*) tenglama quyidagi ko‘rinishga ega bo‘lishi mumkin:

$$\ln \mu = \sum_{i=0}^{k} a_i \psi_i; (i = 1,2,3,...) \tag{213}$$

Bunda yuqorida ta’kidlab o‘tilganidek, tasvirlanayotgan hudud konturida chegaraviy shartlarga amal qilinadi (*210*). Urmayev ishlarida ko‘rsatilishicha, Laplas tenglamasi yechimi uchun va o‘z navbatida, tasvirlanayotgan hududning ichki nuqtalarida uzunlikning xususiy masshtablarini topish uchun Rits variatsion usuli, to‘rlar usuli, uyg‘un funksiyalarni tuzib chiqish usuli va chegaraviy shartlarni nisbatan yaxshi darajada qoniqtiruvchi kichik kvadratlar usulidan foydalanish mumkin. Murakkab tuzilishga ega bo‘lgan hududlarni kartaga olishda oxirgi usul nisbatan qulay va samarali hisoblanadi.

Laplas tenglamasi yechimidan foydalanish orqali (*212*) va (*210*) tenglamani hisobga olgan holatda, bu proyeksiya nuqtalarida uzunlikning xususiy masshtabi natural logarifmini aniqlash uchun quyidagi tenglamadan foydalaniladi:

$$\ln m = \ln \mu - \ln r = \sum_{i=0}^{k} a_i \psi_i + \sum_{i=0}^{k} b_i \theta_i - \ln r. \qquad (214)$$

Doimiy koeffitsiyentlarni a_i, b_i (*214*) formula bo'yicha bir nechta nuqtalar uchun masshtablar uzunligi natural logarifmi kvadratlari yig'indisi minimal qiymatda, sharti bilan aniqlaymiz, bunda ularning soni aniqlanayotgan koeffitsiyentlardan ko'p. Doimiy koeffitsiyentlarni aniqlash orqali, tasvirlanayotgan hudud ichki nuqtalari uzunlik xususiy masshtablari qiymatini hisoblab topish, ya'ni masalaning birinchi qismini yechish mumkin.

Masalaning ikkinchi qismi quyidagi ko'rinishdagi differensial tenglamani yechish yo'li bilan hal qilinadi:

$$\mu^2 = x_q^2 + y_q^2, \qquad (215)$$

bu yerda $\mu = mr$; m – uzunlikning xususiy masshtabi, $r = N\cos\varphi$ – parallelning egrilik radiusi.

Chebishev proyeksiyasining to'g'ri burchakli koordinatalarini aniqlashning turli usullari N.A.Urmayev, L.M.Bugayevskiy, N.Y.Vilenkin va boshqalar ishlarida qarab chiqilgan. Chiziqli approksimatsiya usulidan foydalanish orqali kartaga tushiriluvchi hudud asimmetrik tuzilishga ega bo'lgan holat uchun umumiy tarzdagi Chebishev proyeksiyasi formulalarini hosil qilamiz.

Bunda (*215*) tenglamani quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$x_q = \mu\cos\gamma;\ y_q = \mu\sin\gamma;$$

$$x_\lambda = -\mu\sin\gamma;\quad y_\lambda = \mu\cos\gamma, \qquad (216)$$

bu yerda γ – bu tenglikda noma'lum bo'lgan meridianlar yaqinlashishi va m – uzunlik xususiy masshtabini hamda λ – funksiyani tez aniqlash mumkin. Meridianlar yaqinlashishini aniqlash uchun Laplas tenglamasini yozamiz:

$\gamma_{qq} + \gamma_{\lambda\lambda} = 0$ va unga teng bo'lgan Koshi-Riman shartini ham

$\gamma_a = (\ln\mu)_\lambda;\ \gamma_\lambda = -(\ln\mu)_q$. Bundan quyidagini topamiz:

$$\gamma = \int(\ln\mu_\lambda)dq + C_1(\lambda);$$

$$\gamma = \int(\ln\mu_q)d\lambda + C_2(q). \qquad (217)$$

Formulani (212) differensiyalab va olingan natijani (217) formulaga qo'yib, quyidagini jlamiz:

$$\gamma=\int\left[\sum_{i=0}^{k}a_i(\psi_i)_\lambda+\sum_{i=1}^{k}b_i(\theta_i)_\lambda\right]dq+C_1(\lambda);$$

$$\gamma=\int\left[\sum_{i=0}^{k}a_i(\psi_i)_q+\sum_{i=1}^{k}b_i(\theta_i)_q\right]d\lambda+C_2(q);$$

Koshi-Riman sharti bo'yicha $x_q=y_\lambda; x_\lambda=-y_q$

$$\gamma=\int\left[-\sum_{i=0}^{k}a_i(\theta_i)_q+\sum_{i=1}^{k}b_i(\psi_i)_q\right]dq+C_1(\lambda);$$

$$\gamma=-\int\left[\sum_{i=0}^{k}a_i(\theta_i)_q+\sum_{i=1}^{k}b_i(\psi_i)_\lambda\right]d\lambda+C_2(q);$$

Bu tenglamalarni integrallab, olingan natijani taqqoslab:

$$\gamma=-\sum_{i=1}^{k}a_i\theta_i+\sum_{i=1}^{k}b_i\psi_i.$$

Endi hududning xohlagan nuqtasi uchun γ va μ ning raqamli qiymatini olish mumkin. Proyeksiya teng burchakli bo'lgani uchun:

$$x+iy=F(q+i\lambda)$$

To'g'ri burchakli koordinatalar formulari:

$$x=\sum_{i=1}^{k}m_i\psi_i-\sum_{i=1}^{k}n_i\theta_i;$$

$$y=\sum_{i=1}^{k}m_i\theta_i+\sum_{i=1}^{k}n_i\psi_i.$$

Bunda $\psi_i\theta_i$ – (206) formula bo'yicha hisoblangan uyg'un ko'phadlar, m_i, n_i – doimiy koeffitsiyentlar. m_i ni hisoblash uchun (219) formulani defferensiyalaymiz:

$$x_q=\sum_{i=1}^{k}m_i\upsilon_i-\sum_{i=1}^{k}n_i\tau_i;$$

$$y_q=\sum_{i=1}^{k}n_i\upsilon_i+\sum_{i=1}^{k}m_i\tau_i. \qquad (220)$$

bu yerda:

$$\upsilon_i=(\psi_i)_q=(\theta_i)_\lambda=i\psi_{i-1};$$

$$\tau_i=(\theta_i)_q=-(\psi_i)_\lambda=i\theta_{i-1};$$

(216) formulaga belgilash kiritib,

$$\mu\cos\gamma=T''; -\mu\sin\gamma=P'';$$

(216) va (220) inobatga olib

$$\sum_{i=1}^{k} i m_i \psi_{i-1} - \sum_{i=1}^{k} i m_i \theta_{i-1} = T^{//}.$$

$$\sum_{i=1}^{k} i n_i \psi_{i-1} + \sum_{i=1}^{k} i m_i \theta_{i-1} = P^{//}. \qquad (221)$$

$T^{//}, P^{//} \psi_{i-1}, \theta_{i-1}$ lar noma'lumlar, ularni aniqlovchilar, $m_i n_i$ – doimiy koeffitsiyentlar. (*221*) tenglama ko'rinishidagi tizimni tuzib, nisbatan kichik kvadratlar usuli bo'yicha m_i va n_i haqiqiy koeffitsiyentlarni aniqlaymiz.

Hosil qilingan proyeksiya bevosita ellipsoidning tekislikdagi tasviri bo'lib, ko'plab olimlar (D.A. Grave, N.A. Urmayev, V.V. Kavrayskiy va boshqalar) tomonidan amalga oshirilgan tadqiqotlar natijalariga muvofiq, tasvirlanayotgan hudud doirasida xatolik qiymatining minimalligini ta'minlaydi va bunda xatoliklarning nisbatan yaxshi darajada taqsimlanishi kuzatiladi, shuningdek, xohlagan boshqa teng burchakli proyeksiyalarga nisbatan solishtirilganda, geodezik chiziqlarning tasvirlanishi o'rtacha egriligi qiymati minimallashtirilishi ta'minlanadi.

Nazorat savollari

1. *Gauss koeffitsiyentlarini ifodalovchi formulalarni keltiring.*
2. *Aylanma ellipsoid yuzasida izometrik va geodezik koordinatalar o'rtasidagi bog'liqlik formulalarini yozing va izohlab bering.*
3. *Gauss-Kryuger proyeksiyasi va undan sobiq Ittifoq topografik kartalarini tuzishda foydalanish yo'llarini tushuntiring.*
4. *Gauss-Kryuger proyeksiyasini olishda qanday shartlar belgilangan, ularni tushuntiring.*
5. *Topografik kartalar razgrafkasi va nomenklaturasi tizimini tushuntiring, berilgan karta varag'i nomenklaturasini aniqlang.*
6. *Keng polosalar uchun Gauss-Kryuger proyeksiyasi formulalarini keltiring va ularga qisqacha ta'rif bering.*
7. *Proyeksiyada k koeffitsiyent va m uzunlik xatoligini aniqlash nomogrammasining tuzilishini tushuntiring.*
8. *Gyuy, Pirs, Adams proyeksiyalarining xususiyatlarini qanday, ular qanday kartalar uchun ishlatilishini ta'riflang.*

XII BOB
KARTOGRAFIK PROYEKSIYALARNI QIDIRISH USULLARI

63-§. Matematik kartografiyaning to'g'ri va teskari masalalari haqida tushuncha

I bobda bayon qilingan ma'lumotlar asosida bizga kartografik proyeksiyalarning umumiy tenglamalari ma'lum:

$$x = f_1(\varphi,\lambda); \quad y = f_2(\varphi,\lambda).$$

Agar aks ettiruvchi deb ataladigan f_1, f_2 funksiyalar ma'lum bo'lsa, u holda ular asosida tekislikda yuzaning tasvirlanishi bo'yicha asosiy tenglamani hosil qilish mumkin. Bu tenglama uzunlik va maydon xususiy masshtablari formulalari ko'rinishida ifodalanadi:

$$m = \frac{1}{M}\sqrt{x_\varphi^2 + y_\varphi^2}; \quad n = \frac{1}{r}\sqrt{x_\lambda^2 + y_\lambda^2};$$

$$a^2 + b^2 = m^2 + n^2; \quad ab = mn\sin i; \qquad (222)$$

$p = \frac{1}{Mr}(x_\varphi y_\lambda + x_\lambda y_\varphi) = ab$; meridianlar yaqinlashishi

$\gamma = arctg(y_\varphi / x_\varphi)$; i - proyeksiyada meridianlar va parallellar orasidagi burchak va uning to'g'ri burchakdan farqi ε

$$i = arctg\left(\frac{x_\varphi y_\lambda - x_\lambda y_\varphi}{x_\varphi x_\lambda - y_\varphi y_\lambda}\right); \quad \varepsilon = i - 90^0;$$

burchak xatoligi eng katta qiymati

$\sin(\omega/2) = (a-b)/(a+b)$ va boshqa xususiyatlar.

Matematik kartografiyaning to'g'ri masalasi kartografik proyeksiyalarning shunday aniqlanish usuli hisoblanadiki, bunda dastlab berilgan shartlardan kelib chiqib, f_1, f_2 funksiyalar hosil qilinadi, keyin esa ushbu funksiyalarga bog'liq holatda xususiy masshtablar va proyeksiyaning boshqa tavsiflari aniqlanadi hamda tegishli hisoblashlar amalga oshiriladi.

Matematik kartografiyaning to'g'ri masalasi yechimi bo'yicha kartografik proyeksiyalarni aniqlash usullarining afzalligi foydalanilayotgan matematik apparatning oddiyligidir. Ushbu usullarning o'ziga xosliklari shundaki, hosil qilinayotgan proyeksiya xossalarining faqat aks ettiruvchi funksiyalarini aniqlash va proyeksiya tavsiflariga oydinlik kiritishdan keyin qaror topishi mumkin. Usullarning kamchiligi – turli xil talablarni qoniqtiruvchi yangi proyeksiyalarni qidirib topish imkoniyatlarining cheklanganligidir.

Matematik kartografiyaning teskari masalasi kartografik proyeksiyalarining shunday aniqlash usullari hisoblanadiki, bunda dastlab proyeksiya tavsiflari (yoki ularning bir qismi) beriladi, keyin esa – ularga bog'liq holatda aks ettiruvchi funksiya topiladi yoki bevosita proyeksiyaning to'g'ri burchakli koordinatalari yoki proyeksiyaning berilmagan tavsiflariga oydinlik kiritiladi. Matematik kartografiya teskari masalasining yechimi uchun foydalanilayotgan yuzaning tekislikda to'g'ridan-to'g'ri (bevosita) tasvirlanishi tenglamasi quyidagi ko'rinishda aniqlanadi:

(*222*) formuladan $\mu = mM$, $\nu = nr$ olamiz:

$$x_\varphi = \mu\cos\gamma; \qquad y_\varphi = \mu\sin\gamma;$$
$$x_\lambda = -\nu\sin(\gamma+\varepsilon); \quad y_\lambda = \nu\cos(\gamma+\varepsilon), \tag{223}$$

bu yerda γ – meridianlar yaqinlashishi, $\varepsilon = i - 90^0$

(223) tenglamadagi xususiy hosilalar integrallanadi:

$$\frac{\partial(x_\varphi)}{\partial_\lambda} = \frac{\partial(x_\lambda)}{\partial_\varphi}; \quad \frac{\partial(y_\varphi)}{\partial_\lambda} = \frac{\partial(y_\lambda)}{\partial_\varphi};. \tag{224}$$

(223) tenglikni differensiyalab, olingan natijani (224) qo'yamiz.

O'zgartirishlardan so'ng xususiy hosilali kvazichiziqli birinchi darajali tenglamalarni olamiz:

$$y_\varphi = -\varepsilon_\varphi - \frac{\mu\lambda}{\upsilon}\sec\varepsilon - \frac{\upsilon\varphi}{\upsilon}tg\varepsilon$$
$$y_\lambda = \frac{\mu\lambda}{\mu}tg\varepsilon + \frac{\upsilon\varphi}{\mu}\sec\varepsilon$$

Bu tizim G.A. Mesheryakov tomonidan *Eyler-Urmayev tizimi* deb nomlangan, bunda ikkita tenglama bo'lib, uncha aniqlanmagan to'rtta tavsif tarkibiga kiritiladi. Agar ushbu tizimga aniqlik kiritiladigan bo'lsa, ya'ni to'rtta tavsifdan ikkitasi berilsa va qo‘shimcha chegaralovchi yoki boshlang‘ich shartlar belgilansa, u holda ko‘plab kartografik proyeksiyalar hosil qilinishi mumkin.

(*225*) tenglamaga aniqlik kiritishda bor-yo‘g‘i 15 ta variant tavsiya qilinishi mumkin va shu asosda Mesheryakov tomonidan proyeksiyalarni tavsiflovchi differensial tenglamalar turlari bo‘yicha kartografik proyeksiyalarni genetik tasniflash taklif qilinadi. Eyler-Urmayev tenglamalari tizimiga aniqlik kiritishda (*222*) va (*223*) formulalarga muvofiq, proyeksiyalar bo‘yicha barcha ehtimollikdagi tavsiflardan kelib chiqib, ulardan faqat to‘rttasini mustaqil holdagi tavsiflarni (xususiy hosilalarni – x_φ, x_λ; y_φ, y_λ qiymatlarni aniqlash uchun) hisoblash mumkin.

Matematik kartografiyaning teskari masalasini yechish asosida kartografik proyeksiyalarni aniqlash usullarining afzalligi shundaki, proyeksiyalarni qidirish, ularning istalgan xossasidan kelib chiqib amalga oshiriladi, shuningdek, bu usullar ko‘plab kartogarfik proyeksiyalarni hosil qilish imkonini beradi.

Bu usullarning kamchiligi – ulardan foydalanishda elliptik, giperbolik, parabolik va boshqa aralash tavsifga ega bo‘lgan differensial tenglamalarni yechishga to‘g‘ri keladi, ko‘plab holatlarda bu murakkab masala bo‘lib, katta hajmdagi hisoblashlarni amalga oshirish bilan bog‘liq.

Kartografik proyeksiyalarni hisoblashda (1) yoki (225) tenglikdan tashqari, parallel va meridianlar tenglamasidan ham foydalanish mumkin:

$$\varphi = F_1(x, y); \quad \lambda = F_2(x, y);$$

Bular asosida teskari tasvirlash berilishi mumkin, unda olinayotgan proyeksiya nuqtalarining (x, u) koordinatalari o‘zgaruvchan bo‘lib, geodezik koordinatalari esa (φ, λ) – ularning funksiyalari bo‘ladi. N.A. Urmayev to‘g‘ri $x_\varphi, x_\lambda, y_\varphi, y_\lambda$, va teskari tasvirlash $\varphi_x, \varphi_y, \lambda_x, \lambda_y$ xususiy hosilalari o‘rtasidagi bog‘liqlik formulalari munosabatini o‘rnatdi:

$$X_\varphi = \frac{1}{j}\lambda_y; \quad y_\varphi = -\frac{1}{j}\lambda_x;$$

$$X_\lambda = -\frac{1}{j}\varphi_y; \quad y_\lambda = \frac{1}{j}\varphi_x; \qquad \text{bunda:}$$

$$j = 1/h = \varphi_x \lambda_y - \varphi_y \lambda_x.$$

Bu xususiy hosilalar qiymatlarini kartografik proyeksiyalar umumiy nazariyasi xossalari formulalariga qo'yib $m, n, p, tg\, y, \varepsilon$ N.A. Urmayev fundamental ahamiyatga ega bo'lgan teskari tasvirlash nazariyasi differensial tenglamalari tizimini oldi:

$$m^2 = p^2 r^2 (\lambda_x^2 + \lambda_y^2), \qquad n^2 = p^2 M^2 (\varphi_x^2 + \varphi_y^2),$$

$$tg\gamma = -\lambda_x / \lambda_y; \;\; ; \qquad tg(y + \varepsilon) = \varphi_y / \varphi_x$$

$$P = \frac{1}{M^r} \frac{1}{\varphi_x \lambda_y - \varphi_y \lambda_x}; \qquad tg\varepsilon = \frac{\varphi_x \lambda_x + \varphi_y \lambda_y}{\varphi_x \lambda_y - \varphi_y \lambda_x};$$

Bu tizimni G.A. Mesheryakov Tisso-Urmayev tizimi deb atadi. Undan foydalanib matematik kartografiyaning to'g'ri va teskari masalalarini yechish asosida ko'plab kartografik proyeksiyalarni olish mumkin.

Agar parallellar va meridianlar tenglamalari ma'lum bo'lsa yoki ularning funksiyalarini hosil qilish shartlari berilgan bo'lsa, (*226*) tenglamalar tizimi proyeksiyaning tavsiflarini va to'g'ri burchakli koordinatalarini aniqlash imkonini beradi (matematik kartografiyaning to'g'ri masalasi). Proyeksiya tavsiflari berilgan holatda yoki ularning bir qismi ma'lum bo'lsa, (*226*) differensial tenglama tizimi matematik kartografiyaning teskari masalasi yechimi asosida haqiqiy proyeksiyalarni aniqlash imkoni tug'iladi. Bunda (*226*) tizim chiziqli bo'lmaydi, shu sababli uning yechimi Eyler-Urmayev xususiy hosilasidagi differensial tenglama (*225*) tizimi yechimiga nisbatan qiyoslanganda yanada ko'p qiyinchiliklarni tug'diradi. Kartografik proyeksiyalarni qidirishning barcha mavjud usullari matematik kartografiyaning to'g'ri va teskari masalalarini yechish variantlari hisoblanadi.

64-§. Matematik kartografiyaning to'g'ri masalalarini yechish orqali kartografik proyeksiyalarni qidirish

Kartografik proyeksiyalarni aniqlashning klassik analitik usuli. Hozirda ma'lum bo'lgan kartografik proyeksiyalarning ko'pchiligi va ushbu darslikning oldingi boblarida qarab chiqilgan kartografik proyeksiyalar ushbu usulda aniqlangan va tuzib chiqilgan. Bu usulning mohiyatini ko‘rib chiqamiz.

Kartografik to‘rning istalgan ko‘rinishi tasvirlanadi (masalan, meridianlari – teng oraliqli parallel to‘g‘ri chiziqlar, parallellari – meridianlarga nisbatan ortogonal, parallell to‘g‘ri chiziqlardan iborat) va tasvirlash shartiga mos ravishda kartografik proyeksiyaning umumiy tenglamasi yoziladi. Bu holatda quyidagi tengliklar kelib chiqadi:

$x = f_1(\varphi);\quad y = C\lambda,$ bu yerda $C = const$.

Umumiy ko‘rinishda to‘g‘ri burchakli koordinatalarning geodezik koordinatalar bilan bog‘liqligini ifodalovchi boshlang‘ich shartlarni, masalan, (*1*) tenglikni dastlab kartografik to‘rning istalgan ko‘rinishini ifodalamasdan turib, analitik usulda berish mumkin.

Kartografik proyeksiya tenglamasi umumiy ko‘rinishda hosil qilinganidan keyin, olingan proyeksiya bo‘yicha xatoliklarning istalgan tavsiflari beriladi va yuzaning tekislikda tasvirlanishi nazariyasi asosida yuqorida keltirilgan tenglamalardan foydalangan holda, xususiy masshtablar va proyeksiyaning boshqa kartografik tavsiflarining umumiy formulalari topiladi. Proyeksiyada xatoliklar qiymatlarining berilgan tavsiflari hisobga olingan holda differensial tenglamalar tuzib chiqiladi va tasvirlovchi funksiyaning asl holati hosil qilinadi. So‘ngra shular asosida xususiy masshtablar va proyeksiyaning boshqa tavsiflariga oydinlik kiritiladi.

Kartografik proyeksiyalarni olishning perspektiv usullari. Perspektiv usulda Yer yuzasi yoki boshqa osmon jismlari nuqtalari ko‘rish nuqtasidan turib aylanma konus, silindr va tekis yuzaga loyihalanadi. Birinchi holatda perspektiv konusli proyeksiyani hosil qilamiz, bu proyeksiya nisbatan kam ishlatiladi, ikkinchi usulda – perspektiv silindrik proyeksiya, uchunchida nisbatan keng miqyosda foydalaniladigan perspektiv azimutal proyeksiyalar hosil qilinadi.

