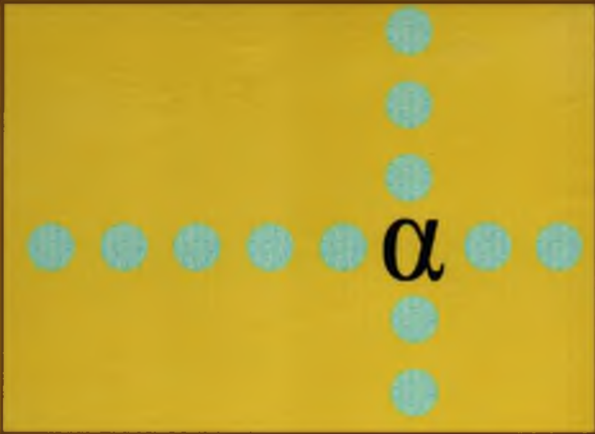
Ш.Ш. БАБАДЖАНОВ

ФИНАНСОВАЯ МАТЕМАТИКА



$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$$

МИНИСТЕРСТВО
ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

Ш.Ш. БАБАДЖАНОВ

ФИНАНСОВАЯ МАТЕМАТИКА

Учебное пособие

Направления: 5230600 – Финансы; 5230700 – Банковское дело; 5230900 – Бухгалтерский учет и аудит (по отраслям); 5231200 – Страховое дело; 5230800 – Налоги и налогообложение

Издательство Национального общества философов Узбекистана
Ташкент – 2019

УДК 51:336(075)
ББК 65.052я73
Б 12

Бабаджанов Ш.Ш.
Б 12 Финансовая математика. Учебное пособие / Ш.Ш. Бабаджанов. – Ташкент: Издательство Национального общества философов Узбекистана, 2019. – 192 с.

УДК 51:336(075)
ББК 65.052я73

Учебное пособие включает в себя методы количественного финансового анализа. Эти методы позволяют производить разнообразные финансовые и кредитные расчеты. В пособие входят методы начисления процентов (расчет простых и сложных процентов), методы расчета эффективности инвестиционных проектов с учетом инфляции и методы расчета эффективности финансовых операций (§§1–7); сжатое изложение основных понятий и моделей теории риска, позволяющие объективно оценивать финансовые риски в деятельности страховой компании (§§8–10). Теория риска является важнейшей составной частью актуарной математики.

Пособие предназначено студентам всех направлений области образования «Экономика» и написано в соответствии с требованиями государственного стандарта. Оно также будет полезно всем, кого интересует количественный финансовый анализ разнообразных финансовых операций, оценка и управление рисками в страховании.

Рецензенты:
У.Н. Каландаров – к.ф-м.н., доцент кафедры алгоритмизации и математического моделирования ТУИТ;
Р.А. Абдикаримов – д.ф-м.н., доцент кафедры высшей и прикладной математики ТФИ.

ISBN 978-9943-6171-3-1

ГЛАВА 1. ОСНОВЫ ФИНАНСОВЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

§1. ПРЕДМЕТ ФИНАНСОВОЙ МАТЕМАТИКИ. НАЧИСЛЕНИЕ ПРОСТЫХ ПРОЦЕНТОВ

1. Введение

Финансовая математика — раздел количественного анализа **финансовых** операций, предметом которого является **изучение** функциональных зависимостей между параметрами коммерческих сделок или финансово-банковских операций и разработка на их основе методов решения финансовых задач определенного класса.

Фактор времени играет огромную роль и определяется принципом неравноценности денег, относящимся к разным моментам времени. Сегодняшние деньги ценнее будущих по следующим причинам:

– во-первых, деньги можно продуктивно использовать во времени как приносящий доход финансовый актив, т.е. деньги могут быть инвестированы, и тем самым принести доход. Сум в руке сегодня стоит больше, чем сум, который должен быть получен завтра ввиду процентного дохода, который вы можете получить, положив его на сберегательный счет или проведя другую инвестиционную операцию;

– во-вторых, инфляционные процессы ведут к обесцениванию денег во времени. Сегодня на сум можно купить товара больше, чем завтра на этот же сум, т.к. цены на товар повысятся;

– в-третьих, неопределенность будущего и связанный с этим риск повышает ценность имеющихся денег. Сегодня сум в руках уже есть и его можно израсходовать на потребление, а будет ли он завтра в руке, — еще вопрос.

2. Простые проценты

Время как фактор в финансовых и коммерческих расчетах

В практических финансовых и коммерческих операциях суммы денег обязательно связываются с некоторыми конкретными моментами или интервалами времени. Для этого в контрактах фиксируются соответствующие сроки, даты, периодичность поступлений денежных средств или их выплат.

Фактор времени играет не меньшую роль, чем размеры денежных сумм. Необходимость учета фактора времени определяется **принципом неравноценности** денег, относящихся к разным моментам времени. Дело в том, что даже в условиях отсутствия инфляции и риска 1 млн. сум, полученных через год, не равноценен этой же сумме, поступившей сегодня. Неравноценность определяется тем, что теоретически любая сумма денег может быть инвестирована и принести доход. Поступившие доходы, в свою очередь, могут быть реинвестированы и т.д. Следовательно, сегодняшние деньги в этом смысле ценнее будущих, а будущие поступления менее ценны, чем современные.

Очевидным следствием принципа «неравноценности» является неправомерность суммирования денежных величин, относящихся к разным моментам времени. Подобного рода суммирование допустимо лишь там, где фактор времени не имеет значения – например, в бухучете для получения итогов по периодам и в финансовом контроле.

В финансовых вычислениях фактор времени обязательно учитывается в качестве одного из важнейших элементов. Его учет осуществляется с помощью начисления процентов.

Проценты и процентные ставки

Под **процентными деньгами** или, кратко, ***процентами*** в финансовых расчетах понимают абсолютную величину дохода от предоставления денег в долг в любой форме: в виде выдачи денежной ссуды, продажи в кредит, помещении денег на сберегательный счет, учет векселя, покупка сберегательного сертификата или облигаций и т.д.

В какой бы форме ни выступали проценты, это всегда конкретное проявление такой экономической категории, как ссудный процент.

При заключении финансового или кредитного соглашения стороны (кредитор и заемщик) договариваются о размере **процентной ставки** – отношения суммы процентных денег, выплачиваемых за фиксированный отрезок времени к величине ссуды. Интервал времени, к которому относится процентная ставка, называют периодом начисления. Ставка измеряется в процентах, в виде десятичной или натуральной дроби. В последнем случае она фиксируется в контрактах с точностью до 1/16 или даже 1/32.

Начисление процентов, как правило, производится дискретно, т.е. в отдельные (обычно равноотстоящие) моменты времени (**дискретные проценты**), причем, в качестве периодов начисления принимают год, полугодие, квартал, месяц. Иногда практикуют ежедневное начисление, а в ряде случаев удобно применять **непрерывные проценты**.

Проценты либо выплачиваются кредитору по мере их начисления, либо присоединяются к сумме долга. Процесс увеличения денег в связи с присоединением процентов к сумме долга называют наращением или ростом первоначальной суммы.

В количественном финансовом анализе процентная ставка применяется не только как инструмент наращения суммы долга, но и в более широком смысле – как измеритель степени доходности (эффективности) финансовой операции или коммерческо-хозяйственной деятельности.

В практике существуют различные способы начисления процентов, зависящие от условий контрактов. Соответственно применяют различные виды процентных ставок. Одно из основных отличий связано с выбором исходной базы (суммы) для начисления процентов. Ставки процентов могут применяться к одной и той же начальной сумме на протяжении всего срока ссуды или к сумме с начисленными в предыдущем периоде процентами. В первом случае они называются простыми, а во втором – **сложными процентными ставками**.

Процентные ставки, указываемые в контрактах, могут быть постоянными или **переменными («плавающими»)**. Плавающие ставки часто применяются во внешнеэкономических операциях. В этом случае значение ставки равно сумме некоторой изменяющейся во времени базовой величины и надбавки к ней (**маржи**). Примером базовой ставки может служить лондонская межбанковская ставка ЛИБОР (LIBOR — London interbank offered rate) или московская межбанковская ставка МИБОР. Размер маржи определяется целым рядом условий (сроком операции и т.д.). Судя по мировой практике, он обычно находится в пределах 0,5—5%. В контракте может использоваться и переменный во времени размер маржи.

Теперь мы рассмотрим методы анализа сделок, в которых предусматриваются разовые платежи при выдаче и погашении кредита или депозита. Задачи такого анализа сводятся к расчету наращенной суммы, суммы процентов и размера дисконта, современной величины (текущей стоимости) платежа, который будет произведен в будущем.

Формула наращения по простым процентам

Под **наращенной суммой** ссуды (долга, депозита, других видов инвестированных средств) понимается первоначальная ее сумма вместе с начисленными на нее процентами к концу срока.

Пусть P первоначальная сумма денег, i — ставка простых процентов. Начисленные проценты за один период равны Pi, а за n периодов — Pni.

Процесс изменения суммы долга с начисленными простыми процентами описывается арифметической прогрессией, членами которой являются величины

P, $P+Pi=P(1+i)$, $P(1+i)+Pi=P(1+2i)$ и т.д. до $P(1+ni)$.

Первый член этой прогрессии равен P, разность Pi, а последний член определяемый как

$$S=P(1+ni) \qquad (1)$$

и является наращенной суммой. Формула (*1*) называется формулой наращения по простым процентам или, кратко, формулой простых процентов. Множитель $(1+ni)$ является множителем наращения. Он показывает во сколько раз наращенная сумма больше первоначальной суммы. Наращенную сумму можно представить в виде двух слагаемых: первоначальной суммы P и суммы процентов I

$$S=P+I, \qquad (2)$$

где

$$I=Pni. \qquad (3)$$

Процесс роста суммы долга по простым процентам легко представить графически (см. Рис. 1). При начислении простых процентов по ставке i за базу берется первоначальная сумма долга. Наращенная сумма S растет линейно от времени.

Пример 1

Определим проценты и сумму накопленного долга, если ссуда равна 100000, срок долга 1,5 года при ставке простых процентов, равной 15% годовых.

$I = 100000 \cdot 1{,}5 \cdot 0{,}15 = 22500$ – проценты за 1,5 года

$S = 100000 + 22500 = 122500$ – наращенная сумма.

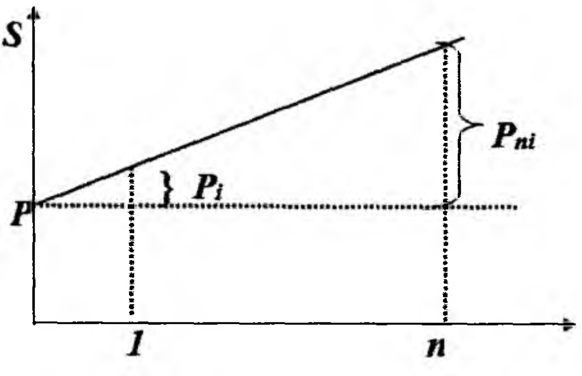


Рис. 1. Наращение по простой процентной ставке.

Практика начисления простых процентов

Начисление простых процентов обычно используется в двух случаях:

(1) при заключении краткосрочных контрактов (предоставлении краткосрочных кредитов и т.п.), срок которых не превышает года ($n \leq 1$);

(2) когда проценты не присоединяются к сумме долга, а периодически выплачиваются.

Ставка процентов обычно устанавливается в расчете за год, поэтому при продолжительности ссуды менее года необходимо выяснить, какая часть процента уплачивается кредитору. Для этого величину n выражают в виде дроби

$$N = t/K,$$

где

n – срок ссуды (измеренный в долях года),

K – число дней в году (временная база),

t – срок операции (ссуды) в днях.

Здесь возможно несколько вариантов расчета процентов, различающихся выбором временной базы K и способом измерения срока пользования ссудой.

Часто за базу измерения времени берут год, условно состоящий из 360 дней (12 месяцев по 30 дней в каждом). В этом случае говорят, что вычисляют **обыкновенный** или **коммерческий процент**. В отличие от него точный процент получают, когда за базу берут действительное число дней в году: 365 или 366.

Определение числа дней пользования ссудой также может быть **точным** или **приближенным**. В первом случае вычисляют фактическое число дней между двумя датами, во втором – продолжительность ссуды определяется числом месяцев и дней ссуды, приближенно считая все месяцы равными, содержащими по 30 дней. В обоих случаях дата выдачи и дата погашения долга считается за один день.

Подсчет точного числа дней между двумя датами можно осуществить на компьютере, взяв разность этих дат, или с помощью специальной таблицы, в которой представлены порядковые номера дат в году.

Комбинируя различные варианты временной базы и методов подсчета дней ссуды, получаем три варианта расчета процентов, применяемые в практике:

(1) точные проценты с точным числом дней ссуды (365/365) – британский;

(2) обыкновенные проценты с точным числом дней ссуды (365/360) – французский;

(3) обыкновенные проценты с приближенным числом дней ссуды (360/360) – германский.

Вариант расчета с точными процентами и приближенным измерением времени ссуды не применяется.

Простые переменные ставки

Как известно, процентные ставки не остаются неизменными во времени, поэтому в кредитных соглашениях иногда предусматриваются дискретно изменяющиеся во времени процентные ставки. В этом случае формула расчета наращенной суммы принимает следующий вид

$$S = P(1+n_1i_1+n_2i_2+...) = P(1+\Sigma n_ti_t), \qquad (4)$$

где

P – первоначальная сумма (ссуда),

i_t – ставка простых процентов в периоде с номером t,

n_t – продолжительность периода t – периода начисления по ставке i_t

Пример 2

Пусть в договоре, рассчитанном на год, принята ставка простых процентов на первый квартал в размере 10% годовых, а на каждый последующий на 1% меньше, чем в предыдущий. Определим множитель наращения за весь срок договора.

$$1+\sum n_t i_t = 1+0{,}25\cdot 0{,}10+0{,}25\cdot 0{,}09+0{,}25\cdot 0{,}08+0{,}25\cdot 0{,}07=1{,}085$$

Реинвестирование по простым процентам

Сумма депозита, полученная в конце обозначенного периода вместе с начисленными на нее процентами, может быть вновь инвестирована, хотя, скорее всего, и под другую процентную ставку, и этот процесс реинвестирования иногда повторяется неоднократно в пределах расчетного срока N. Тогда в случае многократного инвестирования в краткосрочные депозиты и применения простой процентной ставки наращенная сумма для всего срока N находится по формуле

$$S = P(1+n_1 i_1)(1+n_2 i_2)\cdots(1+n_t i_t) \qquad (5)$$

где

$n_1, n_2, \ldots, n_m$ — продолжительности последовательных периодов реинвестирования,

$$N = \sum_{t=1}^{m} n_t;$$

$i_1, i_2, \ldots, i_m$ — ставки, по которым производится реинвестирование.

Дисконтирование и учет по простым ставкам

В практике часто приходится решать задачу обратную наращению процентов, когда по заданной сумме S, соответствующей концу финансовой операции, требуется найти исходную сумму P. Расчет P по S называется **дисконтированием** суммы S. Величину P, найденную дисконтированием, называют **современной величиной (текущей стоимостью)** суммы S. Проценты в виде разности $D = S\text{-}P$ называются **дисконтом** или **скидкой**. Процесс начисления и удержания процентов вперед (в виде дисконта) называют учетом. Дисконт как скидка с конечной суммы долга может определяться через процентную ставку или в виде абсолютной величины.

Таким образом, в практике используются два принципа расчета процентов: (1) путем наращения суммы ссуды и (2) устанавливая скидку с конечной суммы долга.

В большинстве случаев фактор времени учитывается в финансовых контрактах именно с помощью дисконтирования. Величина P эквивалентна сумме S в том смысле, что через определенный период времени и при заданной ставке процентов она в результате наращения станет равной S. Поэтому операцию дисконтирования называют также приведением. Но понятие приведения шире, чем дисконтирование. **Приведение** – это определение любой стоимостной величины на некоторый момент времени. Если некоторая сумма приводится к более ранней дате, чем текущая, то применяется дисконтирование, если же речь идет о более поздней дате, то – наращение.

Известны два вида дисконтирования: математическое дисконтирование и банковский (коммерческий) учет.

Математическое дисконтирование

Этот вид дисконтирования представляет собой решение задачи, обратной наращению первоначальной ссуды. Если в прямой задаче

$$S=P(1+ni),$$

то в обратной

$$P = S\frac{1}{1+ni} \qquad (6)$$

Дробь в правой части равенства при величине S называется дисконтным множителем. Этот множитель показывает, какую долю составляет первоначальная сумма ссуды в окончательной величине долга. Дисконт суммы S равен

$$D=S-P \qquad (7)$$

Банковский или коммерческий учет

Операция учета (учета векселей) заключается в том, что банк до наступления срока платежа по векселю или другому платежному обязательству покупает его у владельца (являющегося кредитором) по цене ниже той суммы, которая должна быть выплачена по нему в конце срока, т.е. приобретает (учитывает) его с дисконтом.

Для расчета процентов при учете векселей применяется учетная ставка, которую мы обозначим символом d.

По определению, простая годовая **учетная ставка** *находится как*

$$d = \frac{S - P}{Sn}. \qquad (8)$$

Размер дисконта или учета, удерживаемого банком, равен

$$D = Snd, \qquad (9)$$

откуда

$$P = S - D = S - Snd = S(1 - nd) \qquad (10)$$

Множитель $(1-nd)$ называется дисконтным множителем. Срок n измеряет период времени от момента учета векселя до даты его погашения в годах. Дисконтирование по учетной ставке производится чаще всего при условии, что год равен 360 дням.

Наращение по учетной ставке

Учетная ставка может использоваться для наращения, т.е. для расчета S по P. В этом случае из формулы (10) следует, что

$$S = P\frac{1}{1 - nd}. \qquad (11)$$

Сравнение ставки наращения и учетной ставки

Операции наращения и дисконтирования по своей сути противоположны, но ставка наращения и учетная ставка могут использоваться для решения обеих задач. В этом случае, в зависимости от применяемой ставки, можно различать прямую и обратную задачи.

Прямая и обратная задачи

Ставка	Прямая задача	Обратная задача
наращения *I*	наращение:	Дисконтирование:
	$S=P(1+ni)$	$P=S/(1+ni)$
учетная *d*	дисконтирование:	Наращение:
	$P=S(1-nd)$	$S=P/(1-nd)$

Совмещение начисления процентов по ставке наращения и дисконтирования по учетной ставке

В том случае, когда учету подлежит долговое обязательство, предусматривающее начисление простых процентов на первоначальную сумму долга, необходимо решить две задачи:

(1) определить конечную сумму долга на момент его погашения;

(2) рассчитать сумму, получаемую при учете, путем дисконтирования конечной суммы долга, применяя учетную ставку, действующую в момент учета.

Решение двух этих задач можно записать в виде одной формулы, содержащей наращение по ставке простых процентов, фигурирующей в долговом обязательстве, и дисконтирование по учетной ставке:

$$P_2=P_1(1+n_1i)(1-n_2d),$$

где

P_1 – первоначальная сумма ссуды,

P_2 – сумма, получаемая при учете обязательства,

n_1 – общий срок платежного обязательства, в течение которого начисляются проценты,

n_2 – срок от момента учета до погашения долга.

Пример 3

Платежное обязательство уплатить через 100 дней 2 млн. с процентами, начисляемыми по ставке простых процентов

i=20% годовых, было учтено за 40 дней до срока погашения по учетной ставке d=15%. Требуется определить сумму, получаемую при учете.

Решение

$$P_2 = 2\left(1+\frac{100}{365}0{,}2\right)\left(1-\frac{40}{360}0{,}15\right)=2{,}074\ \text{млн.}$$

Отметим, что при наращении здесь использовалась временная база 365 дней, а при дисконтировании – 360.

Определение продолжительности ссуды

Иногда задача ставится таким образом, что требуется найти временной интервал, за который исходная сумма при заданной ставке процентов вырастет до нужной величины, или срок, обеспечивающий определенный дисконт с заданной величины. Другими словами, речь идет о решении формул (1) и (10) относительно n.

При использовании простой ставки наращения i из (1) получаем

$$n=\frac{S-P}{Pi} \qquad (12)$$

а при учетной ставке d из (10) имеем

$$n=\frac{S-P}{Sd} \qquad (13)$$

Формулы (12) и (13) дают срок, измеряемый в годах, но простые ставки в основном используются в краткосрочных операциях, когда срок исчисляется днями.

В этом случае срок финансовой операции в днях выражается как

$$t=nK, \qquad (14)$$

где K – временная база.

Определение уровня процентной ставки

Уровень процентной ставки может служить мерой доходности операции, критерием сопоставления альтернатив и выбора наиболее выгодных условий. Из тех же формул (1) и (10) получаем ставку наращения i и учетную ставку d

$$i = \frac{S-P}{Pn} = \frac{S-P}{Pt}K, \tag{15}$$

$$d = \frac{S-P}{Sn} = \frac{S-P}{St}K. \tag{16}$$

где использовалось соотношение (14). Напомним, что срок п в двух формулах имеет разный смысл: в первом случае это весь срок операции, а во втором — оставшийся срок до погашения.

Пример 4

Определить доходность операции для кредитора, если им предоставлена ссуда в размере 2 млн. на 100 дней и контракт предусматривает сумму погашения долга 2,5 млн. Доходность выразить в виде простой ставки процентов i и учетной ставки d. Временную базу принять равной K=360 дней.

Решение

$$i = \frac{S-P}{Pt}K = \frac{2{,}5-2}{2\cdot 100}360 = 0{,}9, \text{ т.е. } 90\%,$$

$$d = \frac{S-P}{St}K = \frac{2{,}5-2}{2{,}5\cdot 100}360 = 0{,}72, \text{ т.е. } 72\%.$$

Иногда размер дисконта в контрактах фиксируется за весь срок ссуды в виде доли (или процента) от суммы погасительного платежа. Таким образом, уровень процентной ставки здесь задается в неявном виде. Но нетрудно вывести формулы, с помощью которых значения этих ставок можно вычислить.

Пусть S — размер погасительного платежа, d_n — доля этого платежа, определяющая величину дисконта за весь срок ссуды п. Требуется определить, каким уровням годовых ставок i и d эквивалентны такие условия.

Итак, S – сумма возврата в конце срока ссуды, $P=S(1-d_n)$ – реально выдаваемая ссуда в момент заключения договора.

$$i=\frac{S-P}{Pn}=\frac{S-S(1-d_n)}{S(1-d_n)n}=\frac{d_n}{(1-d_n)n},$$

$$d=\frac{S-P}{Sn}=\frac{S-S(1-d_n)}{Sn}=\frac{d_n}{n}.$$

Пример 5

Кредитор и заемщик договорились, что из суммы кредита, выданного на 200 дней, сразу удерживается дисконт в размере 25% указанной суммы. Требуется определить цену кредита в виде простой годовой учетной ставки d и годовой ставки простых процентов i. Считать временную базу K равной 365 дням.

Решение

$$d=\frac{d_n}{n}=\frac{0{,}25}{200/365}=0{,}45625,\text{ т.е. }45{,}625\%,$$

$$i=\frac{d_n}{(1-d_n)n}=\frac{0{,}25}{(1-0{,}25)200/365}=0{,}60833,\text{ т.е. }60{,}833\%.$$

Вопросы для самопроверки

1. Какие задачи ставит и решает финансовая математика?
2. Что означает принцип неравноценности денег, относящихся к разным моментам времени?
3. Какую роль играет время в финансовых расчетах?
4. Как учитывается время в финансовой математике?
5. В чем состоит главное отличие финансовой математики от бухучета?
6. Сравните операции наращения, дисконтирования и приведения.
7. Запомните основные формулы расчета простых процентов.

8. Какие методы начисления простых процентов вы знаете?

9. В чем сущность операции учета?

Задачи для практического занятия

1. Ссуда в размере 1 млн. взята 28 февраля 2000 г. по 1 ноября 2000 г. под 30% годовых. Найти размер погасительного платежа, применяя британский, французский и германский методы расчета. Сравните результаты, сделайте выводы.

2. Определите, какую долю составит процент от первоначальной ссуды, если срок ссуды 1,5 года, причем в первый год простая годовая ставка равна 30%, а в каждом последующем квартале понижается на 1%.

3. Контракт предусматривает следующий порядок начисления процентов по простой ставке: первый год по годовой ставке 18%, в каждом последующем полугодии ставка повышается на 1%. Определите множитель наращения за 2,5 года.

4. Определите размер наращенной суммы за один год, если первоначальная сумма равна 10 тыс., первые полгода годовая ставка простых процентов равна 18%, а вторые 21%.

5. Определите годовую ставку простых процентов, при которой сумма в 5 тыс. за три квартала возрастет до 6,5 тыс.

6. Фирма купила на вторичном рынке 100 бескупонных облигаций номинальной стоимостью 1000 каждая по курсу 88%. Оставшийся срок обращения облигаций 42 дня. Определите доход фирмы и доходность операции, если временная база 365 дней.

7. Банк принимает вклад на срок 90 дней под 18%, а на 180 дней под ставку 181/4%. Какой вариант вложения выгоднее и в каком случае?

8. Через сколько лет удвоится первоначальная сумма вклада под простую годовую ставку 16%?

9. Первый год годовая ставка простых процентов равна 8%, а каждый последующий год увеличивается на 2%. Через сколько лет удвоится первоначальная сумма (реинвестирования не предполагается)? К=365.

10. Торговая организация предоставляет потребительский кредит при покупке стиральной машины стоимостью 500 у.е. на следующих условиях: при покупке оплачивается 20% стоимости, кредит предоставляется на один год под ставку 10% годовых, проценты начисляются сразу на первоначальную сумму кредита, кредит и проценты погашаются равными ежемесячными платежами. Рассчитать размер ежемесячного погасительного платежа.

11. Коммерческая фирма закупает партию товара по цене 9 за кг. При розничной цене 10 за кг товар продается за 7 дней, а расходы по транспортировке и реализации, составляют 0,30 на кг. При розничной цене 11 за кг товар продается за 10 дней, а расходы составляют 0,50 на кг. Налог на прибыль 24%. По какой цене выгоднее продавать товар и какова доходность коммерческой деятельности в обоих случаях с учетом реинвестирования прибыли и расширения бизнеса, если ее измерять годовой ставкой простых процентов?

12. Коммерческая фирма открыла расчетный счет 12 января 2001 года, разместив на нем 120 тыс., 21 февраля со счета было снято 35 тыс., 17 марта поступило 52 тыс. Простая ставка 18% годовых. Чему равен остаток на конец первого квартала, на 31 марта? Британская практика расчета.

13. Курс доллара вырос с 29,20 до 29,50. Как изменилась доходность экспортной операции, если при прежнем обменном курсе она равнялась 35% годовых и на ее осуществление требовалось 15 дней? Временная база К=365.

14. Курс доллара вырос с 29,20 до 29,50. Как изменилась доходность импортной операции, если при прежнем обменном курсе она равнялась 35% годовых и на ее осуществление требовалось 15 дней? Временная база К=365.

15. Обменный курс вырос с 29,50 за доллар США до 29,80 за доллар. Как изменится эффективность экспортной операции, если до повышения курса доллара она составляла 25%, ее реализация требовала одного месяца, а ставка налога на прибыль равна 24%?

16. Обменный курс вырос с 29,50 за доллар США до 29,80 за доллар. Как изменится эффективность импортной операции, если до повышения курса доллара она составляла 25%, ее реализация требовала одного месяца, а ставка налога на прибыль равна 24%?

17. Имеется сумма в долларах США. Как выгоднее разместить депозит: в сумах, в долларах США или в евро, если простая годовая ставка по вкладам в сумах 10%, в долларах 4%, в евро 6%, срок депозита 3 месяца?

Курсы валют на начало операции:

Валюта	Курс покупки	Курс продажи
Доллар США	28,50	28,80
Евро	34,00	34,50

Ожидаемые курсы валют на конец операции:

Валюта	Курс покупки	Курс продажи
Доллар США	29,00	29,30
Евро	34,20	34,70

18. Имеется сумма в долларах США. Как выгоднее разместить вклад, как валютный или через конвертацию в сумах, если курс обмена в начале операции 29,50 сум за доллар, а ожидаемый курс обратного обмена в конце операции 29,80, простая годовая ставка по рублевым депозитам 18%, а по валютным 6%, срок депозита 3 месяца. Налоги не учитываем.

19. Имеется сумма в долларах США. Оцените доходность депозита с двойной конвертацией, если срок депозита 3

месяца, первоначальный обменный курс равен 29,00 руб. за доллар, обменный курс растет на 1% в месяц. Рублевая ставка 17%. Учесть, что при продаже валюты банк взимает **налог 1%.**

20. Имеется сумма в долларах США. Курс покупки долларов банком составляет 29,20 за доллар. Требуется определить диапазон допустимых значений курса продажи долларов, при котором двойная конвертация выгодна, если срок депозита 3 месяца, простая годовая ставка по рублевым депозитам 20%, а по депозитам в долларах 7%. Учесть налог в 1%, взимаемый банком при продаже валюты. При каких значениях обменного курса в конце операции эффективность депозита будет отрицательной?

21. Имеется сумма в рублях. Простая годовая ставка процентов по рублевым депозитам 18%, а по депозитам в долларах США 6%. В начале операции курс продажи долларов банком составляет 29,10 за доллар. Укажите диапазон допустимых значений курса покупки долларов в конце операции, чтобы операция с двойной конвертацией была более выгодной для вкладчика, чем депозит в рублях. Срок депозита 3 месяца. Налог банка при продаже валюты 1%.

22. Коммерческая фирма закупила товар на сумму в 100 млн., который реализовала в виде экспортной поставки за 3,8 млн. долларов США. Какова эффективность этой операции, если операция заняла две недели, таможенная пошлина составила 10% от валютной выручки, курс покупки долларов банком в конце операции равнялся 30 за доллар США. Временная база 365. Какова годовая доходность фирмы от подобных операций с учетом реинвестирования прибылей и расширения бизнеса?

23. Курс доллара 29 сум за доллар США, безрисковая простая годовая ставка по сумовому трехмесячному депозиту 17%, а по депозиту в долларах 7%. Определить трехмесячный форвардный обменный курс.

24. Банк принимает депозит в долларах США на 3 месяца под ставку 6% годовых. Норма резервирования 10% валютной суммы в сумах. Курс обмена в начале операции 29 сум за доллар, ожидаемый курс обмена в конце операции 29,50 сум за доллар.

1) При каких значениях ссудного процента банк будет иметь положительную прибыль, если кредит предоставляется в валюте?

2) При каких значениях обменного курса в конце операции банк не будет нести убытков, если он установит годовую ставку по валютным кредитам на три месяца в 10%?

25. Выразить доходность коммерческой операции в виде простой годовой ставки процентов, если:

фирма покупает за рубежом сырье стоимостью 10 млн. долларов США,

предоплата составляет 55% стоимости,

отправка сырья осуществляется через 14 дней после предоплаты,

стоимость транспортировки в 100 тыс. долларов оплачивается в день предоплаты, таможенная пошлина 28% оплачивается в день отправки, совпадающий с днем пересечения границы,

сырье попадает на склад производственного предприятия через три дня после пересечения границы,

оплата поставщику оставшихся 45% стоимости производится сразу по поступлению сырья на склад предприятия,

переработка сырья и реализация готовой продукции занимает 72 дня,

после чего в коммерческую фирму поступает 14 млн. долларов.

Временная база 365 дней.

26. Долг в сумме 500 тыс. требуется погасить в течение 1 года 3 мес. С 21 января 2006 года по 21 апреля 2007 года.

Кредитор согласен получать частичные платежи. Проценты начисляются по ставке 20% годовых.

Частичные платежи были следующими: 21 апреля 2001 г. 50 тыс.,

21 июля 2001 г. 20 тыс.,

21 октября 2001 г. 50 тыс.,

21 января 2002 г. 50 тыс.

Рассчитать и построить контур финансовой операции для актуарного метода и метода торговца, определить размер последнего платежа для окончательного расчета в обоих методах. Сравнить результаты, сделать выводы.

27. Номинал процентного векселя 100000. По векселю начисляются проценты по ставке 18% годовых, с начала начисления процентов до момента предъявления векселя к оплате прошло 30 дней. Определить общую сумму, которую получит держатель векселя при его погашении. Расчет произвести по германской практике.

28. Номинал процентного векселя 500000, проценты начисляются по ставке 17%, выписан на 90 дней. Определить максимальную цену векселя для инвестора, желающего купить его за 20 дней до погашения и обеспечить себе доходность не ниже 25% годовых, если предполагается использование британской практики расчета процентов.

29. Номинал процентного векселя 200000, по векселю начисляют проценты по ставке 20% годовых, выписан на срок 45 дней. Определить доходность операции для инвестора, если он купит вексель за 25 дней до погашения по цене 200000 и будет держать его до погашения. Расчет произвести по французской практике.

30. Через 210 дней у вас наступает срок платежа в размере 150000. Какую сумму вы должны зарезервировать для погашения этого долга, если на указанный срок вы можете отдать ее взаймы под 17% годовых? Временная база 365. Чему равен дисконт?

31. Тратта (переводной вексель) выдана на сумму в 300000 с уплатой 25 декабря.

Владелец учел его в банке 20 сентября по учетной ставке 16%. Сколько получил владелец тратты? Расчет произвести по французской практике.

32. Вы приобрели трехмесячную ГКО за 960 за 80 дней до погашения. Номинал облигации 1000. Какова доходность этой облигации к погашению, если ее измерять:

А) простой годовой ставкой,

Б) простой годовой учетной ставкой? Временная база 365.

33. Какую сумму надо проставить в бланке векселя, если выдаваемая ссуда составляет 150000, срок 90 дней, простая годовая учетная ставка 18%? Временная база 360.

34. Какую сумму получит заемщик, если он подписал вексель на сумму 200000 на срок полгода, простая годовая учетная ставка равна 17%?

35. Обязательство уплатить через 180 дней 120000 с процентами из расчета 18% годовых было учтено через 80 дней по учетной ставке 16%. Рассчитать полученную при учете сумму и дисконт, полученный банком, если при использовании ставки наращения применяется временная база 365, а в учетной операции 360.

36. За какой срок сумма в 10 тыс. возрастет до 12 тыс., если проценты начисляются по простой ставке 18% годовых и применяется британская практика расчета процентов?

37. Стороны договорились, что из суммы кредита, выданного на 180 дней, удерживается дисконт в размере 11%. Определите цену кредита в виде простой годовой учетной ставки и простой годовой ставки наращения, если применяется германская практика расчета.

§2. НАЧИСЛЕНИЕ СЛОЖНЫХ ПРОЦЕНТОВ

1. Сложные проценты

Сложные проценты применяются в долгосрочных финансово-кредитных операциях, если проценты не выплачиваются периодически сразу после их начисления за прошедший интервал времени, а присоединяются к сумме долга. Присоединение начисленных процентов к сумме, которая служила базой для их определения, часто называют капитализацией процентов.

Формула наращения по сложным процентам

Пусть первоначальная сумма долга равна P, тогда через один год сумма долга с присоединенными процентами составит $P(1+i)$, через 2 года $P(1+i)(1+i)=P(1+i)^2$, через n лет — $P(1+i)^n$. Таким образом, получаем формулу наращения для сложных процентов

$$S = P(1+i)^n \qquad (1)$$

где S — наращенная сумма, i — годовая ставка сложных процентов, n — срок ссуды, $(1+i)^n$ — множитель наращения.

В практических расчетах в основном применяют дискретные проценты, т.е. проценты, начисляемые за одинаковые интервалы времени (год, полугодие, квартал и т.д.). Наращение по сложным процентам представляет собой рост по закону геометрической прогрессии, первый член которой равен P, а знаменатель $(1+i)$.

Отметим, что при сроке $n<1$ наращение по простым процентам дает больший результат, чем по сложным, а при $n>1$ — наоборот. В этом нетрудно убедиться на конкретных числовых примерах. Наибольшее превышение суммы, наращенной по простым процентам, над суммой, наращенной по сложным процентам, (при одинаковых процентных ставках) достигается в средней части периода.

