ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

МИРЗО УЛУҒБЕК НОМИДАГИ
ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ

ф.-м.ф.д.Ш.Г. Касимов

МАТЕМАТИК ФИЗИКА ТЕНГЛАМАЛАРИ

Маъруза матни

Тошкент 2010

1 – **МАЪРУЗА**
ХУСУСИЙ ҲОСИЛАЛИ ТЕНГЛАМАНИНГ ХАРАКТЕРИСТИКАСИ ҲАҚИДА ТУШУНЧА. ХУСУСИЙ ҲОСИЛАЛИ ТЕНГЛАМАНИНГ КЛАССИФИКАЦИЯСИ.

$\Omega-$ орқали $x_1, x_2, ..., x_n$, $n \geq 2$ ортогонал декарт координатали x нуқталарнинг $n-$ўлчамли R^n евклид фазосидан олинган соҳани белгилаймиз.

$\Omega-$ соҳадан олинган x нуқта ва $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j = k$, $k = 0, ..., m$, $m \geq 1$ манфиймас бутун индексли $p_{\alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_n}$ ҳақиқий ўзгарувчили $F\left(x, ..., p_{\alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_n}, ...\right)$ – ҳақиқий қийматли функция берилган бўлиб, ҳеч бўлмаганда $\dfrac{\partial F}{\partial p_{\alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_n}}$, бунда $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j = m$, ҳосилалардан бири нолдан фарқли бўлсин.

$$F\left(x, ..., \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n}}, ...\right) = 0 \qquad (1)$$

шаклдаги тенглик $u(x) = u(x_1, x_2, ..., x_n)$, $x \in \Omega$ номаълум функцияга нисбатан $m-$тартибли хусусий ҳосилали дифференциал тенглама дейилади ва бу тенгликнинг чап томони эса, $m-$тартибли хусусий ҳосилали дифференциал оператор дейилади.

(1) – тенгламанинг Ω берилиш соҳасида аниқланган $u(x)$ ҳақиқий қийматли функция ўзининг бу тенгламада қатнашган барча хусусий ҳосилалари узлуксиз ва тенгламани айниятга айлантирса, у ҳолда регуляр ечим дейилади.

Агар F функция $p_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}$, бунда $|\alpha|=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j=k,$ $k=0,...,m$ барча ўзгарувчиларга нисбатан чизиқли функция бўлса, у ҳолда (1) тенглама чизиқли тенглама деб аталади. Агар F функция фақат $p_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}$, бунда $|\alpha|=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j=m$ ўзгарувчиларгагина нисбатан чизиқли функция бўлса, у ҳолда (1) тенглама квазичизиқли тенглама деб аталади.

$Lu=f(x)$ чизиқли тенглама унинг ўнг томонидаги $f(x)$ функциянинг барча $x\in\Omega$ учун нолга тенг ёки айнан нолдан фарқли бўлишлигига қараб бир жинсли ёки бир жинсли бўлмаган тенглама деб аталади.

Осонгина кўрсатиш мумкинки, агар $u(x)$ ва $v(x)$ функциялар бир жинсли бўлмаган $Lu=f(x)$ чизиқли тенгламанинг ечимлари бўлса, у ҳолда уларнинг айирмаси $w=u(x)-v(x)$ эса $Lw=0$ бир жинсли тенгламанинг ечими бўлади. Бундан ташқари, агар $u_k(x),\ k=1,...,l$ функциялар бир жинсли тенгламанинг ечимлари бўлса, у ҳолда $u=\sum_{k=1}^{l}c_k\,u_k(x),$ бунда c_k- ҳақиқий ўзгармаслар, ҳам шу тенгламанинг ечими бўлади.

(1) тенгламанинг типи

$$K(\xi_1,...,\xi_n)=\sum_{|\alpha|=m}\frac{\partial F}{\partial p_{\alpha_1...\alpha_n}}\,\xi_1^{\alpha_1}...\xi_n^{\alpha_n}$$

характеристик форма орқали аниқланади.

$$\sum_{|\alpha|\le m}a_\alpha(x)D^\alpha u=f(x) \qquad (2)$$

тенглама $m-$тартибли хусусий ҳосилали чизиқли дифференциал тенгламанинг умумий шакли, бунда $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ – мультииндекс, $\alpha_j\ge 0$, $j=\overline{1,\ n}$, бундан ташқари α_j – бутун сонлар, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$ мультииндекс модули, $D^{\alpha}u = \dfrac{\partial^{|\alpha|}u}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n}}$ бўлсин. $D^{\alpha} \to \xi^{\alpha}$ алмаштириш орқали (2) тенгламанинг символини ҳосил қиламиз:

$$\sum_{|\alpha| \le m} a_{\alpha}(x)\,\xi^{\alpha}, \qquad \text{бунда } \xi^{\alpha} = \xi_1^{\alpha_1}\xi_2^{\alpha_2} ... \xi_n^{\alpha_n}.$$

$\sum\limits_{|\alpha| = m} a_{\alpha}(x)\,\xi^{\alpha}$ формага (2) тенгламанинг бош символи ёки характеристик кўпҳади деб аталади.

$x \in \Omega$ тайинланган нуқта бўлсин. Нолдан фарқли $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) \ne 0$ вектор учун $\sum\limits_{|\alpha| = m} a_{\alpha}(x)\,\xi^{\alpha} = 0$ бўлса, у ҳолда бу вектор характеристик йўналиш деб аталади.

$F(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$ формула билан берилган гиперсирт учун ҳар бир нуқта характеристик йўналишга эга бўлса, яъни

$$\begin{cases} F(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ \sum\limits_{|\alpha| = m} a_{\alpha}(x)\left(\dfrac{\partial F}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} ... \left(\dfrac{\partial F}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n} = 0, \quad grad F \ne 0 \end{cases} \tag{3}$$

бўлса, у ҳолда характеристик сирт деб аталади. Бу характеристика тенгламасидир, бунда

$$grad\, F = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial F}{\partial x_n}\right).$$

Иккинчи тартибли квазичизиқли (барча юқори тартибли ҳосилаларга нисбатан чизиқли) узлуксиз $a_{ij}(x)$ коэффициентли тенгламани қараймиз:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)\,\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \Phi(x, u, grad\, u) = 0. \tag{4}$$

$x = (x_1, x_2, ..., x_n),\ n \geq 2$ ўзгарувчили $F(x)$ функция C^1 синфдан олинган бўлиб, $F(x) = 0$ сиртда $grad\, F(x) \neq 0$ ва

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)\,\frac{\partial F}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial F}{\partial x_j} = 0 \qquad (5)$$

бўлсин. У ҳолда $F(x) = 0$ эса, (4) квазичизиқли дифференциал тенгламанинг характеристик сирти деб, (5) тенглама эса характеристик тенгламаси деб айтилади. $n = 2$ учун характеристик сирти характеристик чизиқ деб аталади.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u$$

тўлқин тарқалиш тенгламаси учун характеристик тенглама

$$F = 0 \quad \text{да} \quad \left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)^2 - a^2 \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)^2 = 0$$

шаклга эгадир.
Учи (x_0, t_0) нуқтада бўлган характеристик конус деб аталувчи

$$a^2 (t - t_0)^2 - |x - x_0|^2 = 0$$

сирт характеристик сирт бўлади.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f$$

иссиқлик ўтказувчанлик тенгламаси учун характеристик тенглама

$$F = 0 \quad \text{да} \quad -a^2 \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)^2 = 0$$

шаклга эгадир. Унинг характеристикалари осонгина кўринадики, $t = C$ текисликлар оиласидан иборат бўлади.

$$\Delta u = f$$

Пуассон тенгламаси учун характеристик тенглама

$$F=0 \quad \text{да} \quad \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)^2=0$$

шаклга эгадир. Бундан $F=0$ да $grad\,F=0$ эканлиги келиб чиқади, бу эса мумкин эмас, яъни характеристик сиртга эга эмас.

Таъриф. *Агар ҳар қандай* $|\xi|\neq 0$ *учун* $\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x^0)\xi^\alpha \neq 0$ *(бошқача қилиб айтганда унинг ҳақиқий характеристикаси йўқ) бўлса, у ҳолда*

$$\sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x)D^\alpha u=f(x)$$

чизиқли тенглама x^0 *нуқтада эллиптик типдаги тенглама дейилади.*

Таъриф. *Агар* $\sum_{j=1}^{n-1}\xi_j^2\neq 0$ *бўладиган ҳар қандай* $\xi_1,...,\xi_{n-1}$ *учун* $\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x^0)\xi_1^{\alpha_1}...\,\xi_n^{\alpha_n}=0$ *тенглама* ξ_n *ўзгарувчига нисбатан* $m-$ *та ҳақиқий ва ҳар хил илдизларга эга бўлса, у ҳолда*

$$\sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x)D^\alpha u=f(x)$$

чизиқли тенглама x^0 *нуқтада* x_n *ўқ йўналишида гиперболик типдаги тенглама дейилади.*

Таъриф. *Агар* x^0 *тайинланган нуқта учун шундай бир*

$$\xi_i=\xi_i(\mu_1,...,\mu_n),\ i=1,2,...,n,$$

ўзгарувчиларнинг аффин алмаштиришини топиш мумкин бўлиб, натижада, $\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x^0)\,\xi^\alpha$ *форма* μ_i *ўзгарувчиларнинг фақатгина* l *- тасинигина, бунда* $0<l<n$ *, сақласа, у ҳолда*

$\sum\limits_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x) D^\alpha u = f(x)$ *тенглама* x^0 *нуқтада параболик махсусликк эга ёки параболик типдаги тенглама дейилади.*

Иккинчи тартибли хусусий ҳосилали чизиқли тенгламани қуйидаги шаклда ёзиш мумкин:

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}(x)\cdot u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\cdot u_{x_i} + c(x)u + f(x) = 0,$$

$(a_{ij} = a_{ji})$, бунда a, b, c, f функциялар $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ ўзгарувчига боғлиқдир. Янги ξ_k эркли ўзгарувчиларни $\xi_k = \xi_k(x_1, x_2, ..., x_n)$, $k = \overline{1, n}$ шаклда киритамиз. У ҳолда

$$u_{x_i} = \sum_{k=1}^{n} u_{\xi_k}\cdot\alpha_{ik},$$

$$u_{x_i x_j} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} u_{\xi_k\xi_l}\cdot\alpha_{ik}\alpha_{jl} + \sum_{k=1}^{n} u_{\xi_k}\cdot(\xi_k)_{x_i x_j},\ \text{бунда}\ \alpha_{ik} = \frac{\partial\xi_k}{\partial x_i}.$$

Ҳосила учун олинган ифодаларни берилган тенгламага қўйсак, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\overline{a}_{kl}\cdot u_{\xi_k\xi_l} + \sum_{k=1}^{n}\overline{b}_k\cdot u_{\xi_k} + cu + f = 0,\ \text{бунда}$$

$$\overline{a}_{kl} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_{ik}\alpha_{jl},\ \overline{b}_k = \sum_{i=1}^{n} b_i\cdot\alpha_{ik} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot(\xi_k)_{x_i x_j}.$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x^0) y_i y_j$$

квадратик формани қараймиз. y ўзгарувчи устида

$$y_i = \sum_{k=1}^{n}\alpha_{ik}\eta_k$$

чизиқли алмаштириш бажариб,

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\overline{a}_{kl}(x^0)\,\eta_k\,\eta_l$$

квадратик формага эга бўламиз, бунда $\overline{a}_{kl}(x^0)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(x^0)\,\alpha_{ik}\,\alpha_{jl}$ бўлади.

Маълумки, чизиқли алмаштиришни мос танлаш йўли билан квадратик форманинг $a_{ij}(x^0)$ матрицасини диагонал шаклга, яъни $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\cdot\eta_i^2$ каноник шаклга келтириш мумкин бўлиб, бунда $\alpha_i,\ i=\overline{1,n}$ коэффицентлар $1,\ -1,\ 0$ қийматларни қабул қилади, бундан ташқари инерция қонунига кўра, мусбат, манфий ва нолга тенг коэффицентлар сони квадратик формани каноник шаклга келтиришдаги чизиқли алмаштиришга нисбатан инвариантдир.

Агар барча n та α_i коэффицентлар бир хил ишорали бўлса, у ҳолда тенглама x^0 нуқтада эллиптик типдаги тенглама деб, агар $n-1$ та α_i коэффицентлар бир хил ишорали ва битта коэффицент унга қарама-қарши ишорали бўлса, у ҳолда тенглама x^0 нуқтада гиперболик типдаги (ёки нормал гиперболик типдаги) тенглама деб, агар α_i коэффицентларнинг m таси бир хил ишорали ва $n-m$ таси унга қарама-қарши ишорали $\left(m>1,\ n-m>1\right)$ бўлса, у ҳолда тенглама x^0 нуқтада ультрагиперболик типдаги тенглама деб, агар α_i коэффицентларнинг ҳеч бўлмаганда биттаси нолга тенг бўлса, у ҳолда тенглама x^0 нуқтада параболик типдаги тенглама деб аталади.

Каноник формалар:

$$\Delta u+\Phi=0 \quad \text{(эллиптик тип)},$$

$$u_{x_1x_1} = \sum_{i=2}^{n} u_{x_ix_i} + \Phi \qquad \text{(гиперболик тип)},$$

$$\sum_{i=1}^{m} u_{x_ix_i} = \sum_{i=m+1}^{n} u_{x_ix_i} + \Phi \quad (m>1,\ n-m>1)$$

(ультрагиперболик тип),

$$\sum_{i=1}^{n-m}\left(\pm\, u_{x_ix_i}\right) + \Phi = 0 \quad (m>0) \qquad \text{(параболик тип)}.$$

Ўзгармас коэффициентли бўлган ҳолда

$$\sum_{i=1}^{n}\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}u_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} + cu + f = 0$$

тенглама унинг аниқланиш соҳасининг барча нуқталари учун бир вақтда ўзгарувчиларни чизиқли алмаштириш ёрдамида каноник шаклга келтирилади. u функция ўрнига $u = v \cdot e^{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n}$ тенглик ёрдамида v янги функцияни киритиб ва λ_i ўзгармасларни тегишли танлаш ёрдамида биз тенгламани янада содда шаклдаги каноник формага келтиришимиз мумкин бўлади.

$n = 2$ учун

$$v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + cv + f_1 = 0 \quad \text{(эллиптик тип)},$$

$$\left.\begin{array}{l} v_{\xi\eta} + cv + f_1 = 0 \\ \text{ёки} \\ v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} + cv + f_1 = 0 \end{array}\right\} \quad \text{(гиперболик тип)},$$

$$v_{\xi\xi} + b_2 v_\eta + f_1 = 0 \qquad \text{(параболик тип)}.$$

Иккинчи тартибли икки ўзгарувчили тенгламани каноник шаклга келтириш.

Қуйидаги квазичизиқли тенгламани қарайлик:

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+F\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0\,, \quad (6)$$

бунда $A,B,C\in C^2(\Omega)$.

Дифференциал тенглама

1) Агар $B^2-AC>0$ бўлса, у ҳолда гиперболик типга,

2) Агар $B^2-AC=0$ бўлса, у ҳолда параболик типга,

3) Агар $B^2-AC<0$ бўлса, у ҳолда эллиптик типга тегишли бўлади.

$$\xi=\xi(x,y),\quad \eta=\eta(x,y)$$

функциялар икки марта узлуксиз дифференциалланувчи функциялар бўлиб, бундан ташқари Ω соҳада якобиан нолдан фарқли, яъни

$$\frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial\xi}{\partial x} & \frac{\partial\xi}{\partial y}\\ \frac{\partial\eta}{\partial x} & \frac{\partial\eta}{\partial y}\end{vmatrix}\neq 0$$

бўлсин. ξ ва η янги ўзгарувчиларга нисбатан тенглама қуйидаги шаклда ёзилади:

$$\overline{A}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\overline{B}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\overline{C}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\overline{F}\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial \xi},\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=0\,, \quad (7)$$

бунда

$$\overline{A}(\xi,\eta)=A\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2+2B\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y}+C\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2$$

$$\overline{C}(\xi,\eta)=A\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2+2B\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y}+C\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2$$

$$\overline{B}(\xi,\eta)=A\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x}+B\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)+C\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y}$$

ва

$$\overline{B}^2-\overline{A}\overline{C}=\left(B^2-AC\right)\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y}-\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2.$$

$\xi(x,y)$ ва $\eta(x,y)$ функцияларни шундай танлаш мумкинки, бунда қуйидаги шартлардан фақат бири бажарилади:

1) $\overline{A}=0,\ \overline{C}=0;$ 2) $\overline{A}=0,\ \overline{B}=0;$ 3) $\overline{A}=\overline{C},\ \overline{B}=0.$

1) $B^2-AC>0$ бўлсин. $A\neq 0$ ёки $C\neq 0$ деб оламиз. Масалан, $A\neq 0$.

$$A\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+2B\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+C\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2=0 \qquad (8)$$

тенгламани қарайлик. Бу тенгламани

$$\left[A\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\left(B+\sqrt{B^2-AC}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right]\times$$

$$\times\left[A\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\left(B-\sqrt{B^2-AC}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right]=0$$

шаклда ҳам ёзиш мумкин. Бундан, эса

$$A\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\left(B+\sqrt{B^2-AC}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0 \qquad (9)$$

$$A\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\left(B-\sqrt{B^2-AC}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0 \qquad (10)$$

тенгламалар ҳосил бўлади. (9) ва (10) тенгламаларни интеграллаш учун уларга мос оддий характеристик дифференциал тенгламаларни тузамиз.

$$\frac{dx}{A}=\frac{\partial y}{B+\sqrt{B^2-AC}},\ \ \frac{dx}{A}=\frac{\partial y}{B-\sqrt{B^2-AC}}$$

ёки

$$Ady-\left(B+\sqrt{B^2-AC}\right)dx=0,$$

$$Ady-\left(B-\sqrt{B^2-AC}\right)dx=0$$

ёки битта тенглама кўринишида

$$A(dy)^2 - 2Bdydx + C(dx)^2 = 0$$

тенглама ҳосил бўлади. Бундан, $A(x_0, y_0) \neq 0$ бўлгани учун

$$\varphi_1(x, y) = const,\ \varphi_2(x, y) = const$$

интеграллар мавжудлиги келиб чиқади. (Ҳақиқатдан, ҳам ўзгармас коэффицентли бўлган ҳолда

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B + \sqrt{B^2 - AC}}{A},\ \frac{dy}{dx} = \frac{B - \sqrt{B^2 - AC}}{A}$$

$$y = \frac{B + \sqrt{B^2 - AC}}{A}x + C_1,\ y = \frac{B - \sqrt{B^2 - AC}}{A}x + C_2).$$

$\xi = \varphi_1(x, y),\ \ \eta = \varphi_2(x, y)$ деб оламиз. У ҳолда (7) тенгламани $2\overline{B}$ га бўлиб,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = F_1\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial\xi}, \frac{\partial u}{\partial\eta}\right)$$

тенгламани ҳосил қиламиз, ёки $\xi = \alpha + \beta,\ \ \eta = \alpha - \beta$ деб олиб,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2} = \Phi\left(\alpha, \beta, u, \frac{\partial u}{\partial\alpha}, \frac{\partial u}{\partial\beta}\right)$$

тенгликга эга бўламиз. Бу гиперболик типдаги тенгламанинг каноник шаклидир.

2) $B^2 - AC = 0$ бўлсин. $A \neq 0$ деб оламиз. У ҳолда (8) тенглама қуйидаги кўринишда бўлади:

$$A\frac{\partial\varphi}{\partial x} + B\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0.$$

Бу тенгламанинг $\varphi(x, y) = const$ умумий ечими ёрдамида $\xi = \varphi(x, y)$ деб оламиз ва $\eta = \eta(x, y)$ сифатида эса, икки марта узлуксиз дифференциалланувчи ихтиёрий функцияни $\frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} \neq 0$ шарт (x_0, y_0) нуқта атрофида бажариладиган

қилиб оламиз. $B^2 - AC = 0$ шартдан ва $A\frac{\partial\varphi}{\partial x} + B\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0$ тенгликдан $B\frac{\partial\varphi}{\partial x} + C\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0$ тенглик келиб чиқади. Шунинг учун $\overline{B} = \left(A\frac{\partial\varphi}{\partial x} + B\frac{\partial\varphi}{\partial y} \right)\frac{\partial\eta}{\partial x} + \left(B\frac{\partial\varphi}{\partial x} + C\frac{\partial\varphi}{\partial y} \right)\frac{\partial\eta}{\partial y} = 0$ бўлади. $\overline{A} = 0$ тенглик ҳам ўринли. $\overline{C}$ коэффицент эса,
$\overline{C} = \frac{1}{A}\left(A\frac{\partial\eta}{\partial x} + B\frac{\partial\eta}{\partial y} \right)^2$ шаклга алмашади, бундан $\overline{C} \neq 0$ келиб чиқади. (7) тенгламада $\overline{C} \neq 0$ га бўлиб,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} = F_2\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial\xi}, \frac{\partial u}{\partial\eta} \right)$$

тенгламага эга бўламиз. Бу параболик типдаги тенгламанинг каноник шаклидир.

3) $B^2 - AC < 0$ бўлсин. A, B, C коэффициентлар x ва y дан боғлиқ аналитик функциялар деб оламиз. У ҳолда

$$A\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \left(B + \sqrt{B^2 - AC} \right)\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0$$

тенглама (x_0, y_0) нуқта атрофида $\varphi(x, y) = \varphi_1(x, y) + i\varphi_2(x, y)$ ва шу нуқта атрофида $\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right| \neq 0$ бўлган аналитик ечимга эга бўлади. (Бундай аналитик ечимнинг мавжудлиги С.В. Ковалевская теоремасидан келиб чиқади).

$\xi = \varphi_1(x, y),\ \ \eta = \varphi_2(x, y)$ деб оламиз.
$\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(x, y)} \neq 0$ эканлигини кўрсатиш қийин эмас. Энди

$$A\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} \right)^2 + 2B\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + C\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} \right)^2 = 0$$

айниятнинг ҳақиқий ва мавҳум қисмларини ажратиб,

$$A\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2+2B\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y}+C\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2=$$

$$=A\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2+2B\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y}+C\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2$$

эканлигини, яъни $\overline{A}=\overline{C}$ ва

$$A\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x}+B\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)+C\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y}=0$$

эканлигини, яъни $\overline{B}=0$ тенгликларни ҳосил қиламиз.

$$At_1^2+2Bt_1t_2+Ct_2^2 \quad \left(B^2-AC<0\right)$$

квадратик форманинг аниқланганлигига кўра, $\overline{A}=\overline{C}$ нолга фақат ва фақат шу ҳолдаки, агар

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}=\frac{\partial\xi}{\partial y}=\frac{\partial\eta}{\partial x}=\frac{\partial\eta}{\partial y}=0$$

бўлгандагина айланади. Лекин, биз $\varphi(x,y)$ ечимни бир вақтда бу тенглик бажарилмайдиган қилиб танлаганмиз.

Шундай қилиб, $\overline{A}$ га бўлиб,

$$\frac{\partial^2u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2u}{\partial\eta^2}=F_3\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)$$

тенгликга эга бўламиз. Бу эллиптик типдаги тенгламанинг каноник шаклидир.

2 – **МАЪРУЗА**
ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ ЧИЗИҚЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР УЧУН АСОСИЙ ЧЕГАРАВИЙ МАСАЛАЛАРНИНГ ҚЎЙИЛИШИ. КОШИ МАСАЛАСИ. КОВАЛЕВСКАЯ ТЕОРЕМАСИ.

$$\rho\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=div(p\cdot gradu)-q\cdot u+F(x,t) \qquad (1)$$

иккинчи тартибли чизиқли дифференциал тенглама тебраниш жараёнларини ифода этади,

$$\rho\cdot\frac{\partial u}{\partial t}=div(p\cdot gradu)-q\cdot u+F(x,t) \qquad (2)$$

тенглама диффузия жараёнларини ифода этади, ва

$$-div(p\cdot gradu)+q\cdot u=F(x) \qquad (3)$$

тенглама эса, мос стационар жараёнларни ифода этади.

$G\subset R^n$ жараён рўй берадиган соҳа ва S эса, унинг чегараси бўлиб, бўлакли-силлиқ сиртдан иборат деб ҳисоблаймиз.

Шундай қилиб, G соҳа (3) тенгламадаги x аргументнинг ўзгариш соҳаси, яъни (3) тенгламанинг берилиш соҳасидир.

(1) ва (2) тенгламаларнинг берилиш соҳаси баландлиги T бўлган ва асоси G дан иборат $Ц_T=G\times(0,T)$ цилиндрдан иборат деб оламиз. Унинг чегараси $S\times\left[0,T\right]$ ён сиртдан ва иккита асосдан: пастки $\overline{G}\times\left\{0\right\}$ ва юқори $\overline{G}\times\left\{T\right\}$, асослардан ташкил топгандир.

(1)-(3) тенгламанинг $\rho,\ p$ ва q коэффицентлари t вақтга боғлиқ эмас, бундан ташқари уларнинг физик маъносига кўра, $\rho(x)>0,\ p(x)>0,\ q(x)\ge 0,\ x\in\overline{G}$ деб ҳисоблаймиз. Ҳамда (1)–(3) тенгламаларнинг математик маъносига мос равишда $\rho(x)\in C(\overline{G}), p(x)\in C^1(\overline{G})$ ва $q(x)\in C(\overline{G})$ деб ҳисоблаш зарурдир.

Бу талаблар қўйилганда, классификация қилинишига кўра, (1) тенглама гиперболик типдаги, (2) диффузия тенгламаси параболик типдаги ва (3) стационар тенглама эллиптик типдаги тенгламалардир.

Шундай қилиб, қаралаётган тенгламаларнинг типларидаги фарқ бу тенгламалар ифодалайдиган физик жараёнлар фарқи билан боғлиқдир.

У ёки бу физик жараённи тўла ифодалаш учун бу жараённи ифода этувчи тенглама ўзидан ташқари, (бошланғич шартлар) бу жараённинг бошланғич ҳолатини бериш ва шу соҳа чегарасидаги (чегаравий шартлар) режимни бериш керак бўлади. Бунинг математик томони эса, дифференциал тенглама ечимининг ягона бўлмаслиги билан боғлиқдир. Ҳақиқатдан, ҳам ҳаттоки $n-$ тартибли оддий дифференциал тенглама учун умумий ечим n та ихтиёрий ўзгармасларга боғлиқдир. Хусусий ҳосилали тенглама учун ечим, умуман олганда, ихтиёрий функциялардан боғлиқдир; масалан, $u_{xy}=0$ тенгламанинг умумий ечими x ва y ўзгарувчиларга боғлиқ функциялар синфида $u(x,y)=f(x)+g(y)$ шаклга эга, бунда $f(x)$ ва $g(y)$ - функциялар C^1 синфдан олинган ихтиёрий функциялардир. Шунинг учун реал физик жараённи ифодаловчи ечимини ажратиш учун қўшимча шартларнинг берилиши зарур бўлади. Бундай қўшимча шартлар чегаравий шартлар: бошланғич ва чегарадаги шартлардир. Мос масала чегаравий масала деб аталади. Шундай қилиб, математик физиканинг чегаравий масаласи – бу чегаравий шарт билан берилган дифференциал (интегро-дифференциал) тенглама (ёки тенгламалар системаси) бўлади.

Шундай қилиб, дифференциал тенгламалар учун қуйидаги учта асосий чегаравий масалалар фарқланади.

а) гиперболик ва параболик типдаги тенгламалар учун Коши масаласи: G соҳа бутун R^n фазо билан устма-уст тушади, бу ҳолда чегаравий шарт йўқ.

б) эллиптик типдаги тенгламалар учун чегаравий масала: S чегарада чегаравий шартлар, табиийки, бошланғич шартлар йўқ.

в) гиперболик ва параболик типдаги тенгламалар учун аралаш масалалар: бошланғич ва чегаравий шартлар берилади, бунда $G \neq R^n$.

Коши масаласининг қўйилиши. Қуйидаги эркли $t, x_1, x_2, ..., x_n$ ўзгарувчилар бўйича $u_1, u_2, ..., u_N$ номаълум функцияларнинг хусусий ҳосилаларига нисбатан дифференциал тенгламалар системаси берилган бўлсин:

$$\frac{\partial^{n_i} u_i}{\partial t^{n_i}} = F_i\left(t, x_1, x_2, ..., x_n, u_1, u_2, ..., u_N, ..., \frac{\partial^k u_j}{\partial t^{k_0} \partial x_1^{k_1} ... \partial x_n^{k_n}}\right) \quad (4)$$

бунда

$$k_0 + k_1 + ... + k_n = k \leq n_j \ ; \quad k_0 < n_j \ ; \ i, j = 1, 2, ..., N.$$

Тенгламалар сони номаълум функциялар сонига тенг.

$t = t_0$ қандайдир қийматда u_i номаълум функция ва унинг t бўйича $n_i - 1$ чи тартибгача ҳосилаларининг қиймати (“бошланғич қиймати”) берилади. $t = t_0$ учун

$$\frac{\partial^k u_i}{\partial t^k} = \varphi_i^{(k)}(x_1, x_2, ..., x_n), \ (k = 0, 1, 2, ..., \ n_i - 1) \quad (5)$$

бўлсин. Барча $\varphi_i^{(k)}(x_1, x_2, ..., x_n), \ (k = 0, 1, 2, ..., \ n_i - 1)$ функциялар $(x_1, x_2, ..., x_n)$ фазонинг битта ва фақат битта G_0 соҳасида берилгандир. u_i функцияларнинг нолинчи тартибли ҳосилалари деб шу u_i функцияларнинг ўзларини ҳисоблаймиз.

Коши масаласи (4) системанинг $t = t_0$ учун (5) бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимини топишдан иборатдир.

$t = t_0$ гипертекисликдаги (5) шартлар берилган G_0 соҳага ёпишган $(t, x_1, x_2, ..., x_n)$ фазодаги қандайдир G соҳадаги ечим изланади.

Таъриф. Агар m комплекс ўзгарувчидан боғлиқ $f(z) = f(z_1, z_2, ..., z_m)$ функция

$$f(z)=\sum_{\alpha} c_{\alpha}\cdot(z-z^0)^{\alpha}, \quad \text{бунда}$$

$$c_{\alpha}=\frac{D^{\alpha}f(z^0)}{\alpha!}, \quad (z-z^0)^{\alpha}=(z_1-z_1{}^0)^{\alpha_1}\cdots(z_m-z_m{}^0)^{\alpha_m},$$

$$\alpha!=\alpha_1!\cdot\alpha_2!\cdots\alpha_m!\ ,0!=1,\ \alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$$

яқинлашувчи даражали қатор шаклида тасвирланса, у ҳолда $z^0=(z_1^0,z_2^0,...,z_m^0)$ нуқта атрофида аналитик функция деб аталади.

С.В. Ковалевская теоремаси. Агар барча F_i функциялар қандайдир $\left(t_0,x_1{}^0,x_2{}^0,...,x_n{}^0,...,\varphi^0_{j,k_0,k_1,...,k_n},...\right)$ нуқта атрофида аналитик ва барча $\varphi_j^{(k)}$ функциялар қандайдир $\left(x_1{}^0,x_2{}^0,...,x_n{}^0\right)$ нуқта атрофида аналитик бўлса, у ҳолда Коши масаласи $\left(t_0,x_1{}^0,x_2{}^0,...,x_n{}^0\right)$ нуқтанинг қандайдир атрофида аналитик ечимга эга ва бундан ташқари, бу ечим аналитик функциялар синфида ягонадир.

Чизиқли тенглама бўлган ҳолда бу теорема қуйидагича:

С.В. Ковалевская теоремаси. Ω соҳада $Lu=\sum\limits_{|\alpha|\le m} a_{\alpha}(x)D^{\alpha}u=f(x)$ тенглама берилган бўлсин, бунда $x=\left(x_1,x_2,...,x_{n-1},t\right)$ ва

1) $\alpha=\left(0,0,...,0,m\right)$ учун $a_{\alpha}(P)\ne 0$;

2) $a_{\alpha}(x),\ \ |\alpha|\le m,\ \ f(x)-$ функция P нуқта атрофида аналитикдир;

3) $P',\ \left(x'=\left(x_1,x_2,...,x_{n-1}\right)\right)$ нуқта атрофида $\varphi_j(x'),\ j=0,1,...,m-1$ функциялар аналитикдир;

У ҳолда P нуқтанинг Ω_1 атрофида $u(x)$ ягона аналитик функция мавжуд бўлиб,

Ω_1 да $Lu(x)=f(x)$ тенгламани ва

$$u\big|_{t=t_0}=\varphi_0$$

$$D_t^j u\Big|_{t=t_0}=\varphi_j,\ \ j=1,...,m-1$$

бошланғич шартларни қаноатлантиради.

1901 йили Е. Хольмгрен томонидан С.В. Ковалевская теоремаси ёрдами билан агар тенгламалар системаси коэффицентлари аналитик функциялар, ечим эса $m-$тартибгача узлуксиз ҳосилаларга эга бўлганда Коши масаласи ечимининг аналитик бўлмаган функциялар синфида ечимнинг ягоналик теоремасини олиш мумкинлигини топди.

Е. Хольмгрен теоремаси.

$$\frac{\partial^m u}{\partial t^m}=\sum_{\substack{|\alpha|+k\le m\\ k<m}} a_{k,\alpha}(t,x)\frac{\partial^k}{\partial t^k}D^\alpha u(t,x)+f(t,x)$$

системанинг $u(t,x)$ ечими бўлиб, система коэффицентлари (t,x) бўйича аналитик, ҳамда $0\le t\le T$ ва $x\in\Omega$ учун $f(t,x)=0$, ва $t=0,\ x\in\Omega$ учун $u=0,\ \dfrac{\partial u}{\partial t}=0,\ ...,\ \dfrac{\partial^{m-1}u}{\partial t^{m-1}}=0$ шартлар бажарилсин. Бундан ташқари, $u\in C^m\left(\left[0,T\right]\times\Omega\right)$ бўлсин. У ҳолда $T'\in\left(0,T\right)$ ва $\Omega'\subset\Omega,\ \Omega'\ne\varnothing$ соҳа топиладики, $\left[0,T'\right]\times\Omega'$ да $u(t,x)=0$ бўлади.

Ажабланарлиси шуки, ҳатто $m=2$ учун

$$\sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x)D^\alpha u=f(x)$$

шаклдаги тенглама мавжуд бўлиб, унинг $a_\alpha(x)$ коэффициентлари x^0 нуқтанинг исталган атрофида чексиз дифференциалланувчи ва $f(x)$ чексиз дифференциалланувчи функция бўлсада, тенглама бирорта ҳам ечимга эга бўлмайди.
Бундай тенгламалар локал ечилмайдиган тенгламалар дейилади. Биринчи бўлиб, 1957 йилда Ганс Леви томонидан

коэффицентлари комплекс қийматли бўлган биринчи тартибли (коэффицентлари комплекс қийматли бўлган биринчи тартибли тенглама шу тенглама ечимининг ҳақиқий ва мавҳум қисмлари қаноатлантирадиган иккита биринчи тартибли ҳақиқий коэффицентли тенгламалар системасига эквивалентдир) бундай тенглама қурилди. Г. Леви тенгламаси қуйидаги шаклга эга:

$$-\frac{\partial u}{\partial x_1}-i\frac{\partial u}{\partial x_2}+2i(x_1+ix_2)\frac{\partial u}{\partial x_3}=\varphi'(x_3)\,,\ \text{бунда}\ x\in R^3.$$

Агар u функция R^3 даги координата боши атрофида узлуксиз дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда φ функция x_3 дан боғлиқ бўлган ҳақиқий-аналитик функциядир. Шунинг учун, агар φ координата бошида ҳақиқий-аналитик функциядан иборат бўлмаса, у ҳолда тенгламанинг ўнг томонига φ ни қўйиб, биз координата бошининг ҳеч қандай атрофида ечимга эга бўлмаган тенгламага эга бўламиз. Л. Хёрмандер бу фактни бошқача нуқтаи назардан қараб, тушунтириб берди. Л. Хёрмандер иккинчи тартибли ҳақиқий коэффицентли

$$(x_2^2-x_3^2)u_{x_1x_1}+(1+x_1^2)(u_{x_2x_2}-u_{x_3x_3})-x_1x_2u_{x_1x_3}$$
$$-(x_1x_2u)_{x_1x_2}+x_1x_3u_{x_1x_3}+(x_1x_3u)_{x_1x_3}=f(x)$$

шаклдаги тенглама $f(x)\in C^\infty(R^n)$ қандайдир функция учун ихтиёрий $\Omega\subset R^n$ соҳада бирорта ҳам ечимга эга эмаслигини исбот қилди. Ҳозирги вақтда хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларнинг локал ечилмаслигининг кўпгина етарли шартлари маълумдир.

(4) шаклга эга бўлмаган системалар учун, умуман олганда, Ковалевская теоремаси ўринли эмаслигини қуйидаги Ковалевскаяга тегишли мисолда кўриш мумкин.

С.В. Ковалевская мисоли.

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{6}$$

тенгламани

$$u(0,x)=\frac{1}{1-x}\ ,\ |x|<1 \qquad (7)$$

бошланғич шартлар билан қараймиз. Агар (6)-(7) масаланинг $u(t,x)$ аналитик ечими координата боши атрофида мавжуд бўлса, у ҳолда бу ечим

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{n!}\frac{t^n}{(1-x)^{2n+1}}$$

қатор шаклида ифодаланади, лекин бу қатор $t\neq 0$ бўлган ҳар бир нуқтада узоқлашади.

Эллиптик типдаги

$$-div(p\cdot gradu)+q\cdot u=F(x) \qquad (8)$$

тенглама учун чегаравий масала (3) тенгламани G соҳада қаноатлантирувчи ва S да

$$\alpha u+\beta\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_S=v \qquad (9)$$

чегаравий шартни қаноатлантирувчи $C^2(G)\cap C^1(\bar{G})$ синфга қарашли бўлган $u(x)$ функцияни топишдан иборатдир, бунда α,β ва v функциялар S да берилган бўлакли-узлуксиз функциялардир, ҳамда $\alpha(x)\geq 0,\ \beta(x)\geq 0,\qquad \alpha(x)+\beta(x)>0,$ $x\in S$.

(9) чегаравий шартларнинг қуйидаги типлари ажратилади:

I турдаги чегаравий шарт $(\alpha=1,\ \beta=0)$

$$u\big|_S=u_0 \qquad (10)$$

II турдаги чегаравий шарт $(\alpha=0,\ \beta=1)$

$$\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_S=u_1 \qquad (11)$$

III турдаги чегаравий шарт $(\ \beta=1,\ \alpha\geq 0)$

$$\frac{\partial u}{\partial n}+\alpha u\bigg|_S=u_2 \qquad (12)$$

Мос чегаравий масалалар I, II ва III турдаги чегаравий масалалар дейилади.

Лаплас ва Пуассон тенгламалари учун

$$\Delta u = -f,\ u\big|_S = u_0 \tag{13}$$

I турдаги чегаравий шарт Дирихле масаласи дейилади,

$$\Delta u = -f,\ \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = u_1 \tag{14}$$

II турдаги чегаравий шарт эса, Нейман масаласи дейилади. (8) тенглама учун шунга ўхшаш чегаравий шартлар чегараланган G соҳа ташқарисида (ташқи чегаравий шартлар) ҳам қўйилади. Бу ҳолда S даги (9) чегаравий шартлардан ташқари, яна чексизликда шарт қўйилади. Бундай шартлар, масалан, Зоммерфельднинг нурланиш шарти бўлиши мумкин:

$$|x| \to \infty \text{ да } v(x) = O(|x|^{-1}),\ \frac{\partial v}{\partial |x|} - ikv(x) = o(|x|^{-1}) \tag{15}$$

шартлар

$$\Delta u + k^2 u = -f(x),\ k^2 = \frac{\omega^2}{a^2} \tag{16}$$

Гельмгольц (ёки Шредингер) тенгламаси учун қўйилиши мумкин, бунда

$$v(x) = f\left(\frac{x}{|x|}\right)\frac{e^{ik|x|}}{|x|} + o(|x|^{-1})\ . \tag{17}$$

$\Delta u = -f$ Пуассон тенгламаси учун

$$|x| \to \infty \text{ да } u(x) = O(1) \quad \text{ёки} \quad u(x) = o(1) \tag{18}$$

шартлар;

$-\dfrac{\hbar^2}{2m_0}\Delta\psi + V\cdot\psi = E\psi$, бунда $\hbar = 1{,}054\cdot 10^{-27}$ эрг.сек– Планк ўзгармаси, Шредингер тенгламаси ψ хос функцияларининг $L_2(R^3)$ га тегишлилик шарти ва бошқалар қўйилиши мумкин.

Гиперболик типдаги

$$\rho \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = div(p \cdot gradu) - q \cdot u + F(x,t) \tag{19}$$

тебраниш тенгламаси учун аралаш масала қуйидагича қўйилади:

$Ц_T$ цилиндрда (19) тенгламани, $t=0,\ x \in \overline{G}$ ($Ц_T$ цилиндрнинг пастки асосида)

$$u\Big|_{t=0} = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = u_1(x) \tag{20}$$

бошланғич шартларни ва ($Ц_T$ цилиндрнинг ён сиртида)

$$\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S = v \tag{21}$$

чегаравий шартни қаноатлантирувчи $C^2(Ц_T) \cap C(\overline{Ц}_T)$ синфга тегишли $u(x,t)$ функцияни топишдан иборатдир. Шу билан бирга

$F \in C(Ц_T),\ u_0 \in C^1(\overline{G}),\ u_1 \in C(\overline{G}),\ S \times [0,T]$ да $v-$ бўлакли-узлуксиз ва

$$\alpha u_0 + \beta \frac{\partial u_0}{\partial n}\Big|_S = v\Big|_{t=0},\ \alpha u_1 + \beta \frac{\partial u_1}{\partial n}\Big|_S = \frac{\partial v}{\partial t}\Big|_{t=0} \tag{22}$$

келишувчанлик шартлари бажарилиши зарур бўлади (агар $u(x,t)$ ечим $Ц_T$ цилиндрнинг пастки асосигача етарлича силлиқ бўлса, у ҳолда (22) тенгликларнинг иккинчиси маънога эга бўлади).

Шунга ўхшаш параболик типдаги

$$\rho \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = div(p \cdot gradu) - q \cdot u + F(x,t) \tag{23}$$

диффузия тенгламаси учун аралаш масала қуйидагича қўйилади:

$Ц_T$ цилиндрда (23) тенгламани, $t=0,\ x \in \overline{G}$ ($Ц_T$ цилиндрнинг пастки асосида)

$$u\Big|_{t=0} = u_0(x) \tag{24}$$

бошланғич шартни ва ($Ц_T$ цилиндрнинг ён сиртида)

$$\alpha u+\beta \frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_S = v \qquad (25)$$

чегаравий шартни қаноатлантирувчи $C^2(Ц_T)\cap C(\bar{Ц}_T)$, $grad_x u \in C(\bar{Ц}_T)$ синфга тегишли $u(x,t)$ функцияни топишдан иборатдир.

3 – **МАЪРУЗА**
МАТЕМАТИК ФИЗИКА МАСАЛАЛАРИНИНГ КОРРЕКТ ҚЎЙИЛИШИ. АДАМАР МИСОЛИ.

Маълумки, математик физиканинг масалалари реал физик жараёнларнинг математик моделини ифода этади ва шунинг учун унинг қўйилиши қуйидаги табиий талабларни қаноатлантириши зарурдир:

а) Ечим қандайдир M_1 функциялар синфида мавжуд бўлиши зарурдир.

в) Ечим қандайдир M_2 функциялар синфида ягона бўлиши зарурдир.

с) Ечим масалада берилганларга (бошланғич ва чегаравий берилганлар, озод ҳад, тенглама коэффициентлари ва бошқалар.) узлуксиз боғлиқ бўлиши зарурдир. Масаланинг $\tilde{u}$ берилганларига u ечимнинг узлуксиз боғлиқлиги қуйидагича:

Масаланинг $\tilde{u}_k$, $k=1,2,...$ берилганлари кетма-кетлиги қандайдир маънода $\tilde{u}$ га яқинлашсин ва u_k , $k=1,2,...,u$ мос равишда масаланинг ечимлари бўлсин: у ҳолда танлаб олинган яқинлашиш маъносида $u_k \to u,\ k\to\infty$ бўлиши зарурдир. Масалан, масала $Lu=f$ тенгламага келтирилган бўлсин, бунда $L-$чизиқли оператор бўлиб, M ни N га ўтказсин, бу ерда M ва N нормаллашган чизиқли фазолардир. Бу ҳолда, N ни M га ўтказувчи L^{-1} оператор мавжуд ва чегараланган бўлса, у ҳолда u ечимнинг f озод ҳаддан узлуксиз боғлиқлиги таъминланган бўлади. Ечимнинг узлуксиз боғлиқлик талаби шу билан асосланадики, физик берилганлар биламизки, экспериментдан тақрибий аниқланади, ва шунинг учун танланган математик модел миқиёсида масала ечими ўлчов хатолигига муҳим боғлиқ бўлмаслигига ишонч ҳосил қилиш зарур бўлади.