Boshlang‘ich proyeksiyalar tenglamalarining kombinatsiyali usuli. Bu usulda bajariladigan kombinatsiyalar bitta yoki turli xildagi sinflarga tegishli proyeksiyalar o‘rtasida bajariladi. Bir xil sinfdagi proyeksiyalar kombinatsiyalari amalga oshirilgan holat uchun G.A. Ginzburg va A.K. Molovichko tomonidan sfera azimutal proyeksiyalari bo‘yicha umumlashtirilgan formulalar tavsiya qilingan (30-§ ga qarang). Bu formulalar berilgan doimiy parametrlarga bog‘liq holda xatoliklari qiymati bo‘yicha turli xildagi (teng burchakli, teng maydonli va boshqa) shar sirtining azimutal proyeksiyalarini hosil qilish imkonini beradi. Shunga o‘xshash azimutal proyeksiyalarda vertikallar bo‘ylab teng burchakli va teng oraliqli kombinatsiyalar uchun umumlashgan formulalarni olish mumkin:

$$\rho = \frac{1}{k} R\left(k_1 tg \frac{z}{2} + k_2 z \right),$$ bu yerda k, k_1, k_2 $- const$.

$k = 2$, $k_1 = k_2 = 1$ sharoitda Nelli aylana proyeksiyasi formulasini hosil qilamiz; $k = 1$ va $k_1 = 2$, $k_2 = 0$ stereografik proyeksiya formulasi olinadi:

$$\rho = 2Rtg(z/2);$$

$k = 1$; $k_1 = 0$; $k_2 = 1$ bunda vertikallar bo‘ylab teng oraliqli azimutal proyeksiya formulasi quyidagicha bo‘ladi:

$$\rho = Rz..$$

Shunga o‘xshash, almukantaratlari bo‘ylab teng maydonli va teng oraliqli bo‘lgan o‘rtalikdagi proyeksiyalar umumlashgan formulasini yozish mumkin:

$$\rho = \frac{1}{k} R\left(k_1 \sin\frac{z}{2} + k_2 \sin z \right)$$

va ularning turli xil variantlari hosil qilinadi.

Silindrik, konusli va boshqa turli xil tavsifli xatoliklar bilan ifodalanuvchi proyeksiyalarning boshqa sinflari umumlashtirilgan formulalari quyidagi ko‘rinishga ega:

$$x = kx_1 + (1-k)x_2; \qquad y = ky_1 + (1-k)y_2,$$

bu yerda $0 \le k \le 1$; x_1, y_1; x_2, y_2 – xatoligi bo‘yicha o‘zaro farqlanuvchi (teng burchakli va teng maydonli, teng burchakli va teng oraliqli, teng maydonli va teng oraliqli va h.k.), bitta sinfga tegishli proyeksiyalarning (silindrik, konusli va boshqa) to‘g‘ri burchakli koordinatalari. Doimiy parametrlar (k_1 va k_2) qiymatlarini o‘zgartirish orqali, turli xildagi xossalarga ega bo‘lgan ko‘plab kartografik proyeksiyalarni olish va aylanali tuzilishga ega bo‘lgan hududlarni aniq maqsadli kartalarini tuzishda optimal hisoblangan, proyeksiyalardan birini tanlab olish masalasini hal qilish mumkin.

Proyeksiyalar sinflari o'rtasidagi kombinatsiyalar natijasida hosil qilingan bir nechta proyeksiyalarni qarab chiqamiz. Gammer teng maydonli ixtiyoriy proyeksiyasida ordinatalar Sanson teng maydonli proyeksiyasi va silindrik proyeksiya ordinatalarining o'rtacha arifmetik qiymatlari sifatida aniqlanadi:

$$y = R\lambda \frac{1+\cos\varphi}{2} = R\lambda \cos^2 \frac{\varphi}{2}.$$

Teng maydonlilik shartidan foydalanish orqali va abssissalar uzoqlikka bog'liq emasligini tahmin qilish bilan quyidagi tenglikka ega bo'lamiz:

$$x = 2R\left(\varphi - tg\frac{\varphi}{2}\right).$$

Vinkel hosila proyeksiyasida to'g'ri burchakli koordinatalar formulalari teng oraliqli silindrik va Aitovning ixtiyoriy proyeksiyalari koordinatalarining o'rtacha arifmetik qiymatlari sifatida aniqlanadi:

$x = \frac{1}{2}(R\varphi + x_A)$; $y = \frac{1}{2}(Rk\lambda + y_A)$, bu yerda k – doimiy koeffitsiyent.

Ekvatorda uzunlik xususiy masshtabi $n = 0{,}85$ ga teng shartidan kelib chiqib, V.V. Kavrayskiy $k = 0{,}7$ qiymatni aniqlagan. Bu proyeksiya horijiy mamlakatlarda dunyo kartalari uchun keng foydalaniladi. Proyeksiyada maydon xatoligi burchak xatoligi qiymatidan kichik.

A.S.Lisichanskiyni azimutal-silindrik va azimutal-konusli proyeksiyalarining birlashgan tizim proyeksiyalari ko'rsatilgan uchta proyeksiyalarning birikma yo'li bilan izokolalari cho'ziqroq ko'rinishga ega bo'lgan, teng burchakli va teng maydonli proyeksiyalarni qidirib topish maqsadida aniqlanadi.

Teng burchakli proyeksiyalar uchun:

$$x = k_1 x_1 + k_2 x_2; \qquad y = k_1 y_1 + k_2 y_2;$$

bunda x_1, y_1, x_2, y_2 – birinchi va ikkinchi proyeksiyalar to'g'ri burchakli koordinatalari formulalari; k_1 k_2 – doimiy qiymatlar, bularni o‘zgarishi proyeksiyalar xususiyatlarini belgilaydi. Bunda $k_1+k_2=1$.

Teng maydonli proyeksiyalarni aniqlashda, birlashtirilgan tizimlar asosida qutbiy koordinatalar tizimida ifodalangan teng maydonlilik shartidan foydalanilgan:

$$x_z y_a - x_a y_z = R^2 \sin z,$$

shuningdek, bunda Mayer usuli ishlatilgan bo‘lib, unga muvofiq aks ettiriluvchi funksiyalardan biri (x yoki y) beriladi. Bu holatda abssissalar boshlang‘ich proyeksiyalarning abssissalari chiziqli kombinatsiyasi sifatida beriladi. Teng maydonlilik sharti birinchi darajadagi xususiy hosilada bir jinsli chiziqli differensial tenglama ko‘rinishida qabul qilinadi:

$$py_a - Qy_z = R^2 \sin z, \text{ bunda:}$$

$$P = x_z; \quad Q = x_a.$$

Sonli usulda ushbu tenglama yechimi natijasida haqiqiy proyeksiya ordinatalari qiymati aniqlanadi.

Hosila proyeksiyalarini olishning Aitov usuli. Aitov tomonidan dunyo kartasi uchun proyeksiyalarni tuzib chiqish usuli tavsiya qilingan bo‘lib, bunda boshlang‘ich proyeksiyada barcha ordinatalar ikki hissaga oshiriladi, meridianlar tegishli ikki hissa oshirilgan uzoqliklarga mos ravishda yoziladi, keyin koordinatalar bo‘yicha oraliq meridianlar aniqlanadi. Bunday proyeksiyalarni hosil qilish uchun Aitov manba sifatida ko‘ndalang teng oraliqli Postel azimutal proyeksiyasidan foydalanish tavsiya qilingan, ko‘rsatilgan o‘zgartirishlar hisobga olinishi bilan birgalikda uning formulasi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$x = Rz\cos a; \quad y = 2Rz\sin a,$$

bu yerda z, a – qutbiy sferik koordinatalar, (*59*) va (*61*) formulalar bo‘yicha aniqlanadi.

Ushbu usul bo‘yicha E.Gammer tomonidan dunyo kartasi uchun teng maydonli azimutal proyeksiya ishlab chiqilgan, bu proyeksiya – *Aitov-Gammer proyeksiyasi* nomi bilan ataladi. Proyeksiyada uzoqlik bo‘yicha cho‘zilish oldingi variantdagi kabi 2 ga teng. M.D. Solovyov tomonidan umumiy holat uchun Aitov-Gammer proyeksiyasi formulalari hisoblab chiqilib, uzoqlik bo‘yicha cho'zilish qiymati 1,6 ga tengligi aniqlandi. Hozirgi vaqtda ushbu proyeksiyaning bir qator variantlari ishlab chiqilgan, ularda cho'zilish bitta emas, balki ikkita yo'nalish bo'yicha cho'zilishni qo'llash tadqiqotlari olib borilgan (E. Zimon, K. Vagner, E. Kremling proyeksiyalari).

Tarkibli (uzilishli) to'rga ega bo'lgan proyeksiyalarni olish usullari. Gud usuli bo'yicha proyeksiyalarni tuzib chiqishda xohlagan psevdosilindrik proyeksiyalardan (Sanson, Molvayde, Ekkert, Kavrayskiy va boshqa proyeksiyalar) foydalanishga asoslanilgan bo'lib, bunda o'rta meridian yaqinida xatolik qiymati kichik va undan uzoqlashgan sari sezilarli darajada ortib boradi.

Har bir materikni tasvirlash uchun uning to'g'ri chiziqli meridiani bilan birgalikda faqat proyeksiyaning markaziy qismidan foydalaniladi, qismlarni birlashtirish esa – ekvator chizig'i bo'yicha amalga oshiriladi. Okeanlar tasvirlanishi kerak bo'lgan qismlarda uzilishlar yuzaga keladi.

V.V. Kavrayskiy usuli bo'yicha hosil qilingan proyeksiya ikkita – $\varphi = \pm 70^{\circ}$ teng burchakli Merkator silindrik proyeksiyasi va nisbatan yuqori kengliklar bo'yicha esa – teng oraliqli silindrik proyeksiyalaridan tashkil topadi.

N.A. Urmayev usulida proyeksiyalarni olishda umumiy chegaralarga ega bo'lmagan ellipsoidning ikkita bo'limi olinadi, ular turli xil proyeksiyalarda tasvirlanadi va bu oraliq bo'limlarda meridianlar va parallellar silliq egri chiziqlar bilan tasvirlanadi, deb faraz qilinadi.

Tarkibli proyeksiyani tuzib chiqish quyidagicha bajariladi: birinchi qism koordinatalari tizimida ikkinchisining nuqtalari koordinatalari beriladi va ikkinchida to'g'ri burchakli koordinatalar tizimini birinchisiga nisbatan burish amalga oshirilishi asosida, yassi koordinatalar tizimida o'zgartirishlar amalga oshiriladi. Birinchi qism koordinatalar tizimida ikkinchining nuqtalari koordinatalari aniqlanadi.

Oraliq soha nuqtalari koordinatalarini aniqlash uchun uchta bir xil nomlanuvchi parallellar umumiy nuqtada bitta urinmaga ega bo'lishi sharti asosida analitik bog'liqlik o'rnatiladi (ko'p hadli yoki

Stirling interpolyatsiya formulalaridan foydalaniladi). Natijada tekislik va yuza koordinatalari tizimlarining o'zaro bir xilda mosligi hosil qilinadi.

Qatorlar va uyg'un ko'phadlardan foydalanish asosida proyeksiyalarni hosil qilish usullari. Proyeksiyalarni bunday izlash usullari teng burchakli yoki ularga yaqin tavsifli xatolikli proyeksiyalaridan tashkil topgan bo'lib, L.A.Vaxremeyeva tomonidan ishlab chiqilgan. Ko'rsatib o'tilgan usulda hosil qilinadigan proyeksiyalarda izokolalari oval, aylana yoki giperbola shaklida, bu izokolalar markaziy nuqtaning meridianiga nisbatan turli xilda oriyentirlanishi bo'yicha joylashadi.

Uyg'un ko'phadlarni qo'llash orqali olinadigan teng burchakli proyeksiyalar umumiy formulalari quyidagicha bo'ladi:

$$x = \sum_{k=o}^{n} (\alpha_k P_k - b_k Q_k);$$

$$y = \sum_{k=o}^{n} (b_k P_k + \alpha_k Q_k);$$

bunda α_κ va b_κ – koeffitsiyentlar, P_κ va Q_κ – ikkita bir xildagi uyg'un ko'phadlar guruhi. Bu proyeksiyalarning ishchi formulalarini (3-darajali uyg'un ko'phadlar misolida) quyidagicha tasavvur qilish mumkin:

$$x = A_o + B_1\lambda + A_2\lambda^2 + B_3\lambda^3$$

$$x = B_o + A_1\lambda + B_2\lambda^2 + A_3\lambda^3$$

bunda A va B – o'zgaruvchan koeffitsiyentlar, ular quyidagi formulalar asosida olinadi:

$$A_o = \alpha_o + \alpha_1(q - q_o) + \alpha_2(q - q_o)^2 + \alpha_3(q - q_o)^3$$

$$A_1 = \frac{dA_o}{dq} = \alpha_1 + 2\alpha_2(q - q_o) + 3\alpha_3(q - q_o)^2;$$

$$A_2 = -\frac{1}{2}\frac{d^2A_o}{dq^2} = -[\alpha_2 + 3\alpha_3(q - q_o)];$$

$$A_3 = -\frac{1}{6}\frac{d^3A_o}{dq^3} = -\alpha_3.$$

$$B_o = b_o + b_1(q - q_o) + b_2(q - q_o)^2 + b_3(q - q_o)^3;$$

$$B_1 = -\frac{dB_o}{dq} = -[b_1 + 2b_2(q - q_o) + 3b_3(q - q_o)^2];$$

$$B_2 = -\frac{1}{2}\frac{d^2B_o}{dq^2} = -[b_2 + 3b_3(q - q_o)];$$

$$B_3 = -\frac{1}{6}\frac{d^3B_o}{dq^3} = b_3,$$

bunda q va q_o – proyeksiyaning markaziy nuqtasi va berilgan parallellar izometrik kengliklari.

Keltirilgan tenglamalar qat'iy tartibda teng burchakli proyeksiyalarni olish imkonini beradi, Koshi-Riman shartini qoniqtiradi, ikkinchi darajadagi markaziy egri chiziqli boshqariluvchi izokolalardan tashkil topadi hamda tasvirlanayotgan hudud chegaralari bilan umumliylikda moslashishga ega bo'ladi.

a_k koeffitsiyentning tahlillari natijalaridan a_o koeffitsiyentini no'lga teng deb qabul qilish maqsadga muvofiq (bu holatda, proyeksiyaning to'g'ri burchakli koordinatalari uning markaziy nuqtasida joylashadi); koeffitsiyentlar quyidagicha ifodalanadi:

$$a_1 = r_0; \quad a_2 = -\frac{r_0}{2}\sin\varphi_0;$$

$a_3 = r_0\left(\frac{A}{3}\cos 2\varphi_0 - \frac{\cos 2\varphi_0}{6}\right)$, bu yerda r_o – markaziy nuqta paralleli radiusi.

b_k koeffitsiyentni aniqlash (asimmetrik izokolalarga ega bo'lgan proyeksiyalarda) masalani yechishni qulaylashtirish uchun quyida keltirilgan formulalarni yechish kerak:

$$b_0 = b_1 = b_2 = 0; \quad b_3 = b = r_0\frac{B}{3}\cos^3\varphi_0.$$

Keltirilgan formulalarda A va B – izokolalar shakliga ta'sir ko'rsatuvchi sonli koeffitsiyentlar bo'lib, ularning markaziy nuqtada meridianga nisbatan buralishini ifodalaydi; ularning qiymatlari quyidagi formulalar bo'yicha aniqlanishi mumkin:

$$A = (1 - C\cos 2\alpha)/4; \quad B = C\sin 2\alpha/4,$$

bu yerda $C = (a^2 - b^2)/(a^2 + b^2)$; α – markaziy nuqta meridianiga nisbatan izokolalarning buralish burchagini ifodalaydi; a va b – izokolalarning yarim o'qini tasvirlaydi.

Agar proyeksiyaning markaziy nuqtasi to'g'ri burchakli koordinatalar boshlanishi deb qabul qilinsa va qulaylik uchun unda uzunlik masshtabi birga teng deb hisoblansa, u holda izokolalar tenglamasini quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$\upsilon = 100(m-1) = Ax^2 - 2Bxy + (1/2 - A)y^2,$$

bu yerda υ – uzunlik xatoligi; A va B – yuqorida ko'rsatib o'tilgan a_3 va b_3 qiymatlar tarkibiga kiradigan koeffitsiyentlar.

Uyg'un ko'phadlar yordamida hosil qilingan proyeksiyalarning afzalligi shundaki, ularni hosil qilish oson va xatoliklar qiymati unchalik katta emas. Xatoliklar qiymati bo'yicha bu proyeksiyalar boshqa teng burchakli proyeksiyalar, masalan, silindrik va konusli proyeksiyalar bilan solishtirilganda, bir qator afzalliklarga ega. Bu afzalliklar, eng avvalo, izokolalarning kartaga tushiriluvchi hududning chegaralariga nisbatan moslashishida o'z aksini topadi, bu holat asimmetrik izokolali proyeksiyalarda nisbatan sezilarlidir.

Kamchiligi – ularda qutb oldi hududlarini tasvirlash imkoniyati mavjud emas, shuningdek, izokolalarning tasvirlanayotgan hududlar chegaralariga to'liq mos kelmasligini ko'rsatib o'tish mumkin. O'q meridianga nisbatan simmetrik izokolalarga ega bo'lgan teng burchakli proyeksiyalar tenglamalarini qatorlardan foydalanib quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$x = a_0 + a_2 s_n^2 + ..., \quad y = a_1 s_n + a_3 s_n^3 + ...,$$

bu yerda s_n – markaziy nuqta meridiani va joriy meridian o'rtasidagi parallel yoyi, u ushbu meridianlar uzoqliklari farqiga ($\lambda - \lambda_0$) mos keladi; a_0 – proyeksiya tavsifi; a_1, a_2, a_3 – o'zgaruvchan koeffitsiyentlar, ular quyidagi formulalar bo'yicha aniqlanadi:

$$a_1 = \frac{da_0}{ds_m};$$

$$a_2 = \frac{1}{2}\left(a_1 \frac{tg\varphi}{N} - \frac{da_1}{ds_m}\right);$$

$$a_3 = -\frac{1}{3}\left(2a_2 \frac{tg\varphi}{N} - \frac{da_2}{ds_m}\right);$$

$$a_n = (-1)^n \frac{1}{n}\left[(n-1)a_{n-1} \frac{tg\varphi}{N} - \frac{da_{n-1}}{ds_m}\right],$$

bu yerda S_m – markaziy nuqta paralleli va joriy parallel oʻrtasidagi meridian yoyi; N – birinchi vertikal egrilik radiusi.

Agar toʻgʻri burchakli koordinatalar formulalari uchinchi darajali qatorlar boʻyicha chegaralansa, unda 400 – 450 km uzoqlik va kenglikli uchastkalar doirasida koordinatalar qiymatini bir – toʻrt metr aniqlikda olish mumkin. Bunda ushbu qatorning birinchi darajadagi qismlarini 200 – 225 km uzunlik qiymatdagi meridian va parallellar yoylari sifatida qabul qilish mumkin.

Agar ikkinchi darajali qator hadlari quyidagilarni olganda

$$\frac{S_m^3}{R_o}; \quad \frac{s_m s_n}{R_o}; \quad \frac{S_n^2}{R_o};$$

Sm< 200 km va Sn< 200 km boʻlganda, sakkiz km dan oshmaydi, uchinchi hadlar qatori:

$$\frac{S_m^3}{R_o^2}; \quad \frac{S_m^2 s_n}{R_o^2}; \quad \frac{s_m S_n^2}{R_o^2}; \quad \frac{S_n^3}{R_o^2};$$

bunda Ro – tasvirlanayotgan yuza proyeksiyasining markaziy nuqtasida egrilikning oʻrtacha radiusi (yer yuzasini $S_m < 200$ km va $S_n < 200$ km boʻlganda bu hadlar qiymati 200 m dan oshmaydi).

Keltirilgan formulalarda nisbatan sezilarli ahamiyatga ega boʻlgan rolni proyeksiya tavsifi a_0 oʻynaydi, bunda uygʻun koʻphadlardan foydalanish bilan hosil qilinuvchi proyeksiyalarda qayd qilingani kabi, u toʻr koʻrinishi va xatoliklarning taqsimlanishiga taʼsir koʻrsatadi. Turli xil shakldagi izokolali proyeksiyalar tahlili ularni olishdagi mavjud qonuniyatlarni aniqlash va qatorlar yordamida teng burchakli proyeksiyalarning umumlashtirilgan formulalarini keltirib chiqarish imkonini beradi:

$$a_0 = s_m + \frac{s_m^3}{kR_0^2}\ldots; \quad a_1 = 1 + \frac{3s_m^2}{kR_0^2}\ldots;$$

$$a_2 = \frac{tg\varphi}{2N} - \frac{3s_m}{kR_0^2}\ldots; \quad a_3 = -\frac{tg^2\varphi}{6R_0^2} + \frac{k-6}{6kR_0^2}\ldots$$

bundan

$$x = s_m + \frac{s_m^3}{kR_0^2} + \left(\frac{tg\varphi}{2N} - \frac{3s_m}{kR_0^2}\right)s_n^2\ldots;$$

$y=\left(1+\frac{3s_m^2}{kR_0^2}\right)s_n+\left(\frac{k-6}{6kR_0^2}-\frac{tg^2\varphi}{6R_0^2}\right)s_n^3+...,$ bu yerda k – sonli koeffitsiyent.

Ushbu koeffitsiyent qiymatini o'zgartirish orqali teng burchakli proyeksiyalarning yettita guruhini hosil qilish mumkin:

$k=\infty$ sharoitda izokolalar oval shaklga ega bo'lib, o'q meridian bo'ylab cho'zilgan; uncha katta bo'lmagan uchastkalarda – ushbu meridianga nisbatan parallel holatda joylashgan to'g'ri chiziq ko'rinishiga ega; - 12 < k< ∞ - izokolalar meridianlar bo'ylab cho'zilgan, elliptik egri chiziqlardan tashkil topadi; - k = 12 - izokolalar – aylana; - 6<k<12 - izokolalar – parallellar bo'ylab cho'zilgan elliptik egrilar; - k = 6 izokolalar – parallellar bilan ustma-ust tushadigan aylanalar yoylari; - 0<k<6 izokolalar – haqiqiy o'qi meridian markaziy nuqtasiga to'g'ri keladigan giperbolik egrilar; - k<0 izokolalar – haqiqiy o'qi o'rta parallelga to'g'ri keladigan giperbolik egrilar.