Формула наращения по сложным процентам, когда ставка меняется во времени

В том случае, когда ставка сложных процентов меняется во времени, формула наращения имеет следующий вид

$$S=P(1+i_1)^{n1}(1+i_2)^{n2}L(1+i_k)^{nk}, \qquad (2)$$

где $i_1, i_2, \ldots, i_k$ — последовательные значения ставок процентов, действующих в периоды $n_1, n_2, \ldots, n_k$ соответственно.

Пример 1

В договоре зафиксирована переменная ставка сложных процентов, определяемая как 20% годовых плюс маржа 10% в первые два года, 8% в третий год, 5% в четвертый год. Определить величину множителя наращения за 4 года.

Решение

$$(1+0,3)^2(1+0,28)(1+0,25)=2,704.$$

Формула удвоения суммы

В целях оценки своих перспектив кредитор или должник может задаться вопросом: через сколько лет сумма ссуды возрастет в N раз при данной процентной ставке. Обычно это требуется при прогнозировании своих инвестиционных возможностей в будущем. Ответ получим, приравняв множитель наращения величине N:

а) для простых процентов $(1+ni)=N$ откуда

$$n=\frac{N-1}{i}, \qquad (3)$$

б) для сложных процентов $(1+i)^n=N$, откуда

$$n=\frac{\ln N}{\ln(1+i)}. \qquad (4)$$

Особенно часто используется $N=2$. Тогда формулы (3) и (4) называются формулами удвоения и принимают следующий вид:

а) для простых процентов

$$n=\frac{1}{i}, \qquad (5)$$

б) для сложных процентов

$$n = \frac{\ln 2}{\ln(1+i)}. \qquad (6)$$

Если формулу (5) легко применять для прикидочных расчетов, то формула (6) требует применения калькулятора. Однако при небольших ставках процентов (скажем, менее 10%) вместо нее можно использовать более простую приближенную. Ее легко получить, если учесть, что *ln≈20,7*, а *ln(1+i):i.* Тогда

$$n = \frac{0,7}{i}. \qquad (7)$$

Пример 2

Рассчитать, за сколько лет долг увеличится вдвое при ставке простых и сложных процентов равной 10%. Для ставки сложных процентов расчеты выполнить по точной и приближенной формуле. Результаты сравнить.

Решение

а) При простых процентах:

$$n = \frac{1}{i} = \frac{1}{0,1} = 10 \text{ лет}.$$

б) При сложных процентах и точной формуле:

$$n = \frac{\ln 2}{\ln(1+i)} = \frac{0,693147}{\ln(1+0,1)} = \frac{0,693147}{0,09531018} = 7,27 \text{ года}.$$

в) При сложных процентах и приближенной формуле:

$$n = \frac{0,7}{0,1} = 7 \text{ лет}.$$

Выводы:

1) Одинаковое значение ставок простых и сложных процентов приводит к совершенно различным результатам.

2) При малых значениях ставки сложных процентов точная и приближенная формулы дают практически одинаковые результаты.

Начисление годовых процентов при дробном числе лет

При дробном числе лет проценты начисляются разными способами:

1) По формуле сложных процентов

$$S = P(1+i)^n, \qquad (8)$$

2) На основе смешанного метода, согласно которому за целое число лет начисляются сложные проценты, а за дробное – простые

$$S = P(1+i)^a(1+bi), \qquad (9)$$

где $n=a+b$, a-целое число лет, b-дробная часть года.

3) В ряде коммерческих банков применяется правило, в соответствии с которым за отрезки времени меньше периода начисления проценты не начисляются, т.е.

$$S = P(1+i)^a, \qquad (10)$$

Номинальная и эффективная ставки процентов

Номинальная ставка

Пусть годовая ставка сложных процентов равна j, а число периодов начисления в году m. Тогда каждый раз проценты начисляют по ставке $\frac{j}{m}$. Ставка j называется номинальной. Начисление процентов по номинальной ставке производится по формуле:

$$S = P\left(1+\frac{j}{m}\right)^N, \qquad (29)$$

где N – число периодов начисления.

Если срок ссуды измеряется дробным числом периодов начисления, то при m разовом начислении процентов в году наращенную сумму можно рассчитывать несколькими способами, приводящими к различным результатам:

1) По формуле сложных процентов

$$S = P\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{N}{\tau}}, \qquad (30)$$

где $\left[\frac{N}{\tau}\right]$ – число (возможно дробное) периодов начисления процентов, τ – период начисления процентов,

2) *По смешанной формуле*

$$S = P\left(1+\frac{j}{m}\right)^{a}\left(1+b\frac{j}{m}\right), \qquad (13)$$

где a – целое число периодов начисления (т.е. $\left[\frac{N}{\tau}\right]$ – целая часть от деления всего срока ссуды N на период начисления τ), b – оставшаяся дробная часть периода начисления $\left(b=\frac{N}{\tau}-a\right)$.

Пример 3

Ссуда в размере 20 млн. предоставлена на 28 месяцев. Номинальная ставка равна 60% годовых. Начисление процентов ежеквартальное. Вычислить наращенную сумму в трех ситуациях:

1) когда на дробную часть начисляются сложные проценты;

2) когда на дробную часть начисляются простые проценты;

3) когда дробная часть игнорируется.

Результаты сравнить.

Решение

Начисление процентов ежеквартальное. Всего имеется $\frac{28}{3}=9\frac{1}{3}$ кварталов.

1) $S = 20\left(1+\frac{0,6}{4}\right)^{9\frac{1}{3}} = 73,713$ *млн.*

2) $S=20\left(1+\frac{0,6}{4}\right)^9\left(1+\frac{0,6}{4}\cdot\frac{1}{3}\right)=73,875$ *млн.*

3) $S=20\left(1+\frac{0,6}{4}\right)^9=70,358$ *млн.*

Из сопоставления наращенных сумм видим, что наибольшего значения она достигает во втором случае, т.е. при начислении на дробную часть простых процентов.

Эффективная ставка показывает, какая годовая ставка сложных процентов дает тот же финансовый результат, что и m – разовое наращение в год по ставке $\frac{j}{m}$.

Если проценты капитализируются m раз в год, каждый раз со ставкой $\frac{j}{m}$, то, по определению, можно записать равенство для соответствующих множителей наращения:

$$(1+i_э)^n=\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}, \qquad (14)$$

где $i_э$ – эффективная ставка, а j– номинальная. Отсюда получаем, что связь между эффективной и номинальной ставками выражается соотношением

$$i_э=\left(1+\frac{j}{m}\right)^m-1. \qquad (15)$$

Обратная зависимость имеет вид

$$j=m\left((1+i_э)^{\frac{1}{m}}-1\right). \qquad (16)$$

Пример 4

Вычислить эффективную ставку процента, если банк начисляет проценты ежеквартально, исходя из номинальной ставки 10% годовых.

Решение

$$i_э = (1+0{,}1/4)^4 - 1 = 0{,}1038 \text{, т.е. } 10{,}38\%.$$

Пример 5

Определить какой должна быть номинальная ставка при ежеквартальном начислении процентов, чтобы обеспечить эффективную ставку 12% годовых.

Решение

$$j = 4\left((1+0{,}12)^{\frac{1}{4}} - 1\right) = 0{,}11495 \text{, т.е. } 11{,}495\%.$$

Учет (дисконтирование) по сложной ставке процентов

Здесь, также как и в случае простых процентов, будут рассмотрены два вида учета – математический и банковский.

Математический учет

В этом случае решается задача обратная наращению по сложным процентам. Запишем исходную формулу для наращения

$$S = P(1+i)^n$$

и решим ее относительно P

$$P = S\frac{1}{(1+i)^n} = Sv^n, \tag{17}$$

где

$$v^n = \frac{1}{(1+i)^n} = (1+i)^{-n}, \tag{18}$$

учетный или дисконтный множитель.

Если проценты начисляются m раз в году, то получим

$$P = S\frac{1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}} = Sv^{mn}, \tag{19}$$

где

$$v^{mn} = \frac{1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}} = \left(1+\frac{j}{m}\right)^{-mn} \qquad (20)$$

дисконтный множитель.

Величину *P*, полученную дисконтированием *S*, называют **современной** или **текущей стоимостью** или **приведенной величиной** *S*.

Суммы *P* и *S* эквивалентны в том смысле, что платеж в сумме *S* через *n* лет равноценен сумме *P*, выплачиваемой в настоящий момент.

Разность $D=S-P$ называют дисконтом.

Банковский учет

В этом случае предполагается использование сложной учетной ставки. Дисконтирование по сложной учетной ставке осуществляется по формуле

$$P = S(1-d_{сл})^n \qquad (21)$$

где $d_{сл}$ – сложная годовая учетная ставка.

Дисконт в этом случае равен

$$D = S - P = S - S(1-d_{сл})^n = S\left(1-(1-d_{сл})^n\right). \qquad (22)$$

При использовании сложной учетной ставки процесс дисконтирования происходит с прогрессирующим замедлением, так как учетная ставка каждый раз применяется к сумме, уменьшенной за предыдущий период на величину дисконта.

Номинальная и эффективная учетные ставки процентов

Номинальная учетная ставка

В тех случаях, когда дисконтирование применяют *m* раз в году, используют номинальную учетную ставку *f*. Тогда в каждом периоде, равном $\frac{1}{m}$ части года, дисконтирование осуществляется по сложной учетной ставке $\frac{f}{m}$. Процесс дисконтирования по этой сложной учетной m раз в году описывается формулой

$$P = S\left(1-\frac{f}{m}\right)^{N}, \tag{23}$$

где N – общее число периодов дисконтирования ($N=mn$).

Дисконтирование не один, а m раз в году быстрее снижает величину дисконта.

Эффективная учетная ставка

Под эффективной учетной ставкой понимают сложную годовую учетную ставку, эквивалентную (по финансовым результатам) номинальной, применяемой при заданном числе дисконтирований в году m.

В соответствии с определением эффективной учетной ставки, найдем ее связь с номинальной из равенства дисконтных множителей

$$\left(1-\frac{f}{m}\right)^{mn} = (1-d_{сл})^{n},$$

из которого следует, что

$$d_{сл} = 1-\left(1-\frac{f}{m}\right)^{m}. \tag{24}$$

Отметим, что эффективная учетная ставка всегда меньше номинальной.

Наращение по сложной учетной ставке

Наращение является обратной задачей для учетных ставок. Формулы наращения по сложным учетным ставкам можно получить, разрешая соответствующие формулы для дисконтирования (21 и 23) относительно S. Получаем из $P=S(1-d_{сл})^{n}$.

$$S = P\frac{1}{(1-d_{сл})^{n}}, \tag{25}$$

а из $P = S\left(1 - \frac{f}{m}\right)^N$ получаем

$$S = P\frac{1}{\left(1 - \frac{f}{m}\right)^N} \tag{26}$$

Пример 6

Какую сумму следует проставить в векселе, если реально выданная сумма равна 20 млн., срок погашения 2 года. Вексель рассчитывается, исходя из сложной годовой учетной ставки 10%.

Решение

$$S = \frac{20}{(1 - 0{,}1)^2} = 24{,}691358 \text{ млн.}$$

Пример 7

Решить предыдущую задачу при условии, что наращение по сложной учетной ставке осуществляется не один, а 4 раза в год.

Решение

$$S = \frac{20}{\left(1 - \frac{0{,}1}{4}\right)^8} = 24{,}490242 \text{ млн.}$$

2. Непрерывные проценты

Наращение и дисконтирование

Наращенная сумма при дискретных процентах определяется по формуле

$$S = P\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn},$$

где j — номинальная ставка процентов, а m — число периодов начисления процентов в году.

Чем больше m, тем меньше промежутки времени между **моментами** начисления процентов. В пределе при $m \to \infty$ имеем

$$S = \lim_{m \to \infty} P\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn} = P \lim_{m \to \infty} \left(\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m}\right) = Pe^{jn}. \qquad (27)$$

Окончательно получаем, что наращенная сумма в случае непрерывного начисления процентов по ставке j равна

$$S = Pe^{jn}. \qquad (28)$$

Для того чтобы отличать ставку непрерывных процентов от ставок дискретных процентов, ее называют силой роста и обозначают символом δ. Тогда

$$S = Pe^{\delta n}. \qquad (29)$$

Сила роста δ представляет собой номинальную ставку процентов при $m \to \infty$.

Дисконтирование на основе непрерывных процентных ставок осуществляется по формуле

$$P = Se^{\delta n}. \qquad (30)$$

Связь дискретных и непрерывных процентных ставок

Дискретные и непрерывные процентные ставки находятся в функциональной зависимости, благодаря которой можно осуществлять переход от расчета непрерывных процентов к дискретным и наоборот. Формулу эквивалентного перехода от одних ставок к другим можно получить путем приравнивания соответствующих множителей наращения

$$(1 + i)^n = e^{\delta_n}. \qquad (31)$$

Из записанного равенства следует, что

$$\delta = \ln(1 + i), \qquad (32)$$

$$i = e^{\delta} - 1. \qquad (33)$$

$$\delta = \ln(1+i) = \ln(1+0,15) = 0,13976,$$

т.е. эквивалентная сила роста равна 13,976%.

Расчет срока ссуды и процентных ставок

В ряде практических задач начальная *(P)* и конечная *(P)* суммы заданы контрактом, и требуется определить либо срок платежа, либо процентную ставку, которая в данном случае может служить мерой сравнения с рыночными показателями и характеристикой доходности операции для кредитора. Указанные величины нетрудно найти из исходных формул наращения или дисконтирования. По сути дела, в обоих случаях решается в известном смысле обратная задача.

Срок ссуды

При разработке параметров соглашения и оценивании сроков достижения желательного результата требуется определить продолжительность операции (срока ссуды) через остальные параметры сделки. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

А) При наращивании по сложной годовой ставке *i*. Из исходной формулы наращения

$$S = P(1+i)^n$$

следует, что

$$n = \frac{\log\left(\frac{S}{P}\right)}{\log(1+i)}. \qquad (34)$$

где логарифм можно взять по любому основанию, поскольку он имеется как в числителе, так и в знаменателе.

Б) При наращивании по номинальной ставке процентов m раз в году из формулы

$$S = P\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}$$

получаем

$$n=\frac{\log\left(\frac{S}{P}\right)}{m\log\left(1+\frac{j}{m}\right)}. \qquad (35)$$

В) При дисконтировании по сложной годовой учетной ставке d. Из формулы

$$P=S(1-d)^{n}$$

имеем

$$n=\frac{\log\left(\frac{P}{S}\right)}{\log(1-d)}. \qquad (36)$$

Г) При дисконтировании по номинальной учетной ставке m раз в году. Из

$$P=S\left(1-\frac{f}{m}\right)^{mn}$$

приходим к формуле

$$n=\frac{\log\left(\frac{P}{S}\right)}{m\log\left(1-\frac{f}{m}\right)}. \qquad (37)$$

При наращивании по постоянной силе роста. Исходя из

$$S=Pe^{\delta n}$$

получаем

$$\ln\left(\frac{S}{P}\right)=\delta n. \qquad (38)$$

Расчет процентных ставок

Из тех же исходных формул, что и выше, получим выражения для процентных ставок.

А) При наращивании по сложной годовой ставке *i*. Из исходной формулы наращения

$$S = P(1+i)^n$$

следует, что

$$i = \left(\frac{S}{P}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 \qquad (39)$$

Б) При наращивании по номинальной ставке процентов *m* раз в году из формулы

$$S = P\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn}$$

получаем

$$i = m\left(\left(\frac{S}{P}\right)^{\frac{1}{mn}} - 1\right) \qquad (40)$$

В) При дисконтировании по сложной годовой учетной ставке d. Из формулы

$$P = S(1-d)^n$$

имеем

$$d = 1 - \left(\frac{P}{S}\right)^{\frac{1}{n}}. \qquad (41)$$

Г) При дисконтировании по номинальной учетной ставке m раз в году. Из

$$P = S\left(1 - \frac{f}{m}\right)^{mn}$$

приходим к формуле

$$f = m\left(1-\left(\frac{P}{S}\right)^{\frac{1}{mn}}\right). \qquad (42)$$

Д) При наращивании по постоянной силе роста. Исходя из

$$S = Pe^{\delta n}$$

получаем

$$\delta = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{S}{P}\right). \qquad (43)$$

Вопросы для самопроверки

1. Какие ставки сложных процентов вы знаете?
2. Что такое номинальная и эффективная ставки наращения?
3. Что такое номинальная и эффективная учетные ставки?
4. Что такое сила роста?
5. Как связаны непрерывные и дискретные ставки процентов?
6. Как учесть изменение силы роста во времени?
7. В чем привлекательность непрерывных процентов в аналитических расчетах?

Задачи для практического занятия

1. Сравните скорость наращения суммы в 1000 по простым и сложным процентам, если годовая ставка равна 20%, для сроков в полгода, год, два года, три года. Сравните результаты, сделайте выводы.

2. Сложная процентная ставка по ссуде определена в 9% годовых плюс маржа. В первые два года маржа установлена в размере 5%, в последующие два года в размере 4%. Определить множитель наращения за 4 года.

3. Сложная процентная ставка по ссуде определена в 9% годовых и предусмотрена ежегодная индексация

накопленного долга с учетом инфляционного роста цен. Рост цен составил по годам 30%, 20%, 15%, 10%. Определить множитель наращения за 4 года.

4. За сколько лет удвоится сумма долга, если применяется простая годовая ставка 17%?

5. За сколько лет удвоится сумма долга, если применяется сложная годовая ставка 17%?

6. Кредит в размере 100000 выдан на 2 года и 200 дней под ставку 21% годовых. Рассчитайте сумму долга на конец срока тремя способами (по формуле сложных процентов, смешанным методом, с отбрасыванием дробной части года), сравните результаты, сделайте выводы. Временная база 360.

7. Первоначальная сумма ссуды 100000, выдана на 3 года, проценты начисляются по годовой номинальной ставке 20%. Требуется определить конечную сумму долга, если:

А) проценты начисляются один раз в конце года,

Б) проценты начисляются два раза в год (в конце каждого полугодия),

В) проценты начисляются четыре раза в год (поквартально),

Г) проценты начисляются 12 раз в год (помесячно).

Результаты сравните, сделайте выводы.

8. 10 января 2001 г. куплен пакет акций за 89 тыс. Продан 22 ноября 2002 г. за 112 тыс. За время владения пакетом акций были выплачены следующие дивиденды:

1 августа 2001 г. 1500.

1 февраля 2002 г. 1700.

1 августа 2002 г. 2000.

Какова доходность операции с пакетом акций, если банковская ставка по краткосрочным депозитам равнялась 18% годовых в 2001 г. и 15% в 2002 г.? Расчет процентов производить по британской практике. Доходность выразить в виде годовой сложной процентной ставки.

9. Сравните эффективность операции с пакетом акций из предыдущей задачи с альтернативным вложением 89

тыс. на срок владения пакетом в краткосрочный депозит с реинвестированием 31 декабря 2001 г.

10. Чему равна эффективная ставка процента, если банк начисляет проценты ежеквартально, исходя из номинальной ставки 17%?

11. Эффективная ставка процента равна 19% годовых. Чему должна быть равна квартальная ставка, чтобы обеспечить такую годовую доходность?

12. Ставка сложных процентов на предстоящие 2 года 20%, а на третий год 15%. Какие условия выгоднее:

1) получить от должника сейчас 100000, или

2) 121 000 через год, или

3) 160 000 через 3 года.

Риск невозврата не учитываем.

13. Как изменится результат предыдущей задачи, если при тех же условиях начисление процентов предполагается ежеквартальное?

14. Должник получил кредит в размере 100000 на 1,5 года, годовая учетная ставка равна 20%. Какую учетную ставку, простую или сложную, выгоднее применить заемщику?

15. Сколько получит владелец векселя на сумму в 1000000, если он его учитывает за 2,5 года до наступления срока погашения, чему равна величина дисконта, если расчет ведется по годовой сложной учетной ставке 20%?

16. Сколько получит владелец векселя на сумму в 1000000, если он его учитывает за 2,5 года до наступления срока погашения, чему равна величина дисконта, если расчет ведется по номинальной учетной ставке 20% при ежеквартальном дисконтировании? Сравните результат с аналогичными величинами, полученными в предыдущей задаче. Сделайте выводы.

17. Найдите эффективную годовую сложную учетную ставку, если номинальная учетная ставка равна 16%, а дисконтирование предусматривается ежеквартальное.

18. Какую сумму следует проставить в векселе, если выдается ссуда в размере 100000 на два года? В контракте предусматривается сложная годовая учетная ставка 16%.

19. Какую сумму следует проставить в векселе, если выдается ссуда в размере 100000 на два года? В контракте предусматривается номинальная учетная ставка 16% при ежеквартальном дисконтировании. Результат сравните с величиной, полученной в предыдущей задаче. Какая сложная учетная ставка, номинальная или эффективная, выгоднее заемщику?

20. Ссуда составляет 100000 на срок 10 дней. Предусматривается непрерывное начисление процентов по ежедневной силе роста, которая изменяется дискретно: в первые 5 дней она устанавливается равной 0,03%, в последующие 3 дня 0,035%, а в последние 2 дня 0,04%. Определить сумму погасительного платежа.

21. Ссуда равна 50000 на 10 дней. Первоначальное значение ежедневной силы роста равно 0,01%. Ежедневный абсолютный прирост силы роста в течение первых 3 дней 0,01%, а затем ставка остается постоянной. Найти сумму погасительного платежа.

22. Годовая ставка сложных процентов составляет 25%. Чему равна эквивалентная сила роста?

23. Сила роста равна 20% годовых. Чему равна эквивалентная годовая ставка сложных процентов?

24. Сила роста равна 20% годовых. Чему равна эквивалентная номинальная годовая ставка сложных процентов при ежемесячном начислении процентов?

25. За какой срок сумма в 1 млн. возрастет до 1,5 млн. при условии, что на нее начисляются проценты по сложной ставке 20% годовых? Временная база 365.

26. За какой срок сумма в 1 млн. возрастет до 1,5 млн. при условии, что на нее начисляются проценты по номинальной ставке 20% годовых четыре раза в год? Временная ба за 365.

27. Ссуда выдана в размере 2 млн. на 2 года под вексель на сумму 3 млн. Оцените эффективность этой операции, если ее измерять:

А) простой годовой ставкой,

Б) простой годовой учетной ставкой,

В) сложной годовой ставкой,

Г) сложной годовой учетной ставкой,

Д) номинальной ставкой при ежеквартальном начислении процентов,

Е) номинальной учетной ставкой при ежеквартальном дисконтировании.

Результаты сравнить и сделать выводы.

28. Валюта в долларах США может быть инвестирована под 10% годовых сложных процентов на 3 года. Суммовая ставка равна 17%. В каком диапазоне должен быть среднегодовой темп прироста обменного курса, чтобы была выгодна двойная конвертация (через сумы)?

29. Валюта может быть инвестирована в депозит под 10% на 2 года. За 2 года ожидается рост курса валюты на 20%. При какой минимальной ставке сложных процентов по рублевым депозитам целесообразна двойная конвертация?

30. На трехмесячный депозит положена сумма под простую годовую ставку 18%. Но за эти три месяца темп инфляции оказался на уровне 22% в год. Какова реальная ставка процентов? При какой ставке можно было бы сохранить реальную стоимость первоначального капитала?

31. Кредит предоставлен на 2 года под номинальную ставку 16% при ежемесячном начислении процентов. За это время инфляция характеризовалась годовым темпом 17%. Какова реальная (эффективная) ставка сложных процентов?

32. Ожидается рост цен на уровне 16% в год. Желательна реальная доходность 15% годовых. Чему должна быть равна объявленная ставка и инфляционная премия, чтобы

обеспечить такую доходность, если срок операции 3 квартала и рассматриваются простые проценты?

33. Ожидается рост цен в среднем на уровне 16% в год. Желательна реальная доходность 15% годовых. Чему должна быть равна объявленная ставка и инфляционная премия, чтобы обеспечить такую доходность, если срок операции 3 года и рассматриваются сложные проценты?

34. Ожидается рост цен в среднем на уровне 16% в год. Желательна реальная (эффективная) доходность 15% годовых. Чему должна быть равна объявленная номинальная ставка при ежеквартальном начислении процентов и инфляционная премия, чтобы обеспечить такую доходность, если срок операции 3 года?

35. Сумма вклада составляет 100000 на срок полгода. Процентная ставка 17% годовых. Ставка налога на проценты 30%. Определить наращенную сумму, которую получит вкладчик после выплаты налога и сумму налога.

36. Сумма вклада составляет 100000 на 3 года. Процентная ставка 18% годовых. Начисление процентов один раз в год. Ставка налога на проценты 30%. Определить наращенную сумму, которую получит вкладчик послу выплаты процентов и сумму налога:

1. за весь срок сразу,
2. за каждый год в отдельности.

37. Вексель был учтен за 100 дней до наступления срока погашения по простой учетной ставке 16%. Какой эквивалентной простой ставкой процентов измеряется доходность банка от этой операции? Временная база 365.

38. Вексель был учтен за 50 дней до наступления срока погашения по простой учетной ставке 16%. Какой эквивалентной простой ставкой процентов измеряется доходность банка от этой операции? Временная база 365. Сравните полученную величину с результатом предыдущей задачи. Сделайте выводы.

39. По краткосрочным операциям банк установил простую процентную ставку 17%. Чему должна быть равна простая учетная ставка при сроке ссуды 100 дней. Временная база при начислении по простой ставке 365, а при начислении по простой учетной ставке 360.

40. Годовая сложная процентная ставка равна 17%. Определите эквивалентную сложную учетную процентную ставку.

41. В первом квартале применялась простая процентная ставка 15%, во втором – 16%, в третьем 15,5%, в четвертом – 17%. Чему равна средняя годовая ставка?

42. В первом квартале применялась простая процентная ставка 15%, во втором – 16%, в третьем 15,5%, в четвертом – 17%. Инфляция была в первом квартале на уровне 8% в год во втором на уровне 9%, в третьем 8,5%, в четвертом – 7%. Чему равна средняя годовая реальная ставка?

43. Найдите среднюю годовую ставку сложных процентов, если в первые 1,5 года ставка составляла 18%, последующий год 15%, и еще 1,5 года 16%.

44. Инвестор разместил 5 млн. под ставку 18% годовых на 2 года и 15 млн. под ставку 16% тоже на 2 года. Какова среднегодовая эффективность его инвестиционной деятельности?

45. Какова реальная средняя цена ресурсов коммерческого банка, если он имеет следующую структуру рублевых вкладов:

Виды ресурсов по срокам	Реальная цена, % годовых	Удельный вес, %
Вклады до востребования	3	40
Срочные вклады:		
До 30 дней	16	30
От 31 до 90 дней	17	20
Свыше 90 дней	18	10

46. Определите реальную цену ресурсов для банка, если норма резервирования 10%, темп инфляции 12% в год, депозитная ставка 18%.

47. Какую ссудную сложную ставку должен применить банк, чтобы иметь положительную доходность, если депозитная ставка 18% при сроке депозита 2 года и норме резервирования 10%?

48. Один вексель выписан на сумму 100000 с уплатой 7 октября, другой на сумму 90000 с уплатой 1 августа. Проценты рассчитываются по британской практике.

1. Какой из этих векселей ценнее, если годовая ставка простых процентов равна 20%?

2. При какой ставке эти два векселя равноценны?

49. Заемщик одновременно выписал два векселя: один на сумму 350000 на срок 90 дней, другой на сумму 200000 на срок 180 дней. Оба векселя были учтены в банке. Должник просит банк отложить погашение векселей и заменить их одним со сроком 240 дней. Какую сумму следует проставить в консолидированном обязательстве, если используется простая ставка процентов 20% годовых и временная база 365?

50. Объедините три платежа:

150 000 руб. со сроком 3 марта,

100 000 руб. со сроком 1 августа,

50 000 руб. со сроком 1 октября.

Срок консолидированного платежа 1 июля, годовая ставка простых процентов 18%, временная база 365.

51. Погасительные платежи заемщика в 200000 через 150 дней и в 250000 через 200 дней решено заменить одним платежом в 500000. Найти срок консолидированного платежа, если простая годовая ставка равна 18%, временная база 365.

52. Стороны договорились заменить обязательства, предусматривающие платежи в 1,6 млн. через 1 год и в 2,7 млн. через 2 года одним в 5 млн. Требуется определить срок

консолидированного платежа, если стороны согласились применять следующие ставки сложных процентов:

Для первого года 17%,

Для второго года 16%,

Для третьего и последующих лет 15%.

Временная база 365. Расчет за дробное число лет производить по формуле сложных процентов.

53. Имеются два платежных обязательства: по первому требуется уплатить 1,5 млн. 1 апреля, по второму 1,2 млн. 1 декабря. Но должник изъявил желание уже 1 июня выплатить 1 млн. в счет погашения долга, а остальной долг погасить 1 сентября. Кредитор согласился. Это потребовало пересмотра соглашения. Чему равна в новом контракте сумма последнего платежа при условии, что стороны согласились применять в расчетах простую ставку 17%. Расчет процентов производить по британской практике.

54. 3 месяца назад взят кредит в размере 100000 на 5 месяцев. Месяц назад взят еще один кредит в размере 200000 на 6 месяцев. Сегодня кредитор согласился на замену двух обязательств одним с погашением долга равными суммами через 3 и 6 месяцев. Определить размер каждого платежа, если простая годовая ставка процентов равна 17%. Проценты рассчитывать по германской практике.

55. Кредит взят на 3 года в размере 500000 под ставку сложных процентов 18%. Однако уже через год было выплачено 200000 в счет погашения долга. Определить размер последнего погасительного платежа в конце трехлетнего срока для окончательного расчета.

§3. ДОХОДНОСТЬ ФИНАНСОВОЙ ОПЕРАЦИИ

Определение. Финансовой называется операция, начало и конец которой характеризуются денежными суммами *P(0)* и *P(T)* соответственно, а цель которой – наращение суммы вложенных средств *P(0)*.

В этом определении под *P(0)* понимают реально вложенные средства в момент *t=0*, под *P(T)* – реально вырученные денежные средства в результате операции, срок которой *T* единиц времени. Эффект от вложения характеризуется отдачей на каждый сум вложенных средств.

Определение. Относительный показатель, который служит мерой эффективности вложений, называется доходностью финансовой операции.

Для разных видов задач в зависимости от конкретного содержания используются разные формы показателя доходности. Различают доходность за единицу времени и доходность за весь период [0, *T*]. Показатель доходности выражается в процентах или десятичных дробях.

Определение. Доходность финансовой операции за единицу времени – это число $\bar{r}$, удовлетворяющее равенству:

$$P(0)(1+\bar{r}T)=P(T) \tag{1}$$

или

$$P(0)(1+\bar{r})^T=P(T) \tag{2}$$

Если время измеряется в годах, то $\bar{r}$ – среднегодовая доходность операции. Из выражения (1) получаем:

$$\bar{r}=\frac{1}{T}\frac{P(T)-P(0)}{P(0)}$$

а из выражения (2):

$$\bar{r}=\left(\frac{P(T)}{P(0)}\right)^{\frac{1}{T}}-1$$

Таким образом, финансовой операции ставится в соответствие эквивалентная операция наращения суммы $P(0)$ по ставке $\bar{r}$ в течение времени T. Такой подход позволяет сравнить полученное значение доходности с доходностями по альтернативным вложениям средств.

Определение. Доходность финансовой операции за весь срок $[0, T]$ — это число r, удовлетворяющее равенству

$$P(0)(1+r) = P(T), \tag{3}$$

Отсюда:

$$r = \frac{P(T) - P(0)}{P(0)}.$$

Определение. Уравнения (1) — (3) называют **уравнениями доходности.**

Для оценки эффективности инвестиции (например, в ценные бумаги или инвестиционный проект) используется показатель доходности, рассчитанный из уравнений (1), (2) или (3). При этом $P(0)$) называют начальной стоимостью инвестиции, $P(T)$– конечной стоимостью инвестиции, а сам показатель $\bar{r}$ или r – доходностью инвестиции.

2. Учет налогов и инфляции

Налоги и инфляция заметно влияют на эффективность финансовой операции. Рассмотрим учет налогов. Налог начисляется, как правило, на проценты, получаемые при размещении денежной суммы в рост. Предположим, на сумму P_0 в течение времени п начислялись проценты по ставке i, что привело к накоплению суммы S_n. Тогда величина процентов

$$I(n) - S_n - P_0\,,$$

а сумма налога $G_n = gf(n)$, где g – ставка налога на проценты. Конечная сумма после выплаты налога составляет

$$P(n) = S_n - G_n$$

Так как $P(n)<S_n$, то учет налогов фактически сокращает ставку наращения. Итак,

$$P(n)=S_n-G_n=S_n-gI(n)=S_n-g(S_n-P_0)=S_n(1-g)+gP_0.$$

Если i — простая процентная ставка, то

$$S_n=P_0(1+in).$$

Тогда

$$P(n)=P_0(1+i(1-g)n)$$

Видим, что фактически наращение производится по ставке $i(1-g)<1$. Если i — сложная процентная ставка, то

$$S_n=P_0(1+i)^n.$$

Тогда

$$P(n)=P_0\left((1+i)^n(1-g)+g\right).$$

Пример 1

При выдаче кредита на 2 года под годовую сложную процентную ставку 0,08 кредитор удерживает комиссионные в размере 0,5% от суммы кредита. Ставка налога на проценты 10%. Какова доходность операции для кредитора?

Решение

Если $P(0)$ — сумма кредита, а S_n — сумма погашаемого долга, то $S_n=P_0(1+i)^n$ где $i=0,08$, п = 2. Сумма комиссионных cP_0, где с = 0,005. Тогда сумма, фактически выданная в долг, составит $P(0)=P_0(1-c)$. После выплаты налога у кредитора останется $P(n)=P_0((1+i)^n(1-g)+g)$, где $g=0,1$ — ставка налога. Уравнение доходности имеет вид

$$P(n)=P(0)(1+\bar{r})^n$$

Разрешая это уравнение относительно r, получим:

$$\bar{r}=\left(\frac{P(n)}{P(0)}\right)^{\frac{1}{n}}-1=\left(\frac{(1+i)^n(1-g)+g}{1-c}\right)^{\frac{1}{n}}-1=0,07496.$$

Заметим, что без учета налога *(g=0)* доходность операции составила бы 0,08271.

Определение. Инфляция – обесценение денег, проявляющееся в росте цен на товары и услуги, что влечет за собой снижение покупательной способности денег.

Инфляцию характеризуют два количественных показателя – индекс цен и темп инфляции. Предположим, выбрана единица времени. Рассмотрим отрезок времени $[0, t]$, длина которого t единиц времени от начального момента $t=0$.

Индекс цен за время $[0, t]$ – число

$$J(t)=\frac{K(t)}{K(0)},$$

Показывающее, во сколько раз выросла стоимость потребительской корзины за период времени $[0, t]$.

Темп инфляции за время $[0, t]$ – число

$$H(t)=\frac{K(t)-K(0)}{K(0)},$$

Показывающее, на сколько процентов выросла стоимость потребительской корзины за период времени $[0, t]$. Так как

$$H(t)=\frac{K(t)}{K(0)}-1,$$

то соотношения между темпом инфляции и индексом цен имеют вид:

$$H(t)=J(t)-1, \tag{4}$$

$$J(t)=1+H(t), \tag{5}$$

для любого периода времени $[0, t]$.

Из определения показателей $J(t)$ и $H(t)$ получаем их начальные значения $J(0)=1$, $H(0)=0$.

Пусть $[0,t]=\bigcup\limits_{k=1}^{n}[t_{k-1},t_k]$, где $[0,t_1],...,[t_{n-1},t_n]$ – отрезки времени в сроке [0, t] *($t_0=0$, $t_n=t$)*, длины которых t_1, t_2 - t_1,...,t_n - t_{n-1} единиц времени.