Саналган талабларни қаноатлантирувчи масала (Адамар бўйича) коррект қўйилган, $M_1 \cap M_2$ функциялар синфи эса, корректлик синфи дейилади.

а) – с) шартлардан ҳеч бўлмаганда битта шартни қаноатлантирмайдиган масала нокоррект қўйилган дейилади.

Нокоррект қўйилган масалага кўпгина математик физиканинг тескари масалаларида дуч келинади: тўғри масаланинг ечими ҳақидаги айрим информациялар бўйича шу масалани аниқловчи айрим номаълум физик миқдорларни (манба, чегаравий шарт, тенглама коэффицентлари ва бошқаларни.) аниқлашдир.

Нокоррект қўйилган масалага бошқача ёндошиш А.Н. Тихонов томонидан илгари сурилган.

Коррект қўйилган ва нокоррект қўйилган масала фарқланади. Математик физиканинг коррект қўйилган масаласи тушунчаси ҳар хил типдаги (эллиптик учун, масалан, Дирихле масаласи ва унга ўхшашлар, гиперболик учун Коши масаласи) дифференциал тенгламалар учун қайси тип чегаравий шартлар анча табиий эканлигини аниқлашга қизиқиш туфайли Ж. Адамар томонидан киритилгандир.

$Lu = f$ тенглама ва $Bu = \psi$ қўшимча шарт берилган бўлсин.

Сонли масаланинг ҳар қандай ечими асосан берилган “олдиндан берилганлар” $\left(f,\psi\right) = \Im \in F,\ u = R\left(\Im\right)$ бўйича “ечим” u ни топишдан иборатдир.

U ва F метрик фазонинг элементларини уларнинг элементлари орасидаги масофа $\rho_U(u_1, u_2)$, $\rho_F(\Im_1, \Im_2)$; $u_1, u_2 \in U;\ \Im_1, \Im_2 \in F$ билан аниқланадиган деб ҳисоблаймиз. Метрика асосан масаланинг қўйилиши билан аниқланади.

Ҳар бир $\Im \in F$ элемент учун U фазодан олинган ягона $u = R(\Im)$ "ечим" тушунчаси аниқланган бўлсин.

Агар ҳар қандай $\varepsilon > 0$ сон учун $\delta(\varepsilon) > 0$ сонни топиш мумкин бўлсаки, бунда $\rho_F(\Im_1, \Im_2) < \delta(\varepsilon)$ тенгсизликдан $\rho_U(u_1, u_2) < \varepsilon$ эканлиги келиб чиқса, бунда $u_1 = R(\Im_1), u_2 = R(\Im_2)$; $\Im_1, \Im_2 \in F$; $u_1, u_2 \in U$; бўлса, у ҳолда U фазодан олинган $u = R(\Im)$ ечимни аниқлаш масаласи $\Im \in F$ олдиндан берилган бўйича (U, F) фазоларда турғун дейилади.

Агар қуйидаги талаблар (шартлар):

1) Ҳар қандай $\Im \in F$ учун U фазодан олинган u ечим мавжуд;

2) ечим бир қийматли аниқланади;

3) Масала (U, F) фазоларда турғун бўлса, у ҳолда U фазодан олинган u ечимни аниқлаш масаласи F фазодан олинган $\Im$ "олдиндан берилганлар" бўйича (U, F) метрик фазолар жуфтида коррект қўйилган дейилади.

Саналган талабларни қаноатлантирмайдиган масала нокоррект қўйилган дейилади.

Шуни таъкидлаш керакки, нокоррект қўйилган масалани аниқлаш (U, F) метрик фазолар жуфтига таллуқли бўлиб, бошқа метрикада шу масаланинг ўзи коррект қўйилган бўлиши ҳам мумкин.

Адамар мисоли. Коши-Ковалевская теоремаси унинг умумий характерда бўлишлигига қарамасдан, дифференциал тенгламалар системаси учун Коши масаласининг коррект қўйилганлиги ҳақидаги масалани тўлиқ ечмайди. Ҳақиқатдан, ҳам бу теорема ечимнинг мавжуд ва ягоналигини фақатгина етарлича кичик атрофдагина таъминлайди, ёки кичик жойда деб гапирилади. Кўпинча бу фактларни (кичик бўлмаган жойда) соҳада, ёки бутунлай ўрнатиш талаб этилади. Бундан, ташқари берилган бошланғичлар ва тенгламанинг озод ҳади асосан аналитик бўлмаган функциялардан иборатдир. Сўнги шарт, яъни ечимнинг берилган бошланғичлардан узлуксиз боғлиқлиги умуман бўлмаслиги мумкин. Бу эса, биринчи бўлиб Адамар томонидан қурилган мисолда кўринади.

Икки ўлчамли ҳолда, Лаплас тенгламаси учун Коши масаласини қараймиз. Бу масала $\Delta u(x,y)=0$ тенгламанинг берилган бошланғичлар бўйича ечимини топишдан, яъни $u(x,0)=f(x)$, $\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0}=\varphi(x)$, $-\infty<x<\infty$, бунда $f(x)$ ва $\varphi(x)$ олдиндан берилган функциялар бўлганда ечимни топишдан иборатдир.

Агар $f_1(x)\equiv 0$, $\varphi_1(x)=\frac{1}{a}\sin ax$ деб олсак, у ҳолда Коши масаласининг ечими $u_1(x,y)=\frac{1}{a^2}\sin ax\cdot shay$, $a>0$ функциядан иборатдир.

Агар $f_2(x)=\varphi_2(x)\equiv 0$ деб олсак, у ҳолда шу Коши масаласининг ечими $u_2(x,y)\equiv 0$ функциядан иборатдир.

Агар олдиндан берилган бошланғичлар четланиши ва ечим C метрикада баҳоланса, у ҳолда

$$\rho_C(f_1,f_2)=\sup_x\left|f_1(x)-f_2(x)\right|=0,$$

$$\rho_C(\varphi_1,\varphi_2)=\sup_x\left|\varphi_1(x)-\varphi_2(x)\right|=\frac{1}{a}$$

бўлади. Охирги миқдор a нинг етарлича катта қийматида исталганча кичик миқдор бўлади. Бироқ ечимнинг четланиши

$$\rho_C(u_1,u_2)=\sup_x\left|u_1(x,y)-u_2(x,y)\right|=$$

$$=\sup_x\left|\frac{1}{a^2}\sin ax\cdot shay\right|=\frac{1}{a^2}shay$$

шаклида бўлиб, ҳар қандай тайинланган $y>0$ учун a соннинг етарлича катта қийматида исталганча катта бўлиши мумкин.

Шундай қилиб, бу масала турғунлик хоссасига эга эмас ва шунга кўра, нокоррект қўйилган бўлади.

4-МАЪРУЗА
ТЎЛҚИН ТАРҚАЛИШ УСУЛИ.

1. Даламбер формуласи. Гиперболик типдаги тенглама учун чегаравий масала ечимини қуриш усулларини ўрганишни биз чегараланмаган тор учун бошланғич шартли масалани ўрганишдан бошлаймиз:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \quad , \tag{1}$$

тенгламанинг

$$\left.\begin{aligned} u(x,0) &= \varphi(x) \ , \\ u_t(x,0) &= \psi(x). \end{aligned}\right\} , \tag{2}$$

Бу тенгламани аралаш ҳосила қатнашган каноник шаклга келтирамиз.

$$dx^2 - a^2\, dt^2 = 0$$

характеристик тенглама қуйидаги иккита тенгламага ажралади:

$$dx - a\ dt = 0, \qquad dx + a\ dt = 0.$$

Бу тенгламаларнинг интеграллари

$$x - a\ t = C_1, \qquad x + a\ t = C_2$$

тўғри чизиқлардан иборат.

$$\xi = x + a\ t\ , \qquad \eta = x - a\ t$$

янги ўзгарувчиларни киритиб, торнинг тебраниш тенгламасини қуйидаги шаклга келтирамиз:

$$u_{\xi\eta} = 0 \tag{3}$$

Охирги тенгламанинг умумий интегралини топамиз. Кўриниб турибдики, (3) тенгламанинг ҳар қандай ечими учун

$$u_\eta(\xi,\eta) = f^*(\eta)\ ,$$

бунда $f^*(\eta)$ қандайдир функция бўлиб, фақат η ўзгарувчидан боғлиқдир. Бу тенгликни ҳар бир фиксирланган ξ учун η бўйича интегралласак, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$u(\xi,\eta) = \int f^*(\eta)d\eta + f_1(\xi) = f_1(\xi) + f_2(\xi), \tag{4}$$

бунда f_1 ва f_2 функциялар фақат ξ ва η ўзгарувчиларга боғлиқ. Аксинча, агар f_1 ва f_2 икки марта дифференциалланувчи бўлган ихтиёрий функциялар бўлса, у ҳолда (4) формула билан аниқланадиган $u(\xi,\eta)$ функция (3) тенгламанинг ечимини ифода қилади. (3) тенгламанинг ҳар қандай ечими (4) шаклда тасвирланиши мумкин бўлиб, бу тенгламанинг умумий интегралидан иборатдир. Шунга кўра,

$$u(x,t) = f_1(x+at) + f_2(x-at) \tag{5}$$

функция (1) тенгламанинг умумий интеграли бўлади.

Фараз қилайлик, қаралаётган масаланинг ечими мавжуд бўлсин. У ҳолда бу ечим (5) формула орқали берилади. f_1 ва f_2 функцияларни бошланғич шартларни қаноатлантирадиган қилиб, аниқлаймиз:

$$u(x,0) = f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x), \tag{6}$$

$$u_t(x,0) = af_1'(x) - af_2'(x) = \psi(x)\ . \tag{7}$$

Иккинчи тенгликни интеграллаб,

$$f_1(x) - f_2(x) = \frac{1}{a}\int_{x_0}^{x} \psi(\alpha)d\alpha + C$$

тенгликни ҳосил қиламиз, бунда x_0 ва C ўзгармаслардир.

$$f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x),$$

$$f_1(x) - f_2(x) = \frac{1}{a}\int_{x_0}^{x} \psi(\alpha)d\alpha + C$$

тенгликлардан қуйидагиларни топамиз:

$$\left.\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x} \psi(\alpha)d\alpha + \frac{C}{2} \\ f_2(x) &= \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x} \psi(\alpha)d\alpha - \frac{C}{2}. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Шундай қилиб, биз f_1 ва f_2 функцияларни φ ва ψ берилган функциялар орқали аниқладик, бундан ташқари, (8) тенглик аргументнинг ихтиёрий қийматида ўринли бўлиши керак. f_1 ва f_2 функцияларнинг топилган қийматларини (5) га олиб бориб қўйсак,

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+$$

$$+\frac{1}{2a}\left\{\int_{x_0}^{x+at}\psi(\alpha)d\alpha-\int_{x_0}^{x-at}\psi(\alpha)d\alpha\right\}$$

ёки

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\alpha)d\alpha \qquad (9)$$

формулани ҳосил қиламиз. Бу формулани қўйилган масаланинг ечими мавжуд деб ҳосил қилдик ва у Даламбер формуласи деб айтилади. Бу формула ечимнинг ягоналигини исботлайди. Ҳақиқатдан ҳам, агар (1)-(2) масаланинг иккинчи ечими мавжуд бўлса, у ҳолда бу ечим ҳам (9) формула орқали тасвирланган бўлади ва биринчи ечим билан устма-уст тушган бўлур эди.

(9) формула (φ функция икки марта дифференциалланувчи ва ψ функция бир марта дифференциалланувчи бўлишлик шарти билан) тенглама ва бошланғич шартларни қаноатлантиради. Шундай қилиб, келтирилган метод қўйилган масаланинг ечими ягоналигини ҳам, ва мавжудлигини ҳам исбот этади.

2. Бир жинсли бўлмаган тенглама. Бир жинсли бўлмаган тебраниш тенгламаси учун Коши масаласини қараймиз:

$$\begin{gathered} u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t), \\ -\infty<x<+\infty,\ t>0 \end{gathered} \qquad (10)$$

$$\left.\begin{array}{l} u(x,0)=\varphi(x)\ , \\ u_t(x,0)=\psi(x), \\ -\infty < x < +\infty\ . \end{array}\right\} \qquad (11)$$

$W(x,t;\tau)$ функция

$$\begin{array}{l} W_{tt}=a^2 W_{xx}, \\ -\infty < x < +\infty\ ,\ t > \tau \end{array} \qquad (12)$$

$$\left.\begin{array}{l} W(x,\tau;\tau)=0\ , \\ \dfrac{\partial W}{\partial t}(x,\tau;\tau)=f(x,\tau), \\ t=\tau,\ \ -\infty < x < +\infty \end{array}\right\} \qquad (13)$$

ёрдамчи Коши масаласининг ечими бўлсин. Бу масаланинг ечими (9) Даламбер формуласига кўра,

$$W(x,t;\tau)=W(x,t-\tau;0)=\frac{1}{2a}\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\xi \qquad (14)$$

кўринишда бўлади.

Қуйидаги лемма ўринли эканлигини исбот қиламиз:

Бир жинсли бўлмаган (10) тенгламанинг $u(x,0)=0$, $u_t(x,0)=0$ нол бошланғич шартларда ечими

$$u(x,t)=\int\limits_0^t W(x,t;\tau)d\tau \qquad (15)$$

шаклга эга бўлади.

(15) функцияни дифференциаллаб, ва $W(x,t;\tau)$ функция учун (12) шартдан

$$u_t(x,t)=W(x,t;t)+\int_0^t \frac{\partial W}{\partial t}(x,t;\tau)d\tau=$$
$$=\int_0^t \frac{\partial W}{\partial t}(x,t;\tau)d\tau, \tag{16}$$

$$u_{tt}(x,t)=\frac{\partial W}{\partial t}(x,t;t)+\int_0^t \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}(x,t;\tau)d\tau=$$
$$=\int_0^t \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}(x,t;\tau)d\tau+f(x,t)\ , \tag{17}$$

$$u_{xx}(x,t)=\int_0^t \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}(x,t;\tau)d\tau\quad . \tag{18}$$

тенгликларни ҳосил қиламиз. Бундан эса, (12) га кўра, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$u_{tt}(x,t)=\int_0^t \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}(x,t;\tau)d\tau+f(x,t)=$$
$$=\int_0^t a^2\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}(x,t;\tau)d\tau+f(x,t)=$$
$$=a^2u_{xx}(x,t)+f(x,t).$$

(10)-(11) масаланинг ечимини

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\alpha)d\alpha+$$
$$+\int_0^t W(x,t;\tau)d\tau \tag{19}$$

шаклида тасвирлаш мумкин. W учун (14) ифодадан фойдаланиб,

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(\alpha)d\alpha+$$
$$+\frac{1}{2a}\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)d\xi d\tau \qquad (20)$$

формулани ҳосил қиламиз.

Агар $\varphi''(x), \psi'(x)$ ва $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ ҳосилалар мавжуд бўлса, у ҳолда тўғридан-тўғри (20) ни (10) га қўйиш орқали ҳақиқатдан, ҳам (20) функция (10)-(11) масаланинг ечими бўлишлигини кўрсатиш мумкин.

Агар f функция x бўйича дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда $t=\tau$ учун W функция тенгламани қаноатлантириши (14) формуладан келиб чиқади, яъни (19) ифода Коши масаласининг ечими мавжуд бўлганда ўринлидир.

3. Ечимнинг турғунлиги. (1) тенгламанинг (2) бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечими бир қийматли аниқланди. Бу ечим бошланғич шартлар узлуксиз ўзгарганда узлуксиз ўзгаришини исбот қиламиз.

$[0, t_0]$ вақт оралиғи қандай бўлганда ҳам ва ε аниқлик даражаси қандай бўлганда ҳам, шундай бир $\delta=\delta(\varepsilon,t_0)>0$ сон топиладики, агар фақат бошланғич қийматлар

$$\left.\begin{aligned} u_1(x,0)&=\varphi_1(x)\ , \\ \frac{\partial u_1}{\partial t}(x,0)&=\psi_1(x) \end{aligned}\right\} \quad \text{ва} \quad \left.\begin{aligned} u_2(x,0)&=\varphi_2(x)\ , \\ \frac{\partial u_2}{\partial t}(x,0)&=\psi_2(x) \end{aligned}\right\}$$

бир-биридан δ дан кичик фарқ қилса, яъни

$$|\varphi_1(x)-\varphi_2(x)|<\delta; \qquad |\psi_1(x)-\psi_2(x)|<\delta$$

бўлса, у ҳолда (1) тенгламанинг мос $u_1(x,t)$ ва $u_2(x,t)$ ечимлари t_0 вақт оралиғида бир-биридан ε дан кичик фарқ қилади, яъни $|u_1(x,t)-u_2(x,t)|<\varepsilon \quad (0\le t\le t_0)$ бўлади. Бу теореманинг исботи жуда соддадир. $u_1(x,t)$ ва $u_2(x,t)$ функциялар ўзининг бошланғич қийматлари орқали (9) формула билан боғланган бўлганлиги учун

$$\left|u_1(x,t)-u_2(x,t)\right| \le \left|\frac{\varphi_1(x+at)-\varphi_2(x+at)}{2}\right| +$$

$$+\left|\frac{\varphi_1(x-at)-\varphi_2(x-at)}{2}\right| +$$

$$+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\left|\psi_1(\alpha)-\psi_2(\alpha)\right| d\alpha$$

тенгсизлик ўринли эканлигидан

$$\left|u_1(x,t)-u_2(x,t)\right| \le \frac{\delta}{2}+\frac{\delta}{2}+\frac{1}{2a}\cdot\delta\cdot 2at \le \delta(1+t_0)$$

эканлиги келиб чиқади. Агар $\delta = \dfrac{\varepsilon}{1+t_0}$ деб олсак, юқоридаги тасдиқнинг исботи келиб чиқади.

4. Ярим чегараланган тўғри чизиқ ва давом эттириш усули.

Тўлқин тарқалиши ҳақидаги масалани $x \ge 0$ ярим чегараланган тўғри чизиқда қараймиз. Бу масала тўлқин акси жараёнини ўрганишда жуда муҳим қийматга эга ва қуйидагича қўйилади:

$$0 < x < \infty, \quad t > 0 \quad \text{учун} \quad u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

тебраниш тенгламасининг

$$u(0,t) = \mu(t) \qquad (\text{ёки } u_x(0,t) = \nu(t)\ ) \qquad t \ge 0$$

чегаравий шартни қаноатлантирувчи ва

$$\left.\begin{aligned} u(x,0) &= \varphi(x), \\ u_t(x,0) &= \psi(x) \end{aligned}\right\} \qquad 0 \le x < \infty$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимини топиш талаб этилсин.

Аввал бир жинсли чегаравий шарт бўлган ҳолни қараймиз:

$$u(0,t) = 0 \quad (\text{ёки } u_x(0,t) = 0),$$

яъни $x=0$ (ёки чегарада эркин бўлган) чегарада тор маҳкамланган ҳолда бошланғич қўзғалишнинг тарқалиши ҳақидаги масалани қараймиз.

Қуйида чексиз тўғри чизиқда аниқланган тебраниш тенгламаси ечимининг хоссалари ҳақидаги иккита леммани келтирамиз:

1. Чегараланмаган тўғри чизиқда тебранишнинг тарқалиши ҳақидаги масалада ((1)-(2) масала) берилган бошланғичлар бирор x_0 нуқтага нисбатан тоқ функциялар бўлса, у ҳолда мос ечим бу нуқтада нолга тенг бўлади.

2. Чегараланмаган тўғри чизиқда тебранишнинг тарқалиши ҳақидаги масалада ((1)-(2) масала) берилган бошланғичлар бирор x_0 нуқтага нисбатан жуфт функциялар бўлса, у ҳолда мос ечимнинг x бўйича ҳосиласи бу нуқтада нолга тенг бўлади.

1 леммани исбот қиламиз. x_0 нуқтани координата боши деб қабул қиламиз. Бу ҳолда берилган бошланғичларнинг тоқ функция бўлишлик шарти

$$\varphi(x)=-\varphi(-x); \qquad \psi(x)=-\psi(-x)$$

шаклида ёзилади. (9) формула билан аниқланадиган $u(x,t)$ функция $x=0$ ва $t>0$ учун

$$u(0,t)=\frac{\varphi(at)+\varphi(-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{-at}^{at}\psi(\alpha)d\alpha=0$$

нолга тенг, чунки биринчи қўшилувчи $\varphi(x)$ тоқ эканлигидан нолга тенг, иккинчи қўшилувчи эса, координата бошига нисбатан симметрик бўлган оралиқ бўйича тоқ функциядан олинган интеграл нолга тенгдир.

Худди шунга ўхшаш 2 леммани исбот қиламиз. Берилган бошланғичларнинг жуфт функция бўлишлик шарти

$$\varphi(x)=\varphi(-x); \qquad \psi(x)=\psi(-x)$$

шаклида бўлади. Жуфт функциянинг ҳосиласи тоқ функция эканлигини эсласак,

$$\varphi'(x)=-\varphi'(-x)$$

бўлади.

(9) формуладан қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$u_x(0,t)=\frac{\varphi'(at)+\varphi'(-at)}{2}+\frac{1}{2a}\left[\psi(at)-\psi(-at)\right]=0,\ t>0,$$

чунки биринчи қўшилувчи $\varphi'(x)$ тоқ эканлигидан нолга тенг, иккинчи қўшилувчи эса, $\psi(x)$ жуфт эканлигидан нолга тенгдир.

Бу иккита лемма ёрдамида қуйидаги масалаларни ечиш мумкин:

(1) тенгламанинг

$$\left.\begin{aligned} u(x,0)&=\varphi(x)\ ,\\ u_t(x,0)&=\psi(x). \end{aligned}\right\},\quad 0<x<\infty, \tag{2'}$$

бошланғич шартларни ва

$u(0,t)=0$, $t>0$ (биринчи чегаравий масала)

чегаравий шартни қаноатлантирувчи ечимини топиш талаб этилсин.

(2') шартда қатнашган $\varphi(x)$ ва $\psi(x)$ функцияларнинг тоқ функция сифатидаги $\Phi(x)$ ва $\Psi(x)$ давомини қараймиз:

$$\Phi(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x>0 \quad учун\\ -\varphi(-x), & x<0 \quad учун\end{cases},$$

$$\Psi(x)=\begin{cases}\psi(x), & x>0 \quad учун\\ -\psi(-x), & x<0 \quad учун.\end{cases}$$

$$u(x,t)=\frac{\Phi(x+at)+\Phi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\Psi(\alpha)d\alpha$$

функция барча x ва $t>0$ учун аниқланган. Биринчи леммага кўра, $u(0,t)=0$ бўлади. Бундан ташқари, бу функция $t=0$ ва $x>0$ учун қуйидаги бошланғич шартларни қаноатлантиради:

$$\left.\begin{aligned} u(x,0)&=\Phi(x)=\varphi(x)\ ,\\ u_t(x,0)&=\Psi(x)=\psi(x), \end{aligned}\right\},\qquad x>0.$$

Шундай қилиб, ҳосил қилинган $u(x,t)$ функция $x\geq 0,\ t\geq 0$ учун қўйилган масаланинг барча шартларини қаноатлантиради.

Олдинги функцияларга қайтиб, қуйидагини ёзиш мумкин:

$$u(x,t)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at}\psi(\alpha)d\alpha, \\ t<\dfrac{x}{a},\ \ x>0 \ \ \textit{учун} \\ \dfrac{\varphi(x+at)-\varphi(at-x)}{2}+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{at-x}^{x+at}\psi(\alpha)d\alpha, \\ t>\dfrac{x}{a},\ \ x>0 \ \ \textit{учун.}\end{cases} \tag{21}$$

$t<\dfrac{x}{a}$ соҳада чегаравий шартнинг таъсири сезилмайди ва $u(x,t)$ учун ифода чексиз тўғри чизиқ учун (9) ечим билан устма-уст тушади.

Худди шунга ўхшаш, агар $x=0$ учун чегара эркин, яъни $u_x(0,t)=0$ бўлса, у ҳолда $\varphi(x)$ ва $\psi(x)$ функцияларнинг

$$\Phi(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x>0 \ \ \textit{учун} \\ \varphi(-x), & x<0 \ \ \textit{учун}\end{cases},$$

$$\Psi(x)=\begin{cases}\psi(x), & x>0 \ \ \textit{учун} \\ \psi(-x), & x<0 \ \ \textit{учун}\end{cases}$$

жуфт функция сифатидаги давомини қарасак,

$$u(x,t)=\frac{\Phi(x+at)+\Phi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\Psi(\alpha)d\alpha$$

ёки

$$u(x,t)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at}\psi(\alpha)d\alpha, \\ t<\dfrac{x}{a},\ \ x>0 \ \ \text{учун} \\ \dfrac{\varphi(x+at)+\varphi(at-x)}{2}+ \\ \dfrac{1}{2a}\left\{\displaystyle\int_{0}^{x+at}\psi(\alpha)d\alpha+\int_{0}^{at-x}\psi(\alpha)d\alpha\right\}, \\ t>\dfrac{x}{a},\ \ x>0 \ \ \text{учун.}\end{cases}$$

$x\geq 0$ соҳада тебраниш тенгламасининг (2) бошланғич шартни ва $u_x(0,t)=0$ чегаравий шартни қаноатлантирувчи ечимини ҳосил қиламиз.

Шундай қилиб, биз ҳосил қилинган натижаларни қуйидаги иккита қоида шаклида ифодалаймиз:

Ярим чегараланган тўғри чизиқда $u(0,t)=0$ чегаравий шарт билан берилган масалани ечиш учун берилган бошланғичларни бутун тўғри чизиққа тоқ давом эттириш керак.

Ярим чегараланган тўғри чизиқда $u_x(0,t)=0$ чегаравий шарт билан берилган масалани ечиш учун берилган бошланғичларни бутун тўғри чизиққа жуфт давом эттириш керак.

Биз $u(0,t)=\mu(t)=0$ ёки $u_x(0,t)=\gamma(t)=0$ бир жинсли чегаравий шартли масалани қарадик. Умуман, бир жинсли бўлмаган чегаравий шартда ечим йиғинди шаклида тасвирланиб, ҳар бир қўшилувчи қўйилган шартлардан фақат биттасини (ёки чегара шартини, ёки бошланғич шартини) қаноатлантиради.

Энди нол бошланғич шартини ва берилган

$$\tilde{u}(x,0)=0,\ \tilde{u}_t(x,0)=0,\ \tilde{u}(0,t)=\mu(t),\ \ t>0$$

чегара шартини қаноатлантирувчи ечимни излаймиз.

Осонгина кўриш мумкинки, чегаравий режим торнинг ўнг томонига қараб йўналган a тезликдаги тўлқинни пайдо қилади ва бу қуйидаги шаклдаги аналитик ечим эканлигини кўрсатади:

$$\tilde{u}(x,t) = f(x-at).$$

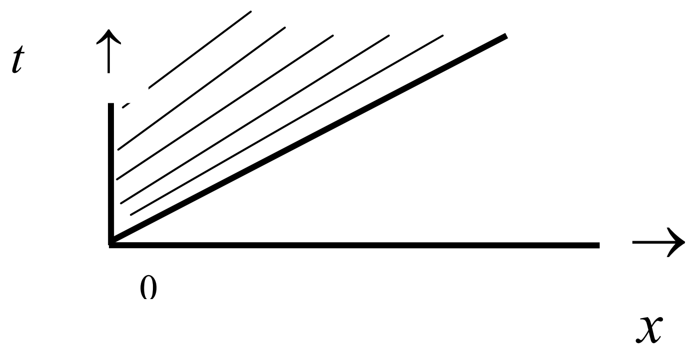
Чегаравий шартдан f функцияни аниқлаймиз:

$$u(0,t) = f(-at) = \mu(t).$$

Бундан эса, $f(z) = \mu(-\frac{z}{a})$, шунинг учун,

$$\tilde{u}(x,t) = \mu\left(-\frac{x-at}{a}\right) = \mu\left(t - \frac{x}{a}\right).$$

Бироқ, бу функция $x - at \leq 0$ соҳадагина аниқланган, чунки $\mu(t)$ функция $t \geq 0$ учун аниқлангандир. Чизмада бу соҳа текисликдаги штрихланган қисмни ифода қилади:



Аргументнинг барча қийматлари учун $\tilde{u}(x,t)$ функцияни топиш учун $\mu(t)$ функцияни t нинг манфий қийматлари $t < 0$ учун $\mu(t) = 0$ деб олмиз. У ҳолда,

$$\tilde{u}(x,t) = \mu\left(t - \frac{x}{a}\right)$$

функция аргументнинг барча қийматлари учун аниқланган бўлади ва нол бошланғич шартни қаноатлантиради.

Бу функция ва (21) шаклдаги функция йиғиндиси бир жинсли тебраниш тенгламаси учун биринчи чегаравий масаланинг ечимини ифода қилади. Ярим чегараланган тор учун

$$u(x,t)=\begin{cases} \dfrac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at}\psi(\alpha)d\alpha, \\ t<\dfrac{x}{a},\;\; x>0 \;\; \textit{учун} \\ \mu\left(t-\dfrac{x}{a}\right)+ \\ +\dfrac{\varphi(x+at)-\varphi(at-x)}{2}+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{at-x}^{x+at}\psi(\alpha)d\alpha, \\ t>\dfrac{x}{a},\;\; x>0 \;\; \textit{учун.} \end{cases} \qquad (22)$$

ҳосил бўлади. Худди шунга ўхшаш иккинчи чегаравий масаланинг ечимини қуриш мумкин.

5. Чегараланган оралиқ учун масала. Чегаравий масалани $(0,\, l)$ оралиқ учун қараймиз:

$$u_{tt}=a^2\, u_{xx}$$

тенгламанинг

$$\left.\begin{aligned} u(0,t)&=\mu_1(t),\\ u(l,t)&=\mu_2(t) \end{aligned}\right\}\quad t\ge 0$$

чегара шартлари ва

$$\left.\begin{aligned} u(x,0)&=\varphi(x),\\ u_t(x,0)&=\psi(x) \end{aligned}\right\}\quad 0\le x\le l$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимини излаймиз. Аввал бир жинсли чегаравий шарт, яъни $u(0,t)=u(l,t)=0$ бўлган ҳолда қараймиз. Бу ҳолда масала ечимини қуйидагича тасвирлаш мумкин деб, давом эттириш усули билан излаймиз:

$$u(x,t)=\frac{\Phi(x+at)+\Phi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\Psi(\alpha)d\alpha,$$

бунда Φ ва Ψ – функциялар аниқланиши зарур. Бошланғич шартларга кўра,

$$\left.\begin{aligned} u(x,0) &= \Phi(x) = \varphi(x), \\ u_t(x,0) &= \Psi(x) = \psi(x) \end{aligned}\right\} \quad 0 \le x \le l$$

бўлгани учун Φ ва Ψ – функциялар $(0,\, l)$ интервалда аниқланади. Нол чегаравий шартларни қаноатлантириши учун Φ ва Ψ – функцияларга $x = 0,\ x = l$ нуқталарга нисбатан тоқ бўлишлик шартини талаб этамиз:

$$\Phi(x) = -\Phi(-x),\ \ \Phi(x) = -\Phi(2l - x),$$

$$\Psi(x) = -\Psi(-x),\ \ \Psi(x) = -\Psi(2l - x).$$

Бу тенгликларни мослаб,

$$\Phi(x') = \Phi(x' + 2l) \quad (x' = -x)$$

ва шунга ўхшаш Ψ – функция учун

$$\Psi(x') = \Psi(x' + 2l)$$

тенгликларга эга бўламиз, яъни Φ ва Ψ – функциялар $2l$ даврли даврий функциялар бўлади.

Осонгина кўриш мумкинки, координата бошига нисбатан тоқ бўлишлик шарти ва даврийлик шарти бутун $-\infty < x < \infty$ тўғри чизиққа $\Phi(x)$ ва $\Psi(x)$ – давом эттирилган функцияларни аниқлайди. Уларни (9) формулага қўйиб, масала ечимини ҳосил қиламиз.

Энди чегаравий режимнинг тарқалиши ҳақидаги масалани қараймиз.

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

тенгламанинг

$$u(x,0) = \varphi(x) = 0,$$

$$u_t(x,0) = \psi(x) = 0$$

нол бошланғич шартларни ва

$$\left.\begin{aligned} u(0,t) &= \mu(t), \\ u(l,t) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad t \ge 0$$

чегара шартларини қаноатлантирувчи ечимини излаймиз. У ҳолда $t < \frac{l}{a}$ учун ечим

$$u(x,t) = \bar{\mu}\left(t - \frac{x}{a}\right), \text{ бунда } \bar{\mu}(t) = \begin{cases} \mu(t), \; t > 0 \;\; \textit{учун} \\ 0, \; t < 0 \;\; \textit{учун} \end{cases}$$

ечимдан иборат бўлади. Бироқ, бу функция

$$t > \frac{l}{a} \quad \text{учун} \quad u(l,t) = 0$$

чегаравий шартни қаноатлантирмайди. Чапга йўналган ва $x = l$ учун четланиши $\bar{\mu}\left(t - \frac{l}{a}\right)$ га тенг бўлган "акс эттирилган" тўлқинни қараймиз. Унинг аналитик ифодаси

$$\bar{\mu}\left(t - \frac{l}{a} - \frac{l-x}{a}\right) = \bar{\mu}\left(t - \frac{2l}{a} + \frac{x}{a}\right)$$

формула орқали берилади. Осонгина кўриш мумкинки,

$$\bar{\mu}\left(t - \frac{x}{a}\right) - \bar{\mu}\left(t - \frac{2l}{a} + \frac{x}{a}\right)$$

иккита тўлқин айирмаси $t < \frac{2l}{a}$ учун тенглама ечими бўлади.

Бу жараённи давом эттириш билан

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\mu}\left(t - \frac{2nl}{a} - \frac{x}{a}\right) - \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mu}\left(t - \frac{2nl}{a} + \frac{x}{a}\right) \tag{23}$$

қатор шаклидаги ечимни ҳосил қиламиз, бу қатор (ҳар бир тайинланган t учун) фақат чекли сондаги нолдан фарқли ҳадларга эга бўлиб, ҳар бир янги акс эттиришда аргумент $\frac{2l}{a}$ га камаяди, функция эса, $t < 0$ учун $\bar{\mu}(t) = 0$ бўлади. Чегаравий шартларнинг бажарилиши бевосита текширилади. Ҳақиқатдан ҳам, $x = 0$ деб олсак ва биринчи йиғиндида $n = 0$ учун $\mu(t)$ га тенг бўлган қўшилувчини алоҳида ажратамиз. Биринчи ва иккинчи йиғиндидаги қолган қўшилувчилар n-нинг бир хил қийматларида ўзаро йўқолади; бу эса, $u(0,t) = \mu(t)$ эканлигини кўрсатади.

n- ни $n-1$ билан алмаштириб ва шу билан жамлаш чегараларини ўзгартириб, биринчи йиғиндини

$$\sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mu}\left(t - \frac{2nl}{a} + \frac{2l-x}{a} \right)$$

шаклга алмаштирамиз. Энди $x = l$ деб олсак, йиғиндидаги биринчи ва иккинчи қўшилувчилар бевосита ўзаро йўқолишига ишонч ҳосил қиламиз.

Бошланғич шартлар ҳам, бевосита текширилади, чунки $t = 0$ учун барча функцияларнинг аргументлари манфий ва (23) ифода $t = 0$ учун нолга тенг бўлади.

Худди шунга ўхшаш,

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\mu}\left(t - \frac{(2n+1)l}{a} + \frac{x}{a} \right) - \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\mu}\left(t - \frac{(2n+1)l}{a} - \frac{x}{a} \right)$$

функция $u(x,0) = 0,\ \ u_t(x,0) = 0$ нол бошланғич шартли ва $u(0,t) = 0,\ \ u(l,t) = \mu(t)$ чегаравий шартли бир жинсли тенгламанинг ечимини беради.

5-МАЪРУЗА
ЎЗГАРУВЧИЛАРНИ АЖРАТИШ УСУЛИ.

1. Торнинг эркин тебраниш тенгламаси. Ўзгарувчиларни ажратиш усули ёки Фурье методи хусусий ҳосилали тенгламаларни ечишнинг энг кўп тарқалган усулларидан биридир. Бу усулнинг қўлланилишини чеккалари маҳкамланган торнинг тебраниши ҳақидаги масала учун келтирамиз. Шундай қилиб,

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \quad , \qquad 0 < x < l, \quad t > 0 \tag{1}$$

тенгламанинг

$$u(0,t) = 0 \;, \quad u(l,t) = 0 \;, \qquad t \ge 0 \tag{2}$$

бир жинсли чегаравий шартларни ва

$$\left.\begin{aligned} u(x,0) &= \varphi(x), \\ u_t(x,0) &= \psi(x) \end{aligned}\right\} \qquad 0 \le x \le l \tag{3}$$

бошланғич шартни қаноатлантирувчи ечимини излаймиз. (1) тенглама чизиқли ва бир жинсли бўлганлиги учун бу тенгламанинг хусусий ечимлари йиғиндиси ҳам унинг ечими бўлади. Етарлича кўп сондаги хусусий ечимларга эга бўлгандан изланаётган ечимни айрим коэффициентлар билан жамлаш ёрдамида ҳосил қилишга харакат қилиш мумкин.

Қуйидаги асосий ёрдамчи масалани қараймиз:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

тенгламанинг айнан нолдан фарқли бўлиб,

$$\left.\begin{aligned} u(0,t) &= 0 \;, \\ u(l,t) &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

бир жинсли чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ва

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t) \tag{5}$$

кўпайтма шаклида тасвирланувчи ечимини топиш талаб этилсин, бунда $X(x) -$ фақат x ўзгарувчининг функцияси, $T(t) -$ эса фақат t ўзгарувчининг функциясидир.

(5) кўринишдаги ечимни (1) тенгламага қўйамиз:

$$X''\cdot T=\frac{1}{a^2}X\cdot T''$$

ёки XT га бўлиш натижасида

$$\frac{X''}{X}=\frac{1}{a^2}\cdot\frac{T''}{T} \qquad (6)$$

тенгликни ҳосил қиламиз. (5) кўринишдаги функция (1) тенгламанинг ечими бўлиши учун (6) тенглик айниятдан иборат бўлиши керак, яъни $0<x<l,\quad t>0$ эркли ўзгарувчиларнинг барча қийматлари учун ўринли бўлиши керак бўлади. (6) тенгликнинг ўнг қисми фақат t ўзгарувчига, чап қисми эса, фақат x ўзгарувчига боғлиқ. Масалан, x ўзгарувчининг айрим қийматини танлаб ва t ўзгарувчини ўзгартириб(ёки аксинча), (6) тенгликнинг ўнг ва чап қисми шу аргументнинг ўзгаришида ўзгармас қийматни сақлайди:

$$\frac{X''}{X}=\frac{1}{a^2}\cdot\frac{T''}{T}=-\lambda\ , \qquad (7)$$

бунда $\lambda-$ ўзгармас бўлиб, унинг ишораси ҳақида ҳеч қандай талаб қўймаган ҳолда, кейинги ҳисоблар қулай бўлиши учун минус ишора билан оламиз.

(7) муносабатдан $X(x)$ ва $T(t)$ функцияларни аниқлаш учун

$$X''(x)+\lambda X(x)=0,\quad X(x)\not\equiv 0\ , \qquad (8)$$

$$T''(x)+a^2\lambda T(x)=0,\quad T(x)\not\equiv 0 \qquad (9)$$

оддий дифференциал тенгламаларни ҳосил қиламиз.

(4) чегаравий шартлардан

$$u(0,t)=X(0)\cdot T(t)=0\ ,$$
$$u(l,t)=X(l)\cdot T(t)=0$$

тенгликларга эга бўламиз. Бундан эса, $X(x)$ функция

$$X(0)=X(l)=0 \qquad (10)$$

қўшимча шартни қаноатлантириши келиб чиқади, акс ҳолда $T(t) \equiv 0$ ва $u(x,t) \equiv 0$ бўлган бўлур эди. $T(t)$ функция учун асосий ёрдамчи масалада ҳеч қандай қўшимча шарт йўқ.

Шундай қилиб, $X(x)$ функцияни аниқлаш учун хос қиймат ҳақидаги энг содда масалани ҳосил қиламиз:

λ параметрнинг шундай қийматларини ва шу ечимни топиш керакки, бунда

$$\left.\begin{aligned} &X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad X(x) \not\equiv 0, \\ &X(0) = X(l) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

масала тривиал бўлмаган ечимига эга бўлсин. Бундай λ параметрнинг қийматларига хос қиймат деб, унга мос тривиал бўлмаган ечимига эса, (11) масаланинг хос функцияси деб айтилади. Бу келтирилган хос қиймат ва хос функция масаласи Штурм–Лиувилль масаласи деб ҳам айтилади. λ параметрнинг манфий, ноль ва мусбат бўлган ҳолларини алоҳида қараб чиқамиз.

1. $\lambda < 0$ бўлсин. У ҳолда хос қиймат ва хос функция масаласи тривиал бўлмаган ечимга эга бўлмайди. Ҳақиқатан ҳам, (8) тенгламанинг умумий ечими

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

кўринишда бўлади. Чегаравий шартларга кўра,

$$X(0) = C_1 + C_2 = 0,$$

$$X(l) = C_1 e^{\alpha} + C_2 e^{-\alpha} = 0 \qquad \left(\alpha = l\sqrt{-\lambda}\right),$$

яъни

$$C_2 = -C_1 \quad \text{ва} \quad C_1\left(e^{\alpha} - e^{-\alpha}\right) = 0$$

бўлади. Лекин қаралаётган ҳолда, $\alpha -$ ҳақиқий ва мусбат бўлгани учун

$$e^{\alpha} - e^{-\alpha} \neq 0$$

бўлади. Шунинг учун

$$C_1 = 0 \ , \quad C_2 = 0$$

ва шунга кўра,

$$X(x) \equiv 0$$

эканлиги келиб чиқади.

2. $\lambda = 0$ бўлсин. Бу ҳолда ҳам, хос қиймат ва хос функция масаласининг тривиал бўлмаган ечими мавжуд эмас. Ҳақиқатан ҳам, бу ҳолда (8) тенгламанинг умумий ечими

$$X(x) = C_1 x + C_2$$

кўринишда бўлади. Чегаравий шартларга кўра,

$$X(0) = [C_1 x + C_2]\Big|_{x=0} = C_2 = 0,$$

$$X(l) = C_1 l = 0 \ ,$$

яъни

$$C_1 = 0 \quad \text{ва} \quad C_2 = 0$$

ва шунга кўра,

$$X(x) \equiv 0$$

эканлиги келиб чиқади.

3. $\lambda > 0$ бўлсин. У ҳолда (8) тенгламанинг умумий ечими

$$X(x) = D_1 \cos\sqrt{\lambda}x + D_2 \sin\sqrt{\lambda}x$$

шаклида ёзилади. Чегаравий шартларга кўра,

$$X(0) = D_1 = 0,$$

$$X(l) = D_2 \sin\sqrt{\lambda}l = 0$$

бўлади. Агар

$$X(x) \neq 0$$

бўлса, у ҳолда $D_2 \neq 0$, шунинг учун

$$\sin\sqrt{\lambda}l = 0 \qquad (12)$$

ёки

$$\sqrt{\lambda} = \frac{\pi n}{l}, \ \text{бунда} \quad n = 1, 2, 3, ...$$

бўлади. Шунга кўра, (11) масаланинг тривиал бўлмаган ечими

$$\lambda = \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$$

қийматдагина мумкиндир. Бу хос қийматга мос келувчи хос функция

$$X_n(x) = D_n \sin\frac{\pi n}{l}x \ ,$$

бунда D_n – ихтиёрий ўзгармасдир.

Демак, λ параметрнинг

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \tag{13}$$

қийматида (11) масаланинг тривиал бўлмаган ечими мавжуд бўлиб, ихтиёрий ўзгармас кўпайтувчи аниқлигида топилиб, бу ўзгармасни бирга тенг қилиб олсак,

$$X_n(x) = \sin\frac{\pi n}{l}x \tag{14}$$

ҳосил бўлади. Бу λ_n қийматга мос, (9) тенгламанинг ечими

$$T_n(t) = A_n \cos\frac{\pi n}{l}at + B_n \sin\frac{\pi n}{l}at \ , \tag{15}$$

кўринишда бўлади, бунда A_n ва B_n – ихтиёрий ўзгармаслардир.