Asimmetrik izokolali proyeksiyalarda

$$x=\alpha_0+b_1S_n+\alpha_2s_n^2+b_3s_n^3+......$$

$$y=b_0+\alpha_1S_n+b_2s_n^2+\alpha_3s_n^3+......$$

O'zgaruvchan koeffitsiyentlar qiymati a_i ma'lum. Agar $b_0=s_m^3/kK_0^2$ deb qabul qilinsa, a_i koeffitsiyentlari hamda boshqa b_i koeffitsiyentlar qiymatlarini shunday formulalar bilan topilsa, unda:

$$b_1=3s_m^3/kR_o^2;\ b_2=3s_m/kR_o^2; b_3=1/kR_o^2.$$

Yuqorida keltirilgan asimmetrik izokolali to'g'ri burchakli koordinatalar formulalariga a_i va b_i qiymatlarni qo'yib, quyidagini olamiz:

$$x=S_m+\frac{s_m^3}{kR_o^2}-\frac{3s_m^2s_n}{kR_o^2}+\left(\frac{tg\varphi}{2R_o}-\frac{3s_m}{kR_o^2}\right)s_n^2+\frac{s_n^3}{kR_o^2}+...;$$

$$y=\frac{s_m^3}{kR_o^2}+\left(1+\frac{3s_m}{kR_o^2}\right)s_n-\frac{3s_ms_n^2}{kR_o^2}+\left(\frac{k-6}{6kR_o^2}-\frac{tg^2\varphi}{6R_o^2}\right)s_n^3+.....$$

Keltirilgan oxirgi tenglama yulduzchalar bilan belgilanuvchi qo'shimcha qismlari mavjudligi bilan o'q meridianga nisbatan simmetrik holatda joylashadigan izokolali proyeksiya tenglamasidan farq qiladi. Bu proyeksiyalarda masshtab formulasi quyidagi ko'rinishga ega:

$$m = 1 + \frac{6s_m^2 - 12s_m s_n + (k-6)s_n^2}{2kR_0^2}.$$

Keltirilgan uchinchi darajali qatorlar bilan chegaralanuvchi to'g'ri burchakli koordinatalar formulalari o'z navbatida 1:100 000 masshtabli hamda kichik o'lchamli uchastkalar mayda masshtabli kartalari proyeksiyalarini hosil qilishda foydalanilishi mumkin.

k koeffitsiyentni kerak bo'lgan darajada tanlash orqali izokolalari tasvirlanayotgan hudud bilan belgilangan kontur chegarasiga juda yaqin keladigan proyeksiyalarni olish mumkin. Qatorlardan foydalanish orqali hosil qilinadigan teng burchakli proyeksiyalar xatolik qiymatlari bo'yicha hozirgi vaqtda foydalanilayotgan bir qator boshqa turdagi teng burchakli proyeksiyalarga nisbatan, masalan, silindrik va konusli proyeksiyalarga nisbatan solishtirilganda sezilarli darajada afzalliklarga ega.

Qo'shimcha doimiylar yoki funksiyalarni kiritish yo'li bilan proyeksiyalarni olish usullari. Bir qator proyeksiyalar variantlarini, eng avvalo psevdosilindrik va psevdokonusli proyeksiyalarni aniqlash SNIIGAiKda F.A. Starostin va boshqalar tomonidan olib borilgan. Misol sifatida trapetsiya ko'rinishli psevdosilindrik proyeksiyani keltirish mumkin, bunda berilgan φ_1, φ_2 kenglikda parallellar bo'ylab va $\pm\lambda_0$ uzoqlikli meridanlar bo'ylab uzunlik xususiy masshtablari qiymatlari birga teng deb hisoblanishi ($m_0 = n_{1,2} = 1$) sharti asosida uchta doimiy parametr kiritiladi.

Qo'shimcha funksiyalar proyeksiya tenglamasiga kiritilishi mumkin yoki proyeksiyani aniqlashda mustaqil holatdagi boshlang'ich funksiyalar bo'lishi mumkin. Masalan, konusli, psevdokonusli yoki yarim konusli proyeksiyalarni hosil qilishda qutb masofasini aniqlash uchun tenglamalarni kiritish mumkin:

$$\rho = \alpha_0 \rho_u + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (\varphi - \varphi_0)^i$$

bu yerda α_i – doimiy koeffitsiyentlar; ρ_u – boshlang'ich proyeksiyada qutb masofasi; koeffitsiyent α_0 xususiy holatda 0 ga teng bo'lishi mumkin. Ifodalash sifatida G.A.Ginzburg tomonidan berilgan xatolik va burchak qiymatlari bilan ifodalangan konusli proyeksiyani hisoblash uchun formulani keltiramiz:

$$\rho = c - \left[m_0 s + \frac{km_0}{3}(\varphi - \varphi_0)^3 \right]$$

bu yerda c, k – doimiy qiymatlar; m_0 – parallellar bo'yicha minimal masshtab bilan ifodalanuvchi nuqtada meridianlar bo'ylab uzunlik xususiy masshtabi.

Kartografik proyeksiyalarni olishning grafik va grafo-analitik usullari. Hozirgi vaqtda grafik usullardan kam foydalaniladi. Misol sifatida Biruni va Myufling proyeksiyalarini ko'rsatib o'tamiz. Biruni proyeksiyasi – shar tavsifidagi (*globulyar*) proyeksiya hisoblanadi. Uni tuzish uchun karta masshtabida olingan radius aylanasi $k = \pi R / 2$ bo'yicha o'zaro perpendikulyar holatda joylashuvchi ikkita diametr o'tkaziladi. Ulardan biri ekvator, boshqa biri esa – o'rta meridian sifatida qabul qilinadi, chetki meridianlar sifatida – aylana belgilanadi.

Har ikkala diametrni bo'lib va aylananing har bir qismini to'rtta teng qismlarga bo'lamiz, so'ngra meridianlarda joylashgan uchta nuqta va ekvator hamda qutb nuqtalari orqali aylana o'tkaziladi, shu yo'l bilan proyeksiyaning meridianlari va parallellari chiziqlari olinadi.

Myufling proyeksiyasi parallellar va meridianlar kesmalarining yoylarini kesishtirish usulida to'g'rilanishi bo'yicha tuzib chiqiladi (1:100 000 masshtabli va undan yirikroq bo'lgan topografik kartalar uchun). Bu proyeksiya ko'p qirrali tavsifga ega bo'lgan proyeksiya sifatida sobiq Ittifoqda Gauss-Kryuger proyeksiyalaridan foydalanishga qadar topografik kartalarni tuzishda qo'llanilgan. Grafo-analitik usullar silindrik, konusli, azimutal va boshqa proyeksiyalarni tuzib chiqishda foydalaniladi. Hozirgi vaqtda bu usulda asosan, kartografik to'r approksimatsiyasiga asoslaniluvchi yarim konusli proyeksiyalar tuzib chiqiladi.

Boshlang'ich proyeksiyalarni qayta o'zgartirish usuli. Misol sifatida N.A.Urmayev usuli bo'yicha gomografik (bir xilli) o'zgartirish yo'li bilan hosil qilingan proyeksiyalar formulalarini keltirib o'tamiz:

$$x = \frac{\alpha_1 X + \alpha_2 Y + \alpha_3}{c_1 X + c_2 Y + c_3}; \qquad y = \frac{b_1 X + b_2 Y + b_3}{c_1 X + c_2 Y + c_3};$$

bu yerda X, Y; x, y – dastlabki va hosil qilingan proyeksiyaning mos keluvchi nuqtalari to'g'ri burchakli koordinatalari; a_i, b_i, c_i – nisbatan kichik kvadratlar usuli bo'yicha hosil qilinuvchi proyeksiyalar doimiyligi.

Ushbu usulning ikkinchi varianti sifatida berilgan proyeksiya shartlaridan kelib chiqib, a_i, b_i, c_i koeffitsiyentlarni aniqlashdan tashkil topadi, keyin boshlang'ich proyeksiyaning X, Y koordinatalari bo'yicha yangi proyeksiya x, y koordinatalari olinadi.

65-§. Matematik kartografiyaning teskari masalasini yechish asosida kartografik proyeksiyalarni aniqlash

Bu masalani yechishda qo'llaniladigan asosiy usullar yuqorida qarab chiqilgan Eyler-Urmayev va Tisso-Urmayev tenglamalaridan foydalanishga asoslanadi.

Eyler-Urmayev tenglamasini yechish bo'yicha proyeksiyalarni hosil qilish usuli. Eyler-Urmayev differensial tenglamasining (*225*) taxminli yechimini qarab chiqamiz, buning uchun approksimatsiya usulidan foydalanamiz. Ikkita funksiyalarni olamiz, masalan

$$Y_\varphi = -\sum_{i=2}^{k} A_i \tau + \sum_{i=1}^{k} c_i T_i + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f_i(\varphi, \lambda); \tag{227}$$

$$Y_\lambda = -\sum_{i=1}^{k} A_i T_i - \sum_{i=2}^{k} c_i \tau_i + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i F_i(\varphi, \lambda);$$

ular (224) tenglamaning integrallanishini ta'minlaydi. Bunda A_i, c_i, α_i – doimiy koeffitsiyentlar; $f_i(\varphi,\lambda), f_i(\varphi,\lambda) - \varphi, \lambda$ bunda F φ, λ funksiya bo'yicha xususiy hosilalar (masalan, darajali qator bo'yicha); τ, T – uyg'un ko'phad bo'laklari xususiy hosilalari

$$\tau = i\frac{\partial\theta}{\partial\varphi} = -i\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}; \qquad T = \frac{\partial\psi}{\partial\varphi} = i\frac{\partial\theta}{\partial\lambda}; \tag{228}$$

θ, ψ – ko'phadlar bo'laklari, takroriy formulalar bilan aniqlanadi:

$$\psi_i = \varphi\psi_{i-1}\lambda\theta_{i-1}; \qquad \theta_i = \varphi\theta_{i-1} + \lambda\psi_{i-1};$$

$$\psi_i = \varphi; \qquad \theta_i = \lambda. \tag{229}$$

Teng burchakli proyeksiyalarda τ, $T - \psi$ dan olingan hosila, θ qiymat esa – izometrik koordinatalardan q, λ bo'yicha olingan hosila; (*229*) formulada kenglik – φ o'rnida izometrik kenglik – q kiritiladi. Yuqorida aytib o'tilganidek, (*225*) tizimda ikkita tenglama mavjud va proyeksiyaning to'rtta tavsifi qayd qilinadi, ya'ni – γ, ε, μ, ν.

Ulardan ikkitasini keltirish orqali, tenglamalar tizimini hosil qilamiz, bunda uning tarkibiga (*227*) formuladagi A_i, c_i, a_i noma'lum koeffitsiyentlar bilan ifodanuvchi qismlar va (*225*) tenglamaning o'ng qismi kiritiladi, bularni qiymatini ushbu tenglama aniqlanishigacha oydinlik kiritish mumkin. Hosil qilingan tenglamalar tizimining yechimi haqiqiy – A_i, c_i, a_i koeffitsiyentlarni topish imkonini beradi.

Shunday qilib, (*224*) tenglamaning integrallanishi shartiga amal qilinadi, bu holatda to'liq differensial bo'yicha tegishli tenglamani hosil qilish mumkin, so'ngra uni integrallab, quyidagi tenglamani hosil qilish mumkin:

$$\gamma = -\sum_{i=1}^{k} A_i\theta_i + \sum_{i=1}^{k} c_i\psi_i + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i F_i(\varphi,\lambda).$$

$$x_\varphi = \mu\cos\gamma; \qquad x_\lambda = -\upsilon\sin(\varepsilon+\gamma);$$

$$y_\varphi = \mu\sin\gamma; \qquad y_\lambda = -\gamma\cos(\varepsilon+\gamma)$$

(*227*) tizimning integrallanishi sharti asosida hosil qilinuvchi γ qiymat olinadi, bu holatda (*227*) formulaga o'xshash ko'rinishda x va y bo'yicha hosilalar uchun alohida approksimatsiyalanuvchi ko'phadni tuzib chiqish mumkin. Keyin, ushbu tenglikning o'ng qismini va (*230*) tenglamani tenglashtirish orqali, hosil qilingan tizimda m_i, n_i, b_i, d_i doimiy koeffitsiyentlarni topish mumkin. Shunday keyin, to'liq holatda differensial bo'yicha tegishli tenglamalarni yozish orqali, ularni integrallash asosida quyidagi tenglamani hosil qilamiz:

$$x = \sum_{i=1}^{k} m_i\psi_i + \sum_{i=1}^{k} n_i\theta_i + \sum_{i=1}^{k} b_i F_i(\varphi,\lambda).$$

$$y = \sum_{i=1}^{k} m_i\theta_i + \sum_{i=1}^{k} n_i\psi_i + \sum_{i=1}^{k} d_i F_i(\varphi,\lambda).$$

Teng burchakli proyeksiyalar uchun $b_i = d_i = 0$ hisoblanadi; (*229*) formulada ψ, θ ko'phadlar qismlarini aniqlash uchun va ularning hosilalari – T, v aniqlanishi uchun geodezik kenglik – φ o'rniga, izometrik kenglik – $q = \ln QU$ qiymati qo'yiladi. Qayd qilish joizki, yuqorida keltirilgan tenglamalar ko'rinishi dastlabki manba ma'lumotlarga bog'liq va o'z navbatida, aniqlab beruvchi funksiyalar bilan belgilanadi.

Tenglamalarning taqriban yechimlari aniqligi ko'plab holatlarda deyarli talab darajasini qoniqtiradi. Biroq Eyler-Urmayev kvazichiziqli differensial tenglamalarining umumiy holatda, xususiy hosilalar bo'yicha yechilishi kelgusida ular ustida hali yana ishlanmalar olib borilishini taqozo etadi.

Tisso-Urmayev tenglamalari yechimi bo'yicha proyeksiyalarni hosil qilish usullari. Tisso-Urmayev differensial tenglamalarida xususiy hosilalar (*226*) fundamental ahamiyatga ega, lekin ularning nochiziqligi hisobiga bunda kartografik proyeksiyalarni aniqlash oldingi keltirilgan usullar bilan solishtirilganda murakkab masala hisoblanadi.

1953-yilda N.A.Urmayev tomonidan proyeksiyalar nazariyasi ishlab chiqilgan, unga asosan parallellar teng oraliqli egri chiziqlar bilan tasvirlanadi, paralellar xususiy masshtabining maydon xususiy masshtabiga nisbati faqat kenglik funksiyasi hisoblanadi, ya'ni $n/p = f(\varphi)$ sharti qo'yiladi. Bunda (*226*) formula quyidagicha bo'ladi:

$$\varphi_x^2 + y_y^2 = g^2(\varphi) \tag{232}$$

Bu tenglamani integrallash uchun ikkita usul tavsiya qilingan. Birinchi usulda Lagranj to'liq integrali usulidan foydalaniladi, unga muvofiq odatdagi differensial tenglama tizimi tuzib chiqiladi:

$$dx/2\varphi_x = dy/2\varphi_y = d\varphi/2g^2 = -d\varphi_x/2\varphi_x g'g = -d\varphi_y/2\varphi_y g'g \tag{233}$$

Bunda $g' = dg/d\varphi$

(233) ifodaning oxirgi ikkita bo'lagidan foydalanib, quyidagini olamiz:

$\varphi_y = (\sqrt{1-\alpha^2/\alpha})\ \varphi_x$, bunda *a* – o'zgarmas doimiy. (232) tenglamadan

$$g^2 = \varphi_x^2 / \alpha^2 \quad \text{unda:}$$

$$\varphi_x = \alpha g \qquad \varphi_y = \sqrt{1-\alpha^2 /}\, g.$$

To'liq holatidagi differensial tenglama quyidagi ko'rinishga ega:

$$d\varphi / g = \alpha dx + \sqrt{1-\alpha^2}\, dy$$

bu yerda $u = \int d\varphi / g$ tenglikni ifodalash orqali, umumiy integral quyidagi tenglamalar tizimi ko'rinishida keltirilishi mumkin:

$$u = \alpha x + \sqrt{1-\alpha^2}\, y + b(a);$$

$$\frac{\partial u}{\partial a} + \frac{\partial u}{\partial b} - \frac{\partial b}{d\alpha} = o \qquad (234)$$

Bunda ixtiyoriy funksiya $b(a)$ aniqlanmagan bo'lib, (*232*) tenglama bilan aniqlanuvchi, parallellar sinfiga nisbatan ortogonal chiziqlar sifatida meridianlarning aniqlanishi belgilanadi, buning uchun esa – (*234*) tenglamani a parametr bo'yicha oldindan differensiallash va differensiallash natijasida olingan qiymatlarni ayrim yangi doimiy qiymatlar bilan tenglashtirish talab qilinadi. Unda

$$x = -\frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} y = f(\alpha)$$

Bitta a parametrli to'g'rilar oilasini olamiz. Bunda parallellar teng bo'lingan egrilar bo'ladi. Ikkinchi usulda N.A.Urmayev $\varphi_x = u_x g$ va $y_y = u_y g$ belgilashlarni kiritib, (232) tenglamani quyidagicha tasavvur qiladi:

$$u_x^2 + u_y^2 = 1 \quad \text{bundan}$$

$$u_x = \cos\tau; \quad u_x = \sin\tau;$$

yoki t = tgτ belgilashni kiritib

$$u_x = 1/\sqrt{1+t^2}; \quad u_y = -t/\sqrt{1+t^2};$$

bunda τ – X o'qi va normalni parallelga tushushidan hosil bo'lgan burchak.

Birinchi formulani u va ikkinchini x bo'yicha differensiallab, olamiz $t_x = tt_y = 0$, ya'ni (232) kvadrat ifodani integrallash birinchi tartibli xususiy hosilali (235) chiziqli tenglikni integrallashga keltirilgan. Oddiy differensial tenglamalar tizimini hosil qilib:

$dx = -\frac{dy}{t} = \frac{dt}{o}$, birinchi integralni topamiz $t = c_1$.

Olingan natijalarni dx qo'yib, ikkinchi va umumiy integrallarni olamiz:

$$y + tx = c_2; \quad y + tx = f(t)$$

Shunday qilib, kartografik proyeksiyalarni bunday usulida ham, ularda $n/p = f(\varphi)$, parallellar teng bo'lingan egrilar, meridianlar ularga ortogonal bo'lib, bitta t parametrli to'g'rilar oilasidan tashkil topgan.

Meridianlar, parallellar, geodezik chiziqlarning berilgan egriligi bo'yicha kartografik proyeksiyalarni olish usullari. Meridian va parallellar egriligi tenglamasini quyidagicha yozish mumkin:

$$k_{M} = \gamma_{\varphi} / \mu = -\frac{1}{\mu}\left[(\mu_{\lambda} \sec\varepsilon + \upsilon_{\varphi} tg\varepsilon)\frac{1}{\upsilon} + \varepsilon_{\varphi}\right];$$

$$k_{\Pi} = (\gamma + \varepsilon)_{\lambda} / \upsilon = \frac{1}{\upsilon}\left[(\mu_{\lambda} tg\varepsilon + \upsilon_{\varphi} \sec\varepsilon)\frac{1}{\mu} + \varepsilon_{\lambda}\right]$$

Kartografik proyeksiyalarning xohlagan tavsifli xatoligi uchun geodezik chiziqning o'rtacha egriligi quyidagi formula bilan aniqlanishi mumkin:

$$k_{o'r} = \frac{1}{2r}\left[\sin\varphi\left(\frac{m}{n^2}\sin i - \frac{1+\cos i}{m\sin i}\right) + \frac{1+\cos i}{mn\sin i}\left(n_{\varphi}\frac{r}{M} - m_{\lambda}\right) - \frac{i_{\varphi}}{mnM}\right]$$

Bu formulalardan foydalanib, qo'yilgan shartlar asosida proyeksiyalarni aniqlash usullari guruhlarini olish mumkin.

Qo'yilgan shartlar asosida proyeksiyalarni aniqlashning ikkita usulini qarab chiqamiz. N.A.Urmayev taklif etgan teng bo'lingan parallelli proyeksiyalarni olish usulida berilgan parallel bo'yicha $\varphi_0 = 50^0$ uzunlik saqlanadi.

Tenglama:

$$k_p = 1/\rho = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \ldots..$$

xususiy holatda:

$$k_{\rho} = \frac{1}{\alpha} + \frac{6}{5}\frac{s^2}{\alpha^3}$$

$d\tau/ds = k_p$ ni e'tiborga olib, integrallashdan keyin, quyidagilarni olamiz:

$$\tau = \frac{s}{\alpha} + \frac{2}{5}\left(\frac{s}{\alpha}\right)^3 \text{ bunda}$$

$a=2R$ (1:10 000 000 masshtabda a=127.4223); s – parallel yoyi uzunligi. Berilgan parallelda (φ_0=50^0) n=1 qabul qilib, N.A.Urmayev $\Delta\lambda$ chastotali uzoqlikda bu parallel nuqtalari uchun s, k_p, τ qiymatlarni olish jadvalini tuzdi.

Bu qiymatlarni va ma'lum bo'lgan o'zaro munosabatlardan foydalanib,

$$dx/ds = \sin\tau; \qquad dy/ds = \cos\tau,$$

integrallar qiymatini sonli usullar bilan aniqlaymiz:

$$x = \int \sin\tau ds; \qquad y = \int \cos\tau ds.$$

Natijada berilgan nuqtaning to'g'ri burchakli koordinatalari olinadi. Boshqa nuqtalar koordinatalari quyidagi formulalar bilan topiladi:

$$x = x_0 + u\cos\tau; \quad y = y_0 - u\sin\tau; \text{ bunda}$$

$$u = R\,arc\Delta\lambda; \quad \Delta\lambda = 10^0.$$

Parallellar bo'yicha xususiy masshtablar quyidagi formulalar bilan topiladi:

$$n = \frac{\cos\varphi_o}{\cos\varphi}\left[1 - k_n(\varphi - \varphi_o)\right],$$ bunda k_n – berilgan parallel egriligi.

Ikkinchi usul – teng burchakli proyeksiyalar meridian va parallellari tasvirini berilgan egrilik bo'yicha olish usuli. Teng burchakli proyeksiyalarda

$$k_M = [\ln\mu]'_{\lambda}/\mu = \left(-\sum_{i=2}^{k} A_i\tau_i + \sum_{i=1}^{k} C_iT_i\right)/e^{\left(\sum_{i=o}^{k} A_i\psi_i + \sum_{i=1}^{k} c_i\theta_i\right)}; \qquad (236)$$

$$k_\Pi = [\ln\mu]'_{q}/\mu = -\left(\sum_{i=1}^{k} A_iT_i + \sum_{i=2}^{k} C_i\tau_i\right)/e^{\left(\sum_{i=o}^{k} A_i\psi_i + \sum_{i=1}^{k} c_i\theta_i\right)}; \qquad (237)$$

bunda $k_М$, $k_П$ – proyeksiya nuqtalarida meridian va parallellar tasviri egriligi berilgan qiymatlarda. Proyeksiyani aniqlash masalasi Laplas tenglamasi (212) doimiy koeffitsiyentlarini hisoblashga qaratiladi.