$j(0,t_1),...,j(t_{n-1},t_n)$ и $h(0,t_1),...,h(t_{n-1},t_n)$ – индексы цен и темпы инфляции за периоды $[0,t_1],...,[t_{n-1},t_n]$ соответственно. Согласно (5)

$$j(t_{k-1},t_k)=1+h(t_{k-1},\ t_k),\qquad k=1,2,...,n.$$

$h(t_{k-1},t_k)$ – темп инфляции за t_k-t_{k-1} единиц времени за период $[t_{k-1},t_k]$. Индекс цен $j(t_{k-1},t_k)$ за период $[t_{k-1},t_k]$ показывает, во сколько раз увеличились цены за этот период по отношению к уровню цен предыдущего периода. Тогда получаем следующие соотношения для индекса цен и темпа инфляции за время [0, *t*]

$$J(t)=j(0,t_1)j(t_1,t_2)\cdots j(t_{n-1},t_n), \tag{6}$$

$$J(t)=(1+h(0,t_1))(1+j(t_1,t_2))\cdots(1+j(t_{n-1},t_n)), \tag{7}$$

$$1+H(t)=(1+h(0,t_1))(1+j(t_1,t_2))\cdots(1+j(t_{n-1},t_n)). \tag{8}$$

Пусть j_k и h_k – индекс цен и темп инфляции за 1 единицу времени на временном отрезке – $[t_{k-1}, t_k]$. Тогда $j_k=1+h_k$, $k=1,2,...,n$, а индекс цен за весь период $[t_{k-1}, t_k]$ равен

$$j(t_{k-1},t_k)=j_k^{t_k-t_{k-1}},\qquad k=1,2,...,n.$$

Согласно (6)

$$J(t)=j_1^{t_1}j_2^{t_2-t_1}\dots j_n^{t_n-t_{n-1}}.$$

Тогда

$$J(t)=(1+h_1)^{t_1}(1+h_2)^{t_2-t_1}\dots(1+h_n)^{t_n-t_{n-1}}. \tag{9}$$

Учитывая (5), получаем:

$$1+H(t)=(1+h_1)^{t_1}(1+h_2)^{t_2-t_1}\dots(1+h_n)^{t_n-t_{n-1}}. \qquad (10)$$

Если $h_1=h_2=\dots=h_n=h$, то

$$J(t)=(1+h)^t \qquad (11)$$

и

$$1+H(t)=(1+h)^t \qquad (12)$$

Здесь h – темп инфляции за 1 единицу времени на временном отрезке $[0, t]$, $J(t)$ и $H(t)$ – индекс цен и темп инфляции за период времени $[0, t]$.

Предположим, за п единиц времени получена наращенная сумма вклада S_n. Индекс цен за период $[0, t]$ выросло значения $J(n)$. Тогда реальная сумма вклада вследствие снижения покупательной способности денег составит

$$P(n)=\frac{S_n}{J(n)}.$$

Индекс цен $J(n)$ рассчитывается по одной из приведенных выше формул в зависимости от исходных данных. Так как $J(n)>1$, то $P(n)<S$, что означает фактическое снижение ставки наращения.

Пример 2

Ожидаемый годовой темп инфляции первых двух лет вклада составляет 3%, а следующих трех – 4%. Какую минимальную годовую ставку сложных процентов должен предложить банк клиенту, чтобы реальная годовая доходность вклада была не меньше 8% ?

Решение

Здесь $t=0$ – момент размещения вклада, 1 год – единица измерения времени, срок вклада $n=5$ лет, $h_1=0,03$ и $h_2=0,04$ – среднегодовые темпы инфляции на временных отрезках [0,2], [2,5]. Для доходности по вкладу $\bar{r}$ должно быть выполнено условие: $\bar{r} > 0,8$. Пусть i – годовая сложная процентная ставка, под которую размещена сумма P_0. Тогда наращенная сумма вклада через n лет $S_n = P_0(1+i)^n$. С учетом инфляции реальная сумма вклада составит

$$P(n) = \frac{S_n}{J(n)},$$

где индекс цен согласно (9) равен

$$J(n) = (1+h_1)^2 (1+h_n)^3 .$$

Уравнение доходности имеет вид: $P(n) = P_0(1+\bar{r})$. Разрешая это уравнение относительно $\bar{r}$ и учитывая требуемое условие для доходности, получим:

$$\bar{r} = \frac{1+i}{(1+h_1)^{\frac{2}{5}}(1+h_2)^{\frac{3}{5}}} - 1 \geq 0,088$$

Отсюда $i \geq 0,11887$ Значит, минимальная процентная ставка размещения вклада, обеспечивающая 8% годовых дохода, составляет 11,887%.

Вопросы для самопроверки

1. Что называется финансовой операцией?
2. Что называется доходностью финансовой операции?
3. Как определяют доходность финансовой операции за единицу времени?

Как определяют доходность финансовой операции за весь срок $[0,T]$?

4. Что называют уравнениями доходности?

6. Разъясните, как налоги и инфляция заметно влияют на эффективность финансовой операции.
7. Что называют инфляцией?
8. Какие два количественных показателя характеризуют инфляцию?

9. Что такое индекс цен и темп инфляции?

Задачи для практического занятия

1. Коммерческая фирма закупает партию товара по цене 9 за кг. При розничной цене 10 за кг товар продается за 7 дней, а расходы по транспортировке и реализации, составляют 0,30 на кг. При розничной цене 11 за кг товар продается за 10 дней, а расходы составляют 0,50 на кг. Налог на прибыль 24%. По какой цене выгоднее продавать товар, и какова доходность коммерческой деятельности в обоих случаях с учетом реинвестирования прибыли и расширения бизнеса, если ее измерять годовой ставкой простых процентов?

2. Курс доллара вырос с 29,20 до 29,50. Как изменилась доходность экспортной операции, если при прежнем обменном курсе она равнялась 35% годовых и на ее осуществление требовалось 15 дней? Временная база K=365.

3. Обменный курс вырос с 29,50 за доллар США до 29,80 за доллар. Как изменится эффективность экспортной операции, если до повышения курса доллара она составляла 25%, ее реализация требовала одного месяца, а ставка налога на прибыль равна 24%?

4. Обменный курс вырос с 29,50 за доллар США до 29,80 за доллар. Как изменится эффективность импортной операции, если до повышения курса доллара она составляла 25%, ее реализация требовала одного месяца, а ставка налога на прибыль равна 24%?

5. Имеется сумма в долларах США. Курс покупки долларов банком составляет 29,20 за доллар. Требуется определить диапазон допустимых значений курса продажи долларов, при котором двойная конвертация выгодна, если срок депозита 3 месяца, простая годовая ставка по рублевым депозитам 20%, а по депозитам в долларах 7%. Учесть налог в 1%, взимаемый банком при продаже валюты. При каких

значениях обменного курса в конце операции эффективность депозита будет отрицательной?

6. Коммерческая фирма закупила товар на сумму в 100 млн., который реализовала в виде экспортной поставки за 3,8 млн. долларов США. Какова эффективность этой операции, если операция заняла две недели, таможенная пошлина составила 10% от валютной выручки, курс покупки долларов банком в конце операции равнялся 30 за доллар США. Временная база 365. Какова годовая доходность фирмы от подобных операций с учетом реинвестирования прибылей и расширения бизнеса?

7. Выразить доходность коммерческой операции в виде простой годовой ставки процентов, если:

фирма покупает за рубежом сырье стоимостью 10 млн. долларов США,

предоплата составляет 55% стоимости, отправка сырья осуществляется через 14 дней после предоплаты, стоимость транспортировки в 100 тыс. долларов оплачивается в день предоплаты, таможенная пошлина 28% оплачивается в день отправки, совпадающий с днем пересечения границы, сырье попадает на склад производственного предприятия через три дня после пересечения границы, оплата поставщику оставшихся 45% стоимости производится сразу по поступлению сырья на склад предприятия, переработка сырья и реализация готовой продукции занимает 72 дня, после чего в коммерческую фирму поступает 14 млн. долларов.

Временная база 365 дней.

8. 10 января 2001 г. куплен пакет акций за 89 тыс. Продан 22 ноября 2002 г. за 112 тыс. За время владения пакетом акций были выплачены следующие дивиденды:

1 августа 2001 г. 1500.

1 февраля 2002 г. 1700.

1 августа 2002 г. 2000.

Какова доходность операции с пакетом акций, если банковская ставка по краткосрочным депозитам равнялась 18% годовых в 2001 г. и 15% в 2002 г.? Расчет процентов производить по британской практике. Доходность выразить в виде годовой сложной процентной ставки.

9. Сравните эффективность операции с пакетом акций из предыдущей задачи с альтернативным вложением 89 тыс. на срок владения пакетом в краткосрочный депозит с реинвестированием 31 декабря 2001 г.

10. Чему равна эффективная ставка процента, если банк начисляет проценты ежеквартально, исходя из номинальной ставки 17%?

11. Эффективная ставка процента равна 19% годовых. Чему должна быть равна квартальная ставка, чтобы обеспечить такую годовую доходность?

12. Ссуда выдана в размере 2 млн. на 2 года под вексель на сумму 3 млн. Оцените эффективность этой операции, если ее измерять:

А) простой годовой ставкой,

Б) простой годовой учетной ставкой,

В) сложной годовой ставкой,

Г) сложной годовой учетной ставкой,

Д) номинальной ставкой при ежеквартальном начислении процентов,

Е) номинальной учетной ставкой при ежеквартальном дисконтировании.

Результаты сравнить и сделать выводы.

13. Кредит предоставлен на 2 года под номинальную ставку 16% при ежемесячном начислении процентов. За это время инфляция характеризовалась годовым темпом 17%. Какова реальная (эффективная) ставка сложных процентов?

14. Ожидается рост цен на уровне 16% в год. Желательна реальная доходность 15% годовых. Чему должна быть равна объявленная ставка и инфляционная премия, чтобы

обеспечить такую доходность, если срок операции 3 квартала и рассматриваются простые проценты?

15. Ожидается рост цен в среднем на уровне 16% в год. Желательна реальная доходность 15% годовых. Чему должна быть равна объявленная ставка и инфляционная премия, чтобы обеспечить такую доходность, если срок операции 3 года и рассматриваются сложные проценты?

16. Ожидается рост цен в среднем на уровне 16% в год. Желательна реальная (эффективная) доходность 15% годовых. Чему должна быть равна объявленная номинальная ставка при ежеквартальном начислении процентов и инфляционная премия, чтобы обеспечить такую доходность, если срок операции 3 года?

17. Сумма вклада составляет 100000 на срок полгода. Процентная ставка 17% годовых. Ставка налога на проценты 30%. Определить наращенную сумму, которую получит вкладчик после выплаты налога и сумму налога.

18. Сумма вклада составляет 100000 на 3 года. Процентная ставка 18% годовых. Начисление процентов один раз в год. Ставка налога на проценты 30%. Определить наращенную сумму, которую получит вкладчик послу выплаты процентов и сумму налога:

1. за весь срок сразу,
2. за каждый год в отдельности.

19. Вексель был учтен за 100 дней до наступления срока погашения по простой учетной ставке 16%. Какой эквивалентной простой ставкой процентов измеряется доходность банка от этой операции? Временная база 365.

20. Вексель был учтен за 50 дней до наступления срока погашения по простой учетной ставке 16%. Какой эквивалентной простой ставкой процентов измеряется доходность банка от этой операции? Временная база 365. Сравните полученную величину с результатом предыдущей задачи. Сделайте выводы.

21. В первом квартале применялась простая процентная ставка 15%, во втором – 16%, в третьем 15,5%, в четвертом – 17%. Инфляция была в первом квартале на уровне 8% в год во втором на уровне 9%, в третьем 8,5%, в четвертом – 7%. Чему равна средняя годовая реальная ставка?

22. Определите реальную цену ресурсов для банка, если норма резервирования 10%, темп инфляции 12% в год, депозитная ставка 18%.

23. Какую ссудную сложную ставку должен применить банк, чтобы иметь положительную доходность, если депозитная ставка 18% при сроке депозита 2 года и норме резервирования 10%?

ГЛАВА 2. АНАЛИЗ ФИНАНСОВЫХ ПОТОКОВ

§4. ПОТОКИ ПЛАТЕЖЕЙ

Часто в контрактах финансового характера предусматриваются не отдельные разовые платежи, а серии платежей, распределенных во времени. Примерами могут быть регулярные выплаты с целью погашения долгосрочного кредита вместе с начисленными на него процентами, периодические взносы на расчетный счет, на котором формируется некоторый фонд различного назначения (инвестиционный, пенсионный, страховой, резервный, накопительный и т.д.), дивиденды, выплачиваемые по ценным бумагам, выплаты пенсий из пенсионного фонда и пр. Ряд последовательных выплат и поступлений называют **потоком платежей**. Выплаты представляются отрицательными величинами, а поступления — положительными.

Обобщающими характеристиками потока платежей являются наращенная сумма и современная величина. Каждая из этих характеристик является числом.

Наращенная сумма потока платежей — это сумма всех членов последовательности платежей с начисленными на них процентами к концу срока ренты.

Под **современной величиной потока платежей** понимают сумму всех его членов, дисконтированных (приведенных) на некоторый момент времени, совпадающий с началом потока платежей или предшествующий ему.

Конкретный смысл этих обобщающих характеристик определяется природой потока платежей, причиной, его порождающей. Например, наращенная сумма может представлять собой итоговый размер формируемого инвестиционного или какого-либо другого фонда, общую сумму задолженности. Современная величина может характеризовать приведенную прибыль, приведенные издержки.

1. Финансовые ренты (аннуитеты)

Поток платежей, все члены которого положительные величины, а временные интервалы постоянны, называют **финансовой рентой** или **аннуитетом**.

Финансовая рента имеет следующие параметры: **член ренты** – величина каждого отдельного платежа, **период ренты** – временной интервал между двумя соседними платежами, **срок ренты** – время, измеренное от начала финансовой ренты до конца ее последнего периода, **процентная ставка** – ставка, используемая при наращении или дисконтировании платежей, образующих ренту, число платежей в году, число начислений процентов в году, моменты платежа внутри периода ренты.

2. Виды финансовых рент

Классификация рент может быть произведена по различным признакам. Рассмотрим их.

В зависимости от продолжительности периода, ренты делят на годовые и P – срочные, где P – число выплат в году.

По числу начислений процентов различают ренты с начислением один в году, m раз или непрерывно. Моменты начисления процентов могут не совпадать с моментами рентных платежей.

По величине членов различают **постоянные** (с равными членами) и **переменные ренты**. Если размеры платежей изменяются по какому-либо математическому закону, то часто появляется возможность вывести стандартные формулы, значительно упрощающие расчеты.

По вероятности выплаты членов различают **ренты верные** и **условные**. Верные ренты подлежат безусловной выплате, например, при погашении кредита. Выплата условной ренты ставится в зависимость от наступления некоторого случайного события. Поэтому число ее членов заранее неизвестно. Например, число выплат пенсий зависит от продолжительности жизни пенсионера.

По числу членов различают ренты с конечным числом членов или ограниченные и бесконечные или вечные. В качестве вечной ренты можно рассматривать выплаты по облигационным займам с неограниченными или не фиксированными сроками.

В зависимости от наличия сдвига момента начала ренты по отношению к началу действия контракта или какому-либо другому моменту ренты подразделяются на **немедленные и отложенные** или **отсроченные**. Срок немедленных рент начинается сразу, а у отложенных запаздывает.

Ренты различают по моменту выплаты платежей. Если платежи осуществляются в конце каждого периода, то такие ренты называются **обычными** или **постнумерандо**. Если же выплаты производятся в начале каждого периода, то ренты называются пренумерандо. Иногда предусматриваются платежи в **середине** каждого периода.

Анализ потоков платежей в большинстве случаев предполагает расчет наращенной суммы или современной величины ренты

3. Формулы наращенной суммы

Обычная годовая рента

Пусть в конце каждого года в течение n лет на расчетный счет вносится по R сум, проценты начисляются один раз в год по ставке i. В этом случае первый взнос к концу срока ренты возрастет до величины $R(1+i)^{n-1}$, так как на сумму R проценты начислялись в течение $n-1$ года. Второй взнос увеличится до $R(1+i)^{n-2}$ и т.д. На последний взнос проценты не начисляются. Таким образом, в конце срока ренты ее наращенная сумма будет равна сумме членов геометрической прогрессии

$$S = R + R(1+i) + R(1+i)^2 + ... + R(1+i)^{n-1},$$

в которой первый член равен R, знаменатель $(1+i)$, число членов n. Эта сумма равна

$$S = R\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1} = R\frac{(1+i)^n - 1}{i} = Rs_{n;i} \qquad (1)$$

где

$$s_{n;i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i} \qquad (2)$$

и называется коэффициентом наращения ренты. Он зависит только от срока ренты n и уровня процентной ставки i. Поэтому его значения могут быть представлены в таблице с двумя входами.

Пример

В течение 3 лет на расчетный счет в конце каждого года поступает по 10 млн. сум., на которые начисляются проценты по сложной годовой ставке 10%. Требуется определить сумму на расчетном счете к концу указанного срока.

Решение

$$S = 10\frac{(1+0,1)^3 - 1}{0,1} = 33,1.$$

Годовая рента, начисление процентов *m* раз в году

Посмотрим, как усложнится формула, если предположить теперь, что платежи делают один раз в конце года, а проценты начисляют m раз в году. Это означает, что применяется каждый раз ставка j/m, где j — номинальная ставка процентов. Тогда члены ренты с начисленными до конца срока процентами имеют вид

$$R(1+j/m)^{m(n-1)}, R(1+j/m)^{m(n-2)}, ..., R.$$

Если прочитать предыдущую строку справа налево, то нетрудно увидеть, что перед нами опять геометрическая прогрессия, первым членом которой является R, знаменателем $(1+j/m)^m$, а число членов n. Сумма членов этой прогрессии и будет наращенной суммой ренты. Она равна

$$S = R\frac{(1 + j/m)^{mn} - 1}{(1 + j/m)^{m} - 1}$$

Рента p **— срочная,** $m=1$

Найдем наращенную сумму при условии, что рента выплачивается p раз в году равными платежами, а проценты начисляются один раз в конце года. Если R — годовая сумма платежей, то размер отдельного платежа равен R/p. Тогда последовательность платежей с начисленными до конца срока процентами также представляет собой геометрическую прогрессию, записанную в обратном порядке,

$$\frac{R}{p}(1+i)^{n-\frac{1}{p}}, \frac{R}{p}(1+i)^{n-\frac{2}{p}}, \frac{R}{p}(1+i)^{n-\frac{3}{p}}, \ldots, \frac{R}{p},$$

у которой первый член R/p, знаменатель $(1+i)^{-\frac{1}{\delta}}$, общее число членов np. Тогда наращенная сумма рассматриваемой ренты равна сумме членов этой геометрической прогрессии

$$S = \frac{R}{p} \cdot \frac{(1+i)^{(1/p)np} - 1}{(1+i)^{1/p} - 1} = R\frac{(1+i)^{n} - 1}{p\left[(1+i)^{1/p} - 1\right]} = Rs_{n;i}^{(p)}, \qquad (4)$$

где

$$s_{n;i}^{(p)} = \frac{(1+i)^{n} - 1}{p\left[(1+i)^{1/p} - 1\right]}. \qquad (5)$$

коэффициент наращения p **— срочной ренты при** $m=1$.

Рента p **— срочная,** $p=m$

В контрактах часто начисление процентов и поступление платежа совпадают во времени. Таким образом, число платежей p в году и число начислений процентов m совпадают, т.е. $p=m$. Тогда для получения формулы расчета наращенной суммы можно воспользоваться аналогией с годовой рентой и одноразовым начислением процентов в конце года, для которой

$$S = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}.$$

Различие будет лишь в том, что все параметры теперь характеризуют ставку и платеж за период, а не за год.

Таким образом получаем

$$S = \frac{R}{m} \cdot \frac{(1+j/m)^{mn} - 1}{j/m} = R\frac{(1+j/m)^{mn} - 1}{j}. \qquad (6)$$

Рента p — срочная, $p \geq 1, m \geq 1$.

Это самый общий случай p — срочной ренты с начислением процентов m раз в году, причем, возможно $p \geq m$.

Первый член ренты R/p, уплаченный спустя l/p года после начала, составит к концу срока вместе с начисленными на него процентами

$$\frac{R}{p}\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m\left(n-\frac{1}{p}\right)} = \frac{R}{p}\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn - m/p}.$$

Второй член ренты к концу срока возрастет до

$$\frac{R}{p}\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m\left(n-\frac{2}{p}\right)} = \frac{R}{p}\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn - 2(m/p)}$$

и т.д. Последний член этой записанной в обратном порядке геометрической прогрессии равен R/p, ее знаменатель $(1+j/m)^{m/p}$, число членов nm.

В результате получаем наращенную сумму

$$S = \frac{R}{p} \cdot \frac{(1+j/m)^{(m/p)np} - 1}{(1+j/m)^{m/p} - 1} = R\frac{(1+j/m)^{mn} - 1}{p\left[(1+j/m)^{m/p} - 1\right]}. \qquad (7)$$

Отметим, что из нее легко получить все рассмотренные выше частные случаи, задавая соответствующие значения р и m.

4. Формулы современной величины

Обычная годовая рента

Пусть член годовой ренты равен R, процентная ставка i, проценты начисляются один раз в конце года, срок ренты n. Тогда дисконтированная величина первого платежа равна

$$R\frac{1}{1+i} = Rv'$$

где $v = \frac{1}{1+i}$ — дисконтный множитель.

Приведенная к началу ренты величина второго платежа равна Rv^2 и т.д. В итоге приведенные величины образуют геометрическую прогрессию: Rv $Rм$, Rv^2, Rv^3,..., Rv^n сумма которой равна

$$A = Rv\frac{v^n-1}{v-1} = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = Ra_{n;i}, \qquad (8)$$

где

$$a_{n;i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}, \qquad (9)$$

— коэффициент приведения ренты.

Как видим, коэффициент приведения ренты зависит только от двух параметров: срока ренты n и процентной ставки i. Поэтому его значения могут быть представлены в табличном виде. Такие таблицы можно найти в книгах или построить самим на компьютере.

Рента ***p*** — срочная, $p \geq 1$, $m \geq 1$

Аналогичные рассуждения позволяют получить формулу для расчета современной величины ренты в самом общем случае для произвольных значений p и m

$$A = R\frac{1-(1+j/m)^{-mn}}{p\left[(1+j/m)^{m/p}-1\right]}, \qquad (10)$$

от которой нетрудно перейти к частным случаям при различных p и m.

5. Зависимость между современной величиной и наращенной суммой ренты

Пусть A – современная величина годовой ренты постнумерандо, а S – ее наращенная стоимость к концу срока $n, p=, m=1$.

Покажем, что наращение процентов на сумму A за n лет дает сумму, равную S:

$$A(1+i)^n = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}(1+i)^n = R\frac{(1+i)^n-1}{i} = S. \qquad (11)$$

Отсюда же следует, что дисконтирование S дает A:

$$Sv^n = A, \qquad (12)$$

а коэффициент дисконтирования и наращения ренты связаны соотношениями:

$$a_{n;i}(1+i)^n = s_{n;i} \qquad (13)$$

$$s_{n;i}v^n = a_{n;i} \qquad (14)$$

6. Определение параметров финансовой ренты

Иногда при разработке контрактов возникает задача определения по заданной наращенной сумме ренты S или ее современной стоимости A остальных параметров ренты: R, n, i, p, m. Такие параметры, как m и p обычно задаются по согласию двух подписывающих сторон. Остаются параметры R, n, i,. Два из них задаются, а третий рассчитывается. Такие расчеты могут быть неоднократно повторены при различных значениях задаваемых параметров, пока не будет достигнуто согласие сторон.

Определение размера ежегодной суммы платежа R

В зависимости от того, какая обобщающая характеристика постоянной ренты задана S или A, возможны два варианта расчета

$$R = S \,/\, s_{n;i} \tag{15}$$

или

$$R = A \,/\, a_{n;i} \tag{16}$$

Определение срока постоянной ренты

Рассмотрим решение этой задачи на примере обычной годовой ренты с постоянными заданными платежами. Решая исходные формулы для S и A.

$$S = R\frac{(1+i)^n - 1}{i} \quad \text{и} \quad A = R\frac{1-(1-i)^{-n}}{i}$$

относительно срока n, получаем соответственно следующие два выражения

$$n = \frac{\ln\left(\frac{S}{R}i + 1\right)}{\ln(1+i)} \quad \text{и} \quad n = \frac{-\ln\left(1 - \frac{A}{R}i\right)}{\ln(1+i)}. \tag{17}$$

Последнее выражение, очевидно, имеет смысл только при $R>Ai$.

Определение ставки процентов

Для того, чтобы найти ставку i, необходимо решить одно из нелинейных уравнений (опять предполагаем, что речь идет о постоянной годовой ренте постнумерандо) следующего вида

$$S = R\frac{(1+i)^n - 1}{i} \quad \text{или} \quad A = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i},$$

которые эквивалентны двум другим

$$\frac{(1+i)^n - 1}{i} = \frac{S}{R} = s_{n;i} \quad \text{или} \quad \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{A}{R} = a_{n;i} \tag{18}$$

В этих уравнениях единственным неизвестным является процентная ставка i. Решение нелинейных уравнений может быть найдено лишь приближенно. Известно несколько методов решения таких уравнений: метод линейной интерполяции, метод Ньютона-Рафсона и др. Мы рассмотрим сначала первый из них.

Метод линейной интерполяции

Прежде всего нужно найти с помощью прикидочных расчетов нижнюю ($i_н$) и верхнюю ($i_в$) оценки ставки. Это осуществляется путем подстановки в одну из формул (18) различных числовых значений i и сравнения результата с правой частью выражения. Далее корректировка нижнего значения ставки производится по следующей интерполяционной формуле

$$i = i_i + \frac{s - s_i}{s_{\hat{a}} - s_i}\left(i_{\hat{a}} - i_i\right), \qquad (19)$$

в которой $s_н$ и $s_в$ – значения коэффициента наращения (или коэффициента приведения) ренты для процентных ставок ($i_н$) и ($i_в$) соответственно. Полученное значение ставки проверяют, подставляя его в левую часть исходного уравнения и сравнивая результат с правой частью. Если достигнутая точность недостаточна, повторно применяют формулу (19), заменив в ней значение одной из приближенных оценок ставки на более точное, найденное на предыдущей итерации, и соответствующее ей значение множителя наращения (или приведения).

Метод Ньютона-Рафсона

В этом методе решение также находят итеративно, постепенно шаг за шагом уточняя оценку. Метод разработан для решения нелинейных уравнений вида $f(x)=0$.

В нашем конкретном случае алгоритм поиска сводится к трем операциям на каждом шаге, которые зависят от постановки задачи (задана S и A.) и типа ренты.

Сначала будем считать, что известна наращенная сумма S найдена какая-то начальная оценка процентной ставки (например, методом проб).

А. Постоянная годовая рента постнумерандо, проценты начисляются один раз в конце года, $p=1$, $m=1$. Требуется решить уравнение вида

$$\frac{(1+i)^n-1}{i}=\frac{S}{R}=s_{n;i} \quad \text{или} \quad \frac{(1+i)^n-1}{i}-s_{n;i}=0.$$

Если ввести обозначение $q=1+i$ и умножить обе части уравнения на $-(q-1)$, то получим алгоритм уточнения оценки на каждом шаге k, состоящий из следующих трех операций:

$$f(q_k)=q_k^n-1-\frac{S}{R}(q_k-1);$$

$$f'(q_k)=nq_k^{n-1}-\frac{S}{R};$$

$$q_{k+1}=q_k-\frac{f(q_k)}{f'(q_k)}.$$

Б. Постоянная p -срочная рента постнумерандо, проценты начисляются один раз в конце года, $p>1$, $m-1$.

Требуется решить уравнение вида

$$\frac{(1+i)^n-1}{p\left[(1+i)^{1/p}-1\right]}=\frac{S}{R}=s_{n;i}^{(p)} \quad \text{или} \quad \frac{(1+i)^n-1}{p\left[(1+i)^{1/p}-1\right]}-s_{n;i}^{(p)}=0.$$

Вновь используем обозначение $q=1+i$ и получим алгоритм уточнения оценки на каждом шаге k, состоящий из следующих трех операций:

$$f(q_k)=q_k^n-1-\frac{S}{R}p\left(q_k^{1/p}-1\right);$$

$$f'(q_k)=nq_k^{n-1}-\frac{S}{R}\left(q_k^{(1/p)-1}\right);$$

$$q_{k+1}=q_k-\frac{f(q_k)}{f'(q_k)}.$$

Замечания:

Начальную оценку $q_0=1+i_0$, требующуюся для начала итеративной процедуры следует выбирать такой, чтобы соответствующий ей множитель наращения был как можно ближе к заданному отношению S/R. Это сократит число итераций и обеспечит сходимость алгоритма.

Остановка вычислений осуществляется после того, как проверка, заключающаяся в сравнении множителя наращения и отношения S/R, свидетельствует об их совпадении с достаточной (наперед заданной) точностью.

Теперь будем считать, что известна современная стоимость A и найдена какая-то подходящая начальная оценка процентной ставки.

А) Постоянная годовая рента постнумерандо, проценты начисляются один раз в конце года, $p=1$, $m=1$.

Требуется решить уравнение вида

$$\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}=\frac{A}{R}=a_{n;i} \quad \text{или} \quad \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}-a_{n;i}=0.$$

Здесь также используем обозначение $q=1+i$, и после умножения обеих частей равенства на $(q-1)$ получим алгоритм уточнения оценки на каждом шаге k, состоящий из следующих трех операций:

$$f(q_k)=q_k^{-n}-1+\frac{A}{R}(q_k-1);$$

$$f'(q_k)=\frac{A}{R}-nq_k^{-(n+1)};$$

$$q_{k+1}=q_k-\frac{f(q_k)}{f'(q_k)}.$$

Б) Постоянная p-срочная рента постнумерандо, проценты начисляются один раз в конце года, $p>1$, $m=1$.

Требуется решить уравнение вида

$$\frac{1-(1+i)^{-n}}{p\left[(1+i)^{1/p}-1\right]}=\frac{A}{R}=a_{n;i} \quad \text{или} \quad \frac{1-(1+i)^{-n}}{p\left[(1+i)^{1/p}-1\right]}-a_{n;i}=0.$$

Сделав подстановку $q=1+i$, получим алгоритм уточнения оценки на каждом шаге k, состоящий из следующих трех операций:

$$f(q_k)=q_k^{-n}-1+\frac{A}{R}p\left(q_k^{1/p}-1\right);$$

$$f'(q_k)=-q_k^{(1/p)-1}-nq_k^{-(n+1)}$$

$$q_{k+1}=q_k-\frac{f(q_k)}{f'(q_k)}.$$

7. Другие виды постоянных рент

Вечная рента

Под вечной рентой понимается последовательность платежей, число членов которой не ограничено, то есть она выплачивается бесконечное число лет (например, выплаты по бессрочным облигационным займам). В этом случае наращенная сумма с течением времени возрастает бесконечно. А вот современная величина имеет вполне определенное конечное значение.

Рассмотрим, например, бесконечную постоянную годовую ренту постнумерандо.

В случае, когда $p=1$, $m=1$ при $n \to \infty$

$$\lim A=\lim R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}=\frac{R}{i}.$$

В общем случае, когда $p \geq 1, m \geq 1$ при $n \to \infty$

$$\lim A=R\frac{1-(1+j/m)^{-mn}}{p\left[(1+j/m)^{m/p}-1\right]}=\frac{R}{p\left[(1+j/m)^{m/p}-1\right]}.$$

Если же $p \geq 1, m \geq 1$ и $p=m$, то при $n \to \infty$

$$\lim A = R\frac{1-(1+j/m)^{-mn}}{p\left[(1+j/m)^{m/p}-1\right]} = \frac{R}{j}.$$

Отложенная рента

Начало отложенной (или отсроченной) ренты отодвигается от момента заключения сделки на какой-то момент в будущем. Наращенная сумма такой ренты может быть подсчитана по тем формулам, которые нам уже известны. А ее современную величину можно определить в два этапа: сначала найти современную величину соответствующей немедленной ренты (эта сумма характеризует ренту на момент начала ее срока), а затем с помощью дисконтирования этой величины по принятой ставке в течение срока задержки привести ее к моменту заключения договора.

Например, если современная величина годовой немедленной ренты равна A, то современная величина отложенной на t лет ренты составит

$$A_t = Av^t,$$

где v^t – дисконтный множитель за t лет, $v=1/(1+i)<1$

Рента пренумерандо

Рассмотрим теперь ренту, когда платежи производятся в начале каждого периода, – ренту пренумерандо. Различие между рентой постнумерандо и рентой пренумерандо заключается лишь в том, что у последней на один период начисления процентов больше. В остальном структура потоков с одинаковыми параметрами одинакова. Поэтому наращенные суммы обоих видов рент (с одинаковой периодичностью платежей и начисления процентов и размером выплат) тесно связаны между собой.

Если обозначить через $\ddot{S}$ наращенную сумму ренты пренумерандо, а через S, как и раньше, наращенную сумму соответствующей ренты постнумерандо, то в самом общем случае получим

$$\ddot{S} = S(1 + j / m)^{m/p}.$$

Точно также для современной величины ренты пренумерандо и соответствующей ей ренты постнумерандо имеем следующее соотношение

$$\ddot{A} = A(1 + j / m)^{m/p}.$$

Рента с платежами в середине периодов

Наращенная сумма $(S_{1/2})$ и современная стоимость $(A_{1/2})$ ренты с платежами в середине периодов и соответствующей ренты постнумерандо связаны так

$$S_{1/2} = S(1 + j / m)^{m/p} \quad \text{и} \quad A_{1/2} = A(1 + j / m)^{m/(2p)}.$$

8. Анализ переменных потоков платежей

Нерегулярный поток платежей

Временные интервалы между последовательными платежами в нерегулярном потоке могут быть любыми, не постоянными, любыми могут быть также и члены потока. Обобщающие характеристики в этом случае получают только путем прямого счета:

наращенная сумма $S = \sum_t R_t (1 + i)^{n-1}$,

современная величина $\sum_t R_t v^t$,

где t – время от начала потока платежей до момента выплаты, R – сумма платежа.

Переменная рента с разовыми изменениями размеров платежа

Пусть общая продолжительность ренты n и этот срок разбит на k участков продолжительностью $n_1, n_2, ..., n_k$, в каждом из которых член ренты постоянен и равен Rt, $t=1,2,...,k$ но изменяется от участка к участку.

Тогда наращенная сумма для годовой ренты постнумерандо ($p=1$, $m=1$)вычисляется по формуле

$$S = R_1 s_{n_1,i}(1+i)^{n-n_1} + R_2 s_{n_2,i}(1+i)^{n-(n_1+n_2)} + \ldots + R_k s_{n_k,i}$$

а современная величина как

$$A = R_1 a_{n_1,i} + R_2 a_{n_2,i} v^{n_1} + \ldots + R_k a_{n_k,i} v^{n-n_k}$$

Рента с постоянным абсолютным приростом платежей

Пусть размер платежей изменяется с постоянным приростом a (положительным или отрицательным). Если рента годовая постнумерандо, то размеры последовательных платежей составят $R, R+a, R+2a, \ldots, R+(n-1)a$. Величина t -го члена равна $R_t = R+(t-1)a$.

Тогда современная стоимость такой ренты равна

$$A = \left(R + \frac{a}{i}\right) a_{n;i} - \frac{nav^n}{i},$$

а наращенная сумма

$$S = \left(R + \frac{a}{i}\right) s_{n;i} - \frac{na}{i}.$$

В случае p -срочной ренты с постоянным приростом платежей $(m=1)$ последовательные выплаты равны $R, R+\frac{a}{p}, R+2\frac{a}{p}, \ldots, R+(pn-1)\frac{a}{p}$, где a — прирост платежей за год, R — первый платеж, то есть

$$R_t = R + (t-1)\frac{a}{p},$$

где t — номер члена ряда $t=1,2\ldots,np$.