(1)–(3) масалага қайтсак,

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = \left(A_n \cos\frac{\pi n}{l}at + B_n \sin\frac{\pi n}{l}at\right)\sin\frac{\pi n}{l}x \tag{16}$$

функциялар (1) тенгламанинг хусусий ечимлари бўлиб, (2) чегаравий шартни қаноатлантиради ва (5) кўринишдаги иккита функция кўпайтмаси шаклида тасвирланиб, биттаси фақат x га, иккинчиси эса, фақат t га боғлиқдир. Бу ечимлар $\varphi(x)$ ва $\psi(x)$ бошланғич функцияларнинг фақат хусусий ҳоллари учун бошланғич шартларни қаноатлантириши мумкин.

Умумий ҳолда (1)–(3) масаланинг ечимини қарайлик. (1) тенгламанинг чизиқли ва бир жинсли эканлигидан хусусий ечимларнинг йиғиндиси

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos\frac{\pi n}{l} at + B_n \sin\frac{\pi n}{l} at \right) \sin\frac{\pi n}{l} x \qquad (17)$$

ҳам шу тенгламани ва (2) чегаравий шартни қаноатлантиради. Бошланғич шарт A_n ва B_n ўзгармасларни аниқлашга имкон беради. (17) функция (3) шартларни қаноатлантиришини талаб қиламиз:

$$\left.\begin{aligned} u(x,0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{\pi n}{l} x, \\ u_t(x,0) = \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n}{\partial t}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi n}{l} B_n \sin\frac{\pi n}{l} x. \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

Фурье қаторлари назариясидан маълумки, $0 \le x \le l$ оралиқда берилган ихтиёрий бўлакли–узлуксиз ва бўлакли–дифференциалланувчи $f(x)$ функция

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{\pi n}{l} x \qquad (19)$$

Фурье қаторига ёйилади, бунда

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi) \sin\frac{\pi n}{l} \xi d\xi \quad . \qquad (20)$$

Одатда $2l$ – даврли даврий

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{\pi n}{l} x + b_n \sin\frac{\pi n}{l} x \right),$$

функция қаралади, бунда $a_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} F(\xi)\cos\frac{\pi n}{l}\xi\, d\xi$,

$b_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} F(\xi)\sin\frac{\pi n}{l}\xi\, d\xi$. Агар $F(x)$ тоқ функция бўлса, у ҳолда $a_n = 0$ бўлиб,

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{\pi n}{l}x,$$

бунда $b_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} F(\xi)\sin\frac{\pi n}{l}\xi\, d\xi = \frac{2}{l}\int\limits_{0}^{l} F(\xi)\sin\frac{\pi n}{l}\xi\, d\xi$

бўлади. Агар $F(x)$ функция фақат $(0,l)$ ораликда берилган бўлса, у ҳолда биз уни тоқ функция қилиб, $(-l,l)$ ораликга давом эттирамиз, ҳамда (19) ва (20) формулаларга эга бўламиз.

Агар $\varphi(x)$ ва $\psi(x)$ функциялар Фурье қаторига ёйилиш шартларини қаноатлантирса, у ҳолда

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin\frac{\pi n}{l}x, \quad \varphi_n = \frac{2}{l}\int\limits_{0}^{l} \varphi(\xi)\sin\frac{\pi n}{l}\xi\, d\xi , \qquad (21)$$

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin\frac{\pi n}{l}x, \quad \psi_n = \frac{2}{l}\int\limits_{0}^{l} \psi(\xi)\sin\frac{\pi n}{l}\xi\, d\xi . \qquad (22)$$

Бу қаторларни (18)– формулалар билан таққослаш шуни кўрсатадики, бошланғич шарт бажарилиши учун

$$A_n = \varphi_n , \quad B_n = \frac{l}{\pi n a}\psi_n \qquad (23)$$

деб олиш керак ва (17) функция тўлиқ аниқланиб, тадқиқ этилаётган масаланинг ечимини аниқлайди.

Биз ечимни (17) қатор шаклида аниқладик. Агар (17) қатор узоқлашувчи ёки бу қатор аниқлайдиган функция дифференциалланувчи бўлмаса, у ҳолда бу функция биз қараётган дифференциал тенгламанинг ечимини ифода қилмайди.

Ҳосил қилинган $u_n(x,t)$ ечимни қуйидаги шаклда тасвирлаш мумкин:

$$u_n(x,t) = \left(A_n \cos\frac{\pi n}{l}at + B_n \sin\frac{\pi n}{l}at \right)\sin\frac{\pi n}{l}x =$$

$$= \alpha_n \cos\frac{\pi n}{l}a(t+\delta_n)\sin\frac{\pi n}{l}x \quad , \qquad (24)$$

бунда

$$\alpha_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2} \ , \qquad \frac{\pi n}{l}a\delta_n = -arctg\frac{B_n}{A_n} \ . \qquad (25)$$

Торнинг ҳар бир x_0 нуқтаси $\alpha_n \sin\frac{\pi n}{l}x_0$ амплитуда билан

$$u_n(x_0,t) = \alpha_n \cos\frac{\pi n}{l}a(t+\delta_n)\sin\frac{\pi n}{l}x_0$$

кўринишда гармоник тебранади. Торнинг бу кўринишдаги ҳаракати бўйланма тўлқин деб аталади. $\sin\frac{\pi n}{l}x = 0$ бўладиган $x = m\frac{l}{n}$ $(m = 1,2,..., \ n-1)$ нуқталар бутун жараён давомида қўзғалмайди ва $u_n(x,t)$ бўйланма тўлқиннинг тугун нуқтаси дейилади. $\sin\frac{\pi n}{l}x = \pm 1$ бўладиган $x = \frac{2m+1}{2n}l$ $(m = 0,1,2,..., \ n-1)$ нуқталарда α_n максимал амплитуда билан тебраниш рўй беради ва бўйланма тўлқиннинг қайтиши деб айтилади.

Вақтнинг ихтиёрий ҳолатида бўйланма тўлқин

$$u_n(x,t) = C_n(t)\sin\frac{\pi n}{l}x$$

синусоида шаклидаги кўринишга (профилга) эга бўлади, бунда

$$C_n(t) = \alpha_n \cos\omega_n(t+\delta_n) \qquad \left(\omega_n = \frac{\pi n}{l}a\right).$$

$\cos\omega_n(t+\delta_n) = \pm 1$ бўладиган вақтнинг t ҳолатида четланиш максимал қийматга эришади ва ҳаракат тезлиги нолга тенг бўлади.

$\cos\omega_n(t+\delta_n) = 0$ бўладиган вақтнинг t ҳолатида четланиш нолга тенг ва ҳаракат тезлиги максимал қийматга эришади.

Торнинг барча нуқталари бир хил тебраниш частотасига эга ва

$$\omega_n = \frac{\pi n}{l}a \qquad (26)$$

бўлади. $\omega_n -$ частоталар тор тебранишининг хусусий частоталари деб аталади. Торнинг кўндаланг тебраниши учун $a^2 = \dfrac{T}{\rho}$ ва шунга кўра,

$$\omega_n = \frac{\pi n}{l}\sqrt{\frac{T}{\rho}} \qquad (27)$$

бўлади.

2. Ихтиёрий тебранишни бўйланма тўлқин суперпозицияси шаклида тасвирлаш. Биз чеккалари маҳкамланган торнинг эркин тебраниши ҳақидаги масалани қарадик ва бўйланма тўлқин шаклидаги хусусий ечимлар мавжудлигини исботладик. Чекли йиғинди учун яхши маълум бўлган суперпозиция принципини чексиз қаторлар учун умумлаштиришни қараймиз. $L(u) -$оддий ёки хусусий ҳосилали чизиқли дифференциал оператор бўлсин.

Лемма (Умумлашган суперпозиция принципи). Агар u_i $(i = 1, 2, ..., n, ...)$ функциялар $L(u) = 0$ чизиқли ва бир жинсли тенгламанинг хусусий ечимлари бўлса, у ҳолда $L(u) = 0$ тенгламада қатнашган u функциянинг ҳосилаларини ҳисоблаш учун $u=\sum_{i=1}^{\infty}C_i u_i$ қаторда ҳадма-ҳад дифференциаллаш мумкин бўлганда, бу қатор йиғиндиси ҳам шу тенгламанинг ечими бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, агар $L(u)=0$ тенгламада қатнашган u функциянинг ҳосилаларини ҳисоблаш учун $u=\sum_{i=1}^{\infty}C_i u_i$ қаторда ҳадма-ҳад дифференциаллаш мумкин бўлса, у ҳолда шу тенгламанинг чизиқли эканлигидан ва яқинлашувчи қаторларни ҳадма-ҳад қўшиш мумкинлигидан

$$L(u)=L\left(\sum_{i=1}^{\infty}C_i u_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}C_i L(u_i)=0$$

эканлиги келиб чиқади. Шундай қилиб, u функция тенгламани $L(u)=0$ қаноатлантирар экан. Қаторни ҳадма-ҳад дифференциаллаш мумкин бўлиши учун етарли шарт сифатида дифференциаллаш натижасида ҳосил қилинган

$$\sum_{i=1}^{\infty}C_i L(u_i) \tag{28}$$

қаторнинг текис яқинлашиши шартидан фойдаланамиз.

Энди биз чегаравий масалага қайтайлик. Биз аввал

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{\pi n}{l}at+B_n\sin\frac{\pi n}{l}at\right)\sin\frac{\pi n}{l}x \tag{29}$$

функциянинг узлуксизлигига ишонч ҳосил қиламиз. Бундан эса, ўзининг бошланғич ва чегаравий қийматларига узлуксиз равишда эришишини ҳосил қиламиз. Бунинг учун $u(x,t)$ учун қаторнинг текис яқинлашишини исбот қилиш етарлидир, чунки қаторнинг умумий ҳади узлуксиз функциядир. Шунинг учун узлуксиз функциялардан тузилган текис яқинлашувчи қаторнинг йиғиндиси узлуксиз функцияни аниқлайди.

$$\left|u_n(x,t)\right| \le \left|A_n\right| + \left|B_n\right|$$

тенгсизликдан фойдаланиб,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left|A_n\right| + \left|B_n\right|\right) \tag{30}$$

қатор (29) қатор учун мажорант қатор эканлиги келиб чиқади. Агар (30) мажорант қатор яқинлашувчи бўлса, у ҳолда (29) қатор текис яқинлашувчи қатор бўлиб, $u(x,t)$ узлуксиз функция бўлади.

$u_t(x,t)$ функция ўзининг бошланғич қийматига узлуксиз равишда эришишига ишонч ҳосил қилиш учун, бу функциянинг узлуксиз эканлигини исбот қилиш керак бўлади. Бунинг учун эса,

$$u_t(x,t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n}{\partial t}(x,t) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi n}{l} a\left(-A_n \sin\frac{\pi n}{l}at + B_n \cos\frac{\pi n}{l}at\right)\sin\frac{\pi n}{l}x$$

қаторнинг текис яқинлашишини ёки

$$\frac{a\pi}{l}\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\left|A_n\right| + \left|B_n\right|\right) \tag{31}$$

қаторнинг яқинлашишини исбот қилиш етарлидир.

Ниҳоят, $u(x,t)$ функция тенгламани қаноатлантиришига ишонч ҳосил қилиш учун, яъни умумлашган суперпозиция принципини қўллаш учун $u(x,t)$ учун қаторни ҳадма-ҳад икки марта дифференциаллаш мумкинлигини исбот қилиш, бунинг учун эса, ўз навбатида

$$u_{xx}(x,t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}(x,t) =$$

$$= -\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2\left(A_n \cos\frac{\pi n}{l}at + B_n \sin\frac{\pi n}{l}at\right)\sin\frac{\pi n}{l}x,$$

$$u_{tt}(x,t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2}(x,t) =$$

$$= -\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(A_n \cos\frac{\pi n}{l} at + B_n \sin\frac{\pi n}{l} at \right) \sin\frac{\pi n}{l} x$$

қаторларнинг текис яқинлашишини исбот қилиш етарлидир. Бу қаторларга пропрoционал ўзгармас кўпайтувчи аниқлигида

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(|A_n| + |B_n| \right) \tag{32}$$

умумий мажорант қатор мос келади.

$$A_n = \varphi_n , \qquad B_n = \frac{l}{\pi n a} \psi_n ,$$

бунда

$$\varphi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin\frac{\pi n}{l} \xi \, d\xi , \qquad \psi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(\xi) \sin\frac{\pi n}{l} \xi \, d\xi$$

бўлганлиги учун қаралаётган масала

$$\left. \begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} n^k |\varphi_n| \qquad (k = 0,1,2) \\ &\sum_{n=1}^{\infty} n^k |\psi_n| \qquad (k = -1,0,1) \end{aligned} \right\} \tag{33}$$

қаторларнинг яқинлашувчи эканлигини исбот қилишга олиб келинади.

Шу мақсадда Фурье қаторининг бизга маълум бўлган хоссаларини қўллаймиз.

Агар $F(x)$ функция $2l$ давр билан даврий функция бўлиб, $k-$ тартибли ҳосиласи узлуксиз ва $k+1$ тартибли ҳосиласи эса, бўлакли–узлуксиз функция бўлса, у ҳолда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k \left(|a_n| + |b_n|\right) \qquad (34)$$

сонли қатор яқинлашувчи бўлади, бунда a_n ва b_n – Фурье коэффициентларидир. Агар фақат $(0, l)$ оралиқда берилган $f(x)$ функциянинг $\left\{\sin\frac{\pi n}{l}x\right\}_{n=1}^{\infty}$ система бўйича қаторга ёйилмаси ҳақида гапирадиган бўлсак, у ҳолда $F(x)$ функция учун юқоридаги қўйилган шартлар бажарилиши учун $f(x)$ функцияни тоқ функция сифатида давом эттирамиз. Хусусан, $F(x)$ функциянинг узлуксизлиги учун $f(0) = 0$ шарт зарурдир, акс ҳолда тоқ функция сифатида давом эттирилган функция $x = 0$ нуқтада узилишга эга бўлади. Худди шунингдек, $x = l$ нуқтада $f(l) = 0$ бўлиши керак, чунки давом эттирилган функция узлуксиз ва $2l$ давр билан даврий бўлишлиги керак бўлади. Тоқ функция сифатида давом эттирганда $x = 0$ ва $x = l$ нуқталарда биринчи тартибли ҳосиланинг узлуксизлиги бевосита келиб чиқади. Умуман, давом эттирилган функциянинг жуфт тартибли ҳосилаларининг узлуксизлиги учун

$$f^{(k)}(0) = f^{(k)}(l) = 0 \quad (k = 0, 2, 4, ..., 2n) \qquad (35)$$

шартларни қўйиш талаб этилади.

Тоқ тартибли ҳосилаларининг узлуксизлиги қўшимча шартларсиз ўринли бўлади.

Демак, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^k |\varphi_n|$ $\left(k = 0, 1, 2\right)$ қаторларнинг яқинлашиши учун $\varphi(x)$ бошланғич четланиш қуйидаги шартларни қаноатлантириши талаб этилади.

1^o. $\varphi(x)$ функция иккинчи тартибгача узлуксиз ҳосилага эга ва учинчи тартибли ҳосила бўлакли-узлуксиз функция бўлиб,

$$\varphi(0) = \varphi(l) = 0\,, \;\; \varphi''(0) = \varphi''(l) = 0 \qquad (36)$$

шартларни қаноатлантирсин.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k |\psi_n| \qquad (k=-1,0,1)$$ қаторларнинг яқинлашиши учун $\psi(x)$ бошланғич тезликка қуйидаги шартлар қўйилади:

2^o. $\psi(x)$ функция узлуксиз–дифференциалланувчи ва иккинчи тартибли ҳосила бўлакли-узлуксиз функция бўлиб,

$$\psi(0) = \psi(l) = 0 \tag{37}$$

шартларни қаноатлантирсин.

Шундай қилиб, $\varphi(x)$ ва $\psi(x)$ бошланғич функциялар 1^o ва 2^o шартларни қаноатлантирса, у ҳолда ихтиёрий $u(x, t)$ тебраниш бўйланма тўлқинлар суперпозицияси шаклида тасвирланади.

1^o ва 2^o шартлар бу ерда юқоридаги усулнинг қўлланилишини исбот қилиш билан боғлиқ етарли шартдан иборат бўлади.

3. Бир жинсли бўлмаган тенглама. Тебранишнинг бир жинсли бўлмаган

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), \qquad a^2 = \frac{k}{\rho}, \ 0 < x < l \ , t > 0 \tag{38}$$

тенгламасини

$$\left.\begin{aligned} u(x,0) &= \varphi(x), \\ u_t(x,0) &= \psi(x) \end{aligned}\right\} \qquad 0 \le x \le l \tag{39}$$

бошланғич шартлар ва

$$\left.\begin{aligned} u(0,t) &= 0 \ , \\ u(l,t) &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad t \ge 0 \tag{40}$$

бир жинсли чегаравий шартлар билан қараймиз. Масала ечимини x бўйича Фурье қатори

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin\frac{\pi n}{l} x \tag{41}$$

шаклидаги ёйилма кўринишида излаймиз, бунда t параметр деб қаралади. $u(x,t)$ функцияни аниқлаш учун $u_n(t)$ функцияларни топиш талаб этилади.

$f(x, t)$ ва бошланғич функцияларни Фурье қатори шаклида тасвирлаймиз:

$$\left.\begin{aligned}
f(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\sin\frac{\pi n}{l}x, \quad f_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l f(\xi,t)\sin\frac{\pi n}{l}\xi\, d\xi ,\\
\varphi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin\frac{\pi n}{l}x, \qquad \varphi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{\pi n}{l}\xi\, d\xi ,\\
\psi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin\frac{\pi n}{l}x, \qquad \psi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \psi(\xi)\sin\frac{\pi n}{l}\xi\, d\xi \ .
\end{aligned}\right\} \tag{42}$$

Изланаётган (41) кўринишдаги ечимни берилган (38) тенгламага қўйсак,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi n}{l}x\left\{-a^2\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 u_n(t) - u_n''(t) + f_n(t)\right\} = 0$$

тенглик ҳосил бўлиб, бу тенглик ёйилманинг барча коэффициентлар нолга тенг бўлгандагина ўринлидир, яъни

$$u_n''(t) + \left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 u_n(t) = f_n(t). \tag{43}$$

$u_n(t)$ функцияларни аниқлаш учун биз ўзгармас коэффицентли оддий дифференциал тенгламаларни ҳосил қилдик. Бошланғич шартлардан эса,

$$u(x,0)=\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(0)\sin\frac{\pi n}{l}x=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\sin\frac{\pi n}{l}x,$$

$$u_t(x,0)=\psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(0)\sin\frac{\pi n}{l}x=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n\sin\frac{\pi n}{l}x,$$

бундан эса,

$$\left.\begin{array}{l} u_n(0)=\varphi_n, \\ u_n'(0)=\psi_n,\ \left(n=1,2,3,...\right) \end{array}\right\} \quad (44)$$

шартлар келиб чиқади. Бу қўшимча шартлар (43) тенгламанинг ечимини тўлиқ аниқлайди.

$u_n(t)$ функцияни $u_n(t)=u_n^{(I)}(t)+u_n^{(II)}(t)$ йиғинди шаклида тасвирлаш мумкин бўлиб, бунда

$$u_n^{(I)}(t)=\frac{l}{\pi na}\int_0^t\sin\frac{\pi na}{l}(t-\tau)f_n(\tau)d\tau \quad (45)$$

бир жинсли бўлмаган тенгламанинг ноль бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечими ва

$$u_n^{(II)}(t)=\varphi_n\cos\frac{\pi na}{l}t+\frac{l}{\pi na}\psi_n\sin\frac{\pi na}{l}t \quad (46)$$

функция эса бир жинсли тенгламанинг берилган бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимидир. Шундай қилиб, изланаётган ечим

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{l}{\pi na}\int_0^t\sin\frac{\pi na}{l}(t-\tau)\cdot\sin\frac{\pi n}{l}x\cdot f_n(\tau)d\tau+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\varphi_n\cdot\cos\frac{\pi n}{l}at+\frac{l}{\pi na}\psi_n\cdot\sin\frac{\pi n}{l}at\right)\sin\frac{\pi n}{l}x \quad (47)$$

шаклида ёзилади. Иккинчи қўшилувчи эркин тебранувчи торнинг берилган бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимидир. Биринчи йиғиндига эътиборимизни қаратайлик. Бу йиғинди ноль бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ва ташқи куч таъсиридаги мажбурий тебранишни ифода қилади.

$f_n(t)$ учун (42) ифодадан фойдаланиб,

$$u_n^{(I)}(x,t)=$$

$$=\int_0^t\int_0^l\left\{\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{l}{\pi na}\sin\frac{\pi na}{l}(t-\tau)\sin\frac{\pi n}{l}x\sin\frac{\pi n}{l}\xi\right\}f(\xi,\tau)d\xi d\tau=$$

$$=\int_0^t\int_0^l G\left(x,\xi,t-\tau\right)f(\xi,\tau)d\xi d\tau\ , \tag{48}$$

бунда

$$G\left(x,\xi,t-\tau\right)=\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{l}{\pi na}\sin\frac{\pi na}{l}(t-\tau)\sin\frac{\pi n}{l}x\sin\frac{\pi n}{l}\xi$$

бўлади.

4. Биринчи умумий чегаравий масала.

Тебраниш тенгламаси учун биринчи умумий чегаравий масалани қараймиз:

$$u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t)\ ,\ \ 0<x<l,\quad t>0 \tag{49}$$

тенгламанинг

$$\left.\begin{aligned} u(x,0)&=\varphi(x),\\ u_t(x,0)&=\psi(x)\end{aligned}\right\}\qquad 0\le x\le l \tag{50}$$

бошланғич шартлар ва

$$\left.\begin{aligned} u(0,t)&=\mu_1(t),\\ u(l,t)&=\mu_2(t)\end{aligned}\right\}\qquad t\ge 0 \tag{51}$$

чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечимини топиш талаб этилсин.

Янги номаълум $v(x,t)$ функцияни

$$u(x,t)=U(x,t)+v(x,t)$$

тенглик ёрдамида киритамиз. Бунда $v(x,t)$ функция $u(x,t)$ функциядан қандайдир $U(x,t)$ маълум функцияга четланишини ифода қилади. Бу $v(x,t)$ функция

$$v_{tt} = a^2 v_{xx} + \overline{f}(x, t)\ , \ \overline{f}(x, t) = f(x, t) - [U_{tt} - a^2 U_{xx}]$$

тенгламанинг

$$\left.\begin{array}{l} v(x,0) = \overline{\varphi}(x), \quad \overline{\varphi}(x) = \varphi(x) - U(x,0), \\ v_t(x,0) = \overline{\psi}(x), \ \ \overline{\psi}(x) = \psi(x) - U_t(x,0) \end{array}\right\}, \quad 0 \le x \le l$$

бошланғич шартлар ва

$$\left.\begin{array}{ll} v(0,t) = \overline{\mu}_1(t), & \overline{\mu}_1(t) = \mu_1(t) - U(0,t) \\ v(l,t) = \overline{\mu}_2(t), & \overline{\mu}_2(t) = \mu_2(t) - U(l,t) \end{array}\right\} \ t \ge 0$$

чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечими кўринишида аниқланади. $U(x,t)$ ёрдамчи функцияни $\overline{\mu}_1(t) = 0$ ва $\overline{\mu}_2(t) = 0$ бўладиган қилиб танлаймиз. Бунинг учун

$$U(x,t) = \mu_1(t) + \frac{x}{l}\,[\mu_2(t) - \mu_1(t)]$$

деб танлаб олиш етарли бўлади. Шундай қилиб, $u(x,t)$ функция учун умумий чегаравий масала $v(x,t)$ функция учун бир жинсли чегаравий масалага олиб келинди. Бу масалани ечиш эса юқорида келтирилган эди.

6-МАЪРУЗА
ГИПЕРБОЛИК ТИПДАГИ ТЕНГЛАМА УЧУН АРАЛАШ МАСАЛА.

Гиперболик типдаги тенглама учун қуйидаги аралаш масалани қараймиз:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = div(p \cdot grad\, u) - q \cdot u + F(x,t) \equiv -Lu + F(x,t),$$

$$(x,t) \in Ц_{\infty} = G \times (0,\infty); \qquad (1)$$

$$u\big|_{t=0} = u_0(x)\,, \qquad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = u_1(x), \qquad x \in \overline{G} \qquad (2)$$

$$\left(\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n}\right)\bigg|_S = 0, \quad t \geq 0\,. \qquad (3)$$

ρ, p, q, α ва β функциялар қуйидаги шартларни қаноатлантиради:
$p(x) \in C^1(\overline{G}),\ q(x) \in C(\overline{G}),\ p(x) > 0,\ q(x) \geq 0,\ x \in G,\ \alpha$ ва β функциялар S да бўлакли-узлуксиз функциялар, ҳамда $\alpha(x) \geq 0,\ \beta(x) \geq 0,\ \alpha(x) + \beta(x) > 0,\ x \in S$. $G-$чегараланган соҳа ва унинг чегараси S бўлакли-узлуксиз сиртдир, S_0- эса шу S сиртнинг бир вақтда $\alpha(x) > 0$ ва $\beta(x) > 0$ бўладиган қисмидир.

1. Классик ечим. Энергия интеграли.

Агар $u(x,t)$ функция $C^2(Ц_{\infty}) \cap C^1(\overline{Ц}_{\infty})$ синфдан бўлган функция $Ц_{\infty}$ цилиндрда (1) тенгламани, ҳамда пастки асосда (2) бошланғич шартни ва бу цилиндрнинг ён сиртида (3) чегаравий шартни қаноатлантирса, у ҳолда бу функцияга (1)-(2)-(3) аралаш масаланинг классик ечими дейилади.

(1)-(2)-(3) масаланинг классик ечими мавжудлигининг зарурий шарти қуйидаги силлиқлик шартидан иборат:

$F \in C(Ц_\infty),\ u_0 \in C^1(\overline{G}),\ u_1 \in C(\overline{G})$ ва $\left.\left(\alpha u_0 + \beta \dfrac{\partial u_0}{\partial n}\right)\right|_S = 0$

келишувчанлик шарти.

Гиперболик типдаги тенгламалар учун чегаравий масалаларни ўрганишда энергия интеграли усули энг қулайдир. $u(x,t)$ функция (1)-(2)-(3) масаланинг классик ечими бўлсин.

$$J^2(t) = \frac{1}{2}\int_G \left[\rho \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + p \cdot |gradu|^2 + qu^2\right] dx +$$

$$+\frac{1}{2}\int_{S_0} p \cdot \frac{\alpha}{\beta} u^2 dS$$

миқдор энергия интеграли деб аталади, ҳамда тебранувчи системанинг t вақт моментидаги кинетик ва потенциал энергиялари йиғиндисини ифода қилади.

Теорема. $u(x,t)$ функция (1)-(2)-(3) масаланинг классик ечими ва $F \in C(\overline{Ц}_\infty)$ бўлсин. У ҳолда

$$J^2(t) = J^2(0) + \int_0^t \int_G F(x,\tau)\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial \tau} d\tau,\ t \ge 0 \text{ учун} \qquad (4)$$

муносабат ўринлидир, бунда

$$J^2(0) = \frac{1}{2}\int_G \left[\rho \cdot {u_1}^2 + p \cdot |gradu_0|^2 + q{u_0}^2\right] dx + \frac{1}{2}\int_{S_0} p \cdot \frac{\alpha}{\beta} {u_0}^2 dS.$$

Исбот. Теоремани исбот қилиш учун ихтиёрий $\varepsilon > 0$ сон ва чегараси S' бўлакли-силлиқ бўлган G'Р G соҳани оламиз. (1) тенгламани $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ га кўпайтириб, $G' \times (\varepsilon, T)$ цилиндр бўйича интеграллаймиз ва (Агар $u \in C^2(G) \cap C^1(\overline{G})$ ва $v \in C^1(\overline{G})$ бўлса, у ҳолда Гриннинг биринчи формуласи ўринли бўлади:

$$\int_G vLudx = \int_G p\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx - \int_S pv\frac{\partial u}{\partial n}ds + \int_G quvdx.$$

Агар $u \in C^2(G) \cap C^1(\bar{G})$ ва $v \in C^2(G) \cap C^1(\bar{G})$ бўлса, у ҳолда Гриннинг иккинчи формуласи ўринли бўлади:

$$\int_G \left(Lu \cdot v - u \cdot Lv\right)dx = \int_S p\left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds. \quad)$$

Гриннинг биринчи формуласидан фойдаланиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\int_{G'\times(\varepsilon,T)} F \cdot \frac{\partial u}{\partial t}dxdt = \int_{G'\times(\varepsilon,T)} \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \left(\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + Lu\right)dxdt =$$

$$= \int_{G'} \rho \cdot \int_{\varepsilon}^{T} \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}dtdx + \int_{\varepsilon}^{T} \int_{G'} \frac{\partial u}{\partial t} \cdot Ludxdt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{G'} \rho \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 \Bigg|_{\varepsilon}^{T} dx + \int_{\varepsilon}^{T}\left[\int_{G'} p \cdot \left(gradu,\, grad\frac{\partial u}{\partial t}\right)dx - \right.$$

$$\left. - \int_{S'} p\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial n}ds' + \int_{G'} q \cdot u \cdot \frac{\partial u}{\partial t}dx\right]dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{G'}\left[\rho \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + p \cdot |gradu|^2 + qu^2\right]\Bigg|_{\varepsilon}^{T} dx - \int_{\varepsilon}^{T}\int_{S'} p\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial n}ds'dt.$$

Энди $\varepsilon \to 0$ ва $G' \to G$ да лимитга ўтиб ва $u \in C^1(\bar{Ц}_T)$ ва $F \in C(\bar{Ц}_T)$ эканлигидан

$$\frac{1}{2}\int_G \left[\rho \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + p \cdot |gradu|^2 + qu^2 \right] \Bigg|_0^T dx -$$

$$-\int_0^T \int_S p \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial n} ds dt = \int_{Ц_T} F \frac{\partial u}{\partial t} dx dt \qquad (5)$$

тенгликни ҳосил қиламиз. S сиртда (3) чегаравий шартдан агар $\beta > 0$ бўлса, у ҳолда $\frac{\partial u}{\partial n} = -\frac{\alpha}{\beta} u$ ва агар $\beta = 0$ бўлса, у ҳолда $u = 0$ муносабат келиб чиқади. Шунинг учун

$$-\int_0^T \int_S p \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial n} ds dt = \int_0^T \int_{S_0} p \frac{\alpha}{\beta} u \frac{\partial u}{\partial t} ds dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{S_0} p \frac{\alpha}{\beta} u^2 \Bigg|_0^T ds.$$

Бундан ва (5) дан T ни t билан алмаштириб, (4) формулани ҳосил қиламиз. Теорема исбот бўлди.

Натижа. (4) тенглик $F = 0$ учун

$$J^2(t) = J^2(0), \quad t \geq 0 \quad \text{учун} \qquad (6)$$

шаклга эга бўлади.

(6) тенгликнинг физик маъноси шундан иборатки, тебранувчи системанинг тўлиқ энергияси ташқи қўзғалиш бўлмаганда вақт ўтиши билан ўзгармайди(энергиянинг сақланиш қонуни).

2. Классик ечимнинг ягоналиги ва унинг узлуксиз боғлиқлиги.

(1)-(2)-(3) аралаш масаланинг классик ечимнинг ягоналиги ва унинг узлуксиз боғлиқлигини исбот қилиш учун энергия интеграли усулини қўллаймиз.

(4) тенгликни t бўйича дифференциалласак,

$$2J(t)J'(t) = \int_G F(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}dx,\ t \geq 0 \text{ учун} \tag{7}$$

ҳосил бўлади. (7) тенгликнинг ўнг томонига Коши-Буняковский тенгсизлигини қўлласак,

$$2JJ' \leq \|F\| \cdot \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\| \tag{8}$$

тенгсизликни келтириб чиқарамиз.

Энди $\rho(x) > 0,\ \rho \in C(\overline{G})$ ва бунга кўра, қандайдир $\rho_0 > 0$ учун $\rho(x) \geq \rho_0$ тенгсизлик ўринли бўлиб, қуйидаги тенгсизликлар занжирини ҳосил қиламиз:

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2 \leq \frac{1}{\rho_0}\int_G \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx \leq \frac{2}{\rho_0} \cdot J^2(t),$$

яъни

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\| \leq \sqrt{\frac{2}{\rho_0}} \cdot J(t)\ . \tag{9}$$

Худди шунга ўхшаш

$$\|grad u\| \leq \sqrt{\frac{2}{p_0}} \cdot J(t)\ , \tag{10}$$

бунда $p_0 = \min\limits_{x\in\overline{G}} p(x)$, $p_0 > 0$ тенгсизлик ўринли эканлигига ишонч ҳосил қиламиз.

(9) тенгсизликни (8) тенгсизликка олиб бориб қўйсак ва J га қисқартириб,

$$J'(t) \leq \frac{1}{\sqrt{2\rho_0}} \cdot \|F\|,\ t \geq 0$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз.

Ҳосил қилинган дифференциал тенгсизликни интеграллаб, J функция учун

$$J(t) \le J(0) + \frac{1}{\sqrt{2\rho_0}} \int_0^t \|F\| d\tau \qquad (11)$$

баҳолашни ҳосил қиламиз.

(9), (10) ва (11) баҳолашлардан

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\| \le \sqrt{\frac{2}{\rho_0}} \cdot J(0) + \frac{1}{\rho_0} \int_0^t \|F\| d\tau \ , \ t \ge 0, \qquad (12)$$

$$\|\,\|gradu\|\,\| \le \sqrt{\frac{2}{p_0}} \cdot J(0) + \frac{1}{\sqrt{\rho_0 p_0}} \int_0^t \|F\| d\tau \ , \ t \ge 0 \qquad (13)$$

баҳолашларни ҳосил қиламиз.

Энди $\|u\|$ функцияни баҳолаймиз. t бўйича

$$\|u\|^2 = \int_G u^2(x,t) dx$$

тенгликни дифференциалласак, ҳамда Коши-Буняковский тенгсизлиги ва (12) тенгсизликни ҳисобга олиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$2\|u\| \cdot \|u\|' = 2\int_G u \frac{\partial u}{\partial t} dx \le 2\|u\| \cdot \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\| \le$$

$$\le 2\|u\| \cdot \left[\sqrt{\frac{2}{\rho_0}} \cdot J(0) + \frac{1}{\rho_0} \int_0^t \|F\| d\tau \right],$$

яъни $2\|u\|$ га қисқартиргандан кейин

$$\|u\|' \le \sqrt{\frac{2}{\rho_0}} \cdot J(0) + \frac{1}{\rho_0} \int_0^t \|F\| d\tau, \ t \ge 0 \ .$$

Бу дифференциал тенгсизликни интеграллаб,

$$\|u\| \le \|u\|_0 + \sqrt{\frac{2}{\rho_0}} \cdot J(0)\, t + \frac{1}{\rho_0} \int_0^t \int_0^{t'} \|F\| d\tau dt'$$

тенгсизликка эга бўламиз, бунда $\|u\|_0$ – эса $\|u\|$ функциянинг $t=0$ нуқтадаги қийматидир, яъни

$$\|u\|_0^2 = \int_G u^2(x,0)dx = \int_G u_0^2(x)dx = \|u_0\|^2.$$

Охирги интегралда интеграллаш тартибини ўзгартириб, изланган баҳолашни ҳосил қиламиз:

$$\|u\| \le \|u\|_0 + \sqrt{\frac{2}{\rho_0}} \cdot J(0)\, t + \frac{1}{\rho_0}\int_0^t (t-\tau)\cdot \|F\| d\tau,\ t \ge 0. \qquad (14)$$

(12), (13) ва (14) баҳолашлардан фойдаланиб, қуйидаги теоремани исбот қиламиз.

Теорема. (1)-(2)-(3) масаланинг классик ечими ягона ва u_0, u_1 ва F функциялардан шу маънода узлуксиз боғлиққи, бунда, агар $F \in C(\bar{Ц}_T),\ \tilde{F} \in C(\bar{Ц}_T)$ ва

$$\left.\begin{aligned} &\|F-\tilde{F}\| \le \varepsilon\ ,0 \le t \le T;\ \|u_0 - \tilde{u}_0\|_C \le \varepsilon_0\ , \\ &\|\|gradu_0 - grad\tilde{u}_0\|\| \le \varepsilon_0^{'},\quad \|u_1 - \tilde{u}_1\|\ \le \varepsilon_1 \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

бўлса, у ҳолда $u(x,t)$ ва $\tilde{u}(x,t)$ мос (классик) ечимлар $0 \le t \le T$ учун

$$\|u-\tilde{u}\| \le C\left(\varepsilon_0 + T\varepsilon_0 + T\varepsilon_0^{'} + T\varepsilon_1 + \frac{T^2}{2}\varepsilon\right), \qquad (16)$$

$$\|\|grad_x u - grad_x \tilde{u}\|\| \le C\left(\varepsilon_0 + \varepsilon_0^{'} + \varepsilon_1 + T\varepsilon\right), \qquad (17)$$

$$\|u_t - \tilde{u}_t\| \le C\left(\varepsilon_0 + \varepsilon_0^{'} + \varepsilon_1 + T\varepsilon\right) \qquad (18)$$

тенгсизликни қаноатлантиради, бундан ташқари C сон u_0, u_1, F, t ва T ларга боғлиқ эмас.

Исбот. Ягоналикни исботлаш учун, (1)-(2)-(3) га мос бир жинсли масала ($u_0 = u_1 = 0$ ва $F = 0$ учун) фақат ноль классик ечимга эга эканлигини кўрсатиш керак бўлади, яъни

$u(x,t)=0,\ (x,t)\in Ц_{\infty}$. Бу эса, (14) тенгсизликдан келиб чиқади, чунки $u_0=0,\quad J(0)=0$ ва $F=0$.

Узлуксиз боғлиқликни исботлаш учун $\eta=u-\tilde{u}$ функциялар айирмасини тузамиз. η функция (1)-(2)-(3) масалада F , u_0 ва u_1 функциялар $F-\tilde{F}$, $u_0-\tilde{u}_0$ ва $u_1-\tilde{u}_1$ функциялар билан мос равишда алмаштирилган ҳолдаги классик ечимдан иборат бўлади. (15) тенгсизликдан фойдаланиб, η ечим учун $J^2(0)$ энергия интеграли миқдорини баҳолаймиз:

$$2\tilde{J}^2(0)=$$

$$=\int_G\left[\rho\cdot(u_1-\tilde{u}_1)^2+p\cdot\left|gradu_0-grad\tilde{u}_0\right|^2+q(u_0-\tilde{u}_0)^2\right]dx+$$

$$+\int_{S_0}p\cdot\frac{\alpha}{\beta}(u_0-\tilde{u}_0)^2dS\le$$

$$\le V\cdot\max_{x\in\overline{G}}\rho(x)\cdot\varepsilon_1^2+V\cdot\max_{x\in\overline{G}}p(x)\cdot\varepsilon_0^{'2}+$$

$$+\left[V\cdot\max_{x\in\overline{G}}q(x)+\sigma\cdot\max_{x\in S_0}p(x)\cdot\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}\right]\varepsilon_0^2\le$$

$$\le C_1^2\cdot\left(\varepsilon_0+\varepsilon_0^{'}+\varepsilon_1\right)^2,$$

бунда V орқали G соҳанинг ҳажми, σ орқали S_0 бўлакнинг юзи ва C_1^2 –сон эса, $V\cdot\max\limits_{x\in\overline{G}}\rho(x)$, $V\cdot\max\limits_{x\in\overline{G}}p(x)$ ва $V\cdot\max\limits_{x\in\overline{G}}q(x)+\sigma\cdot\max\limits_{x\in S_0}p(x)\cdot\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ сонлардан катта бўлган сондир. Шундай қилиб,

$$\sqrt{2}\tilde{J}(0)\le C_1\cdot\left(\varepsilon_0+\varepsilon_0^{'}+\varepsilon_1\right)\qquad(19)$$

баҳолаш ҳосил қилинди.

Энди (14) тенгсизликни η ечимга қўлласак,

$$\|\eta\| \leq \|u_0 - \tilde{u}_0\| + \sqrt{\frac{2}{\rho_0}} \cdot \tilde{J}(0) \cdot t + \frac{1}{\rho_0}\int_0^t (t-\tau)\|F - \tilde{F}\| d\tau$$

бўлиб, (15) ва (19) тенгсизликлардан фойдаланиб, барча $t \in [0, T]$ учун (16) баҳолашни C ўзгармас тегишлича танланганда ҳосил қиламиз:

$$\|\eta\| \leq \sqrt{V}\,\|u_0 - \tilde{u}_0\|_C + \frac{1}{\sqrt{\rho_0}} \cdot C_1\left(\varepsilon_0 + \varepsilon_0^{'} + \varepsilon_1\right)t +$$

$$+\frac{\varepsilon}{\rho_0}\int_0^t (t-\tau)d\tau \leq \varepsilon_0 \cdot \sqrt{V} + \frac{T}{\sqrt{\rho_0}} \cdot C_1\left(\varepsilon_0 + \varepsilon_0^{'} + \varepsilon_1\right) +$$

$$+\frac{\varepsilon}{2\rho_0}T^2 \leq C\left(\varepsilon_0 + \varepsilon_0 \cdot T + \varepsilon_0^{'} \cdot T + \varepsilon_1 \cdot T + \frac{\varepsilon}{2} \cdot T^2\right)$$

Худди шунга ўхшаш, (12), (13) ва (19) тенгсизликлардан фойдаланиб, (17) ва (18) тенгсизликларни ўрнатамиз. Теорема исбот бўлди.

7-МАЪРУЗА
ТЎЛҚИН ТЕНГЛАМАСИ.

1. Кирхгоф формуласи.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \qquad (1)$$

тўлқин тенгламасини қараймиз ва унинг

$$\left.\begin{aligned} &u\big|_{t=0} = \varphi_0(x,y,z)\ , \\ &\frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \varphi_1(x,y,z) \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимини излаймиз.

Бутун фазода $\varphi_0(x,y,z)$ функция учинчи тартибгача узлуксиз ҳосилаларга, $\varphi_1(x,y,z)$ функция эса, иккинчи тартибгача узлуксиз ҳосилаларга эга деб оламиз.

Аввал маркази $M(x,y,z)$ нуқтада радиуси $r = at$ бўлган S_{at} сфера сирти бўйича олинган

$$u(x,y,z,t) = \frac{1}{4\pi a}\iint_{S_{at}} \frac{\varphi(\xi,\eta,\zeta)}{r}\, d\sigma_r \qquad (3)$$

интеграл (1) тўлқин тенгламасининг ечими бўлишлигини кўрсатамиз, бу ерда $\varphi(\xi,\eta,\zeta)$ – ихтиёрий функциядир.

S_{at} сфера нуқталари координаталари

$$\xi = x + \alpha at,\ \eta = y + \beta at,\ \zeta = z + \gamma at$$

формулалар билан ифодаланиши мумкин, бунда (α,β,γ)–вектор S_{at} сфера радиусининг йўналтирувчи косинуслардир. Уларни биз қуйидаги шаклда ёзамиз:

$$\alpha = \sin\theta\cos\psi,\ \beta = \sin\theta\sin\psi,\ \gamma = \cos\theta\ ,$$

бунда θ бурчак 0 дан π гача ва ψ бурчак 0 дан 2π гача ўзгаради. Агар (ξ,η,ζ) нуқта S_{at} сфера нуқтаси бўлса, у ҳолда (α,β,γ)– нуқта маркази координата бошида радиуси бирга тенг бўлган S_1 сфера нуқтаси бўлади, ҳамда ҳар иккита сферанинг мос $d\sigma_r$ ва $d\sigma_1$ юза элементлари

$$d\sigma_r = r^2 d\sigma_1 = a^2 t^2 d\sigma_1 = a^2 t^2 \sin\theta d\theta d\psi$$

муносабат билан боғланган. У ҳолда (3) интеграл

$$u(x,y,z,t) = \frac{t}{4\pi}\iint_{S_1} \varphi(x+\alpha at, y+\beta at, z+\gamma at)d\sigma_1 \qquad (4)$$

шаклга келади. Бундан эса, осонгина кўриш мумкинки, агар $\varphi(\xi,\eta,\zeta)$ функция $k-$тартибгача $(k \geq 2)$ ўзининг узлуксиз ҳосилаларига эга бўлса, у ҳолда $u(x,y,z,t)$ функция ҳам $k-$тартибгача узлуксиз ҳосилаларга эга бўлади.