Lekin berilgan egrilikdagi meridian va parallellar qiymatlari koeffitsiyentlarini bevosita (236) va (237) formulalar bilan aniqlash ancha qiyin, shuning uchun A_i, S_i qiymatlarni yaqinlashtirilgan formulalar bilan iteratsiya metodi orqali aniqlash mumkin.

$$1+\ln k_М=-\sum_{i=o}^{k}A_i'(\psi_i+\tau_i)-\sum_{i=1}^{k}C_i'(\theta_i-T_i);$$

$$\Delta\ln k_М=-\sum_{i=o}^{k}\Delta A_i'\left(\psi_i+\tau_i/[\ln\mu]_\lambda'\right)-\sum_{i=1}^{k}\Delta C_i'\left(\theta_i-T_i/[\ln\mu]_\lambda'\right);$$

$$1+\ln k_n=-\sum_{i=o}^{k}A_i'(\psi_i+T_i)-\sum_{i=1}^{k}C_i'(\theta_i-\tau_i); \qquad (238)$$

$$\Delta\ln k_n=-\sum_{i=o}^{k}\Delta A_i'\left(\psi_i+\tau_i/[\ln\mu]_q'\right)-\sum_{i=1}^{k}\Delta C_i'\left(\theta_i-T_i/[\ln\mu]_q'\right). \qquad (239)$$

Teng burchakli proyeksiyalarni olish, masalan, paralellar egriligi k_n berilganda quyidagi ketma-ketlikda bajariladi:

– egrilik k_n qiymati beriladi, (228) tizimli tenglamalarni tuzamiz va yechamiz, A_i,S_i koeffitsiyentlarni interatsiya metodi orqali topamiz;

– olingan natijalardan foydalanib, $[\ln\mu]_q'$ hosilani hisoblaymiz va (237) formuladan k_n' parallel egriligi qiymatini topamiz, so‘ngra:

$$\Delta \ln k_n = \ln k_n - \ln k'_n;$$

– (239) tenglamalar tizimini yechib, A_i', S_i' koeffitsiyentlarga tuzatmani aniqlaymiz va ushbu koeffitsiyentlar aniqlangan qiymatlarini hisoblaymiz:

$$A_i=A_i'+\Delta A_i' \qquad C_i=C_i'+\Delta C_i'$$

– olingan A_i, C_i koeffitsiyentlar qiymatlaridan foydalanib, hisoblashlarni qaytadan o‘tkazamiz, bu $\Delta\ln k\le\varepsilon$ bo‘lmaguncha olib boriladi, ε – hisoblash aniqligini belgilovchi yo‘l qo‘yilarli qiymat.

Yakuniy holatda koeffitsiyentlar qiymatini olib, ma'lum bo'lgan (*231*) formula asosida proyeksiya bo'yicha hisoblashni amalga oshiramiz.

Kartografik to'r eskizini approksimatsiyalash usulida proyeksiyalarni hosil qilish. Proyeksiyalarni aniqlashning bunday masalasi yechimi ikkita bosqichda amalga oshiriladi. Birinchi bosqichda, kartalarning maqsadidan kelib chiqqan holda va kartografik to'rlar hamda proyeksiya xatosi qiymatini o'rganish natijasidan foydalanish bilan ushbu berilgan masalani optimal darajada qoniqtiruvchi kartografik to'rning maketi tuzib chiqiladi (odatda, millimetrli qog'ozda).

Ikkinchi bosqichda eskizda meridianlar va parallellarning kesishish nuqtalari to'g'ri burchakli koordinatalarining silliqlanishi amalga oshiriladi (odatda, *korrellyat usulida*), so'ngra ushbu koordinatalar bo'yicha kartografik to'r eskizi tuziladi. Bu maqsadda turli xildagi ko'phadlardan foydalanilishi mumkin:

– xatoliklar tavsifi bo'yicha ixtiyoriy bo'lgan proyeksiyalarda kartalarni tuzishda darajali algebroik ko'phadlardan foydalaniladi:

$$x=\sum_{i=o}^{k}\sum_{i=o}^{k}\alpha_{ij}\varphi^{i}\lambda^{j} \qquad y=\sum_{i=o}^{k}\sum_{i=o}^{k}b_{ij}\varphi^{i}\lambda^{j}$$

bu yerda aij, bij – eskizning x, y; φ, λ nuqtalari koordinatalari qiymatlari bo'yicha ko'rsatilgan tizim yechimidan kelib chiqqan holda, nisbatan kichik qiymatdagi kvadratlar usuli bo'yicha aniqlanuvchi doimiy koeffitsiyentlar hisoblanadi;

– teng burchakli proyeksiyalar bo'yicha kartalarni tuzib chiqishda – uyg'un ko'phadlardan foydalaniladi:

$$x=\sum_{i=o}^{k}\alpha_i\psi_i-\sum_{i=o}^{k}b_i\theta_i \qquad y=\sum_{i=o}^{k}\alpha_i\theta_i+\sum_{i=o}^{k}b_i\psi_i$$

bunda V.P. Morozov takroriy formulalaridan

$$\psi_i=q\psi_{i-1}-\lambda\theta_{i-1}; \qquad \theta_i=q\theta_{i-1}+\lambda\psi_{i-1}$$

$$\psi_1=q; \qquad \theta_1=\lambda$$

$$q=\ln\frac{tg(45^\circ+\varphi/2)}{tg^2(45^\circ+\psi/2)}$$

$$\psi = \arcsin(e \sin \varphi)$$

bu yerda e – ellipsoidning birinchi ekssentrisiteti; a_i, b_i – doimiy koeffitsiyentlar.

Belgilangan maqsadga asosan kartalarni tuzishda umumiy formulalarga aniqlik kiritiladi, unda qutblar tasviri (nuqta, to‘g‘ri yoki egri chiziq kesimlari) hisobga olinadi, o‘rta meridian va ekvator chizig‘iga nisbatan kartografik to‘rning simmetrikligi kabi shartlarga amal qilinadi.

66-§. Nisbatan eng yaxshi va ideal proyeksiyalarni qidirib topish

Matematik kartografiya sohasida ushbu muhim masalani yechish bo‘yicha bir qator ko‘zga ko‘ringan olimlar tadqiqot olib borganlar, P.L. Chebishev, D.A.Grave, N.Y. Singer, A.A. Markov, V.V. Vitkovskiy, sobiq Ittifoq olimlari V.V. Kavrayskiy, N.A. Urmayev, L.A. Vaxrameyeva, G.A. Mesheryakov, N.A.Vilenkin, L.M. Bugaevskiy, A.S. Lisichanskiy, G.I. Konusova va boshqalar. Nisbatan eng yaxshi proyeksiyalarni qandaydir ularning xususiy umumiyligidan kelib chiqqan holatda yoki proyeksiyalarning cheklanmagan ko‘pligidan tanlab olish mumkin.

Birinchi holatda eng avvalo, qaysi xususiy umumiyliklar eng yaxshi proyeksiyalarni aniqlab olishni bajarishga oydinlik kiritish kerak, bunda qanday belgilar tegishli umumiylikni tanlab olish uchun asos sifatida qabul qilinishi muhim ahamiyatga ega.

Kartada xatoliklar qiymatlarining minimum bo‘lishini ta’minlashni nazarda tutib, barcha eng yaxshi proyeksiyalarni *minimaks* va *variatsion* turlarga ajratish mumkin. Minimaks proyeksiyalarda P.L.Chebishev tomonidan ishlab chiqilgan mezonlarga amal qilinadi, unga muvofiq berilgan hudud uchun nisbatan eng yaxshi proyeksiyada masshtab logarifmi moduli maksimal qiymati minimal bo‘lishi kerak.

Variatsion tipda proyeksiyalarning aniqlanishi shartli ekstrimumda variatsion masalalarning yechilishida o‘z ifodasini topadi. Bunda Eyri, Iordan, Klingach, V.V. Kavrayskiy, G.I. Konusova va boshqalar tomonidan tavsiya qilingan mezonlardan foydalanilib, alohida nuqtalarda va butun tasvirlanayotgan hudud bo'yicha proyeksiyada xatoliklar qiymatlarini baholash imkonini beradi.

Biroq kartografiya amaliyotida ko'plab holatda shunday vaziyatlar bo'ladiki, bunda kartografik proyeksiyalarni tanlashda aniqlovchi omil sifatida xatoliklar qiymatlari va ularning taqsimlanishi emas, balki boshqa omillar yoki ularning birlashmasidan foydalaniladi. Shu sababli, masalani nisbatan keng miqyosda qo'yish orqali, qayd qilish mumkinki, nisbatan eng yaxshi hisoblangan proyeksiyalar quyidagi ikkita turda mavjud bo'lishi mumkin:

1. Xatolik qiymatlarining minimal ko'rsatkichini ta'minlovchi eng yaxshi proyeksiyalar – *minimaks* va *variatsion* tipdagi proyeksiyalar.

2. Tuzilayotgan kartaning ma'lum bir aniq maqsadga mo'ljallanishi proyeksiyalarga nisbatan barcha umumiylikdagi talablarning bajarilishini optimal darajada ta'minlovchi, eng yaxshi proyeksiyalar (masalan, to'rining oddiyligi, xatoligi kamligi va h.k.).

Keltirilgan oxirgi holatda proyeksiyalarning afzalliklarini baholash umumlashtirilgan mezonlar asosida bajarilishi mumkin. Ideal proyeksiyalar masalasi muhokamasiga o'tamiz. Agar faqat xatolik qiymatini minimum ta'minlash haqida fikr yuritilsa, u holda V.V. Kavrayskiy aniqlik kiritgan *ideal proyeksiyalar* sifatida shunday proyeksiyalarni ko'rsatib o'tish mumkinki, bunda barcha mavjud proyeksiyalar ko'pligidan kelib chiqqan holda, tasvirlanayotgan hudud doirasida uzunlik xatoligi minimal ko'rsatkichda bo'lishi kerak. Bunda ideal proyeksiya sifatida minimaks va variatsion proyeksiyalar olinadi.

Umuman olganda, juda keng ko'pligidan aniqlanadigan ideal proyeksiyalar – bu aniq maqsadli va mazmunli kartalarni tuzish uchun kartografik proyeksiyalarga qo'yiladigan barcha talablarni optimal darajada qoniqtiradigan proyeksiyalarni ko'rsatib o'tish mumkin.

Boshqacha aytganda, agar nafaqat kartada xatoliklar qiymatlari minimallashtirilishi talab qilinishi emas, balki barcha talablar umumiyligi qondirilishi hisobga olinsa, u holda amaliyotda barcha holatlar uchun bir xilda javob bera oluvchi, yaroqli hisoblangan proyeksiyalar mavjud emasligi kuzatiladi.

Nisbatan eng yaxshi va ideal proyeksiyalarni olish uchun eng avvalo quyidagi holatlarga e'tibor qaratish talab qilinadi:

– xatolik qiymatlarining minimalligi ta'minlanishi va shuningdek, tuzib chiqiluvchi kartalarning aniq maqsadlarga mo'ljallanilishi va tarkibi asosida aniqlanuvchi barcha muhim hisoblangan talablar umumiyligining optimal darajada qondirilishi shartidan kelib chiqqan holda, proyeksiyalarning afzalliklarini obyektiv holatda baholash imkonini beruvchi mezonlarni ishlab chiqish;

– xatoliklar qiymatlarining minimallashtirilishini ta'minlovchi yoki talab qilingan vaziyatlarda, proyeksiyaga qo'yiluvchi barcha talablarning umumiylikda optimal darajada qondirilishi asosidagi nisbatan eng yaxshi hisoblangan proyeksiyalarni hosil qilish usullarini ishlab chiqish masalasini hal qilish.

Eng yaxshi proyeksiyalarning barcha mavjud bo'lgan ko'p xilliligidan kelib chiqib, xatolikni minimal ta'minlovchi proyeksiyalarni qidirib topish masalasi teng burchakli proyeksiyalarda nisbatan to'liq yechilgan, boshqa proyeksiyalarda esa – xatoliklar tavsiflari bo'yicha bu masala deyarli o'z yechimini topmaganligini ko'rish mumkin.

Bu masalaning holati haqida qisqacha ma'lumot berib o'tamiz.

Teng burchakli proyeksiyalar.

Yuqorida ta'kidlab o'tilganidek, nisbatan eng yaxshi teng burchakli proyeksiyalarni qidirib topish masalasi matematik kartografiyada G.L. Chebishev proyeksiyasi bo'yicha teskari masalasini yechish orqali amalga oshiriladi (XI bobga qarang), bunda chetki izokolalardan biri kartaga olinayotgan hudud konturi bilan ustma-ust tushadi. Matematik kartografiyaning to'g'ri masalalarini yechish asosida nisbatan eng yaxshi to'g'ri burchakli proyeksiyani olish mumkin, masalan, L.A.Vaxrameyeva tomonidan ishlab chiqilgan usul orqali.

Teng maydonli proyeksiyalar.

Nisbatan eng yaxshi teng maydonli proyeksiyalarni qidirib topish masalasining yechimi hali dastlabki bosqichda. Haligacha bu masalaning umumiy yechimlari bo'yicha amalga oshirilgan tadqiqotlar mavjud emas.

G.A. Mesheryakov nisbatan eng yaxshi hisoblangan Eyler proyeksiyasi xususiy holatini qarab chiqgan, ya'ni ortogonal kartografik to'rli teng maydonli proyeksiyalarni. Bunda u umumiy holatda, eng yaxshi Eyler proyeksiyalarini aniqlash masalasini oldiga maqsad qilib qo'ymagan, balki bu proyeksiyaning faqat boshlang'ich shartlari – to'g'ri chiziqli o'rta (nol qiymatdagi) meridian bo'yicha o'tkazilishi vaziyatidagi holatinigina qarab chiqqan.

Bu masala quyidagi ko'rinishda ifodalanuvchi Koshi boshlang'ich sharti ta'siri bo'yicha ixtiyoriy nuqtada masshtab logarifmi modulining baholanishini aniqlash asosidagi tavsiflash usuli asosida yechilgan:

$$n/_{\lambda=o} = f_1(\varphi) = 1; \qquad \gamma/_{\lambda=o} = f_2(\varphi) = 0.$$

A.S.Lisichanskiy matematik kartografiyada ma'lum bo'lgan ellipsoidning tekislikdagi teng maydonli proyeksiyasi tenglamasidan foydalangan holda:

$$x_\varphi y_\lambda - y_\varphi x_\lambda = \mathrm{M}r.$$

Shuningdek, D.A. Grave va V.V. Vitkovskiylar Mayer usulidan foydalanib, bu usulni rivojlantirgan va azimutal-silindrik va azimutal-konusli proyeksiyalarning umumlashgan ekvivalent tizimini hosil qilishgan. V.V. Kavrayskiy va G.A. Mesheryakov tadqiqotlarida bu proyeksiyalar hali nisbatan eng yaxshi proyeksiyalar emasligi isbotlangan.

Ekvivalentga yondoshuvchi ixtiyoriy proyeksiyalar.

Y.M. Yuzefovich kartografik proyeksiyalarning yangi sinfini tavsiya etgan, bunda $m = n^k$ va k – berilgan proyeksiya qiymati uchun doimiy. Bunday proyeksiyalarni olish uchun Eyler-Urmayev asosiy tizimi olingan, unda bu proyeksiyalarning o'q meridianga nisbatan simmetrik bo'lishi va boshlang'ich shartni ifodalovchi sifatida egri chiziq ko'rinishidagi o'rta meridian qabul qilingan.

Teng burchakliga yondosh hisoblangan ixtiyoriy proyeksiyalar.

Bu masalaning umumiy holda yechimi hali mavjud emas. Faqat M.A. Topchilov va Y.M. Yuzefovichlar tomonidan bunday proyeksiyalarni olishning ayrim xususiy yechimlari qarab chiqilgan.

Kartografik to'ri ortogonal bo'lgan proyeksiyalar.

G.I. Konusova Eyler-Urmayev tenglamalarini yechish variantlarini tadqiq qilgan, xususan, ortogonal kartografik to'rli proyeksiyalarni aniqlash bo'yicha ayrim masalalar giperbolik, elliptik va parabolik tipidagi differensial tenglamalar yechimi asosida tahlil qilingan, buni umumiy masalaning faqat xususiy holatlari sifatida e'tiborga olish mumkin.

Nisbatan eng yaxshi proyeksiyalarni aniqlashning barcha mavjud bo'lgan usullarini tahlil qilish natijalariga ko'ra, hozirgi vaqtda bu masalani hal qilishning ikkita asosiy usuli mavjud. Ulardan birinchisi, nisbatan eng yaxshi teng burchakli proyeksiyalarni olish masalasini yechishda foydalanilgan, unda dastlab teorema shakllangan va keyin esa uning yechimi ushbu proyeksiyalar uchun isbotlangan.

Bunday tanlangan yo'l proyeksiyalarni qidirib topishning amaliy usullarini ishlab chiqish bo'yicha izlanishlar yo'nalishlarini ko'rsatib berdi. 1947-yilda N.A. Urmayev birinchi marta ushbu proyeksiyalarni hisoblashning dastlabki amaliy usullarini ishlab chiqishga erishgan.

Ikkinchi holatda Eyler-Urmayev tenglamalaridan foydalanilib, tavsiflar bo'yicha oldindan aniqlab beruvchi tegishli tizimlar belgilab olinadi, keyin esa belgilangan chegaralashlarga mos ravishda nisbatan eng yaxshi proyeksiyalarning xususiy ko'rinishlariga aniqlik kiritiladi. Ushbu usul yordamida nisbatan eng yaxshi proyeksiyalarning yangi turlarini hosil qilish imkoniyatlarini qayd qilish asosida, umumiy holatda belgilangan masala bunday yechilishi mumkin emas.

Nisbatan eng yaxshi proyeksiyalarni qidirib topish masalasi yechimi uchun eng yaxshi proyeksiyalarda xatoliklar qiymatlarining turli xilligi tavsiflari haqidagi teoremani shakllantirish va isbotlash talab qilinadi, bunda P.L. Chebishev tomonidan ilgari surilgan, eng yaxshi teng burchakli proyeksiyalar teoremasidagi kabi ish tutilishi va ushbu asosda ularni hisoblash usullarini ishlab chiqish talab qilinadi.

Nazorat savollari

1. *Matematik kartografiyaning to'g'ri masalasini qanday tushunasiz? Misollar keltiring.*
2. *Matematik kartografiyaning teskari masalasini yechish orqali nimalar aniqlanadi? Ularning yechimi qanday topiladi?*
3. *Kartografik proyeksiyalarni aniqlashning klassik analitik va perspektiv usullarining afzallik tomonlari nimalarda va ular qaysi proyeksiyalarni olishda ishlatiladi?*
4. *Kartografik proyeksiyalarni olishning grafik va grafo-analitik usullarini tushuntiring, misollar keltiring.*
5. *Matematik kartografiyaning teskari masalasini yechish asosida kartografik proyeksiyalarni aniqlash qanday bajariladi?*
6. *Tisso-Urmayev tenglamalari yechimi bo'yicha proyeksiyalarni hosil qilish usullarini tushuntiring. Ularning mohiyati nimada?*
7. *Meridianlar, parallellar, geodezik chiziqlarni berilgan egriligi bo'yicha kartografik proyeksiyalarini olish usullarining mohiyati nimada?*

XIII BOB
BELGILANGAN ANIQ MASALANI YECHISH MAQSADIDA PROYEKSIYALARNI TANLASH. MERIDIANLAR VA PARALLELLAR TO'RI KO'RINISHI BO'YICHA PROYEKSIYALARNI ANIQLASH USULLARI

67-§. Kartografik proyeksiyalarni tanlashning nazariy asoslari

Har qanday kartani tuzishda u orqali turli masalalarni optimal darajada yechishni ta'minlab beradigan kartografik proyeksiyalarni tanlash masalasi muhim ahamiyatga ega. Kartografik proyeksiyalarni tanlash ko'plab omillarga bog'liq, ularni uchta guruhga bo'lish mumkin. Birinchi guruhga kartaga olish obyektini ta'riflaydigan omillar kiradi. Ular hududning geografik o'rni, o'lchamlari, chegarasining shakli (*konfiguratsiyasi*), kartaga olinayotgan joy bilan boshqa hududlarni tasvirlash imkoniyatlari kabilar kiritiladi.

Ikkinchi guruh kartani tavsiflovchi va undan foydalanish usullari va shartlarini xarakterlovchi omillarni qamrab oladi. Bu guruhga kartaning maqsadi, masshtabi, mazmuni va funksional vazifasi, karta asosida hal qilinadigan masalalar (kartometrik, navigatsion va boshqalar) va ularni yechish aniqligiga qo'yiladigan talablar, kartalardan foydalanish usullari (stolda, devoriy), kartografik axborotlarning tahlil qilinishi (EHM yordamida yoki an'anaviy), karta bilan ishlash shartlari (alohida yoki boshqa kartalar bilan birgalikda), kartaga olish obyektlarining nisbat ko'rsatkichlarini ifodalash shartlari (bitta hududning boshqasiga nisbatan geografik jihatdan joylashish holati, ularning maydoni va shakli), kommunikatsiya tarmoqlari va hududlarni tasvirlash, ular o'rtasidagi o'zaro aloqalar va h.k. kiritiladi.

Uchinchi guruhga kartografik proyeksiyani xarakterlaydigan omillarni kiritish qabul qilingan. Bu omillar kartografik proyeksiyalarning xatolik tavsiflari, uzunlik, maydon va burchaklar minimal xatoligi shartlari hamda ruxsat etilgan maksimal xatolik qiymatlari, xatoliklar taqsimlanishi xususiyati, geodezik chiziq tasvirining egriligi, loksodromiya, boshqa holat chiziqlarining tasvirlanishi, proyeksiyaning stereografikligi (hudud shakllarining uzatilish shartlari), kartografik to'r chiziqlari tasvirining egriligi, ularni ortogonallik talablari, meridian va parallellar o'rtasida to'g'ri burchakning farqi, ularning teng bo'linishlari, qutblar tasviri tavsiflari, o'rta meridian va ekvatorga nisbatan kartografik to'rning simmetrikligi, uni tasvirlash shartlari (agar ular chiziq bilan tasvirlansa, u holda o'rta meridian va qutbga nisbatan ekvator chizig'ining o'lchamlari), tasvirning ko'rish orqali his qilinishi, sferiklik effektining mavjudligi, kartografik tasvirning qoplab olinishi (takrorlanish) va h.k. larni nazarda tutadi.