Современная величина

$$A = \sum_{t=1}^{pn} \left(R + \frac{a(t-1)}{p}\right) v^{t/p},$$

а наращенная сумма

$$S=\sum_{t=1}^{pn}\left(R+\frac{a(t-1)}{p}\right)(1+i)^{n-t/p}.$$

Ренты с постоянным относительным изменением платежей

Если платежи годовой ренты изменяются с постоянным темпом роста q, то члены ренты будут представлять собой ряд: $R, R_q, ..., Rq^{n-1}$. Величина t-го члена равна $R_t = Rq^{t-1}$.

Для того чтобы получить современную величину, дисконтируем эти величины: $Rv, Rqv^2, ..., Rq^{n-1}v^n$. Мы получили геометрическую прогрессию.

Сумма этих величин равна

$$A=Rv\frac{q^n v^n-1}{qv-1}=R\frac{q^n v^n-1}{q-(1+i)}.$$

Наращенная сумма

$$S=A(1+i)^n=R\frac{q^n-(1+i)^n}{q-(1+i)}.$$

Для p - срочной ренты *(m=1)*:

$$A=R\frac{q^{np}v^n-1}{q-(1+i)^{1/p}};\ \ S=R\frac{q^{np}-(1+i)^n}{q-(1+i)^{1/p}}.$$

9. Конверсия аннуитетов

В практике иногда возникает необходимость изменить условия финансового соглашения, предусматривающего выплату аннуитетов, то есть конвертировать ренту. Рассмотрим некоторые типичные ситуации.

Выкуп ренты

Выкуп ренты представляет собой замену предстоящей последовательности выплат единовременным платежом. Из принципа финансовой эквивалентности следует, что в этом случае вместо ренты выплачивается ее современная величина.

Рассрочка платежей

Это замена единовременного платежа аннуитетом. Для соблюдения принципа финансовой эквивалентности современную величину ренты следует приравнять величине заменяемого платежа. Далее задача обычно сводится к определению члена ренты или ее срока при остальных заданных параметрах.

Замена немедленной ренты на отсроченную

Пусть имеется годовая немедленная рента с параметрами R_1, n_1, i и ее необходимо заменить на отсроченную на t лет ренту, то есть начало ренты сдвигается на t лет. Обозначим параметры отложенной ренты как R_2, n_2, i. Ставку процентов при этом будем считать неизменной. Тогда может быть два типа расчетных задач.

1. Задан срок n_2 требуется определить размер R_2.

Исходим из принципа финансовой эквивалентности результатов, то есть из равенства современных стоимостей заменяемого и заменяющего потоков: $A_1 = A_2$. Раскрывая это равенство, получаем

$$R_1 a_{n_1,i} = R_2 a_{n_2,i} v^{-t}$$

то есть

$$R_2 = R_1 \left(\frac{a_{n_1,i}}{a_{n_2,i}} \right) (1+i)^t .$$

В частном случае, когда $n_1 = n_2 = n$, решение упрощается и принимает следующий вид

$$R_2 = R_1 (1+i)^t .$$

2. Размеры платежей заданы, требуется определить срок n_2. Рассмотрим частный случай, когда платежи годовой ренты остаются теми же $R_2 = R_1 = R$.

Исходя из равенства современных стоимостей,

$$Ra_{n_1;i} = Ra_{n_2;i}v^{-t}$$

где $a_{n;i} = \dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$, последовательно приходим к выражению

$$n_2 = \frac{-\ln\left[1-\left(1-(1+i)^{-n_1}\right)(1+i)^t\right]}{\ln(1+i)}.$$

Изменение продолжительности ренты

Пусть имеется годовая обычная рента, и у партнеров есть договоренность об изменении срока ренты, то есть вместо срока n_1, принят новый срок n_1. Тогда для эквивалентости финансовых результатов требуется изменение и размера платежа. Найдем его из равенства

$$Ra_{n_1;i} = R_2a_{n_2;i},$$

из которого следует, что

$$R_2 = R_1\frac{a_{n_1;i}}{a_{n_2;i}} = R_1\frac{1-(1+i)^{-n_1}}{1-(1+i)^{-n_2}}.$$

Общий случай изменения параметров ренты

В случае одновременного изменения нескольких параметров ренты, исходим из равенства $A_1=A_2$. Если рассматривается годовая рента, то приводится к виду

$$A_1 = R_2\frac{1-\left(1+\dfrac{j_2}{m_2}\right)^{-m_2n_2}}{p_2\left[\left(1+\dfrac{j_2}{m_2}\right)^{-m_2p_2}-1\right]}\cdot\left(1+\frac{j_2}{m_2}\right)^{-tm_2}.$$

где A_1 подсчитывается заранее, t — период (возможной) отсрочки, ряд параметров задается по согласованию сторон, и один параметр находится из этого уравнения.

Объединение рент

В случае объединения (консолидации) нескольких рент в одну из принципа финансовой эквивалентности обязательств до и после операции следует, что

$$A = \sum_k A_k$$

где A – современная величина заменяющей ренты, A_k – современная величина k – ой объединяемой ренты.

Вопросы для самопроверки

1. Какими параметрами характеризуется финансовая рента?

2. Какими символами в формулах обозначаются параметры ренты?

3. Что такое постоянная рента?

4. Что такое переменная рента?

5. Что такое рента постнумерандо и рента пренумерандо?

6. Что такое немедленная и отложенная рента?

7. Каковы принципы эквивалентного пересмотра параметров ренты?

8. Что такое ограниченная и вечная рента?

9. Когда на практике применяются формулы расчета вечной ренты?

Задачи для практического занятия

1. Инвестиции производятся на протяжении 4 лет один раз в конце года по 2 млн. Ставка сложных процентов 17% годовых. Найти сумму инвестиций к концу срока.

2. Найти наращенную сумму годовой ренты, если проценты начисляются по номинальной ставке 16% ежемесячно, член ренты 50000, срок ренты 4 года.

3. Для формирования фонда ежеквартально делаются взносы по 100000, Проценты начисляются один раз в год по ставке 17%. Найти величину накопленного фонда к концу пятилетнего срока.

4. Для формирования фонда ежеквартально делаются взносы по 100 000. Проценты начисляются ежемесячно по номинальной ставке 17%. Найти величину накопленного фонда к концу пятилетнего срока. Полученную сумму сравните с результатом предыдущей задачи.

5. Инвестиции производятся на протяжении 4 лет один раз в конце года по 2 млн. Ставка сложных процентов 17% годовых. Найти современную стоимость инвестиций.

6. Найти современную стоимость годовой ренты, если проценты начисляются по номинальной ставке 16% ежемесячно, член ренты 50000, срок ренты 4 года.

7. Для формирования фонда ежеквартально делаются взносы по 100 000. Проценты начисляются один раз в год по ставке 17%. Найти современную стоимость фонда, который будет накоплен к концу пятилетнего срока.

8. Для формирования фонда ежеквартально делаются взносы по 100000. Проценты начисляются ежемесячно по номинальной ставке 17%. Найти современную стоимость фонда, накопленного к концу пятилетнего срока. Полученную сумму сравните с результатом предыдущей задачи.

9. Определите размер равных ежегодных взносов, которые необходимо делать для погашения долга через 3 года в размере 1 млн., если ставка сложных процентов 17% годовых.

10. Определите размер равных ежегодных взносов, которые необходимо делать для погашения в течение 3 лет текущего долга в размере 1 млн., если ставка сложных процентов 17% годовых.

11. За счет привлеченных средств сделаны инвестиции в размере 10 млн. Расчетная отдача от них составляет по 2,2 млн в конце каждого года. За какой срок окупятся инвестиции, если на долг начисляются проценты по квартальной ставке 4%?

12. При какой минимальной ставке процентов удастся за 5 лет создать фонд в 1 млн., если ежемесячные взносы

планируются в размере 10 тыс. Задачу решить методом линейной интерполяции.

13. При какой минимальной ставке процентов удастся за 5 лет создать фонд в 1 млн., если ежемесячные взносы планируются в размере 10 тыс. Задачу решить методом Ньютона-Рафсона.

14. Кредит в объеме 200 млн. выдается на 50 мес. под 18% годовых. Контракт предусматривает погашение кредита и процентов по нему равными ежемесячными платежами. Начисление процентов также ежемесячное. Рассчитайте размер каждого такого платежа, дайте разбивку этих платежей на сумму погашения и на сумму процентов. Постойте график изменения долга во времени.

15. Кредит в размере 200 млн. выдается на 50 месяцев под 18% годовых. Контракт предусматривает погашение кредита равными суммами ежемесячно и начисление процентов также помесячно на остаток долга. Рассчитайте ежемесячные погасительные платежи, идущие на обслуживание долга. Постройте график погасительных платежей. Сравните поток платежей с потоком предыдущей задачи.

16. Договор предусматривает выплату взносов в течение 5 лет, увеличивая их каждый год на 2 млн. Первый взнос составляет 10 млн. Ставка равна 18% годовых. Платежи и начисление процентов производится один раз в конце каждого года. Найдите современную величину ренты и наращенную величину фонда в конце срока.

17. Платежи увеличиваются в течение 2 лет ежеквартально на 25 тыс. руб. Первый взнос 100 тыс. руб. Проценты начисляются по годовой ставке 16% ежеквартально. Чему равна современная стоимость и наращенная сумма платежей.

18. Кредит дан в размере 20 млн. на 3 года, который предполагается погашать по схеме ренты с постоянным приростом платежей. Платежи и начисление процентов на остаток долга производятся один раз в конце каждого

года, ставка 16% годовых. Величина прироста составляет j от размера первого платежа. Определить размеры платежей в конце каждого года, то есть составьте план (график) погашения долга.

19. Кредит предоставлен в размере 10 млн. на срок 3 года, под ставку 18% годовых. Погасительные платежи предполагаются один раз в конце каждого года, проценты также начисляются один раз в год. Первый платеж установлен в размере 2 млн. Остальные возрастают постоянным темпом. Определить размеры всех платежей, проверить точность расчетов, если потребуется, уточните последний платеж.

20. Кредит предоставлен в размере 10 млн. на срок 3 года под ставку 18% годовых. Погасительные платежи предполагаются в конце каждого месяца, проценты также начисляются помесячно. Первый платеж согласован в размере 200 тыс. Остальные возрастают постоянным темпом. Определить все платежи. Проверить точность расчетов, если нужно, скорректируйте последний платеж.

21. Замените эквивалентным образом годовую ренту постнумерандо с платежами по 1 млн., сроком 3 года, на отложенную на 1 год ренту с тем же сроком выплат. Ставка 18% годовых.

22. Замените эквивалентным образом годовую ренту постнумерандо с платежами по 2 млн., сроком 3 года, на отложенную на 2 года ренту с теми же ежегодными платежами. Ставка 18% годовых. В случае необходимости, скорректируйте последний платеж.

Ответ: Срок выплат в новом договоре после его округления составляет 5 лет, последний платеж (после корректировки) должен быть 1 764 676,39.

23. Задан следующий денежный поток инвестиционного проекта (в тыс.):

Годы	1	2	3	4	5
Суммы	-100	-200	50	200	200

Рассчитайте чистую приведенную стоимость (NPV) этого проекта, если ставка сравнения равна 15%, все суммы выплачиваются и поступают в конце года.

24. Найдите индекс рентабельности (PI) для инвестиционного проекта, денежный поток которого и ставка сравнения представлены в задаче 106. Дайте интерпретацию полученного результата.

25. Определите внутреннюю норму доходности для проекта со следующим потоком платежей постнумерандо в тыс.

Годы					
1	2	3	4	5	6
-150	-250	100	150	150	150

26. За счет привлеченных средств сделаны инвестиции в размере 10 млн. расчетная отдача от них составляет по 2,2 млн в конце каждого года. За какой срок окупятся инвестиции, если на долг начисляются проценты по квартальной ставке 4%?

27. При какой минимальной ставке процентов удастся за 5 лет создать фонд в 1 млн., если ежемесячные взносы планируются в размере 10 тыс. Задачу решить методом линейной интерполяции.

28. При какой минимальной ставке процентов удастся за 5 лет создать фонд в 1 млн., если ежемесячные взносы планируются в размере 10 тыс. Задачу решить методом Ньютона-Рафсона.

29. Кредит в объеме 200 млн. выдается на 50 мес. под 18% годовых. Контракт предусматривает погашение кредита и процентов по нему равными ежемесячными платежами. Начисление процентов также ежемесячное. Рассчитайте размер каждого такого платежа, дайте разбивку этих платежей на сумму погашения и на сумму процентов. Постойте график изменения долга во времени.

30. Кредит в размере 200 млн. выдается на 50 месяцев под 18% годовых. Контракт предусматривает погашение кредита равными суммами ежемесячно и начисление процентов также помесячно на остаток долга. Рассчитайте ежемесячные погасительные платежи, идущие на обслуживание долга. Постройте график погасительных платежей. Сравните поток платежей с потоком предыдущей задачи.

31. Договор предусматривает выплату взносов в течение 5 лет, увеличивая их каждый год на 2 млн. Первый взнос составляет 10 млн. Ставка равна 18% годовых. Платежи и начисление процентов производятся один раз в конце каждого года. Найдите современную величину ренты и наращенную величину фонда в конце срока.

32. Платежи увеличиваются в течение 2 лет ежеквартально на 25 тыс. руб. Первый взнос 100 тыс. руб. Проценты начисляются по годовой ставке 16% ежеквартально. Чему равна со временная стоимость и наращенная сумма платежей.

33. Кредит дан в размере 20 млн. на 3 года, который предполагается погашать по схеме ренты с постоянным при ростом платежей. Платежи и начисление процентов на остаток долга производятся один раз в конце каждого года, ставка 16% годовых. Величина прироста составляет j от размера первого платежа. Определить размеры платежей в конце каждого года, то есть составьте план (график) погашения долга.

34. Кредит предоставлен в размере 10 млн. на срок 3 года, под ставку 18% годовых. Погасительные платежи предполагаются один раз в конце каждого года, проценты также начисляются один раз в год. Первый платеж установлен в размере 2 млн. Остальные возрастают постоянным темпом. Определить размеры всех платежей, проверить точность расчетов, если потребуется, уточните последний платеж.

35. Кредит предоставлен в размере 10 млн. на срок 3 года под ставку 18% годовых. Погасительные платежи предполагаются в конце каждого месяца, проценты также

начисляются помесячно. Первый платеж согласован в размере 200 тыс. Остальные возрастают постоянным темпом. Определить все платежи. Проверить точность расчетов, если нужно, скорректируйте последний платеж.

36. Замените эквивалентным образом годовую ренту постнумерандо с платежами по 1 млн. руб., сроком 3 года, на отложенную на 1 год ренту с тем же сроком выплат. Ставка 18% годовых.

37. Замените эквивалентным образом годовую ренту постнумерандо с платежами по 2 млн., сроком 3 года, на отложенную на 2 года ренту с теми же ежегодными платежами. Ставка 18% годовых. В случае необходимости, скорректируйте последний платеж.

Ответ: Срок выплат в новом договоре после его округления составляет 5 лет, последний платеж (после корректировки) должен быть 1 764 676,39.

38. Дана вечная рента с годовым платежом R при ставке процента i. Известно, что ее современная величина, т.е. в момент $t = 0$, равна R/i. Найдите ее величину в произвольной момент $t > 0$. При каком t эта величина максимальна, минимальна?

39. Провести детальный анализ ренты длительностью 4 года, годовым платежом $R = 1000$ д.е. и переменной процентной ставкой: $i_2 = 5\%$ во 2-й год, $i_3 = 8\%$ – в 3-й, $i_4 = 10\%$ – в 4-й год. Определить современную величину этой ренты. Расчеты провести для простой и сложной процентных ставок.

40. Для ренты с параметрами: годовая ставка процента – $i = 12\%$, годовой платеж $R = 400$ д.е., длительность ренты $n = 6$ лет, получить следующие ее характеристики: коэффициенты приведения и наращения; современную и наращенную величины. Расчеты провести для простой и сложной процентных ставок.

§5. КРЕДИТНЫЕ ОПЕРАЦИИ

Доходы от финансово-кредитных операций и различных коммерческих сделок могут представать в виде: процентов, комиссионных, дисконта при учете векселей, дохода от ценных бумаг (дивиденда, платежа по купону, курсовой разности). Причем в одной операции может быть предусмотрено несколько видов дохода.

Отметим, что при получении кредита должник может оплачивать комиссионные или другие разовые расходы (посреднику), которые увеличивают цену кредита, но не меняют доходность кредитора.

1. Долгосрочные кредиты

Рассмотрим баланс долгосрочной финансово-кредитной операции, используя контур финансовой операции (начисление процентов по сложной ставке).

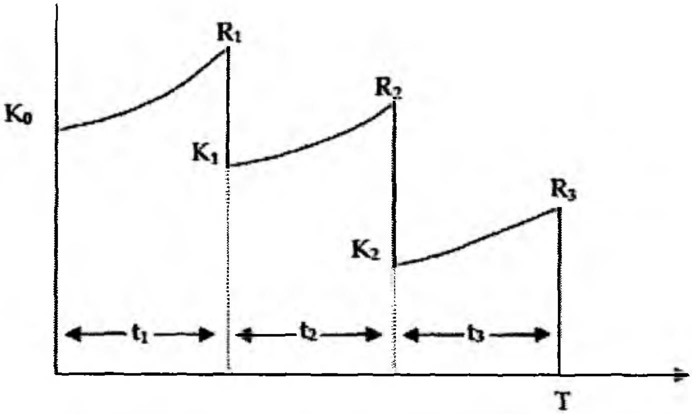


Рис. 1. Контур кредитной операции.

Для контура, показанного на рис. 1, получим следующие расчетные формулы

$$K_1 = K_0 \left(1+i\right)^{t_1} - R_1,$$

$$K_2 = K_1(1+i)^{t_2} - R_2,$$

$$K_2(1+i)^{t_3} - R_3 = 0,$$

где K_0 — первоначальная сумма долга, R_1 и R_2 - промежуточные платежи, R_3 — последний платеж. Последнее уравнение является балансовым. Выразим K_2 через K_0 и подставим его в балансовое уравнение

$$\left(\left(K_0 q^{t_1} - R_1\right) q^{t_2} - R_2\right) q^{t_3} - R_3 = 0,$$

которое нетрудно привести к следующему виду

$$K_0 q^T - \left(R_1 q^{t_2+t_3} + R_2 q^{t_3} + R_3\right) = 0,$$

где

$$T = \sum t_j, \quad q = \frac{1}{1+i}.$$

В этом уравнении методологически ясно представлены два процесса: наращение первоначальной задолженности за весь период и наращение погасительных платежей за срок от момента платежа до конца срока операции. Таким образом, полученное уравнение отражает баланс сумм, наращенных на момент времени T. Умножим это уравнение на дисконтный множитель v^T

$$K_0 - \left(R_1 v^{t_1} + R_2^{t_1+t_2} + R_3 v^T\right) = 0,$$

В этом виде уравнение выражает равенство суммы современных величин погасительных платежей сумме кредита, то есть баланс современных величин.

Эти уравнения нетрудно обобщить на случай n погасительных платежей. Методы оценки показателей доходности для разных видов ссудно-кредитных операций основываются на соответствующем балансовом уравнении. Если погасительные платежи осуществляются периодически постоянными или переменными суммами, то они образуют постоянную или переменную ренту, параметры которых могут быть рассчитаны обычным образом.

2. Доходность ссудных и учетных операций, предполагающих удержание комиссионных

Ссудные операции

За открытие кредита, учет векселей и другие операции кредитор часто взимает комиссионные, которые повышают доходность операций, так как размер фактически выданной ссуды сокращается.

Пусть ссуда в размере D выдана на срок n, и при ее выдаче из нее удерживаются комиссионные в размере G. Фактически выданная ссуда равна $D-G$.

Рассмотрим сначала сделки с начислением простых процентов по ставке i. Обозначим через $i_{э,пр}$ – фактическую доходность, выраженную через ставку простых процентов, и пусть g – относительная величина комиссионных в сумме кредита, то есть $G=Dg$. Тогда из балансового уравнения

$$D(1-g)(1+ni_{э,пр})=D(1+ni)$$

Теперь рассмотрим долгосрочную операцию, когда ссуда с удержанием комиссионных выдается под сложные проценты. Тогда балансовое уравнение имеет вид

$$(D-G)(1+i_{ý,в})^n=D(1+i)^n,$$

$$(D-G)(1+i_{э,сл})^n=D(1+i)^n \quad \text{так как} \quad G=Dg.$$

Откуда

$$i_{э,сл}=\frac{1+i}{\sqrt[n]{1-g}}-1.$$

Учетные операции

Рассмотрим полную доходность банка при осуществлении операции учета с удержанием комиссионных.

Пусть при учете применяется простая учетная ставка. После удержания комиссионных и дисконта заемщик получает сумму $D\text{-}Dnd\text{-}G$. Если $G=Dg$, то эта сумма составит $D(1\text{-}nd\text{-}g)$. Балансовое уравнение принимает вид

$$D(1-nd-g)(1+ni_{э,\,пр})=D.$$

Откуда полная доходность

$$i_{э,\,пр}=\frac{1}{(1-nd-g)n}-\frac{1}{n}.$$

3. Форфейтная кредитная операция

Эта операция получила распространение во внешней торговле, но может применяться и во внутренней торговле страны. Потребность в такой операции возникает когда покупатель приобретает товар, не имея соответствующих денежных средств, а продавец также не может продать товар в кредит. Тогда в рамках форфейтной операции покупатель выписывает комплект векселей на сумму, равную стоимости товара плюс проценты за кредит, который формально предоставляется покупателю продавцом. Сроки векселей равномерно распределены во времени обычно через равные интервалы (полугодия). Продавец сразу же после получения портфеля векселей учитывает его в банке без права оборота на себя, получая полностью деньги за свой товар. Банк, форфетируя сделку, берет весь риск на себя. Иногда в качестве четвертого агента сделки может выступать банк покупателя, гарантирующий погашение задолженности по векселям. Поскольку платежи по векселям представляют собой постоянную ренту, то и расчет таких операций опирается на уже полученные нами результаты.

4. Ипотечные ссуды

Ссуды под залог недвижимости являются одним из важных источников долгосрочного финансирования. В такой сделке владелец имущества получает ссуду у залогодержателя и в качестве обеспечения возврата долга передает последнему право на преимущественное удовлетворение своего требования из стоимости заложенного имущества в случае отказа от погашения или неполного погашения задолженности. Сумма ссуды обычно несколько меньше оценочной стоимости закладываемого имущества. В США, например, запрещено, за некоторыми исключениями, выдавать ссуды, превышающие 80% оценочной стоимости имущества. Наиболее распространенными объектами залога являются жилые дома, фермы, земля, другие виды недвижимости. Ипотечные ссуды выдаются коммерческими банками и специальными ипотечными банками, судно-сберегательными ассоциациями. Характерной особенностью ипотечных ссуд является длительный срок погашения – в США до 30 и более лет. Поскольку платежи по обслуживанию долга, то есть по уплате процентов и погашению предоставленного кредита, являются регулярными, то и расчет ипотеки сводится к расчету параметров того или иного вида ренты. Основной задачей расчета является разработка планов погашения и остатка задолженности на любой момент времени.

Существует несколько видов ипотечных ссуд, различающихся в основном методами погашения задолженности.

Стандартная ипотека

Наиболее распространена стандартная или типовая ипотечная ссуда, существо которой сводится к тому, что заемщик получает от залогодержателя, то есть кредитора, некоторую сумму под залог недвижимости. Этот кредит он погашает вместе с процентами, равными обычно ежемесячным взносам.

Ссуды с ростом платежей

В этом случае предусматривается постоянный рост расходов по обслуживанию долга в первые 5—10 лет. Затем погашение производится постоянными взносами. Расчет сводится к применению формул для рент с переменными и постоянными платежами в соответствующие интервалы времени.

Ссуды с периодическим увеличением взносов

По согласованному графику каждые 3—5 лет сумма взносов увеличивается. Таким образом, поток платежей представляет собой последовательность постоянных рент.

Ссуда с льготным периодом

В такой ипотеке предполагается наличие льготного периода, в течение которого выплачиваются только проценты по долгу.

Ссуда с залоговым счетом

В этой схеме предполагается, что клиент в начале операции вносит на специальный (залоговый) счет некоторую сумму денег. На начальных этапах он выплачивает кредитору погасительные взносы, которые меньше тех, что необходимы по стандартной ипотеке. Недостающие суммы добавляются путем списания с залогового счета, пока он не иссякнет. Таким образом кредитор все время получает постоянные взносы, как и в стандартной ипотеке. А взносы должника характеризуются ростом во времени.

Ссуды с периодическим изменением процентной ставки

Эта схема предполагает, что стороны каждые 3—5 лет пересматривают уровень процентной ставки с целью адаптации к условиям рынка.

Ссуда с переменной процентной ставкой

Здесь уровень ставки привязывается к какому-либо распространенному финансовому показателю или индексу. Пересмотр обычно осуществляется по полугодиям. Чтобы избежать чрезмерных скачков, предусматривается верхняя и нижняя границы разовых корректировок (например, не более 2%).

Ипотека с обратным аннуитетом

Предназначена для заклада домов пожилыми владельцами (продажа в рассрочку с правом дожития). Цель такого залога – получение систематического дохода владельцем жилища.

5. Льготные займы и кредиты

В ряде случаев долгосрочные займы и кредиты выдаются на льготных для заемщика условиях. Низкая процентная ставка по сравнению с рыночной в сочетании с большим сроком и наличием льготного периода дают должнику существенную выгоду, которую можно рассматривать как субсидию. Такая субсидия оказывается как на международном уровне в рамках финансовой помощи развивающимся странам, так и внутри страны для поддержки отдельных отраслей или производств. Проблема определения размера этой помощи сводится к оценке грант-элемента.

Грант-элемент – это условная субсидия кредитора, связанная с применением более низкой процентной ставки. Грант-элемент определяется в двух видах: в виде абсолютной и относительной величины.

Абсолютный грант-элемент рассчитывается как разность суммы займа и современной величины платежей по погашению займа. Проблема здесь состоит в выборе ставки процентов для расчета современной величины платежей. Обычно используют ставку, применяемую на рынке долгосрочных кредитов.

Абсолютный грант-элемент находится как

$$W = D - G,$$

А относительный грант-элемент как

$$w = \frac{W}{D} = 1 - \frac{G}{D},$$

где W – абсолютный грант-элемент, W – относительный грант-элемент, D – сумма кредита,

G – современная величина платежей, рассчитанная по реальной ставке рынка кредитов.

Вопросы для самопроверки

1. Покажите, как основные формулы расчета параметров рент могут быть применены для расчета долгосрочных кредитных операций.

2. Как построить рейтинг коммерческих операций с различными условиями кредитования?

3. Как определить истинную цену потребительского кредита?

4. Как найти предельные значения параметров коммерческого контракта, обеспечивающие конкурентоспособность?

5. В чем сущность операции а'форфэ?

6. В чем состоит позиция продавца?

7. В чем состоит позиция покупателя и банка?

8. Какие виды схем ипотечного кредита вы знаете?

9. Чем в основном отличаются нестандартные ипотеки от стандартной?

10. В чем особенности ипотеки в Республике Узбекистан?

11. Что такое льготный заем?

12. Что такое абсолютный грант-элемент и как он рассчитывается?

13. Что такое относительный грант-элемент и как он вычисляется?

14. Что такое реструктурирование займа, в каких случаях оно проводится и какими методами?

Задачи для практического занятия

1. *Равные срочные уплаты.* Кредит в размере 900000 сроком на 4 года взят под ставку 5% годовых. Составить план погашения равными срочными уплатами.

2. *Равные выплаты по долгу.* Долг в сумме 1000000 требуется погасить за 5 лет равными суммами, выплачиваемыми

в конце года. За заем начисляются проценты по годовой ставке 10%. Составить план погашения.

3. *Погашение кредита потоком платежей.* Долг в 100000 долл. решено погасить по специальному графику за 4 года. Ежегодные платежи по первым трем голам определены в размере 40000, 20000 и 30000 долл. Ставка процента по долгу установлена на уровне 10%. Определите:

а) остаток долга на конец третьего (начало четвертого) года;

б) величину четвертой срочной уплаты;

в) чему равны ежегодные суммы погашения долга и процентов.

4. *Определение срока, на который берется кредит.* Для выхода на полную мощность предприятие нуждается в кредите на пополнение оборотного капитала. Требуемая сумма – 7000000, доступная кредитная ставка – 12% годовых, длительность операционного цикла (время оборота оборотного капитала) – 1 месяц. Кредит планируется погасить одним платежом. Для получения необходимой для этого суммы предполагается использовать чистую прибыль в размере 1420000 в месяц, которую будет получать предприятие в режиме полной загрузки. В качестве способа накопления этой суммы формируется погасительный фонд с начислением процентов один раз в году по той же ставке 12%. Определить допустимый для предприятия срок заимствования средств.

5. *Потребительский кредит.* Покупатель приобрел в кредит холодильник по цене 4000 руб. При оформлении кредита он внес 1000, обязавшись погасить остальное в течение 6 месяцев, делая ежемесячно равные взносы. Определить:

а) сумму, которую покупатель должен выплачивать ежемесячно, если продавец требует за кредит 6% в год;

б) реальную доходность кредитной операции для продавца при условии, что имеется возможность помесячного реинвестирования;

в) рассчитать график погашения процентов и основного долга.

6. *Стандартная ипотека.* Ипотечная ссуда в размере 300000 выдана сроком на 15 лет. Погашение – в конце каждого месяца, номинальная годовая ставка – 12%. Определить сумму ежемесячного платежа и остаток долга на конец пятого года погашения.

7. *Замена одного займа другим.* Заемщик в течение 5 лет должен один раз в квартал выплачивать 500 у.е. в счет погашения ссуды, взятой под 8% годовых. В связи с отъездом за границу через 2 года он попросил пересчитать величину ежеквартальной выплаты, чтобы успеть рассчитаться. Как изменится величина квартального платежа?

8. *Реструктуризация кредиторской задолженности.* В настоящее время обязательство заемщика перед кредитором составляет 1000 у.е. Финансовое состояние предприятия должника не позволяет ему погасить эту задолженность по предусмотренной кредитным договором ставке в %% даже с рассрочкой в 4 года. Вместе с тем при снижении ставки до 5% отсрочка в погашении кредита по схеме равных срочных уплат возможна и выплачиваемые предприятием средства не нарушают нормальных условий его функционирования. Кредитор согласился на выплаты по льготной ставке. Определить общие потери кредитора, т. е. величину предоставленной заемщику льготы.

9. *Ссуда с удержанием комиссионных.* При выдаче ссуды на 180 дней под 10% годовых по простой ставке кредитором удержаны комиссионные в размере 0,5% суммы кредита. Какова эффективность ссудной операции в виде годовой ставки сложных процентов при условии, что год равен 360 дням?

10. *Авансовое удержание процентов.* При выдаче кредита на 60 дней под 30% годовых по простой ставке кредитором в момент предоставления кредита были удержаны

причитающиеся ему проценты. Номинальная величина кредита составляет 60000. Каковы реальная сумма ссуды и доходность кредитной операции?

11. *Сравнение коммерческих контрактов.* Судостроительная фирма предложила два варианта оплаты стоимости заказа 8000000:

а) 5% – при заключении контракта, 5% – при спуске судна на воду (через год), далее в течение 5 лет равные расходы по обслуживанию долга:

б) 5% – при заключении контракта, 10% основного долга и выплата процентов на остаток при спуске судна на воду (через год), затем погашение задолженности в течение 8 лет равными расходами.

Пусть процент за кредит одинаков в обоих случаях – 10% (годовая ставка сложного процента). Выберите предпочтительный для покупателя контракта (заемщика) вариант при условии, что ставка сравнения, на которую он ориентируется, равна 15%.

12. По условиям контракта доходность кредита должна составлять 24% годовых. Каков должен быть размер номинальной ставки при начислении процентов:

а) ежемесячно;

б) поквартально?

13. Контракт между фирмой А и банком В предусматривает, что банк предоставляет в течение 3 лет кредит с ежегодными платежами в размере 1000000 в начале каждого года под ставку 10% годовых. Фирма возвращает долг, выплачивая 1300000; 1500000 и 2000000 в конце 3-го. 4-го и 5-го годов. Приемлема ли эта операция для банка и если да, то каков его выигрыш?

14. Предполагается, что в фонд погашения долга Д = 10000 долл. средства поступают и конце каждого года течение 5 лет. На средства погасительного фонда начисляются проценты по ставке $i=10\%$, ставка по кредиту $j=9,5\%$. Предусматривается, что платежи каждый раз

увеличиваются на 500 долл. Необходимо разработать план формирования фонда погашения.

15. Пусть долг, равный 100000, необходимо погасить равными суммами за 5 лет, платежи в конце года. За заем выплачиваются проценты по ставке 5%. Составить план погашения долга.

16. Заем 200000 взят на 10 лет под 8% годовых. Погашаться будет, начиная с конца 6-го года ежегодными равными выплатами. Найти размер этой выплаты.

17. Ссуда в 30500 выдана в 2004 г. 1 января по сложной ставке 10% годовых. Заемщик обязан вернуть долг, выплачивая 8000, 16500 и 6500 последовательно 15.03, 07.07 и 21.10 того же года. Кто при такой схеме погашения кредита оказывается в проигрыше: кредитор или должник, и насколько?

18. По контракту произведенная продукция стоимостью 2000000, оплачивается в рассрочку ежеквартально в течение 5 лет с начислением сложных процентов на оставшуюся сумму долга по годовой процентной ставке 0,12. Определить величины равных платежей, если начало оплаты продукции:

а) перенесено на полгода после подписания контракта;

б) отложено на 2 года;

в) в п. «а» изменяется число платежей в году, а именно они проводятся каждые полгода;

г) в п. «б» отсрочка сопровождается сокращением срока оплат до 4 лет.

19. Кредит в 20000000 выдан на 2 года под ставку 10%. Согласно договору все проценты должны быть выплачены одной суммой в начале срока. Определить:

а) план погашения с минимальным числом выплат;

б) может ли срочная уплата второго года равняться 10000000?

20. При выдаче ссуды на 180 дней под 8% годовых кредитором удержаны комиссионные в размере 0,5%

суммы кредита. Какова эффективность ссудной операции в виде годовой ставки сложных процентов? В пределах года начисление идет по простому проценту, кредитному году соответствует временная база в 360 дней.

21. Покупатель приобрел телевизор стоимостью 3600. При этом он сразу уплатил 25% стоимости, а на оставшуюся сумму получил кредит на 6 месяцев под 20% годовых по простой ставке. Кредит погашается ежемесячными платежами. Требуется:

а) составить план погашения с помощью правила числа 78;

б) составить план погашения равными суммами по основному долгу и выплатой процентов, начисляемых на его оставшуюся часть;

в) определить, какая из двух схем предпочтительнее для должника и чему равна его ежемесячные переплаты по невыгодной схеме.

22. Потребительский кредит выдан на 3 года на сумму 10000 долл. по поставке 10% годовых. Определить доходность этой ссуды в виде годовой ставки сложного процента.

23. ЗАО 2 октября 2002 г. реализовало товар в кредит по простой ставке 17,5% годовых на сумму 3240000 с оформлением векселя на срок погашения 12 января 2003 г. Через 60 дней векселедержатель обратился в банк для проведения операции по учету векселя. Банк предложил учесть вексель по простой дисконтной ставке равной 21,25%. Определить:

а) сумму, полученную фирмой за проданный товар;

б) сколько средств заработает банк в результате сделки с векселедержателем;

в) чему равна доходность операции учета в виде простой годовой ставки.

§6. ПОТОКИ ПЛАТЕЖЕЙ В ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

1. Определение оптимального уровня денежных средств

Денежные средства предприятия включают в себя деньги в кассе и на расчетном счете в коммерческих банках. Эти средства необходимы предприятию в денежной форме для осуществления текущих платежей по поставкам сырья, оборудования, услуг. В качестве цены за поддержание необходимого уровня денежных средств принимают возможный (упущенный) доход от инвестирования среднего остатка в государственные ценные бумаги, как в безрисковые. Таким образом, встает задача определения оптимального запаса денежных средств, минимизирующего издержки, связанные с поддержанием уровня ликвидности. Для решения этой задачи часто применяются модели, разработанные в теории управления. На Западе наибольшее распространение получили модель Баумоля и Модель Миллера-Орра.