(4) формуладан

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{t}{4\pi}\iint_{S_1}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta^2}\right)d\sigma_1$$

ёки, интеграллашнинг бошланғич соҳасига қайтиб,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{4\pi a^2 t}\iint_{S_{at}}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta^2}\right)d\sigma_r \qquad (5)$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Энди (4) ифодада t бўйича ҳосила олиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{1}{4\pi}\iint_{S_1}\varphi(x+\alpha at, y+\beta at, z+\gamma at)d\sigma_1 + \\ &+ \frac{at}{4\pi}\iint_{S_1}\left(\alpha\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \beta\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + \gamma\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta}\right)d\sigma_1.\end{aligned} \qquad (6)$$

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ ҳосилани ҳисоблаш учун (6) ифодани қуйидагича ёзамиз:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u}{t} + \frac{1}{4\pi at}\iint_{S_{at}}\left(\alpha\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \beta\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + \gamma\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta}\right)d\sigma_r$$

Бу ерда Остроградский формуласини қўллак,

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{u}{t}+\frac{1}{4\pi at}\iiint\limits_{D_{at}}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\zeta^2}\right)d\xi d\eta d\zeta\,,$$

бунда D_{at} маркази $M(x,y,z)$ нуқтада радиуси $r=at$ бўлган шар бўлади.

$$I=\iiint\limits_{D_{at}}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\zeta^2}\right)d\xi d\eta d\zeta$$

деб белгиласак, у ҳолда

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{u}{t}+\frac{I}{4\pi at}$$

бўлади. Бу ифодадан t бўйича ҳосила олсак, қуйидагига эга бўламиз:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=-\frac{u}{t^2}+\frac{1}{t}\left(\frac{u}{t}+\frac{I}{4\pi at}\right)-\frac{I}{4\pi at^2}+\frac{1}{4\pi at}\cdot\frac{\partial I}{\partial t}=$$

$$=\frac{1}{4\pi at}\cdot\frac{\partial I}{\partial t}\ .$$

Осонгина кўриш мумкинки,

$$\frac{\partial I}{\partial t}=a\iint\limits_{S_{at}}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\zeta^2}\right)d\sigma_r\ . \qquad (8)$$

Ҳақиқатдан ҳам, I интегралда маркази $M(x,y,z)$ нуқтада бўлган (ρ,θ,ψ) сферик координаталарига ўтиб,

$$I=\int\limits_0^{at}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\zeta^2}\right)\rho^2\sin\theta d\theta d\psi d\rho$$

тенгликка эга бўламиз. Бу ифодадан t бўйича ҳосила олсак, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\frac{\partial I}{\partial t}=a\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\zeta^2}\right)_{\rho=at} a^2t^2\sin\theta d\theta d\psi=$$

$$=a\iint_{S_{at}}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\zeta^2}\right)d\sigma_r\ .$$

Агар $\varphi(x,y,z)$ функция иккинчи тартибгача узлуксиз ҳосилаларга эга бўлса, у ҳолда (5), (7) ва (8) тенгликларни таққослаб, биз (3) формула билан аниқланадиган $u(x,y,z,t)$ функция (1) тўлқин тенгламасини қаноатлантиришини кўрамиз. (4) ва (6) формулалардан бевосита $u(x,y,z,t)$ функция

$$u\big|_{t=0}=0,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\varphi(x,y,z) \tag{9}$$

бошланғич шартларни қаноатлантириши келиб чиқади.

Агар $u(x,y,z,t)$ функция (1) тўлқин тенгламасининг (9) бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечими бўлса, у ҳолда осонгина кўриш мумкинки,

$$v(x,y,z,t)=\frac{\partial u}{\partial t}$$

функция (1) тенгламанинг

$$v\big|_{t=0}=\varphi(x,y,z),$$

$$\left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0}=\left.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_{t=0}=a^2\left.\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\right|_{t=0}=0 \tag{10}$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечими бўлади. Энди (9) бошланғич шартлар ҳолида $\varphi(x,y,z)$ функция ўрнига $\varphi_1(x,y,z)$ функцияни ва (10) бошланғич шартлар ҳолида $\varphi(x,y,z)$ функция ўрнига эса $\varphi_0(x,y,z)$ функцияни олиб, ҳамда шундай қилиб қурилган ечимларни қўшсак, биз (1) тенгламанинг (2) бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимига эга бўламиз.

Шундай қилиб, (1) тўлқин тенгламасининг (2) бошланғич шартни қаноатлантирувчи ечими

$$u(x,y,z,t)=\frac{1}{4\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{S_{at}}\frac{\varphi_0(\xi,\eta,\zeta)}{r}d\sigma_r+$$
$$+\frac{1}{4\pi a}\iint\limits_{S_{at}}\frac{\varphi_1(\xi,\eta,\zeta)}{r}d\sigma_r \qquad (11)$$

шаклида ёзилади. Бу формула Кирхгоф формуласи дейилади.

Уч ўлчамли фазода (11) Кирхгоф формуласи билан ифодаланган тўлқин тарқалишининг физик кўринишини тасаввур қилиш учун бошланғич қўзғалишни чегараси S бўлган чегараланган V соҳада жамланган деб оламиз, яъни φ_0 ва φ_1 функциялар V соҳадан ташқарида нолга тенг бўлади.

$M(x,y,z)$ нуқта V соҳадан ташқарида жойлашган бўлсин. d ва D орқали мос равишда $M(x,y,z)$ нуқтадан S сирт нуқтасигача бўлган энг кичик ва энг катта масофаларни белгилаймиз. $t<\frac{d}{a}$ учун S_{at} сфера V соҳадан ташқарида жойлашган бўлади, шунинг учун φ_0 ва φ_1 функциялар S_{at} сферада нолга тенг ва (11) формуладан $u(M,t)=0$ га эга бўламиз, яъни бошланғич қўзғалиш ҳали M нуқтага етиб келишга улгургани йўқ. Вақтнинг $t=\frac{d}{a}$ моментида S_{at} сфера S сиртга уринади ва M нуқта орқали тўлқин олди фронти ўтади. Вақтнинг $t=\frac{d}{a}$ моментидан вақтнинг $t=\frac{D}{a}$ моментигача S_{at} сфера V соҳани кесади ва (11) формула $u(M,t)\neq 0$ эканлигини беради. Ниҳоят, $t>\frac{D}{a}$ учун S_{at} сфера S сирт билан умумий нуқталарга эга бўлмайди (бутун V соҳа S_{at} сфера ичида жойлашган бўлади) ва (11) формуладан $u(M,t)=0$ га эга бўламиз, яъни бошланғич қўзғалиш M нуқта орқали ўтиб кетади. Вақтнинг $t=\dfrac{D}{a}$ моментига M нуқта орқали ўтувчи тўлқин орти фронти мос келади. Берилган t вақт моментида тўлқин олди фронти ҳали тебранмаган нуқталарни тебранаётган нуқталардан ажратувчи сиртдан иборат. Аввалгига кўра, бу сиртнинг барча нуқталари S дан at га тенг бўлган энг қисқа масофага эга. Тўлқин олди фронти маркази S сиртда ва радиуси at бўлган сфералар оиласи учун ўрамадан иборат. Тўлқин орти фронти берилган t вақт моментида ҳали тебранаётган нуқталарни тебраниш тўхтаган нуқталардан ажратувчи сиртдан иборат. a ўзгармас тўлқин фронти тарқалишининг тезлигидан иборат бўлади.

Шундай қилиб, локал бошланғич қўзғалиш фазодаги ҳар бир M нуқтада вақт бўйича локаллашган таъсирни пайдо қилади ва бундан ташқари тўлқин олди ва орти фронти тўлқинлари тарқалишига эга бўламиз (Гюйгенс принципи).

2. Цилиндрик тўлқинлар. Бошланғич функциялар φ_0 ва φ_1 функциялар фақат x ва y дан боғлиқ бўлган, яъни z ўқига параллел ҳар қандай тўғри чизиқда ўзгармас қийматни сақлайдиган хусусий ҳолни қараймиз. Агар $M(x,y,z)$ нуқтани z ўқига ҳаракатлантирсак, у ҳолда (11) Кирхгоф формуласининг ўнг қисми ўзининг қийматини ўзгартимайди, яъни u функция ҳам z дан боғлиқ бўлмайди ва (11) формула

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{12}$$

тенгламанинг

$$u\big|_{t=0}=\varphi_0(x,y)\ ,\ \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0}=\varphi_1(x,y) \tag{13}$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимини беради.

Биз (11) ечимни xy текислигида қарашимиз мумкин. Бунинг учун (11) формуладаги сфера бўйича олинган интегралларни xy текислигидаги доиралар бўйича олинган интеграллар билан алмаштирамиз. xy текислигида $M(x,y)$ нуқтани оламиз.

$$\xi = x + \alpha at, \eta = y + \beta at,\ \zeta = z + \gamma at$$

формулалар билан аниқланадиган (ξ, η, ζ) координатали нуқта $z = 0$ учун маркази $M(x, y, 0)$ нуқтада радиуси at бўлган S_{at} сфера нуқтасидир. xy текислигининг юқори ва пастки қисмида жойлашган сфера қисми xy текислигига проекцияланганда маркази $M(x, y)$ нуқтада ва радиуси at бўлган C_{at} доирадан иборат. Маълумки, $dC_{at} = \cos(n\ z)d\sigma_{at}$, бунда $n-$эса S_{at}га ўтказилган нормалдир, яъни шу сферанинг $0z$ ўқи билан ўткир бурчак ташкил қилувчи радиусидир. Агар N сферадаги ўзгарувчи нуқта, N_1- эса унинг xy текислигига проекцияси бўлса, у ҳолда

$$\cos(n\ z) = \frac{|NN_1|}{|MN|} = \frac{\sqrt{a^2t^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}}{at},$$

бунда (ξ, η) – координаталари ўзгарувчи бўлган C_{at} доирадаги нуқтадир.

(11) формулани алмаштириш натижасида

$$u(x, y, t) = \frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{C_{at}} \frac{\varphi_0(\xi, \eta)d\xi d\eta}{\sqrt{a^2t^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}} + \\ + \frac{1}{2\pi a}\iint\limits_{C_{at}} \frac{\varphi_1(\xi, \eta)d\xi d\eta}{\sqrt{a^2t^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}} \tag{14}$$

формулани ҳосил қиламиз. Бу формула (12) тўлқин тенгламасининг (13) бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимини беради. (14) формулага Пуассон формуласи деб аталади.

Бошланғич қўзғалиш xy текислигидаги l контурли B чекли соҳа билан чегараланган, яъни $\varphi_0(x, y)$ ва $\varphi_1(x, y)$ функциялар B нинг ташқарисида нолга тенг деб оламиз. $M(x, y)$ нуқта B соҳадан ташқарида жойлашган бўлсин. Вақтнинг $t < \dfrac{d}{a}$ моменти учун, бунда d орқали $M(x, y)$ нуқтадан l контургача бўлган энг кичик масофа, C_{at} доира B соҳа билан умумий нуқталарга эга эмас, $\varphi_0(x,y)$ ва $\varphi_1(x,y)$ функциялар C_{at} доиранинг барча жойида нолга тенг ва (14) формуладан $u(M,t)=0$ га эга бўламиз, яъни бошланғич қўзғалиш ҳали M нуқтага етиб келишга улгургани йўқ. Вақтнинг $t=\frac{d}{a}$ моментида M нуқтага тўлқин олди фронти етиб келади. $t>\frac{D}{a}$ қиймат учун , бунда D орқали $M(x,y)$ нуқтадан l контургача бўлган энг катта масофа, C_{at} доира B соҳанинг ичида бутунича жойлашган ва

$$u(x,y,t)=\frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\iint_B\frac{\varphi_0(\xi,\eta)d\xi d\eta}{\sqrt{a^2t^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}+$$
$$+\frac{1}{2\pi a}\iint_B\frac{\varphi_1(\xi,\eta)d\xi d\eta}{\sqrt{a^2t^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}} \qquad (15)$$

ҳосил бўлади. Вақтнинг $t=\frac{D}{a}$ моментидан кейин $u(x,y,t)$ функция уч ўлчамли фазодаги сингари нолга айланмайди. Формуланинг махражида a^2t^2 қатнашганлиги учун $t\to\infty$ да $u(x,y,t)\to 0$ эканлигини тасдиқлаш мумкин. Шундай қилиб, текисликдаги локаллашган бошланғич қўзғалиш учун ечим вақт бўйича локаллашмаган бўлади. Бу ҳолда тўлқин олди фронтига эга, лекин тўлқин орти фронтига эга бўлмаган тўлқин пайдо бўлади (Гюйгенс принципи ўринли эмас). Уч ўлчамли фазода (12) тенгламага цилиндрик тўлқин деб аталувчи тўлқин мос келади.

3. Ечимнинг берилган бошланғичлардан узлуксиз боғлиқлиги. Тўлқин тенгламаси учун Коши масаласининг ечимини берувчи чиқарилган барча формулалар бошланғич функциялардан олинган интегралларнинг аниқ функцияларга кўпайтмаси ва бундай интегралларнинг вақт бўйича ҳосилаларини сақлайди. Шунинг учун, агар φ_0 ва φ_1 бошланғич функцияларнинг ўзлари билан бирга уларнинг биринчи тартибли ҳосилалари етарлича кам ўзгарса, у ҳолда Коши масаласининг ечимини берувчи u функция ҳам кам ўзгаради, яъни ечимнинг берилган бошланғичлардан узлуксиз боғлиқлигига эга бўламиз. Бу ерда албатта, агар бошланғич функция бериладиган соҳа чексиз бўлса, у ҳолда $t-$ нинг қийматларининг фақат чегараланган ҳоли қаралади.

4. Ягоналик теоремаси. Тўлқин тенгламаси учун Коши масаласи ечимининг ягоналигини исбот қиламиз. Ёзувларни камайтириш мақсадида $a=1$ деб ҳисоблаймиз, чунки тўлқин тенгламасида t ни $\frac{t}{a}$ билан алмаштириш шунга олиб келади.

Аниқлик учун

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{16}$$

$$u\big|_{t=0}=\varphi_0(x,y)\ ,\ \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0}=\varphi_1(x,y) \tag{17}$$

уч эркли ўзгарувчили бўлган ҳолни қараймиз. Икки марта узлуксиз дифференциаланувчи функциялар синфида (16), (17) Коши масаласи ечими ягона эканлигини кўрсатамиз. $u_1(x,y,t)$ ва $u_2(x,y,t)$ функциялар (16) тенгламанинг (17) кўринишдаги бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимлари бўлсин. У ҳолда $u(x,y,t)=u_1(x,y,t)-u_2(x,y,t)$ айирма (16) тўлқин тенгламасини ва

$$u\big|_{t=0}=0\ ,\ \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0}=0 \tag{18}$$

нол бошланғич берилганларни қаноатлантиради.

Ихтиёрий (x,y) ва ихтиёрий $t>0$ қийматда $u\equiv 0$ эканлигини кўрсатамиз. Уч ўлчамли (x,y,t) фазони қараймиз ва ихтиёрий $M(x_0,y_0,z_0)$ нуқтани оламиз, бундан ташқари $t_0>0$. Бу нуқтадан шу нуқта учи бўладиган

$$(t-t_0)^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2=0$$

конусни $t=0$ текислик билан кесишгунча ўтказамиз. Бу конусни характеристик конус деб атаймиз. Характеристик конус ён сирти ва $t=0$ текислик қисми билан чегараланган конус ичидан иборат соҳа D бўлсин(D–конус).

Қуйидаги айниятни текшириш қийин эмас:

$$2\frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right]-$$

$$-2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x}\right)-2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

D соҳа бўйича бу айниятни интеграллаймиз. Чап қисмидаги интеграл нолга тенг, чунки u функция (16) тенгламанинг ечимидир:

$$0=\iiint\limits_D\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right]-\right.$$

$$\left.-2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x}\right)-2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right\}dxdydt.$$

Бу интегрални Остроградский формуласидан фойдаланиб, D соҳа сирти бўйича олинган интеграл билан алмаштирамиз. Γ орқали конуснинг ён сиртини, σ_0- орқали эса асосини белгилаймиз. (18) бошланғич берилганларга кўра, σ_0 да $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial t}=0$ бўлиб, фақат Г бўйича битта интеграл қолади:

$$\iint\limits_\Gamma\left\{\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right]\cos(n\ t)-\right.$$
$$\left.-2\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x}\cos(n\ x)-2\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial y}\cos(n\ y)\right\}dS=0. \tag{19}$$

Характеристик конуснинг Г ён сиртида

$$\cos^2(n\ t)-\cos^2(n\ x)-\cos^2(n\ y)=0\ .$$

Энди (19) тенгликни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\iint\limits_{\Gamma} \frac{1}{\cos(n\ t)} \left\{ \left[\frac{\partial u}{\partial x}\cos(n\ t) - \frac{\partial u}{\partial t}\cos(n\ x) \right]^2 + \right.$$
$$\left. + \left[\frac{\partial u}{\partial y}\cos(n\ t) - \frac{\partial u}{\partial t}\cos(n\ y) \right]^2 \right\} dS = 0. \qquad (20)$$

Г сирт устида $\cos(n\ t) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, ҳамда интеграл остидаги функция узлуксиз ва манфиймас эканлигига кўра, (20) дан конус ён сиртида унинг нолга тенглиги келиб чиқади, яъни

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial x}\cos(n\ t) - \frac{\partial u}{\partial t}\cos(n\ x) = 0 \\ &\frac{\partial u}{\partial y}\cos(n\ t) - \frac{\partial u}{\partial t}\cos(n\ y) = 0 \end{aligned} \qquad (\Gamma \text{ да})$$

ёки

$$\frac{\dfrac{\partial u}{\partial x}}{\cos(n\ x)} = \frac{\dfrac{\partial u}{\partial y}}{\cos(n\ y)} = \frac{\dfrac{\partial u}{\partial t}}{\cos(n\ t)} = \lambda. \qquad (21)$$

l орқали характеристик конуснинг қандайдир ясовчисини белгиласак, (21) тенгликдан фойдаланиб, конус ясовчиси билан шу сиртнинг нормали тўғри бурчак ташкил этишини ҳисобга олиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos(l\ x) + \frac{\partial u}{\partial y}\cos(l\ y) + \frac{\partial u}{\partial t}\cos(l\ t) =$$
$$= \lambda\left[\cos(n\ x)\cos(l\ x) + \cos(n\ y)\cos(l\ y) + \cos(n\ t)\cos(l\ t)\right] =$$
$$= \lambda\cos(n\ l) = 0.$$

Демак, l ясовчи бўйлаб, $u = const$ бўлади. Конус ясовчисининг $t = 0$ текислик билан кесишган жойидаги қиймати $u = 0$. Шунинг учун конус ясовчиси бўйлаб $u = 0$ бўлади. Хусусан, бу конуснинг учи бўлган M нуқтасида ҳам бажарилади: $u(M)=0$. Шуни исбот қилиш талаб этилган эди. Агар (18) бир жинсли бошланғич шартлар бутун xy текислигининг ҳамма жойида эмас, балки D соҳанинг σ_0 асосидагина ўринли бўлганда ҳам, бу тасдиқ ўз кучида қолади. Бундан (16) тўлқин тенгламаси ечимининг $M(x_0,y_0,z_0)$ нуқтадаги қиймати $t=0$ текисликнинг фақат шу учи $M(x_0,y_0,z_0)$ нуқтада бўлган характеристик конуснинг $t=0$ текисликни кесган қисмидаги бошланғич шартларига боғлиқ эканлиги тўғрисида хулоса чиқариш мумкин бўлади.

5. Бир жинсли бўлмаган тўлқин тенгламаси.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+f(x,y,z,t) \qquad (22)$$

тенгламани қараймиз ва унинг

$$u\big|_{t=0}=0\ ,\ \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0}=0 \qquad (23)$$

нол бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимини излаймиз.

Бунга бир жинсли тенгламанинг (2) бошланғич шартни қаноатлантирувчи ечимини қўшсак, у ҳолда (22) тенгламанинг (2) бошланғич шартни қаноатлантирувчи ечимини ҳосил қиламиз. (22), (23) масалани ечиш учун

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) \qquad (24)$$

бир жинсли тенгламани

$$v\big|_{t=\tau}=0\ ,\ \frac{\partial v}{\partial t}\bigg|_{t=\tau}=f(x,y,z,\tau) \qquad (25)$$

бошланғич шартларни қаноатлантирган ҳолда қараймиз, бундан ташқари вақтнинг бошланғич моменти сифатида $t=0$ эмас, балки $t=\tau$ олинади, бунда τ қандайдир параметр. (24), (25) масаланинг ечими Кирхгоф формуласи орқали ифодаланади, лекин бу формулада t ни $t-\tau$ билан алмаштириш керак, чунки вақтнинг бошланғич моменти $t=0$ эмас, балки $t=\tau$ олинади. Демак, биз қуйидагига эга бўламиз:

$$v(x,y,z,t;\tau)=\frac{t-\tau}{4\pi}\iint_{S_1} f\left[x+\alpha a(t-\tau),y+\beta a(t-\tau),\right. \tag{26}$$
$$\left. z+\gamma a(t-\tau),\, \tau\right]d\sigma_1 .$$

Энди

$$u(x,y,z,t)=\int_0^t v(x,y,z,t;\tau)d\tau \tag{27}$$

формула билан аниқланган $u(x,y,z,t)$ функция (22) бир жинсли бўлмаган тўлқин тенгламасининг (23) берилган нол бошланғичларни қаноатлантирувчи ечимидан иборат бўлади. Ҳақиқатдан ҳам, (27) формуладан

$$\Delta u(x,y,z,t)=\int_0^t \Delta v(x,y,z,t;\tau)d\tau \tag{28}$$

тенгликга эга бўламиз. (27) ифодада t бўйича ҳосила олсак,

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\int_0^t \frac{\partial v}{\partial t}d\tau+v(x,y,z,t;\tau)\Big|_{t=\tau} \tag{29}$$

ҳосил бўлади. Бу ерда (25) шартларнинг биринчисига кўра, интеграл ташқарисидаги ҳад нолга тенг. t бўйича яна бир марта ҳосила олсак,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\int_0^t \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}d\tau+\frac{\partial v(x,y,z,t;\tau)}{\partial t}\Bigg|_{t=\tau}$$

тенгликка эга бўламиз, бундан ташқари, (25) шартларнинг иккинчисига кўра интеграл ташқарисидаги ҳад $f(x,y,z,t)$ га тенг, яъни

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\int_0^t \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}d\tau+f(x,y,z,t). \tag{30}$$

(28), (30) формулалардан ва (24) тенгламадан бевосита кўриш мумкинки, (27) формула билан аниқланадиган $u(x,y,z,t)$ функция (22) бир жинсли бўлмаган тенгламани қаноатлантиради.

(27) ва (29) формулалардан (23) бошланғич шартларнинг ҳам бажарилиши келиб чиқади. Энди (27) формуладаги функция ўрнига унинг (26) формуладаги ифодасини қўйсак,

$$u(x,y,z,t)=\frac{1}{4\pi}\int_0^t (t-\tau)\left\{\iint_{S_1} f\left[x+\alpha a(t-\tau), y+\beta a(t-\tau),\right.\right.$$

$$\left.\left. z+\gamma a(t-\tau),\ \tau\right]d\sigma_1\right\}d\tau$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бу ерда τ ўрнига $r=a(t-\tau)$ янги интеграллаш ўзгарувчисини киритамиз. У ҳолда

$$u(x,y,z,t)=\frac{1}{4\pi a^2}\cdot$$

$$\cdot\int_0^{at}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{f\left(x+\alpha r, y+\beta r,\ z+\gamma r, t-\frac{r}{a}\right)}{r}r^2\sin\theta d\theta d\psi\, dr$$

га эга бўламиз. Сферик координаталар ўрнига

$$\xi=x+\alpha r,\ \ \eta=y+\beta r,\ \ \zeta=z+\gamma r$$

тўғри бурчакли координаталарга ўтиб ва

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$$

эканлигидан

$$r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}$$

ни ҳосил қиламиз ва $u(x,y,z,t)$ ечим учун охирги шаклни ёзамиз:

$$u(x,y,z,t)=\frac{1}{4\pi a^2}\iiint_{D_{at}}\frac{f\left(\xi,\eta,\zeta,t-\frac{r}{a}\right)}{r}d\xi d\eta d\zeta\ , \quad (31)$$

бунда D_{at} радиуси at бўлган маркази эса, (x,y,z) нуқтада бўлган шардир.

(31) ифода кечикувчи потенциал деб аталади.

Таъкидлаш керакки, f функциядан интеграллаш бажарилганда қараётган t вақт моменти эмас, балки $t-\frac{r}{a}$ вақт моменти қаралади, бунда t рўй бераётган вақтгача бўлган вақт фарқи, шу тарқалаётган жараённинг a тезлик билан (ξ,η,ζ) нуқтадан (x,y,z) нуқтагача йўл босиб ўтиши учун кетган вақтдир.

Худди шунга ўхшаш, юқоридагидек, биз

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+f(x,y,t) \tag{32}$$

бир жинсли бўлмаган тўлқин тенгламанинг

$$u\big|_{t=0}=0\ ,\ \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0}=0 \tag{33}$$

берилган бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимини ҳосил қилишимиз мумкин. Бу ечим қуйидаги шаклга эга:

$$u(x,y,t)=\frac{1}{2\pi a}\int_0^t\left[\iint\limits_{\rho\le a(t-\tau)}\frac{f(\xi,\eta,\tau)\,d\xi d\eta}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2-\rho^2}}\right]d\tau\ , \tag{34}$$

бунда $\rho^2=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2$.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t) \tag{35}$$

тенглама ҳолида нол берилган бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечим қуйидагича бўлади:

$$u(x,t)=\frac{1}{2a}\int_0^t\left[\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)\,d\xi\right]d\tau. \tag{36}$$

8-МАЪРУЗА
ПАРАБОЛИК ТИПДАГИ ТЕНГЛАМА УЧУН АРАЛАШ МАСАЛА.

$$\sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x) D^\alpha u = f(x), \tag{1}$$

тенгламани қарайлик, бунда

$$D^\alpha u(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_1^{\alpha_1}}\ , \ D_{x_j}^k = \frac{\partial^k}{\partial x_j^k}\ , \ D^\alpha = D_{x_1}^{\alpha_1} \ldots D_{x_n}^{\alpha_n}.$$

Таъриф. *Агар* x^0 *тайинланган нуқта учун шундай бир*

$$\xi_i = \xi_i(\mu_1, \ldots, \mu_n),\ i = 1, 2, \ldots, n,$$

ўзгарувчиларнинг аффин алмаштиришини топиш мумкин бўлиб, натижада, $\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x^0)\, \xi^\alpha$ *формадан ҳосил қилинган* μ_i *ўзгарувчиларга боғлиқ бўлган форма фақатгина* l *та, бунда* $0 < l < n$ *, ўзгарувчиларнигина сақласа, у ҳолда* $\sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x) D^\alpha u = f(x)$ *тенглама* x^0 *нуқтада параболик махсусликк эга ёки параболик типдаги тенглама дейилади.*

Агар $m = 2$ учун

$$\sum_{i,j=1}^{n+1} a_{ij}(x) \cdot u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n+1} a_i(x) \cdot u_{x_i} + a \cdot u = f(x) \tag{2}$$

тенглама

$$y_i = \sum_{j=1}^{n+1} \alpha_{ij}(x_j - x_j^0)\ ,\ \ i = \overline{1, n+1}\ ,$$

бунда $(\alpha_{ij}) -$ ортогонал матрица бўлиб, $(a_{ij}(x^0))$ матрицани x^0 нуқтада диагонал шаклга келтирувчи матрица

$\left(\textit{яъни}, \quad a_{ij}(x^0)\alpha_{ki}\alpha_{lj} = \lambda_k(x^0)\delta_k^l \right)$, янги координаталарда x^0 нуқтада

$$\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k(x^0) \cdot u_{y_k y_k} + \sum_{k=1}^{n+1} b_k(x^0) \cdot u_{y_k} + b(x^0) \cdot u = f(x^0) \qquad (3)$$

шаклга эга бўлиб, $\lambda_k(x^0)$ лардан бири (масалан, $\lambda_{n+1}(x^0)$) нолга тенг, қолган $\lambda_k(x^0)$ лар эса бир хил ишорага эга ва $b_{n+1}(x^0) \neq 0$ бўлса, у ҳолда (2) тенглама x^0 нуқтада параболик типдаги тенглама дейилади.

Агар (2) тенгламанинг коэффициентлари силлиқ ва (2) тенглама соҳада параболик бўлса, у ҳолда бу соҳанинг ихтиёрий нуқтаси атрофида тенгламани ўзгарувчиларнинг махсусмас алмаштириши ёрдамида

$$u_{y_{n+1}} - \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} \cdot u_{y_i y_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \cdot u_{y_i} + b \cdot u = \tilde{f} \qquad (4)$$

шаклга келтириш мумкин бўлиб, бунда $\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}\xi_i\xi_j$ форма мусбат аниқланган бўлади. Бундан ташқари, биз учун параболик тенгламаларнинг қуйидаги кўринишдаги тенгламасини ўрганиш қулайдир:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = div(p \cdot grad\, u) - q \cdot u + F(x,t) = -Lu + F(x,t),$$

$$(x,t) \in Ц_\infty = G \times (0,\infty); \qquad (5)$$

$$u\big|_{t=0} = u_0(x)\ ,\ x \in \overline{G} \qquad (6)$$

$$\left(\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} \right)\Bigg|_S = v(x,t), \quad (x,t) \in S \times [0,\infty) \qquad (7)$$

Бу ерда

$p \in C^1(\overline{G}),\ \ q \in C(\overline{G}),\ \ p(x) > 0,\ \ q(x) \geq 0,\ \ x \in G,\ \alpha$ ва β функциялар S да бўлакли-узлуксиз функциялар, ҳамда $\alpha(x) \geq 0,\ \ \beta(x) \geq 0,\ \ \alpha(x) + \beta(x) > 0,\ \ x \in S$.

(5) тенглама учун қуйидагилар асосийдир:

1) Коши масаласи бўлиб, унда изланувчи $u(x,t)$ функция (5) тенгламани $x \in R^n$ ва $t > 0$ учун қаноатлантиради, $t = 0$ учун эса,

$$u\big|_{t=0} = u_0(x)\ ,\ \ x \in R^n \tag{8}$$

бошланғич шартни қаноатлантиради.

2) (5)-(6)-(7) аралаш масала.

$\alpha = 1$ ва $\beta = 0$ бўлганда I турдаги аралаш масала дейилади.

$\alpha = 0$ ва $\beta = 1$ бўлганда II турдаги аралаш масала дейилади.

$\alpha \not\equiv 0$ ва $\beta = 1$ бўлганда III турдаги аралаш масала дейилади.

1. Классик ечим. Максимум принципи.

Таъриф. *Агар* $u(x,t) \in C^2(Ц_\infty) \cap C(\overline{Ц}_\infty)$, $grad_x u \in C(\overline{Ц}_\infty)$ *бўлган функция* $Ц_\infty$ *цилиндрда (5) тенгламани, ҳамда (6) бошланғич шартни ва (7) чегаравий шартни қаноатлантирса, у ҳолда бу функцияга (5)-(6)-(7) аралаш масаланинг классик ечими дейилади.*

(5)-(6)-(7) масаланинг классик ечими мавжудлигининг зарурий шарти қуйидаги силлиқлик шартидир:

$F \in C(Ц_\infty),\ u_0 \in C^1(\overline{G}),\ v -$функция $S \times [0,\infty)$ да бўлакли-узлуксиз ва $\left.\left(\alpha u_0 + \beta \dfrac{\partial u_0}{\partial n}\right)\right|_S = v(x,0)$ келишувчанлик шарти.

Параболик типдаги тенгламалар учун чегаравий масалаларни ўрганишда энг қулайи қуйидаги максимум принципидир.

Максимум принципи. $C^2\left(x\in G,\,0<t\le T\right)\cap C(\bar{Ц}_T)$ *синфга қарашли* $u(x,t)$ *функция (5) тенгламани* $Ц_T$ *- цилиндрда қаноатлантирсин. У ҳолда, агар* $F(x,t)\le 0$ *тенгсизлик* $Ц_T$ *цилиндрда ўринли бўлса, у ҳолда* $\bar{Ц}_T$ *цилиндрда* $u(x,t)\le 0$ *, ёки* $u(x,t)$ *функция ўзининг (мусбат)* $\bar{Ц}_T$ *- цилиндрдаги максимум қийматини* $\bar{G}\times\{0\}$ *пастки асосда ёки унинг* $S\times[0,T]$ *ён сиртида қабул қилади, яъни*

$$u(x,t)\le \max[0,\max_{\substack{x\in\bar{G}\\ t=0}}u(x,t),\ \max_{\substack{x\in S\\ 0\le t\le T}}u(x,t)],\ (x,t)\in\bar{Ц}_T. \qquad (9)$$

Исбот. Тескарисини фараз қилайлик, яъни $u(x,t)$ функция $\bar{Ц}_T$ цилиндрнинг қандайдир нуқтасида мусбат қийматини қабул қилсин, лекин ўзининг (мусбат) максимум қийматини $\bar{G}\times\{0\}$ пастки асосда ҳам, $S\times[0,T]$ ён сиртда ҳам қабул қилмасин. Бундан кўринадики, шундай бир (x_0,t_0), $x_0\in G$, $0<t_0\le T$, нуқта мавжуд бўлиб,

$$u(x_0,t_0)>\max[0,\max_{\substack{x\in\bar{G}\\ t=0}}u(x,t),\ \max_{\substack{x\in S\\ 0\le t\le T}}u(x,t)]=M\ge 0 \qquad (10)$$

бўлади.

$$\varepsilon=u(x_0,t_0)-M>0, \qquad (11)$$

деб белгилаб,

$$v(x,t)=u(x,t)+\frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{T-t}{T}$$

функцияни қурамиз. У ҳолда

$$v(x,t)\le u(x,t)+\frac{\varepsilon}{2},\ (x,t)\in\bar{Ц}_T$$

бўлади ва (11) га кўра, $\bar{G}\times\{0\}$ ёки $S\times[0,T]$ дан бўлган барча (x,t) учун

$$v(x_0,t_0) \ge u(x_0,t_0) = \varepsilon + M \ge \varepsilon + u(x,t) \ge$$

$$\ge \varepsilon + v(x,t) - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} + v(x,t)$$

тенгсизликка эга бўламиз. Бундан эса, v функциянинг ҳам ўзининг (мусбат) максимум қийматини $\overline{Ц}_T$ цилиндрдаги қандайдир (x',t'), $x' \in G$, $0 < t' \le T$, нуқтада қабул қилиши келиб чиқади, бундан ташқари

$$v(x',t') \ge v(x_0,t_0) = \varepsilon + M\ . \qquad (12)$$

$v(x,t)$ функциянинг (x',t') нуқтада максимумга эришишининг зарурий шартларини ёзамиз:

$$\frac{\partial v}{\partial t} \ge 0, \quad grad\, v = 0, \quad \Delta v \le 0.$$

Бу шартлардан, ҳамда (12) тенгсизликдан шу нуқтада

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t} - div(p \cdot grad\, u) + q \cdot u - F(x,t) =$$

$$= \rho\frac{\partial v}{\partial t} - p\Delta v - (grad\ p,\ grad\, v) + q \cdot v - F(x,t) +$$

$$+ \frac{\varepsilon}{2}(\frac{\rho}{T} - q\frac{T-t'}{T}) \ge q \cdot v + \frac{\varepsilon}{2}(\frac{\rho}{T} - q\frac{T-t'}{T}) \ge$$

$$\ge q\varepsilon(1 - \frac{T-t'}{2T}) + \frac{\varepsilon\rho}{2T} > 0$$

эканлиги келиб чиқади. Бу эса, (5) тенгламага зиддир. Бундан кўринадики, (10) тенгсизлик нотўғри ва шунга кўра, қарама-қарши (9) тенгсизлик ўринли бўлади, Демак, теорема исбот бўлди.

u функцияни $-u$ билан ва F функцияни $-F$ билан алмаштириб, максимум принципидан минимум принципини ҳосил қиламиз.

Минимум принципи. $C^2\left(x \in G,\, 0 < t \le T\right) \cap C(\overline{Ц}_T)$ *синфга қарашли* $u(x,t)$ *функция (5) тенгламани* $Ц_T$ -

цилиндрда қаноатлантирса ва $F(x,t) \geq 0$ *тенгсизлик* $Ц_T$ *цилиндрда ўринли бўлса, у ҳолда*

$$u(x,t) \geq \min[0, \min_{\substack{x \in \bar{G} \\ t=0}} u(x,t), \min_{\substack{x \in S \\ 0 \leq t \leq T}} u(x,t)], \ (x,t) \in \bar{Ц}_T \qquad (9')$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

2. Классик ечимнинг ягоналиги ва унинг узлуксиз боғлиқлиги.

I турдаги (5)-(6)-(7) аралаш масалага, яъни чегаравий шартда $\alpha = 1$ ва $\beta = 0$:

$$u\big|_S = v(x,t), \quad (x,t) \in S \times [0, \infty) \qquad (7')$$

(бу ҳолда $grad_x u \in C(\bar{Ц}_\infty)$ шарт I турдаги чегаравий масала учун ортиқчадир) бўлганда максимум ва минимум принципини классик ечимнинг ягоналиги ва унинг узлуксиз боғлиқлигини аниқлашга қўллаймиз.

$u(x,t)-$ функция (5)-(6)-(7') масаланинг классик ечими ва $F(x,t) \in C(\bar{Ц}_\infty)$ бўлсин. $T > 0$ ни танлаймиз ва

$$M = \|F\|_{C(\bar{Ц}_T)}, \ M_1 = \|v\|_{C(S \times [0,T])}, \ M_0 = \|u_0\|_{C(\bar{G})}$$

деб белгилаймиз.

$$\chi(x,t) = u(x,t) - \frac{M}{\rho_0} t, \ \ \rho_0 = \min_{x \in \bar{G}} \rho(x) > 0 \qquad (13)$$

функцияни тузамиз. χ функция (5)-(6)-(7') аралаш масаланинг F ва v функциялар мос равишда $F - \frac{\rho}{\rho_0} M - \frac{qM}{\rho_0} t$ ва $v - \frac{M}{\rho_0} t$ функциялар билан алмаштирилган ҳолдаги классик ечими бўлади.

$$F - \frac{\rho}{\rho_0} M - \frac{q}{\rho_0} Mt \leq 0, \quad (x,t) \in \bar{Ц}_T \ ,$$

$$v-\frac{M}{\rho_0}t\le M_1\ ,\quad (x,t)\in S\times[0,T]$$

эканлигини ва (9) тенгсизликдан фойдаланиб,

$$\chi\le\max(M_0,\,M_1)$$

баҳолашга эга бўламиз ва бундан (13) га кўра

$$u(x,t)\le\frac{M}{\rho_0}T+\max(M_0,\,M_1),\ (x,t)\in\bar{Ц}_T$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз.

Аналогик равишда,

$$\chi_1(x,t)=u(x,t)+\frac{M}{\rho_0}t$$

функцияни киритиб, ва $(9')$ тенгсизликдан фойдаланиб, қарама-қарши баҳолашни ҳосил қиламиз:

$$u(x,t)\ge-\frac{M}{\rho_0}T-\max(M_0,\,M_1),\ (x,t)\in\bar{Ц}_T\ .$$

Шундай қилиб, агар $u(x,t)-$ (5)-(6)-$(7')$ масаланинг классик ечими ва $F(x,t)\in C(\bar{Ц}_\infty)$ бўлса, у ҳолда ихтиёрий $T>0$ учун

$$\|u\|_{C(\bar{Ц}_T)}\le\max\left[\|u_0\|_{C(\bar{G})}\ ,\ \|v\|_{C(S\times[0,T])}\right]+\frac{T}{\rho_0}\cdot\|F\|_{C(\bar{Ц}_T)}\qquad(14)$$

баҳолаш ўринли бўлади.

Ҳосил қилинган баҳолашдан фойдаланиб, қуйидаги теоремани исбот қиламиз.

Теорема. (5)-(6)-$(7')$ масаланинг классик ечими ягона ва $u_0\,,v$ ва F функциялардан шу маънода узлуксиз боғлиқки, бунда

$$\begin{aligned}&\|F-\tilde{F}\|_{C(\bar{Ц}_T)}\le\varepsilon\ ,\ \|u_0-\tilde{u}_0\|_{C(\bar{G})}\le\varepsilon_0\ ,\\&\|v-\tilde{v}\|_{C(S\times[0,T])}\le\varepsilon_1\end{aligned}\qquad(15)$$

бўлса, у ҳолда $u(x,t)$ ва $\tilde{u}(x,t)$ мос (классик) ечимлар

$$\|u-\tilde{u}\|_{C(\bar{Ц}_T)} \le \max(\varepsilon_0, \varepsilon_1) + \frac{T}{\rho_0} \cdot \varepsilon \qquad (16)$$

тенгсизликни қаноатлантиради.

Исбот. Ечимнинг ягоналиги (14) баҳолашга кўра, (5)-(6)-(7') бир жинсли масала ($u_0 = 0,\ v = 0$ ва $F = 0$ учун) фақат ноль классик ечимга эга эканлигидан келиб чиқади.

Узлуксиз боғлиқни исботлаш учун $\eta = u - \tilde{u}$ функциялар айирмасини тузамиз. η функция (5)-(6)-(7') масалада F , u_0 , v функциялар $F - \tilde{F}$, $u_0 - \tilde{u}_0$, $v - \tilde{v}$ функциялар билан мос равишда алмаштирилган ҳолдаги классик ечимдан иборат бўлади. (14) тенгсизликни η функцияга қўллаб ва (15) баҳолашдан фойдаланиб, (16) баҳолашни ҳосил қиламиз. Теорема исбот бўлди.

3. Аралаш масалани ўзгарувчиларни ажратиш усули билан ечиш (Фурье методи).

$Ц_\infty = G \times (0, \infty)$ цилиндрда

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -Lu + F(x,t), \text{ где } Lu = -div(p \cdot grad\, u) + q \cdot u\ , \qquad (5)$$

$$u\big|_{t=0} = u_0(x)\ ,\ x \in \bar{G} \qquad (6)$$

$$\left.\left(\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n}\right)\right|_S = 0, \quad t \ge 0 \qquad (7'')$$

параболик типдаги тенглама учун аралаш масалани қараймиз, бунда $u_0(x) \in L_2(G)$, $F(x,t) \in C^{(1)}\big([0,\infty),\, L_2(G)\big)$.

(5)-(6)-(7") аралаш масаланинг формал ечимини қуриш учун Фурье методидан фойдаланамиз:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)\ X_k(x)\ ,$$

$$T_k(t) = (u, X_k)_\rho\ . \qquad (17)$$

$T_k(t)$ функция учун қуйидаги Коши масаласини ҳосил қиламиз:

$$T_k' + \lambda_k T_k = c_k(t)\ ,\ T_k(0) = a_k\ ,\quad k = 1,2,..., \tag{18}$$

бунда

$$c_k(t) = (F\,, X_k) = \int\limits_G F(x,t)\ X_k(x)dx\ , \tag{19}$$

$$a_k = (u_0\,, X_k)_\rho = \int\limits_G \rho(x) u_0(x) X_k(x)dx\ . \tag{20}$$

(18) Коши масаласини ечиб,

$$T_k(t) = a_k \cdot e^{-\lambda_k t} + \int\limits_0^t c_k(\tau) \cdot e^{-\lambda_k (t-\tau)} d\tau\,, \tag{21}$$

ечимга эга бўламиз ва шунга кўра, (5)-(6)-(7") масаланинг формал ечими қуйидаги қатор билан ифодаланади:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cdot e^{-\lambda_k t} + \int\limits_0^t c_k(\tau) \cdot e^{-\lambda_k (t-\tau)} d\tau \right] \cdot X_k(x)\ . \tag{22}$$

Агар (5)-(6)-(7") аралаш масала умумлашган ечимга эга бўлса, у ҳолда бу ечим (22) қатор билан ифодаланади. (22) формуладан хусусан, аралаш масала суст ечимининг ягоналиги келиб чиқади.

4. Фурье методини асослаш.

(22) қатор ҳақиқатдан ҳам, (5)-(6)-(7") масаланинг суст ечимини беришини исбот қиламиз.

$\rho \equiv 1$ деб олайлик. Исбот қуйидаги тасдиқларни текширишга олиб келинади.

а) (22) қатор $L_2(G)$ фазо метрикасида t бўйича ихтиёрий $[0,T]$ сегментда текис яқинлашади;

б) (22) қатор $H_1(G)$ фазо метрикасида t бўйича ихтиёрий $[\overline{t}\,,T]$, бунда $0 < \overline{t} < T < \infty$, сегментда текис яқинлашади;

в) (22) қатордан t бўйича дифференциаллаш ёрдамида ҳосил қилинган қатор $L_2(G)$ фазо метрикасида t бўйича ихтиёрий $[\overline{t}, T]$, бунда $0 < \overline{t} < T < \infty$, сегментда текис яқинлашади;

г) (22) қатор йиғиндиси (6) бошланғич шартни қаноатлантиради.