Kartografik proyeksiyalarni tanlash ikki bosqichda amalga oshiriladi:

– birinchi bosqichda proyeksiyalar to'plami (yoki ularning xususiyatlari) o'rnatiladi, keyin ulardan maqsadga muvofiq holda tanlash ishlari amalga oshiriladi;

– ikkinchi bosqichda izlangan proyeksiya aniqlanadi.

Qoidaga muvofiq, birinchi guruh omillari qat'iy tartibda berilishi kerak. Ularni hisobga olishda, eng avvalo, shunday proyeksiyalarni tanlab olish nazarda tutiladiki, bunda proyeksiyani markaziy nuqtalari va markaziy chiziqlari yaqinida masshtab kam o'zgaradi va ular kartaga olinayotgan hudud o'rtasida joylashadi, hamda markaziy chiziqlar, imkoni boricha, hududda nisbatan uzun cho'zilgan yo'nalish bo'yicha joylashadi. Shu sababli, ko'plab kartalar uchun quyidagi proyeksiyalar tanlanadi:

– *silindrik proyeksiyalar* – ekvatorga yaqin joylashgan va unga nisbatan simmetrik holatda bo'lgan, ko'rinishi uzoqlik bo'yicha cho'zilgan hududlar uchun;

– *konusli proyeksiyalar* – yuqoridagi hududlar uchun, biroq bunda ekvatorga nisbatan simmetrik joylashmagan yoki o'rta kengliklarda joylashgan hududlar uchun;

– *azimut proyeksiyalar* – qutbiy hududlarni tasvirlash uchun;

– *ko'ndalang va qiyshiq silindrik proyeksiyalar* – meridian yoki vertikallar bo'ylab cho'zilgan hududlarni tasvirlash uchun;

– *ko'ndalang yoki qiyshiq azimut proyeksiyalar* – tuzilishi aylanaga yaqin bo'lgan hududlarni tasvirlash uchun foydalaniladi.

Shunday qilib, ushbu guruh tarkibiga kirgan omillarni hisobga olib, umumiy proyeksiyalar oilasini (yoki ularning xossalarini) belgilab olish mumkin, ular asosida haqiqiy proyeksiya aniqlanadi.

Ikkinchi guruh omillari qo'yilgan masalani yechishda asosiy hisoblanadi. Aynan, ushbu guruh tarkibidagi shartlardan kelib chiqqan holda, uchinchi guruh omillarining ahamiyatiga oydinlik kiritiladi: jumladan, ulardan qaysi biri belgilangan aniq vaziyatda nisbatan eng muhim ahamiyatga ega, qaysi omillarni esa hisobga olmasa ham bo'ladi. Bunda ayrim talablar, masalan, proyeksiyada istalgan xatolik tavsiflari, ularning ruxsat etilgan maksimal darajadagi qiymatlari, qutblar tasvirlanishi, kartografik to'rning simmetrikligi yoki asimmetrikligi, meridian va parallellarning teng bo'linishlari, tasvirda qoplangan sohalarning mavjudligi va hokazolar asosida ma'lum bir aniq vaziyatlarda so'zsiz ravishda hisoblashlar amalga oshiriladi. Demak, proyeksiyani tanlash faqat berilgan talablarni to'liq holatda qoniqtiruvchi ko'plab proyeksiyalar yoki ularning xossalaridan amalga oshirilishi kerakligini anglatadi. Masalan, faqat teng maydonli proyeksiyalardan yoki faqat ortogonal to'rli proyeksiyalardan tanlash mumkin va h.k.

Shunday qilib, berilgan ushbu ma'lum bir aniq holatlarda birinchi guruh tarkibiga qo'shiluvchi, so'zsiz ravishda muhim ahamiyatga ega bo'lgan omillar, asosan, masalaning birinchi qismi yechilishida, ya'ni proyeksiyalar (ularning xossalari) umumiyligini qaror toptirishda foydalaniladi, ushbu tarkib asosida haqiqiy proyeksiyalarning aniqlanishi maqsadga muvofiq hisoblanadi. Bu omillarning ajratib ko'rsatilishidan keyin, zaruriy hisoblashlarga jalb qilinuvchi, barcha qolgan omillarning qarab chiqilishi (*iyerarxiya*) bajariladi, bunda ulardan har birining ma'lum bir aniq proyeksiyalarda tutgan nisbiy ahamiyati aniqlanadi.

Hozirgi paytda kartalarning ikkita asosiy tizimi mavjud: ilmiy-texnik masalalarni yechish uchun va keng miqyosda foydalanish uchun tuzilgan kartalar. Birinchi turdagi kartalar maksimal darajada aniq tuzib chiqilishni talab qiladi va tasvirlarning alohida qismlar bo'yicha batafsilligi, chuqur tahlil qilinishi, sintetik tavsifdagi kartalarda integral tavsiflarning yetarlicha darajada aniq joylashuvi talab etiladi.

Keng foydalanuvchilarga mo'ljallangan kartalarning tuzib chiqilishida ularga nisbatan qo'yilgan talablarning ko'p xilliligi qayd qilib o'tiladi. Ushbu talablarga muvofiq holda kartalarning alohida qismlari tavsiflari bo'yicha, tasvirining batafsilligi va aniqligi, kartografik to'rning ko'rinishi, ko'rish hissi orqali belgilanuvchi shartlar, yaqqollik va hokazolar o'zaro sezilarli darajada farqlanishlarga ega bo'ladi. Kartografik proyeksiyalarni tanlash nuqtayi nazaridan ushbu ikkita tizim bo'yicha barcha kartalar (ma'lum darajada shartli ravishda) beshta guruhga bo'lib chiqilishi mumkin (9-jadval).

Kartografik proyeksiyalarni tanlash avtomatik ravishda yoki turli xildagi kartografik proyeksiyalarni solishtirma tahlil qilish asosidagi an'anaviy usullarda amalga oshirilishi mumkin, bu usullar ma'lum bir aniq turdagi kartalarni tuzib chiqishda qo'llaniladi.

Ikkinchi usulda proyeksiyalarni tanlash hozirgi vaqtda nisbatan keng tarqalgan kartografik proyeksiyalarning solishtirma tahlil qilinishi, yuqorida ko'rsatib o'tilgan alohida omillarning proyeksiyani tanlashga nisbatan ko'rsatgan ta'siri asosida, sezilarli darajada subyektiv holatlar qayd qilinishi hisobga olinishi bilan amalga oshiriladi.

Yuqorida qayd qilib o'tilganidek, birinchi guruh tarkibiga kiruvchi omillarning hisobga olinishi bo'yicha, oldin proyeksiyalar to'plami o'rnatiladi, keyin ular asosida haqiqiy proyeksiya aniqlanadi. Masalaning yechimiga bu omillarning ta'siri kartaga olinayotgan hududning o'lchamlari yiriklashishi bilan ortib boradi.

Xatolik qiymatlarini kamaytirish va ularni mukammal darajada taqsimlashni ta'minlanish uchun, ayniqsa, yirik hududlarni kartaga olishda, proyeksiyaning markaziy nuqtalari va chiziqlari, ularni hududning geografik joylashuviga mosligini hisobga olishdan tashqari, izokolalar tasvirlanuvchi sohalarning sxematik tuzilishi bilan mos tushishiga intilish kerak.

Kartaning maqsadi, mazmuni (ixtisoslashuvi), undan foydalanish usuli, kartografik axborotlarni tahlil qilish (EHMdan foydalanib yoki an'anaviy), nashr qilish formati va hokazolar ham ushbu tartibda tahlil qilinadi.

Bunday tahlillar kartani tuzishni har bir vaziyati uchun bajariladi. Masalan, o'rta maktab kartalarini tuzishda qarab chiqilayotgan kartalarda kartografik to'r o'rta meridianga nisbatan simmetrik bo'lishi va teng bo'lingan yoki unga yaqin bo'lgan meridianlar va parallellar minimal egrilik qiymatiga ega bo'lishi talab qilinadi.

Maktab kartalari o'lchash ishlarini olib borishga mo'ljallanmaganligini e'tiborga oladigan bo'lsak, ularga nisbatan xatoliklar xususiyati, qiymati va taqsimlanishiga qat'iy talablar qo'yilmaydi. Ko'rib idrok qilish nuqtayi-nazaridan sferiklik effekti yuzaga keltirilishi, materik va okeanlar tasviri o'zaro muvofiqlikda joylashishi an'anaviy va odatdagi ko'rinishda bo'lishi maqsadli.

Osiyo qit'asining chetki hududlari sharqiy ramkaga yaqin joylashishi, Amerika qit'asi esa – karta varag'ida g'arbiy ramka yaqinida joylashishi lozim. Karta proyeksiyalarini tanlash masalasini qarab chiqishda, asosiy kartografik ma'lumotlar teng chiziqlar usulida berilishi, kartaning kimlarga mo'ljallanganligi, ixtisosligi, u bo'yicha qanday masalalar yechilishi e'tiborga olinadi.

Jumladan, agar izobara, izoterma, izogona va hokazolar o'rtasidagi maydonlarni o'lchash kerak bo'lsa, u holda teng maydonli yoki unga yaqin tavsifga ega bo'lgan proyeksiyalardan foydalanish tavsiya etiladi. Agar turli xil hodisalar gradiyentlarini aniqlash (magnit maydon kuchi, suvni sho'rlik darajasi va h.k.) talab qilinsa, u holda teng chiziqlar o'rtasida qiymatlarni interpolyasiya qilash ishlari bajariladi, bunda teng burchakli proyeksiyalardan foydalanish kerak, bu proyeksiyalarda uzunlik xususiy masshtabi yo'nalishga bog'liq bo'lmaydi.

Maydoni bo'yicha yirik hudud tasvirlanayotgan bo'lsa va o'z navbatida, uzunlik va maydon xatoligini e'tiborga olmaslik mumkin bo'lmaganda, ularni qiymatlari sezilarli darajada katta bo'lishini hisobga olsak, unda uzunlik xatoligi minimal qiymatga ega bo'lgan proyeksiyalarni emas, balki bu xatoliklar qiymatlarini hisoblash qulay bo'lgan proyeksiyalardan foydalanish maqsadga muvofiq. Ko'rib idrok qilish nuqtayi-nazaridan qulay bo'lgan mayda masshtabli kartalarni tuzishda, hududlarni tasvirlashda nisbatan tasvirda to'g'ri geografik joylashtirish, kartografik to'r ko'rinishida sferiklik effektini ifodalash va shunga o'xshash omillar sezilarli ahamiyatga ega bo'ladi.

68-§. Meridian va parallellar to'rlari ko'rinishi bo'yicha kartalar proyeksiyasini aniqlash

Kartani matematik asosi, eng avvolo, kartografik proyeksiya kartani eng muhim xossalaridan birini ta'minlaydi, ya'ni o'lchamlilik xossasini, shu sababli proyeksiyalarni aniqlash, karta doirasida xatoliklar tavsiflari va ularning taqsimlanishini bilish, kartalardan foydalanishda eng muhim va sezilarli ahamiyatga ega bo'lgan jarayonlardan biri hisoblanadi.

Meridianlar va parallellar to'ri ko'rinishi bo'yicha kartografik proyeksiyalarini aniqlash yyetarli darajada murakkab masala hisoblanadi. Kartada uning proyeksiyasi haqida ma'lumot berilishi maqsadga muvofiq, chunki nashr etilgan kartalarda proyeksiyani aniqlash masalasi ancha qiyin. Bu masala asosan, yirik masshtabli kartalarga tegishli, agar masshtab qanchalik yirik bo'lsa, karta varag'ida tasvirlanayotgan hudud o'lchamlari shunchalik kichik bo'ladi, unda barcha turdagi xatolik mutloq qiymatlari ham shunchalik darajada kichik bo'ladi. Bu xatolik qiymati ayrim holatlarda shu darajada kichik bo'lishi mumkinki (ayniqsa, ko'p qirrali proyeksiyalarda), ular sezilarsiz va to'r chiziqlarini grafik ko'rinishda tuzishda hamda qog'ozning deformatsiyasi xatoligi bilan qoplanib ketadi.

Ba'zi holatlarda mayda masshtabli kartalar proyeksiyasini aniqlash masalasi oddiy o'lchashlar yordamida yechilishi mumkin yoki kartaning alohida nuqtalarida xususiy masshtablar qiymatlarini hisoblash bo'yicha topiladi.

Proyeksiya sinfini aniqlash uchun kartografik to'rning tashqi ko'rinishi bo'yicha o'lchashlarni amalga oshirmasdan, proyeksiyaning qaysi sinfga kirishini – normal, konusli, silindrik, azimutal yoki boshqa turdagi proyeksiya hisoblanishini aniqlash mumkinligi yoki mumkin emasligi haqida oldindan xulosalarga kelish talab qilinadi. Proyeksiya sinfini aniqlab, keyingi o'lchashlarni amalga oshirish va xatolik tavsifi bo'yicha proyeksiyani guruhiga oydinlik kiritish mumkin. Agar to'r orqali tezda proyeksiya sinfini aniqlash qiyin masala bo'lsa, u holda o'lchash ishlarini olib borishga to'g'ri keladi. Kartografik to'rni tahlil qilishni meridian va parallellar ko'rinishidan, o'q meridian bo'yicha parallellar o'rtasidagi, shuningdek, meridian va ekvator o'rtasida yoki o'rta parallellar o'rtasidagi oraliqlar o'zgarishlari tavsiflariga aniqlik kiritishdan boshlash tavsiya qilinadi; keyin esa to'rning ortogonalligi, simmetrikligi va qutbning tasviriga oydinlik kiritiladi.

Meridianlar ko'rinishini aniqlashda eng avvalo, ularning barchasi to'g'ri chiziqdan tashkil topganligi yoki faqat o'rta meridianlar to'g'ri chiziq bilan tavsirlangan, qolganlari esa – o'rta meridianga nisbatan simmetrik holatda joylashgan egri chiziqlardan tashkil topganligi aniqlanadi. Agar meridianlar to'g'ri chiziq bo'lsa, u holda ular o'zaro parallelmi yoki bitta nuqtada kesishadimi, ushbu masalaga aniqlik kiritish kerak. Bunday ishlarni oddiy grafikli usullar yordamida ham olib borish mumkin. Parallellar to'rini ko'rinishini aniqlashda ham shu kabi savollar yuzaga keladi, bunda ko'pincha parallellarning simmetrikligi to'g'ri chiziqli ekvatorga nisbatan bo'lgan holati qarab chiqiladi; to'g'ri chiziqli parallellar faqat o'zaro parallel joylashishi kerak.

Meridianlar va parallellar egri chiziqdan iborat bo'lgan vaziyatda, eng avvalo, ular aylanami yoki yo'qligiga aniqlik kiritish kerak. Bunday tekshirish kalka qog'ozdan tayyorlangan, murakkab bo'lmagan «*nomogramma*»lar yordamida amalga oshiriladi. Buning uchun kalkaga tekshirilayotgan egri chiziq bo'ylab, bir-biridan bir xil oraliqda joylashgan uchta nuqta o'rni ko'chiriladi va kalkada belgilangan ushbu uchta nuqtani olingan egri chiziq butun uzunligi bo'ylab ustma-ust tushishiga aniqlik kiritiladi; agar nuqtalar mos kelsa, u holda egri chiziq aylana hisoblanadi. Agar parallellar aylana bo'lib tasvirlanganligi aniqlangandan so'ng, ularni konsentrikligi aniqlanishi kerak. Konsentrik aylanalarda har bir yonma-yon juft parallellar orasidagi masofa teng saqlanadi. Ayrim vaziyatlarda aylana radiusi unchalik katta bo'lmaganda va ularni markazini osonlikcha topish mumkin bo'lganda, aylana yoylarini sirkul yordamida tekshirish mumkin. Nisbatan murakkab egri chiziqlar (ellipslar, sinusoidalar va h.k.) shakllari odatda, oddiy ko'z bilan qarab aniqlanadi.

Ayrim vaziyatlarda kartografik to'r chiziqlarining kesishish nuqtalari koordinatalarini o'lchash yo'li bilan meridianlar va parallellar ko'rinishini aniqlash maqsadga muvofiq. Bu masala avtomatlashtirish vositalari mavjud bo'lgan holda sezilarli darajada osonlashadi. Meridian va parallellar ko'rinishi va to'rining oriyentirlanganligi bo'yicha proyeksiyani qaysi sinfga tegishli ekanligini aniqlash proyeksiyalarni aniqlash masalasini yechishni birinchi bosqichi hisoblanadi.

Ikkinchi bosqich – bunda xatoliklar tavsiflari bo'yicha proyeksiyalar guruhlariga aniqlik kiritish va ayrim holatlarda, bu jarayonni proyeksiya sinfini aniqlash bilan birgalikda bajarish ham mumkin, biroq ko'plab holatlarda bunday tekshirish kartalar orqali o'lchashlarni bajarish asosida olib boriladi. Teng burchakli proyeksiyalarda to'rning ortogonalligi saqlanadi va parallellar o'rtasidagi oraliqlar markaziy nuqtadan yoki chiziqdan kartaning chetiga tomon ortib borishi qayd qilinadi. Eslatib o'tish kerak, bunday tavsiflar ayrim hosila proyeksiyalarga ham xos, masalan, xatoliklari bo'yicha teng burchakli proyeksiyalarga yaqin bo'lgan silindrik proyeksiyalarga. Teng maydonli proyeksiyalarda aksincha, markaziy nuqta yoki proyeksiya chizig'idan karta chetiga tomon parallellar (almukantaratlar) o'rtasidagi oraliq masofa kamayib boradi.

Qayd qilib o'tamiz, xatolik tavsiflari bo'yicha ixtiyoriy tashqi perspektiv va ortografik proyeksiyalarda bu masofalar teng maydonli proyeksiyalarga nisbatan qaralganda tezroq kamayadi. Bunda kartografik to'r chiziqlari o'rtasidagi masofa tezlikda kamayishi hisobiga sferiklik effekti va uzoqdan ko'rinishlik ifodasi ta'minlanadi. Meridianlar (vertikallar) bo'yicha teng oraliqli proyeksiyalarda parallellar (almukantaratlar) orasidagi masofalar o'zgarmaydi. O'q meridian uzunligi o'zgarmaydigan proyeksiyalarda, masalan, psevdosilindrik proyeksiyalarda xam parallellar orasidagi masofa saqlanishi kuzatiladi.

Agar to'rning ko'rinishini o'rganishidan keyin ham xatolik tavsifi bo'yicha ushbu proyeksiyaning qanday guruhga kiritilishini aniqlash mumkin bo'lmasa, unda meridian va parallellar bo'yicha xususiy masshtablarni aniqlash bo'yicha kartada o'lchashlar amalga oshiriladi. Buning uchun mavjud imkoniyatlar asosida ayrim nuqtalarga yoki karta chiziqlariga nisbatan simmetrik holatda joylashgan, meridianning nisbatan kichik kesma va shuningdek, ushbu nuqtadan boshlanuvchi parallellar kesmalari o'lchanadi. Keyin esa $s_m = (s_2 - s_1)$ va $\varphi_{o'rta}$ argumentlar asosida yer yuzasida tegishli meridian va parallellar kesmalari uzunliklari aniqlanadi hamda quyida keltirilgan formulalar bo'yicha m va n masshtablar qiymatlari hisoblab topiladi:

$$m = s'_m / (\mu_0 1000) s_m; \quad n = s'_n / (\mu_0 1000) s_n,$$

Bu erda s'_m va s'_n – meridian va parallellar kesmalarining karta bo'yicha o'lchanish qiymatlari (0,1 mm gacha aniqlik darajasida; s_m va s_n – yer yuzasida tegishli meridian va parallellar kesmalarining uzunligi; μ_0 – kartaning asosiy masshtabi. Agar natijada uzunlik xususiy masshtablari $m = n$ va burchak $\varepsilon = 0$ (xatolik $\omega = 0$) qiymatlar kuzatilsa, u holda proyeksiya teng burchakli; agar $p = mn \sin i = 1$ bo'lsa, u holda proyeksiya teng maydonli, agar $m \neq n$ va $p \neq 1$ shart bajarilsa, unda proyeksiya ixtiyoriy proyeksiya hisoblanadi.

Xususiy masshtablarni markaziy nuqta yoki karta chizig'idan ma'lum bir masofada bo'lgan joyda amalga oshirish talab qilinadi. Bunda hisoblash aniqligi birning yuzdan bir ulushlari bilan chegaralanishi mumkin. Proyeksiya sinfini oldindan bilish uchun maxsus jadvallardan foydalanish mumkin, masalan 10 – jadval orqali.

XIV BOB
MATEMATIK KARTOGRAFIYADA AVTOMATLASHTIRISHNING ASOSIY MUAMMOLARI VA YO‘NALISHLARI

Hozirgi paytda kartografiya fani va amaliyotidagi eng muhim hisoblangan masalalardan biri – bu kartografik ishlab chiqarishni avtomatlashtirish bilan bog‘liq hisoblanadi. Elektron hisoblash mashinalari (EHM) va GIS dasturlari kartografik tizimi tarkibiga kiritiluvchi tashqi qurilmalar matematik kartografiyada quydagi keltirilgan asosiy masalalarni yechishda foydalanilishi mumkin: jumladan, kartografik proyeksiyalarni EHM yordamida yechish; berilgan proyeksiyalarda dastlabki kartaning kartografik proyeksiyalarini o‘zgartirish; tuzib chiqiluvchi kartaga qo‘yiluvchi barcha talablarni nisbatan to‘liq holatda qoniqtiruvchi, kartografik proyeksiyalarning avtomatlashtirilgan tarzda tanlanishi; berilgan shartlarga mos ko‘rinishda, avtomatlashtirilgan rejimda yangi kartografik proyeksiyalarni qidirib topish; kartaning masshtabi va komponovkasini avtomatik tarzda loyihalashtirish; avtomatik rejimda kartografik proyeksiyalarni tanish; kartalarning matematik asoslarini hisobga olish bilan birgalikda, kartalar bo‘yicha o‘lchashlarda qisqartirishlarni avtomatik ko‘rinishda aniqlash va kiritishni amalga oshirish; matematik asos elementlarini avtomatik tuzib chiqish va boshqalar.