Модель Баумоля

Предполагается пилообразный график изменения остатка средств на расчетном счете предприятия, см. рис. 1.

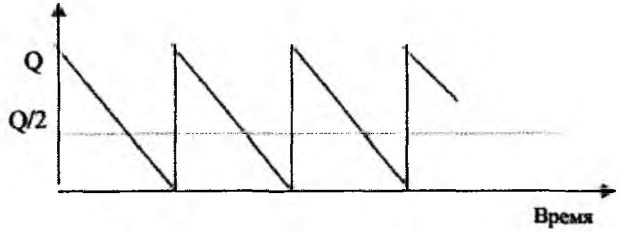


Рис. 1. Остаток средств на расчетном счете предприятия.

Предприятие начинает работать, имея некоторый разумный запас денежных средств Q. Затем расходует их в течение некоторого периода времени. Все средства, поступающие от реализации товаров и услуг, предприятие вкладывает в краткосрочные ценные бумаги. Как только запас денежных средств достигает нулевого или минимально допустимого уровня, предприятие продает ценные бумаги с тем, чтобы восстановить первоначальный запас денежных средств Q.

Алгоритм расчета следующий.

Сумма Q вычисляется по формуле

$$Q=\sqrt{\frac{2Vc}{r}},$$

где V – прогнозируемая потребность в денежных средствах в периоде (годе),

c – расходы по конвертации ценных бумаг в денежные средства,

r – процентный доход по краткосрочным вложениям в ценные бумаги.

Средний запас денежных средств составляет $\frac{Q}{2}$, а общее количество сделок по конвертации ценных бумаг в денежные средства за период равно $K=\frac{V}{Q}$.

Общие расходы по реализации такой политики управления денежными средствами составят $R=ck+r\frac{Q}{2}$.

Модель Миллера-Орра

Недостаток предыдущей модели в том, что в ней предполагается равномерный расход денежных средств. В действительности такое встречается редко. В модели, разработанной Миллером и Орром, исходят из того, что предсказать каждодневный отток и приток денежных средств невозможно. Авторы используют при построении модели процесс Бернулли – стохастический процесс, в котором поступление и расходование денег от периода к периоду являются независимыми случайными событиями, управление остатком средств на р/с может быть проиллюстрировано на графике, см. рис. 2.

Рис. 2. Управление запасом денежных средств на р/с.

Остаток средств на расчетном счете хаотически меняется до тех пор, пока не достигает верхнего предела Q_B. В этот момент предприятие начинает покупать ценные бумаги с тем, чтобы вернуть запас денежных средств к нормальному уровню (к точке возврата $T_в$). Если запас достигает нижнего предела Q_H, то предприятие продает свои ценные бумаги пока не восстановит нормальный уровень запаса.

Алгоритм построения модели складывается из следующих шагов.

1. Экспертным путем задается минимальный предел денежных средств Q_H.

2. По статистическим данным определяется дисперсия V ежедневных колебаний денежного потока.

3. Определяются расходы P_x по хранению средств на р/с, обычно их выражают в виде ставки ежедневного дохода по краткосрочным ценным бумагам, и расходы P_m по взаимной трансформации денежных средств и ценных бумаг – операционные издержки (предполагаются постоянными).

4. Рассчитывается размах вариации остатка

$$S = 3\sqrt[3]{\frac{3P_m V}{4P_x}}$$

5. Рассчитывают верхнюю границу денежных средств на р/с

$$Q_в = Q_н + S.$$

6. Определяют точку возврата $T_в$ – нормальный уровень запаса

$$T_в = Q_н + \frac{S}{3}.$$

2. Показатели эффективности производственных инвестиций

В инвестиционном процессе имеется два потока: потока инвестиций и последовательное получение дохода. Эти два потока могут следовать один за другим, между ними может быть некоторый разрыв или наложение во времени. При изучении эффективности инвестиций оба эти потока могут рассматриваться и сопоставляться по отдельности или как одна последовательность. В последнем случае инвестиционные расходы включаются в поток с отрицательным знаком.

Под чистым доходом понимают общий доход (выручку), полученный в каждом временном отрезке, за вычетом всех платежей, связанных с его созданием и получением. В эти платежи входят прямые и косвенные расходы по оплате труда и материалов, налоги. Элемент объединенного потока инвестиций и доходов в момент t определяется следующим образом:

$$R_t = (G_t - C_t) - (G_t - C_t - D_t)T - K_t + S_t,$$

где R_t – элемент потока наличности,

G_t – ожидаемый брутто-доход от реализации проекта, например, объем выручки от продажи продукции,

C_t – общие текущие расходы, прямые и косвенные (амортизационные отчисления сюда не включаются),

D_t – расходы, на которые распространяются налоговые льготы,

T – налоговая ставка,

K_t – инвестиционные расходы,

S_t – различные виды компенсаций, дотаций.

Если же проект предполагает привлечение заемных средств, то в денежном потоке следует учесть получение кредитов и затраты на обслуживание долга (то есть погашение кредитов и выплат) процентов). Тогда элемент потока наличности в периоде t будет рассчитываться как

$$R_t = (G_t - C_t + B_t - P_t - I_t) - (G_t - C_t - D_t - I_t)T - K_t + S_t,$$

где B_t – полученные в периоде t заемные средства,

P – погашение основного долга в периоде t,

I_t, – сумма выплаченных в периоде t процентов.

В приведенной формуле предполагается, что выплата процентов за кредит снижает налогооблагаемую базу.

Анализ производственных инвестиций в основном заключается в оценке и сравнении эффективности альтернативных инвестиционных проектов. В качестве измерителей обычно используются характеристики, основанные на дисконтировании потоков ожидаемых поступлений и расходов и приведении их к одному моменту времени. Ставку, по которой производится дисконтирование, называют ставкой сравнения. При выборе ставки сравнения ориентируются на существующий или ожидаемый уровень ссудного процента и корректируют ее с учетом ожидаемого риска. Ясно, что будущая ставка является не вполне определенной величиной, поэтому расчеты носят условный характер и могут выполняться не для одного, а для нескольких значений ставки.

В финансовом анализе обычно применяют четыре показателя эффективности инвестиций:

1. чистый приведенный доход (ЧПД, по-английски *NPV* – Net Present Value),

2. срок окупаемости (payback period),

3. внутренняя норма доходности (Internal Rate of Return – IRR),

4. индекс рентабельности (profitability index PI).

Чистый приведенный доход

Этот показатель часто считается основным. Будем обозначать его как NPV. Эта величина характеризует конечный абсолютный результат, рассчитываемый как разность дисконтированных на один момент времени показателей дохода и капиталовложений, то есть

$$NPV = \sum R_t v^t,$$

где R_t – член потока платежей (объединенного потока инвестиций и доходов),

v – дисконтный множитель, $v = \dfrac{1}{1+q}$, где q – ставка сравнения.

Если инвестиции и доходы равномерные и дискретные, то W можно найти как разность современных величин двух рент (одной, представляющей инвестиции, и другой, отсроченной до начала периода отдачи, представляющей поток доходов).

Несмотря на то, что этот показатель чистого приведенного дохода является основой для определения других измерителей эффективности, у него есть ряд существенных недостатков. Один недостаток его состоит в том, что он предполагает известными все будущие члены потока, что на практике нереально. Кроме того, являясь абсолютным показателем, он не дает представления об относительной эффективности вложения финансовых средств.

Срок окупаемости

Под сроком окупаемости в финансовом анализе понимают продолжительность периода, в течение которого сумма чистых доходов, дисконтированных на момент завершения инвестиций, равна сумме приведенных на этот же момент инвестиций.

Если приведенная сумма инвестиций составляет K, а доход поступает в конце каждого года, то расчет срока окупаемости сводится к тому, что сначала определяется сумма

$$S_m = \sum_{t=1}^{m} R_t v^t ,$$

удовлетворяющая условию $s_m<K<S_{m+1}$. Срок окупаемости равен m лет плюс некоторая доля $(m+1)$ – го года, примерно равная

$$\frac{K - S_m}{R_{m+1} v^{m+1}} .$$

Если поток доходов представляет собой ренту, то срок окупаемости находится путем приравнивания капиталовложений современной величине финансовой ренты, представляющей доходы, и решения этого уравнения относительно срока n.

Основной недостаток этого показателя в том, что он не учитывает доходы, поступающие за пределами срока окупаемости.

Внутренняя норма доходности

Под внутренней нормой доходности (IRR) понимают ту расчетную ставку процентов, применение которой к инвестициям порождает данный поток доходов. Чем выше эта ставка (мы ее будем обозначать IRR), тем больше эффективность капитальных вложений. Если капиталовложения осуществляются только за счет привлеченных средств, причем кредит получен по ставке i, то разность ($IRR-i$) показывает эффект предпринимательской деятельности. При $IRR=i$ доход только окупает инвестиции, при $IRR<i$ инвестиции для предпринимателя убыточны.

Внутренняя норма доходности IRR определяется в общем случае путем решения уравнения

$$\sum R_t v^t = 0,$$

где $v = \dfrac{1}{1+IRR}$, R_t – член объединенного потока инвестиций и доходов. Уравнение имеет нелинейный вид и решается итеративно методом линейной интерполяции или другими приближенными методами.

За рубежом расчет внутренней нормы доходности часто применяют в качестве первого шага количественной оценки эффективности капиталовложений. Для дальнейшего анализа отбирают те инвестиционные проекты, у которых этот показатель не ниже 15–20%.

В последние 20–25 лет в анализе эффективности капиталовложений применяется модифицированный показатель внутренней нормы доходности $MIRR$. В литературе описаны различные варианты построения этого показателя.

Индекс рентабельности

Этот показатель представляет собой отношение приведенных по ставке сравнения доходов к приведенным на ту же дату капиталовложениям. Иногда этот показатель называют индексом рентабельности. Обозначим его символом P. Если период отдачи начинается через n лет после начала инвестирования, то этот показатель определяется как

$$P = \frac{\sum_{j=1}^{n_2} R_j v^{j+n}}{\sum_{t=1}^{n_1} K_t},$$

где R_j – показатель чистого дохода в году j, $j=1,2,...n_2$ n_2 – период отдачи,

K_t – размер инвестиций в году $t, t=1,2,...n_1$; n_2 – инвестиционный период,

$v = \dfrac{1}{1+q}$, q – ставка сравнения.

Этот показатель характеризует некоторую дополнительную рентабельность, так как при его расчете доходы уже дисконтированы по ставке сравнения. Если $U=1$, то доходность капиталовложений точно соответствует нормативу рентабельности q. Если $U<1$, то инвестиции нерентабельны, так как не обеспечивают этот норматив.

3. Аренда оборудования (лизинг)

Аренда оборудования является одним из видов производственного инвестирования. Перед владельцем оборудования стоит задача правильного определения размера арендной платы и финансовой эффективности сдачи оборудования в аренду, а арендатор должен решить вопрос: что выгоднее, арендовать оборудование или купить его.

Соглашение об аренде длительностью год или более, предусматривающее серии фиксированных выплат, называется лизингом. Некоторые виды лизинга являются краткосрочными и могут быть расторгнуты арендатором, такой лизинг называется операционным. Другие виды лизинговых соглашений заключаются на большую часть предполагаемой экономической жизни имущества и не могут быть расторгнуты либо предусматривают возмещение убытков арендодателю (лизингодателю) при расторжении. Такой лизинг называется финансовым, капитальным, или лизингом с полной выплатой. Лизинговые соглашения регулируются национальным законодательством, предусматривающим различные ограничения, порядок амортизации и налоговые льготы.

Определение размера платежа за аренду оборудования может быть выполнено по следующей схеме. Пусть оборудование стоимостью P сдается в аренду на n лет. Остаточная стоимость в конце срока составит S. Будем исходить из того, что поток платежей от арендатора должен возместить сумму износа с учетом фактора времени, то есть обеспечить заданный норматив доходности на вложенные в оборудование средства. Для случая, когда арендная плата вносится один раз в конце года, размер разового арендного платежа найдем как

$$R = \frac{P - Sv^n}{a_{n;i}}$$

где R — размер годового арендного платежа,

$a_{n;i}$ — коэффициент приведения годовой постоянной ренты,

$v = \frac{1}{1+i}$ — дисконтный множитель,

i — принятый норматив доходности, n — срок аренды.

Если условия выплат другие, то применяются коэффициенты приведения соответствующих рент.

Вопросы для самопроверки

1. Покажите на графике логику управления запасами денежных средств, соответствующую модели Баумоля.

2. Покажите на графике логику управления запасами денежных средств, соответствующую модели Миллера-Орра.

3. Каков критерий управления денежными средствами предприятия?

4. Что вы можете сказать о достоинствах и недостатках моделей Баумоля и Миллера-Орра?

5. Сравните свойства и особенности различных показателей эффективности.

6. Выпишите формулы, по которым рассчитываются показатели эффективности инвестиционных проектов.

6. Как выбирается ставка сравнения?

7. Какие из показателей эффективности обладают свойством аддитивности?

8. Какие преимущества вытекают из этого свойства?

9. В чем состоит главный недостаток показателя срока окупаемости?

10. Что такое точка Фишера?

11. Чем ограничивается приемлемая ставка по кредиту при выборе инвестиционного проекта?

12. Как и зачем проводится анализ чувствительности показателей эффективности?

13. Как интерпретируется показатель рентабельности (индекс доходности)?

Задачи для практического занятия

1. Как изменяется срок окупаемости проекта или изменении величины инвестиций, годовых доходов, ставки процента?

2. Проверить следующие расчеты инвестиционного проекта:

K= 4000 д.е., последующий годовой доход i = 8% годовых равен R = 1000 д.е., длительность проекта n = 6 лет и получено, что чистый приведенный доход NPV = 623 д.е. и срок окупаемости t = 6 лет.

3. Проверьте расчеты для инвестиционного проекта длительностью n = 6 лет с планируемыми годовыми доходами R = 400 д.е. и годовой ставкой i = 10% найдены необходимые инвестиции K = 1742 д.е.

4. Допустим, инвестиционный проект «циклический». Фабрика работает циклами: один год из n = 10 она на капитальном ремонте и обновлении, что требует K = \$30 000, в остальные девять лет (n-1) цикла фабрика приносит доход R = \$10 000 в год. Ставка равна i = 10%. Найдите характеристики данного потока платежей. (Уточним, что затраты относят на

конец первого года цикла, доход поступает в конце каждого года цикла начиная со второго года).

5. В банке взят кредит под инвестиционный проект по ставке g, а доходы от проекта помещаются в другой банк по большей ставке j. Для обеспечения возврата долга обычно создается погасительный фонд.

Вычислите итоговые характеристики для следующих схем погашения:

1) Основной долг погашается из фонда в конце срока разовым платежом. Сумма взносов в фонд с процентами на них должна быть равна долгу на момент его уплаты. Проценты по долгу выплачиваются не из фонда.

2) Условия финансового обязательства вместо периодической выплаты процентов предусматривают их присоединение к сумме основного долга.

3) Фонд формируется таким образом, чтобы обеспечить периодическую выплату процентов по долгу (из фонда) и в конце срока возврат основного долга.

Исходные данные. Пусть заем размером $D = 1000$ д.е. взят в начале года под инвестиционный проект по ставке $g = 5\%$ сроком $n = 10$ лет, а доходы от проекта помещаются в другой банк по ставке $i = 10\%$.

6. Некто получил наследство в виде солидного банковского счета и теперь его «проедает», беря каждый год со счета в банке определенную сумму и тратя ее в течение года. По сути, это «перевернутый» инвестиционный процесс. Что здесь является инвестициями, сроком окупаемости, внутренней нормой доходности, чистым приведенным доходом. Какие меры должен принять наследник при увеличении темпов инфляции? Расчеты выполнить для следующих исходных данных: $K = 30\ 000$ д.е., $R = 6000$ д.е., ставка $i = 10\%$.

7. Рассматривается инвестиционный проект. Проект предусматривает следующий поток платежей инвестиций: первый платеж $K_1 = 160$ тыс. д.е. в момент времени $t_{K_1} =$

0, второй платеж K_2= 200 тыс. д.е. в момент времени t_{K_2} = 0,5 года, третий платеж K_3= 250 тыс. д.е. в момент времени t_{K_3}= 1,5 года. Отдача от проекта начинается через время Δ= 0,5 года после последнего инвестиционного платежа. Поток платежей доходов следующий: R_1= 200 тыс. д.е. в момент времени t_{R_1} = 2 год, R_2= 300 тыс. д.е. в момент времени t_{R_2} = 3,6 года, R_3= 400 тыс. д.е. в момент времени t_{R_3} = года, R_4= 500 тыс. д.е. в момент времени t_{R_4} = 4,5. Безрисковая процентная ставка r = 10%. Рассчитать характеристики инвестиционного проекта (чистый приведенный доход, внутреннюю норму доходности, срок окупаемости, индекс рентабельности).

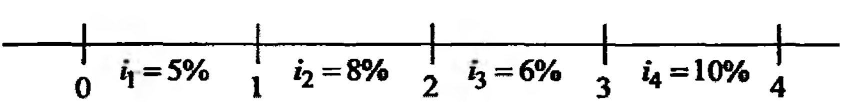
8. Рассчитайте ежегодный платеж за аренду оборудования стоимостью P = \$20 000 в течение n = 10 лет, если к концу аренды остаточная стоимость оборудования будет S = \$10 000. Внутреннюю норму j = доходности принять равной 15%.

9. Выясните, надо ли купить оборудование стоимостью P = \$20 000 или арендовать его на n = 8 лет с ежегодным арендным платежом R = \$3000, если ставка процента j = 6% годовых, а нормативов амортизации оборудования h = 15%.

Примечание. Остаточная стоимость оборудования $S=P(1-n\cdot h)$, где P = стоимость оборудования, n = срок эксплуатации.

10. Проанализируйте инвестиционный проект с переменной процентной ставкой:

$K=200 \quad R_1=1000 \quad R_2=800 \quad R_3=800 \quad R_4=600$



§7. ФИНАНСОВЫЙ РИСК И ДИВЕРСИФИКАЦИЯ

1. Риск

В финансовом анализе производственных инвестиций неизбежно сталкиваются с неопределенностью, неоднозначностью показателей затрат и отдачи. В связи с этим возникает проблема измерения риска и его влияния на результаты инвестиций. На вопросы, связанные с измерением риска остановимся более подробно.

Широко распространенный термин «риск», как известно, понимается неоднозначно. Его содержание определяется той конкретной задачей, где этот термин используется. Достаточно просто перечислить такие понятия, как кредитный, валютный, инвестиционный, политический, технологический риски, риск ликвидности активов и т.д. Отметим, что даже самое общее определение этого понятия не оставалось неизменным во времени. Говоря о первом в экономике научном определении риска, обычно ссылаются на Ф. Найта (1921), который предложил различать риск и неопределенность. Риск имеет место тогда, когда некоторое действие может привести к нескольким взаимоисключающим исходам с известным распределением их вероятностей. Если же такое распределение неизвестно, то соответствующая ситуация рассматривается как неопределенность. Как нам представляется, здесь речь идет, скорее, не об определении риска, а лишь о наличии информации, характеризующей риск.

В экономической практике, особенно финансовой, обычно не делают различия между риском и неопределенностью. Чаще всего под риском понимают некоторую возможную потерю, вызванную наступлением случайных неблагоприятных событий. В некоторых областях экономической деятельности сложились устойчивые традиции понимания и измерения риска. Наибольшее внимание к измерению риска проявлено в страховании. Объяснять причину такого внимания нет необходимости. Измеритель риска, как возможная потеря страховщика, был использован еще в конце XVIII в. В других направлениях финансовой деятельности под риском также понимается некоторая потеря. Она может быть объективной, т.е. определяться внешними воздействиями на ход и результаты деятельности хозяйствующего субъекта. Так, например, потеря покупательной способности денег (инфляционный риск) не зависит от воли и действий их владельца. Однако, часто риск, как возможная потеря, может быть связан с выбором того или иного решения, той или иной линии поведения. Заметим также, что в некоторых областях деятельности риск понимается как вероятность наступления некоторого неблагоприятного события. Чем выше эта вероятность, тем больше риск. Такое понимание риска оправданно в тех случаях, когда событие может наступить или не наступить (банкротство, крушение и т.д.).

Когда невозможны непосредственные измерения размеров потерь или их вероятностей, риск можно компенсировать с помощью ранжирования соответствующих объектов, процессов или явлений в отношении возможного ущерба, потерь и т.д. Ранжирование обычно основывается на экспертных суждениях.

Естественной реакцией на наличие риска в финансовой деятельности является стремление компенсировать его с помощью так называемых рисковых премий **(risk premium)**, которые представляют собой различного рода надбавки (к цене, уровню процентной ставки, тарифу и т. д.), выступающие в виде «платы за риск». Второй путь ослабления влияния риска заключается в **управлении риском**. Последнее осуществляется на основе различных приемов, например, с помощью заключения форвардных контрактов, покупки валютных или процентных опционов и т.д.

Одним из приемов сокращения риска, применяемым в инвестиционных решениях, является диверсификация, под которой понимается распределение общей инвестиционной суммы между несколькими объектами. Диверсификация — общепринятое средство сокращения любого вида риска. С увеличением числа элементов набора (портфеля) уменьшается общий размер риска. Однако только в случае, когда риск может быть измерен и представлен в виде статистического показателя, управление риском получает надежное основание, а последствия диверсификации поддаются анализу с привлечением методов математической статистики.

В инвестиционном анализе и страховом деле риск часто измеряется с помощью таких стандартных статистических характеристик, как дисперсия и среднее квадратическое (стандартное) отклонение. Обе характеристики измеряют колебания, в данном случае — колебания дохода. Чем они больше, тем выше рассеяние показателей дохода вокруг средней и, следовательно, степень риска.

Напомним, что между дисперсией (D) и средним квадратическим отклонением (σ) существует следующее соотношение:

$$\sigma = \sqrt{D}.$$

В свою очередь дисперсия относительно выборочной средней ($\bar{x}$) находится как

$$D = \sum \frac{(x_i - \bar{x})^2}{n-1},$$

где n — количество наблюдений, $\bar{x}$ — средняя случайной величины X.

Как известно, среднее квадратическое отклонение имеет то неоспоримое достоинство, что при близости наблюдаемого распределения (например, распределении дохода от инвестиций) к нормальному, что, строго говоря, должно быть статистически проверено, этот параметр может быть использован для определения границ, в которых с заданной вероятностью следует ожидать значение случайной переменной. Так, например, с вероятностью 68% можно утверждать, что значение случайной величины X (в нашем случае доход) находится в границах $\bar{x} \pm \sigma$, а с вероятностью 95% - в пределах $\bar{x} \pm 2\sigma$ и т.д. Сказанное иллюстрируется на рис. 1.

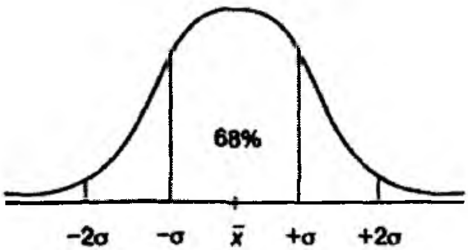


Рис. 1.

2. Диверсификация инвестиций и дисперсия дохода

Определим теперь, что дает диверсификация для уменьшения риска и выявим условия, когда эта цель достигается. В качестве объекта анализа примем некоторый абстрактный портфель ценных бумаг (далее для краткости – портфель). Такой выбор объясняется методологическими преимуществами – в этом случае проще выявить зависимости между основными переменными. Однако многие из полученных результатов без большой натяжки можно распространить и на производственные инвестиции.

В качестве измерителя риска в долгосрочных финансовых операциях широко распространена такая мера, как дисперсия дохода во времени. Диверсификация портфеля при правильном ее применении приводит к уменьшению этой дисперсии при всех прочих равных условиях. Диверсификация базируется на простой гипотезе. Если каждая компонента портфеля (в рассматриваемой задаче — вид ценной бумаги) характеризуется некоторой дисперсией дохода, то доход от портфеля имеет дисперсию, определяемую его составом. Таким образом, ***изменяя состав портфеля, можно менять суммарную дисперсию дохода, а в некоторых случаях свести ее к минимуму.***

Итак, пусть имеется портфель из n видов ценных бумаг. Доход от одной бумаги вида i составляет величину d_i. Суммарный доход (A), очевидно, равен

$$A = \sum_i a_i d_i \,, \qquad (1)$$

где a_i — количество бумаг вида i.

Если d_i представляет собой средний доход от бумаги вида i, то величина A арактеризует средний доход от портфеля бумаг в целом.

Для начала, положим, что показатели доходов различных видов бумаг являются статистически независимыми величинами (иначе говоря, не коррелируют между собой). Дисперсия дохода портфеля (обозначим ее как D) в этом случае находится как

$$D = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 D_i \,, \qquad (2)$$

где D_i — дисперсия дохода от бумаги вида i, n — количество видов ценных бумаг.

Для упрощения, которое нисколько не повлияет на результаты дальнейших рассуждений, перейдем от абсолютного измерения количества ценных бумаг к относительному. Пусть теперь а. характеризует долю в портфеле бумаги вида i, т.е. $0 \le a_i \le 1$, $\Sigma a_i = 1$

Для зависимых в статистическом смысле показателей дохода отдельных бумаг дисперсию суммарного дохода находим следующим образом:

$$D = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 D_i + 2\sum_{i \ne j} a_i\, a_j r_j \sigma_i \sigma_j \,, \qquad (3)$$

где D_i – дисперсия дохода от бумаги вида i, r_{ij} – коэффициент корреляции дохода от бумаг вида i и j, σ_i и σ_j – среднее квадратическое отклонение дохода у бумаг вида i и j.

Коэффициент корреляции двух случайных величин X и Y, как известно, определяется по формуле

$$r_{xy} = \frac{\sum(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{n\sigma_x\sigma_y}, \qquad (4)$$

где $\bar{x}$, $\bar{y}$ – средние (в нашем случае средние доходы двух видов бумаг).

Для расчетов часто применяется следующая рабочая формула:

$$r_{xy} = \frac{n\sum xy - \sum x\sum y}{\sqrt{\left(\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2\right)\left(n\sum y^2 - \left(\sum y\right)^2\right)}}.$$

Поскольку коэффициент корреляции может быть как положительной, так и отрицательной величиной, то, как это вытекает из (3), при положительной корреляции дисперсия суммарного дохода увеличивается, при отрицательной она сокращается. В самом деле, при заметной отрицательной корреляции положительные отклонения от среднего дохода одних бумаг погашаются отрицательными отклонениями у других. И наоборот, при положительной корреляции отклонения суммируются, что увеличивает общую дисперсию и риск.

Проследим теперь, каково влияние масштаба диверсификации на размер риска. Под масштабом диверсификации здесь будем понимать количество объектов, выбранных для инвестиции (количество видов ценных бумаг). Обратимся к условному примеру, который позволяет наиболее отчетливо выделить влияние указанного фактора. Итак, пусть портфель состоит из бумаг различного вида, но имеющих одинаковую дисперсию дохода (σ_0^2). Удельные веса в портфеле каждого вида бумаг также одинаковы, а общая сумма вложений равна 1. Положим, что показатели доходности у отдельных видов бумаг статистически независимы, т.е. применима формула (2). В этих условиях для оценки величины среднего квадратического отклонения дохода портфеля получим

$$D = \frac{1}{n}\sigma_0^2,$$

где n — количество видов ценных бумаг.

Воспользуемся приведенной формулой и определим дисперсию дохода для портфеля, состоящего из двух и трех видов бумаг. Так, для двух бумаг имеем

$$D = \frac{1}{2}\sigma_0^2 \quad \text{и} \quad \sigma = \sqrt{\frac{1}{2}}\ \sigma_0 = 0{,}71\sigma_0.$$

Для трех видов бумаг квадратическое отклонение портфеля составит $0{,}58\sigma_0$. Таким образом, с увеличением числа составляющих портфеля риск уменьшается даже при одинаковой дисперсии составляющих элементов. Однако прирост действенности диверсификации уменьшается. Соответствующая зависимость изображена на рис. 2.

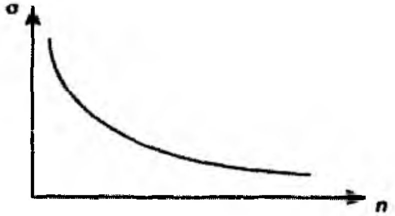


Рис. 2.

Как видим, наибольшее влияние увеличение масштабов диверсификации оказывает на начальных стадиях, т.е. при малых значениях n. Например, в рамках рассмотренного примера переход от одного вида бумаг к четырем сокращает квадратическое отклонение на 50%, а от одного к восьми – на 65%.

Полученные выше выводы в отношении тенденции изменения среднего квадратического отклонения в зависимости от числа составляющих при условии, когда дисперсии составляющих одинаковы, очевидно, справедливы и для более общих случаев. Однако, зависимость этих параметров от степени диверсификации проявляется здесь не столь четко.

Посмотрим теперь, как изменяются доход и величина риска при изменении структуры портфеля. Для этого вернемся к формулам (2) и (3) и запишем их только для двух видов бумаг (X и Y). Такой анализ вряд ли имеет практическое значение. Однако с его помощью наглядно демонстрируются последствия «смешения» ценных бумаг с различными доходностью и дисперсией. Для независимых доходов получим

$$D=a^2_xD_x+a^2_yD_y, \qquad (5)$$

и для зависимых доходов

$$D=a^2_x\sigma^2_x+ a^2_y\sigma^2_y+ 2a_xa_yr_{xy}\sigma_x\sigma_y \qquad (6)$$

Причем $a_y=1-a_x$.

В этом случае среднее значение суммарного дохода определяется как

$$A=a_xd_x+(1-a_x)d_y \qquad (7)$$

Пусть $d_y>d_x$ и $\sigma_y>\sigma_x$. Очевидно, что в силу этих условий рост доли бумаг второго вида увеличивает доходность портфеля. Так, на основе (7) получим

$$A=d_y+(d_y-d_x)a_y \qquad (8)$$

Что касается дисперсии дохода портфеля, то, как это следует из (6), положение не столь однозначно и зависит от знака и степени корреляции. В связи с этим подробно рассмотрим три ситуации: полная положительная корреляция доходов ($r_{xy}=+1$), полная отрицательная корреляция ($r_{xy}=-1$), независимость доходов или нулевая корреляция ($r_{xy}=0$).

В первом случае увеличение дохода за счет включения в портфель бумаги вида Y помимо X сопровождается ростом как дохода, так и дисперсии. Для портфеля, содержащего оба вида бумаг, квадратическое отклонение находится в пределах $\sigma_x < \sigma < \sigma_y$ (см. рис. 3, где точка X означает портфель, состоящий только из бумаг вида X, а Y – портфель из бумаг вида Y).

Для частного случая, когда $\sigma_x=\sigma_y=\sigma$, получим по формуле (6) $D=\sigma^2$. Иначе говоря, при полной положительной корреляции «смешение» инвестиций не окажет никакого влияния на величину дисперсии.

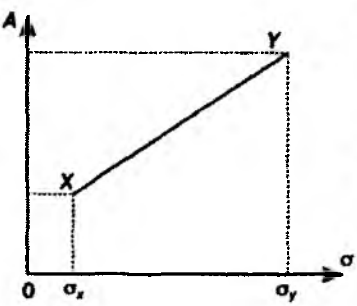


Рис. 3.

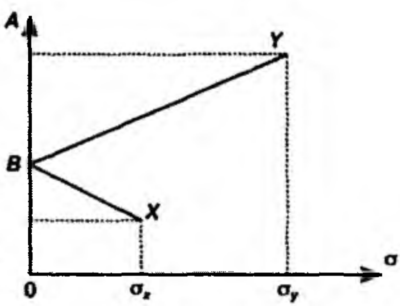


Рис. 4.

При полной отрицательной корреляции доходов динамика квадратического отклонения доходов от портфеля более сложная. По мере движения от точки X к точке $У$ эта величина сначала сокращается и доходит до нуля в точке В9 затем растет (см. рис. 4). Следует обратить внимание на то, что при движении от X до B рост дохода сопровождается уменьшением риска (квадратического отклонения). В последней из рассматриваемых ситуаций квадратическое отклонение при увеличении доли бумаги У проходит точку минимума, равного σ_m, далее оно растет до σ_y (см. рис. 5).

Замечание. Проблема определения состава портфеля, при котором достигается минимум дисперсии, в данном курсе обсуждаться не будет. Изучение этого вопроса предполагается осуществить самостоятельно.

Совместим теперь все три графика на одном (см. рис. 6). Как видим, все возможные варианты зависимости «доход – СКО» находятся в треугольнике ХВУ.

Из сказанного непосредственно следует, что эффективность диверсификации (в отношении сокращения риска) наблюдается только при отрицательной или, в крайнем случае, нулевой корреляции.

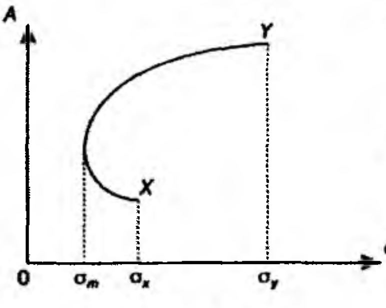


Рис. 5

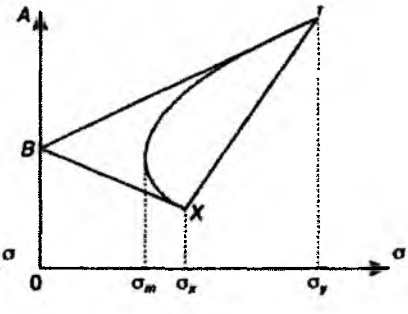


Рис. 6

Пример 1. Портфель должен состоять из двух видов бумаг, параметры которых: $d_x = 2$; $\sigma_x = 0{,}8$; $d_y = 3$; $\sigma_y = 1{,}1$.

Доход от портфеля: $A=2a_x+3a_y$. Таким образом, доход в зависимости от величины долей находится в пределах $2 \le A \le 3$.

Дисперсия суммы дохода составит:

$$D = a_x^2 \cdot 0{,}8^2 + a_y^2 \cdot 1{,}1^2 + a_x a_y r_{xy} 0{,}8 \cdot 1{,}1.$$

Определим доход и дисперсию для портфеля с долями, равными, допустим, 0,3 и 0,7. Получим по формулам

(6) и (7): $D=0,651+0,37r_{xy}$ и $A=2,7$. Таким образом, при полной положительной корреляции $D = 1,021$, при полной отрицательной корреляции D = 0,281. В итоге с вероятностью 95% можно утверждать, что суммарный доход находится в первом случае в пределах

$$2,7 \pm 2\sqrt{1,021} = 2,7 \pm 2,02;$$

во втором — он определяется пределами

$$2,7 \pm 2\sqrt{0,281} = 2,7 \pm 1,06.$$

При нулевой корреляции доходов искомые пределы составят

$$2,7 \pm 2\sqrt{0,651} = 2,7 \pm 1,64.$$

Продолжим анализ с двумя бумагами и проследим, как влияет включение в портфель ***безрисковой (risk free)*** инвестиции[1]. Для этого заменим в портфеле бумагу Y с параметрами d_y σ_y на бумагу с такой же доходностью, но с нулевой дисперсией. Доходность портфеля от такой замены, разумеется, не изменится. Что же касается дисперсии, то она теперь составит:

$$D=a^2_x\,\sigma^2_y\,.$$

Дисперсия дохода портфеля теперь зависит от удельного веса безрисковой составляющей, так как

$$\sigma=a_x q_x=(1-a_y)q_x\,. \qquad (9)$$

Таким образом, «разбавление» портфеля безрисковой бумагой снижает риск портфеля в целом, а квадратическое отклонение дохода портфеля определяется убывающей линейной функцией доли безрисковой бумаги. Если $d_x>d_y$ (в противном случае проблема выбора портфеля отпадает

[1] — В странах со стабильной экономикой безрисковой обычно считается ценная бумага, выпущенная государственным казначейством.