д) (22) қатор йиғиндиси

$$\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, \eta(x,t)\right) + \left[u(x,t), \eta(x,t)\right]_{H_1(Ц_T)} = \left(f(x,t), \eta(x,t)\right),$$

интеграл муносабатни қаноатлантиради, яъни

$$\int\limits_{Ц_T = G\times[0,T]} \left(-u\cdot\eta_t' + p\cdot gradu\cdot grad\eta + qu\eta\right)dxdt +$$
$$+ \int\limits_{\partial G\times[0,T]} p\cdot\frac{\beta}{\alpha}\cdot u\cdot\eta\cdot dsdt = \int\limits_{G\times[0,T]=Ц_T} f\cdot\eta dxdt\,. \tag{23}$$

(Бир жинсли бўлмаган чегаравий масала $\left.\left(\alpha u + \beta\frac{\partial u}{\partial n}\right)\right|_S = v(x,t), \quad (x,t)\in S\times[0,\infty)$ бўлган ҳолда, тенгламанинг ўнг қисмига $\int\limits_G v\cdot\eta dx$ қўшилувчи қўшилади).

Ҳақиқатдан ҳам,

а) (22) – қатор $L_2(G)$ фазода ортогонал ва шунинг учун, $[0,T]$ сегментда коэффициентларнинг квадратларидан тузилган қаторнинг текис яқинлашишини текшириш етарлидир:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left\{(u_0, X_k)\cdot e^{-\lambda_k t} + \int\limits_0^t e^{-\lambda_k(t-\tau)}c_k(\tau)d\tau\right\}^2 \le$$
$$\le 2\sum_{k=1}^{\infty}(u_0, X_k)^2\cdot e^{-2\lambda_k t} + 2\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\int\limits_0^t e^{-\lambda_k(t-\tau)}c_k(\tau)d\tau\right\}^2. \tag{24}$$

$F(x,t)$ функция t бўйича $t \ge 0$ учун узлуксиздир. Бундан

$[0,\ T]$ сегментда $\|F(x,t)\|_{L_2(G)}$ нинг узлуксизлиги келиб чиқади.

Энди (24) тенгсизликнинг ўнг томонидаги иккинчи қаторнинг текис яқинлашишини исботлаш қийин эмас. Ҳақиқатдан ҳам, Буняковский тенгсизлигига кўра, қуйидагига эга бўламиз:

$$\left\{\int_0^t e^{-\lambda_k(t-\tau)}c_k(\tau)d\tau\right\}^2 \le \int_0^t e^{-2\lambda_k(t-\tau)}d\tau \cdot \int_0^t c_k^2(\tau)d\tau =$$

$$= \frac{1-e^{-2\lambda_k t}}{2\lambda_k}\cdot\int_0^t c_k^2(\tau)d\tau < \frac{1}{2\lambda_k}\cdot\int_0^t c_k^2(\tau)d\tau\ . \qquad (25)$$

Бу ерда λ_k ларни энг кичик λ_1 қиймати билан алмаштириб, қаралаётган қаторнинг умумий ҳади учун $\frac{1}{2\lambda_1}\cdot\int_0^t c_k^2(\tau)d\tau$ баҳолашни оламиз.

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2(\tau) = \|F(x,t)\|_{L_2(G)}^2 \qquad (26)$$

тенглик кўрсатадики, (26) қатор манфиймас узлуксиз ҳадли ва узлуксиз йиғиндига эга. Маълумки, Дини теоремасига кўра, (26) қатор ихтиёрий $T>0$ учун $[0,\ T]$ сегментда текис яқинлашувчи бўлади. У ҳолда (22) даги ўнг томондаги иккинчи қатор текис яқинлашади.

(22) даги биринчи қаторнинг яқинлашишини кўрсатиш анча осон:

$$2(u_0, X_k)^2 \cdot e^{-2\lambda_k t} \le 2(u_0, X_k)^2\ ,$$

ҳамда $2\sum_{k=1}^{\infty}(u_0, X_k)^2$ қатор Бессел тенгсизлигига кўра яқинлашади. Исбот қилинганига кўра, (22) қаторнинг йиғиндиси

$u(x,t)$ функция $C\left([0,\infty);\, L_2(G)\right)$ синфга тегишли эканлиги келиб чиқади.

б) (22) қатор $H_1(G)$ фазо метрикасида ихтиёрий $[\overline{t}\,, T]$, бунда $0<\overline{t}<T<\infty$ сегментда t бўйича текис яқинлашади.

$H_1(G)$ фазо метрикасида $\dfrac{X_k(x)}{\sqrt{\lambda_k}}$ функциялар системаси ортонормалдир; (22) қаторни $u(x,t)=$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_k}\left\{(u_0,\, X_k)\cdot e^{-\lambda_k t}+\int_0^t e^{-\lambda_k(t-\tau)}\cdot c_k(\tau)d\tau\right\}\cdot\frac{X_k(x)}{\sqrt{\lambda_k}} \quad (27)$$

шаклида тасвирлаш мумкин. Квадратлардан тузилган қатор текис яқинлашишини кўрсатиш етарлидир; Охирги қаторни баҳолаймиз.

$$\sqrt{\lambda_k}e^{-\lambda_k t}=\frac{1}{t\sqrt{\lambda_k}}\cdot t\lambda_k\cdot e^{-\lambda_k t}\le$$

$$\le\frac{1}{\overline{t}\sqrt{\lambda_k}}\cdot\max(z\cdot e^{-z})=\frac{1}{\overline{t}\cdot e\cdot\sqrt{\lambda_k}} \quad (28)$$

баҳолашга эга бўламиз. Бундан, эса (25) баҳолашдан фойдаланиб, қуйидагини ҳосил қиламиз.

$$\lambda_k c_k^2\le 2\left(\sqrt{\lambda_k}e^{-\lambda_k t}\right)^2\cdot(u_0,\, X_k)^2+$$

$$+2\lambda_k\left(\int_0^t e^{-\lambda_k(t-\tau)}\cdot c_k(\tau)d\tau\right)^2\le$$

$$\le\frac{2}{\overline{t}^2\cdot e^2\cdot\lambda_k}\cdot(u_0,\, X_k)^2+\int_0^t c_k^2(\tau)d\tau\ . \quad (29)$$

Умумий ҳади (29) кўринишда бўлган қатор текис яқинлашади ва б) тасдиқ исбот бўлди. Бу тасдиқдан

$$u(x,t)\in C\left((0,\infty),\, H_1(G)\right)$$

эканлиги келиб чиқади.

(22) қатордан t бўйича дифференциаллаш ёрдамида ҳосил қилинган қатор $L_2(G)$ фазо метрикасида t бўйича ихтиёрий $[\overline{t}, T]$, бунда $0 < \overline{t} < T < \infty$, сегментда текис яқинлашади. (22) қаторни t бўйича дифференциаллагандан кейин

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left\{-\lambda_k(u_0,\, X_k)e^{-\lambda_k t} + c_k(t) - \lambda_k\int_0^t e^{-\lambda_k(t-\tau)}\cdot c_k(\tau)d\tau\right\}\cdot X_k(x)$$

қаторга эга бўламиз, ёки агар бўлаклаб интегралласак,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left\{-\lambda_k(u_0, X_k)e^{-\lambda_k t} + c_k(0)e^{-\lambda_k t} + \int_0^t e^{-\lambda_k(t-\tau)}c_k'(\tau)d\tau\right\}X_k(x) \tag{30}$$

Бу эса– яна $L_2(G)$ фазода $\{X_k(x)\}$ тўла ортонормал система бўйича ҳосил қилинган қатордир. Унинг коэффициентларини баҳолаймиз. Коши тенгсизлигига кўра, (30) қаторда $X_k(x)$ олдидаги коэффициент квадрати қуйидаги миқдордан ошмайди

$$3\left(\lambda_k e^{-\lambda_k t}\right)^2(u_0, X_k)^2 + 3c_k^2(0)e^{-2\lambda_k t} + 3\left(\int_0^t e^{-\lambda_k(t-\tau)}c_k'(\tau)d\tau\right)^2 \leq$$

$$\leq \frac{3}{(\overline{t}\cdot e)^2}\cdot(u_0, X_k)^2 + 3c_k^2(0) + \frac{3}{2\lambda_k}\int_0^T [c_k'(\tau)]^2 d\tau \quad . \tag{31}$$

$u_0(x)$ ва $F(x,t)$ функциялар ҳақидаги қўйилган талаблардан (31) умумий ҳадли қатор яқинлашади. Бу ҳолда, (30) қатор $L_2(G)$ фазо метрикасида $[\overline{t},\ T]$ сегментда t бўйича текис яқинлашади. в) тасдиқ исбот бўлди.

Бу тасдиқдан, эса (22) қаторнинг йиғиндиси $u(x,t) \in C^{(1)}\left((0,\infty);\, L_2(G)\right)$ эканлиги келиб чиқади.

г) (22) қаторнинг йиғиндиси (6) бошланғич шартни қаноатлантиради. Ҳақиқатдан, ҳам исбот қилинган а) пунктга кўра, бу қаторда ҳадма-ҳад $t \to 0$ да лимитга ўтиш мумкин, шунинг учун

$$\lim_{t\to 0}\left\|u(x,t)-u_0(x)\right\|_{L_2(G)}=\left\|\sum_{k=1}^{\infty}(u_0,X_k)X_k-u_0(x)\right\|_{L_2(G)}=0\ .$$

д) (22) қатор йиғиндиси (23) интеграл муносабатни қаноатлантиради. $\eta(x,t)\in H_1(Ц_T)$ бўлсин. Аввал t бўйича дифференциалланган (22) қаторнинг ҳар иккала томонини $L_2(G)$ фазо метрикасида $\eta(x,t)$ функцияга скаляр кўпайтирамиз:

$$\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t},\,\eta(x,t)\right)=\sum_{k=1}^{\infty}T_k'(t)\cdot\big(X_k(x),\,\eta(x,t)\big).$$

$T_k'(t)$ ни (18) формула бўйича алмаштирсак, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t},\,\eta(x,t)\right)=\sum_{k=1}^{\infty}c_k(t)\cdot\big(X_k(x),\,\eta(x,t)\big)-$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k T_k\,(t)\cdot\big(X_k(x),\,\eta(x,t)\big)=$$

$$=\left(\sum_{k=1}^{\infty}c_k\cdot X_k(x),\,\eta(x,t)\right)-\sum_{k=1}^{\infty}T_k\,(t)\cdot\big[X_k(x),\,\eta(x,t)\big]_{H_1}=$$

$$=\big(u(x,t),\,\eta(x,t)\big)-\left[\sum_{k=1}^{\infty}T_k\,(t)\cdot X_k(x),\,\eta(x,t)\right]_{H_1}=$$

$$=\big(u(x,t),\,\eta(x,t)\big)_{L_2}-\big[u(x,t),\,\eta(x,t)\big]_{H_1}\ .$$

Тасдиқ исбот бўлди.

9 - МАЪРУЗА
ГАРМОНИК ФУНКЦИЯ ВА УНИНГ ХОССАЛАРИ.

Агар $u(x)\in C^2(D)$ ва $x\in D$ учун $\Delta u=0$ бўлса, у ҳолда $u(x)=u(x_1,\ x_2,...,\ x_n)$ функция D соҳада гармоник функция дейилади.

Бевосита текшириш ёрдамида иккита x ва ξ нуқталарга боғлиқ

$$E(x,\ \xi)=\begin{cases}\dfrac{1}{n-2}\cdot|\,\xi-x\,|^{2-n},\ \ n>2\\ -\ln|\,\xi-x\,| \qquad ,\ \ n=2\end{cases}, \qquad (1)$$

функция $x\neq\xi$ учун x бўйича ва ξ бўйича ҳам, Лаплас тенгламасининг ечими бўлади, бунда $|\,\xi-x\,|=\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\xi_k-x_k\right)^2}$ эса x ва ξ орасидаги масофадир.

Ҳақиқатан ҳам, $x\neq\xi$ учун (7.1) дан

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x_i^2}=-|\xi-x|^{-n}+n|\xi-x|^{-n-2}\cdot\left(\xi_i-x_i\right)^2$$

эканлигини ҳосил қиламиз. Бу ифодани қўйиш ёрдамида

$$\Delta E=-n|\,\xi-x\,|^{-n}+n|\,\xi-x\,|^{-n-2}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(\xi_i-x_i\right)^2=0$$

айниятга эга бўламиз. $E(x,\ \xi)$ функция x ва ξ га нисбатан симметрик, шунинг учун бу функция ξ бўйича $x\neq\xi$ бўлганда ҳам Лаплас тенгламасини қаноатлантиради. $E(x,\ \xi)$ функция Лаплас тенгламасининг элементар ёки фундаментал ечими деб аталади.

$S-$силлиқ (ёпиқ ёки ёйиқ) гиперсирт E_n фазодан олинган ва $\mu(\xi)-$ эса унда берилган ҳақиқий қийматли узлуксиз функция бўлсин.

$$u(x)=\int_S E(x,\ \xi)\mu(\xi)ds_\xi$$

ифода E_n фазодаги S га қарашли бўлмаган барча x нуқталарда гармоник функциядан иборат, яъни $x\in E_n\setminus S$ учун $\Delta u=0$, бунда $ds_\xi-$ эса $S-$гиперсиртдаги ξ ўзгарувчи бўйича юза элементи. Бу хулосанинг тўғрилиги $x\neq\xi$ учун $E(x,\ \xi)$ функциянинг гармоник эканлиги ва интегрални интеграл остида дифференциаллашдан келиб чиқади.

Бевосита текшириш ёрдамида кўрсатиш мумкинки, агар $u(x)$ функция D соҳада гармоник бўлса, у ҳолда

$$v(x)=|x|^{2-n}u\left(\frac{x}{|x|^2}\right)$$

функция ўзининг барча аниқланиш соҳасида гармоник бўлади.

$D\subset E_n$ соҳа ўзининг етарлича силлиқ S чегарасига эга, ҳамда $\Delta u=0$ ва $\Delta v=0$ бўлиб, бунда $u,\ v\in C^2(D)\cap C^1(\overline{D})$ бўлсин. D соҳа бўйича

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(v\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i},\qquad \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(v\frac{\partial u}{\partial x_i}-u\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)=0$$

айниятларни интеграллаб ва

$$\int_D\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial A_i}{\partial x_i}d\tau_x=\int_S\sum_{i=1}^{n}A_i(y)\gamma_i(y)ds_y$$

Гаусс–Остроградский формуласидан фойдаланиб,

$$\int_S v(y)\cdot\frac{\partial u(y)}{\partial\gamma_y}ds_y=\sum_{i=1}^{n}\int_D\frac{\partial v}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial u}{\partial x_i}d\tau_x \qquad (2)$$

$$\int_S\left[v(y)\cdot\frac{\partial u(y)}{\partial\gamma_y}-u(y)\cdot\frac{\partial v(y)}{\partial\gamma_y}\right]ds_y=0 \qquad (3)$$

эканлигини ҳосил қиламиз, бунда $d\tau_x -$ҳажм элементи, $\gamma = \left(\gamma_1,\, \gamma_2,...,\gamma_n\right) -$ эса S га $y \in S$ нуқтада ўтказилган ташқи нормалдир. Худди шунга ўхшаш, ихтиёрий $u,\, v \in C^2\left(D\right) \cap C^1\left(\overline{D}\right)$ учун

$$\int\limits_D u\,\Delta v\, d\tau_x = \int\limits_S u\frac{\partial v(y)}{\partial \gamma_y}ds_y - \int\limits_D \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)d\tau_x \qquad (4)$$

Гриннинг биринчи формуласини ҳосил қиламиз. Ҳақиқатан ҳам, $A_i = u\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x_i}$, $i=\overline{1,n}$, деб олиб, Гаусс–Остроградский формуласидан Грин формуласини ҳосил қиламиз. Энди u ва v функцияларни ўринларини алмаштириб

$$\int\limits_D v\,\Delta u\, d\tau_x = \int\limits_S v\frac{\partial u(y)}{\partial \gamma_y}ds_y - \int\limits_D \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)d\tau_x \qquad (5)$$

формулага эга бўламиз. (4) тенгликдан (5) тенгликни айириб,

$$\int\limits_D \left(u\,\Delta v - v\,\Delta u\right)d\tau_x = \int\limits_S \left(u\frac{\partial v(y)}{\partial \gamma_y} - v\frac{\partial u(y)}{\partial \gamma_y}\right)ds_y \qquad (6)$$

Гриннинг иккинчи формуласини ҳосил қиламиз.

Гармоник функциянинг ягоналик хоссаси. Агар $x \in D$ учун $\Delta u = 0$ ва $u(x) \in C^2\left(D\right) \cap C^1\left(\overline{D}\right)$, $u(x)\big|_{x\in S} = 0$ бўлса, у ҳолда $x \in \overline{D}$ учун $u(x) \equiv 0$ бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, (4) формулада $u(x) = v(x)$ деб олсак,

$$\sum_{i=1}^n \int\limits_D \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 d\tau_x = \int\limits_S u(y)\frac{\partial u(y)}{\partial \gamma_y}ds_y$$

ҳосил бўлади. $u(x)\big|_{x\in S}=0$ шартдан $\sum_{i=1}^{n}\int_D\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 d\tau_x=0$ келиб чиқади. Бундан, эса $x\in D$ учун $\frac{\partial u}{\partial x_i}=0,\ i=\overline{1,n}$ яъни $\forall x\in D$ учун $u(x)=const$ эканлиги ва узлуксизликка кўра, $x\in\overline{D}$ учун $u(x)\equiv 0$ эканлигини ҳосил қиламиз. Худди шунга ўхшаш, агар $u(x)\in C^2(D)\cap C^1(\overline{D}),$ $\Delta u=0$ ва $\left.\frac{\partial u(y)}{\partial\gamma_y}\right|_{y\in S}=0$ бўлса, у ҳолда $x\in\overline{D}$ учун $u(x)\equiv const$ ўринли бўлади.

Агар $u(x)\in C^2(D)\cap C^1(\overline{D}),$ $\Delta u=0$ бўлса, у ҳолда

$$\int_S\frac{\partial u(y)}{\partial\gamma_y}ds_y=0 \qquad (7)$$

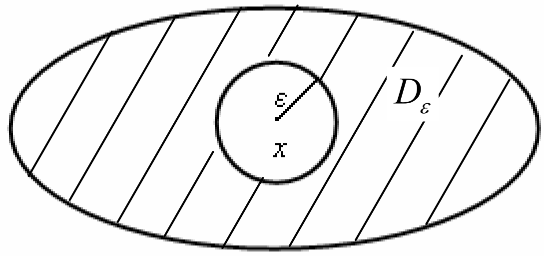
тенглик ўринли бўлади. Ҳақиқатан ҳам, (5) формулада $x\in D$ учун $v(x)=1$ деб олсак, $\int_S\frac{\partial u(y)}{\partial\gamma_y}ds_y=0$ эканлигини ҳосил қиламиз.

Гармоник функциянинг интеграл тасвири. Агар $u(x)\in C^2(D)\cap C^1(\overline{D})$ ва $\Delta u=0$ бўлса, у ҳолда

$$u(x)=\frac{1}{\omega_n}\cdot\int_S E(x,\ y)\frac{\partial u(y)}{\partial\gamma_y}ds_y-\frac{1}{\omega_n}\cdot\int_S u(y)\frac{\partial E(x,\ y)}{\partial\gamma_y}ds_y \quad (8)$$

интеграл тасвир ўринли бўлади, бунда $E(x,\ y)$ – Лаплас тенгламасининг фундаментал ечими, $\omega_n=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot 2\pi^{\frac{n}{2}}$ – эса E_n фазодаги бирлик сферанинг юзи, $S-$эса D соҳанинг чегараси.

(8) формулани келтириб чиқариш учун D соҳадан x нуқтани D да ётувчи ε радиусли $|y-x|\le\varepsilon$ ёпиқ шар билан биргаликда ажратиб ва D соҳанинг қолган қисмини D_ε деб олсак, у $S-$сирт ва $|y-x|=\varepsilon$ сфера билан чегараланган бўлади.



(3) ёки (6) формулада $v(y)=E(x,\, y)$ деб олсак,

$$\int_S\left[E(x,\, y)\frac{\partial u(y)}{\partial\gamma_y}-u(y)\frac{\partial E(x,\, y)}{\partial\gamma_y}\right]ds_y=$$

$$=\int_{|y-x|=\varepsilon}\left[E(x,\, y)\frac{\partial u(y)}{\partial\gamma_y}-u(y)\frac{\partial E(x,\, y)}{\partial\gamma_y}\right]ds_y=$$

$$=\int_{|y-x|=\varepsilon}E(x,\, y)\frac{\partial u(y)}{\partial\gamma_y}ds_y-$$

$$-\int_{|y-x|=\varepsilon}[u(y)-u(x)]\frac{\partial E(x,\, y)}{\partial\gamma_y}ds_y-u(x)\int_{|y-x|=\varepsilon}\frac{\partial E(x,\, y)}{\partial\gamma_y}ds_y \tag{9}$$

тенглик ҳосил бўлади. $|y-x|=\varepsilon$ сферада

$$E(x,\, y)=\begin{cases}\dfrac{1}{(n-2)\cdot\varepsilon^{n-2}}, & n>2 \quad \text{учун}\\ -\ln\varepsilon, & n=2 \quad \text{учун}\end{cases},$$

$$\frac{\partial E(x,\, y)}{\partial\gamma_y}=-\frac{1}{\varepsilon^{n-1}},\quad n\ge 2\quad \text{учун}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{|y-x|=\varepsilon}\left[u(y)-u(x)\right]\frac{\partial E(x,y)}{\partial\gamma_y}ds_y=0,\quad \int\limits_{|y-x|=\varepsilon}\frac{ds_y}{\varepsilon^{n-1}}=\omega_n$$

эканлигини ҳисобга олиб, (7) тенгликка кўра, (9) дан $\varepsilon\to 0$ да лимитик ҳолатда (8) интеграл тасвирини ҳосил қиламиз.

Агар $u(x)$ функция D соҳада гармоник бўлса, у ҳолда бу соҳанинг ички нуқталарида барча тартибли ҳосилаларга эга бўлади. Ҳақиқатан ҳам, соҳанинг ихтиёрий $x^0\in D$ ички нуқтасини олайлик. D соҳа ичида бутунича жойлашган S' сирт билан шу нуқтани ўраб оламиз. D соҳада $u(x)$ функция гармоник бўлса, у ҳолда бу функция S' сирт билан чегараланган D' соҳада ҳам гармоник функция бўлиб, $u(x)\in C^2\left(\overline{D'}\right)$. Интеграл тасвирига кўра,

$$u(x)=\frac{1}{\omega_n}\int\limits_{S'}\left[E(x,\ y)\frac{\partial u(y)}{\partial\gamma_y}-u(y)\frac{\partial E(x,\ y)}{\partial\gamma_y}\right]ds_y \qquad (10)$$

ўринли бўлади. x нуқта S' сиртга қарашли бўлмаганлиги учун $E(x,\ y)-$ функция узлуксиз ва x_i ўзгарувчи бўйича исталган тартибли узлуксиз ҳосилага эга. Шунга кўра, (10) формуланинг ўнг томонини интеграл остида x_i бўйича исталган марта дифференциаллаш мумкин. Бундан эса, бизнинг хулосамиз келиб чиқади.

Гармоник функциялар учун сфера ва шар бўйича ўрта қиймат ҳақидаги формулалар. Агар $|y-x|\le R$ шар $u(x)$ функция гармоник бўлган D соҳада жойлашган бўлса, у ҳолда бу функциянинг шар марказидаги қиймати $|y-x|=R$ сферадаги қийматларининг ўрта арифметигига тенг, яъни

$$u(x)=\frac{1}{\omega_n R^{n-1}}\int\limits_{|y-x|=R}u(y)\,ds_y\,.$$

Худди шунга ўхшаш шар бўйича

$$u(x) = \frac{n}{\omega_n R^n} \cdot \int\limits_{|y-x|\le R} u(y)\, d\tau_y .$$

Ҳақиқатан ҳам, $|y-x| = R$ сферада

$$E(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{(n-2)R^{n-2}}, & n > 2 \\ -\ln R, & n = 2 \end{cases}$$

$\dfrac{\partial E(x,\ y)}{\partial \gamma_y} = -\dfrac{1}{R^{n-1}}, \quad n \ge 2$ тенгликлар ўринли бўлиб, $\int\limits_S \dfrac{\partial u(y)}{\partial \gamma_y} ds_y = 0$ тенгликка кўра, (8) формуладан $|y-x| < R$ шар учун ёзилган

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \cdot \int\limits_{|y-x|=R} u(y)\, ds_y$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бу формулани $|y-x| = \rho \le R$ сфералар учун ёзиб,

$$\rho^{n-1} u(x) = \frac{1}{\omega_n} \cdot \int\limits_{|y-x|=\rho} u(y)\, ds_y$$

ифодани ρ бўйича $0 \le \rho \le R$ оралиқда интеграллаб,

$$u(x) = \frac{n}{\omega_n R^n} \int\limits_{|y-x|\le R} u(y) d\tau_y$$

формулани ҳосил қиламиз, бунда $d\tau_y -$ эса y ўзгарувчи бўйича ҳажм элементи, $\dfrac{\omega_n R^n}{n} -$ эса $|y-x| \le R$ шар ҳажмидир. $n = 2$ учун сферик ўртача арифметик

$$u(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} u(x_1 + R\cos\varphi,\ x_2 + R\sin\varphi)\, d\varphi,$$

$n = 3$ учун эса,

$$u(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} u(x_1 + R\sin\theta\cos\psi,$$

$$x_2 + R\sin\theta\sin\psi, x_3 + R\cos\theta)\sin\theta d\psi$$

кўринишларида бўлади.

1 – натижа. *Юқоридаги шартлар талаб қилинганда*

$$|u(x)| \le \sqrt{\frac{n}{\omega_n \cdot R^n}} \cdot \sqrt{\int_{|y-x|\le R} u^2(y) d\tau_y}$$

тенгсизлик бажарилади.

Ҳақиқатан ҳам, Коши – Буняковский тенгсизлигидан,

$$|u(x)| \le \frac{n}{\omega_n \cdot R^n} \cdot \int_{|y-x|\le R} |u(y)| d\tau_y \le$$

$$\le \frac{n}{\omega_n \cdot R^n} \cdot \sqrt{\int_{|y-x|\le R} u^2(y) d\tau_y} \cdot \sqrt{\int_{|y-x|\le R} 1 d\tau_y} =$$

$$= \frac{n}{\omega_n \cdot R^n} \cdot \sqrt{\frac{\omega_n \cdot R^n}{n}} \cdot \sqrt{\int_{|y-x|\le R} u^2(y) d\tau_y} =$$

$$= \sqrt{\frac{n}{\omega_n \cdot R^n}} \cdot \sqrt{\int_{|y-x|\le R} u^2(y) d\tau_y}$$

эканлиги келиб чиқади.

D_δ орқали D соҳанинг чегарадан $\delta > 0$ дан катта узоқликдаги барча нуқталари тўпламини белгилаймиз.

2 – натижа. *D соҳада берилган $\{u_m(x)\}$ гармоник функциялар кетма – кетлиги D соҳада ўртача маънода яқинлашувчи бўлса, у ҳолда ҳар бир ички D_δ қисм – соҳада текис яқинлашувчи бўлади.*

Бу хулоса

$$\max_{x\in D_\delta}\left|u_k(x)-u_m(x)\right|\le\sqrt{\frac{n}{\omega_n\cdot\delta^n}}\cdot\sqrt{\int_D\left(u_k(y)-u_m(y)\right)^2 d\tau_y}$$

тенгсизлик маркази D_δ да бўлган δ радиусли ихтиёрий шар тўласинча D га қарашли, ҳамда $u_k(x)-u_m(x)$ айирма гармоник функция эканлигидан келиб чиққани учун ўринли бўлади.

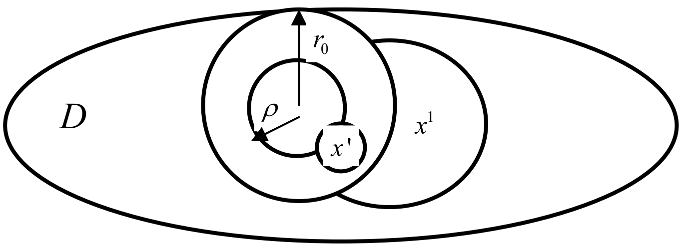
Экстремум(Максимум ва минимум) принципи ва Дирихле масаласи ечимининг ягоналиги.

Теорема. *Агар* $u(x)\ne const$ *функция* D *чегараланган соҳада гармоник ва* $\overline{D}=D\cup S$ *да узлуксиз бўлса, у ҳолда бу функция* D *соҳа ичида ўзининг минимал ва максимал қийматларини қабул қила олмайди, яъни* $x\in D$ *учун* $\min\limits_{x\in S}u(x)<u(x)<\max\limits_{x\in S}u(x)$ тенгсизлик ўринлидир.

Исбот. Тескарисини фараз қиламиз, яъни $u(x)$ функция бирор $x^0\in D$ ички нуқтада ўзининг M максимал қийматини қабул қилсин, яъни

$$M=u(x^0)=\max_{x\in\overline{D}}u(x)\quad. \tag{11}$$

D соҳанинг x^0-ички нуқтаси бўлгани учун етарлича катта r_0 радиусли $U\left(x^0,r_0\right)$ шар мавжуд бўлиб, D га қарашли бўлади.



Аввал $x\in\overline{U}\left(x^0,\,r_0\right)$ учун $u(x)\equiv M$ эканлигини исбот қиламиз. (7.11) шартдан $x\in U\left(x^0,\,r_0\right)$ учун $u(x)\le M=u(x^0)$ келиб чиқади. Агар бирор $x'\in\overline{U}\left(x^0,\,r_0\right)$ нуқтада $u(x')<M$

бўлса, у ҳолда узлуксизлик бўйича, $u(x) < M$ тенгсизлик x' нуқтанинг $U_{x'}$ қандайдир атрофида ўринли бўлар эди. Лекин, у ҳолда $S\left(x^0, \rho\right)$, бунда $\rho = \left| x' - x^0 \right|$, сферага ўрта арифметиклар формуласини қўллаб, ҳамда $x \in U_{x'}$ учун $u(x) < M$ тенгсизликдан

$$u(x_0) = \frac{1}{\omega_n \cdot \rho^{n-1}} \cdot \int\limits_{S\left(x^0, \rho\right)} u(x)\,ds < \frac{M}{\omega_n \cdot \rho^{n-1}} \int\limits_{S\left(x^0, \rho\right)} ds = M$$

ҳосил бўлади. Бу эса (7.11) формулага қарама – қаршидир. Шундай қилиб, $x \in \overline{U}\left(x^0, r_0\right)$ учун $u(x) \equiv M$. Энди ихтиёрий $x^1 \in D$ нуқтани $\overline{U}\left(x^0, r_0\right)$ шарнинг чегарасига қарашли қилиб оламиз. Исбот қилинишига кўра, $u(x^1) = M$. Юқоридаги фикрни x^1 нуқтага қўллаб, мумкин қадар катта $\overline{U}\left(x^1, r_1\right)$ шарда $u(x) \equiv M$ эканлигини ҳосил қиламиз ва ҳ.к. Гейне–Борель леммасига кўра саноқлидан кўп бўлмаган қадамдан кейин бутун D соҳа қопланади ва $x \in D$ учун $u(x) \equiv M$ ҳосил бўлади.

Ҳосил қилинган бу қарама–қаршилик дастлабки фаразимизнинг нотўғри эканлигини билдиради. Шунинг учун, $u(x)$ функция D соҳанинг ички нуқтасида ўзининг максимал қийматини қабул қила олмайди. Бундан, $u(x)$ функцияни $-u(x)$ орқали алмаштириб, $u(x)$ функция D соҳанинг ички нуқтасида минимал қийматни қабул қила олмаслигини ҳосил қиламиз. Теорема исботланди.

Бу теоремадан, ҳар қандай гармоник функция соҳанинг ичида локал максимум ёки локал минимумга эриша олмаслиги келиб чиқади.

Энди максимум принципи исботининг иккинчи вариантини келтирамиз.

Теорема. $u(x)\in C^2\left(D\right)\cap C\left(\overline{D}\right)$ *ва* $\Delta u=0$ *бўлсин. У ҳолда* $u(x)$ *функция бу* D *соҳанинг ички нуқтасида* ∂D *чегарасидаги қийматлари максимумидан катта қиймат ва* ∂D *чегарсидаги қийматлари минимумидан кичик қиймат қабул қила олмайди.*

Исбот. $m=\max\limits_{x\in\partial D}u(x)$ деб белгилаймиз. Фараз қилайлик, $M=u(x^0)>m$, бунда $x^0\in D$ бўлсин. $v=u(x)+\dfrac{M-m}{2d^2}\cdot\left|x-x^0\right|^2$, бунда $d=diamD$ ёрдамчи функцияни тузамиз. $\left|x-x^0\right|^2\le d^2$ тенгсизликдан, $x\in\partial D$ учун

$$v(x)\le m+\frac{M-m}{2d^2}\cdot d^2=\frac{M+m}{2}<M$$

тенгсизлик келиб чиқади. Шу билан бирга $v(x^0)=u(x^0)=M$. Бу тенгсизликдан, $v(x)$ функция максимуми D соҳа ичида M дан кичик эмас эканлиги келиб чиқади. Шунга кўра, ∂D чегарадаги $v(x)$ функция максимумидан катта. Бу максимум кўриниб турибдики, $x\in D$ қандайдир ички нуқтада эришади. Маълумки, максимум нуқтасида

$$\frac{\partial v}{\partial x_1}=\frac{\partial v}{\partial x_2}=...=\frac{\partial v}{\partial x_n}=0;\quad \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}\le 0,\ \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}\le 0,...,\frac{\partial^2 v}{\partial x_n^2}\le 0$$

ва шунга кўра $\Delta v(x)=0$. Бироқ,

$$\Delta v=\Delta u+\frac{M-m}{2d^2}\cdot\Delta\left|x-x^0\right|^2=0+\frac{M-m}{2d^2}\cdot 2n=\frac{\left(M-m\right)n}{d^2}>0.$$

Ҳосил қилинган қарама–қаршилик $M>m$ фаразимизнинг нотўғри эканлигини кўрсатади. Шундай қилиб, биз $x\in D$ ички нуқтада $u(x)\le\max\limits_{x\in\partial D}u(x)$ эканлигини исбот қилдик. $u(x)$

функцияни $-u(x)$ функция билан алмаштириб, $\min\limits_{x\in\partial D} u(x)\le u(x)$ тенгсизликни ҳосил қиламиз.

Агар $u(x)$ функция D соҳада гармоник ва $\overline{D}=D\cup S$ да узлуксиз бўлса, у ҳолда бу функция ўзининг максимал (минимал) қийматини қандайдир $x^0\in\overline{D}=D\cup S$ нуқтада қабул қилади. Гармоник функция учун исбот қилинган экстремум принципи хоссасига кўра, x^0 нуқта D соҳа учун ички нуқта бўла олмайди. Шунга кўра, $x^0\in S$ бўлади.

$D\subset R^n$ – ихтиёрий чегараланган соҳа бўлсин. $u(x)\in C^2\left(D\right)\cap C\left(\overline{D}\right)$ функция ҳар бир $x\in D$ учун $\Delta u(x)=0$ Лаплас тенгламасини ва $\lim\limits_{x\to y} u(x)=\varphi(x)$, $x\in D$, $y\in S$ чегаравий шартни қаноатлансин, бунда $\varphi(x)$– эса $S=\partial D$ чегарада берилган ҳақиқий қийматли узлуксиз функция бўлсин. Бундай $u=u(x)$ функцияни топиш масаласи Лаплас тенгламаси учун қўйилган биринчи чегаравий масала ёки Дирихле масаласи дейилади ва $u=u(x)$ функцияга Дирихле масаласининг классик ечими деб айтилади. Гармоник функция учун исбот қилинган экстремум принципи хоссасига кўра, Дирихле масаласи биттадан кўп ечимга эга бўла олмайди. Ҳақиқатан ҳам, агар $u(x)$ ва $v(x)$ бу масаланинг ечими бўлса, у ҳолда $w(x)=u(x)-v(x)$ айирма D соҳанинг S чегарасида нолга тенг бўлади ва шунинг учун экстремум принципига кўра $w(x)=0$, яъни барча $x\in D\cup S$ учун $u(x)=v(x)$ бўлади.

Теорема (Махсусликни йўқотиш ҳақидаги теорема). $u(x)$ *функция* $D\setminus\left\{x_0\right\}$ *соҳада гармоник бўлсин, бунда* $x^0\in D$. *Агар* $x\to x^0$ *учун,* $u(x)=o\left(E(x,\, x^0)\right)$ *бўлса, у ҳолда* $\lim\limits_{x\to x^0} u(x)=A$ *мавжуд ва* x^0 *нуқтада* A *қиймат билан қўшимча аниқланган функция* D *соҳада гармоник бўлади.*

Исбот. D соҳада қатъий жойлашган $S\left(x^0, R\right)=\left\{x: \left|x-x^0\right|<R\right\}$ шарни олайлик, $v(x)$ орқали $S\left(x^0, R\right)$ шарда Лаплас тенгламаси учун

$$v\left|_{\partial S\left(x^0, R\right)} = u\right|_{\partial S\left(x^0, R\right)}$$

чегаравий шартни қаноатлантирувчи Дирихле масаласи ечимини белгилаймиз. $u(x)-v(x)=W(x)$ функция $S\left(x^0, R\right)\setminus\left\{x^0\right\}$ соҳада гармоник ва $W\left|_{\partial S\left(x^0, R\right)}=0\right.$ бўлади. Теоремани исбот қилиш учун, $S\left(x^0, R\right)\setminus\left\{x^0\right\}$ тўпламнинг ҳар бир нуқтасида W функция учун $W=0$ эканлигини кўрсатиш етарлидир. Бу ҳолда $u(x)$ функция барча $x\in S\left(x^0, R\right)\setminus\left\{x^0\right\}$ учун $v(x)$ функция билан устма–уст тушади ва шунга кўра, x^0 нуқтада қўшимча $A=v(x^0)$ сон билан аниқланган $u(x)$ функция бутун $S\left(x^0, R\right)$ шарда $v(x)$ гармоник функция билан устма – уст тушади. Ихтиёрий $\varepsilon>0$ сон учун $n>2$ бўлганда

$$Z_{\pm}(x)=\frac{\varepsilon}{\left|x-x^0\right|^{n-2}}\pm W(x),$$

ва $n=2$ бўлганда

$$Z_{\pm}(x)=\varepsilon\cdot\ln\frac{2R}{\left|x-x^0\right|}\pm W(x)$$

иккита функцияни қараймиз. $Z_{\pm}(x)$ функция $S\left(x^0, R\right)\setminus\left\{x^0\right\}$ соҳада гармоник ва

$$Z_{\pm}(x)\Big|_{\partial S\left(x^0, R\right)}=\frac{\varepsilon}{R^{n-2}}>0.$$

$x \to x^0$ учун $u(x) = o\left(\dfrac{1}{\left|x - x^0\right|^{n-2}}\right)$ шартга кўра,

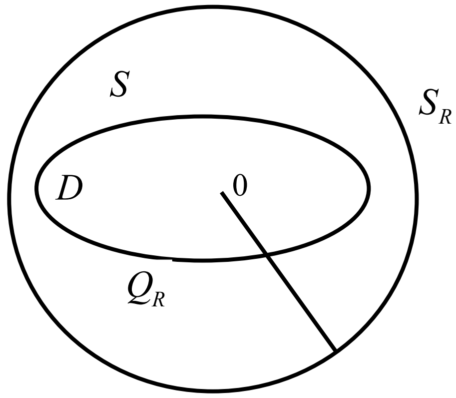
$$Z_{\pm}(x)\Big|_{\left|x-x^0\right|=\rho} = \frac{\varepsilon}{\rho^{n-2}} \pm W\Big|_{\left|x-x^0\right|=\rho} = \frac{\varepsilon}{\rho^{n-2}} + o\left(\frac{1}{\rho^{n-2}}\right).$$

Шунга кўра, етарлича кичик $\rho > 0$ учун $Z_{\pm}(x)\Big|_{\left|x-x^0\right|=\rho} > 0$ эканлигини ҳосил қиламиз. Максимум принципига кўра, $\rho \le \left|x - x^0\right| \le R$ шарсимон қатламдаги барча x учун $Z_{\pm}(x) > 0$ бўлади. $S\left(x^0, R\right) \setminus \left\{x^0\right\}$ дан олинган x^1 ихтиёрий нуқта бўлсин. Етарлича кичик ρ учун бу нуқта $\rho \le \left|x - x^0\right| \le R$ шарсимон қатламга қарашли. Шунга кўра, $Z_{\pm}(x^1) > 0$, яъни $\left|W(x^1)\right| < \dfrac{\varepsilon}{\left|x^1 - x^0\right|^{n-2}}$, бундан $\varepsilon > 0$ ихтиёрийлигига кўра, $\left|W(x^1)\right| = 0$ ҳосил бўлади. Теорема исбот бўлди.

Таъриф. *Агарда $u(x)$ функция қандайдир шар ташқарисида узлуксиз ва $|x| \to \infty$ учун $u(x) \to a$ бўлса, у ҳолда чексизликда узлуксиз ва унда $u(\infty) = a$ қийматни қабул қилади дейилади.*

Агар $u(x) \in C\left(\overline{D_1}\right)$ функция $D_1 = R^n \setminus \overline{D}$ соҳада гармоник ва $u(\infty) = 0$ бўлса, у ҳолда $x \in \overline{D_1}$ учун $\left|u(x)\right| \le \max\limits_{x \in S}\left|u(x)\right|$ бўлади. Хусусан, агар $u\big|_S = 0$ ва $u(\infty) = 0$ бўлса, у ҳолда $x \in \overline{D_1}$ учун $u(x) \equiv 0$ бўлади. Ҳақиқатан ҳам, $U_R(0)$ шар $\overline{D}$

соҳани сақлайди. Унда $S\cup S_R$ эса $Q_R = D_1 \cap U_R\left(0\right)$ соҳанинг чегараси бўлади.



Максимум принципини қўллаб, $x \in Q_R$ учун

$$\left|u(x)\right| \le \max_{x\in S\cup S_R}\left|u(x)\right| \le \max_{x\in S}\left|u(x)\right| + \max_{x\in S_R}\left|u(x)\right|,$$

ҳамда $u(\infty)=0$ эканлигидан $R\to\infty$ да $\max\limits_{x\in S_R}\left|u(x)\right|\to 0$ ҳосил бўлади. Шунинг учун $R\to\infty$ да лимитга ўтиб, $x\in \overline{D_1} = \overline{(R^n \setminus D)}$ учун $\left|u(x)\right| \le \max\limits_{x\in S}\left|u(x)\right|$ тенгсизликни ҳосил қиламиз.

Агар D соҳада $\left\{u_k\left(x\right)\right\}$ функциялар кетма–кетлиги гармоник ва $\overline{D}$ да узлуксиз бўлиб, S чегарада текис яқинлашувчи бўлса, у ҳолда бу кетма–кетлик $\overline{D}$ соҳада ҳам текис яқинлашувчи бўлади. Ҳақиқатан ҳам, $u_p(x)-u_q(x)$ гармоник функция бўлгани учун, агарда $p,\ q\to\infty$ бўлса, $x\in D$ учун

$$\left|u_p(x)-u_q(x)\right| \le \max_{x\in S}\left|u_p(x)-u_q(x)\right| \to 0$$

бўлади. Худди шунга ўхшаш хулоса $D_1 = R^n \setminus \overline{D}$ соҳа учун $u_k(\infty)=0$ шартлар бажарилган ҳолда ҳам ўринли бўлади.