69-§. EHM yordamida kartografik proyeksiyalarni hisoblash

Kartalarni tuzib chiqishda kartografik proyeksiyalarni hisoblash ishlari ta’minlanishi uchun qo‘l mehnati (hozircha asosiy usul hisoblanadi) yoki avtomatlashtirilgan kartografik tizimdan foydalaniladi.

Ko'rsatib o'tilgan birinchi holatda, agar aniqlanuvchi nuqtalar soni kam bo'lsa, shuningdek hisoblash formulalari oddiy ko'rinishga ega bo'lsa va hisoblashlar epizod tavsifiga ega bo'lsa, u holda hisoblashlar stolda bajariluvchi hisoblash vositalari yordamida bajarilishi mumkin, agar sezilarli sondagi nuqtalarni aniqlash talab qilinsa, proyeksiya formulalari murakkab ko'rinishga ega bo'lsa va bu ishlarni bajarish davriy ravishda takrorlanishi qayd qilinsa, u holda EHMdan foydalanish asosida ish tutilishi mumkin.

Ikkinchi holatda, avtomatlashtirilgan tizimlardan foydalanish asosida kartalarni tuzib chiqishda, aniqlanuvchi nuqtalar soni, foydalaniluvchi formulalarning murakkablik darajasi va hokazolarga bog'liq bo'lmagan holatda EHM yordamida ish bajariladi. EHMda kartografik proyeksiyalarni hisoblash vazifalarni hal qilish quyidagi keltirilgan ikkita usulda amalga oshirilishi mumkin.

Birinchi usulda umumiy yechimlarning xususiy holati sifatida proyeksiyalarning sinflari va variantlariga aniqlik kiritish imkonini beruvchi algoritmlar va dasturlardan tashkil topgan yagona uslubiyatni tuzib chiqish nazarda tutiladi.

Ikkinchi usulda har bir sinf va har bir qatorlar uchun kartografik proyeksiyalarning alohida variantlari bo'yicha o'ziga tegishli bo'lgan uslubiyatlar, algoritmlar va dasturlar tuzib chiqiladi, ya'ni dasturiy kutubxona tashkil qilinadi.

Ko'pincha holatlarda turli xildagi proyeksiyalarni hisoblashning yagona ko'rinishdagi dasturlaridan foydalanish, sezilarli darajadagi iqtisodiy samaradorlikni beradi, shuningdek bunda har bir sinf uchun yoki aniq berilgan proyeksiyalar uchun ishlash maqsadida dasturni tuzib chiqish ehtiyojiga barham beradi.

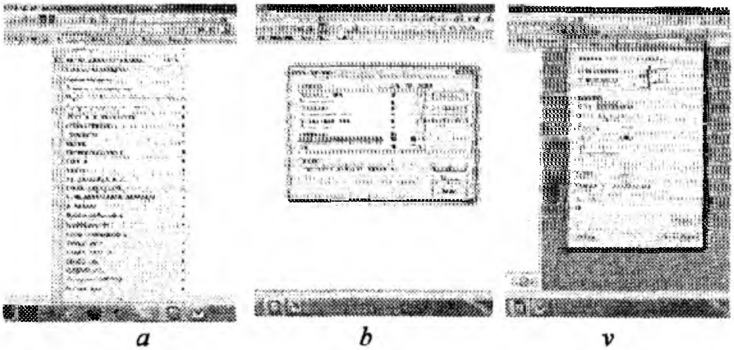
Kundalik hayotimizga xilma-xil axborotlarning jadal kirib kelishi, yangi texnika va texnologiyalarni ishlab chiqarishga tadbiq etilishi natijasida kartalarning matematik asosini takomillashtirish, kartografik proyeksiyalarni GIS dasturlarini qo'llagan holda yaratish vazifalari ko'ndalang qo'yildi. Bugungi kunda kartografik ishlab chiqarishda ArcGIS, MapInfo, AutoCAD, Panorama, Fotomod, Geo Draw, Geo Graph, Atlas Gis, Win Gis, ArcInfo, Arc View GIS, MGE va boshqalar ishlatilmoqda. Ularning imkoniyatlari har xil. Hududni geografik o'rni, uni kattaligi, chegaralarini shakli, kartani maqsadi, tayyorlanish sohasi, masshtab va mazmuni, karta bo'yicha yechiladigan vazifalar va ularni yechish uchun karta aniqligiga qo'yiladigan talablar, kartografik proyeksiyani xatolik xususiyati va ularni maksimal miqdori hamda taqsimlanish xarakteri va hokazolarni bilish talab etiladi. So'ngra shularga asoslanib esa maqbul GIS dasturlari tanlanadi.

Masalan, ArcGIS dasturi karta tuzishning barcha bosqichlarini qamrab oladi. Zero bu dastur boshqalardan o'zining tahlil qilish va baholash imkoniyatlari ko'pligi bilan farq qiladi. Panorama, Fotomod dasturlari esa, asosan, aero va kosmik suratlardan ma'lumotlarni olish, rastr bilan ishlash, yirik masshtabli plan va kartalarni yaratish ishlarida keng ishlatiladi. AutoCAD dasturidan geodezik o'lchashlarni va dala syomkasi natijalarini qayta ishlash, shahar arxitekturasi va infratuzilmasi, yirik masshtabli plan va kartalarni yaratish ishlarini olib borishda foydalanilsa maqsadga muvofiq bo'ladi.

Geo Draw, Geo Graph va Atlas Gis dasturlari Rossiya FA Geografiya institutida milliy atlaslarni, yirik regionlar va viloyatlarni mavzuli va umumgeografik kartalarini ishlab chiqishda keng ishlatilgan. Win Gis, ArcInfo, Arc View GIS, MGE dasturlari yer tuzish, kadastr kartografiyasini olib borish, transportni boshqarish, rejalashtirish va optimillashtirish hamda boshqa bir qator xizmatlarda foydalaniladi.

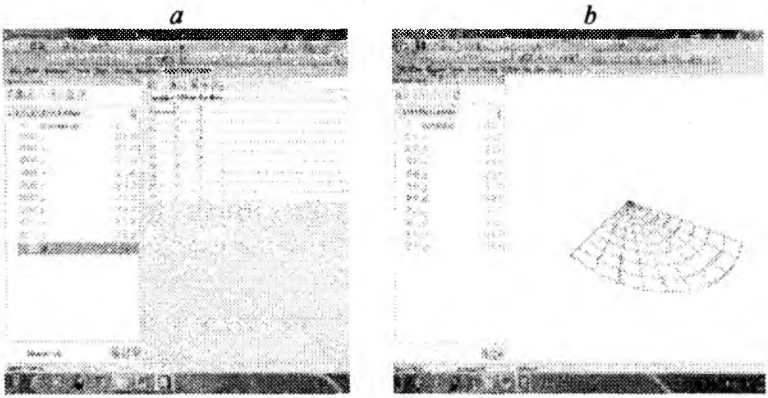
Yuqoridagi GIS dasturlaridan keng tarqalgani - MapInfo GISida kartografik proyeksiyalarni hosil qilish yo'llarini ko'rib chiqamiz. Ma'lumki, respublikamizning karta va atlaslarini yaratishda konusli va silindrik proyeksiyalardan keng foydalaniladi. Xatoligi bo'yicha teng oraliqli bo'lgan konusli proyeksiya masshtabi 1:1 500 000 dan mayda bo'lgan butun respublika hududining tabiiy va sotsial-iqtisodiy kartalarini tuzishda ishlatiladi. Silindrik proyeksiyalardan dunyo kartalari, dengiz navigatsiya kartalari hamda topografik kartalarni tuzishda.foydalaniladi. Shu bilan bir qatorda silindrik proyeksiyalar yirik masshtabli to'rtburchak shaklga ega bo'lgan o'rta kengliklarda joylashgan hududlar kartalarini tuzib chiqishda ham ishlatiladi.

Bunday ikki xil proyeksiyani (konusli va silindirik) MapInfo GISida tuzish yo'llari quyidagi bosqichlarda bajarilishi mumkin. Dastlab *MapInfo* dasturi ishga tushiriladi, bosh menyu orqali *програмы* funksiyasiga kiriladi va undan *каталог программ* tanlanadi. Keyin *нарисоват сетки* tanlanib, *OK* tugmasi bosiladi.



69-rasm. **GISda dasturlar katologi va ular bilan ishlash:**
a) dasturlar katalogini tanlash; b) koordinata to'rini tanlash; v) proyeksiya turini tanlash

Shunda koordinata to'rlarini chizish buyrug'i yoqiladi. So'ngra yana *рограммы* ga kirib, *создать градусную сетки* va *создать сетки* buyruqlari beriladi *(69-rasm)*. Shundan so'ng to'rni yaratish bo'yicha oyna hosil bo'ladi.

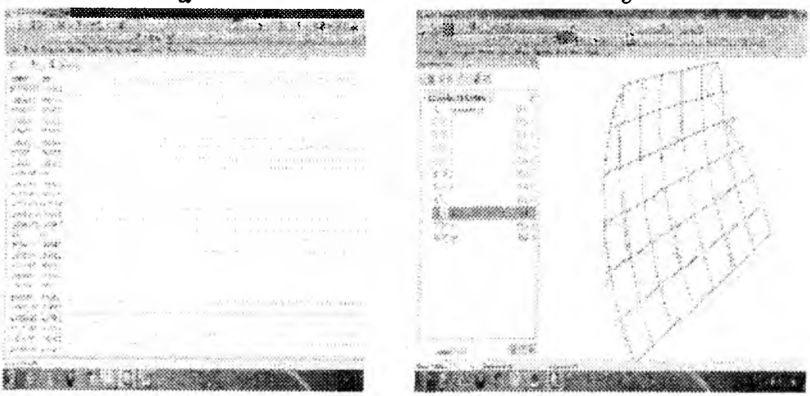


70-rasm. **Konusli proyeksiya to'rini chizish oynasi:**
a) ma'lumotlar bazasi; b) konusli proyeksiya.

Konusli proyeksiyani GIS asosida yaratishda kartaga olinayotgan hudud chegarasining koordinatalari ma'lumotlar bazasiga kiritilishi, yoki to'rni hosil qilish quroli bilan karta oynasini tanlanishi kerak. Albatta, barcha jihozlash ishlari rastrni ro'yhatga olishning "kenglik va uzoqlik" holatida bajarilishi mumkin *(70-rasm)*.

Silindrik proyeksiyani MapInfo GISida yaratishda yuqorida ko'rsatilgan tartibda ishlar ketma-ket bajariladi, "proyeksiya" qurilmasi orqali GIS ro'yxatida nomlari keltirilgan proyeksiyalardan hududga mos keladigani ko'rsatiladi *(71-rasm)*. Shundan keyin proyeksiya to'ri chiziladi.

a *b*

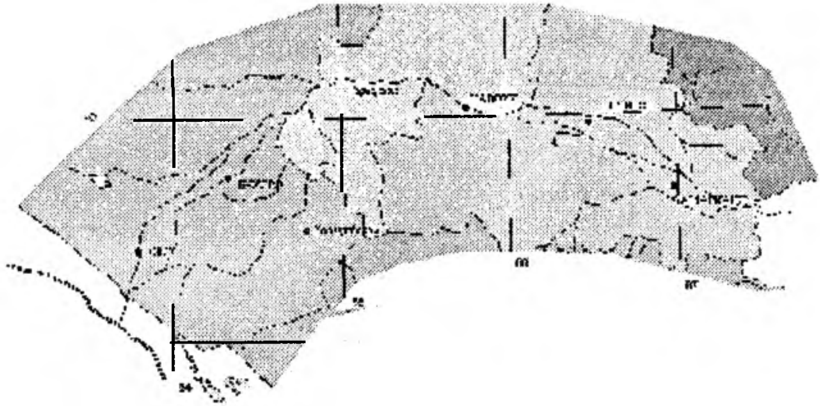


71-rasm. **Silindrik proyeksiya to'rini chizish oynasi:**
a) ma'lumotlar bazasi; b) silindrik proyeksiya.

Kadastr kartalari uchun eng yaxshi kartografik proyeksiyalarni tanlash, proyeksiyalarni xatoliklari xususiyati bo'yicha eng optimallarini izlash nazariyasi va amaliyotini ishlab chiqish masalari hozirgacha to'liq yechilmagan. Kartografik proyeksiyalarni tanlash kadastr tizimini maqsadi va amalga oshiradigan vazifalaridan kelib chiqadi, shuningdek, qo'yilgan shartga ko'ra yo'l qo'yilarli eng katta maydon xatoligiga (uning ta'sir doirasi shaklni qupol o'zgarishiga olib kelmaganda) bog'liq bo'lib, u 0.4% dan oshmasligi kerak.

Kadastr kartalari uchun proyeksiyalarni ishlab chiqishda respublika va uning sug'oriladigan yerlari konfiguratsiya xususiyatlarini hisobga olish zarur. Global faktorlar tasirini baholashda va yirik geosistemalarning rivojlanishi va funksional faoliyatini tadqiq qilishda ularni butunlay tasvirlash masalasi muhim ahamiyat kasb etadi [1,5]. O'rta Osiyo sharoitida, masalan, melioratsiya tadbirlarini olib borish maqsadida, tuproq kartalarini tuzishda, tabiiy hududni differensiyalashda "havza usuli" qabul qilingan. Bunday holatda butun respublika hududiga alohida, uning qismlariga alohida ishlab chiiqlgan proyeksiyalardan foydalanish mumkin, lekin izokollar yirik sug'oriladigan yerlarni tashqi ko'rinishi bilan to'g'ri kelishi kerak. Yana shuni ta'kidlash joizki, mayda mashtabli (1:5 000 000 va undan mayda) kartalarda "sferiklik effekti" saqlanishi zarur.

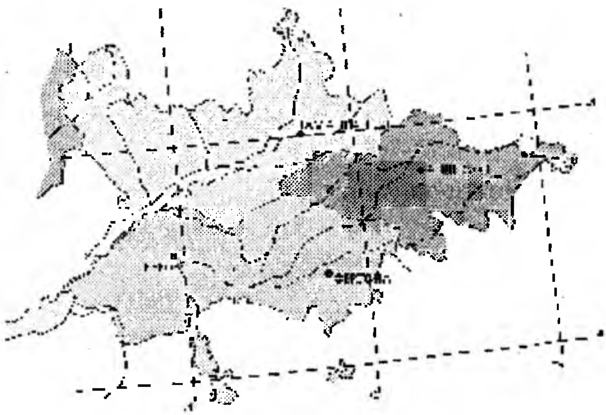
Hozirgi paytda tuman va viloyat kadastr tizimi bosqichida kartalar uchun ortogonalli va teng burchakli ko'ndalang-silindrik proyeksiya qo'llanilmoqda. Tuproq va tuproq qoplami kartalari aniq razgrafkaga ega emas (1:1 000 000 masshtabdagi Davlat tuproq kartasidan tashqari). Mayda masshtabli kartalar uchun, masalan, Zarafshon vodiysiga normal teng maydonli yoki teng oraliqli konusli proyeksiyalarni qo'llash mumkin. Farg'ona vodiysi uchun esa qiyshiq yoki ko'ndalang azimutal proyeksiyalar (stereografik, qiyshiq azimutal yoki hududning markaziy nuqtasi asosida tuzilgan perspektiv proyeksiya) ishlatilishi mumkin.



72-rasm. **Zarafshon vodiysi**

Teng oraliqli konusli proyeksiyani tanlash xatoliklar xarakteriga bog'liq, bu yerda meridianlar bir xilda orliqdan o'tkazilgan, parallellar orasi teng oraliqda bo'linganligi va meridian yoyi bo'laklarini o'zgarishi sezilmaydi.

Yuqorida keltirib o'tilgan shartlar bo'yicha chetki parallelardagi xatoliklarni ham standartlardagi kabi xuddi shunday qiymatlarda o'rnatish mumkin. Standart parallelar sifatida chetdagi parallelar kengliklari $\varphi_1 = 45^\circ 00$ $\varphi = 37^\circ 00$ qabul qilingan.



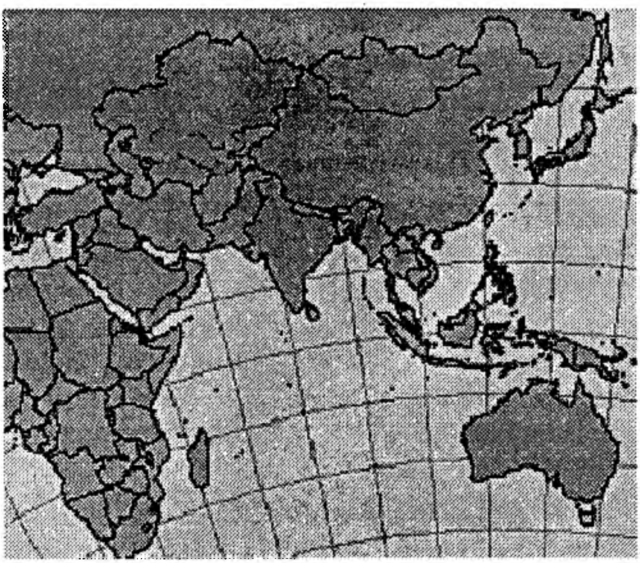
73-rasm. **Farg'ona vodiysi**

Lambertning qiyshiq teng maydonli azimutal preksiyasi hududni doiraviy shaklda tasvirlash imkonini beradi, (u Farg'ona vodiysi uchun foydalanilgan) buning uchun markaziy nuqtani tasvirlanayotgan vodiyning o'rtasidan olish mumkin.

Bundan tashqari, proyeksiyada yuzalar doiraviy shaklda tasvirlanadi, masofalar esa xatoliklarsiz xoxlagan yo'nalishlarda o'tkaziladi. Burchak xatoligi chetki meridianlarda oshib boradi, shunda maydon xatoligi no'lga teng bo'ladi.

Shunday qilib, kadastr tizimi uchun ko'plab proyeksiyalardan to'g'ri teng maydonli konusli proyeksiya (2 ta standartli parallelari bilan), to'g'ri teng oraliqli konusli proyeksiya, Bonning psevdokonusli teng maydonli proyeksiyasi, Lambertning qiyshiq teng oraliqli azimutal proyeksiyasi va ko'ndalang teng burchakli stereografik proyeksiyalar tanlandi. Ko'rib chiqilgan konusli proyeksiyalardagi xatoliklar chetdagi parallelar tomon oshib boradi, tezlik bilan shimolga qarab, standart parallelarda esa – doimiy, va 1 ga teng, bu esa respublika kartalari uchun ushbu proyeksiyadan foydalanish mumkinligini tasdiqlaydi. Xatoliklar izokollari bitta markazli doira ko'rinishda tasvirlanadi va ular parallellar bilan to'g'ri keladi. Ko'rib o'tilgan va tanlangan boshqa proyeksiyalarda xususiy masshtablar hamda burchak xatoliklari qiymatlari 11-jadvalda ko'rsatilgan.

Teng oraliqli proyeksiyalarda burchak xatoligi qiymatlari shimolga qaraganda janubiy parallellarda katta ekanligi kuzatildi. Maydon xatoligi no'lga teng, paralel bo'yicha eng kichik xususiy masshtab 1 ga, eng kattasi 1,031, burchaklari $0^{0}04'$, meridianlar bo'yicha masshtab 1 ga, paralellar bo'yicha maydonlar tanlangan bosh masshtabga teng. Bu proyeksiyalarni paralellar bo'yicha cho'zilgan, o'rta kengliklarda joylashgan hududlarning o'rta va mayda masshtabli kartalarini tuzishda ishlatish qulay. Shuning uchun bu proyeksiyalar respublikamiz va uning Zarafshon vodiysini kartalarini tuzish uchun tanlangan.



74- rasm. **Bonn proyeksiyasi**

Azimutal proyeksiyalarda asosiy yo'nalishlar vertikallarga va almukantaratlarga to'g'ri keladi, bu yerda μ_1,μ_2 ekstremal, shuning uchun xatoliklar zenit masofasiga z bog'liq. Izokollar bitta markazli doiralardir.

Kartalarda z judayam kichik (0^0 dan 3^0 gacha) bo'lgani uchun, izokollar almukantaratlar (meridianlar) bilan ustma-ust tushgan, bu esa eng minimal xatoliklarga to'g'ri keladi. Burchak xatoligi kenglik yo'nalishi bo'yicha chetdagi parallellar tomoniga qarab oshib boradi. Agar $m\approx\omega$, bog'liqligi bo'lsa, unda burchak o'lchamlarini o'zgarishi minimal bo'ladi, shuning uchun olingan burchak xatolik qiymatlari kadastr talablariga javob berishi mumkin. Keltirilgan hisoblar bunday proyeksiyalarni kadastr kartalarida ishlatish mumkinligini isbotlab beradi.

Proyeksiyalarni tanlashning tayyorgarlik ishlari bosqichida GIS-texnologiyalari dasturlari va ularga mos keladigan kompyuter texnik vositalari tanlanadi. O'tkazilgan tadqiqotlarda *ArcGIS, MapInfo* va boshqa dasturlar qo'llanilgan. Koordinata tizimi tanlanib, geografik bog'lanish obyektlari aniqlandi. To'g'ri diskretli bog'lanishdan foydalanilib, kartografik proyeksiyalar qiymatlari hisoblandi, so'ngra *ArcGIS* va *MapInfo* dasturlari orqali respublikamiz hamda Zarafshon va Farg'ona vodiylari uchun tanlangan kartografik proyeksiyalar tuzildi.