– он должен состоять только из безрисковых бумаг), то доход от портфеля по мере увеличения доли безрисковой бумаги уменьшается от d_x до d_y, а величина квадратического отклонения сокращается от σ_x до 0 (см. рис. 7). И наоборот, рост доли рисковой бумаги увеличивает как риск, так и доход.

Последнее утверждение для портфеля, состоящего из двух видов бумаг, иллюстрируется уравнением (10), которое получено преобразованием (7):

$$A=d_y+(d_x-d_y)a_x \tag{10}$$

В свою очередь на основе (9) находим

$$a_x=\frac{\sigma}{\sigma_x}$$

В итоге подучим интересное соотношение

$$A=d_y+\frac{d_x-d_1}{\sigma_x}\sigma \tag{11}$$

Дробь в приведенном выражении иногда называют рыночной ценой риска. Если эта величина равна, скажем, 0,5, то при росте квадратического отклонения на 1% доход увеличится на 0,5%.

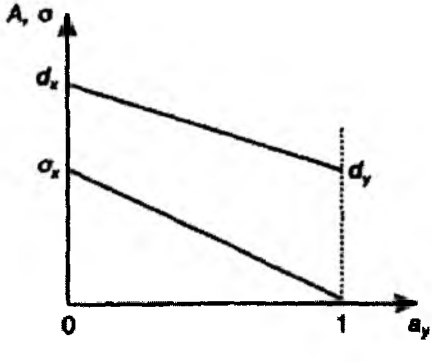


Рис. 7.

3. Минимизация дисперсии дохода

Приведенные выше выражения для дисперсии суммарного дохода позволяют рассмотреть проблему диверсификации инвестиций и риска еще в одном аспекте, а именно, — определить структуру портфеля, которая минимизирует дисперсию и, следовательно, риск. Для нахождения минимума дисперсии вернемся к определяющим ее формулам. Если предположить, что нет статистической зависимости между доходами от отдельных видов инвестиций, то найти оптимальную в указанном смысле структуру портфеля не так уж и сложно. Положим, что портфель, как и выше, состоит из двух видов бумаг *X* и *Y*. Их доли в портфеле составляют a_x и $1\text{-}a_x$ а дисперсии D_x и D_y. Общая дисперсия определяется по формуле (5). Поскольку эта функция является непрерывной, то применим стандартный метод определения экстремума. Находим, что минимальное значение дисперсии суммы имеет место тогда, когда

$$a_x = \frac{D_y}{D_x + D_y} \qquad (12)$$

Формулу (12) обычно приводят в аналитической финансовой литературе. Однако, для того, чтобы ею можно было воспользоваться, необходимо иметь значения дисперсий. По-видимому, при расчетах на перспективу удобнее оценить или задать экспертным путем отношение дисперсий:

$$D_{x/y} = D_x / D_y \qquad (13)$$

Разделим теперь числитель и знаменатель (12) на D_y, получим

$$a_x = \frac{1}{D_{x/y} + 1} \qquad (14)$$

При наличии корреляции между показателями доходов обратимся к (6). Минимум этой функции имеет место в случае, когда

$$a_x = \frac{D_y - r_{xy}\sigma_x\sigma_y}{D_x + 2r_{xy}\sigma_x\sigma_y} \qquad (15)$$

или, использовав отношение дисперсий (13), получим

$$a_x = \frac{1 - r_{xy}\sqrt{D_{x/y}}}{D_{x/y} + 1 - 2r_{xy}\sqrt{D_{x/y}}} \qquad (16)$$

Как видно из приведенных формул, расчетная величина доли одной из бумаг может при некоторых условиях оказаться отрицательной. Отсюда следует, что этот вид бумаги просто не должен включаться в портфель.

Пример 2. Вернемся к данным примера 1 и определим структуру портфеля с минимальной дисперсией. Напомним, что $\sigma_x = 0{,}8;\ \sigma_y = 1{,}1.$

При полной положительной корреляции расчетные значения доли первой бумаги составят по формуле (15)

$$a_x = \frac{1{,}1^2 - 1 \cdot 0{,}8 \cdot 1{,}1}{0{,}8^2 + 1{,}1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 0{,}8 \cdot 1{,}1} > 1$$

Соответственно, $a_y<0$. Следовательно, минимальная дисперсия имеет место в случае, когда портфель состоит из одной бумаги вида X. Средний доход от портфеля равен 2.

При полной отрицательной корреляции находим

$$a_x = \frac{1{,}1^2 - (-1) \cdot 0{,}8 \cdot 1{,}1}{0{,}8^2 + 1{,}1^2 - 2 \cdot (-1) \cdot 0{,}8 \cdot 1{,}1} = 0{,}579$$

Дисперсия в этом случае равна нулю (см. рис. 4), а средний доход составит 2,421.

Наконец, при отсутствии корреляции получим по формуле (12) $a_x = 0{,}654,\ a_y = 1 - 0{,}654 = 0{,}346$. Дисперсия дохода при такой структуре портфеля равна 0,418, а средний доход равен 2,346.

Пусть теперь портфель состоит из трех видов бумаг *X,Y,Z*. Их доли a_x, a_y и $a_z=1(a_x+a_y)$. Дисперсия дохода от портфеля при условии независимости доходов от отдельных видов бумаг составит

$$D = a_x^2 D_x + a_y^2 D_y - \left(1-\left(a_x+a_y\right)^2\right)D_z.$$

Минимум дисперсии достигается, если структура портфеля определяется следующим образом:

$$a_x = \frac{D_{y/z}}{D_{x/z}D_{y/z}+D_{x/z}+D_{y/z}}, \qquad a_y = \frac{D_{x/z}}{D_{x/z}D_{y/z}+D_{x/z}+D_{y/z}}.$$

Не будем останавливаться на ситуации, когда доходы трех видов бумаг статистически зависимы. Перейдем к общей постановке задачи и определим структуру портфеля с n составляющими. Допустим, что доходы статистически независимы. Опустим доказательства и приведем результат в матричном виде:

$$\overline{A} = D^{-1}e, \tag{17}$$

где *e* — единичный вектор, характеризующий структуру портфеля,

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} \frac{D_1}{D_n}+1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \frac{D_2}{D_n}+1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & \frac{D_{n-1}}{D_n}+1 \end{pmatrix}.$$

$\overline{A}$ — вектор, характеризующий *n-1* элементов структуры портфеля.

Матрица *D* имеет размерность *(n-1)×(n-1)*.

Пример 3. Эксперты оценили следующие отношения дисперсий для портфеля, состоящего из четырех видов бумаг: $D_{1/4} = 1,5$; $D_{2/4} = 2$; $D_{3/4} = 1$. По формуле (17) получим

$$\overline{A} = D^{-1}e = \begin{pmatrix} 2,5 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,210 \\ 0,158 \\ 0,316 \end{pmatrix},$$

откуда

$$a_4 = 1 - \sum_{i=1}^{3} a_i = 1 - 0,684 = 0,316$$

Заметим, что структуру портфеля, минимизирующую дисперсию дохода, с *n* составляющими при наличии корреляции определить так же просто, как это было сделано выше, нельзя. Однако решение существует, хотя его получение достаточно хлопотное дело, да и вряд ли оно необходимо для практики.

Анализ диверсификации представляет собой первый этап в исследовании портфеля инвестиций. Следующим является максимизация дохода. Эта проблема также связана с измерением риска и требует обстоятельного специального обсуждения, выходящего за рамки данного курса. Поэтому ограничимся лишь замечанием о том, что метод Г. Марковица, который заключается в разработке и решении специальной модели нелинейного программирования с использованием показателей доходов и дисперсий, в теоретическом плане не вызывает возражений. Что касается его практического применения, то здесь, на наш взгляд, скрыты серьезные подводные камни. Затронем лишь одну проблему — какой срок для расчета дисперсий следует принять во внимание? Если ограничиться небольшим сроком, то получим наиболее приближенные к современности данные. Однако они могут оказаться неустойчивыми, содержать много «шума», с другой стороны, стремление охватить максимальный срок неизбежно приведет к устареванию данных.

Задачи для практического занятия

1. Предположим, что на рынке могут возникнуть только два исхода и на каждый из них акции А и В откликаются неслучайным образом. Вероятности этих исходов и соответствующих им значений доходности заданы табл. 1.

Таблица 1

Акция	Исход 1		Исход 2	
	Вероятность	Доходность	Вероятность	Доходность
А	0,2	5%	0,8	1,25%
В	0,2	-1%	0,8	2,75%

Определить:

а) ожидаемые доходности и риски (стандартные отклонения) этих акций;

б) коэффициент корреляции между доходностями;

в) какую акцию выберет инвестор, максимизирующий вероятность неразорения, учитывая, что инвестируются заемные средства, взятые под ставку 1,5%;

г) как распределить вложения, чтобы получить безрисковую комбинацию этих акций – портфель с независящей от исхода эффективностью.

2. Инвестор вложил 60% своего капитала в акцию А, а оставшуюся часть - в акцию 5. Риски этих акций составляют соответственно 10 и 20%. Чему равен риск портфеля, если:

а) доходности этих бумаг находятся в полной прямой корреляции;

б) доходности некоррелированы;

в) имеет место положительная статистическая связь с коэффициентом корреляции 0,5.

3. Портфель состоит из активов А и В. Доля актива А – 40%, актива В – 60%. Дисперсии активов

$$\sigma_A^2 = 0{,}0012184,\ \sigma_B^2 = 0{,}000987$$

Коэффициент корреляции:

$$r_{AB} = 0{,}0008765$$

Чему равен риск портфеля?

4. Используя Excel, найти оптимальный портфель Марковица требуемой доходности 15% для трех некоррелированных ценных бумаг, эффективности и риски которых заданы следующими парами значений: 4, 10; 10, 40; 40, 80.

5. Для формирования портфеля ценных бумаг можно использовать три вида акций, которые имеют следующие характеристики табл. 2.

Таблица 2

Ожидаемая доходность	12%	10%	15%
Риск	σ_1=15%	σ_2=8%	σ_3=18%
Коэффициенты корреляции	r_{12}=0,35	r_{13}=0,19	r_{23}=0,1

С помощью компьютера составить 11 портфелей минимального риска и требуемой доходности *10+0,5(n-1), n=1,2,...1.* Затем нанести портфели, как точки, на плоскость «доходность – риск» и построить график траектории эффективных портфелей.

6. Инвестор может составить портфель из трех видов ценных бумаг. Их эффективности являются случайными величинами, имеющими следующие математические ожидания и стандартные отклонения:

$$m_1 = 15\%,\ \sigma_1 = 5\%;\ \ m_2 = 25\%,\ \sigma_2 = 7\%;\ \ m3 = 20\%,\ \sigma_3 = 6\%.$$

Также известна корреляционная матрица этих эффективностей r_{ij} табл. 3.

Таблица 3

Номер актива	1	2	3
1	1	0,8	0
2	0,8	1	-0,2
3	0	-0,2	1

Инвестор имеет возможность получать и предоставлять займы по одной и той же безрисковой ставке $r_0=12\%$, а моделирующая его поведение функция полезности дохода $U(R)=3R-0{,}1R^2$. Определить портфель Тобина, учитывающий, наряду с рисковыми активами, возможности использования инвестором безрискового процента.

7. Имеются следующие данные об ожидаемых доходах и стандартных отклонениях восьми рисковых портфелей табл. 4.

Таблица 4

Портфель	А	Б	В	Г	Д	Е	Ж	З
Ожидаемый доход, r%	10	12,5	15	16	17	18	18	20
Стандартное отклонение, σ%	23	21	25	29	29	32	35	45

Используя графическое представление этих портфелей в осях (r, σ), требуется ответить на следующие вопросы:

а) пять из этих портфелей эффективны, три – нет. Какие портфели неэффективны?

б) допустим, что вы также можете брать кредиты и предоставлять займы по ставке 12%. Какой из приведенных портфелей является лучшим в этой ситуации?

в) предположим, вы готовы принять стандартное отклонение, равное 25%. Какую максимальную ожидаемую доходность вы можете получить при условии, что у вас нет возможности брать кредиты или предоставлять займы?

г) как изменится ваша стратегия, если у вас появится возможность кредитования и заимствования по ставке 12%. Вы по-прежнему готовы принять 25%-ный риск, но стремитесь получить максимальную ожидаемую доходность? Чему равен выигрыш по сравнению с п. «в»?

8. Инвестор вложил 60% своих денег в акции А, а остальные – в акции В. Он оценивает перспективы для себя следующим образом табл. 5.

Таблица 5

Показатель	Акция	
	А	В
Ожидаемая доходность, %	15	20
Стандартное отклонение, %	20	22
Корреляция между доходностями	0,5	

Определить:

а) каковы ожидаемая доходность и стандартное отклонение портфеля?

б) как изменился бы ваш ответ, если бы коэффициент корреляции равнялся 0 или -0,5?

в) портфель инвестора лучше или хуже портфеля, полностью состоящего из акций А, или об этом невозможно судить?

ГЛАВА 3. ОЦЕНКИ РИСКОВ В СТРАХОВЫХ ФИНАНСОВЫХ ОПЕРАЦИЯХ

§8. НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬ МОМЕНТА СМЕРТИ КАК ОСНОВНОЙ ФАКТОР РИСКА В СТРАХОВЫХ ОПЕРАЦИЯХ

1. Время жизни как случайная величина

Неопределенность момента смерти является основным фактором риска при страховании жизни. Поэтому создание адекватной теории для страхования жизни должно наминаться с разработки системы понятий и определения величин, позволяющих высказывать объективные суждения о продолжительности жизни. Основным является следующий вывод.

Относительно момента смерти отдельного человека нельзя сказать ничего определенного. Однако если мы имеем дело с большой однородной группой людей и не интересуемся судьбой отдельных людей из этой группы, то мы находимся в рамках теории вероятностей как науки о массовых случайных явлениях, обладающих свойством устойчивости частот. Соответственно, мы можем говорить о продолжительности жизни как о случайной величине T.

Функция выживания

В теории вероятностей описывают стохастическую природу любой случайной величины T функцией распределения $F(x)$, которая определяется как вероятность того, что случайная величина T меньше, чем число x:

$$F(x) = P(T < x).$$

В актуарной математике принято работать не с функцией распределения, а с дополнительной функцией распределения $\overline{F}(x) = 1 - F(x)$. Применительно к продолжительности жизни $1\text{-}F(x)$– это вероятность того, что человек доживет до возраста x лет. Функция

$$s(x) = 1 - F(x)$$

называется **функцией выживания (survival function)**:

$$s(x) = P(T \geq x).$$

Функция выживания обладает следующими характеристическими свойствами:

1. *s(x)* убывает (при $x \geq 0$);
2. $s(0) = 1$;
3. $s(+\infty) = 0$;
4. *s(x)* непрерывна.

Пример 1. Какая из функций может рассматриваться в качестве функции выживания:

1) $s(x) = e^{x-0,(2^x-1)}$;

2) $s(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2}$.

Решение

Ясно, что для обеих функций $s(0) = 1$, $s(+\infty) = 0$. Кроме того, обе функции непрерывны. Таким образом, ключевым является вопрос о монотонном убывании.

Функция 2), очевидно, убывающая. Следовательно, функция 2) может рассматриваться в качестве функции выживания.

Для функции 1) производная показателя экспоненты равна 1-0,7·2x·1h2 Эта функция должна быть отрицательна при всех *x*. Поскольку она убывающая, достаточно проверить, что она отрицательна при *x*=0, т.е. 1-0,7·2x·1h2<0. Однако 1h2 <1 и поэтому 0,7· 1h2 <1, так что 1-0,7· 1h2 >0,. Таким образом, функция 1) не может рассматриваться в качестве функции выживания.

Упражнение

Функцию $s(x)=e^{-x2}$ можно рассматривать в качестве функции выживания.

В таблицах продолжительности жизни обычно считают, что существует некоторый предельный возраст (limiting age) ω(как правило, ω =100–120) и соответственно $s(x) = 0$ при x. При описании смертности аналитическими законами обычно считают, что время жизни неограниченно, однако подбирают вид и параметры законов так, чтобы вероятность жизни свыше некоторого возраста была бы пренебрежимо мала.

Функция выживания имеет простой статистический смысл. Допустим, что мы наблюдаем за группой из l_0 новорожденных (как правило, $l_0 = 100000$) и можем фиксировать моменты их смерти. Обозначим число живых представителей этой группы в возрасте x через $L(x)$. Тогда:

$$l_x \equiv E\ (x) = l_0 s(x).$$

Символ E здесь и ниже используется для обозначения математического ожидания. Итак, функция выживания $s(x)$ равна средней доле доживших до возраста x из некоторой фиксированной группы новорожденных.

В актуарной математике часто работают не с функцией выживания $s(x)$, а с только что введенной величиной l_x (зафиксировав начальный размер группы l_0).

Кривая смертей

В теории вероятностей принято описывать стохастическую природу непрерывных случайных величин плотностью $f(x)$, которая может быть определена как производная от функции распределения. В актуарной математике график плотности продолжительности жизни $f(x) = - s(x)$ (или, что практически одно и то же, график функции 10f(x) называют кривой смертей (the curve of deaths). Величина $l_0 f(x)$ имеет простой статистический смысл. Рассмотрим среднее число представителей исходной группы в l_0

l_0 новорожденных, умерших в возрасте x лет; эта величина обозначается d_x и равна l_x-l_x+1. Тогда $dx \approx l0f(x)$

Функция выживания *s(x)* может быть восстановлена по плотности:

$$\int_x^{\infty} f(u)du = s(x),$$

так что кривая смертей может быть использована в качестве первичной характеристики продолжительности жизни.

Интенсивность смертности

Величина

$$\mu_x = \frac{f(x)}{s(x)}$$

называется **интенсивностью смертности (the force of mortality)**. Для человека, дожившего до *x* лет при малых *t* величина $\mu_x t$ приближенно выражает вероятность смерти в интервале *(x, x+t)*.

Поскольку функция выживания *s(x)* может быть восстановлена по интенсивности смертности:

$$s(x) = e^{-\int_0^x \mu_u du},$$

интенсивность смертности может быть использована в качестве первичной характеристики продолжительности жизни.

Макрохарактеристики продолжительности жизни

С практической точки зрения важны следующие макрохарактеристики смертности:

1) среднее время жизни

$$\overset{\circ}{e}_0 \equiv ET = \int_0^{\infty} xf(x)dx = \int_0^{\infty} s(x)dx,$$

2) дисперсия времени жизни

$$Var\ T = ET^2 - (ET)^2,$$

где

$$ET^2 = \int_0^\infty x^2 f(x)dx = 2\int_0^\infty xs(x)dx,$$

3) медиана времени жизни *m(0)*, которая определяется как корень уравнения

$$s(x) = 0{,}5.$$

Медиана времени жизни – это возраст, до которого доживает ровно половина представителей исходной группы новорожденных.

Упражнение

Покажите, что

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{a^2} e^{-\frac{x}{a}}, & \textit{если } 0 < x < +\infty, \\ 0, & \textit{в противном случае.} \end{cases}$$

может рассматриваться как кривая смертей.

Найдите соответствующие функцию выживания *s(x)* и интенсивность смертности μ_x, а также подсчитайте среднюю продолжительность жизни $\mathring{e}_0$.

Аналитические законы смертности

Для упрощения расчетов, теоретического анализа и т.д. естественно попытаться описать получаемые эмпирическим путем данные о функции выживания или интенсивности смертности с помощью простых аналитических формул.

Простейшее приближение было введено в 1729 г. де Муавром (de Moivre), который предложил считать, что время жизни равномерно распределено на интервале (0, ω), где ω – предельный возраст. В модели де Муавра при $0<x<\omega$

$$f(x) = \frac{1}{\omega}, \quad F(x) = \frac{x}{\omega}, \quad s(x) = 1 - \frac{x}{\omega}, \quad \mu_x = \frac{1}{\omega - x}.$$

Сравнение графиков этих функций с реальными графиками функции выживания *s(x)*, функции смертей *f(x)*, интенсивности смертности μ_x показывает, что закон де Муавра является не очень хорошим приближением. Например, первая формула означает, что кривая смертей *f(x)* является горизонтальной линией, в то время как эмпирические данные указывают на пик в районе 80 лет.

В модели, которую предложил в 1825 г. Гомпертц (Gompertz), интенсивность смертности μ_x приближается показательной функцией вида Be^{ax}, где $a > 0$ и $B > 0$ — некоторые параметры. Соответствующая функция выживания *s(x)* имеет вид

$$s(x) = e^{-\frac{B\left(e^{ax}-1\right)}{a}},$$

а кривая смертей

$$f(x) = Be^{\left[ax - B\frac{\left(e^{ax}-1\right)}{a}\right]}.$$

Мэйкхам (Makeham) в 1860 г. обобщил предыдущую модель, приблизив интенсивность смертности μ_x функцией вида $A+Be^{ax}$. Постоянное слагаемое A позволяет учесть риски для жизни, связанные с несчастными случаями (которые мало зависят от возраста), в то время как член Be^{ax} учитывает влияние возраста на смертность. В этой модели

$$s(x) = e^{\left[-Ax - \frac{B\left(e^{ax}-1\right)}{a}\right]}, \qquad f(x) = \left[A + Be^{ax}\right]e^{\left[-Ax - B\frac{\left(e^{ax}-1\right)}{a}\right]}.$$

Второй закон Мэйкхама, введенный в 1889 году, приближает интенсивность смертности μ_x функцией вида $A+Hx+Be^{ax}$. В этой модели

$$s(x) = e^{\left[-Ax - H\frac{x^2}{2} - \frac{B\left(e^{ax}-1\right)}{a}\right]},$$

$$f(x)=\left[A+Hx+Be^{\alpha x}\right]e^{\left[-Ax-H\frac{x^2}{2}-B\frac{\left(e^{\alpha x}-1\right)}{\alpha}\right]}.$$

Вейбулл (Weibull) в 1939 году предложил приближать интенсивность смертности μ_x более простой степенной функцией вида kx^n. В этой модели

$$s(x)=e^{-\frac{kx^{n+1}}{n+1}}, \qquad f(x)=kx^n e^{-\frac{kx^{n+1}}{n+1}}.$$

2. Остаточное время жизни

Страховая компания имеет дело с конкретными людьми, дожившими до определенного возраста. Статистические свойства времени жизни таких людей существенно отличаются от свойств времени жизни новорожденных. Если человек в возрасте x лет обратился в страховую компанию (в актуарной математике такого человека обозначают (x)), то заведомо известно, что он дожил до x лет, и поэтому все случайные события, связанные с этим человеком, должны рассматриваться при условии, что $T>x$.

Для человека в возрасте x лет обычно рассматривают не продолжительность жизни T, а остаточное время жизни $T_x=T-x$. Распределение случайной величины T_x — это условное распределение величины $T-x$ при условии, что $T>x$:

$$F_x(t)\equiv P(T_x<t)=P(T-x<t\,|\,T>x)=\frac{P(x<T<x+t)}{P(T>x)}=$$

$$=\frac{F(x+t)-F(x)}{1-F(x)}=\frac{s(x)-s(x+t)}{s(x)}=\frac{l_x-l_{x+t}}{l_x}.$$

Соответствующая функция выживания $s_x(t)\equiv 1-F_x(t)$ дается формулой:

$$s_x(t)=\frac{s(x+t)}{s(x)},$$

так что плотность $f_x(t)$ случайной величины T_x может быть подсчитана по формуле:

$$f_x(t)=\frac{f(x+t)}{1-F(x)}, \quad 0\le t<\infty$$

Интенсивность смертности, связанная с величиной T_x, есть

$$\mu_x(t)=\frac{f_x(t)}{\overline{F}(x)}=\frac{\dfrac{f(x+t)}{s(x)}}{\dfrac{s(x+t)}{s(x)}}=\frac{f(x+t)}{s(x+t)}=\mu_{x+t}$$

Это соотношение означает, что интенсивность смертности спустя время t для человека, которому сейчас x лет, равна интенсивности смертности в возрасте $x+t$ для новорожденного. Иными словами, интенсивность смертности в данном возрасте $x+t$ не зависит от уже прожитых лет.

Основные величины, связанные с остаточным временем жизни

Вероятность $P(T_x<t)$ (т.е. вероятность смерти человека возраста x лет в течение ближайших t лет) в актуарной науке обозначается символом ${}_tq_x$. Из приведенных выше формул для $F_x(t)$ следует, что

$${}_tq_x=\frac{s(x)-s(x+t)}{s(x)}=\frac{l_x-l_{x+t}}{l_x}$$

Дополнительная вероятность $P(T_x>t)$ (т.е. вероятность того, что человек в возрасте x лет проживет еще, по меньшей мере, t лет) в актуарной науке обозначается символом ${}_t\,q_x$:

$${}_tp_x\equiv P(T_x>t)=\frac{s(x+t)}{s(x)}=\frac{l_{x+t}}{l_x}$$

Случай t=1 играет особую практическую роль и встречается наиболее часто. Для него принято опускать передний индекс у переменных ${}_t q_x$. и ${}_t p_x$.. Таким образом, символ q_x обозначает вероятность того, что человек в возрасте x лет умрет в течение ближайшего года, а символ p_x обозначает вероятность того, что человек в возрасте x лет проживет еще, по меньшей мере, один год. Из приведенных выше общих формул мы имеем:

$$q_x \equiv P(T_x < 1) = \frac{s(x) - s(x+1)}{s(x)}, \quad p_x \equiv P(T_x > 1) = \frac{s(x+1)}{s(x)}.$$

С помощью вероятностей p_x можно подсчитать и более общие вероятности ${}_t p_x$:

$${}_t p_x = p_x p_{x+1} \Lambda \; p_{x+t-1}.$$

Рассмотрим теперь более общее событие, заключающееся в том, что человек возраста x проживет еще t лет, но умрет на протяжении u последующих лет.

В терминах остаточного времени жизни T_x это событие можно выразить двойным неравенством: $t < T_x < t + u$. Его вероятность обозначается ${}_{t|u}q_x$

$${}_{t|u}q_x \equiv P(t < T_x < t+u) = {}_{t+u}q_x - {}_t q_x = \frac{s(x+t) - s(x+t+u)}{s(x)}.$$

Случай $u=1$ представляет особый интерес для приложений к страхованию жизни. Как обычно, соответствующий индекс принято опускать. Итак, ${}_t q_x$ – это вероятность того, что человек в возрасте x лет проживет еще t лет, но умрет на протяжении следующего года. Приведенные выше общие формулы дают:

$${}_{t|}q_x \equiv P(t < T_x < t+1) = {}_{t+1}q_x - {}_t q_x = \frac{s(x+t) - s(x+t+1)}{s(x)}.$$

Макрохарактеристики остаточного времени жизни

Среднее значение остаточного времени жизни человека в возрасте x лет, обозначается $\overset{\circ}{e}_x$ и называется **полной ожидаемой продолжительностью жизни (the complete-expectation-of-life):**

$$\overset{\circ}{e}_x \equiv ET_x = \int_0^{\infty} P(T_x > t)dt = \frac{1}{s(t)}\int_x^{\infty} s(u)du.$$

Для второго момента T_x верна аналогичная формула:

$$E(T_x)^2 = \frac{2}{s(t)}\int_0^{\infty} ts(x+t)dt$$

Среднее остаточное время жизни можно выразить и через другие характеристики времени жизни. С этой целью рассмотрим группу из l_0 новорожденных и обозначим через σ_x суммарное число лет, прожитых представителями этой группы в возрасте x и более. Таким образом, если время жизни i-го представителя группы, $T^{(i)}$ меньше чем x, его вклад в сумму σ_x равен 0. Если же $T^{(i)}>x$, то вклад в сумму равен $T^{(i)}-x$.

Тогда

$$E\sigma_x = l_x \overset{\circ}{e}_x.$$

Среднее значение величины $min(T_x, n)$, где n – некоторая положительная константа, называют **частичной средней продолжительностью жизни** и обозначают $\overset{\circ}{e}_{x\bar{n}|}$; для нее верна формула

$$\overset{\circ}{e}_{x\bar{n}|} = \frac{1}{s(x)}\int_x^{x+n} s(u)du\,3.$$

Пример 2. Используя таблицу

Таблица 1

x	$s(x)$	x	$s(x)$	x	$s(x)$
0	1,000	40	0,949	80	0,432
5	0,985	45	0,936	85	0,280
10	0,983	50	0,915	90	0,142
15	0,982	55	0,883	95	0,050
20	0,977	60	0,837	100	0,012
25	0,971	65	0,771	105	0,002
30	0,965	70	0,682	110	0
35	0,958	75	0,568		

для функции выживания, определите вероятность ${}_{40|10}q_{20}$ того, что остаточное время жизни человека, которому сейчас 20 лет, T_{20}, лежит в промежутке от 40 до 50 лет.

Решение

По формуле условной вероятности мы имеем:

$$ {}_{40|10}q_{20} = P(40 < T_{20} < 50) = P(40 < t - 20 < 50 \,|\, T > 0) = \frac{P(60 < T < 70)}{P(T > 20)} = $$

$$ = \frac{s(60) - s(70)}{s(20)} = \frac{0{,}837 - 0{,}682}{0{,}977} \approx 0{,}16. $$

Упражнение

В табл. 1 приведены значения функции выживания. Подсчитайте среднее значение и дисперсию числа, представителей исходной группы в l_0=1000 новорожденных, которые умрут в возрасте от 50 до 70 лет.

Пример 3. Предположим, что функция выживания дается формулой

$$ s(x) = \sqrt{1 - \frac{x}{110}}, \qquad 0 \le x \le 110. $$

Подсчитайте вероятность q_{50} того, что человек в возрасте 50 лет умрет в течение ближайшего года.

Решение

По формуле условной вероятности мы имеем:

$$q_{50}=P(T_{50}<1)=P(T-50<1|T>50)=\frac{P(50<T<51)}{P(T>50)}=\frac{s(50)-s(51)}{s(50)}=$$

$$=1-\frac{\sqrt{1-\frac{51}{110}}}{\sqrt{1-\frac{50}{110}}}=1-\sqrt{\frac{59}{60}}\approx 0{,}84\%.$$

Дополнительная функция распределения величины $T(50)$ дается формулой:

$$q_{50}=P(T(50)>1)=P(T-50>T|T>50)=\frac{P(T>t+50)}{P(T>50)}=$$

$$=\frac{s(50+t)}{s(50)}=\sqrt{1-\frac{t}{60}}\approx 0{,}84\%,\qquad 0\le t\le 60.$$

Упражнение

В условиях примера 3 подсчитайте среднее остаточное время жизни человек в возрасте 50 лет, который умрет в течение ближайшего года.

3. Округленное время жизни

Обычно люди ведут счет прожитых лет целыми годами, а страховые компании обычно заключают договоры страхования жизни на 1, 3, 5 и т. п. целое число лет. В связи с этим естественно рассмотреть наряду с обычной продолжительностью жизни T_x ее целую часть $K_x=[T_x]$. Таким образом, если, например, $T_x=18$ *лет 9 месяцев* $=18{,}75$ *лет*, то $K_x=18$. Величина K_x называется **округленной остаточной продолжительностью жизни (curtate-future-life-time).** Следует подчеркнуть, что округление производится не до ближайшего целого, а всегда с недостатком (т.е. до ближайшего целого, меньшего, чем данное дробное число). В этом смысле английский термин **curtate («урезанная»)** – точнее, чем принятый нами термин «округленная».

Распределение округленного времени жизни

Поскольку случайная величина K_x принимает только целые значения, ее стохастическая природа характеризуется (как это принято в теории вероятностей) не функцией распределения, а распределением, т.е. набором вероятностей $P(K_x = k)$, $k = 0,1,2,\ldots$. Так как событие $\{K_x = k\}$ эквивалентно тому, что $\{k < K_x < k+1\}$, верны равенства:

$$P(K_x = k) = \frac{s(x+k) - s(x+k+1)}{s(x)} = \frac{l_{x+k} - l_{x+k+1}}{l_x} = \frac{d_{x+k}}{l_x}.$$

Среднее, округленное время жизни и его дисперсия

Математическое ожидание случайной величины K_x называется **средней округленной продолжительностью жизни (curtate-expectation-of-life) и обозначается** e_x:

Подобным же образом для второго момента $E(K_x)^2$, который необходим для расчета $VarK_x$, мы имеем:

$$E(K_x)^2 = \frac{2}{s(x)}\sum_{k=1} ks(x+s) - e_x.$$

Более интересной является рекуррентная формула

$$e_x = p_x \cdot (1 + e_{x+1})$$

откуда вытекает следующее соотношение, связывающее среднее округленное время жизни и вероятность смерти в течение ближайшего года:

$$q_x = \frac{1 + e_{x+1} - e_x}{1 + e_{x+1}}$$

4. Таблицы продолжительности жизни (таблицы смертности)

Статистические данные о продолжительности жизни суммируются в таблицах **продолжительности жизни (life tables)**; иногда их называют **таблицами смертности (mortality tables).** Простейшим видом таблиц являются таблицы, содержащие информацию о статистических свойствах времени жизни случайно выбранного человека, относительно которого известен только его возраст. Такие таблицы называют **общими или упрощенными (aggregate tables).** Они позволяют получить общую приближенную картину смертности. Примером таких таблиц могут служить популяционные таблицы, содержащие данные о смертности населения. В принципе для решения любой задачи достаточно знания функции выживания $s(x)$, однако для наглядности в таблицы обычно включают введенные ранее величины:

1) $l_x = l_0 \cdot s(x)$ – среднее число живых представителей некоторой группы из l_0=100000 новорожденных к возрасту x лет;

2) $d_x = l_x - l_{x+1}$ – число представителей группы, умерших в возрасте от x до $x+1$ лет;

3) $q_x = \frac{d_x}{l_x}$ - вероятность смерти в течение года для человека в возрасте x лет;

4) $\overset{\circ}{e}_x$ – среднее остаточное время жизни.

В качестве шага таблицы обычно рассматривают 1 год, т. е. табулируют значения различных функций от x для x=0,1,2,... лет.

Таблицы отбора риска

Очевидно, что статистические свойства продолжительности жизни совершенно различны у жителя высокоразвитой страны Запада и жителя бедного африканского государства, поэтому абсолютно общая таблица вообще не представляет реального интереса.

Однако ясно, что и среди жителей одной страны существуют различные группы людей с разными характеристиками продолжительности жизни. Прежде всего, важно отметить, что смертность среди мужчин в несколько раз выше смертности среди женщин. Вероятно, смертность среди домохозяек меньше, чем среди шахтеров; смертность среди людей, прошедших медицинскую комиссию перед заключением договора страхования, меньше, чем в среднем по стране; смертность среди людей, вышедших на пенсию по болезни, наоборот, выше (конечно, во всех случаях мы должны сравнивать людей в одном возрасте x). Но ведь страховая компания имеет дело не с абстрактными людьми, а с вполне конкретными, относительно которых доступна определенная информация (пол, профессия, перенесенные болезни и т.д.). Поэтому ясно, что компания должна иметь целый спектр таблиц продолжительности жизни для различных групп населения. Такие таблицы называются таблицами **с отбором (select tables) или таблицами отбора риска**. Обычно создается несколько базовых таблиц, а многочисленные дополнительные риски учитываются с помощью руководств по андеррайтингу, которые дают соответствующие коэффициенты (или аддитивные надбавки) к базовым тарифам. Моральные опасности обычно учитывают юридическими ограничениями и уменьшением страховой суммы.

Термин «отбор» связан с тем, что люди попадают в группу, для которой составляется таблица, после некоторого отбора. Иногда этот отбор кем-то специально проводится (например, медицинской комиссией перед заключением договора страхования), иногда человек сам отбирает себя (например, при оформлении пожизненной ренты), иногда это происходит по причине внешних обстоятельств (например, при оформлении пенсии по болезни). Смертность среди людей, включенных в такую группу, зависит не только от возраста x, но и от того, когда произошел отбор. Рассмотрим, например, людей, успешно прошедших медицинский андеррайтинг и заключивших договоры страхования жизни. Ясно, что вероятность смерти в течение ближайшего года человека из этой группы существенно меньше, чем вероятность смерти в течение ближайшего года случайно выбранного человека в том же возрасте. Более интересно то, что вероятность смерти в течение ближайшего года человека, только что прошедшего отбор, меньше, чем вероятность смерти в течение года человека в том же возрасте, но прошедшего отбор несколько лет тому назад. Например, вероятность смерти мужчины в возрасте 52 года по данным страховой статистики Великобритании за 1970–1972 гг. составляет 0,344% для первого года договора, 0,429% — если с момента заключения договора прошел уже год и 0,603%, если договор был заключен 2 или больше лет тому назад.