Лаплас тенгламаси учун Дирихле масаласининг Грин функцияси. Агар иккита $x,\ \xi\in\overline{D}$ нуқталарга боғлиқ $G(x,\ \xi)$ функция

1) $$G(x,\ \xi)=E(x,\ \xi)+g(x,\ \xi), \tag{12}$$

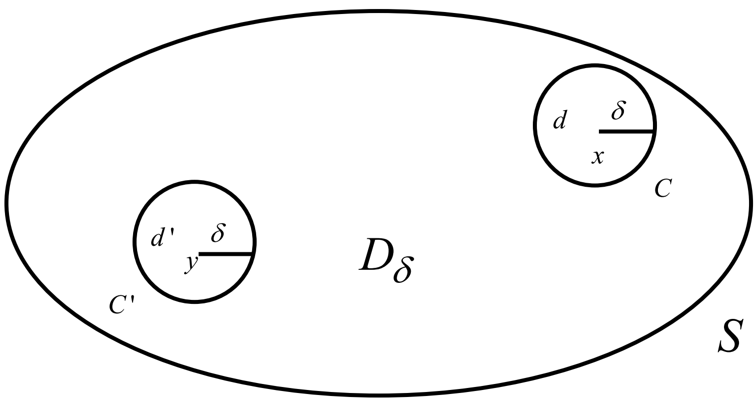
бунда $E(x,\xi)-$ Лаплас тенгламасининг фундаментал ечими, $g(x,\ \xi)-$ эса $x\in D$ ва $\xi\in D$ бўйича гармоник;

2) Агар x ёки ξ нуқта D соҳанинг S чегарасига қарашли бўлса, у ҳолда

$$G(x,\ \xi)=0 \tag{13}$$

хоссаларга эга бўлганда D соҳада Лаплас тенгламаси учун Дирихле масаласининг Грин функцияси дейилади.

Бевосита кўриш мумкинки, бутун D соҳада $G(x,\ \xi)\geq 0$ бўлади. Ҳақиқатан ҳам, D_δ орқали D соҳанинг шу соҳада жойлашган $\left|\,y-\xi\,\right|\leq\delta,\ \xi\in D$ шардан ташқарисини етарлича кичик δ радиус учун белгилаймиз. $\lim\limits_{x\to\xi}G(x,\ \xi)=+\infty$ бўлгани учун, етарлича кичик δ учун $\left|\,x-\xi\,\right|<\delta$ да $G(x,\ \xi)>0$ бўлади. Шунга кўра, D_δ соҳанинг чегарасида $G(x,\ \xi)\geq 0$ тенгсизликка эга бўламиз ва экстремум принципига кўра, $x\in D_\delta$ учун $G(x,\ \xi)\geq 0$ эканлигини ҳосил қиламиз. Бундан, бутун $\overline{D}$ соҳада $G(x,\ \xi)\geq 0$ бўлиши келиб чиқади. $G(x,\ y)$ Грин функцияси x ва y нуқталарга нисбатан симметрикдир. Бу фактни кўрсатиш учун D соҳадан x ва y нуқталарни ўзларининг $d:\left|\,z-x\,\right|\leq\delta$ ва $d':\left|\,z-y\,\right|\leq\delta$ ёпиқ шарлар билан ажратиб ташлаймиз ва D соҳанинг қолган қисмини D_δ орқали белгилаймиз.



D_δ соҳада $v(z)=G(z,\ y)$ ва $u(z)=G(z,\ x)$ функциялар гармоникдир. Шунинг учун

$$\int\limits_{\partial D_\delta}\left[v(z)\frac{\partial u(z)}{\partial\gamma_z}-u(z)\frac{\partial v(z)}{\partial\gamma_z}\right]ds_z=0.$$

Бундан

$$\int\limits_S\left[G(z,y)\frac{\partial G(z,x)}{\partial\gamma_z}-G(z,x)\frac{\partial G(z,y)}{\partial\gamma_z}\right]ds_z=$$

$$=\left(\int\limits_C+\int\limits_{C'}\right)\left[G(z,y)\frac{\partial G(z,x)}{\partial\gamma_z}-G(z,x)\frac{\partial G(z,y)}{\partial\gamma_z}\right]ds_z$$

тенгликка эга бўламиз. $z\in S$ учун $G(z,\ x)=G(z,\ y)=0.$ Шунга кўра, бу тенгликни

$$\int\limits_C\left[G(z,y)\frac{\partial G(z,x)}{\partial\gamma_z}-G(z,x)\frac{\partial G(z,y)}{\partial\gamma_z}\right]ds_z=$$

$$\int\limits_{C'}\left[G(z,x)\frac{\partial G(z,y)}{\partial\gamma_z}-G(z,y)\frac{\partial G(z,x)}{\partial\gamma_z}\right]ds_z$$

шаклида ёзамиз. Бундан эса, $G(z,\ x)=E(z,\ x)+g(z,\ x),\ G(z,\ y)=E(z,\ y)+g(z,\ y),$ бу ерда $g(z,\ x)$ ва $g(z,\ y)-$ гармоник функциялар бўлиб, (8) формулани келтириб чиқарилгани сингари $\delta\to 0$ да $G(x,\ y)=G(y,\ x)$ ҳосил бўлади.

Худди шунга ўхшаш, (8) тенгликда $u(x)$ Лаплас тенгламаси учун Дирихле масаласининг ечими ва $E(x,\ y)$ ўрнига $G(x,\ \xi)$ функцияни олиб, (8) тенгликни келтириб чиқарилгани сингари (12) ва (13) ларни ҳисобга олган, ҳолда

$$u(x)=-\frac{1}{\omega_n}\int\limits_S\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial\gamma_\xi}\cdot\varphi(\xi)ds_\xi \tag{14}$$

интеграл тасвирини ҳосил қиламиз, бунда $\varphi(\xi)-$олдиндан берилган ҳақиқий қийматли узлуксиз функциядир.

Агар D соҳада гармоник ва $\overline{D}=D\cup S$ да узлуксиз, ҳамда $\lim\limits_{x\to y} u(x)=\varphi(x)$, $x\in D$, $y\in S$ чегаравий шартни қаноатлантирувчи $u(x)$ функция изланаётган бўлса, бу Дирихле масаласининг ечими Грин функцияси маълум бўлганда (14) формула орқали ҳосил қилинади.

Шар учун Дирихле масаласининг ечими. Пуассон формуласи. D соҳа шар бўлган ҳолда Грин функциясини ошкор кўринишда қурамиз. D соҳа $|x|<1$ шардан иборат бўлиб, x ва ξ шу шарнинг ички нуқталари бўлсин. $\xi'=\dfrac{\xi}{|\xi|^2}$ нуқта ξ нуқтага $S:|x|=1$ сферага нисбатан симметрик нуқтадир. $|x|<1$ шар учун Дирихле масаласининг $G(x,\xi)$ Грин функцияси

$$G(x,\xi)=E(x,\xi)-E\left(|x|\xi,\frac{x}{|x|}\right) \tag{15}$$

шаклга эга эканлигини кўрсатамиз. Ҳақиқатан ҳам,

$$\left|\,|x|\xi-\frac{x}{|x|}\right|=\left[\,|x|^2|\,\xi\,|^2-2x\xi+1\right]^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\left|\,|\,\xi\,|x-\frac{\xi}{|\xi|}\right|=|\,\xi\,|\cdot\left|x-\frac{\xi}{|\,\xi\,|^2}\right|=|\,x\,|\cdot\left|\xi-\frac{x}{|\,x\,|^2}\right|$$

бўлиб, $|x|<1,\ \ |\xi|<1$ учун $g\left(x,\xi\right)=-E\left(|x|\xi,\dfrac{x}{|x|}\right)$ функция x ва ξ бўйича гармоник бўлади. $|\xi|=1$ учун

$$|\,\xi-x\,|=\left[\,|\,x\,|^2-2x\xi+1\,\right]^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\left|\,|\xi|x-\frac{\xi}{|\xi|}\right|=\left|\,|x|\xi-\frac{x}{|x|}\right|. \qquad (16)$$

Шунга кўра, $G(x,\xi)=E(x,\xi)-E\left(|x|\xi,\frac{x}{|x|}\right)$ функция Грин функциясининг барча талабларини қаноатлантиради.

$|\xi|=1$ учун (16) кўра, $\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial \gamma_\xi}=$

$$=-\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{\xi_i\left(\xi_i-x_i\right)}{|\xi-x|^n}-|x|\frac{\xi_i\left(|x|\xi_i-\frac{x_i}{|x|}\right)}{\left|\,|x|\xi-\frac{x}{|x|}\right|^n}\right\}=-\frac{1-|x|^2}{|\xi-x|^n}.$$

Бундан, (14) формулани

$$u(x)=\frac{1}{\omega_n}\int\limits_{|\xi|=1}\frac{1-|x|^2}{|\xi-x|^n}\varphi(\xi)ds_\xi$$

шаклида ҳосил қиламиз. Бу эса $|x|<1$ учун Пуассон формуласидир.

Агар $|x|<R$ шарда $u(x)-$ гармоник функция бўлиб, $|x|\le R$ ёпиқ шарда узлуксиз ва $|x|<R,\ |y|=R$ учун $\lim\limits_{x\to y}u(x)=\varphi(y)$ чегаравий шартни қаноатлантирса, у ҳолда $v(z)=u(Rz)$ функция $|z|<1$ шарда гармоник, $|z|\le 1$ учун узлуксиз ва $\lim\limits_{z\to t}v(z)=\varphi(Rt),\ |z|<1,\quad |t|=1$ чегаравий шартни қаноатлантиради. Шунинг учун

$$v(z)=\frac{1}{\omega_n}\int\limits_{|\xi|=1}\frac{1-|z|^2}{|\xi-z|^n}\cdot\varphi(R\xi)ds_\xi$$

яъни

$$u(x)=v\left(\frac{x}{R}\right)=\frac{1}{\omega_n R}\int\limits_{|\xi|=1}\frac{R^2-|x|^2}{|R\xi-x|^n}\cdot R^{n-1}\cdot\varphi(R\xi)ds_\xi$$

ёки $y=R\cdot\xi$ алмаштиришдан кейин,

$$u(x)=\frac{1}{\omega_n R}\int\limits_{|y|=R}\frac{R^2-|x|^2}{|y-x|^n}\cdot\varphi(y)ds_y$$

ҳосил бўлади.

$u(x)$ функция $\left|x-x^0\right|<R$ шарда гармоник, чегарагача узлуксиз ва $\lim\limits_{x\to y}u(x)=\varphi(y)$, $\left|x-x^0\right|<R$, $\left|y-x^0\right|=R$ чегаравий шартни қаноатлантирсин. $w(z)=u(z+x^0)$ функция шарда гармоник, $|z|\le R$ учун узлуксиз ва $\lim\limits_{z\to t}w(z)=\varphi(t+x^0)$, $|z|<R$, $|t|=R$ бўлса, у ҳолда юқоридаги исбот қилинган формулага кўра

$$w(z)=\frac{1}{\omega_n R}\int\limits_{|t|=R}\frac{R^2-|z|^2}{|t-z|^n}\cdot\varphi(t+x^0)ds_t$$

бўлади. Бундан, $\left|x-x^0\right|<R$ шар учун

$$u(x)=w(x-x^0)=\frac{1}{\omega_n R}\int\limits_{|\xi-x^0|=R}\frac{R^2-\left|x-x^0\right|^2}{|\xi-x|^n}\cdot\varphi(\xi)ds_\xi$$

яъни

$$u(x)=\frac{1}{\omega_n R}\int\limits_{|\xi-x^0|=R}\frac{R^2-\left|x-x^0\right|^2}{|\xi-x|^n}\cdot\varphi(\xi)ds_\xi \tag{17}$$

бўлиб, охирги (17) тенглик одатда $\left|x-x^{0}\right|<R$ шар учун ***Пуассон формуласи*** дейилади.

Ярим фазо учун Дирихле масаласининг ечими. Пуассон формуласи. D соҳа $x_n>0$ ярим фазо бўлган ҳолда Грин функциясини ошкор кўринишда қурамиз. Дирихле масаласининг изланаётган ечими чегараланган бўлишлигини талаб этамиз. x ва ξ шу ярим фазонинг нуқталари бўлсин. $\xi'=(\xi_1,\xi_2,...\xi_{n-1},-\xi_n)$ нуқта ξ нуқтага $\xi_n=0$ текисликка нисбатан симметрик нуқтадир. $x_n>0$ ва $\xi_n>0$ учун $g(x,\xi)=-E(x,\xi')$ функция x ва ξ бўйича гармоник, ҳамда $\xi_n=0$ учун $E(x,\xi)-E(x,\xi')=0$ бўлгани учун

$$G(x,\xi)=E(x,\xi)-E(x,\xi') \qquad (18)$$

қаралаётган ярим фазо учун Грин функцияси бўлади.

$\xi_n=0$ текислик учун

$$\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial\gamma_\xi}=-\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial\xi_n}=$$

$$=\frac{\xi_n-x_n}{|\xi-x|^n}-\frac{\xi_n+x_n}{\left|\xi'-x\right|^n}=-\frac{2x_n}{\left[\sum\limits_{i=1}^{n-1}\left(\xi_i-x_i\right)^2+x_n^2\right]^{\frac{n}{2}}},$$

шаклга эга бўлгани учун

$$\lim_{x\to y}u(x)=\varphi(y_1,\ y_2,...,y_{n-1}),\quad x_n>0,\quad y_n=0$$

чегаравий шартда $x_n>0$ ярим фазо учун Дирихле масаласининг изланаётган ечими

$$u(x)=\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\pi^{\frac{n}{2}}}\cdot x_n\cdot\int\limits_{\xi_n=0}\frac{\varphi(\xi_1,\ \xi_2,...,\xi_{n-1})}{\left[\sum\limits_{i=1}^{n-1}\left(\xi_i-x_i\right)^2+x_n^2\right]^{\frac{n}{2}}}d\xi_1...d\xi_{n-1}$$

шаклида ҳосил бўлади. Бу формула ҳам Пуассон формуласи деб аталади.

E_n фазода $u(x)$ функция гармоник бўлиб, ҳамма жойда манфиймас (мусбатмас) бўлса, у ҳолда бу функция ўзгармасдир. Ҳақиқатан ҳам, $|x|<R$, $|y|=R$ учун $R-|x|\le|y-x|<R+|x|$ тенгсизлик ўринли ва $u(x)\ge 0$ шартга кўра, ҳамда Пуассон формуласидан ва сфера бўйича ўрта арифметиклар формуласидан ихтиёрий R учун

$$R^{n-2}\frac{R-|x|}{\left(R+|x|\right)^{n-1}}u(0)\le u(x)\le R^{n-2}\frac{R+|x|}{\left(R-|x|\right)^{n-1}}u(x)$$

Гарнак тенгсизлиги келиб чиқади. Бундан, ихтиёрий $x\in E_n$ нуқтани фиксирлаб ва R ни чексизликка интилтириб, E_n фазонинг ҳар бир x нуқтаси учун $u(x)=u(0)$ эканлигини ҳосил қиламиз. Бундан қуйидаги теорема келиб чиқади.

Теорема (Лиувилль теоремаси). *Агар E_n фазода $u(x)$ функция гармоник ва юқоридан (қуйидан) чегараланган бўлса, у ҳолда бу функция ўзгармасдир.*

Ҳақиқатдан ҳам, агар $\forall x\in E_n$ учун $u(x)\le M$ бўлса, унда $M-u(x)\ge 0$ бўлади. Бундан $M-u(x)=M-u(0)$, яъни $u(x)=u(0)=const$ эканлиги келиб чиқади.

Теорема (Гарнак теоремаси). *Агар D соҳада $u_k(x)$ функциялар гармоник, $\overline{D}$ да эса узлуксиз бўлиб, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k(x)$ қатор ∂D чегарада текис яқинлашувчи бўлса, у ҳолда бу қатор $\overline{D}$ да текис яқинлашади ва унинг йиғиндиси $u(x)$ ҳам D соҳада гармоник бўлади.*

Ҳақиқатан ҳам, ∂D чегарада қаторнинг текис яқинлашишидан $\forall\varepsilon>0$ учун $N(\varepsilon)$ номер топилиб, $\forall p\ge 1$ ва

$\forall\ x \in \partial D$ учун $\left|\sum_{i=1}^{p} u_{N+i}(x)\right| < \varepsilon$ тенгсизлик ўринли бўлади. Экстремум принципига кўра, $\forall\ x \in \overline{D}$ учун $\left|\sum_{i=1}^{p} u_{N+i}(x)\right| < \varepsilon$ тенгсизликка эга бўламиз, Бу эса $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ қаторнинг $\overline{D}$ соҳада текис яқинлашишини билдиради.

$x^0 \in D$ ва $\left|y - x^0\right| < R$ шар D соҳа ичида жойлашган бўлсин. У ҳолда Пуассон формуласи

$$u_k(x) = \frac{1}{\omega_n R} \int\limits_{\left|y-x^0\right|=R} \frac{R^2 - \left|x - x^0\right|^2}{|\, y - x\,|^n} \cdot u_k(y) ds_y$$

ўринли эканлигини ҳисобга олган ҳолда, текис яқинлашувчи қаторни ҳадлаб интеграллаш мумкинлигидан

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_n R} \int\limits_{\left|y-x^0\right|=R} \frac{R^2 - \left|x - x^0\right|^2}{|\, y - x\,|^n} \cdot u_k(y) ds_y =$$

$$= \frac{1}{\omega_n R} \int\limits_{\left|y-x^0\right|=R} \frac{R^2 - \left|x - x^0\right|^2}{|\, y - x\,|^n} \cdot u(y) ds_y$$

тенглик ўринли бўлади. Бундан эса, $\left|x - x^0\right| < R$ шарда $u(x)$ функциянинг гармоник эканлиги келиб чиқади. x^0 нуқта D соҳанинг ихтиёрий нуқтаси бўлгани учун $u(x)$ функциянинг бутун D соҳада гармоник эканлигини ҳосил қиламиз.

10 - МАЪРУЗА
ЛАПЛАС ТЕНГЛАМАСИ УЧУН ДИРИХЛЕ МАСАЛАСИ.

$\Omega \subset R^n -$ихтиёрий чегараланган соҳа бўлсин. $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ функция ҳар бир $x \in \Omega$ учун $\Delta u(x) = 0$ Лаплас тенгламасини ва $u\big|_{\partial\Omega} = \varphi(x)$ чегаравий шартни қаноатлансин. Бундай $u = u(x)$ функцияни топиш масаласи Лаплас тенгламаси учун қўйилган Дирихле масаласи дейилади ва $u(x)$ функцияга Дирихле масаласининг классик ечими деб айтилади. Энди шу ихтиёрий чегараланган соҳа учун Дирихле масаласи классик ечимининг мавжудлиги ҳақидаги масалани қараб чиқамиз. Бунда биз шар учун Дирихле масаласининг ечилиши ва максимум принципига асосланган субгармоник функцияларнинг Перрон усулидан кенг фойдаланамиз. Бу усул бир қатор махсус қулайликларга эга бўлиб, масала ечимининг мавжудлиги ечимнинг чегара атрофидаги характерни ўрганишдан ажралган ҳолда олиб қаралади. Ҳамда бу усул иккинчи тартибли эллиптик тенгламаларнинг умумийроқ синфлари учун ҳам соддагина умумлаштирилади. Мавжудлик теоремаларини исбот қилишнинг бошқа маълум усуллари ҳам мавжуд бўлиб, улар интеграл тенгламалар усули, вариацион усул ёки гильберт фазоси усули ва бошқалардир.

Таъриф. *Агар* $\Omega \subset R^n -$*соҳада аниқланган* $u(x)$ $\left(-\infty \le u(x) < \infty\right)$ *функция учун*

1) Ω *соҳада* $u(x)$ *функция юқоридан ярим узлуксиз, яъни ихтиёрий* $x^0 \in \Omega$ *учун* $\overline{\lim_{x \to x^0}} u(x) \le u(x^0)$;

2) *Ҳар бир* $x^0 \in \Omega$ *нуқта учун* $u(x^0)$ *қиймат етарлича кичик* $r > 0$ $\left(r \le r(x^0)\right)$ *радиусли* $S\left(x^0, r\right)$ *сфера бўйича олинган* $u(x)$ *функциянинг ўрта қийматидан катта эмас:*

$$u(x^0) \le \frac{1}{\sigma_n r^{n-1}} \int\limits_{S\left(x^0, r\right)} u(x) d\sigma, \tag{1}$$

бунда $\sigma_n = \dfrac{n \cdot \pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}+1\right)}$ – *эса* R^n *фазодаги* $S\left(0,\, 1\right)$ – *бирлик сферанинг юзи, шартлар ўринли бўлса, у ҳолда* $u(x)$ *функция* Ω *соҳада субгармоник функция дейилади.*

$C^2\left(\Omega\right)$ синфга қарашли $u(x)$ функция учун $\Delta u = 0$ $\left(\Delta u \ge 0,\;\; \Delta u \le 0\right)$ муносабат бажарилса, у ҳолда $u(x)$ функция гармоник (субгармоник, супергармоник) функция деб аталади.

$C^2\left(\Omega\right)$ синфга қарашли субгармоник ва супергармоник функцияларнинг таърифини узлуксиз функциялар учун қуйидагича ҳам умумлаштириш мумкин.

Агар Ω соҳада узлуксиз $u(x)$ функция ихтиёрий B Р Ω шар ва B да гармоник ихтиёрий $h(x)$ функция учун ∂B да $u(x) \le h(x)$ $\left(u(x) \ge h(x)\right)$ тенгсизлик ўринли эканлигидан шу $u(x) \le h(x)$ $\left(u(x) \ge h(x)\right)$ тенгсизликнинг B да ҳам ўринли эканлиги келиб чиқса, у ҳолда $u(x)$ функция Ω соҳада субгармоник (супергармоник) функция дейилади. Узлуксиз субгармоник функцияларнинг қуйидаги хоссаларини кўрсатиш мумкин.

1) Ω соҳада узлуксиз $u(x)$ субгармоник функция учун максимумнинг кучли принципи ўринлидир, яъни агар Ω чегараланган соҳада $v(x)$ супергармоник функция ва $\partial\Omega$ да $v(x) \ge u(x)$ бўлса, у ҳолда бутун Ω соҳада $v(x) > u(x)$ ёки $v(x) \equiv u(x)$ бўлади. Бу ерда $v(x)$ супергармоник функция ва $u(x)$ субгармоник функциялар $\overline{\Omega}$ да узлуксиз деб қаралади.

Охирги хулосани исбот қилиш учун тескарисини фараз қиламиз. У ҳолда бирор $x^0 \in \Omega$ нуқта учун $\left(u - v\right)(x^0) = \sup\limits_{x \in \Omega}\left(u(x) - v(x)\right) = M \ge 0$ ва шундай бир

$\neq$

$B = B\left(x^0\right)$ шар топилиб, ∂B да $u - v \quad M$ бўлади. $\overline{u}$ ва $\overline{v}$ функциялар гармоник функциялар бўлиб, ∂B да u ва v ларга мос равишда тенг бўлсин. У ҳолда

$$M \geq \sup_{x \in \partial B} \left(\overline{u}(x) - \overline{v}(x)\right) \geq \left(\overline{u} - \overline{v}\right)(x^0) \geq \left(u - v\right)(x^0) = M$$

ва шунга кўра бу формулада тенгсизлик белгиларини тенглик белгиси билан алмаштириш мумкин. Гармоник функциялар учун максимумнинг кучли принципига кўра, B да $\overline{u} - \overline{v} \equiv M$ бўлгани учун $u - v \equiv M$ эканлиги ∂B да келиб чиқади. Бу эса B шарнинг танланишига зиддир. Демак, 1) хосса ўринли экан.

2) Ω соҳада $u(x)$ функция субгармоник ва B шар шу Ω соҳанинг ичида қатъий жойлашган (компакт жойлашган) , яъни B Р Ω бўлсин. $\overline{u}$ орқали B да гармоник бўлган ва ∂B да $u(x)$ функциянинг қиймати орқали Пуассон интеграли билан берилган функцияни белгилаймиз. Бу функция учун ∂B да $\overline{u} = u$ бўлади.

Ω соҳада B га нисбатан u функциянинг гармоник қирқимини

$$U(x) = \begin{cases} \overline{u}(x), & x \in B \\ u(x), & x \in \Omega \setminus B \end{cases}$$

тенглик билан аниқлаймиз. $U(x)$ функция Ω соҳада субгармоник функция бўлади. Ҳақиқатан ҳам, Ω соҳадаги ихтиёрий B' Р Ω шар ва B' шарда $h(x)$ гармоник функция бўлиб, $x \in \partial B'$ да $h(x) \geq U(x)$ тенгсизликни қаноатлантирсин. $u(x) \leq U(x)$ тенгсизлик B' да ўринли бўлгани учун $u(x) \leq h(x)$ тенгсизлик ҳам, B' да ўринли ва шунга кўра, $U(x) \leq h(x)$ тенгсизлик $x \in B' \setminus B$ да ҳам ўринли. Лекин $U(x)$ функция B да гармоник. Шунинг учун, максимум принципига кўра, $U(x) \leq h(x)$ тенгсизлик $x \in B \cap B'$ да ҳам ўринлидир. Шунга кўра, $U(x) \leq h(x)$ тенгсизлик B' да ўринли бўлади, яъни Ω соҳада $U(x)$ субгармоник функциядир.

3) Ω соҳада $u_1(x),\ u_2(x),...u_N(x)$ субгармоник функциялар бўлсин. У ҳолда $u(x)=\max\{\ u_1(x),\ u_2(x),...u_N(x)\ \}$ функция ҳам Ω соҳада субгармоник функциядир.

Бу хосса бевосита субгармоник функциянинг таърифидан келиб чиқади. Супергармоник функциялар учун шунга ўхшаш хоссаларни ҳосил қилиш учун 1), 2), 3) хоссаларда $u(x)$ функцияни $-u(x)$ функция билан алмаштириш керак.

$\Omega-$чегараланган соҳа, $\varphi(x)-$эса $\partial\Omega$ да чегараланган функция бўлсин. Агар $\overline{\Omega}$ да узлуксиз бўлган $u(x)-$ субгармоник функция $\partial\Omega$ да $u(x)\le\varphi(x)$ тенгсизликни қаноатлантирса, $\varphi(x)$ га нисбатан субфункция дейилади. Худди шунга ўхшаш $\overline{\Omega}$ да узлуксиз бўлган $u(x)-$ супергармоник функция $\partial\Omega$ да $u(x)\ge\varphi(x)$ тенгсизликни қаноатлантирса, $\varphi(x)$ га нисбатан суперфункция дейилади.

Максимум принципига кўра, ҳар бир субфункция ($\varphi(x)$ га нисбатан) ихтиёрий суперфункциядан кичик ёки тенг бўлади.

Хусусан, $\inf\limits_{x\in\partial\Omega}\varphi(x)$ дан ошмайдиган ($\sup\limits_{x\in\partial\Omega}\varphi(x)$ дан кичик бўлмаган) ўзгармас функция субфункция (суперфункция) бўлади. $\varphi(x)$ функция учун барча субфункциялар тўпламини S_φ орқали белгилаймиз.

Перрон усулининг асосий натижаси қуйидаги теоремада жамланган.

Теорема. $u(x)=\sup\limits_{v(x)\in S_\varphi}v(x)$ *функция* Ω *соҳада гармоникдир.*

Исбот. Максимум принципига кўра ихтиёрий $v(x)\in S_\varphi$ функция $v(x)\le\sup\limits_{x\in\Omega}\varphi(x)$ тенгсизликни қаноатлантиради. Шунга кўра, $u(x)$ функция бутун $\overline{\Omega}$ да аниқланади. $y\in\Omega$ ихтиёрий тайинланган нуқта бўлсин. $u(x)$ функция аниқланиши бўйича шундай бир $\{ v_n(x) \}_1^{\infty} \subset S_{\varphi}$ кетма–кетлик мавжуд бўлиб, $v_n(y) \to u(y)$ бўлади. $v_n(x)$ ни $\max\left(v_n(x),\ \inf\limits_{x \in \partial\Omega} \varphi(x) \right)$ билан алмаштириб, $\{ v_n(x) \}$ кетма–кетликни чегараланган деб ҳисоблаш мумкин. Энди R сонни $B = B_R(y)\ \text{Р}\ \Omega$ бўладиган қилиб танлаймиз ва $V_n(x)$ орқали B га нисбатан $v_n(x)$ функциянинг гармоник қирқимини белгилаймиз. У ҳолда $V_n(x) \in S_{\varphi}$, $V_n(y) \to u(y)$ бўлади, ҳамда $\{ V_n(x) \}$ кетма–кетликнинг $\{ V_{n_k}(x) \}$ қисмий кетма–кетлиги топилиб, $\rho < R$ радиусли ихтиёрий $B_{\rho}(y)$ шарда $v(x)$ гармоник функцияга текис яқинлашувчи бўлади. B да $v(x) \le u(x)$ ва $v(y) = u(y)$ тенглик ўринли. Энди B да $v(x) = u(x)$ эканлигини кўрсатамиз. Фараз қилайлик, бирор $z \in B$ нуқтада $v(z) < u(z)$ бўлсин. У ҳолда шундай бир $\overline{u} \in S_{\varphi}$ функция мавжуд бўлиб, $v(z) < \overline{u}(z)$ ўринли бўлади. $w_k(x) = \max\left(\overline{u}(x),\ V_{n_k}(x) \right)$ деб белгилаб, бу функциянинг W_k гармоник қирқимини олсак, олдин ҳосил қилганимиздек $\{ W_k \}$ кетма–кетликнинг бирор қисмий кетма–кетлиги w гармоник функцияга яқинлашиб, B да $v(x) \le w(x) \le u(x)$ тенгсизликни қаноатлантиради. Бундан ташқари, $v(y) = w(y) = u(y)$. Лекин, у ҳолда максимум принципига кўра, B да $v(x) = w(x)$ тенглик бажарилиши керак бўлади. Бу эса $\overline{u}(x)$ нинг танлашига зиддир. Шундай қилиб, $u(x)$ функция Ω соҳада гармоникдир.

Биз конструктив равишда курган гармоник функция табиийки, $\Delta u = 0,\ x \in \Omega,\quad u\big|_{\partial\Omega} = \varphi(x)$ классик Дирихле масаласининг ечими (бу ечимга Перрон ечими деб айтилади) деб ҳисоблаш мумкин. Ҳақиқатан ҳам, агар Дирихле масаласи ечиладиган бўлса, у ҳолда унинг ечими Перрон ечими билан устма–уст тушади. Ҳақиқатдан ҳам, w ечим бўлсин. У ҳолда, $w \in S_{\varphi}$ бўлиб, максимум принципига кўра, $w \geq u$ тенгсизлик барча $u \in S_{\varphi}$ учун ўринли бўлади. Бундан $w = u$ ҳосил қилинади.

Перрон усулида ечимнинг чегара атрофидаги характери шу ечимнинг мавжудлиги масаласидан ажратилганлиги муҳимдир. Перрон ечими чегарада қийматининг берилишига ва соҳа чегарасининг геометрик хоссаларига боғлиқ бўлиб, барьер функцияси ёрдамида ўрганилади.

$\xi \in \partial\Omega$ нуқта бўлсин. Агар $C\left(\overline{\Omega}\right)$ синфга қарашли $W = W_{\xi}$ функция

1) Ω соҳада W супергармоник функция;

2) $x \in \overline{\Omega} \setminus \{\,\xi\,\}$ учун $W(x) > 0$, $W(\xi) = 0$ бўлса, Ω учун ξ нуқтада барьер функцияси дейилади.

Барьер функциясига умумийроқ ҳолда ҳам таъриф бериш мумкин бўлиб, унда W функция супергармоник ва Ω соҳадагагина узлуксиз, мусбат ҳамда $x \to \xi$ да $W(x) \to 0$ шартларни қаноатлантиришини талаб қиламиз. Барьер функцияни қуришга асосланган йўналишнинг муҳимлиги шундан иборатки, бунда $\partial\Omega$ чегаранинг локал хоссаларигина зарур бўлади.

W функция $\xi \in \partial\Omega$ нуқтада локал барьер бўлсин, яъни ξ нуқтанинг шундай бир N атрофи мавжуд бўлиб, $\Omega \cap N$ да W функция юқоридаги таърифни қаноатлантирсин. У ҳолда Ω учун ξ нуқтада барьерни қуйидагича аниқлаш мумкин. B шар бўлиб, $\xi \in B$ Р N ва $m = \inf\limits_{x \in N \setminus B} W(x) > 0$ шартларни қаноатлантирсин.

$$\overline{W}(x) = \begin{cases} \min\left(m,\, W(x)\right), & x \in \overline{\Omega} \cap B, \\ m \qquad\qquad\qquad , & x \in \overline{\Omega} \setminus B \end{cases}$$

функция Ω учун ξ нуқтада барьер бўлади. Бунга 1) ва 2) хоссаларнинг бажарилишини текшириш билан ишонч ҳосил қилиш мумкин. Ҳақиқатан ҳам, $\overline{W}$ функция $\overline{\Omega}$ соҳада узлуксиз ва Ω соҳада супергармоник эканлиги субгармоник функцияларнинг 3) хоссасидан келиб чиқади. 2) хосса бевосита кўрсатилади.

Агар чегара нуқтасида барьер мавжуд бўлса, у ҳолда бу нуқта (Лаплас тенгламаси учун) регуляр нуқта дейилади. Барьернинг мавжудлиги ва ечимнинг чегара атрофидаги характери орасидаги боғлиқлик қуйидаги леммада ифодаланади.

Лемма. Ω *соҳада* $u(x) = \sup\limits_{v(x)\in S_{\varphi}} v(x)$ *тенглик билан аниқланган гармоник функция бўлсин. Агар* $\xi -$*нуқта* Ω *соҳанинг чегарасидаги регуляр нуқта ва* ξ *нуқтада* $\varphi(\xi)$ *узлуксиз бўлса, у ҳолда* $x \to \xi$ *да* $u(x) \to \varphi(\xi)$ *бўлади.*

Исбот. Ихтиёрий $\varepsilon > 0$ ва $M = \sup\limits_{x\in\partial\Omega} \left|\varphi(x)\right|$ бўлсин. $\xi -$ чегарадаги регуляр нуқта бўлганлиги учун ξ нуқтада $W(x)$ барьер мавжуд ва $\varphi(x)$ функциянинг узлуксизлигига кўра, δ ва k сонлари мавжуд бўлиб, $\left|x-\xi\right| < \delta$ учун $\left|\varphi(x)-\varphi(\xi)\right| < \varepsilon$, ҳамда $\left|x-\xi\right| \geq \delta$ учун $kW(x) \geq 2M$ тенгсизлик ўринли. $\varphi(\xi)+\varepsilon+kW$ ва $\varphi(\xi)-\varepsilon-kW$ функциялар φ учун мос равишда суперфункция ва субфункция бўлади. Шунга кўра, u функциянинг аниқланишига кўра ва ҳар бир суперфункция ва субфункциядан катта ёки тенг эканлигидан $x \in \Omega$ учун $\varphi(\xi)-\varepsilon-kW(x) \leq u(x) \leq \varphi(\xi)+\varepsilon+kW(x)$ ёки $\left|u(x)-\varphi(\xi)\right| \leq \varepsilon + kW(x)$ тенгсизликка эга бўламиз. Бундан, $x \to \xi$ да $W(x) \to 0$ эканлигини ҳисобга олсак, $x \to \xi$ да $u(x) \to \varphi(\xi)$ ҳосил бўлади. Бу исбот қилинган натижадан қуйидаги теорема келиб чиқади.

Теорема. *Чегараланган соҳада классик Дирихле масаласи ихтиёрий узлуксиз чегаравий қийматда ечилиши учун соҳанинг барча чегара нуқталари регуляр бўлиши зарур ва етарлидир.*

Исбот. Агар $\varphi(x)$ чегаравий функция узлуксиз ва $\partial\Omega$ чегара регуляр нуқталардан ташкил топган бўлса, у ҳолда юқоридаги леммага кўра, Дирихле масаласининг ечими

$u(x) = \sup\limits_{v(x) \in S_\varphi} v(x)$ бўлади. Аксинча, агар Дирихле масаласи барча узлуксиз чегаравий қийматлар учун ечимга эга бўлса, у ҳолда ихтиёрий $\xi \in \partial\Omega$ учун $\varphi(x) = |x - \xi|$ узлуксиз чегаравий функция учун Ω соҳада Дирихле масаласининг ечими бўлган гармоник функция ξ нуқтада барьер бўлади. Шунга кўра, ξ нуқта регуляр нуқтадир. Теорема исбот бўлди.

Энди қуйидаги савол муҳимдир: қандай соҳалар учун барча чегара нуқталари регуляр бўлади? Умумий ҳолда етарли шартларни чегаранинг локал геометрик хоссалари терминида бериш мумкин. Бундай шартлардан айримларини келтирамиз.

$n = 2$ бўлган ҳолда чегараланган Ω соҳани қараймиз. z_0 –нуқта Ω соҳанинг чегара нуқтаси бўлсин. r, θ –орқали координата боши z_0 нуқтада бўлган қутб координаталарни белгилаймиз. z_0 нуқтанинг шундай бир N атрофи мавжуд бўлиб, $\Omega \cap N$ да ёки z_0 нуқтани ўз чегарасида сақловчи $\Omega \cap N$ нинг компонентасида аниқланган θ функциянинг бир қийматли варағини ажратиш мумкин бўлсин. У ҳолда

$$W = -\mathrm{Re}\frac{1}{\log(z - z_0)} = -\frac{\log r}{\log^2 r + \theta^2}$$

функция z_0 нуқта учун (суст) локал барьер функция бўлади ва шунга кўра z_0 нуқта регуляр нуқтадир. Хусусан, агар z_0 нуқта Ω соҳанинг ташқарисида ётувчи содда ёйнинг чекка нуқта бўлса, у ҳолда бу z_0 нуқта чегаранинг регуляр нуқтаси бўлади. Шундай қилиб, текисликда Дирихле масаласининг чегараланган соҳада узлуксиз чегаравий қийматлар учун ечилиши соҳанинг барча чегара нуқталарига ташқаридан ўтувчи содда ёйнинг чекка нуқтаси бўлиши мумкин бўлган ҳолда ўринли бўлади. Бир оз умумийроқ ҳолда, шу барьер кўрсатадики, агар соҳа тўлдирувчисининг ихтиёрий компонентаси биттадан ортиқ нуқтани сақласа, чегаравий масала ечилади. Бундай соҳага мисол сифатида чекли сондаги содда ёпиқ эгри чизиқлар билан чегараланган соҳани келтириш мумкин. Бошқа бир мисол –

бирлик доирадан қандайдир ёйни қирқиб ташлаш билан ҳосил қилиш мумкин. Бу ҳолда чегаравий қиймат қирқилган қисмининг ҳар иккала қирғоғида ҳам берилиши мумкин.

Юқори ўлчамли соҳалар учун бу масала қаралган масаладан муҳим фарқи бор бўлиб, умумий ҳолда Дирихле масаласи ечилмаслиги ҳам мумкин. Уч ўлчовли фазо бўлган ҳолда ёпиқ сирт билан чегараланган ва соҳа ичига йўналган етарлича ўткир бигизли Лебег томонидан қурилган соҳани мисол сифатида келтириш мумкин: бу бигизнинг ўткир учи шу сирт билан чегараланган соҳа чегарасининг регуляр бўлмаган нуқтаси бўлади.

Дирихле масаласи ечилишининг содда етарли шарти чегараланган Ω соҳа учун ташқи сфера шартидир:

ҳар бир $\xi \in \partial\Omega$ нуқта учун $B = B_R(y)$ шар мавжуд бўлиб, $\overline{B} \cap \overline{\Omega} = \xi$ шартни қаноатлантирсин.

Агар бу шарт бажарилса, у ҳолда

$$W(x) = \begin{cases} R^{2-n} - |x-y|^{2-n}, & n \geq 3 \\ \log\dfrac{|x-y|}{R}, & n = 2 \end{cases}$$

тенглик билан аниқланган W функция ξ нуқтада барьер бўлади. Хусусан, чегараси C^2 синфга тегишли соҳаларнинг барча чегара нуқталари регулярдир.

Сиғим физик тушунчаси чегара нуқтасининг регулярлиги ва чиқариб ташланган нуқта эканлигини характерлашда ёрдамчи воситадир. $\Omega -$орқали R^n $(n \geq 3)$ фазодаги $\partial\Omega$ силлиқ чегарага эга чегараланган соҳани белгилаймиз. $u -$гармоник функция $R^n \setminus \overline{\Omega}$ тўлдирувчи соҳада аниқланган ва $u\big|_{\partial\Omega} = 1$ чегаравий шартни ва $u(\infty) = 0$ шартни қаноатлантирсин. Одатда бундай функция ўтказувчанлик потенциали деб аталади. Бундан $u(x)$ функциянинг мавжудлиги ички чегараси $\partial\Omega$ (бунда $u_k(x) = 1$) бўлган ва ташқи чегараси (бунда $u_k(x) = 0$) чексизликка интилувчи бўлган кенгайувчи чегараланган соҳалар кетма–кетлигида аниқланган $u_k(x)$ гармоник функцияларнинг ягона лимити эканлигини кўрсатиш мумкин. Агар $\sum$ орқали $\partial\Omega$ ни ёки Ω соҳани ўраб олувчи ихтиёрий ёпиқ сиртни белгиласак,

$$cap\,\Omega = -\int_{\sum} \frac{\partial u}{\partial \gamma} ds = \int_{R^n \setminus \Omega} |Du|^2 dx$$

миқдор Ω соҳанинг сиғимини аниқлайди, бунда $\gamma-$ташқи нормалдир. Электростатикада $cap\,\Omega$ сиғим $\partial\Omega$ да 1 бўлган потенциалга эга ва $\partial\Omega$ да жойлашган тўла электрик заряд билан кўпайтувчи ўзгармас сон аниқлигида устма–уст тушади.

Сиғим тушунчаси соҳанинг чегараси силлиқ бўлмаган ҳолда ҳам киритилиши мумкин ва ихтиёрий компакт тўплам учун чегараси силлиқ ичма–ич жойлашган чегараланган соҳаларнинг сиғимлари кетма–кетлигининг ягона лимити сифатида аниқланади. Сиғим тушунчасининг эквивалент таърифини аппроксимация қилувчи соҳаларсиз ҳам бериш мумкин. Хусусан, қуйидаги варацион характеристика ўринли:

$$cap\,\Omega = \inf_{v(x)\in K} \int_{R^n} |Dv(x)|^2 dx$$

бунда $K = \left\{ v(x) \in C_0^1\left(R^n\right) : v(x) = 1,\ x \in \Omega \right\}$.

$x^0 \in \partial\Omega$ чегара нуқтасининг регулярлигини аниқлашда ихтиёрий тайинланган $\lambda \in (0,\,1)$ сон учун

$$c_j = cap\left\{ x \in \Omega : \left| x - x^0 \right| \le \lambda^j \right\}$$

сиғимни қараймиз. Винер критериясига кўра, Ω соҳанинг x^0 чегара нуқтаси регуляр бўлиши учун $\sum\limits_{j=0}^{\infty} c_j \cdot \lambda^{-j(n-2)}$ қаторнинг узоқлашувчи бўлиши зарур ва етарлидир.

11 - МАЪРУЗА
ПУАССОН ТЕНГЛАМАСИ УЧУН ДИРИХЛЕ МАСАЛАСИ.

Юқорида Лаплас тенгламаси учун фундаментал ечим $E(x,\ y)$ функция киритилган эди. Энди унинг ўрнига қуйидаги нормаллашган фундаментал ечимни киритамиз:

$$\Gamma(x-y)=\Gamma(|x-y|)=\begin{cases}\dfrac{1}{n(2-n)\omega_n}|x-y|^{2-n}, & n>2\\ \dfrac{1}{2\pi}\log|x-y|, & n=2\end{cases} \quad . \tag{1}$$

$f(x)$ функция Ω соҳа бўйича интегралланувчи бўлсин. R^n фазода

$$W(x)=\int_{\Omega}\Gamma(x-y)f(y)dy \tag{2}$$

тенглик билан аниқланадиган $W(x)$ функция $f(x)$ зичлик билан берилган Ньютон потенциали деб аталади.

$\partial\Omega$ чегараси етарлича силлиқ бўлган соҳадаги $u(x)\in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$ ихтиёрий функция

$$u(x)=\int_{\partial\Omega}\left(u(y)\cdot\frac{\partial\Gamma}{\partial\gamma}(x-y)-\Gamma(x-y)\frac{\partial u(y)}{\partial\gamma}\right)ds+$$

$$+\int_{\Omega}\Gamma(x-y)\Delta u(y)\,dy,\ x\in\Omega$$

Грин формуласига кўра, гармоник функциялар йиғиндиси ва шу функция Лапласианининг Ньютон потенциали йиғиндиси шаклида тасвирланади. Шунинг учун, $\Delta u(x)=f(x)$ Пуассон тенгламасини ўрганиш $f(x)$ функциянинг Ньютон потенциалини ўрганишга кўп боғлиқдир. $f(x)$ функция Ньютон потенциалининг ҳосиласини баҳолаш Пуассон тенгламаси учун классик Дирихле масаласининг ечилиши ҳақидаги теоремани келтириб чиқаришга имкон беради. Агар $f(y) \in C_0^\infty(\Omega)$ бўлса, у ҳолда

$$W(x) = \int_\Omega \Gamma(x-y) f(y)\, dy =$$

$$= \int_{R^n} \Gamma(x-y) f(y)\, dy = \int_{R^n} \Gamma(z) f(x-z)\, dz$$

шаклида ёзиб, $W(x) \in C^\infty(\overline{\Omega})$ эканлигини кўрамиз. Агар $f(y)$ функциядан фақат узлуксизлик талаб қилинса, у ҳолда $W(x)$ Ньютон потенциали икки марта дифференциалланувчи ҳам бўлмайди. Ньютон потенциалини ўрганишда Гёльдер синфлари муҳим роль ўйнайди.