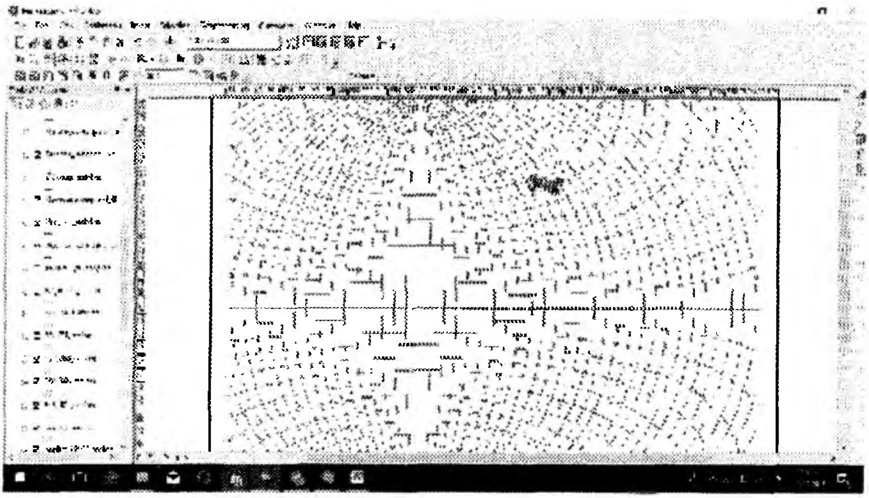
11-jadval

Proyeksiyalar	Proyeksiyalarning xususiy masshtablari va burchak xatoliklari ko'rsatkichlari				
1. Ikkita standart parallelli to'g'ri teng maydonli konusli proyeksiya $\varphi_1=45^000'$ $\varphi_2=37^000'$ *(O'zbekistonRespublikasi kartalari uchun)*	O'zbekiston Respublikasi kartalari uchun				
	φ	m	n	p	ω
	45	1,006	0,994	1	$0^003'$
	44	1,0005	0,9998	1	0 00
	43	1,00015	0,9996	1	0 01
	42	1,002	0,9993	1	0 00
	41	1,002	0,998	1	0 02
	40	1,001	0,9996	1	0 00 16
	39	1,0001	0,9995	1	0 00 14
	38	1,0002	0,9994	1	0 00 09
	37	0,999	1,001	1	0 04
	45	1	1,002	1,002	0 01

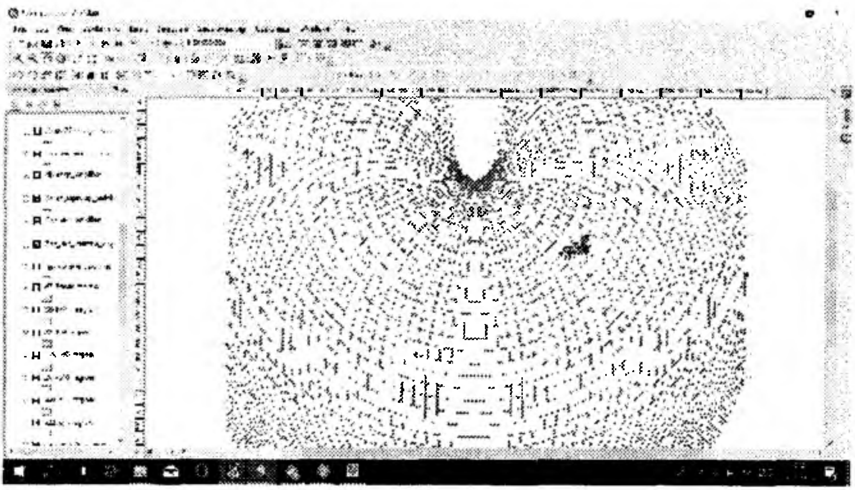
2. To‘g‘ri teng oraliqli konusli proyeksiya	44	1	1,031	1,031	0 00
	43	1	1,019	1,019	0 02
	42	1	1,021	1,021	0 01
	41	1	1,000	1,000	0 00
	40	1	1,016	1,016	0 03
(O‘zbekiston Respublikasi va Zarafshon vodiysi kartalari uchun)	39	1	1,028	1,028	0 01
	38	1	1,013	1,013	0 02
	37	1	1,003	1,003	0 02
3. Bonning teng maydonli psevdo-konusli proyeksiyasi	45	1,001	1	1	2 05
	44	1,002	1	1	1 10
	43	1,000	1	1	0 23
	42	1,003	1	1	0 29
	41	1,000	1	1	0 15
(Zarafshon vodiysi kartalari uchun ham qo‘llanilishi mumkin)	40	1,004	1	1	0 54
	39	1,002	1	1	0 43
	38	1,003	1	1	1 22
	37	1,001	1	1	2 10
4. Lambertning teng maydonli qiyshiq azimutal proyeksiyasi	*Farg‘ona vodiysi kartalari uchun*				
	z	*m*	*n*	*p*	*ω*
	0^0	1,0000	1,0000	1	$0^0 00'$
	1^0	0,9998	1,0002	1	0 00
	2^0	0,9996	1,0004	1	0 01
	λ	m	n	P	Ω
(Farg‘ona vodiysi kartalari uchun)	$0^0(71^0)$	1,0000	1,0000	1	0^0 00
	72^0	0,9999	1,00003	1	0 00 22
	73^0	0,9995	1,0009	1	0 01 06

Ta’kidlash joizki, GIS dasturlari yordamida kartografik proyeksiyalarni yaratish bir muncha qulayliklarga ega. Bunda proyeksiyani hosil qilish ishlari tez bajariladi, kiritilayotgan ma’lumotlarning aniqlik darajasi ancha yuqori bo‘ladi, proyeksiyada qupol xatoliklar kuzatilmaydi. Shu bilan birga tuzilayotgan proyeksiyaga oid barcha ma’lumotlar dasturda saqlanib turadi, kerakli vaqtda unga o‘zgartirish hamda qo‘shimchalar kiritilishi mumkin.

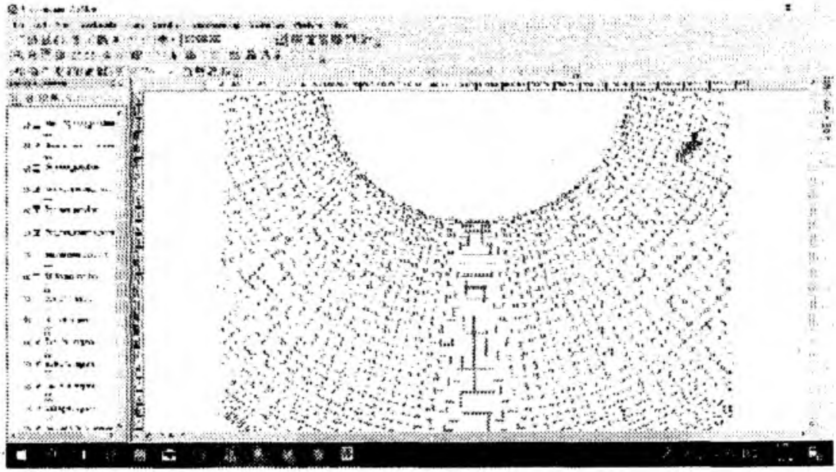
O‘zbekiston kartasini uchun turli proyeksiya va koordinatalar sistemalari yordamida ko‘rib chiqamiz.



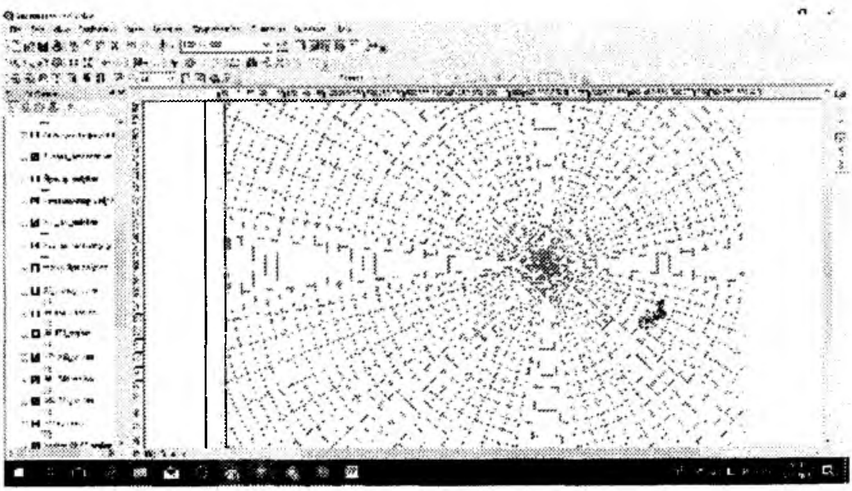
75-rasm. **Dunyo kartalari uchun Azimutal (sfera) proyeksiya**



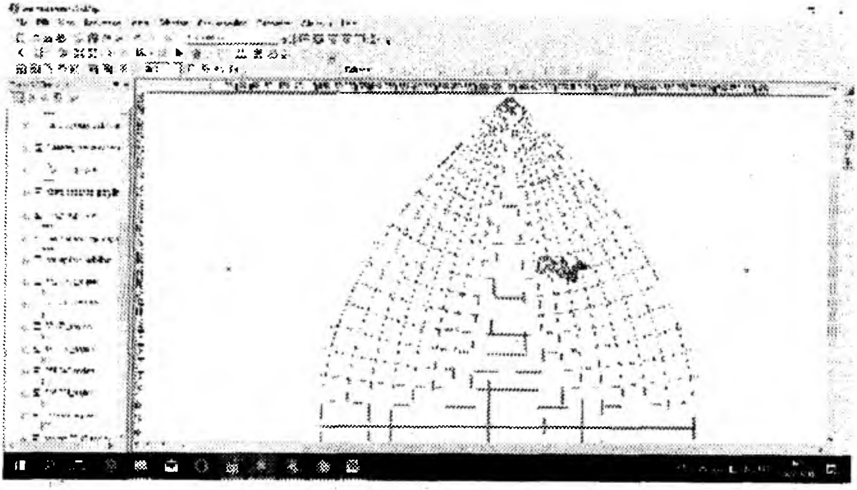
76-rasm. **Dunyo kartalari uchun Bonn proyeksiyasi**



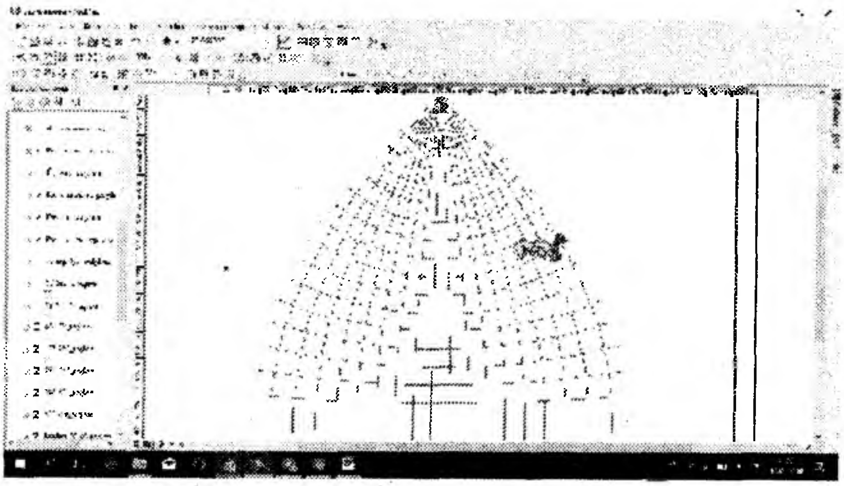
77-rasm. **NAD 1983 (2011) Florida GDL Albers proyeksiyasi**



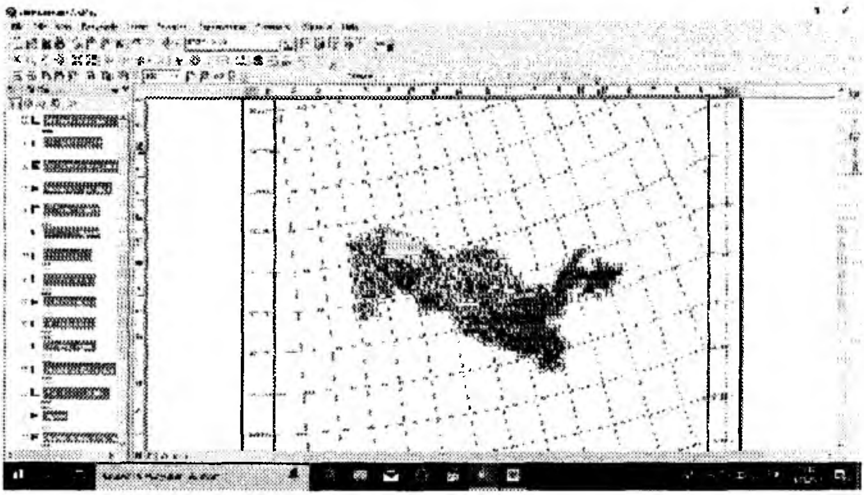
78-rasm. **Qutb kartalari uchun Azimutal proyeksiya (Shimoliy qutb)**



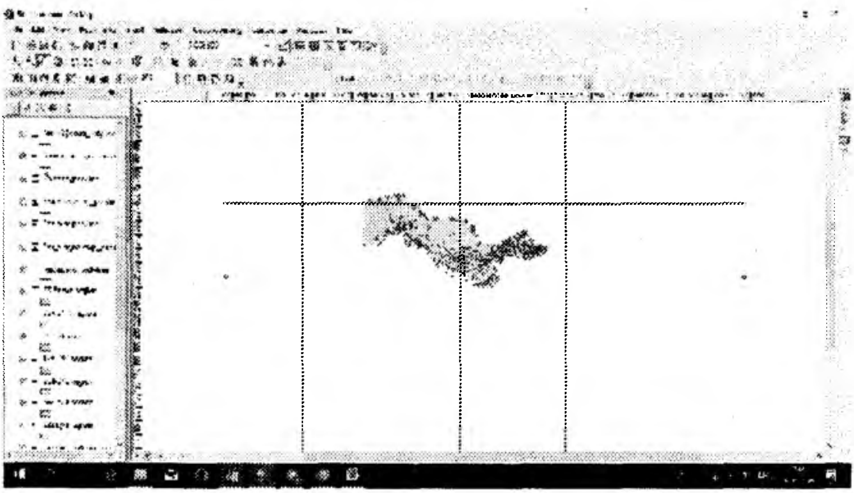
79-rasm. **Turkiya uchun ED 1950 Degree 15-zona**



80-rasm. **Turkiya uchun ED 1950 Degree 9-zona**



81-rasm. **Osiyo kartalari uchun Janubiy Yaman (8-zona) proyeksiyasi**



82-rasm. **Yevropa kartalari uchun Albaniya 1987 proyeksiyasi**

Nazorat savollari

1. *Kartografik proeksiyalarni tuzishda qaysi GIS dasturlari ko'proq qo'llaniladi, ularning imkoniyatlariga izoh bering.*
2. *GIS dasturlarida proyeksiyalarni olish ishlari ko'lamini tushuntiring.*
3. *O'zbekiston hududini GIS dasturida tasvirlashda proyeksiyalar olishda qatlamlar qanday hosil qilinadi, ularni joylashtirishni tushunitiring.*
4. *m, n, p qiymatlar qanday hisoblanadi va ularning qiymatlari respublika hududlarida qanday taqsimlanishini aytib bering.*

XV BOB
MATEMATIK KARTOGRAFIYANI RIVOJLANISHINING QISQACHA TARIXI

Matematik kartografiyaning rivojlanishi tarixi boshlanishi tahminan ikki ming yil oldin Gretsiyalik olimlar tomonidan amalga oshirilgan ishlar bilan belgilanadi, ular tomonidan birinchi marta Yer va yulduzlar osmonining tasvirini chizishda matematik tamoyillardan foydalanilgan va asta–sekin meridianlar va parallellar to'rlaridan ishlatilgan. Kartografiyaning rivojlanishida Anaksimandr, Eratosfen, Appoloniy, Gipparx kabi Qadimiy Gretsiya faylasuflari katta hissa qo'shishgan.

Eramizdan oldingi II asrda Ptolemey tomonidan «Geografiya» nomli yirik asar yozilgan bo'lib, uning tarkibiga kartalarni tuzish usullari va Yerning o'lchamlarini aniqlash, shuningdek kartografik proyeksiyalarni tuzib chiqish usullari kiritilgan. Bu asar VII asrda tarkibiga bir qator kartalar kiritilgan «Arman geografiyasi» asari yaratilishi uchun asos bo'lgan.

O'rta asrlarda ibodatxona kartalarining vujudga kelishi bilan tavsiflanadi, bu kartalarda Olamning tuzilishi haqidagi ustuvor diniy tasavvurlar o'z ifodasini topgan. Abu Rayxon Beruniy tomonidan Yerning sharsimon proyeksiya haqida fikrlar o'z ifodasini topgan asarlar yaratilgan.

Kartografiyaning rivojlanishida Uyg'onish davri alohida o'rin tutadi, bu buyuk geografik kashfiyotlar davri bo'ldi. Shuningdek, mamlakatlarni boshqarish, harbiy yurishlar uyushtirish, savdo – sotiq va dengizda suzishni rivojlantirish uchun aniq va ishonchli kartalarga ehtiyoj ortgan. Kartalar faqatgina matematik asoslardan foydalanilgan holatdagina yaratilishi mumkin bo'lgan va bevosita tasvirga olish ishlari asosida yaratilgan. Dastlabki davrlarda topografik kartalar paydo bo'lgan.

XVI asrning oxiri va XVII asrning boshlarida kartografiyaning ommalashishi va navbatdagi bosqichda rivojlanishida sezilarli o'rin tutgan hodisa sifatida Gollandiyalik kartograflar – Ortelli va

Merkator tomonidan ishlab chiqilgan geografik atlaslarning yaratilishi qayd qilib o'tiladi, ular tomonidan birinchi marta teng burchakli silindrsimon proyeksiyadan foydalanilgan bo'lib, dengiz navigatsiya kartalarini tuzib chiqish uchun bu usuli hozirgi kunga qadar muvafaqqiyatli foydalanilib kelinmoqda.

Bu davrga kelib, dunyo kartasini tuzib chiqishga urinishlarda sezilarli darajada katta o'lchamdagi hududlarni aks etirish maqsadida trapetsiyasimon proyeksiyadan va keyinchalik ishlab chiqilgan psevdosilindrsimon proyeksiya uchun namuna sifatida xizmat qilgan – Apian proyeksiyasidan keng miqyosda foydalanilgan. XVII asrda dunyo kartasini tuzib chiqishda Fransiya maktabi vakili N.Sanson tomonidan yangi psevdosilindrsimon proyeksiya taklif qilingan.

XVIII asr kartografiya fanining ilmiy asoslarning ishlab chiqilishi bilan tavsiflanadi, bu davrda Yerning keng ko'lamda topografik jihatdan o'rganilishi boshlangan va o'z navbatida, kartalarning aniqligi va ishonchliligi darajasi oshirilgan. Kartografiya amaliyotida R.Bonn, I.Lambert, J.Lagran, L.Eyler, N.Delil va boshqa kartograflar tomonidan taklif qilingan bir qator yangi proyeksiyalardan foydalanila boshlangan.

XIX asr boshlariga kelib yirik masshtabdagi harbiy topografik kartalar yaratilishi boshlangan, bunda matematik asoslar alohida darajada muhim ahamiyatga ega hisoblangan, kartalar asosida masofalar va yo'nalishlarni aniqlash amalga oshirilgan. Bu vaqtga kelib, K.Gauss tomonidan birinchi bo'lib bitta yuzada boshqasini tengburchakli ko'rinishda ask ettirish masalasi hal qilingan, bu esa bir qator teng burchakli proyeksiyalarni olish uchun asos sifatida xizmat qilgan (jumladan, yirik masshtabli kartalar uchun). Kartografik proyeksiyalarning umumiy xatoliklar nazariyasini ishlab chiqqan N.Tissoning asarlari muhim ahamiyat kasb etdi.

Rossiyada dastlabki mashhur karta «Katta chizma» nomi ostida XVI asr oxirlarida tuzib chiqilgan. XVII asrga kelib bu karta yana qaytadan tayyorlangan va tarkibi Moskvadan Perakopgacha bo'lgan yo'llar chizmalari bilan to'ldirilgan. Bu yo'l kartasi Rossiyaning Yevropa qismining sezilari hududlari tasvirlarini o'zida aks ettiradi. XVII asr oxirlari va XVIII asrning boshlarida P.Godunov va S.Remezov tomonidan Sibir hududining dastlabki kartasi tuzib chiqilgan. 1701 yilda S.Remezov tomonidan dastlabki rus geografiya atlasi – «Sibirning chizma kitobi» nomi bilan tayyorlangan.

Sanab o'tilgan chizmalardan tashqari, matematik jihatdan asoslanilmagan holatdagi xususiy shaxslarga tegishli yoki rus olimlari materiallari asosida horijiy olimlar tomonidan tayyorlangan kartalar ham mavjud bo'lib, ularda XVII asrdan boshlab meridianlar va parallellar to'ri aks ettirila boshlangan (Rossiya kartasi – F.Godunov, G.Gerrits, I.Mass, N.Vitsena). XVIII asrda Pyotr I farmoyishi bilan dengiz flotining ehtiyojlarini qondirish maqsadlarida va Rossiyaning Bosh kartasini tuzib chiqish uchun tizimli tarzda tasvirga olish ishlari boshlangan. Bu vaqtda rus kartalari silindrsimon, trapetsiyasimon (psevdosilindrsimon), stereografik va konussimon proyeksiyalar asosida tuzib chiqilgan.

1734 yilda I.Krilov tomonidan ishlab chiqilgan «Butun Rossiya imperiyasining atlasi» nashr qilingan, bu atlasning paydo bo'lishini Rossiya kartografiyasida muhim hodisa sifatida qayd qilib o'tish mumkin. Atlasning ko'pgina kartalari ikkita asosiy parallellar bilan birgalikda, teng oraliqlarga ega bo'lgan konussimon proyeksiyada tuzib chiqilgan.

Kartografiyaning navbatdagi rivojlanishi Rossiya Fanlar akademiyasining faoliyati bilan chambarchas bog'liq hisoblanadi. Fanlar akademiyasida Geografik Departament tashkil qilindi, u asrning oxirigacha Rossiyada kartografik ishlarni umumlashtirdi va boshqarishni amalga oshirildi.

Akademiyada Geografik Departamentning faolyaiti natijasida 1745 yilda «Rossiya atlasi» yaratildi, uning tarkibiga Rossiyaning Bosh kartasi, mamlakatning Yevropa qismini tasvirlovchi 13 ta karta, Osiyo qismini 6 ta kartasi joylashtirilgan. Bu atlas o'z davridagi eng yaxshi atlaslardan biri sifatida tan olingan; uning tarkibiga kiritilgan barcha kartalar trapetsiyasimon (psevdosilindrsimon) va teng oraliqli konussimon proyeksiyada tuzib chiqilgan.