В связи с этим величины, включенные в таблицы с отбором, имеют два аргумента: один показывает момент отбора x, а второй — время t, прошедшее с момента отбора. Чтобы указать эту зависимость, в актуарной математике не пишут $f(x,t)$ или $f_{x,t}$ (как мы это сделали бы в общем курсе математики), а употребляют следующее обозначение:

$$f_{[x]+t}$$

При фиксированном возрасте $x+t$ и моменте отбора $[x]$ (или, что то же самое, промежутке времени t, прошедшем с момента отбора) величина вида $f_{[x]+t}$ ничем принципиально не отличается от величины f_{x+t} (мы лишь явно указываем некоторое дополнительное условие, при котором она рассматривается). Поэтому для характеристик продолжительности жизни «отобранных* людей справедливы все приведенные выше результаты, включая введенные там обозначения (точно так же, как для условных вероятностей в классическом курсе теории вероятностей справедливы все теоремы, доказанные для обычных вероятностей). Например,

1) $q_{[x]+t}$ — обозначает условную вероятность смерти в течение года человека в возрасте $x+t$ лет, который t лет назад (т.е. в возрасте x лет) был отобран в группу;

2) $p_{[x]+t}$ — это вероятность того, что человек в возрасте $x+t$ лет, который был t лет назад (т. е. в возрасте x лет) отобран в группу, проживет еще, по меньшей мере, год;

3) ${}_{n}q_{[x]+t}$ — вероятность того, что человек в возрасте $x+t$ лет, который был t лет назад, умрет на протяжении ближайших n лет;

4) ${}_{n}p_{[x]+t}$ — вероятность того, что человек в возрасте $x+t$ лет, который отобран t лет назад, проживет еще, по меньшей мере, n лет;

5) ${}_{n|m}q_{[x]+t}$ — вероятность того, что человек в возрасте $x+t$ лет, который отобран t лет назад, проживет еще n лет, но умрет на протяжении m последующих лет;

6) ${}_{n}q_{[x]+t}$ — вероятность того, что человек в возрасте $x+t$ лет, который отобран t лет назад, проживет еще n лет, но умрет на протяжении следующего года.

Все эти вероятности могут быть выражены через вероятности $q_{[x]+t}$.

Пример 4.

$$p_{[x]+t} = 1 - q_{[x]+1}; \qquad {}_{n}p_{[x]+t} = p_{[x]+t} \cdot p_{[x]+t+1} \cdot \Lambda \cdot p_{[x]+t+n-1}.$$

Упражнение

Аналогично все остальные вероятности выразить через вероятности $q_{[x]+t}$.

Таблицы с отбором ограниченного действия

Тонкий статистический анализ показывает, что обычно влияние отбора продолжается неограниченно долго. Однако, как правило, зависимость характеристик смертности от времени, прошедшего с момента отбора, быстро уменьшается и через некоторое время (с той или иной степенью точности) эти характеристики зависят только от достигнутого возраста. Следует подчеркнуть, что само влияние отбора сохраняется, в том смысле, что эти характеристики отличаются от популяционных.

Промежуток времени t, после которого зависимостью от момента отбора можно пренебречь и рассматривать все характеристики продолжительности жизни только как функции достигнутого возраста, называется (хотя этот термин не очень верно передаст суть дела) **периодом действия отбора (select period).**

Соответствующая таблица называется **таблицей с отбором ограниченного действия (select-and-ultimate table).** Предельные значения q_x (которые заменяют $q_{[x-t]+t}$ при $t \geq r$) образуют так называемую **предельную таблицу (ultimate table).** По своей структуре она является таблицей простейшего типа.

Расчет характеристик смертности среди представителей выделенной группы может быть значительно упрощен, если вместо вероятностей $q_{[x]+t}$ ввести в рассмотрение специальные величины $l_{[x]+t}$, которые аналогичны величинам l_{x+t} из общих таблиц смертности.

Рассмотрим некоторую таблицу с отбором, действующим r лет, и определим величины $l_{[x]+t}$ помощью следующей формулы:

$$l_{[x]+t} = \frac{l_{[x]+t+1}}{p_{[x]+t}}.$$

Поскольку период действия отбора равен r, мы полагаем

$$l_{[x]+t} = l_{x+t} \qquad \text{если} \qquad t \geq r.$$

Тогда

$$p_{[x]+t} = \frac{l_{[x]+t+1}}{l_{[x]+t}}, \qquad q_{[x]+t} = \frac{l_{[x]+t} - l_{[x]+t+1}}{l_{[x]+t}},$$

так что величины $l_{[x]+t}$ могут использоваться в качестве первичных характеристик смертности среди представителей выделенной группы. Однако важнее то, что более сложные характеристики смертности, такие как

$${}_nq_{[x]+t}, \quad {}_np_{[x]+1}, \quad {}_{n|m}q_{[x]+t}, \quad {}_{n|}q_{[x]+t}$$

могут быть проще выражены через величины $l_{[x]+t}$, чем величины $q_{[x]+t}$.

Пример 5.

$$ {}_{n}q_{[x]+t} = \frac{l_{[x]+t} - l_{[x]+t+n}}{l_{[x]+t}}, \quad {}_{n|m}q_{[x]+t} = \frac{l_{[x]+t+n} - l_{[x]+t+n+m}}{l_{[x]+t}}. $$

Упражнение

Следующие характеристики смертности: ${}_{n}p_{[x]+1}$, ${}_{n|}q_{[x]+t}$ выразить через величину $l_{[x]+t}$.

Для дальнейшего упрощения формул можно ввести величины

$$ d_{[x]+t} = l_{[x]+t} - l_{[x]+t+1} $$

так что, например,

$$ q_{[x]+t} = \frac{d_{[x]+t}}{l_{[x]+t}}. $$

Поэтому часто в таблицы с отбором ограниченного действия включаются только величины $l_{[x]+t}$.

5. Приближения для дробных возрастов

Реальные статистические данные о смертности доступны в виде таблиц, в которые входят вероятности q_x, величины l_x, e_x и т.п. для целочисленных значений возраста x. Это означает, что все формулы в актуарной математике должны быть приведены к виду, включающему только эти величины. Однако все основные формулы для расчета премий, резервов и других величин, необходимых для ведения страхового бизнеса, содержат интегралы (с подынтегральной функцией, включающей функцию выживания $s(x)$). Таким образом, мы должны знать функцию выживания для всех действительных значений аргумента x, а не только для целочисленных.

Эта задача может рассматриваться как задача интерполяции. В актуарной математике обычно решают эту задачу, постулируя тот или иной вид функцииs (x) между узлами интерполяции, т.е. получают искомую функцию $s(x)$, склеивая в целочисленных точках более простые функции. Основными являются три следующих постулата.

1⁰. Равномерное распределение смертей

Самой простой является интерполяция линейными функциями:

$$s(x)=(n+1-x)s(n)+(x-n)s(n+1),\quad n\leq x\leq n+1.$$

Записывая x в виде $x=n+t$, где $0\leq t<1$, этой формуле можно придать вид:

$$s(n+t)=(1-t)s(n)+ts(n+1),\quad 0\leq t\leq 1.$$

Для плотности $f(x)$ это приближение дает:

$$f(x)=-s'(x)=s(n)-s(n+1),\quad n<x<n+1.$$

Соответственно для интенсивности смертности μ_x мы имеем следующее приближение:

$$\mu_x=\frac{q_n}{1-(x-n)q_n},\quad n<x<n+1.$$

или, что то же самое,

$$\mu_{n+t}=\frac{q_n}{1-tq_n},\quad 0<t<1.$$

Отметим, что в целочисленных точках плотность $f(x)$ и интенсивность смертности μ_x не определены.

Одно из наиболее важных следствий предположения о линейной интерполяции функции выживания заключается в следующем. Рассмотрим величину ${}_tq_n$ (n - целое, $t\in(0,1)$. Для нее имеем:

$${}_tq_n=tq_n.$$

Итак, в предположении о линейной интерполяции функции выживания вероятность смерти в течение части года пропорциональна длине этой части.

Верно и обратное утверждение, если вероятность смерти в течение (начальной) части года пропорциональна длине этой части (т.е. ${}_t q_n = tq$), то для дробных возрастов (между двумя соседними целыми) функция выживания является линейной.

Введем теперь случайную величину τ_x равную дробной части величины T_x:$\tau_x=\{T_x\}$. Таким образом, $T_x=K_x+\tau_x$, где K_x – округленное время жизни. Величина τ_xописывает момент смерти внутри года, для рассматриваемой интерполяции

1) случайная величина τ_x равномерно распределена на (0,1);

2) случайные величины K_x и τ_x – независимы.

Верно и обратное утверждение, если случайная величина $\tau \equiv \tau_0$ равномерно распределена на (0,1) и не зависит от $K \equiv K_0$, то для дробных возрастов (между двумя соседними целыми) функция выживания является линейной.

2⁰. Постоянная интенсивность смертности

Если приближать функцию выживания $s(x)$ на отрезке $n \le x \le n+1$ показательной функцией $a_n e^{-b_n x}$, то

$$s(x) = s(n) p_n^{x-n}, \qquad n \le x \le n+1$$

Записывая x в виде $x = n + t$, где $0 \le t < 1$, этой формуле можно придать вид

$$s(n+t) = s(n) p_n^t, \qquad 0 \le t \le 1$$

Для плотности $f(x)$ это приближение даст

$$f(x) = -s(n) p_n^{x-n} \ln p_n, \quad n < x < n+1.$$

Отсюда для интенсивности смертности μ_x мы имеем следующее приближение:

$$\mu_x = -\ln p_n, \quad n < x < n+1,$$

т.е. рассматриваемой интерполяции соответствует предположение о постоянной интенсивности смертности между двумя днями рождений.

3⁰. Предположение Балдуччи (Balducci)

Эта гипотеза, широко известная в Северной Америке как предположение Балдуччи, внешне похожа на предположение о равномерном распределении смертей, однако, в отличие от последнего, линейными функциями интерполируется $\frac{1}{s(x)}$.

Это приводит к следующим формулам (ниже 0<t<1):

$$s(n+t)=\frac{s(n+1)}{p_n+tq_n}, \quad f(n+t)=\frac{s(n+1)q_n}{(p_n+tq_n)^2}, \quad \mu_{n+1}=\frac{q_n}{p_n+tq_n}.$$

Одно из наиболее важных следствий предположения Балдуччи заключается в следующем. Рассмотрим величину ${}_{1-t}q_{n+t}$ (вероятность такого рода появляется при оценке резервов для дробных моментов времени). Для нее имеем:

$$ {}_{1-t}q_{n+t}=(1-t)q_n .$$

Итак, в предположении Балдуччи вероятность смерти до очередного дня рождения пропорциональна времени до этого дня рождения.

Верно и обратное утверждение, если вероятность смерти до очередного дня рождения пропорциональна времени до этого дня рождения (т.е. ${}_{1-t}q_{n+t}=(1-t)q_n$), то для вида функции выживания для дробных возрастов (между двумя соседними целыми) верно предположение Балдуччи.

Вопросы для самопроверки

1. Что является основным фактором риска при страховании жизни?
2. Что делают для создания адекватной теории для страхования жизни, которая учитывает неопределенность момента смерти – основного фактора риска?
3. Что называют функцией выживания:
4. График какой функции называют кривой смертей?

5. Какая величина называется интенсивностью смертности?

6. С практической точки зрения какие макрохарактеристики продолжительности жизни являются важными. Перечислите их.

7. Как вводится случайная величина – остаточное время жизни? Что можно сказать о распределении этой величины?

8. Приведите основные величины, связанные с остаточным временем жизни.

9. Прокомментируйте макрохарактеристики остаточного времени жизни.

10. Как вводится случайная величина – округленное время жизни? Что можно сказать о распределения этой величины?

11. Что называют таблицы продолжительности жизни (таблицы смертности)?

12. Какие таблицы называют таблицами отбора? Что называют таблицей отбора риска?

13. Как определяются вероятности смерти для частей года? При каких предположениях эту задачу можно привести к задаче интерполяции? Разъясните предположения Балдуччи.

Задачи для практического занятия

1. Какая из следующих функций может рассматриваться в качестве функции выживания:

$$1)\ s(x)=e^{x-0{,}(2^x-1)};\quad 2)\ s(x)=\frac{1}{(1+x)^2};\quad 3)\ s(x)=e^{-x^2}.$$

2. Покажите, что

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{a^2}\,e^{-\frac{x}{a}}, & \textit{если}\ 0<x<+\infty,\\ 0, & \textit{в противном случае}.\end{cases}$$

может рассматриваться как кривая смертей.

Найдите соответствующие функцию выживания $s(x)$ и интенсивность смертности μ_x, а также подсчитайте среднюю продолжительность жизни $\overset{\circ}{e}_0$.

3. В таблице 1 приведены значения функции выживания.

Таблица 1

x	$s(x)$	x	$s(x)$	x	$s(x)$
0	1,000	40	0,949	80	0,432
5	0,985	45	0,936	85	0,280
10	0,983	50	0,915	90	0,142
15	0,982	55	0,883	95	0,050
20	0,977	60	0,837	100	0,012
25	0,971	65	0,771	105	0,002
30	0,965	70	0,682	110	0
35	0,958	75	0,568		

Подсчитайте среднее значение и дисперсию числа, представителей исходной группы в l_0=1000 новорожденных, которые умрут в возрасте от 50 до 70 лет.

4. Смертность среди застрахованных характеризуется постоянной интенсивностью μ, которая является случайной величиной, равномерно распределенной на промежутке (0; 2).

Подсчитайте вероятность того, что случайно выбранный застрахованный умрет на протяжении ближайшего года.

5. Используя таблицу 1 для функции выживания, определите вероятность ${}_{40|10}q_{20}$ того, что остаточное время жизни человека, которому сейчас 20 лет, T_{20}, лежит в промежутке от 40 до 50 лет.

6. Предположим, что в возрасте от 30 до 33 лет интенсивность смертности может быть описана формулой $\mu_x = 0{,}001x$. Подсчитайте ${}_2q_{30}$.

7. Известно, что $\mu_{x+t} = \frac{1}{85-t} + \frac{3}{105-t}$, $0 < t < 85$ Подсчитайте ${}_{20}p_x$.

8. Предположим, что функция выживания дается формулой

$$s(x)=\sqrt{1-\frac{x}{110}}, \qquad 0 \le x \le 110.$$

Подсчитайте вероятность q_{50} того, что человек в возрасте 50 лет умрет в течение ближайшего года.

9. Докажите, что ${}_{m|n}q_x = {}_mp_x - {}_{m+n}p_n$

10. Специалисты предполагают, что разработка определенного нового типа лекарств увеличит $\overset{\circ}{e}_{30}$ на 4 года. Считая, что смертность описывается (как до разработки лекарств, так и позже) законом де Муавра, определите как изменится предельный возраст.

11. Найдите $\overset{\circ}{e}_{35:\overline{10}|}$, если

$$\mu_t = \begin{cases} 0{,}01 & при\ t \in (30;40), \\ 0{,}02 & при\ t \in (40;50). \end{cases}$$

12. Время жизни некоторого конкретного человека в возрасте 25 лет описывается законом де Муавра с предельным возрастом ω = 100 лет. В наступающем году он предполагает участвовать в серии полетов на воздушном шаре. Поэтому на протяжении этого года его смертность будет характеризоваться постоянной интенсивностью $\mu = 0{,}1$.

Как это повлияет на его среднее частичное остаточное время жизни на протяжении 11 ближайших лет?

13. Используя данные таблицы 2, найдите $\overset{\circ}{e}_{30:\overline{5}|}$ в предположении о линейной интерполяции функции выживания для дробных возрастов.

Таблица 2

x	30	31	32	33	34	35
l_x	96 307	96 117	95 918	95 709	95 490	95 260

14. Интенсивность смертности описывается, законом Мейкхама

$$\mu_x = A + Be^{\alpha x}, \quad x \geq 0,$$

с параметрами α=2 и B=1.

Определите значение параметра A, если ${}_{0,4}p_0$=0,50.

15. Известно, что для некоторого возраста x

$${}_t p_x = 1 - \left(\frac{t}{100}\right)^{1,5}, \qquad 0 < t < 100.$$

Подсчитайте $\mathring{e}_x$.

16. Известно, что e_{75}=10,5; e_{76}=10,0; e_{77}=9,5. Подсчитайте вероятность того, что человек в возрасте 75 лет доживет до 77 лет.

17. Как изменится средняя округленная продолжительность жизни человека в возрасте x лет, если на протяжении ближайшего года его интенсивность смерти увеличится на величину $\delta_t = 0{,}03 - 0{,}01t, \quad 0 < t < 1$?

18. Какие из следующих утверждений верны:

1) ${}_{t+r}p_x \geq {}_r p_{x+t} \qquad (t, r \geq 0)$;

2) ${}_t q_{x+t} \geq {}_{t|r} q_x \qquad (t, r \geq 0)$

3). Если $s(x)$ описывается законом де Муавра, то медиана остаточного времени жизни (x) равна среднему остаточному времени жизни (x).

§9. СТРАХОВАНИЕ ЖИЗНИ

1. Краткосрочное страхование жизни

В актуарной математике модели страхования жизни условно делят на две большие группы в зависимости от того, принимается или нет в расчет доход от инвестирования собранных премий. Если нет, то мы говорим о **краткосрочном страховании (short-term insurance)**; обычно в качестве такого «короткого» интервала мы будем рассматривать интервал в 1 год. Если же да, то мы говорим **о долгосрочном страховании (long-term insurance)**. Конечно, это деление условное и, кроме того, долгосрочное страхование связано с рядом других обстоятельств, например, андеррайтингом.

Простейший вид страхования жизни заключается в следующем.

Страхователь платит страховой компании p д.ед. (эта сумма называется **страховой премией — premium**); страхователем может быть сам застрахованный или другое лицо (например, его работодатель).

В свою очередь страховая компания обязуется выплатить лицу, в пользу которого заключен договор, страховую сумму (sum assured) b д.ед. в случае смерти застрахованного в течение года по причинам, перечисленным в договоре (и не платит ничего, если он не умрет в течение года или умрет по причине, которая не покрывается договором).

Страховая сумма часто принимается равной 1 или 1000. Это означает, что премия выражается как доля от страховой суммы или на 1000 страховой суммы соответственно.

Нетто-премия

Величина **страховой выплаты (benefit)**, конечно, много больше, чем страховая премия, и нахождение «правильного» соотношения между ними — одна из важнейших задач актуарной математики.

Вопрос о том, какую плату страховая компания должна назначать за то, что принимает на себя тот или иной риск, крайне сложен. При его решении учитывается большое число разнородных факторов: вероятность наступления страхового случая, его ожидаемая величина и возможные флуктуации, связь с другими рисками, которые уже приняты компанией, организационные расходы компании на ведение дела, соотношение между спросом и предложением по данному виду рисков на рынке страховых услуг и т. д. Однако, основным обычно является принцип эквивалентности финансовых обязательств страховой компании и застрахованного.

В рассмотренной выше простейшей схеме страхования, когда плата за страховку полностью вносится в момент заключения договора, обязательство застрахованного выражается в уплате премии p. Обязательство компании заключается в выплате страховой суммы, если наступит страховой случай. Таким образом, денежный эквивалент обязательств страховщика, X, является случайной величиной:

$$X = \begin{cases} b, & \textit{если наступил страховой случай}, \\ 0, & \textit{в противном случае}. \end{cases}$$

В простейшей форме принцип эквивалентности обязательств выражается равенством

$$p = EX,$$

т.е. в качестве платы за страховку назначается ожидаемая величина убытка. Эта премия называется **нетто-премией (net premium)**.

Защитная надбавка

Купив за фиксированную премию p ден. ед. страховой полис, страхователь избавил выгодоприобретателя от риска финансовых потерь, связанных с неопределенностью момента смерти застрахованного. Однако сам риск не исчез; его приняла на себя страховая компания.

Поэтому равенство $p = EX$ на самом деле не выражает эквивалентности обязательств страхователя и страховщика. Хотя в среднем и страховщик, и страхователь платят одну и ту же сумму, страховая компания имеет риск, связанный с тем, что в силу случайных обстоятельств ей, может быть, придется выплатить гораздо большую сумму, чем EX. Страхователь же такого риска не имеет. Поэтому было бы справедливо, чтобы плата за страховку включала некоторую надбавку l, которая служила бы эквивалентом случайности, влияющей на компанию. Эту надбавку называют **страховой (или защитной) надбавкой (или нагрузкой) (security loading)**, а $\theta = \frac{l}{EX}$ — **относительной страховой надбавкой (relative security loading).** Величина защитной надбавки определяется такой, чтобы вероятность того, что компания будет иметь потери по некоторому портфелю договоров («разорится»), была достаточно малой величиной.

Следует отметить, что реальная плата за страховку (брутто-премия или офисная премия) — больше нагруженной нетто-премии (часто в несколько раз). Разница между ними позволяет страховой компании покрыть административные расходы, обеспечить доход и т. д.

Модель индивидуальных потерь

Точный расчет защитной надбавки может быть произведен в рамках теории риска.

Простейшей моделью функционирования страховой компании, предназначенной для расчета вероятности разорения, является **модель индивидуального риска**. Она базируется на следующих упрощающих предположениях:

1) анализируется фиксированный относительно короткий промежуток времени (так что можно пренебречь инфляцией и не учитывать доход от инвестирования активов) — обычно это один год;

2) число договоров страхования N фиксировано и неслучайно;

3) премия полностью вносится в начале анализируемого периода; никаких поступлений в течение этого периода нет;

4) мы наблюдаем каждый отдельный договор страхования и знаем статистические свойства связанных с ним индивидуальных потерь X.

Обычно предполагается, что в модели индивидуального риска случайные величины $X_1,..,X_N$ – независимы (в частности, исключаются катастрофы, когда одновременно по нескольким договорам наступают страховые случаи).

В рамках этой модели «разорение» определяется суммарными потерями по портфелю $S=X_1+L+X_N$. Если эти суммарные выплаты больше, чем активы компании, предназначенные для выплат по этому блоку бизнеса, u, то компания не сможет выполнить все свои обязательства (без привлечения дополнительных средств); в этом случае говорят о «разорении».

Итак, вероятность «разорения» компании равна

$$R = P\left(X_1 + \cdots + X_N > u\right).$$

Иными словами, вероятность «разорения» – это дополнительная функция распределения величины суммарных потерь компании за рассматриваемый промежуток времени.

Поскольку суммарные выплаты S представляют собой сумму независимых случайных величин, распределение случайной величины S может быть подсчитано с помощью классических теорем и методов теории вероятностей.

Прежде всего – это использование сверток. Напомним, что если X_1 и X_2 – две независимые неотрицательные случайные величины с функциями распределения $F_1(x)$ и $F_2(x)$ соответственно, то функция распределения их суммы X_1+X_2 может быть подсчитана по формуле

$$F(x)=\int_0^x F_1(x-y)dF_2(y).$$

Применяя эту формулу несколько раз, можно подсчитать функцию распределения суммы любого числа слагаемых.

Если случайные величины X_1 и X_2 – непрерывны, то обычно работают с плотностями $f_1(x)$, $f_2(x)$. Плотность суммы может быть подсчитана по формуле

$$f(x)=\int_0^x f_1(x-y)f_2(y)dy.$$

Если случайные величины X_1 и X_2 – целочисленны, то вместо функций распределения обычно работают с распределениями

$$p_1=P(X_1=n),\ p_2=P(X_2=n).$$

Распределение суммы $p(n)=P(X_1+X_2=n)$ может быть определено по формуле

$$p(n)=\sum_{k=0}^{n} p_1(k)\cdot p_2(n-k)$$

Подсчет вероятности разорения часто упрощается, если использовать производящие функции и/или преобразования Лапласа.

Обычно число застрахованных в страховой компании очень велико. Поэтому подсчет вероятности разорения предполагает расчет функции распределения суммы большого числа слагаемых. В этом случае точный непосредственный численный расчет может привести к проблемам, связанным с малостью вероятностей. Однако обстоятельство, затрудняющее точный расчет, открывает возможность быстрого и простого приближенного расчета. Это связано с тем, что при росте N вероятность $P(X_1+\cdots+X_N\le x)$ часто имеет определенный предел (обычно нужно, чтобы x определенным образом менялось вместе с N, который можно принять в качестве приближенного значения этой вероятности. Точность подобных приближений обычно очень велика и удовлетворяет практические потребности. Основным является нормальное (гауссовское) приближение.

Гауссовское приближение основано на центральной предельной теореме теории вероятностей. Детальное обсуждение этого вопроса увело бы нас слишком далеко в сторону от изучаемого предмета. Поэтому мы ограничимся утверждением, что если число слагаемых велико (обычно достаточно, чтобы N имело бы порядок нескольких десятков), а слагаемые не очень малы и не очень разнородны, то применимо гауссовское приближение для

$$P\left(\frac{S_N - ES_N}{\sqrt{Var\ S_N}} < x\right)$$

Конечно, это утверждение очень неопределенно, но и классическая центральная предельная теорема без точных оценок погрешности не дает ясного указания на сферу применения.

Стандартная гауссовская функция распределения $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ детально изучена в теории вероятностей.

Существуют подробные таблицы как для самой функции распределения $\Phi(x)$, так и для плотности $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Значения 1-$\Phi(x)$ в наиболее интересном диапазоне $1<x<4$ приведены в таблице 1.

Полезно также иметь таблицу квантилей x_a, отвечающих достаточно малой вероятности разорения 1-a; они приведены в табл.2.

Таблица 1

x	$1-\Phi(x)$	x	$1-\Phi(x)$	x	$1-\Phi(x)$
1,0	15,87 %	2,0	2,28 %	3,0	0,14 %
1,1	13,57 %	2,1	1,79 %	3,1	0,10 %
1,2	11,51 %	2,2	1,39 %	3,2	0,069 %
1,3	9,68 %	2,3	1,07 %	3,3	0,048 %
1,4	8,08 %	2,4	0,82 %	3,4	0,034 %
1,5	6,68 %	2,5	0,62 %	3,5	0,023 %
1,6	5,48 %	2,6	0,47 %	3,6	0,020 %
1,7	4,46 %	2,7	0,35 %	3,7	0,011 %
1,8	3,59 %	2,8	0,26 %	3,8	0,007 %
1,9	2,87 %	2,9	0,19 %	3,9	0,005 %

Таблица 2

$1-\alpha$	0,1 %	0,5 %	1 %	2 %
x_α	3,090	2,576	2,326	2,054
$1-\alpha$	3 %	4 %	5 %	10 %
x_α	1,881	1,751	1,645	1,282

Пример 1 . Найдите коэффициент вариации выплат по договору страхования жизни на один год. Страховая сумма b=100000, вероятность смерти застрахованного в течение года q=0,0025.

Решение

Пусть случайная величина X описывает выплаты по договору. Тогда

$$EX = bq = 10^5 \cdot 25 \cdot 10^{-4} = 250,$$

$$Var\,X = b^2 \cdot (1-q) \cdot q = 10^{10} \cdot (1 - 25 \cdot 10^{-4}) \cdot 25 \cdot 10^{-4} \approx 25 \cdot 10^6,$$

так что среднее квадратическое отклонение

$$\sigma_X = \sqrt{Var\ X} \approx 5000,$$

а коэффициент вариации

$$c_X = \frac{\sigma_X}{EX} = \frac{5000}{250} = 20.$$

Пример 2. Страховая компания заключила договор группового страхования $N = 60000$ работников большого предприятия сроком на один год. Страховая сумма равна 1000. Для каждого работника интенсивность смертности на протяжении этого года не меняется с течением времени и имеет вид

$$\mu_x = 0{,}001h,$$

где параметр h описывает состояние здоровья работника. Параметр h является случайной величиной, имеющей равномерное распределение на интервале (1:9). Найдите общую нетто-премию по этому договору.

Решение

Для работника с фиксированным значением состояния здоровья h вероятность смерти в течение рассматриваемого года равна

$$q(h) = 1 - e^{-0{,}001h}.$$

Поэтому для него нетто-премия равна

$$\pi(h) = 1000q(h) = 1000\left(1 - e^{-0{,}00h}\right).$$

Для случайно выбранного работника нетто-премия равна

$$\pi = \int_1^9 \pi(h)\frac{1}{8}dh = 1000\left(1 - \frac{e^{-0{,}001} - e^{-0{,}009}}{0{,}008}\right) \approx 4{,}984867.$$

Соответственно общая нетто-премия равна

$$N\pi \approx 299092.$$

Пример 3. Подсчитайте среднее значение и коэффициент вариации выплат по договору страхования жизни на один год с зависимостью страховой суммы от причины смерти. Страховая сумма при смерти от несчастного случая b_1=5000000, а при смерти от «естественных» причин b_2=5000000. Вероятность смерти в течение года от несчастного случая $q^{(1)}$=0,0005, а вероятность смерти в течение года от «естественных» причин $q^{(2)}$=0,0020 qB) = 0,0020.

Решение

Пусть случайная величина X описывает выплаты по договору. Тогда

$$EX = b_1q^{(1)} + b_2q^{(2)} = 450,$$

$$Var\,X = b_1^2q^{(1)} + b_2^{(2)} - (EX)^2 \approx 14 \cdot 10^6,$$

так что среднее квадратическое отклонение

$$\sigma_X = \sqrt{Var\ X} \approx 12042,$$

а коэффициент вариации

$$c_X = \frac{\sigma_X}{mX} = \approx 26,76.$$

Упражнение

Портфель компании состоит из N = 20 тысяч договоров страхования жизни сроком на 1 год. В соответствии с условиями договора компания выплачивает определенную сумму в случае смерти застрахованного в течение года и не платит ничего, если застрахованный доживет до конца года. Все застрахованные имеют одну и ту же вероятность смерти в течение года, равную q = 0,01. Из 20 тысяч застрахованных N_1 = 10 тысяч человек заключили договор на сумму b_1 = 100000 каждый, N_2 = 5000 человек - на сумму b2 = 200000 каждый, N3 = 4000 человек - на сумму b_3 = 500000 каждый и N_4 = 1000 человек - на сумму b_4= 1 миллион каждый. Относительная страховая надбавка установлена компанией в размере θ = 15%.

Компания заключила договор перестрахования чрезмерных потерь при пределе удержания r = 500000 руб. Перестраховочная компания устанавливает свой тариф на основе той же статистики смертности, что и передающая компания, но с относительной страховой надбавкой θ^* = 20%. Определите, как изменится вероятность «разорения» передающей компании и ее ожидаемый доход.

2. Основные виды долгосрочного страхования жизни

Пожизненное страхование (whole life insurance)

При этом виде страхования фиксированная страховая сумма выплачивается в момент смерти.

Поскольку человек рано или поздно умрет, страховая компания совершенно точно выплатит страховую сумму (если только причина смерти не покрывается условиями договора, например, если смерть наступила в результате противоправных действий застрахованного). Если плата за это покрытие полностью вносится в момент заключения договора, то речь идет о довольно большой сумме, соизмеримой со страховой суммой. Поэтому обычно премии выплачиваются периодически в течение всей жизни или вплоть до достижения застрахованным определенного возраста (скажем, пенсионного, когда его доходы резко снижаются).

Вэтойлекциимыдляпростотырасчетовбудемпредполагать, что по всем рассматриваемым видам страхования премия полностью вносится в момент заключения договора. Денежные потоки, связанные с пожизненным страхованием такого рода, условно изображены на рис. 1.

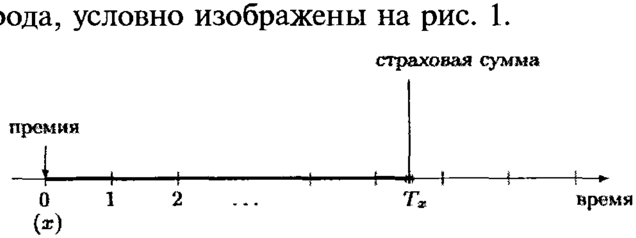


Рис.1

N-летнее временное страхование жизни (n-year term life insurance)

При этом виде страхования выплата фиксированной страховой суммы производится в момент смерти, если застрахованный умер в течение срока действия договора, т.е. на протяжении п лет с момента заключения договора. Если же застрахованный прожил эти п лет, то компания не платит ничего.

В типичных случаях вероятность смерти застрахованного в течение срока действия договора мала, так что премия по этому виду страхования относительно невелика. Поэтому временное страхование часто используют в случаях, когда требуется покрытие на большую сумму.

Страхование с переменной страховой выплатой (varying benefit insurance)

В рассмотренных выше примерах величина страховой выплаты была фиксирована и не зависела от момента выплаты. Существуют многочисленные виды страхования, когда страховое возмещение может меняться. В качестве примера можно привести пожизненное **страхование с непрерывно увеличивающимся страховым возмещением (continuously increasing whole life insurance).** При этом виде страхования компания выплачивает в момент смерти сумму, равную T_x (мы считаем, что денежные суммы измеряются у нас некоторой условной единицей). Страхование с уменьшающейся страховой выплатой возникает в кредитном страховании жизни.

Пожизненное страхование, отсроченное на *m* лет (*m*-year deferred whole life insurance)

При этом виде страхования выплата фиксированной страховой суммы производится в момент смерти застрахованного, но только если она произошла по истечении m-летнего срока с момента заключения договора. Если застрахованный умрет раньше, чем через m лет после заключения договора, страховое возмещение не выплачивается вовсе.

По аналогии с пожизненным страхованием, отсроченным на m лет, можно ввести и другие виды отсроченного страхования, обобщающие ранее введенные виды обычного страхования.

Дискретные договоры

Во всех описанных выше примерах **страховое возмещение (benefit)** выплачивается в виде **одиночной суммы (lump sum)** в момент смерти застрахованного (конечно, в реальности как выгодоприобретателю, так и компании требуется определенное время для подготовки документов) — такие виды страхования часто называют непрерывными. Однако возможны выплаты и в другие моменты времени. Наиболее важен (с теоретической точки зрения) случай, когда выплата производится не в момент смерти, а в следующий за ним день рождения застрахованного — такие виды страхования часто называют дискретными. Если считать (как это обычно делается при актуарных расчетах), что возраст застрахованного в момент заключения договора — целое число, то дискретные договоры можно описать как договоры с выплатой страховой суммы в очередную, после момента смерти, годовщину заключения договора.

Например, при пожизненном страховании с выплатой страховой суммы в конце года смерти страховое возмещение выплачивается в момент

$$[T_x]+1=K_x+1,$$

где K_x — округленное время жизни. Для каждого из рассмотренных ранее непрерывных видов страхования существует дискретный аналог с выплатой страховой суммы в конце года смерти.

В пенсионных схемах центральную роль играют договора другого типа, когда выплата страховой суммы производится не в случае смерти, а в случае дожития до определенного момента. В качестве примеров можно привести:

А. N-летнее чисто накопительное страхование (n-year pure endow- ment insurance

При этом виде страхования выплата страховой суммы фиксированной величины производится в момент *n*, если застрахованный дожил до этого момента. В случае смерти застрахованного до момента *n* страховая сумма не выплачивается (однако обычно такое покрытие предусматривает возврат всех внесенных премий в случае смерти застрахованного до истечения срока действия договора).

Б. N-летнее смешанное страхование (n-year endowment in-surance)

При этом виде страхования выплата фиксированной страховой суммы производится на следующих условиях. Если смерть застрахованного наступит до истечения срока действия договора, то страховая сумма выплачивается в момент смерти. Если же застрахованный дожил до окончания срока действия договора, то страховая сумма выплачивается в момент *n* окончания срока действия договора. Нетрудно понять, что этот вид страхования выполняет функции как собственно страхования (т.е. обеспечивает доход семье застрахованного в случае его смерти), так и накопления средств (т.е. обеспечивает самого застрахованного). Иногда при смешанном страховании страховые суммы, выплачиваемые в случае смерти и в случае дожития, различаются.