$x_0 \in R^n$ ва f функция x_0 нуқтани сақловчи D чегараланган соҳада аниқланган бўлсин. Агар $0 < \alpha < 1$ учун

$$[\, f \,]_{\alpha,\, x_0} = \sup_{D - \{x_0\}} \frac{|\, f(x) - f(x_0)|}{|\, x - x_0|^\alpha} \tag{3}$$

миқдор чекли бўлса, f функция x_0 нуқтада α кўрсаткич билан Гёльдер бўйича узлуксиз дейилади.

$[\, f \,]_{\alpha,\, x_0}$ миқдорни (α кўрсаткич билан) f функциянинг x_0 нуқтадаги D тўпламга нисбатан Гёльдер коэффициенти деб айтилади. Кўриниб турибдики, агар f функция x_0 нуқтада Гёльдер бўйича узлуксиз бўлса, у ҳолда f функция x_0 нуқтада узлуксиздир. Агар (3) миқдор $\alpha = 1$ учун чекли бўлса, f функция x_0 нуқтада Липщиц бўйича узлуксиз дейилади.

Мисол. $B_1(0)$ шарда $f(x) = |x|^\beta$ тенглик билан аниқланган f функция $x = 0$ нуқтада $0 < \beta < 1$ учун β кўрсаткич билан Гёльдер бўйича узлуксиздир. Агар $\beta = 1$ бўлса, Липщиц бўйича узлуксиздир.

Гёльдер бўйича узлуксизлик тушунчаси бутун D тўпламга ҳам умумлаштирилади. Агар

$$[f]_{\alpha, x_0} = \sup_{\substack{x, y \in D \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^{\alpha}}, \quad 0 < \alpha \leq 1, \tag{4}$$

миқдор чекли бўлса, $f(x)$ функция D соҳада α кўрсаткич билан Гёльдер бўйича текис узлуксиз дейилади. Агар D тўпламдаги барча компакт қисм–тўпламлар учун α кўрсаткич билан $f(x)$ функция текис узлуксиз бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция α кўрсаткич билан D тўпламда Гёльдер бўйича локал узлуксиз дейилади. Агар D компакт тўплам бўлса, бу икки тушунча устма – уст тушади.

$\Omega \subset R^n$ очиқ тўплам бўлсин ва $k-$ манфиймас бутун сон бўлсин. $C^{k,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ $\left(C^{k,\alpha}(\Omega)\right)$ орқали $C^{k}\left(\overline{\Omega}\right)$ $\left(C^{k}(\Omega)\right)$ фазодан олинган ва $k-$ чи ҳосилалари Ω соҳада α кўрсаткич билан Гёльдер бўйича текис узлуксиз (Гёльдер бўйича локал узлуксиз) функциялар тўпламини белгилаймиз. Соддалик учун $C^{0,\alpha}(\Omega) = C^{\alpha}(\Omega)$, $C^{0,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right) = C^{\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ деб белгилаймиз, бунда $0 < \alpha < 1$. $\alpha = 0$ учун $C^{k,0}(\Omega) = C^{k}(\Omega)$, $C^{k,0}\left(\overline{\Omega}\right) = C^{k}\left(\overline{\Omega}\right)$. Бундан ташқари, $C_0^{k,\alpha}(\Omega)$ орқали $C^{k,\alpha}(\Omega)$ фазога қарашли ва Ω соҳада компакт ташувчили функцияларни белгилаймиз. Бу фазоларда мос нормалар

$$\|u\|_{C^k\left(\overline{\Omega}\right)} = \sum_{j=0}^{k} \left|D^j u\right|_{0,\Omega} = \sum_{j=0}^{k} \sup_{|\beta|=j} \sup_{x\in\Omega} \left|D^{\beta} u(x)\right|,$$

$$\|u\|_{C^{k,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)} = \|u\|_{C^k\left(\overline{\Omega}\right)} + \left[D^k u\right]_{\alpha,\Omega} =$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \sup_{|\beta|=j} \sup_{x\in\Omega} \left|D^{\beta} u(x)\right| + \sup_{|\beta|=k} \left[D^{\beta} u\right]_{\alpha,\Omega}$$

шаклида киритилади.

1 – лемма. *$f(x)$ функция Ω соҳада чегараланган ва интегралланувчи бўлсин. $W(x)-$эса зичлиги $f(x)$ бўлган Ньютон потенциали бўлсин. У ҳолда $W(x)\in C^1(R^n)$ ва барча Ω учун*

$$D_iW(x)=\int_{\Omega} D_i\Gamma(x-y)f(y)\,dy,\quad i=1,2,...,n \tag{5}$$

формула ўринли бўлади.

Исбот. $D\Gamma(x-y)$ функция учун

$$\left|D_i\Gamma(x-y)\right|\le\frac{1}{n\omega_n}|x-y|^{1-n},\ \left|D_{ij}\Gamma(x-y)\right|\le\frac{1}{\omega_n}|x-y|^{-n},$$

$$\left|D^{\beta}\Gamma(x-y)\right|\le C|x-y|^{2-n-|\beta|},\ C=C(n,|\beta|) \tag{6}$$

баҳолашларга кўра, $v(x)=\int\limits_{\Omega} D_j\Gamma(x-y)f(y)\,dy$ функция

барча $x\in R^n$ учун аниқланади. $v=D_iW$ эканлигини исбот қилиш учун, $\eta\in C^1\left(R\right)$ функцияни $t\le 1$ учун $0\le\eta\le 1$, $0\le\eta'\le 2$, $\eta(t)=0$, $t\ge 2$ учун $\eta(t)=1$ шартларни қаноатлантирадиган қилиб танлаймиз ва $\varepsilon>0$ учун

$$W_{\varepsilon}(x)=\int_{\Omega}\Gamma\eta_{\varepsilon}f(y)\,dy,\ \Gamma=\Gamma(x-y),\ \eta_{\varepsilon}=\eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right)$$

функцияни қурамиз. Кўриниб турибдики, $W_{\varepsilon}(x)\in C^1\left(R^n\right)$ ва

$$v(x)-D_iW_{\varepsilon}(x)=\int_{|x-y|\le 2\varepsilon} D_i\left\{(1-\eta_{\varepsilon})\Gamma\right\}f(y)\,dy$$ бўлади.

Бундан,

$$\left|v(x)-D_jW_{\varepsilon}(x)\right|\le\sup_{x\in R^n}|f(y)|\int_{|x-y|\le 2\varepsilon}\left(\left|D_j\Gamma\right|+\frac{2}{\varepsilon}|\Gamma|\right)dy\le$$

$$\le \sup_{x\in R^n} |\, f(y)\,| \begin{cases} \dfrac{2n\varepsilon}{n-2}, & n>2 \quad \text{учун} \\ 4\varepsilon\left(1+\left|\log 2\varepsilon\right|\right), & n=2 \quad \text{учун} \end{cases}$$

келиб чиқади. Шунга кўра, $W_\varepsilon(x)$ ва $D_i W_\varepsilon(x)$ функциялар $\varepsilon \to 0$ да мос равишда $W(x)$ ва $v(x)$ функцияларга R^n фазодаги ҳар бир компактда текис яқинлашади. Шунинг учун $W(x)\in C^1\left(R^n\right)$ ва $D_i W(x) = v(x)$ бўлади.

2 – лемма. $f(x)$ *функция чегараланган ва* ($\alpha \le 1$ *кўрсаткич билан*) *Гёльдер бўйича локал узлуксиз бўлсин, ҳамда* $W(x)-$ *Ньютон потенциали* $f(x)$ *зичлик билан берилган бўлсин. У ҳолда* $W(x)\in C^2(\Omega)$, $\Delta W(x) = f(x)$ *тенглик ва барча* $x\in\Omega$ *учун*

$$D_{ij}W(x) = \int\limits_{\Omega_0} D_{ij}\Gamma(x-y)\left(f(y)-f(x)\right)dy - \\ -f(x)\int\limits_{\partial\Omega_0} D_i\Gamma(x-y)\gamma_j(y)ds_y,\ i,j=1,...,n. \tag{7}$$

тенглик ўринли бўлади. Бу ерда Ω_0 *орқали* Ω *соҳани ўзида сақловчи ва дивергенция ҳақидаги теорема қўлланиладиган тўплам бўлиб,* Ω *нинг ташқарисига* $f(x)$ *функция ноль билан давом эттирилади.*

Исбот. $\left|D_{ij}\Gamma(x-y)\right| \le \dfrac{1}{\omega_n}\,|\,x-y\,|^{-n}$ баҳолаш ва $f(x)$ функциянинг Ω соҳада Гёльдер бўйича нуқтавий узлуксизлигига кўра

$$u(x) = \int\limits_{\Omega_0} D_{ij}\Gamma\cdot\left(f(y)-f(x)\right)dy - f(x)\int\limits_{\partial\Omega_0} D_i\Gamma\cdot\gamma_j(y)ds_y$$

функция барча $x \in \Omega$ учун аниқланади. $v(x) = D_i W(x)$ бўлсин. $\varepsilon > 0$ учун $v_\varepsilon(x) = \int\limits_\Omega D_i \Gamma \eta_\varepsilon f(y)\, dy$ функцияни аниқлаймиз, бунда $\eta_\varepsilon(x) -$функция юқорида киритилган шаклда бўлиб, $v_\varepsilon(x) \in C^1(\Omega)$ бўлади. Дифференциаллаш ёрдамида етарли кичик ε учун

$$D_j v_\varepsilon(x) = \int\limits_\Omega D_j\left(D_i \Gamma \eta_\varepsilon\right) f(y)\, dy =$$

$$= \int\limits_\Omega D_j\left(D_i \Gamma \eta_\varepsilon\right)\left(f(y) - f(x)\right) dy + f(x) \int\limits_{\Omega_0} D_j\left(D_i \Gamma \eta_\varepsilon\right) dy =$$

$$= \int\limits_{\Omega_0} D_j\left(D_i \Gamma \eta_\varepsilon\right)\left(f(y) - f(x)\right) dy - f(x) \int\limits_{\partial\Omega_0} D_i \Gamma \eta_\varepsilon \gamma_j(y)\, ds_y \,,$$

бундан $2\varepsilon < dist\left(x,\, \partial\Omega\right)$ шартда

$$\left| u(x) - D_j v_\varepsilon(x) \right| =$$

$$= \left| \int\limits_{|x-y| \le 2\varepsilon} D_j \left\{ (1 - \eta_\varepsilon) D_i \Gamma \right\} \cdot \left(f(y) - f(x) \right) dy \right| \le$$

$$\le [\, f\,]_{\alpha,\, x} \cdot \int\limits_{|x-y| \le 2\varepsilon} \left(\left| D_{ij}\Gamma \right| + \frac{2}{\varepsilon} \left| D_i \Gamma \right| \right) \cdot \left| x - y \right|^\alpha dy \le$$

$$\le \left(\frac{n}{\alpha} + 4 \right) \cdot [\, f\,]_{\alpha,\, x} \cdot (2\varepsilon)^\alpha$$

тенгсизликка эга бўламиз. Шунинг учун, $\varepsilon \to 0$ да Ω соҳадаги компакт қисм тўпламда $D_j v_\varepsilon(x)$ функция $u(x)$ га текис яқинлашади. $v_\varepsilon(x)$ функция $v(x) = D_i W(x)$ га Ω соҳада текис яқинлашгани учун $W(x) \in C^2(\Omega)$ ва $u(x) = D_{ij} W(x)$ келиб чиқади. Ниҳоят, (7) формулада $\Omega_0 = B_R(x)$ шарни олиб, етарлича катта R учун

$$\Delta W(x)=\frac{1}{n\omega_n R^{n-1}}f(x)\cdot\int\limits_{|x-y|=R}\gamma_i(y)\cdot\gamma_i(y)\,ds_y=f(x)$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Шундай қилиб, 2 – лемма исбот бўлди.

1– ва 2– леммалар ҳамда юқоридаги Лаплас тенгламаси учун келтирилган теоремадан фойдаланиб, қуйидаги теоремани ҳосил қиламиз.

Теорема. $\Omega-$*чегараланган соҳа бўлсин.* $\partial\Omega$ *чегаранинг барча нуқталари* (*Лаплас операторига нисбатан*) *регуляр бўлсин. Агар* $f(x)$ *функция чегараланган ва* Ω *соҳада Гёльдер бўйича локал узлуксиз бўлса, у ҳолда*

$$\Delta u(x)=f(x),\ \ \forall x\in\Omega$$

$$u\big|_{x\in\partial\Omega}=\varphi(x)$$

классик Дирихле масаласи ихтиёрий узлуксиз $\varphi(x)-$*чегаравий функция учун бир қийматли ечилади.*

Исбот. $W(x)-$орқали $f(x)$ зичлик билан Ньютон потенциалини белгилаймиз ва $v(x)=u(x)-W(x)$ деб оламиз. У ҳолда

$$\Delta u(x)=f(x),\ \ \forall x\in\Omega$$

$$u\big|_{x\in\partial\Omega}=\varphi(x)$$

масала

$$\Delta v(x)=0,\ \ \forall x\in\Omega$$

$$v\big|_{x\in\partial\Omega}=\varphi(x)-W(x)$$

масалага эквивалент бўлади. Охирги масаланинг бир қийматли ечилиши олдинги параграфда исбот қилинган эди. Теорема исбот бўлди.

Ω соҳа $\Omega=B=B_R(0)$ шар бўлганда юқоридаги теорема Пуассон интеграл формуласидан ва 1 – чи, 2 – чи леммалардан келиб чиқади. Бундан ташқари, бу ҳолда ечим учун

$$u(x)=\int\limits_{\partial B}K(x,\ y)\varphi(y)ds_y+\int\limits_{B}G(x,\ y)f(y)dy$$

ошкор формулани ҳам ёзишимиз мумкин, бунда

$$K(x,y)=\frac{R^2-|x|^2}{n\omega_n R|x-y|^n}\;-\quad \text{Пуассон ядроси,}$$

$$G(x,y)=\begin{cases}\Gamma(|x-y|)-\Gamma(\frac{|y|}{R}|x-y|)\ ,\ y\neq 0,\\ \Gamma(|x|)-\Gamma(R)\ ,\quad y=0\end{cases}=$$

$$=\Gamma\left(\sqrt{|x|^2+|y|^2-2xy}\right)-\Gamma\left(\sqrt{\left(\frac{|x||y|}{R}\right)^2+R^2-2xy}\right)-\ \text{эса}$$

Грин функциясидир.

Эслатма. 2 – леммадаги Гёльдер бўйича узлуксизликни Дини шарти билан ҳам алмаштириш мумкин. Бошқача қилиб айтганда, агарда $|f(x)-f(y)|\le\varphi(|x-y|)$ тенгсизлик ўринли бўлиб, бунда $\int\limits_0^{\delta}\frac{\varphi(r)}{r}dr<\infty$ бўлса, у ҳолда $f(x)$ зичлик билан $W(x)$ Ньютон потенциали $C^2(\Omega)$ синфга қарашли ва $\Delta u(x)=f(x)$ тенгламанинг ечими бўлади. Бироқ агар $f(x)$ функция фақат узлуксиз бўлса, у ҳолда $W(x)$ Ньютон потенциали икки марта дифференциалланувчи бўлмаслиги ҳам мумкин.

Масалан. $P(x)=x_1x_2$, $D_{12}P=1$ ва $\eta(x)\in C_0^{\infty}\left(\{\,x:|x|<2\,\}\right)$, $|x|<1$ учун $\eta(x)=1$, ҳамда $t_k=2^k$ ва $k\to\infty$ да $c_k\to 0$ бўлиб, $\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_k$ қатор узоқлашувчи бўлсин.

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k\,\Delta(\eta P)(t_kx)\quad \text{функцияни аниқлаймиз.}$$

$f(x)-$узлуксиз бўлиб, координата бошининг ихтиёрий атрофида $\Delta u(x)=f(x)$ тенглама $C^2(\Omega)$ синфга қарашли ечимга эга эмас.

12 – МАЪРУЗА
ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ ЭЛЛИПТИК ТИПДАГИ ТЕНГЛАМАЛАР УЧУН ДИРИХЛЕ МАСАЛАСИ.

Биз

$$Lu = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)\, D_{ij}u + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\, D_i u + c(x)u = f(x) \qquad (1)$$

шаклдаги тенгламани қараймиз ва уни $Lu = f$ шаклда ёзамиз, бунда барча коэффициентлар ва ўнг томондаги $f(x)$ функция $\Omega \subset R^n$ очиқ тўпламда аниқланган. $L-$ оператор қатъий эллиптик, яъни

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \ge c_0 \left| \xi \right|^2, \ \forall x \in \Omega, \ \xi \in R^n \qquad (2)$$

тенгсизлик бирор $c_0 = const > 0$ учун ўринли деб оламиз. $Lu = f$ тенглама учун Дирихле масаласини $\Omega \subset R^n$ чегараланган соҳада қараймиз:

$$\begin{aligned} & Lu = f, \ \forall x \in \Omega \\ & u\big|_{x\in\partial\Omega} = \varphi(x). \end{aligned} \qquad (3)$$

Ўзгарувчи коэффицентли тенглама учун Дирихле масаласининг ечилиш процедураси параметр бўйича давом эттириш усули ёрдамида ўзгармас коэффициентли бўлган ҳолга келтирилади. Қисқача қилиб айтганда, $\Delta u = f$ Пуассон тенгламасини ечишдан фойдаланиб, ҳамда $\Delta u = f$ ва $Lu = f$ эллиптик тенгламалар оиласи узлуксиз боғланганлигидан ҳосил қилинади. Аввал параметр бўйича давом эттириш усулини қараб чиқамиз.

Теорема. *$B-$Банах фазоси, $V-$эса чизиқли нормаллашган фазо ва L_0, L_1-чизиқли чегараланган операторлар B фазони V фазога акслантирсин. Ҳар бир $t \in [0,\, 1]$ учун $L_t = (1-t)L_0 + tL_1$ деб оламиз ва шундай бир C ўзгармас мавжуд бўлиб, барча $t \in [0,\, 1]$ учун*

$$\| x \|_B \le C \left\| L_t x \right\|_V \tag{4}$$

тенгсизлик бажарилсин. У ҳолда L_1 *оператор* B *ни* V *га устига акслантириши учун* L_0 *оператор* B *ни* V *га устига акслантириши зарур ва етарлидир.*

Исбот. Бирор $s \in [0,1]$ учун L_s оператор устига акслантириш бўлсин. (4) га кўра L_s оператор B фазони V фазога ўзаро бир қийматли акслантиради. Шунга кўра, $L_s^{-1} : V \to B$ тескари оператор мавжуд. Барча $t \in [0, 1]$ ва $y \in V$ учун $L_t x = y$ тенглама $L_s x = y + (L_s - L_t)x = = y + (t-s)L_0 x - (t-s)L_1 x$ тенгламага эквивалиент бўлиб, бу тенглама ўз навбатида $x = L_s^{-1} y + (t-s)L_s^{-1}(L_0 - L_1)x$ тенгламага эквивалиент бўлади. Агар $\left| s - t \right| < \delta = \left[C\left(\| L_0 \| + \| L_1 \| \right) \right]^{-1}$ бўлса, B фазони ўзига акслантирувчи $Tx = L_s^{-1} y + (t-s)L_s^{-1}(L_0 - L_1)x$ формула билан берилган T акслантириш қисқартириб акслантиришдан иборат бўлади. Шунга кўра, $\left| s - t \right| < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи $t \in [0, 1]$ учун L_t акслантириш V фазонинг устига акслантиради. Агар бирор $t \in [0, 1]$ қиймат учун, масалан $t = 0$ ёки $t = 1$ учун, V фазонинг устига акслантириш ўринли бўлса, у ҳолда $[0, 1]$ оралиқни узунлиги δ дан кичик бўлган оралиқчаларга бўлиб, L_t акслантириш барча $t \in [0, 1]$ учун V фазонинг устига акслантирувчи эканлигини ҳосил қиламиз. Теорема исбот бўлди.

Аввало Дирихле масаласини етарлича силлиқ соҳа ва етарлича силлиқ чегаравий шартлар учун қараймиз. Бу ҳолда Пуассон тенгламаси ва $c(x) \le 0$ учун $Lu = f$ тенгламанинг ечилиш масаласи қуйидагича бир–бири билан боғланган бўлади.

Теорема. $\Omega \subset R^n$ *соҳа* $C^{2,\alpha}$ *синфга қарашли ва* $L-$*оператор* Ω *соҳада қатъий эллиптик бўлиб, коэффициентлари* $C^{\alpha}(\overline{\Omega})$ *синфдан, ҳамда* $c(x) \le 0$ *бўлсин. У ҳолда агар Пуассон тенгламаси учун Дирихле масаласи*

$$\Delta u(x) = f(x), \ \forall x \in \Omega$$

$$u\big|_{x \in \partial\Omega} = \varphi(x)$$

ихтиёрий $f(x) \in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$ *ва ихтиёрий* $\varphi(x) \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ *функция учун* $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ *синфдан ечимга эга бўлса,*

$$Lu(x) = f(x), \ \forall x \in \Omega$$

$$u\big|_{x \in \partial\Omega} = \varphi(x)$$

масала ҳам барча шу каби $f(x)$ *ва* $\varphi(x)$ *функциялар учун* $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ *синфдан ягона ечимга эга бўлади.*

Исбот. Теорема шартига кўра $L-$операторнинг коэффициентлари

$$c_0 |\xi|^2 \le \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j, \ \forall x \in \Omega, \ \xi \in R^n$$

$$\|a_{ij}\|_{0,\alpha} \le C_1, \ \|b_i\|_{0,\alpha} \le C_1, \ \|c\|_{0,\alpha} \le C_1 \qquad (5)$$

шартларни қаноатлантирсин, бунда c_0, c_1- эса мусбат ўзгармаслардир. (10.3) масала

$$Lv(x) = f(x) - L\varphi(x) = f_1(x), \quad \forall x \in \Omega$$

$$v\big|_{x \in \partial\Omega} = 0.$$

масалага $v(x) = u(x) - \varphi(x)$ алмаштириш ёрдамида эквивалиент бўлганлиги учун чегаравий шарт ноль бўлган ҳол билан чекланамиз.

$$L_t u = t\,Lu + (1-t)\Delta u = f, \ 0 \le t \le 1 \qquad (6)$$

тенгламалар оиласини қараймиз. Бунда $L_0 = \Delta, \quad L_1 = L$ бўлиб, $L_t -$ операторнинг коэффициентлари (5) шартларни

$c_t = \min\left(1,\ c_0\right)$, $C_t = \max\left(1,\ C_1\right)$ ўзгармаслар билан қаноатлантиради. L_t операторни $B_1 = \left\{ u(x) \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) : u(x) = 0,\, x \in \partial\Omega \right\}$ Банах фазосини $B_2 = C^{\alpha}(\overline{\Omega})$ Банах фазосига акслантирувчи чизиқли чегараланган оператор деб қараш мумкин.

$$L_t u(x) = f(x),\ \forall x \in \Omega$$

$$u\big|_{x\in\partial\Omega} = 0$$

Дирихле масаласининг барча $f(x) \in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$ функция учун бир қийматли ечилиши масаласи L_t акслантиришнинг $C^{\alpha}(\overline{\Omega})$ фазо устига ўзаро бир қийматли акслантиришига эквивалентдир. Бу масала ечимини u_t орқали белгилаймиз. (3) масала ечими учун ҳосил қилинадиган

$$\sup_{x\in\Omega}\left|u(x)\right| \le \sup_{x\in\partial\Omega}\left|u(x)\right| + C\sup_{x\in\Omega}\frac{\left|f(x)\right|}{c_0}$$

тенгсизликдан фойдаланиб,

$$\left\| u_t(x) \right\|_0 \le C \cdot \sup_{x\in\Omega}\left| f(x) \right| \le C\left\| f(x) \right\|_{0,\alpha}$$

баҳолашни ҳосил қиламиз, бунда C ўзгармас фақат c_0, C_1 га ва Ω соҳа диаметрига боғлиқ. Шунга кўра

$$\left\| u \right\|_{2,\alpha,\Omega} \le C\left(\left\| u \right\|_{0,\Omega} + \left\| \varphi \right\|_{2,\alpha,\Omega} + \left\| f \right\|_{2,\alpha,\Omega} \right)$$

тенгсизликдан фойдаланиб

$$\left\| u_t \right\|_{2,\alpha} \le C\left\| f \right\|_{0,\alpha} \tag{7}$$

тенгсизлик келиб чиқади, яъни

$$\left\| u(x) \right\|_{B_1} \le C\left\| L_t u(x) \right\|_{B_2}$$

бунда C ўзгармас t га боғлиқ эмас. Шартга кўра, $L_0 = \Delta$ оператор B_1 фазони B_2 фазо устига акслантиргани учун параметр бўйича давом эттириш усулини қўлласак, юқоридаги теорема исбот бўлади.

Юқоридаги теоремада Пуассон тенгламаси учун Дирихле масаласининг $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ фазода ечилиш шартида Ω соҳа ва чегаравий шартлардаги функция $C^{2,\alpha}$ синфга қарашли деб олинди. Ҳақиқатда эса бу шартни камайтириш мумкин. Олдинги параграфларда келтирилган Перрон усулини $L-$қатъий эллиптик операторларга умумлаштириш йўли билан қуйидаги теоремани ҳосил қиламиз.

Теорема. *L оператор чегараланган Ω соҳада қатъий эллиптик оператор бўлиб, $c(x) \le 0$ ва $f(x)$ ҳамда L операторнинг коэффициентлари чегараланган ва $C^{\alpha}(\Omega)$ синфга қарашли бўлсин. Бундан ташқари Ω соҳанинг ихтиёрий чегара нуқтаси ташқи сфера шартини қаноатлантирсин. У ҳолда, агар $\varphi(x)$ функция $\partial\Omega$ чегарада узлуксиз бўлса,*

$$Lu(x) = f(x), \ \forall x \in \Omega$$

$$u\big|_{x\in\partial\Omega} = \varphi(x)$$

Дирихле масаласи $C^{0}(\overline{\Omega}) \cap C^{2,\alpha}(\Omega)$ синфга қарашли ягона $u(x)$ ечимга эга бўлади.

Дирихле масаласи ечимининг глобал регулярлиги ҳақидаги теорема ҳам ўринлидир:

Теорема. *L оператор $\Omega-$чегараланган соҳада қатъий эллиптик бўлиб, $c(x) \le 0$ ва $f(x)$ функция ҳамда L операторнинг коэффициентлари $C^{\alpha}(\overline{\Omega})$ синфга қарашли бўлсин. Ω соҳа $C^{2,\alpha}$ синфга қарашли ва $\varphi(x) \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ функция бўлсин. У ҳолда*

$$Lu(x) = f(x), \ \forall x \in \Omega$$

$$u\big|_{x\in\partial\Omega} = \varphi(x)$$

Дирихле масаласи $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ синфга қарашли ягона ечимга эга бўлади.

13 – МАЪРУЗА
ЛАПЛАС ТЕНГЛАМАСИ УЧУН ҲАЛҚАДА ДИРИХЛЕ МАСАЛАСИНИ ЕЧИШ.

Марказлари координата бошида радиуслари R_1 ва R_2 бўлган L_1 ва L_2 концентрик айланалар билан чегараланган соҳада $\Delta u = 0$ Лаплас тенгламаси учун Дирихле масаласини ечиш талаб қилинган бўлсин, яъни

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad R_1^2 < x^2 + y^2 < R_2^2 \\ u\big|_{L_1} = f_1, \qquad u\big|_{L_2} = f_2 \,. \end{cases}$$

Қутб координаталар системаси (ρ, φ) га ўтиш орқали Дирихле масаласи қуйидаги кўринишга келади:

$$\begin{cases} \rho^2 u_{\rho\rho} + \rho u_\rho + u_{\varphi\varphi} = 0, \quad R_1 < \rho < R_2, \quad 0 \le \varphi < 2\pi, \\ u(R_1, \varphi) = f_1(\varphi) \\ u(R_2, \varphi) = f_2(\varphi), \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi \,. \end{cases} \tag{1}$$

Бундан ташқари, бу ердаги $f_1(\varphi)$ ва $f_2(\varphi)$ чегаравий функцияларни 2π даврли даврий функциялар деб ҳисоблаймиз.

Масалани ечиш учун Фурье методини қўллаймиз. Ечимни $u(\rho, \varphi) = R(\rho)\Phi(\varphi)$ кўринишда қидирамиз. Ушбу $u(\rho, \varphi) = R(\rho)\Phi(\varphi)$ ифодани (11.1) тенгламага қўйиб

$$\Phi\rho^2 R'' + \Phi\rho R' + R\Phi'' = 0$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Охирги тенгликнинг ҳар иккала қисмини $R\Phi$ га бўлиб, натижада

$$\frac{\rho^2 R'' + \rho R'}{R} = -\frac{\Phi''}{\Phi} \tag{2}$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Одатда бу тенгламада ўзгарувчилари ажралган дейилади, чунки тенгламанинг чап томони фақат ρ га боғлиқ, ўнг томони эса фақат φ га боғлиқ. Шунингдек, ρ ва φ ўзгарувчиларнинг бир–бирига боғлиқ бўлмаганлигидан, (2) тенгламанинг ҳар иккала қисми ўзгармас бўлиши керак. Мазкур ўзгармасни λ деб белгилаймиз. У ҳолда

$$\frac{\rho^2 R''+\rho R'}{R}=-\frac{\Phi''}{\Phi}=\lambda \tag{3}$$

тенгликка эга бўламиз. Маълумки, φ бурчакнинг 2π бирликка ошиши натижасида $u(\rho,\varphi)$ функциянинг қиймати ўз ҳолатига қайтади, яъни $u(\rho,\varphi)=u(\rho,\varphi+2\pi)$. Бундан эса $R(\rho)\Phi(\varphi)=R(\rho)\Phi(\varphi+2\pi)$ эканлиги келиб чиқади. Демак, $\Phi(\varphi)=\Phi(\varphi+2\pi)$ бўлиб, $\Phi(\varphi)$ функция 2π даврли бўлган даврий функция экан. $\Phi''+\lambda\Phi=0$ тенгламадан $\Phi(\varphi)=A\cos(\sqrt{\lambda}\varphi)+B\sin(\sqrt{\lambda}\varphi)$ (A ва B – ихтиёрий ўзгармаслар) тенглик келиб чиқади, шунингдек $\Phi(\varphi)$ функциянинг даврий функция эканлигидан $\lambda=n^2$ тенглик бажарилади, бунда $n\ge 0-$ бутун сон.

Ҳақиқатан ҳам,

$$A\cos(\sqrt{\lambda}\varphi)+B\sin(\sqrt{\lambda}\varphi)=$$

$$=A\cos[\sqrt{\lambda(\varphi+2\pi)}]+B\sin[\sqrt{\lambda(\varphi+2\pi)}]$$

(белгилаш: $\sin\alpha=\dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$, $\cos\alpha=\dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$) тенгликдан $\sin(\alpha+\sqrt{\lambda}\varphi)=\sin(\alpha+\sqrt{\lambda}\varphi+2\pi\sqrt{\lambda})$ эканлиги келиб чиқади, демак $\sin(\pi\sqrt{\lambda})\cos(\alpha+\sqrt{\lambda}\varphi+\pi\sqrt{\lambda})=0$, бундан $\lambda=n^2$ эканлигини топамиз, бунда $n\ge 0-$ бутун сон. Энди (3) тенгламадан

$$\rho^2 R''+\rho R'-n^2 R=0 \tag{4}$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Агар $n\ne 0$ бўлса, у ҳолда ушбу тенгламанинг ечимини $R(\rho)=\rho^{\mu}$ кўринишда излаймиз. Бу ифодани (4) тенгламага қўямиз ва ρ^{μ} га қисқартириб

$$\mu^2=n^2,\ \text{ёки}\ \mu=\pm n \quad (n>0)$$

эканлигини ҳосил қиламиз.

$n = 0$ бўлганда (4) тенгламанинг ечими 1 ва $\ln\rho$ дан иборат бўлади. Шундай қилиб, биз дастлабки хусусий ҳосилали дифференциал тенгламанинг ечими бўладиган чексиз сондаги функциялар

$$1, \ln\rho, \ \rho^n\cos(n\varphi), \rho^n\sin(n\varphi), \rho^{-n}\cos(n\varphi), \rho^{-n}\sin(n\varphi)$$

$(n = 1, \ 2, \ ...)$ тўпламига эга бўламиз. Ушбу ечимларнинг йиғиндиси ҳам дастлабки тенгламанинг ечими бўлиб, бизнинг ҳолимизда Лаплас тенгламаси умумий ечимининг кўриниши қуйидаги кўринишда бўлади:

$$u(\rho, \varphi) = a_0 + b_0\ln\rho +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}[(a_n\rho^n + b_n\rho^{-n})\cos(n\varphi) + (c_n\rho^n + d_n\rho^{-n})\sin(n\varphi)]\,. \quad (5)$$

Энди фақат (11.5) йиғинди $u(R_1, \varphi) = f_1(\varphi)$, $u(R_2, \varphi) = f_2(\varphi)$ чегаравий шартларни қаноатлантирадиган қилиб барча коэффициентларни аниқлаш қолди. (5) формулада $\rho = R_1$ ва $\rho = R_2$ деб олиб,

$$u(R_1, \varphi) = a_0 + b_0\ln R_1 +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}[(a_nR_1{}^n + b_nR_1{}^{-n})\cos(n\varphi) + (c_nR_1{}^n + d_nR_1{}^{-n})\sin(n\varphi)]\,,$$

$$u(R_2, \varphi) = a_0 + b_0\ln R_2 +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}[(a_nR_2{}^n + b_nR_2{}^{-n})\cos(n\varphi) + (c_nR_2{}^n + d_nR_2{}^{-n})\sin(n\varphi)]$$

тенгликларни ҳосил қиламиз.

Тригонометрик қаторларда Фурье коэффициентларини аниқлаш формуласидан фойдаланиб, қуйидаги тенгламалар системасини ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} a_0 + b_0 \ln R_1 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f_1(s)ds, \\ a_0 + b_0 \ln R_2 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f_2(s)ds \end{cases} \qquad (6_1)$$

(a_0 ва b_0 га нисбатан ечилади);

$$\begin{cases} a_n R_1^n + b_n R_1^{-n} = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f_1(s)\cos(ns)ds, \\ a_n R_2^n + b_n R_2^{-n} = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f_2(s)\cos(ns)ds \end{cases} \qquad (6_2)$$

(a_n ва b_n га нисбатан ечилади);

$$\begin{cases} c_n R_1^n + d_n R_1^{-n} = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f_1(s)\sin(ns)ds, \\ c_n R_2^n + d_n R_2^{-n} = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f_2(s)\sin(ns)ds \end{cases} \qquad (6_3)$$

(c_n ва d_n га нисбатан ечилади).

Мазкур тенгламалар системасидан барча номаълум a_0, b_0, a_n, b_n, c_n, d_n коэффициентлар топилади. Шунга кўра (1) масала тўлиқ ечилади. Ечим (5) ёйилма кўринишида ёзилади, ёйилмадаги коэффициентлар эса (6_1), (6_2), (6_3) формулалар ёрдамида аниқланади.

Ҳалқада Дирихле масаласини ечишга доир мисоллар

1 – мисол. Агар потенциал халқанинг ички айланасида ноль бўлиб, ташқи айланасида $\cos\varphi$ га тенг бўлса, халқада потенциални аниқланг.

Ечиш. Халқада $u(\rho,\ \varphi)$ потенциалнинг таърифидан келиб чиқиб, қуйидаги масалани ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 1 < \rho < 2, \quad 0 \le \varphi < 2\pi, \\ u(1, \varphi) = 0, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \\ u(2, \varphi) = \cos\varphi, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi. \end{cases}$$

Умуман олганда мисолни ечишда (6_1), (6_2), (6_3) формулалардаги барча интегралларни ҳисоблаймиз ва мос тенгламалар системасини ечиб, a_0, b_0, a_n, b_n, c_n, d_n коэффициентларни аниқлаймиз. Бу ҳолда шундай хусусий ечимларни аниқлаш кeракки, шу хусусий ечимларнинг чизиқли комбинацияси чегаравий шартларни қаноатлантирсин. Ушбу мисолда шундай хусусиятни $u(\rho,\ \varphi) = a_1 \rho \cos\varphi + b_1 \rho^{-1} \cos\varphi$ чизиқли комбинация бажаради. Чегаравий шартлардан қуйидаги тенгламалар системасини ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} a_1 + b_1 = 0, \\ 2a_1 + \dfrac{b_1}{2} = 1, \end{cases}$$

бу системани ечиб, $a_1 = \dfrac{2}{3}$, $b_1 = -\dfrac{2}{3}$ эканлигини топамиз. Шундай қилиб, ечим $u(\rho,\ \varphi) = \dfrac{2}{3}(\rho - \dfrac{1}{\rho}) \cos\varphi$ дан иборат.

2 – мисол. Ҳалқа чегараларида ўзгармас потенциали бўлган

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 1 < \rho < 2, \quad 0 \le \varphi < 2\pi, \\ u(1, \varphi) = 2, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \\ u(2, \varphi) = 1, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \end{cases}$$

масалани ечинг.

Ечиш. Бу ҳолда ечимни φ га боғлиқ бўлмаган ҳолда қидирамиз, яъни ечимни $u(\rho) = a_0 + b_0 \ln\rho$ кўринишда излаймиз. Ушбу функцияни чегаравий шартларга қўйиб,

$$\begin{cases} a_0 + b_0 \ln 1 = 2 \\ a_0 + b_0 \ln 2 = 1 \end{cases}$$

тенгламалар системасини ҳосил қиламиз ва тенгламалар системасини ечиб, $a_0 = 2,\; b_0 = -\log_2 e$ эканлигини аниқлаймиз. Шунга кўра,

$$u(\rho) = 2 - \frac{\ln\rho}{\ln 2}$$

функция ечим бўлади.

3 – мисол. Қуйидаги Дирихле масаласини ечинг:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 1 < \rho < 2, \quad 0 \le \varphi < 2\pi, \\ u(1, \varphi) = \cos\varphi, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \\ u(2, \varphi) = \sin\varphi, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi. \end{cases}$$

Ечиш. Текшириб кўриш мумкинки, a_0, b_0, a_n, b_n, c_n, d_n $(n > 1)$ коэффициентларнинг барчаси нолга тенг бўлиб, a_1, b_1, c_1, d_1 коэффициентлар эса,

$$\begin{cases} a_1 + b_1 = 1 \\ 2a_1 + \dfrac{b_1}{2} = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} c_1 + d_1 = 0 \\ 2c_1 + \dfrac{d_1}{2} = 1, \end{cases}$$

тенгламалар системаси орқали аниқланади. Бу тенгламалар системасини ечиб,

$$a_1 = -\frac{1}{3}, \quad b_1 = \frac{4}{3}, \quad c_1 = \frac{2}{3}, \quad d_1 = -\frac{2}{3}$$

эканлигини топамиз. Шундай қилиб,

$$u(\rho, \varphi) = \left(-\frac{1}{3}\rho + \frac{4}{3\rho} \right)\cos\varphi + \frac{2}{3}\left(\rho - \frac{1}{\rho} \right)\sin\varphi$$

функция масаланинг ечими бўлади.

Лаплас тенгламаси учун Дирихле масаласи чегараланган соҳаларда ягона ечимга эга бўлганлиги учун, 1 – 3 мисолларда кўрсатилган ечимлардан ташқари, бошқа ечимларга эга бўлиши мумкин эмас.

Ички ва ташқи Дирихле масалалари

Дирихле масаласида иккита асосий ҳолларни қараймиз. Бу ҳоллардан бири ҳалқа доира бўлган ҳол бўлса, иккинчиси доиранинг ташқарисидир. Ички Дирихле масаласи $(R_1 = 0,\ R_2 = R)$

$$\begin{cases} \rho^2 u_{\rho\rho} + \rho u_\rho + u_{\varphi\varphi} = 0, & 0 \le \rho < R, \quad 0 \le \varphi < 2\pi, \\ u(R,\ \varphi) = f(\varphi), & 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$$

кўринишда бўлиб, масаланинг ечилиши халқада Дирихле масаласини ечиш сингари бўлиб, бунда, ρ нинг нолга интилганида чегараланмаган бўладиган

$\ln \rho$, $\rho^{-n}\cos(n\varphi)$, $\rho^{-n}\sin(n\varphi)$, $n = 1,\ 2, \ldots$ “хусусий” ечимлари олинмайди. Шунга кўра, ички Дирихле масаласининг ечими

$$u(\rho,\ \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{R}\right)^n [a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi)]$$

кўринишдаги функция бўлиб, бунда a_n ва b_n коэффициентлар

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)d\varphi,\ a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\cos(n\varphi)d\varphi \ \ (n > 0),$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\sin(n\varphi)d\varphi \tag{7}$$

формулалар орқали аниқланади.

Бошқача сўз билан айтганда, $f(\varphi)$ функцияни Фурье қаторига ёямиз:

$$f(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi)],$$

кейин қаторнинг ҳар бир ҳадини $\left(\frac{\rho}{R}\right)^n$ коэффициентга кўпайтирамиз. Масалан,

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 \le \rho < 1, \quad 0 \le \varphi < 2\pi, \\ u(1,\ \varphi) = \cos^2 \varphi, & 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$$

ички Дирихле масаласининг ечими

$u(\rho,\ \varphi)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\rho^2\cos(2\varphi)$ функциядан иборат.

$$\begin{cases}\rho^2 u_{\rho\rho}+\rho u_\rho+u_{\varphi\varphi}=0, \quad R<\rho<\infty, \quad 0\le\varphi<2\pi, \\ u(R,\ \varphi)=f(\varphi), \ 0\le\varphi\le 2\pi\end{cases}$$

ташқи Дирихле масаласи $(R_1=R,\ R_2=\infty)$ олдинги масала сингари ечилиб, бунда, ρ нинг чексизликка интилганида чегараланмаган бўладиган $\ln\rho$, $\rho^n\cos(n\varphi)$, $\rho^n\sin(n\varphi)$, $n=1,\ 2,\dots$ "хусусий" ечимлари олинмайди. Шунга кўра, ташқи Дирихле масаласининг ечими

$$u(\rho,\ \varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\rho}{R}\right)^{-n}[a_n\cos(n\varphi)+b_n\sin(n\varphi)]$$

кўринишдаги функциядан иборат бўлиб, a_n ва b_n коэффициентлар (11.7) формула орқали топилади. Масалан,

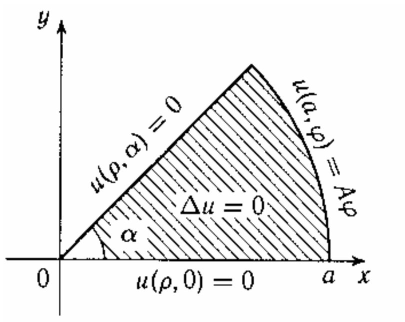
$$\begin{cases}\Delta u=0, \ 1<\rho<+\infty, \ 0\le\varphi<2\pi, \\ u(1,\ \varphi)=\sin^3\varphi, \quad 0\le\varphi\le 2\pi\end{cases}$$

ташқи Дирихле масаласининг ечими

$u(\rho,\ \varphi)=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{\rho}\sin\varphi-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\rho^3}\sin(3\varphi)$ функциядан иборат.

Шуни таъкидлаш керакки, икки ўлчовли чегараланмаган соҳада Лаплас тенгламаси учун Дирихле масаласининг чегараланган ечими ягонадир.

4 – мисол. Бир жинсли $0\le\rho\le a,\ 0\le\varphi\le\alpha$ секторда $u(\rho,0)=u(\rho,\ \alpha)=0,\ \ u(a,\ \varphi)=A\varphi\ (A=const)$ чегаравий шартларни қаноатлантирадиган стационар тақсимланган температурани топинг.