XVIII asrning ikkinchi yarmida batafsil holatdagi kartografik materiallarda asosiy chegaralarni belgilab boruvchi sifatida Depo tomonidan tuzib chiqilgan «Rossiya imperiyasinng batafsil kartasi» ko'rsatib o'tilib, o'z davrida bu karta «yuz sahifali» karta deb ham nomlangan va bir dyuymda 20 verst (1:840000) masshtabda teng oraliqli konussimon proyeksiyada tuzib chiqilgan. XVIII asrning oxirlari va XIX asrning boshlarida kartalarni tuzib chiqish masalalari va ularning matematik asoslari bilan harbiy geodezistlar, kartograflar, astronomlar shug'ullanishgan (F.F.Shubert, A.P.Bolotov, N.YA.Singer va boshqalar), ular tomonidan mavjud proyeksiyalardan oqilona foydalanish va kartalarning aniqligiga katta e'tibor qaratilgan.

Harbiy topografik Depo va harbiy topograflar korpusi tomonidan syomka ishlari olib borilgan hamda yirik masshtabli kartalar tuzib chiqilgan.

Kartografik proyeksiya nazariyasi A.P.Bolotov tomonidan yozilgan geodeziya kursida batafsil ko'rinishda bayon qilingan; bu kurs tarkibida Rossiya miqyosida birinchi marta bitta yuzaning ikkinchi yuzada Gauss usuli bo'yicha teng burchakli tasvirlash nazariyasi berilgan bo'lib, Rossiya kartalarini tuzib chiqishda teng burchakli konussimon proyeksiya tavsiya qilinadi. 1848 yilda Harbiy topograflar korpusida maxsus komissiya tashkil qilingan va yirik masshtabli Rossiya topografik kartalari uchun Myufling ko'p qirrali proyeksiyasidan foydalanish qabul qilingan, bunda yer yuzasining tasviri trapetsiyalar bo'yicha aks ettiriladi hamda meridian va parallellar bilan chegaralanishdan foydalaniladi.

Rossiya va unga tutash hududlarning o'rtacha va kichik masshtabdagi kartalari bu vaqtda ko'proq teng burchakli konussimon proyeksiya asosida tuzib chiqilgan, horijiy mamlakatlar, qit'alar va butun dunyo kartalarini tuzib chiqishda esa – qiyshiq stereografik, psevdokonussimon, teng oraliqli azimutal va teng burchakli silindrik proyeksiyalardan foydalanilgan.

1839 yilda Pulkovo observatoriyasi ishga tushirilgandan keyin, kartalarda uzunlik Pulkova meridianidan o'lchana boshlangan, bungacha boshlang'ich sifatida Ferro (Kanar orollarining eng g'arbiy qismida joylashgan orol) meridianidan foydalanilgan. 1884 yilda Vashingtonda o'tkazilgan Xalqaro anjumanda boshlang'ich meridian sifatida Grinvich taklif qilingan, bu holat bir nechta rus kartalarida ham foydalanilgan.

Matematik kartografiyaning rivojlanishidagi yangi bosqichi mashhur rus matematigi P.L.Chebishev nomi bilan bog'liq, u berilgan hudud uchun nisbatan eng yaxshi hisoblangan teng burchakli kartografik proyeksiya teoremasini shakllantirgan. D.A.Grave tomonidan P.L.Chebishev teoremasi isbotlab berilgan va kartografik proyeksiyalar nazariyasi bo'yicha bir qator tadqiqotlar amalga oshirilgan. XIX asrning oxirlariga kelib matematik kartografiya geodeziyaning bo'limlaridan biri sifatida, oliy texnika o'quv yurtlarida va universitetlarining fizika – matematika fakultetlari o'quv rejalari tarkibiga kiritilgan. Bu vaqtga kelib kartalarni tuzib chiqish asosan harbiy qo'shinlar ehtiyojlarini qondirishga yo'naltirilgan.

Kartografik proyeksiyalar nazariyasi sohasida olib borilgan tadqiqotlar bilan XX asr boshlarida mashhur olimlar F.N.Krasovskiy, A.A.Mixaylov va boshqalar shug'ullanishgan. Matematik kartografiyaning rivojlanishida muhim hodisalardan biri sifatida 1907 – yilda V.V.Vitkovskiy tomonidan nashr qilingan «Kartografiya» tadqiqot ishini ko'rsatib o'tamiz, unda kartografik proyeksiyalar nazariyasi bayon qilingan va undan amaliyotda foydalanish bo'yicha tavsiya va ko'rsatmalar keltirilgan. 1918 yilda sobiq ittifoqda metrik tizimga o'tish va hisoblashlarni Grinvich meridianidan boshlash qabul qilingan. 1920 yillarda topografik kartalarda matematik asoslar (metrik masshtablarda) masalasi hal qilingan. Bu kartalar uchun ilgari Myufling proyeksiyasidan foydalanilgan.

1921 yilda mashhur olim geodezist F.N.Krasovskiy tomonidan ikkita takrorlanmas, o'zi xoslikka ega bo'lgan, teng oraliqli konusli proyeksiya ishlab chiqilgan bo'lib, butun sobiq ittifoq hududlarini mayda masshtablarda tasvirlash mo'ljallanilgan. Bu proyeksiyalardan biri bir qator mintaqalarning maydoni saqlanishini ta'minlab berishi va hududni nisbatan yaxshi darajada aks ettirish imkonini berishi qayd qilib o'tiladi. Aynan bu proyeksiya keng miqyosda qo'llanila boshlangan va F.N.Krasovskiy proyeksiyasi nomi bilan tanilgan. Bu proyeksiyaning afzalligi shundaki, unda mutloqo so'zsiz ravishda, deyarli 90% sobiq ittifoqning barcha hududlarida undan foydalanilganda xatolikka yo'l qo'yilishi 1,5% dan kam bo'lishi isbotlangan.

F.N.Krasovskiy proyeksiyasida juda ko'plab kartalar tuzib chiqilgan, jumladan, sobiq RSFSRning Yevropa qismini 1:4000000 masshtabdagi ma'muriy kartasi (1921 – 1922 yy.), sobiq ittifoqning Yevropa qismining 1:1500000 masshtabdagi ma'lumotnoma sifatidagi kartasi (bu karta ko'p marta qayta nashr qilingan bo'lib, bir qator mayda masshtabli kartalarni yaratish uchun asos sifatida xizmat qilgan), sobiq ittifoq kartasi va ko'plab geografik atlaslar yaratilgan.

1928 yilda Uchinchi geodezik Kengashda Gauss-Kryuger proyeksiyasi qabul qilinadi va topografik kartalar va geodezik o'lchashlarni qayta ishlash uchun yagona tizimga o'tiladi. Butun sobiq ittifoq hududlari uchun olti gradusli zonalar tizimida bu proyeksiyaning kiritilishi geodeziya va kartografiya sohasida katta yutuq sifatida o'rin tutadi.

1930 yillar boshlarida sobiq ittifoq maydonini aniqlash bilan bog'liq kartometrik tadqiqotlar boshlangan. Bu vaqtga kelib, kartalarni tuzishda sezilarli yutuqlar qo'lga kiritilgan. Masalan, sobiq ittifoqning Yevropa qismi bo'yicha 1:1500000 masshtabda va Osiyo qismi bo'yicha – 1:5000000 masshtabda kartalar nashr qilingan, shuningdek ishlab chiqarish sanoat atlasi, cho'ntak atlasi va boshqa bir qator kartalar tuzib chiqilgan.

Bu davrda maktab kartalarini tuzish bo'yicha ishlar ham boshlangan bo'lib, bu kartalar millionlab nashrdan chiqarilgan. Professor M.D.Solovyov tomonidan perspektiv silindrik proyeksiyaning umumlashtirilgan nazariyasi ishlab chiqilgan va maktab kartalari uchun qiyshiq perspektiv–silindrik proyeksiya tavsiya qilingan.

SNIIGAiKda matematik kartografiya bo'yicha maxsus guruh tashkil qilinib, bu guruh faoliyati ushbu sohada tadqiqotlar bilan tizimli tarzda shug'ullanishi belgilangan. Sobiq ittifoqda ko'zga ko'ringan olimlar – N.A.Urmayev, V.V. Kavrayskiy, M.D. Solovyov matematik kartografiyaning nazariy va amaliy masalalarini ishlab chiqish bo'yicha olib borilgan tadqiqotlarga rahbarlik qilishgan.

Qayd etish joizki, topografik-geodezik va kartografik ishlar bajarilishi harbiy va fuqorolik sohalardagi mutaxasislarning birgalikdagi katta mehnati natijasida rivojlangan. Bunday hamkorlik ayniqsa, Ulug' Vatan urushi yillarida yaqqol ko'zga tashlangan.

Urushdan keyingi davrlarda kartografik proyeksiyalar va kartografik jadvallar atlasi nashr qilingan, bu nashr kartograflarga proyeksiyalarni hisoblashda katta yordam beradi.

Yuqorida ko'rsatib o'tilgan olimlardan tashqari, matematik kartografiya yo'nalishida tadqiqotlar bilan N.M. Volkov, G.A. Ginzburg, A.P. Yushenko, G.A. Mesheryakov, A.S. Lisichanskiy, F.A. Starostin, T.D. Salmanova, A.G. Gedimin, A.K. Malovichko va boshqalar shug'ullanishgan. Kartografik proyeksiyalarni yaratish bo'yicha yangi usullarni qidirib topishda sobiq ittifoq olimlari Chebishev – Grave tomonidan ishlab chiqilgan g'oya va qoidalarning foydalanilishi yo'nalishida alohida ahamiyat kasb etdi. N.A.Urmayev tomonidan ushbu murakkab masala yuzasidan o'z tadqiqot ishida yangicha rivojlanish jihatlari berilgan bo'lib, bunda uning tadqiqot ishi yangi kartografik proyeksiyalarni izlab topishga bag'ishlandi, bunda sonli differensiallash va integrallash usullaridan keng foydalanilgan, berilgan kartografik to'rlarning xomaki nusxalari bo'yicha proyeksiyaarni olishning grafik–tahliliy usuli qo'llanilgan.

So'nggi yillarda kartografiya sohasida nazariy va amaliy tavsiflarga ega bo'lgan ko'plab tadqiqotlar amalga oshirilmoqda, kartalarni tuzib chiqish bo'yicha barcha ishlar majmuasi avtomatlashtirishmoqda, GIS texnologiyalari qo'llanilmoqda. Axborotlarning jadal rivojlantirilishi, EHMlarining tadbiq etilishi va avtomatik qurilmalarning joriy qilinishi bevosita kartografiya oldiga kartalarni yaratish va ulardan foydalanishning matematik asoslarni takomillashtirish yo'nalishidagi yangi vazifalarni ko'ndalang qo'yadi.

GLOSSARIY

Almukantaratlar – (arabcha «mukantara», «kantara» – doira) qutbiy sferik koordinatalar tizimida yer sharining kichik doiralari bo'lib, ular yer sharining geografik qutblarini birlashtiruvchi faraz qilingan o'qi (diametri) ga emas, balki boshqa ixtiyoriy o'q (diametr)ga perpendikulyar tekisliklardir.

Bosh yo'nalishlar – elipsoidning har bir nuqtasidan bir-biriga perpendikulyar bo'lgan yo'nalishlar (chiziqlar) tashqaridan o'tkazilgan bo'lib, bu yo'nalishlar proyeksiyada ham shu nuqtada bir-biriga perpendikulyar bo'ladi. Bosh yo'nalish berilgan nuqtada bo'lishi mumkin bo'lgan eng katta va eng kichik masshtablarni yo'nalishini ko'rsatadi. Masshtablar eng katta bo'lgan yo'nalishni *a* bilan, eng kichik bo'lgan yo'nalishni esa *v* bilan belgilanadi. Agar kartografik to'r ortogonal bo'lsa, bosh yo'nalish meridian va parallellar bilan mos tushadi.

Burchak xatoligi – proyeksiyadagi ikkita yo'nalish orasidagi burchak (u') bilan kartaga olinayotgan yuzadagi mos keluvchi burchak (u) ning farqi.

Vertikallar – qutbiy sferik koordinatalar tizimida yer sharining katta doiralari bo'lib, ular yer sharining geografik qutblarini birlashtiruvchi faraz qilingan o'qi (diametri) orqali emas, balki boshqa ixtiyoriy o'q (diametr) orqali o'tuvchi tekisliklardir.

Yordamchi geometrik yuzalar – yer yuzasini kartaga olishda va kartogarafik proyeksiyalarni ishlab chiqishda yer ellipsoidi (shar) ni dastlab geometrik yuzalarga, so'ngra tekislikka olib o'tiladi. Ana shunday geometrik yuzalarga yordamchi geometrik yuzalar deyiladi.

Izokolalar – proyeksiyada xatoligi bir xil bo'lgan nuqtalarni tutashtiruvchi egri chiziqlar. Ular kartadagi turli xildagi xatoliklarning tarqalishi va qiymatlari haqida yaqqol tasavvur beradi.

Ixtiyoriy proyeksiyalar – teng maydonlilik va teng burchaklilik shartlarining har ikkisi ham bajarilmaydigan proyeksiyalar bo'lib, uning turli nuqtalarida burchak uzunligi va maydon xatoliklarining qiymatlari proyeksiyaning shartidan kelib chiqib turli xilda bo‘ladi.

Karta – karta atamasi yunoncha ... (xartes-papiros qog‘ozi) so‘zdan olingan, lotincha “charta”(qog‘oz varaq) atamasidan kelib chiqqan. Yunoncha ... (karta), lotincha “charta”, turkcha “harita.”Turkiy tillar oilasiga kiruvchi o‘zbek tilida ham karta bo‘lsa etimologik jihatdan to‘g‘ri bo‘ladi.

Kartaning matematik asosi – kartaning matematik elementlari majmui (kartografik proyeksiya va u bilan bog‘liq koordinata to‘ri, masshtab, godezik asos, komponovka, razgrafika va nomenklatura).

Kartografiya – kartografik asarlarni o‘rganish, yaratish va foydalanish bilan shug‘ullanadigan fan, texnika va ishlab chiqarish sohasi.

Kartografik proyeksiya – yer ellipsoidi (shari) ning yuzasini tekislik, ya’ni qog‘ozda ma’lum matematik qonunlar asosida tasvirlash. Kartografik proyeksiyalar yer ellipsoidi (shari) bilan tekislikdagi nuqtalarni tekislikda faqatgina bitta x va y koordinatali nuqta mos kelishini ta’minlaydi.

Kartografik to‘r – kartografik proyeksiyadagi meridianlar va parallellarni kesishishidan hosil bo‘lgan to‘r. Kartografik to‘r karta mazmunining elementlarini to‘g‘ri joylashtirish uchun matematik asos bo‘lib xizmat qiladi.

Ko‘ndalang kartografik to‘r – foydalanilayotgan yordamchi geometrik yuzaning o‘qi yer ellipsoidi (shar) ning aylanish o‘qi bilan perpendikulyar bo‘lganda hosil bo‘lgan to‘r. Bunday to‘rdan tashkil topgan proyeksiyaga ko‘ndalang proyeksiya deyiladi.

Loksodromiya – ellipsoid (shar) yuzasidagi hamma meridianlarni bir xil burchak (rumb, azimut) bilan kesib o‘tuvchi chiziq. Loksodromiya ellipsoidda egri spiralsimon, qutbga yaqinlashib boruvchi chiziq bo‘lib, Merkator proyeksiyasida esa to‘g‘ri chiziq, ya’ni ikkita nuqta orasidagi eng yaqin masofa bo‘lib tasvirlanadi.

Maydon xususiy masshtabi – proyeksiya (karta) dagi maydon (dF^1) ni kartaga olinayotgan yuzadagi mos keluvchi maydon (dF) ga nisbatiga aytiladi va p deb belgilanadi.

Maydon xatoligi – maydon xususiy masshtabi bilan 1 orasidagi farq bo'lib, u foizda ifodalanuvchi kattalikdir.

Matematik yuza – matematik kartografiyada ishlatiladigan shar va aylanma ellipsoid (yer ellipsoidi). Geoid (Yerning tabiiy yuzasi) ni hech qanday matematik qonunlar bilan ifodalab bo'lmaydi, shuning uchun ma'lum matematik qonunlar bilan ifodalash va tekislikka tushirishning imkonini beruvchi tabiiy yuzaga juda yaqin bo'lgan matematik yuzalardan foydalaniladi.

Meridianlar – geografik va geodezik koordinatalar sistemasida yer shari (yer elipsoidi) ning katta doiralarini yoylari bo'lib, ular yer shari (ellipsoidi) ning geografik qutblarini birlashtiruvchi faraz qilingan o'qi (diamaetri) orqali o'tuvchi tekisliklarning yoylaridir.

Masshtab – Joyda (Yer yuzasida) nuqtalar orasidagi o'lchangan masofalar uzunligini gorizantal proyeksiyalarni qog'ozda kichraytirilish darajasiga masshtab deyiladi.

Ortodromiya – shar yuzasidagi ikki nuqtani eng yaqin masofada tutashtiruvchi chiziq. Sharda to'g'ri chiziq, Merkator proyeksiyasida esa qabariq tomoni bilan o'ziga yaqin bo'lgan geografik qutbga qaragan egri chiziq bo'lib tasvirlanadi.

Parallellar – geografik yoki geodezik koordinatalar sistemasida yer shari (yer ellipsoidi) ning kichik doiralari bo'lib, ular yer shari (yer ellipsoidi) ning geografik qutblarini birlashtiruvchi faraz qilingan o'qi (diametri) ga perpendikulyar tekisliklarning yoylaridir.

Teng burchakli (konfrom) proyeksiyalar – burchaklar xatoliksiz tasvirlanuvchi proyeksiyalar bo'lib, burchak xatoligi ω=0. Teng burchakli proyeksiyada kartaga olinayotgan yuzaning shakl xususiyatlari saqlab qolinadi.

Teng maydonli (ekvivalent) proyeksiyalar – maydon xatoligi bo'lmaydigan proyeksiyalar bo'lib, p=mn=const. Bu proyeksiyalarda kartaga olinayotgan yuzadagi maydon bilan tekislik (karta) dagi mos keluvchi maydon orasidagi doimiy munosabat saqlanadi.

Uzunlik xususiy masshtabi – proyeksiyadagi eng kichik bo'lak (dS^1) ni kartaga olinayotgan yuzadagi mos keluvchi eng kichik bo'lagi (dS) ga nisbatan aytiladi.

Uzunlik xatoligi – uzunlik xususiy masshtablari bilan bosh masshtab farqiga aytiladi va u foizda ifodalanadi.

Xatoliklar ellipsi – kartaga olinayotgan yuzadagi (ellipsoid yoki shardagi) aylana proyeksiyada ellips bo'lib tasvirlanadi. Bu ellipsga mos keluvchi ellipsning so'nggi o'lchamlari qiymatiga xatoliklar ellipsi deyiladi.

Xususiy masshtab – masshtab proyeksiyada o'zgaruvchan miqdor va bo'lak uzunligi masshtabi ushbu bo'lakning yo'nalishiga bog'liq holda o'zgarib turadi. Proyeksiyaning bosh masshtab saqlanadigan alohida nuqtalari yoki chiziqlaridan boshqa barcha nuqtalarida masshtablar bosh masshtabdan kichik yoki katta bo'ladi. Bunday masshtablarga xususiy masshtab deyiladi.

Ellipsoid (aylanma ellipsoid) – yer yuzasini tekislikda (qog'ozda) tasvirlash imkonini beruvchi, tabiiy yuzaga juda yaqin bo'lgan matematik yuza bo'lib, u ellipsning o'z kichik o'qi atrofida aylanishidan hosil bo'lgan geometrik shakldir.

ADABIYOTLAR

1. *Берлянт А.М.* Картоведение. – М.: Аспект-Пресс, 2003.
2. *Беспалов Н.А.* Методы решения задач сфероидической геодезии. – М.: Недра, 1980.
3. *Бугаевский Л.М.* Математическая картография. – М.: Златоуст, 1998.
4. *Вахрамеева Л.А., Бугаевский Л.М., Казакова З.Л.* Математическая картография. – М.: Недра, 1986.
5. *Востокова А.В., Кошель С.М., Ушакова Л.А.* Оформление карт. Компьютерный дизайн. – М.: Аспект-Пресс, 2002.
6. Географический атлас Узбекистана. – Тошкент., Госкомгеодезкадастр, 2012.
7. *Гинзбург Г.А., Салманова Т.Д.* Атлас для выбора картографических проекций. – Тр. ЦНИИГАиК, М., 1957.
8. *Ғуломова Л.* Математик картография. – Тошкент., Университет, 1999.
9. *Конусова Г.И.* О классификации картографических проекций по характеру искажений. //Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1975, вып. 3.
10. *Лурье И.К.* Геоинформационное картографирование. Методы геоинформатики и цифровой обработки космических снимков. – М.: Изд-во КДУ, 2008.
11. *Mirzaliyev T., Safarov E.Y., Egamberdiyev A., Qoraboyev J.S.* Kartashunoslik. – Toshkent.: Cho‘lpon, 2012.
12. *Салищев К.А.* Проектирование и составление карт. – М.: Изд-во МГУ, 1987.
13. *Safarov E.Y., Avezov S.A., Allanazarov O.R., Oymatov R.Q.* Kartashunoslik. Amaliy va laboratoriya mashg‘uloti bo‘yicha o‘quv qo‘llanma. – Toshkent.: Universitet, 2012.
14. *Соловьев М.Д.* Математическая картография. – М.: Недра, 1969.
15. *Suyunov A.S., Jo‘raqulov D.O., Salahiddinov A.A.* Matematik kartografiya. – Toshkent., “Davr nashriyoti” , 2013.
16. Справочник по картографии //А.М. Берлянт, А.В. Гедымин, Ю.Г. Кельнер и др. – М.: Недра, 1988.

MUNDARIJA

E.Y. SAFAROV,
D.N. RAXMONOV

MATEMATIK KARTOGRAFIYA

O'quv qo'llanma

Muharrir ***Umida Rajabova***
Badiiy muharrirlar ***Nasiba Ergasheva,***
Maftuna Vaxxobova
Texnik muharrir ***Yelena Tolochko***
Musahhih ***Umida Rajabova***
Sahifalovchi ***Ilmira Adilova***

Litsenziya raqami AI № 163. 09.11.2009. Bosishga 2019-yil 19-dekabrda ruxsat etildi. Bichimi $60x84^{1}/_{16}$. Ofset qog'ozi. Times New Roman garniturasi. Shartli bosma tabog'i 16,74. Nashr tabog'i 17,01. Shartnoma № 110–2019. Adadi 200 nusxada. Buyurtma № 42.

Original maket axborot va ommaviy kommunikatsiyalar agentligining Cho'lpon nomidagi nashriyot-matbaa ijodiy uyida tayyorlandi, chop etildi.
100011, Toshkent, Navoiy ko'chasi, 30.
Telefon: +998–71244–10–45. Faks: +998–71244–58–55.