3. Актуарная современная стоимость обязательств

С математической точки зрения **долгосрочное страхование (long - term insurance)** характеризуется тем, что при расчетах принимается во внимание изменение ценности денег с течением времени. Поэтому теория долгосрочного страхования существенно опирается на теорию сложных процентов.

В частности, сопоставляя обязательства страхователя и страховщика, мы должны приводить их к одному моменту времени. Скажем, для того, чтобы сформулировать принцип эквивалентности обязательств в момент заключения договора, мы должны привести обязательства страхователя и страховщика именно к этому моменту. Их средние значения называются актуарными современными стоимостями обязательств.

Ниже мы будем предполагать, что интенсивность процентов δ не меняется с течением времени; $i = e^{\delta} - 1$ будет обозначать эффективную годовую процентную ставку, $v = \dfrac{1}{1+i}$ - коэффициент дисконтирования и т. д.

Кроме того, поскольку величина страховой суммы, как правило, фиксирована, в актуарных расчетах мы будем принимать ее в качестве единицы измерения денежных сумм.

Величина обязательств страховой компании по договорам страхования жизни с разовой выплатой единичной страховой суммы, приведенная на момент заключения договора, обозначается буквой Z с дополнительными индексами, описывающими структуру покрытия. Во всех случаях возраст застрахованного на момент заключения договора указывается в виде индекса внизу слева. Если страховая сумма выплачивается в момент смерти («непрерывный» договор), то сверху ставится черта; отсутствие верхней черты означает, что договор «дискретный», т.е. страховое возмещение выплачивается в конце года смерти. Срок действия договора указывается через двоеточие после возраста застрахованного и обрамлен прямым углом (сверху и справа).

Математическое ожидание приведенной стоимости обязательств называется их актуарной современной стоимостью и обозначается буквой A с теми же индексами, что и переменная Z. Например,

для пожизненного страхования

$$\bar{Z}_x = v^{T_x},$$

для временного страхования

$$\bar{Z}^1_{x\overline{n}|} = \begin{cases} v^{T_x}, & если\ T_x < n, \\ 0, & если\ T_x > n. \end{cases}$$

для смешанного страхования

$$\bar{Z}_{x\overline{n}|} = \begin{cases} v^{T_x}, & если\ T_x < n, \\ v^n, & если\ T_x > n. \end{cases}$$

для отложенного страхования

$$_{m|}\bar{Z}_x = \begin{cases} v^{T_x}, & если\ T_x > m, \\ 0, & если\ T_x < m. \end{cases}$$

Пример 4. Договор страхования жизни на три года предполагает выплату страхового возмещения в конце последнего года жизни. Страховая сумма составляет 300 000 в случае смерти застрахованного в первый год действия договора, 350000 в случае смерти застрахованного во второй год действия договора и 400000 в случае смерти застрахованного в третий год действия договора. При актуарных расчетах компания использует техническую процентную ставку i=6% и предполагает, что вероятность смерти застрахованного в k-й год действия договора, q_{x+k}, $k = 0,1,2,...,$ дается формулой:

$$q_{x+k} = 0{,}02 \cdot (k+1).$$

Чему равна актуарная современная стоимость обязательств страховщика по выплате страхового возмещения?

Решение

Пусть T_x – остаточное время жизни застрахованного, $K_x = [T_x]$ – округленное время жизни, $v = (1+i)^{-1}$ – коэффициент дисконтирования, Z – приведенная (на момент заключения договора) стоимость страхового возмещения. По условию

$$Z = \begin{cases} 300000v, \textit{ если } K_x = 0, \\ 350000v^2, \textit{ если } K_x = 1, \\ 400000v^3, \textit{ если } K_x = 2. \end{cases}$$

Поэтому

$$E = 300000v \cdot P(K_x = 0) + 350000v^2 \cdot P(K_x + 1) + 400000v^3 \cdot P(K_X = 2).$$

Но

$$P(K_x = 0) = P(T_x < 1) = q_x = 0{,}02,$$

$$P(K_x = 1) = P(1 < T_x < 2) = {}_{1|}q_x = p_x \cdot q_{x+1} = 0{,}98 \cdot 0{,}04 = 0{,}0392,$$

$$P(K_x = 2) = P(2 < T_x < 3) = {}_{2|}q_x = p_x \cdot p_{x+1} \cdot q_{x+2} = 0{,}98 \cdot 0{,}96 \cdot 0{,}06 = 0{,}056448$$

Значит, EZ=36829

Пример 5. Страховщик заключил большое число однотипных договоров страхования жизни на два года с выплатой 100000 в конце года смерти. Одна треть застрахованных является курильщиками, а две трети – нет. Остаточное время жизни описывается законом

$$_tp_x = e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^2},$$

где θ = 1,5 для курильщиков и θ = 2 для тех, кто не курит.

Компания решила назначить одну разовую премию для всех застрахованных. Определите эту премию, если i = 5% (нагрузка не учитывается).

Решение

Разовая нетто-премия по рассматриваемому виду страхования есть

$$P = 100000 A^{1}_{x:\overline{2|}} = 100000 \cdot \left(v \cdot P(T_x < 1) + v^2 \cdot P(1 < T_x < 2)\right).$$

Но

$$P(T_x < 1) \equiv q_x = 1 - p_x \equiv 1 - {}_1p_x,$$

$$P(1 < T_x < 2) = P(T_x > 1) - P(T_x > 2) \equiv {}_{1|}q_x - {}_2p_x.$$

Для курильщиков:

$$P(T_x < 1) = 0{,}35882, \quad P(1 < T_x < 2) = 0{,}47217.$$

Для тех, кто не курит:

$$P(T_x < 1) = 0{,}2212, \quad P(1 < T_x < 2) = 0{,}41092.$$

Поэтому для курильщиков разовая нетто-премия есть P'=77000, а для тех, кто не курит – 58338. Усредняя эти премии с весами – $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{3}$ – соответственно, мы получим P=64559.

Упражнение

Разовая нетто-премия по договору 20-летнего страхования жизни с человеком в возрасте 40 лет, в соответствии с которым в случае смерти в течение k– года действия договора в конце этого года выплачивается страховая сумма 21-k, равна 13. Страховая компания использовала при расчетах техническую процентную ставку i = 6% и таблицу смертности с $q_{40} = 0{,}2$. Как изменится нетто-премия по этому договору, если q_{40} уменьшится в 2 раза до величины q_{40}^{*}=0.1?

Вопросы для самопроверки

1. В актуарной математике на какие группы делят модели страхования жизни?
2. В чем заключается простейший вид страхования жизни?
3. Что называется нетто-премией?

4. *Что называется защитная надбавка?*

5. Какой модель является самой простейшей моделью функционирования страховой компании, предназначенной для расчета вероятности разорения?

6. На каких упрощающих предположениях базируется модель индивидуальных потерь?

7. Что называется пожизненным страхованием?

8. Какие виды пожизненного страхования знаете? Перечисляйте их и прокомментируйте каждый из них.

9. Что называется актуарной современной стоимостью обязательств?

Задачи для практического занятия

1 . Найдите коэффициент вариации выплат по договору страхования жизни на один год. Страховая сумма b=150000, вероятность смерти застрахованного в течение года q=0,0075.

2. Страховая компания заключила договор группового страхования N=60000 работников большого предприятия сроком на один год. Страховая сумма равна 1200. Для каждого работника интенсивность смертности на протяжении этого года не меняется с течением времени и имеет вид

$$\mu_x = 0{,}001h,$$

где параметр h описывает состояние здоровья работника. Параметр h *является случайной величиной, имеющей* равномерное распределение на интервале ($1;\ 9$). Найдите общую нетто-премию по этому договору.

3. Подсчитайте среднее значение и коэффициент вариации выплат по договору страхования жизни на один год с зависимостью страховой суммы от причины смерти. Страховая сумма при смерти от несчастного случая $b_1=500000$, а при смерти от «естественных» причин $b_2=100000$. Вероятность смерти в течение года от несчастного случая $q^{(1)}=0{,}0005$, а вероятность смерти в течение года от «естественных» причин $q^{(2)}=0{,}0020$.

4. Актуарий установил, что размер страхового возмещения для определенного вида несчастных случаев является случайной величиной X с производящей функцией моментов

$$\psi_X(t) = \frac{1}{(1-250t)^4}.$$

Определите среднее квадратическое отклонение для размера страхового возмещения.

5. Рассмотрим портфель из четырех одинаковых договоров страхования жизни. Страховая сумма зависит от причины смерти; в случае смерти от «естественных» причин страховая сумма равна *250000*, а если смерть наступила от несчастного случая, то выплачивается удвоенная страховая сумма. Для каждого из застрахованных вероятность смерти от несчастного случая равна *0,1*, вероятность смерти от естественных причин равна *0,1*. Найдите распределение суммарных выплат.

6. Предположим, что в компании застраховано $N=3000$ человек с вероятностью смерти в течение года $q=0,3\%$. Компания выплачивает сумму $b=250000$ руб. в случае смерти застрахованного в течение года и не платит ничего, если этот человек доживет до конца года.

Определите суммарную премию, достаточную, чтобы обеспечить вероятность разорения порядка *5 %*.

7. Страховая компания заключила $N=10000$ договоров страхования жизни сроком на один год на следующих условиях: в случае смерти застрахованного в течение года от несчастного случая компания выплачивает выгодоприобретателю *1000000*, а в случае смерти от естественных причин – *250000*. Компания не платит ничего, если застрахованный не умрет в течение года. Вероятность смерти от несчастного случая одна и та же для всех застрахованных и равна *0,0005*. Вероятность смерти от естественных причин зависит от возраста. Застрахованных

можно разбить на две возрастные группы, содержащие $N_1=4000$ и $N_2=6000$ человек, с вероятностью смерти в течение года $q_1=0,0040$ и $q_2=0,0020$ соответственно.

Подсчитайте премию, достаточную для выполнения компанией своих обязательств с вероятностью 95% без привлечения дополнительных средств. Защитная надбавка для индивидуального договора берется пропорциональной

1) нетто-премии;

2) дисперсии выплат по договору;

3) среднему квадратическому отклонению выплат по договору.

8. Страховая компания предлагает договора страхования жизни на один год. Информация относительно структуры покрытия приведена в следующей таблице.

Страховая сумма	Причина смерти	Вероятность
500000	Обычная	0,10
1000000	Несчастный случай	0,01

Относительная защитная надбавка равна 20 %.

Предположим, что отдельные полисы независимы и страховщик использует нормальное приближение для распределения суммарных выплат.

Определите, сколько договоров должен продать страховщик, чтобы собранная премия с вероятностью 95 % покрывала суммарные выплаты.

9. Предприятие предполагает заключить договор группового страхования жизни для своих сотрудников. Структура персонала приведена в следующей таблице.

профессиональный класс	число сотрудников	страховая сумма	вероятность смерти
1	100	1	0,1
2	100	1	0,2
3	200	2	0,1
4	200	2	0,2

Администрация предприятия предполагает внести в страховой фонд сумму, равную ожидаемым выплатам страховых возмещений.

Каждый сотрудник, в свою очередь, должен будет внести сумму, равную определенной доле р от размера ожидаемой выплаты. Размер этой доли определяется таким образом, чтобы с вероятностью 95 % средств страхового фонда хватило для выплаты страховых возмещений.

Определите размер взноса для работников четвертого профессионального класса.

Портфель компании состоит из $N=20$ тысяч договоров страхования жизни сроком на 1 год. В соответствии с условиями договора компания выплачивает определенную сумму в случае смерти застрахованного в течение года и не платит ничего, если застрахованный доживет до конца года. Все застрахованные имеют одну и ту же вероятность смерти в течение года, равную $q=0,01$. Из 20 тысяч застрахованных $N_1=10$ тысяч человек заключили договор на сумму $b_1=100000$ каждый, $N_2=5000$ человек на сумму $b_2=200000$ каждый, $N_3=4000$ человек на сумму $b_3=500000$ каждый и $N_4=1000$ человек на сумму $b_4=1$ миллион каждый. Относительная страховая надбавка установлена компанией в размере $\theta=15\%$.

Компания заключила договор перестрахования чрезмерных потерь при пределе удержания $r=500000$ руб. Перестраховочная компания устанавливает свой тариф на основе той же статистики смертности, что и передающая компания, но с относительной страховой надбавкой $\theta^*=20\%$. Определите, как изменится вероятность «разорения» передающей компании и ее ожидаемый доход.

Страховая компания предполагает заключить договор пожизненного страхования на случай смерти на сумму *$10000* с человеком в возрасте $x=30$ лет. Предположим, что смертность описывается законом де Муавра:

$$f(x)=\frac{1}{\omega}, \quad 0<x<\omega,$$

с предельным возрастом $\omega=100$, а премия равна *\$2500.* Страховая компания использует при расчетах техническую процентную ставку $i=60\%$.

Учитывая только поступление премий, выплаты страховых сумм и инвестиционный доход, определите среднее значение и среднее квадратическое отклонение приведенного дохода страховщика (на момент заключения договора). Чему равна вероятность того, что договор будет убыточным?

10. Предположим, что кривая смертей задается формулой

$$f(t)=0{,}004\cdot t\cdot e^{-0{,}02\,t}, \qquad t\geq 0,$$

а страховщик использует при актуарных расчетах техническую процентную ставку $i=4\%$.

Найдите разовую нетто-премию по договору пожизненного страхования со страховой суммой \$100000, заключенному с человеком в возрасте $x=20$ лет.

11. Подсчитайте нетто-премию при заключении договора о 3-х летнем смешанном страховании человека в возрасте 25 лет на сумму 100 тысяч .

x	q_x	l_x	d_x	L_x	$\mathring{e}_x$
20	0,001268	97 813	124	97 750,97	59,67
21	0,001321	97 689	129	97 624,47	58,75
22	0,001374	97 560	134	97 492,97	57,82
23	0,001437	97 426	140	97 355,97	56,90
24	0,001501	97 286	146	97 212,96	55,98
25	0,001565	97 140	152	97 063,96	55,07
26	0,001639	96 988	159	96 908,46	54,15
27	0,001714	96 829	166	96 745,95	53,24
28	0,001800	96 663	174	96 575,95	52,33
29	0,001886	96 489	182	96 397,94	51,42

Фрагмент таблицы продолжительности жизни, используемой страховой компанией, приведен в следующей таблице.

При расчетах используйте эффективную годовую процентную ставку $i=25\%$ и предположение о равномерном распределении смертей для дробных возрастов.

12. Страховщик использует в актуарных расчетах таблицу смертности с отбором, действующим 3 года, и техническую процентную ставку $i=3\%$.

$[x]$	$q_{[x]}$	$q_{[x]+1}$	$q_{[x]+2}$	q_{x+3}	$x+3$
60	0,09	0,11	0,13	0,15	63
61	0,10	0,12	0,14	0,16	64
62	0,11	0,13	0,15	0,17	65
63	0,12	0,14	0,16	0,18	66
64	0,13	0,15	0,17	0,19	67

Человек в возрасте 60 лет заключает отложенный на два года договор страхования жизни на 2 года с выплатой страхового возмещения в конце года смерти. Подсчитайте актуарную современную стоимость этого покрытия, ${}_{2|2}A_{[60]}$ (страховая сумма равна 1).

Время жизни описывается моделью де Муавра с предельным возрастом $\omega=120$ лет, а эффективная годовая процентная ставка $i=15\%$. Подсчитайте нетто-премии для человека в возрасте 40 лет, если заключается договор:

(а) пожизненного страхования;

(б) 5-летнего страхования жизни;

(в) 5-летнего смешанного страхования жизни;

(г) пожизненного страхования, отсроченного на 2 года;

(д) пожизненного страхования со страховой суммой, которая непрерывно увеличивается.

§10. ПОЖИЗНЕННЫЕ РЕНТЫ

1. Основные виды рент

Полная пожизненная рента (whole life annuity)

Простейшая пожизненная рента может быть описана следующим образом. Начиная с некоторого момента $t_0=0$ человек раз в год начинает получать определенную сумму (которую обычно принимают в качестве условной денежной единицы). Выплаты производятся только во время жизни человека. Этот денежный поток изображен на рис. 1.

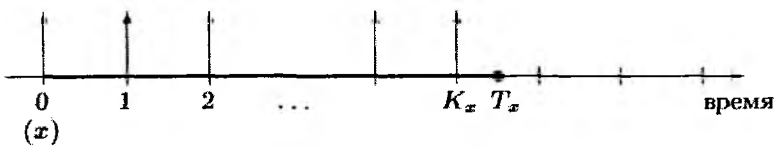


Рис. 1.

Рента может рассматриваться как регулярный доход для получателя ренты (обычно в старости). С другой стороны, периодические премии, выплачиваемые страхователем по обычному договору страхования жизни, можно рассматривать как ренту, получаемую страховой компанией. Поэтому теория рент важна не только для расчета пенсионных схем, но и для расчета периодических премий.

Временная пожизненная рента

Пусть, как и ранее, $t_0=0$ — настоящий момент, а возраст человека, которому выплачивается рента — x лет. N — летняя временная пожизненная рента (n-year temporary life annuity) определяется как серия выплат единичной суммы, производимых раз в год пожизненно, начиная с момента $t_0=0$, но не более, чем n лет. Таким образом, если человек проживет еще n лет (т.е. если $T_x>n$), то производится ровно n выплат с упреждением; если же $T_x>n$, то производится K_x+1 выплат. Эти два сценария условно изображены на рис. 2.

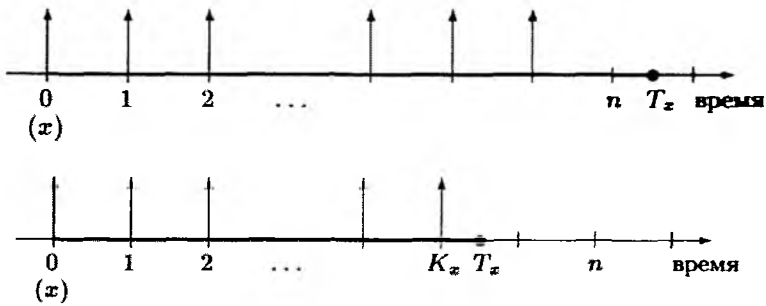


Рис. 2.

Отсроченная пожизненная рента

Пусть, как и ранее, $t_0=0$ – настоящий момент, а возраст человека, которому выплачивается рента – x лет. Отсроченная на m лет пожизненная рента (deferred life annuity) определяется как серия выплат единичной суммы, производимых раз в год, начиная с момента $t_0+m=m$, до тех пор, пока человек жив. Однако если человек умрет до момента m, то ни одной выплаты не производится.

Эти два сценария условно изображены на рис. 3.

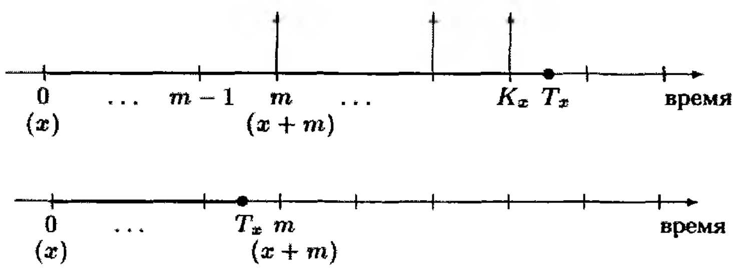


Рис. 3

Пожизненные ренты, выплачиваемые с частотой p

В рассмотренных выше примерах предполагалась, что выплаты производятся один раз в год (в начале года). Для приложений к пенсионным схемам гораздо интереснее случай, когда выплаты производятся раз в месяц *(p=12)*, раз в квартал *(p=4)*, раз в неделю *(p=52)*. В стандартных рентах такого рода в качестве условной денежной единицы рассматривается алгебраическая сумма всех выплат в течение года. Иначе говоря, каждая отдельная выплата имеет величину $\frac{1}{p}$.

Непрерывные ренты

Непрерывные ренты можно рассматривать как предельный случай рент, выплачиваемых с частотой p при $p\to\infty$. Их можно представлять как непрерывный денежный поток (скажем, непрерывную тонкую струю золота), текущий со скоростью 1.

2. Оценивание рент

Метод суммарной выплаты

Стоимость ренты в начальный момент времени $t_0=0$ обозначают символом *Y*с соответствующими индексами. Ее можно подсчитать двумя основными способами. При использовании метода **суммарной выплаты (aggregate payment technique)** пожизненная рента рассматривается как обычная рента, но со случайным числом выплат. Это позволяет получить явную формулу для современной стоимости ренты с помощью формул для детерминированных рент и связать ее с современной стоимостью соответствующего вида страхования. Например, для пожизненной ренты

$$\ddot{Y}_x = \ddot{a}_{\overline{K_x+1}|} = 1 - \frac{v^{K_x+1}}{d} - \frac{1-Z_x}{d}.$$

для временной пожизненной ренты

$$\ddot{Y}_{x\overline{n}|} = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{n}|}, & \text{если } T_x > n \\ \ddot{a}_{\overline{K_x+1}|}, & \text{если } T_x < n \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1-v^n}{d}, & \text{если } T_x > n \\ \dfrac{1-v^{K_x+1}}{d}, & \text{если } T_x < n \end{cases} = \frac{1-Z_{x:\overline{n}|}}{d}.$$

для отложенной пожизненной ренты

$$ {}_{m|}\ddot{Y}_x = \begin{cases} {}_{m|}\ddot{a}_{\overline{K_x+1}|}, & если\ T_x > m \\ 0, & если\ T_x < m \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{v^m - v^{K_x+1}}{d}, & если\ T_x > m \\ 0, & если\ T_x < m \end{cases} = \frac{Z_{x:\overline{\frac{1}{m}}|} - {}_{m|}Z_x}{d} $$

Актуарная современная стоимость ренты – это просто математическое ожидание (случайной) современной стоимости. Она обозначается символом a с соответствующими индексами. Поэтому метод суммарного платежа немедленно дает следующие формулы для актуарных современных стоимостей базовых рент:

для пожизненной ренты

$$ \ddot{a}_x = \frac{1 - A_x}{d}, $$

для временной пожизненной ренты

$$ \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{1 - A_{x:\overline{n}|}}{d}, $$

для отложенной пожизненной ренты

$$ {}_{m|}\ddot{a}_x = \frac{A_{x:\overline{\frac{1}{m}}|} - {}_{m|}A_x}{d} = \frac{A_{x:\overline{m}|} - A_x}{d} $$

Метод текущего платежа

В отличие от метода суммарной выплаты, который рассматривает пожизненную ренту как сумму случайного числа детерминированных слагаемых, **метод текущей выплаты (current payment technique)** рассматривает пожизненную ренту как сумму детерминированного (возможно, бесконечного) числа случайных слагаемых.

Например, для пожизненной ренты это означает следующее. В принципе выплаты возможны в любой момент времени k=0,1,2,.... Выплата в момент k производится, если человек еще жив, т.е. если K_x>k. Поэтому величина выплаты в момент k – это индикатор события $\{K_x>k\}$. Соответственно приведенная ценность этой выплаты в момент $t_0 = 0$ - это случайная величина $v^k I\{K_x>k\}$ и, значит,

$$\ddot{Y}_x = \sum_{k=0}^{+\infty} v^k \cdot I\{T_x > k\}$$

Поэтому для среднего значения имеем:

$$\ddot{a}_x = \ddot{Y}_x = \sum_{k=0}^{+\infty} v^k \cdot P\{T_x > k\} = \frac{1}{v^x l_x} \sum_{k=x}^{+\infty} v^k l_k,$$

Для временной пожизненной ренты соответствующая формула выглядит следующим образом:

$$\ddot{Y}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k \cdot I\{T_x > k\}$$

и, значит,

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = E\ddot{Y}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k \cdot P\{T_x > k\} = \frac{1}{v^x l_x} \sum_{k=x}^{x+n-1} v^k l_x$$

Для отложенной на m лет пожизненной ренты соответствующая формула выглядит следующим образом:

$$_{m|}\ddot{Y}_x = \sum_{k=m}^{+\infty} v^k \cdot I\{T_x > k\}$$

и, значит,

$$_{m|}\ddot{a}_x = E_{m|}\ddot{Y}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=m}^{n-1} v^k \cdot P\{T_x > k\} = \frac{1}{v^x l_x} \sum_{k=x+m}^{+\infty} v^k l_x.$$

3. Актуарное накопление

Рассмотрим **пенсионный фонд**, в который N человек в возрасте x лет каждый внесли по единичной сумме в момент $t_0 = 0$. К моменту t эта сумма вырастет до $N \cdot (1+i)^t$ Одновременно сократится и число участников фонда – в живых останется в среднем $N \cdot P\{T_x > t\} = N \cdot \frac{l_{x+t}}{l_x}$ человек.

Если на средства фонда могут претендовать только живые участники фонда, то на каждого из них будет приходиться сумма

$$A(x;t) = \frac{l_x}{l_{x+t}} \cdot (1+i)^t \cdot$$

Это актуарное накопление больше, чем обычное накопление *(1+i)^t* в теории сложных процентов, так как пенсионный счет участника растет не только за счет доходов от процентов, но и за счет средств умерших участников фонда.

Актуарный коэффициент дисконтирования $_tE_x$ — это средняя сумма, которую нужно иметь в момент $t_0 = 0$ человеку в возрасте x, чтобы в момент t получить, если он еще жив, единичную сумму:

$$_tE_x = v^t \cdot P\{T_x > t\} = v^t \cdot \frac{l_{x+t}}{l_x} = \frac{1}{A(x;t)} \cdot$$

Используя понятие актуарного дисконтирования, можно записать новые версии формул для введенных выше актуарных стоимостей рент:

$$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\infty} {_kE_x}, \quad \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} {_{k|}E_x}, \quad {_{m|}\ddot{a}_x} = \sum_{k=m}^{\infty} {_{m|}E_t} = {_{m|}E_t} \cdot \ddot{a}_{x+m}.$$

Пример 1. Известно, что l_{30}=96307, l_{31}=91617, l_{32}=95918. Подсчитайте актуарную современную стоимость 3-летней временной пожизненной ренты, выплачиваемой раз в год в начале года в размере 10000. Возраст, человека на момент заключения договора — 30 лет. Эффективная годовая процентная ставка i=25%.

Решение

Искомая величина равна $10000 \cdot \ddot{a}_{30:\overline{3}|}$, где, в свою очередь,

$$\ddot{a}_{30:\overline{3}|} = \frac{1}{l_{30}} \cdot \left(l_{30} + vl_{31} + v^2 l_{32}\right) = \frac{96307 + 0{,}8 \cdot 96117 + 0{,}64 \cdot 95918}{96307} \approx 2{,}4358,$$

так что актуарная современная стоимость рассматриваемой ренты равна 24358.

Пример 2. Предположим, что время жизни описывается моделью де Муавра с предельным возрастим $\omega=100$ лет, а эффективная годовая процентная ставка $i=10\%$. Подсчитайте актуарную современную стоимость полной пожизненной ренты, которая будет выплачиваться ежемесячно человеку в возрасте $x=45$ лет в размере 1000 в месяц.

Решение

Искомая величина равна $12000 \cdot \ddot{a}_{45}^{(12)}$. В предположении о равномерном распределении смертей для дробных возрастов, современная стоимость пожизненной ренты, выплачиваемой раз в год, может быть подсчитана по формуле:

$$\ddot{a}_{45}^{(12)} = \alpha(12) \cdot \ddot{a}_{45} - \beta(121),$$

где

$$\alpha(12) = \frac{id}{i^{(12)} d^{(12)}} \approx 1{,}000752, \qquad \beta(12) = \frac{i - i^{(12)}}{i^{(12)} d^{(12)}} \approx 0{,}4744916.$$

Для модели де Муавра

$$l_x = l_0 \cdot s(x) = l_0 \cdot \left(1 - \frac{x}{\omega}\right).$$

Поэтому

$$\ddot{a}_x = \frac{1}{v^x(\omega - x)} \sum_{n=x}^{\omega - x} v^n (\omega - n).$$

Поскольку

$$\sum_{n=x}^{\omega-1} v^n = \frac{v^x - v^\omega}{1-v},$$

$$\sum_{n=x}^{\omega-x} n v^{n-1} = \left(\frac{v^x - v^\omega}{1-v}\right)' = \frac{\left(xv^{x-1} - \omega v^{\omega-1}\right)(1-v) + v^x - v^\omega}{(1-v)^2},$$

мы имеем:

$$\ddot{a}_x = \frac{1}{v^x(\omega - x)} \cdot \left[\omega \frac{v^x - v^\omega}{1-v} - \frac{\left(xv^x - \omega v^\omega\right)(1-v) + v\left(v^x - v^\omega\right)}{(1-v)^2}\right] =$$

$$= \frac{1}{v^x(\omega - x)} \cdot \left[\frac{(\omega - x)v^x}{1-v} - \frac{v}{(1-v)^2}\left(v^x - v^\omega\right)\right] = \frac{1}{1-v} - \frac{v}{(\omega - x)(1-v)^2} \cdot \left(1 - v^{\omega - x}\right),$$

так что $\ddot{a}_{45} \approx 9{,}01$ и, значит, $12000 \cdot \ddot{a}_{45} \approx 102514$

Пример 3. Для того, чтобы оплатить выигрыши текущего года в лотерею, создается специальный фонд. Известно, что

1) общее число победителей — 100; возраст всех — 40 лет,

2) каждый победитель получает пожизненно раз в год по сумме 10,

3) времена жизни победителей — независимые случайные величины,

4) размер фонда определяется с использованием нормального приближения таким образом, чтобы с вероятностью 95% можно было бы осуществить все платежи,

5) i=0,006; A_{40}=0,1613242, $^2A_{40}$=0,0486332

Подсчитайте первоначальный размер фонда.

Решение

По отношению к одному победителю обязательства фонда заключаются в выплате пожизненной упреждающей ренты. Современная стоимость этих обязательств есть:

$$Y = 10 \cdot \ddot{Y}_{40} = 10 \cdot \ddot{a}_{\overline{K_{40}+1|}} = 10 \cdot \frac{1 - v^{K_{40}+1}}{d}.$$

Первые два момента случайной величины Y равны:

$$EY = 10 \cdot \ddot{a}_{40} = 10 \cdot \frac{1 - Ev^{K_{40}+1}}{d} = 10 \cdot \frac{1 - A_{40}}{d} = 148{,}166.$$

$$Var\ Y = \frac{100}{d^2} \cdot Var\left(v^{K_{40}+1}\right) = \frac{100}{d^2} \cdot \left({}^2A_{40} - A_{40}^2\right) = 705{,}55.$$

Для двух первых моментов суммарных обязательств фонда (в силу независимости времен жизни) верны равенства:

$$ES = 100 \cdot EY = 14816{,}6; \quad Var\ S = 100 \cdot Var\ Y = 70555.$$

Если u – искомый размер фонда, то по условию

$$P(S < u) = 95\%.$$

Для центрированной и нормированной величины обязательств:

$$P\left(\frac{S - ES}{\sqrt{Var\ S}} < \frac{u - es}{\sqrt{Var\ S}}\right) = 95\%$$

Используя нормальное приближение, мы имеем:

$$\Phi\left(\frac{S - ES}{\sqrt{Var\ S}}\right) = 95\%$$

т. е.

$$\frac{u - es}{\sqrt{Var\ S}} \approx x_{95\%}$$

откуда

$$u \approx ES + x_{95\%} \cdot \sqrt{Var\ S} \approx 15254$$

Упражнения

1. Известно, что l_{30}=97290, l_{31}=97007, l_{32}=96842 Подсчитайте актуарную современную стоимость 4-летней временной пожизненной ренты, выплачиваемой раз в год в начале года в размере 12000. Возраст человека на момент

заключения договора — 20 лет. Эффективная годовая процентная ставка i=25,75%.

2. Предположим, что время жизни описывается моделью де Муавра с предельным возрастим ω=100 лет, а эффективная годовая процентная ставка i=12%. Подсчитайте актуарную современную стоимость полной пожизненной ренты, которая будет выплачиваться ежемесячно человеку в возрасте x=50 лет в размере 1100 в месяц.

3. После страхового случая, который привел к временной нетрудоспособности застрахованного, страховая компания должна выплачивать застрахованному пособие в размере B в год. Предполагая, что выплаты происходят непрерывно, а время до выздоровления имеет гамма-распределение со средним M и дисперсией V, подсчитайте актуарную приведенную стоимость обязательств страховщика на момент начала выплат.

Вопросы для самопроверки

1. Опишите простейшую пожизненную ренту.

2. Почему теория рент важна не только для расчета пенсионных схем, но и для расчета периодических премий?

3. Что называется полной пожизненной рентой?

4. Что называется временной пожизненной рентой?

5. Что называется отсроченной пожизненной рентой?

6. Опишите пожизненные ренты, выплачиваемые с частотой p. Что называется непрерывной рентой?

7. Какие методы оценивания рент знаете? В чем их отличие?

8. Разъясните понятие актуарного накопления. Что называется актуарным коэффициентом дисконтирования?

ЛИТЕРАТУРА

1. Lyuu Yh-D. Financial engineering and computation. Principles, Mathematics, Algorithms. Cambridge University Press 2002.

2. Bowers N. L., Gerber JR. H. U., Hickman J. C., Nesbitt C. Actuarial mathematics. Published by the society of actuaries, 1997.

3. Четыркин Е.М. Финансовая математика. Учебник. – М.: Дело, 6-изд. 2006.

4. Кутуков В.Б. Основы финансовой и страховой математики. Учебное пособие. М.: Дело, 1998.

5. Капитоненко В.В. Финансовая математика и ее приложения. Учебное пособие. Учебное пособие для ВУЗов. М.: «Из-во ПРИОР», 2000.

6. Малыхин В.И. Финансовая математика. Учебное пособие. – Учебное пособие. М:. ЮНИТИ-ДИНА, 1999.

7. Жуленев С.В. Финансовая математика. М.: Изд-во МГУ, 2001.

8. Печенежская И.А. Финансовая математика. Сборник задач. Ростов-на-Дону, «Феникс», 2008.

9. Фалин Г.И. Математические основы теории страхования жизни и пенсионных схем. М.: МГУ, 1996. – 261 с.

10. Фалин Г.И. Математический анализ рисков в страховании. М.: Российский юридический издательский дом, 1994. – 80с.

11. Фалин Г.И., Фалин А.И. Теория риска для актуариев в задачах. М.: Мир, 2004.

12. Фалин Г.И., Фалин А.И. Введение в актуарную математику. М.: Изд-во Моск. ун-та., 1994.

13. Фалин Г.И. Математический анализ рисков в страховании. М.: Российский юридический издательский дом, 1994.

14. Касимов Ю.Ф. Начала актуарной математики (для страхования жизни и пенсионных схем). Зеленоград, НТФ НИТ, 1994.

15. Баскаков ВН., Карташов Г.Д. Введение в актуарную математику. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1997.

16. Баскаков В.Н., Карташов Г.Д. Методические указания к решению задач по актуарной математике (модели дожития). М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1997.

17. Баскаков В.Н., Зорина И.Г., Карташов Г.Д., Соломатина Е. Актуарная математика (элементы финансовой математики). М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000.

СОДЕРЖАНИЕ

Бабаджанов Шопулат Шомашрабович

ФИНАНСОВАЯ МАТЕМАТИКА

Учебное пособие

Редактор *В. Джураев*
Корректор *В. Джураев*
Дизайнер *А. Аубакиров*

Издательство Национального общества
философов Узбекистана
100083, г. Ташкент, ул. Матбуотчилар, 32

Лицензия издательства AI № 216,03.08.2012
Подписано в печать 20.12.2019. Формат 60x84 $^1/_{16}$. Печать офсетная. Гарнитура «Uz-Times». Усл. печ. л. 12,0. Уч. изд. л. 12,5. Тираж 200 экз. Заказ №35

Издательство «FAYLASUFLAR»
100083, г. Ташкент, ул. Матбуотчилар, 32