Ечиш. Мисолдаги стационар тақсимланган температурани топиш қуйидаги Дирихле масаласининг ечими бўлади:

$$\begin{cases} \rho^2 u_{\rho\rho} + \rho u_\rho + u_{\varphi\varphi} = 0, \quad 0 < \rho < a, \quad 0 < \varphi < \alpha < 2\pi, \\ u(\rho,\ 0) = u(\rho,\ \alpha),\ \ 0 \le \rho \le a, \\ u(a,\varphi) = A\varphi, \quad 0 \le \varphi \le \alpha. \end{cases}$$

Мисолни ечишда Фурье методидан фойдаланамиз. $u(\rho,\ \varphi) = R(\rho)\Phi(\varphi)$ деб олиб, ўзгарувчиларни ажратиш йўли билан, иккита оддий дифференциал тенглама ҳосил қиламиз:

$$\rho^2 R'' + \rho R' - \lambda R = 0, \quad \Phi'' + \lambda\Phi = 0. \qquad (8)$$

$0 = u(\rho,\ 0) = R(\rho)\Phi(0)$ ва $0 = u(\rho,\ \alpha) = R(\rho)\Phi(\alpha)$ шартлардан $\Phi(0) = \Phi(\alpha) = 0$ бўлиши келиб чиқади. Натижада

$$\begin{cases} \Phi'' + \lambda\Phi = 0,\ 0 < \varphi < \alpha \\ \Phi(0) = \Phi(\alpha) = 0 \end{cases}$$

Штурм–Лиувилль масаласини ечиб, $\lambda_n = \left(\dfrac{n\pi}{\alpha}\right)^2$ хос қиймат ва $\Phi_n(\varphi) = \sin\left(\dfrac{n\pi}{\alpha}\varphi\right)$, $n = 1,\ 2,\ ...$ хос функцияларга эга бўламиз. $R(\rho)$ функцияни $R(\rho) = \rho^\mu$ кўринишда қидирамиз. Бу ифодани (11.8) тенгламага қўйиб, қуйидагини топамиз:

$$\mu(\mu - 1) + \mu - \left(\frac{n\pi}{\alpha}\right)^2 = 0, \text{ бундан } \quad \mu = \pm\frac{n\pi}{\alpha}.$$

$R(\rho)$ функциянинг (масала маъносига кўра) чегараланганлигини эътиборга олиб, $R_n(\rho)=\rho^{\frac{n\pi}{\alpha}}$ эканлигини топамиз. Масаланинг хусусий ечимлари $u_n(\rho,\ \varphi)=\rho^{\frac{n\pi}{\alpha}}\sin\left(\frac{n\pi}{\alpha}\varphi\right),\quad n=1,\ 2,...$ кўринишида бўлиб, бу ечимлар орқали масала ечими

$$u(\rho,\ \varphi)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\rho^{\frac{n\pi}{\alpha}}\sin\left(\frac{n\pi}{\alpha}\varphi\right)$$

функция шаклида ҳосил бўлади. Ечимдаги $c_n\ (n=1,2,...)$ ўзгармас коэффициентларни $u(a,\varphi)=A\varphi$ шартдан фойдаланиб аниқлаймиз.

$$u(a,\ \varphi)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n a^{\frac{n\pi}{\alpha}}\sin\left(\frac{n\pi}{\alpha}\varphi\right)$$

тенгликка эгамиз.

Шундай қилиб,

$$c_n a^{\frac{n\pi}{\alpha}}=\frac{2}{\alpha}\int_0^{\alpha}A\varphi\sin\left(\frac{n\pi}{\alpha}\varphi\right)d\varphi \qquad \text{бўлиб,}$$

бундан

$$c_n=\frac{2A}{\alpha a^{\frac{n\pi}{\alpha}}}\int_0^{\alpha}\varphi\sin\left(\frac{n\pi}{\alpha}\varphi\right)d\varphi=(-1)^{n+1}\frac{2\alpha A}{n\pi a^{\frac{n\pi}{\alpha}}}\ .$$

Демак, масаланинг ечими

$$u(\rho,\ \varphi)=\frac{2\alpha A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{\rho}{a}\right)^{\frac{n\pi}{\alpha}}\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{\alpha}\varphi\right)}{n}$$

кўринишда ёзилади.

Шуни таъкидлаш керакки, масаланинг ечими $\rho = a$, $\varphi = \alpha$ чегаравий нуқтада чегаравий қийматнинг келишувчан эмаслиги туфайли, махсусликка эга бўлади.

Доира учун Пуассон интеграли. Комплекс шаклда ёзиш. Чегаравий шарт $R(\sin\varphi,\ \cos\varphi)$ кўринишдаги рационал функция бўлган ҳолда Дирихле масаласининг ечими

Маълумки, доира учун ички ва ташқи Дирихле масалаларининг ечимини интеграл кўринишда тасвирлаш мумкин (Пуассон интеграли):

$$u(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 - 2\rho R\cos(\varphi - \alpha) + \rho^2} f(\alpha)\,d\alpha \quad (\rho < R),$$

$$u(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\rho^2 - R^2}{\rho^2 - 2\rho R\cos(\varphi - \alpha) + R^2} f(\alpha)\,d\alpha \quad (\rho > R).$$

Бу формулалар умумий суперпозиция методининг натижаси эканлигини кўрсатамиз. Аниқлик учун ички масалани қараймиз. Ташқи масала ҳам шунга ўхшаш ёзилади.

$$u(\rho,\ \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\rho}{R}\right)^n [a_n\cos(n\varphi) + b_n\sin(n\varphi)]$$

формулада Фурье коэффициентлари ўрнига қўйиб,

$$u(\rho,\ \varphi) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\cdot$$

$$\cdot\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{R}\right)^n \left(a_n\cos(n\varphi)\cos(n\alpha) + \sin(n\varphi)\sin(n\alpha)\right)\right]d\alpha =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{R}\right)^n \cos(n(\varphi - \alpha))\right]d\alpha$$

тенгликни ҳосил қиламиз.

$\cos(n(\varphi-\alpha)) = \dfrac{e^{in(\varphi-\alpha)}+e^{-in(\varphi-\alpha)}}{2}$, $\quad q=\dfrac{\rho}{R}<1$ бўлишини ҳисобга олиб, ҳамда чексиз камаювчи геометрик прогрессиянинг йиғиндисини топиш формуласига кўра,

$$\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} q^n \cos(n(\varphi-\alpha)) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} q^n \left[e^{in(\varphi-\alpha)}+e^{-in(\varphi-\alpha)}\right] =$$

$$=\frac{1}{2}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(qe^{i(\varphi-\alpha)}\right)^n+\left(qe^{-i(\varphi-\alpha)}\right)^n\right]\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[1+\frac{qe^{i(\varphi-\alpha)}}{1-qe^{i(\varphi-\alpha)}}+\frac{qe^{-i(\varphi-\alpha)}}{1-qe^{-i(\varphi-\alpha)}}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-q^2}{1-2q\cos(\varphi-\alpha)+q^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{R^2-\rho^2}{R^2-2R\rho\cos(\varphi-\alpha)+\rho^2}.$$

Шунга кўра,

$$u(\rho,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-\rho^2}{R^2-2R\rho\cos(\varphi-\alpha)+\rho^2}f(\alpha)\,d\alpha \quad (\rho<R).$$

Пуассон формуласини бошқача (комплекс шаклдаги) кўринишга келтирамиз. Маълумки,

$$\frac{R^2-\rho^2}{R^2-2R\rho\cos(\varphi-\alpha)+\rho^2}=\frac{R^2-|z|^2}{\left|\mathrm{R}\,\mathrm{e}^{i\alpha}-z\right|^2}=\mathrm{Re}\frac{R\,\mathrm{e}^{i\alpha}+z}{R\,\mathrm{e}^{i\alpha}-z},$$

чунки

$$\mathrm{Re}\frac{R\,\mathrm{e}^{i\alpha}+z}{R\,\mathrm{e}^{i\alpha}-z}=\mathrm{Re}\frac{(\mathrm{R}\,\mathrm{e}^{i\alpha}+\rho e^{i\varphi})(\overline{\mathrm{R}\,\mathrm{e}^{i\alpha}}-\overline{\rho e^{i\varphi}})}{(\mathrm{R}\,\mathrm{e}^{i\alpha}-\rho e^{i\varphi})(\overline{\mathrm{R}\,\mathrm{e}^{i\alpha}}-\overline{\rho e^{i\varphi}})}=$$

$$= \mathrm{Re}\frac{R^2 - |z|^2 + \rho R\left[e^{i(\varphi-\alpha)} - e^{i(\alpha-\varphi)}\right]}{\left|Re^{i\alpha} - z\right|^2} = \frac{R^2 - |z|^2}{\left|Re^{i\alpha} - z\right|^2}.$$

Шунинг учун Пуассон интеграли

$$u(z) = \mathrm{Re}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\frac{Re^{i\alpha} + z}{Re^{i\alpha} - z}d\alpha$$

кўринишда ёзилади. Ушбу интегралда $\zeta = Re^{i\alpha}$ деб белгилаш киритсак, унда $d\alpha = \frac{d\zeta}{i\zeta}$ бўлиб, натижада Пуассон интегралининг охирги комплекс кўринишга келган ҳолдаги формуласини ҳосил қиламиз:

$$u(z) = \mathrm{Re}\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=R} f(\zeta)\frac{\zeta + z}{\zeta - z}\frac{d\zeta}{\zeta}, \quad |z| < R. \qquad (9)$$

Агар $f(\zeta)$ - чегаравий функция $\sin\varphi$ ва $\cos\varphi$ га нисбатан рационал функция бўлса, у ҳолда (9) формуладаги интеграл қолдиқлар назарияси ёрдамида ҳисобланади.

5 - м**исол.** Қуйидаги Дирихле масаласини ечинг:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad |z| < 2, \\ u\big|_{|z|=2} = \dfrac{2\sin\varphi}{5 + 3\cos\varphi}. \end{cases}$$

Ечиш. Дирихле масаласини ечишда (9) формуладан фойдаланамиз. $\zeta = 2e^{i\alpha}$ деб олайлик, у ҳолда $\sin\alpha = \frac{1}{2i}\left(\frac{\zeta}{2} - \frac{2}{\zeta}\right)$, $\cos\alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{\zeta}{2} + \frac{2}{\zeta}\right)$ бўлиб, чегаравий функция

$$u(\zeta)=\frac{2\sin\alpha}{5+3\cos\alpha}=\frac{2\cdot\frac{1}{2i}\cdot\frac{\zeta^2-4}{2\zeta}}{5+\frac{3}{2}\left(\frac{\zeta}{2}+\frac{2}{\zeta}\right)}=$$

$$=\frac{2}{i}\cdot\frac{\zeta^2-4}{3\zeta^2+20\zeta+12}=\frac{2}{i}\cdot\frac{\zeta^2-4}{3(\zeta+6)\left(\zeta+\frac{2}{3}\right)}$$

бўлади. Қуйидаги интегрални ҳисоблаймиз:

$$I=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=2}\frac{2(\zeta^2-4)(\zeta+z)}{i\cdot 3(\zeta+6)\left(\zeta+\frac{2}{3}\right)(\zeta-z)\zeta}d\zeta\,.$$

Бу интегралда $|z|=2$ айланадаги йўналиш соат стрелкасига қарши. Интеграл остидаги $F(\zeta)$ функция $|\xi|>2$ соҳада $\zeta=-6$ бўлган битта чекли махсус нуқтага эга, бу махсус нуқта биринчи тартибли қутб махсус нуқта ва $\zeta=\infty$ нуқта эса бартараф қилиш мумкин бўлган махсус нуқтадир. Кенгайтирилган комплекс текислик учун қолдиқлар ҳақидаги Коши теоремасига кўра:

$$I=-\operatorname*{res}_{\zeta=-6}F(\zeta)-\operatorname*{res}_{\zeta=\infty}F(\zeta)$$

муносабат ўринли бўлади.

Дастлаб, $\zeta=-6$ нуқтада қолдиқни ҳисоблаймиз:

$$\operatorname*{res}_{\zeta=-6}F(\zeta)=\frac{2}{3i}\cdot\frac{32}{\left(-\frac{16}{3}\right)}\cdot\frac{z-6}{(z+6)\cdot 6}=$$

$$=-\frac{4}{i}\cdot\frac{z-6}{(z+6)\cdot 6}=\frac{2}{3i}\cdot\frac{6-z}{6+z}\ .$$

$F(\zeta)$ функцияни $\zeta=\infty$ нуқта атрофида ёямиз:

$$F(\zeta)=\frac{2}{3i}\cdot\frac{\left(1-\frac{4}{\zeta^2}\right)\left(1+\frac{z}{\zeta}\right)}{\left(1+\frac{6}{\zeta}\right)\left(1+\frac{2}{3\zeta}\right)}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{\zeta}}\cdot\frac{1}{\zeta}=\frac{2}{3i}\cdot\frac{1}{\zeta}+\dots .$$

Бундан $\underset{\zeta=\infty}{res}\ F(\zeta)=-\frac{2}{3i}$ бўлишини топамиз.

Демак,

$$I=\frac{2}{3i}\cdot\frac{z-6}{z+6}+\frac{2}{3i}=\frac{2}{3i}\cdot\frac{2z}{z+6}=\frac{4z}{3i(z+6)}=$$

$$=\frac{4}{3i}\cdot\frac{x+iy}{6+x+iy}=\frac{4}{3i}\cdot\frac{(x+iy)(6+x-iy)}{(6+x)^2+y^2},$$

бундан

$$\operatorname{Re} I=\frac{8y}{36+12x+x^2+y^2}$$

ёки

$$\operatorname{Re} I=\frac{8\rho\sin\varphi}{36+12\rho\cos\varphi+\rho^2}$$

бўлишини топамиз. Шундай қилиб, берилган Дирихле масаласининг ечими

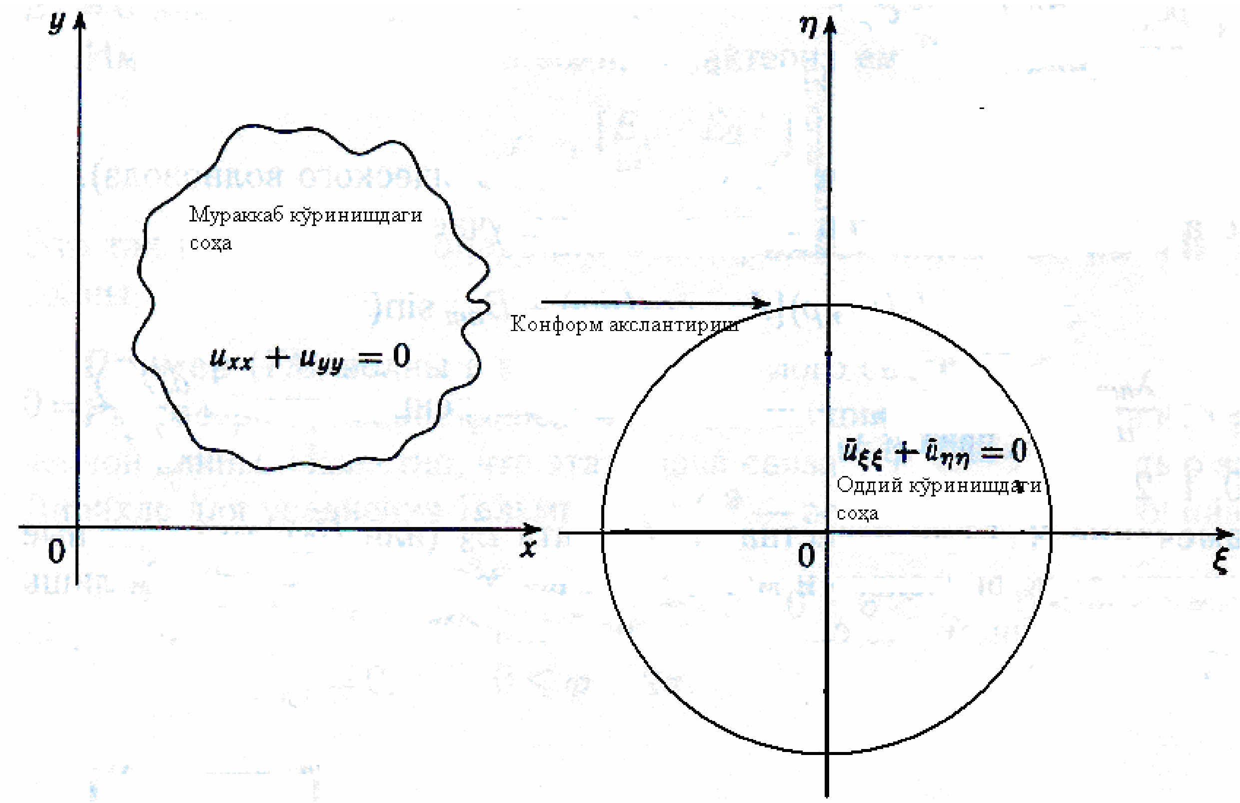
$$u(\rho,\ \varphi)=\frac{8\rho\sin\varphi}{36+12\rho\cos\varphi+\rho^2}$$

функциядан иборат бўлади.

14 – МАЪРУЗА
МУРАККАБ КЎРИНИШДАГИ СОҲАДА ЛАПЛАС ТЕНГЛАМАСИ УЧУН ДИРИХЛЕ МАСАЛАСИНИ ЕЧИШ.

Комплекс ўзгарувчили функциялар назарияси усуллари кўпгина математик масалаларни ечишда самарали қўлланилади. Хусусан, Лаплас тенгламаси учун қўйилган чегаравий масалани ечишда аналитик функцияларни қўллаш кўпгина ҳолларда ечимнинг етарлича содда усулини беради. Бунинг асосий сабаби комплекс ўзгарувчили аналитик функциялар билан икки ўзгарувчили гармоник функциялар орасидаги мавжуд боғлиқлик ва конформ акслантиришда Лаплас тенгламасининг инвариант эканлигидир.

Текисликда x ва y ўзгарувчилар бўйича мураккаб шаклдаги соҳада $u_{xx}+u_{yy}=0$ Лаплас тенгламасини қандайдир чегаравий шартлар билан ечиш талаб қилинган бўлсин. Бу чегаравий масалани $\zeta = f(z)$ конформ акслантириш натижасида ξ ва η ўзгарувчиларга боғлиқ содда соҳада $\tilde{u}_{\xi\xi}+\tilde{u}_{\eta\eta}=0$ Лаплас тенгламаси учун янги чегаравий масалани ечишга алмаштириш мумкин бўлади, бунда $z = x+iy$, $\zeta=\xi+i\eta$ бўлиб, $\zeta = f(z)$ бўлганда $\tilde{u}(\zeta)=u(z)$.



Конформ акслантиришга нисбатан Лаплас тенгламасининг инвариантлиги ҳақидаги қуйидаги теорема ўринлидир.

1 –теорема. *$z=g(\zeta)$ аналитик функция G соҳани D соҳага конформ акслантирувчи ва D соҳада $u(z)$ гармоник функция бўлсин. У ҳолда $\tilde{u}(\zeta)=u(g(\zeta))$ функция G соҳада гармоник функция бўлади.*

Исбот. $\tilde{u}(\xi,\eta)=u(x(\xi,\eta),\ y(\xi,\eta))$ функция Лаплас оператори алмаштиришини қўллаганда қандай ўзгаришини аниқлаймиз.

$$u_x=\tilde{u}_\xi\xi_x+\tilde{u}_\eta\eta_x,\quad u_y=\tilde{u}_\xi\xi_y+\tilde{u}_\eta\eta_y,$$

$$u_{xx}=\tilde{u}_{\xi\xi}\xi_x^2+\tilde{u}_{\eta\eta}\eta_x^2+2\tilde{u}_{\xi\eta}\xi_x\eta_x+\tilde{u}_\xi\xi_{xx}+\tilde{u}_\eta\eta_{xx},$$

$$u_{yy}=\tilde{u}_{\xi\xi}\xi_y^2+\tilde{u}_{\eta\eta}\eta_y^2+2\tilde{u}_{\xi\eta}\xi_y\eta_y+\tilde{u}_\xi\xi_{yy}+\tilde{u}_\eta\eta_{yy}$$

ҳосилаларни ҳисоблаймиз. Бундан

$$u_{xx}+u_{yy}=\tilde{u}_{\xi\xi}(\xi_x^2+\xi_y^2)+\tilde{u}_{\eta\eta}(\eta_x^2+\eta_y^2)+$$

$$+2\tilde{u}_{\xi\eta}(\xi_x\eta_x+\xi_y\eta_y)+\tilde{u}_\xi(\xi_{xx}+\xi_{yy})+\tilde{u}_\eta(\eta_{xx}+\eta_{yy})$$

тенгликни ҳосил қиламиз. $\xi=\xi(x,y)$ ва $\eta=\eta(x,y)$ тескари алмаштиришлар ўзаро қўшма гармоник функциялар бўлиб, улар ёрдамида $\zeta = f(z) = \xi + i\eta \quad (z = x + iy)$ аналитик бўлган тескари функцияни ҳосил қиламиз. Коши–Риман шартларига кўра,

$$\xi_x^2 + \xi_y^2 = \xi_x^2 + \eta_x^2 = \eta_y^2 + \eta_x^2 = \left|f'(z)\right|^2, \quad \xi_x\eta_x + \xi_y\eta_y = 0$$

тенгликларга эга бўламиз. Шунинг учун

$$u_{xx} + u_{yy} = (\tilde{u}_{\xi\xi} + \tilde{u}_{\eta\eta})\left|f'(z)\right|^2 \quad \text{ёки} \quad \Delta_{\xi,\eta}\tilde{u} = \frac{1}{\left|f'(z)\right|^2}\Delta_{x,y}u$$

тенглик ҳосил бўлади. Бундан эса, $u(z) = u(x, y)$ функциянинг D соҳада гармоник функция ва $\left|f'(z)\right|^2 \neq 0$ эканлигидан $\tilde{u}(\xi,\eta) = u(x(\xi,\eta),\ y(\xi,\eta))$ функциянинг ҳам гармоник функция эканлигини ҳосил қиламиз. Бу натижа конформ акслантиришлар ёрдамида Дирихле масаласини ечиш усулининг асосини ташкил этади.

Оддий соҳа (айлана, яримтекислик, тўғри тўртбурчак) учун Лаплас тенгламасининг $\tilde{u}(\xi,\ \eta)$ ечими топилгандан кейин, бу ечимга $\xi = \xi(x,\ y),\ \eta = \eta(x,\ y)$ тенгликларни қўйиб, дастлабки қидирилаётган масаланинг аввалги ўзгарувчилардаги $u(x,\ y)$ ечимни ҳосил қиламиз.

Чегараланган D соҳанинг чегараси Γ бўлиб, унда $u_0(z)$ узлуксиз функция берилган бўлсин. Лаплас тенгламаси учун классик Дирихле масаласи қуйидагича: шундай бир $u(z)$ функцияни топиш керакки, бу функция D соҳада гармоник функция бўлиб, D соҳанинг Γ чегарасигача узлуксиз ва Γ чегарада эса $u(z)$ функция $u_0(z)$ қийматни қабул қилсин, яъни

$$\Delta u = 0,\ z \in D;\ u\big|_{z\in\Gamma} = u_0(z). \qquad (1)$$

Бунда $u(z) = u(x, y),\ u_0(z) = u_0(x, y)$ - ҳақиқий қийматли функциялар, $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ - Лаплас оператори. (1) классик Дирихле масаласининг ечими мавжуд ва ягонадир.

(1) классик Дирихле масаласи билан бирга ундан умумийроқ бўлган, яъни чегараланган, чекли сондаги узлишга эга бўлган

$u_0(z)$ функция учун (1) кўринишдаги Дирихле масаласини ҳам қараймиз. Бунда D соҳада гармоник, чегараланган шундай $u(z)$ функцияни топиш талаб этиладики, бу функция учун $u(z)\big|_{\Gamma} = u_0(z)$ чегаравий шарт $u_0(z)$ функциянинг барча узлуксизлик нуқталарида ўринли бўлиб, бу нуқталарда $u(z)$ функция D соҳанинг Γ чегарасигача узлуксиздир. Ушбу масала қаралаётган пайтда D соҳа чегараланмаган соҳа бўлиши ҳам мумкин.

Ушбу кўринишдаги Дирихле масаласининг ечими ҳам мавжуд ва ягонадир.

2 – теорема. *Агар $u(z)$ функция $|z| < 1$ доирада гармоник ва $|z| \le 1$ ёпиқ доирада чегараланган бўлиб, чекли сондаги чегара нуқталаридан ташқари, доира чегарасигача узлуксиз бўлса, у ҳолда қуйидаги Пуассон формуласи ўринли бўлади:*

$$u(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\varphi-\theta)+r^2}\, u(e^{i\theta})\,d\theta, \qquad (2)$$

бунда $z = re^{i\varphi}$, $0 \le r < 1$.

3 – теорема. Агар $u(z)$ *функция* $\operatorname{Im} z > 0$ *юқори ярим текисликда гармоник ва чегараланган бўлиб,* $\operatorname{Im} z = 0$ *тўғри чизиқгача чекли сондаги нуқталардан ташқари нуқталарда узлуксиз бўлса, у ҳолда* $u(z)$ *функция учун қуйидаги кўринишдаги Пуассон формуласи ўринли бўлади:*

$$u(z) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y\,u(t)}{(t-x)^2 + y^2}\,dt, \qquad (3)$$

бунда $z = x + iy$, $y > 0$.

Шунингдек, $\dfrac{y}{(t-x)^2 + y^2} = \operatorname{Re}\dfrac{1}{i(t-z)}$ тенгликдан фойдаланиб, Пуассон формуласини қуйидагича ҳам ёзиш мумкин:

$$u(z) = \operatorname{Re}\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{u(t)}{t-z}dt. \tag{4}$$

Бу формула ёрдамида $\operatorname{Im} z > 0$ юқори ярим текисликда Лаплас тенгламаси учун Дирихле масаласи, яъни

$$\Delta u = 0, \quad y > 0; \; u\big|_{y=0} = R(x)$$

масалани ечиш мумкин, бунда $R(x)$ ҳақиқий рационал функция бўлиб, ҳақиқий ўқда қутбларга эга эмас ва $z \to \infty$ да $R(z) \to 0$. Бу масаланинг ечими (4) формулага кўра,

$$u(z) = \operatorname{Re}\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{R(t)}{t-z}dt$$

кўринишда бўлади, бунда $\operatorname{Im} z > 0$. Бу интегрални қолдиқлар назарияси ёрдамида ҳисоблаш мумкин:

$$u(z) = -2\operatorname{Re}\sum_{\operatorname{Im}\zeta_k<0}\operatorname*{res}_{\zeta=\zeta_k}\frac{R(\zeta)}{\zeta - z} \tag{5}$$

Бу ерда $R(\zeta)$ функциянинг барча қутблар бўйича қолдиқларини $\operatorname{Im}\zeta < 0$ қуйи ярим текисликдан оламиз.

1 – мисол. Қуйидаги Дирихле масаласини ечинг:

$$\Delta u = 0, \; y > 0; \quad u\big|_{y=0} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Ечиш. Қолдиқлар ёрдамида аниқланадиган (4) формуладан фойдаланиб,

$$u(z) = -2\operatorname{Re}\operatorname*{res}_{\zeta=-i}\frac{1}{(1+\zeta^2)(\zeta - z)} =$$

$$= -2\operatorname{Re}\frac{1}{2i(z+i)} = \frac{y+1}{x^2+(y+1)^2}$$

эканлигини ҳосил қиламиз.

Энди ихтиёрий бир боғламли соҳада Лаплас тенгламаси учун Дирихле масаласини қараймиз:

$$\Delta u = 0,\ z \in D;\quad u\big|_{\Gamma} = u_0(z)\,, \tag{6}$$

бунда D соҳанинг Γ чегараси биттадан кўп нуқталардан ташкил топган. Бу масаланинг ечими D соҳада конформ акслантиришни қўллаб, доирага ёки юқори ярим текисликка конформ акслантирилади, ҳамда Пуассон формуласини қўллаб топилади. $\zeta = h(z)$ функция D соҳани $\operatorname{Im}\zeta > 0$ юқори ярим текисликка конформ акслантирсин, $z = g(\zeta)$ функция эса тескари акслантириш бўлсин. У ҳолда $\tilde{u}(\zeta) = u(g(\zeta))$ функция $\operatorname{Im}\zeta > 0$ юқори ярим текисликда гармоник функция бўлиб, $\tilde{u}\big|_{\eta=0} = u_0(z)\big|_{z\in\Gamma} = \tilde{u}_0(\xi)$, бунда $\zeta = \xi + i\eta$, чегаравий шартни қаноатлантиради. Шунингдек, (12.4) формулага асосан

$$\tilde{u}(\zeta) = \operatorname{Re}\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\tilde{u}_0(t)}{t-\zeta}\,dt$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Охирги тенгликда $\zeta = h(z)$, $t = h(\tau)$ деб ўзгарувчиларни алмаштириб, (6) масаланинг ечимини топамиз:

$$u(z) = \operatorname{Re}\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{u_0(\tau)h'(\tau)}{h(\tau)-h(z)}\,d\tau\,. \tag{7}$$

Худди шунингдек, агар $w = f(z)$ функция D соҳани $|w| < 1$ доирага конформ акслантирса, у ҳолда

$$u(z) = \operatorname{Re}\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} f(\zeta)\frac{\zeta + z}{\zeta - z}\frac{d\zeta}{\zeta},\quad |z| < 1$$

формуладан фойдаланиб, (6) масаланинг ечимини

$$u(z) = \operatorname{Re}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} u_0(\zeta)\frac{f(\zeta) + f(z)f'(\zeta)}{f(\zeta) - f(z)f(\zeta)}\,d\zeta \tag{8}$$

кўринишда ёзиш мумкин бўлади.

Кўпгина ҳолларда, (6) масаланинг ечимини топишда (7) ёки (8) интегралларни ҳисоблаш ўрнига D соҳани бирлик доирага ёки юқори ярим текисликка топилган $\zeta = h(z)$

конформ акслантиришни қўллаб, Пуассон интеграли ҳисобланади ва олинган натижада $\zeta = h(z)$ алмаштириш қўланилади.

Қуйидаги мисол кўрсатадики, агар Дирихле масаласининг қўйилишида қидирилаётган $u(z)$ функция учун чегараланганлик шарти талаб қилинмаса, у ҳолда ягоналик теоремаси ўринли бўлмайди.

2 – мисол. а) $u(x, y) = y$ функция $y > 0$ юқори ярим текисликда гармоник, соҳа чегарасигача узлуксиз, $y = 0$ $(x \neq \infty)$ бўлганда $u(x, y) = 0$. Маълумки, $u(x, y) \equiv 0$ функция ҳам барча шартларни қаноатлантиради.

б) $u(x, y) = \dfrac{1 - x^2 - y^2}{(x-1)^2 + y^2} = \mathrm{Re}\dfrac{1+z}{1-z}$ функция $x^2 + y^2 < 1$ соҳада гармоник, соҳа чегарасининг (1,0) нуқтасидан бошқа барча нуқталарида узлуксиз, $x^2 + y^2 = 1$ айлана нуқталарининг (1,0) нуқтасидан бошқа барча нуқталарида нолга тенг. $u(x, y) \equiv 0$ функция ҳам барча шартларни қаноатлантиради.

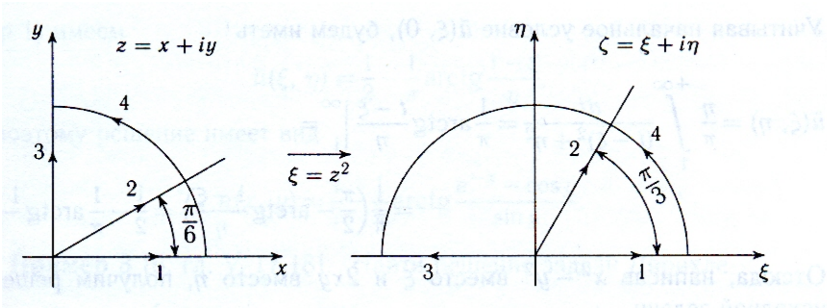
Конформ акслантиришлар усули билан текисликда Лаплас тенгламаси учун қўйилган чегаравий масалаларни ечишга доир бир қанча мисолларни келтирамиз.

3 – мисол. $x > 0$, $y > 0$ биринчи квадрантда $\Delta u = 0$ Лаплас тенгламасининг $u\big|_{x=0} = 0$, $u\big|_{y=0} = \theta(x-1)$ чегаравий шартларни қаноатлантирган ечимини топинг, бунда $\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$ – Хевисайд функцияси.

Ечиш. Маълумки, $\zeta = z^2$ комплекс ўзгарувчили функция z комплекс текисликнинг биринчи чорагида аниқланган бўлиб, берилган соҳани ζ комплекс текисликнинг $\eta > 0$ юқори ярим текислигига акслантиргани, ҳолда:

– мусбат ярим ўқ x ни ҳақиқий ξ мусбат ярим ўққа акслантиради;

– мусбат ярим ўқ y ни ҳақиқий ξ манфий ярим ўққа акслантиради.



Шундай қилиб, қуйидаги хулосага келамиз:

$(x,\ y)$ текисликдаги чегаравий масала $\qquad$ $(\xi,\ \eta)$ текисликдаги чегаравий масала

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad x > 0, \quad y > 0, \\ u\big|_{x=0} = 0, \quad y \ge 0, \\ u\big|_{y=0} = \theta(x-1), \quad x \ge 0, \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \Delta \tilde{u} = 0, \quad \eta > 0, \\ \tilde{u}\big|_{\eta=0} = \begin{cases} 1, & \xi > 1, \\ 0, & \xi \le 1. \end{cases} \end{cases}$$

Шуни таъкидлаш керакки, $\zeta = z^2$, яъни $\xi + i\eta = (x+iy)^2$ тенгликдан $\xi = x^2 - y^2$, $\eta = 2xy$ муносабатлар келиб чиқади.

$(\xi,\ \eta)$ текисликда Дирихле масаласининг ечими қуйидаги Пуассон интеграли орқали аниқланади:

$$\tilde{u}(\xi,\ \eta) = \frac{\eta}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{u}(t,\ 0)dt}{(t-\xi)^2 + \eta^2}.$$

Қўйилган $\tilde{u}(\xi,\ 0)$ бошланғич шартни эътиборга олиб,

$$\tilde{u}(\xi,\ \eta) = \frac{\eta}{\pi}\int_{1}^{+\infty} \frac{dt}{(t-\xi)^2 + \eta^2} = \frac{1}{\pi} arctg \frac{t-\xi}{\eta}\Bigg|_1^{\infty} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - arctg\frac{1-\xi}{\eta}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} arctg\frac{1-\xi}{\eta}$$

функцияга эга бўламиз. Охирги тенгликда ξ нинг ўрнига $x^2 - y^2$ ни, η нинг ўрнига $2xy$ қўйиб,

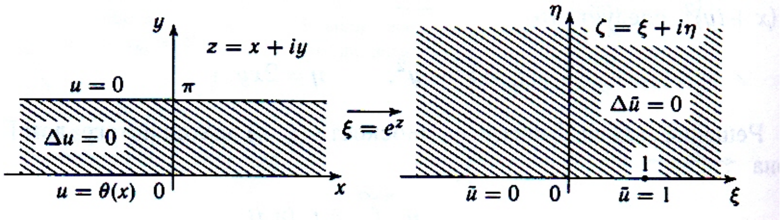
$$u(x,\ y)=\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}arctg\frac{y^2-x^2+1}{2xy}$$

дастлабки масаланингечимини ҳосил қиламиз.

4 – мисол. $0<y<\pi$ йўлакда $\Delta u=0$ Лаплас тенгламаси учун қўйилган $u\big|_{y=0}=\theta(x),\ \ u\big|_{y=\pi}=0$ чегаравий шартларни қаноатлантирадиган Дирихле масаласини ечинг.

Ечиш. $\zeta=e^z$ комплекс ўзгарувчили функция $0<y<\pi$ йўлакни ζ комплекс текисликнинг $\eta>0$ юқори ярим текислигига акслантиргани, ҳолда:

- мусбат x ўқни $\left[1,\ +\infty\right)$ мусбат ярим ўққа ўтказади;
- манфий x ярим ўқни $(0,\ 1)$ интервалга ўтказади;
- $y=\pi$ тўғри чизиқни манфий ξ ярим ўққа ўтказади.



Шундай қилиб, қуйидаги хулосага келамиз:

$(x,\ y)$ текисликдаги чегаравий масала → $(\xi,\ \eta)$ текисликдаги чегаравий масала

$$\begin{cases}\Delta u=0,\\ -\infty<x<+\infty,\ 0<y<\pi,\\ u\big|_{y=0}=\theta(x),\quad -\infty<x<+\infty,\\ u\big|_{y=\pi}=0,\quad -\infty<x<+\infty.\end{cases}\ \to\ \begin{cases}\Delta\tilde{u}=0,\quad \eta>0,\\ \tilde{u}\big|_{\eta=0}=\begin{cases}1, & \xi\ge 1,\\ 0, & \xi\le 1.\end{cases}\end{cases}$$

$\xi=e^x\cos y,\quad \eta=e^x\sin y$ эканлигини эътиборга олиб ва олдинги масалага кўра

$$\tilde{u}(\xi,\ \eta)=\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}arctg\frac{1-\xi}{\eta}$$

эканлигидан

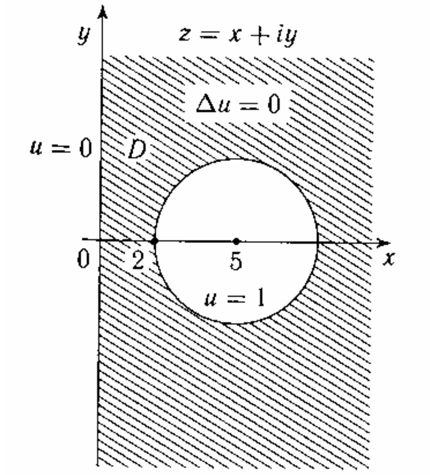
$$u(x,\ y)=\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}arctg\frac{e^{-x}-\cos y}{\sin y}$$

шаклдаги ечимни ҳосил қиламиз.

5 – мисол. Қуйидаги Дирихле масаласини ечинг:

$$\begin{cases}\Delta u=0, \quad \operatorname{Re}z>0, \\ |z-5|>5, \ \ u\big|_{\operatorname{Re}z=0}=0, \quad u\big|_{|z-5|=3}=1.\end{cases}$$

Ечиш. Олдин қандай D соҳада Дирихле масаласи ечиш кераклигини билиш учун соҳани тасвирлаймиз.



Соҳани концентрик бўлмаган халқа деб қараш мумкин (тўғри чизиқ – бу чексиз радиусли айлана). D соҳани концентрик халқага акслантирадиган конформ акслантиришни топамиз. Бунинг учун иккита нуқтани $\operatorname{Re}z=0$ тўғри чизиққа нисбатан ва $|z-5|=3$ айланага нисбатан симметрик бўладиган қилиб аниқлаймиз. Аниқки, бу иккита нуқта $\operatorname{Re}z=0$ тўғри чизиққа нисбатан ва $|z-5|=3$ айланага нисбатан умумий бўлган перпендикуляр тўғри чизиқда, яъни ҳақиқий ўқда ётади. $\operatorname{Re}z=0$ тўғри чизиққа нисбатан симметриклик шартидан $x_1=a,\ \ x_2=-a\ (a>0)$ бўлишини аниқлаймиз. Шунингдек, $|z-5|=3$ айлананинг ҳам симметрик нуқталари бўлганлигидан фойдаланиб $(5+a)(5-a)=9$ эканлигини топамиз, бундан $a=4$ келиб чиқади.

Қидирилаётган конформ акслантириш

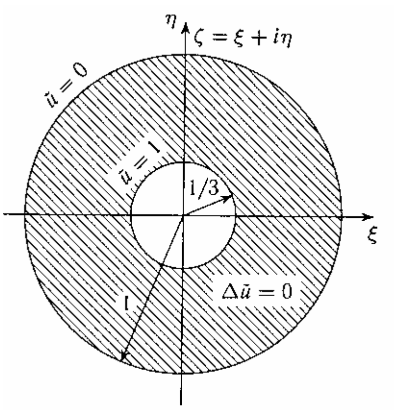
$$\zeta = \frac{z-4}{z+4} \tag{9}$$

каср–чизиқли функция бўлишини кўрсатамиз. Ушбу акслантириш $\operatorname{Re} z = 0$ тўғри чизиқни γ айланага акслантиради. $z_1 = 4$ ва $z_2 = -4$ нуқталарни эса $\zeta_1 = 0$ ва $\zeta_2 = \infty$ нуқталарга акслантиради, бу нуқталар γ айланага нисбатан симметрик нуқталар бўлганлиги учун қаралаётган акслантириш симметриклик хоссасини қаноатлантиради. Шунга кўра, $\zeta = 0$ нуқта γ айлананинг марказидир. Ундан ташқари $z = 0$ нуқта $\zeta = -1$ нуқтага ўтади, бундан эса γ айлана $|\zeta| = 1$ эканлиги келиб чиқади.

Қаралаётган акслантириш $|z-5| = 3$ айланани $|\zeta| = \frac{1}{3}$ айланага акслантиришини кўрсатамиз. Маълумки, каср–чизиқли акслантириш $|z-5| = 3$ айланани айланага акслантиради ва унинг радиуси

$$|\zeta| = \left|\frac{2-4}{2+4}\right| = \frac{1}{3}$$

бўлади. Шундай қилиб, (12.9) кўринишдаги функция D соҳани концентрик $\frac{1}{3} < |\zeta| < 1$ ҳалқага акслантиради.



Шундай қилиб, қуйидаги хулосага келамиз:
$(x,\ y)$ текисликдаги $(\xi,\ \eta)$ текисликдаги

чегаравий масала чегаравий масала

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \operatorname{Re} z > 0, |z-5| > 3, \\ u\big|_{\operatorname{Re} z = 0} = 0, \\ u\big|_{|z-5|=3} = 1, \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \Delta \tilde{u} = 0, \ \frac{1}{3} < |\zeta| < 1, & (10) \\ \tilde{u}\big|_{|\zeta|=1} = 0, \\ u\big|_{|\zeta|=\frac{1}{3}} = 1, & (11) \end{cases}$$

Энди $\frac{1}{3} < |\zeta| < 1$ $((\xi,\ \eta)$ текисликда) халқада Дирихле масаласини ечамиз. (11) чегаравий шарт φ қутб бурчагига боғлиқ эмас, бундан эса $\tilde{u}(\zeta)$ ечим фақат ρ ўзгарувчига боғлиқ (бунда $\xi = \rho\cos\varphi,\ \eta = \rho\sin\varphi$) эканлигини ҳосил қиламиз. Мазкур ечимни $\Delta\tilde{u} = 0$ Лаплас тенгламасини

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\rho}\right) = 0$$

шаклда ёзиб топамиз. Бу тенгламанинг умумий ечими

$$\tilde{u}(\zeta) = c_1 + c_2 \ln\rho$$

бўлиб, бунда c_1 ва c_2 лар ихтиёрий ўзгармаслардир. (11) чегаравий шарт шартдан фойдаланиб, $c_1 = 0$ ва $c_2 = -\frac{1}{\ln 3}$ бўлишини топамиз. Демак,

$$\tilde{u}(\zeta) = -\frac{1}{\ln 3}\ln|\zeta|, \text{ бунда } \rho = |\zeta|.$$

Қидиралаётган ечимни топиш учун (9) муносабатдан фойдаланилган ҳолда дастлабки z ўзгарувчига қайтамиз ва қуйидаги ечимни ҳосил қиламиз: $u(z) = \frac{1}{\ln 3}\ln\frac{z+4}{z-4}$.

Мустақил ечиш учун мисоллар

1. Бирлик доира ичида гармоник ва чегарасида $u\big|_{r=1} = \cos^4 \varphi$ шартни қаноатлантирадиган u функцияни топинг.
2. Бирлик доира ичида гармоник ва чегарасида $u\big|_{r=1} = \sin^6 \varphi + \cos^6 \varphi$ шартни қаноатлантирадиган u функцияни топинг.
3. $R_1 < r < R_2$ халқада гармоник ва чегарасида $u\big|_{r=R_1} = u_1$, $u\big|_{r=R_2} = u_2$ шартларни қаноатлантирадиган u функцияни топинг.
4. $R_1 < r < R_2$ халқада гармоник ва чегарасида $u\big|_{r=R_1} = 1 + \cos^2 \varphi$, $u\big|_{r=R_2} = \sin^2 \varphi$ шартларни қаноатлантирадиган u функцияни топинг.
5. $R_1 < r < R_2$ халқада $\Delta u = A$ Пуассон тенгламасини ва чегарасида $u\big|_{r=R_1} = u_1$, $u\big|_{r=R_2} = u_2$ шартларни қаноатлантирадиган u функцияни топинг. (бунда A, u_1, u_2 – олдиндан берилган сонлар).
6. Маркази координата бошида бўлган R радиусли айланада $u\big|_{r=R} = 0$ шартни қаноаталантирадиган $\Delta u = -Axy \quad (A = const)$ Пуассон тенгламасининг ечимини топинг.