O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI

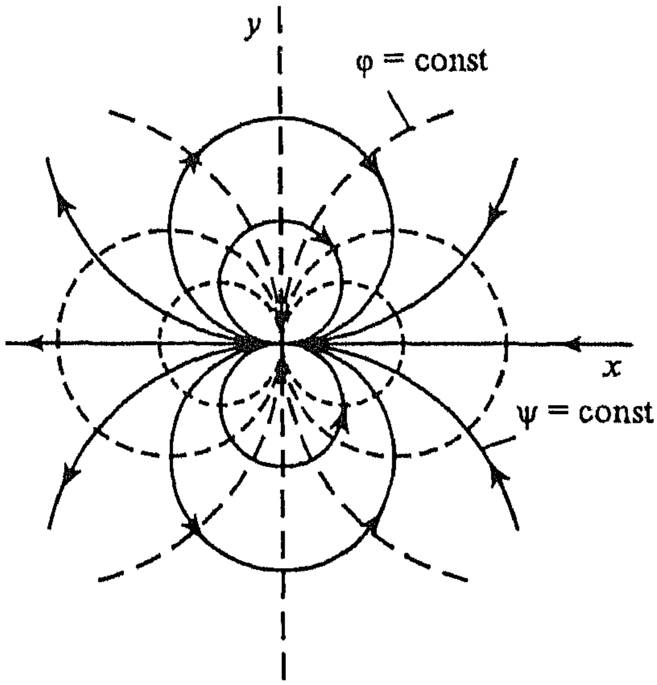
OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI

Xudoynazarov X., Abdirashidov A.

SUYUQLIK VA GAZ MEXANIKASI

Oliy o‘quv yurtlarining «5140300 – Mexanika» ta’lim yo‘nalishi bakalavr talabalari uchun o‘quv qo‘llanma sifatida tavsiya etilgan



«Zarafshon» nashriyoti DK

Samarqand – 2017

UDK: 532.5
22.365
X - 45

Xudoynazarov X., Abdirashidov A.

Suyuqlik va gaz mexanikasi. Oliy o‘quv yurtlari talabalari uchun o‘quv qo‘llanma. – Samarqand: «Zarafshon» nashriyoti DK, 2017-yil, – 310 bet.

Ushbu o‘quv qo‘llanma «5140300 - Mexanika» ta’lim yo‘nalishining «Suyuqlik va gaz mexanikasi» fani o‘quv rejasi va o‘quv dasturi asosida tuzilgan. O‘quv qo‘llanma «5A140303 – Suyuqlik va gaz mexanikasi» mutaxassisligi magistrantlari uchun ham mo‘ljallangan.

Данный учебное пособие написан на основе учебного плана и рабочей программы предмета «Механика жидкости и газа» по направлению образования «5140300 - Механика». Учебное пособие рассчитан также на магистры по специальности «5А140303 – Механика жидкости и газа».

The given schoolbook is written on base of the curriculum and worker of the program of the subject «Fluid and gas mechanics» on direction of the formation «5140300 - Mechanics». The schoolbook is calculated also on masters on professions «5A140303 - Fluid and gas mechanics».

Mas’ul muharrir: fizika-matematika fanlari doktori,
O‘zMU professori **B.E.Khusanov.**

Taqrizchilar: fizika-matematika fanlari doktori,
SamDU professori **B.Xo‘jayorov**;
fizika-matematika fanlari doktori,
SamDAQI professori **J.A.Akilov.**

ISBN 978-9943-385-97-8

KIRISH

Ushbu o‘quv qo‘llanma Samarqand davlat universitetining mexanika ta’lim yo‘nalishi bakalavr talabalariga bir necha yillar davomida «Suyuqlik va gaz mexanikasi» fanini o‘qitish jarayonida yuzaga kelgan. Bu fan mavzularini bayon qilishdan avval quyida ba’zi boshlang‘ich tushunchalarni qisqacha keltirib o‘tishni lozim topdik.

Fanning mexanikadagi o‘rni. Har qanday fan kabi «Suyuqlik va gaz mexanikasi» fani ham ba’zi abstrakt tushunchalarga tayanadi, masalan, massa, tezlik, kuch, tezlanish, energiya va hokazo. Harakatlanayotgan moddiy jism uchun esa abstrakt modellar kiritiladi, bu modellar o‘z navbatida o‘rganilayotgan masala uchun tabiiy jismning juda muhim bo‘lgan xossalarini o‘zida ifodalaydi. Shuning uchun mexanikada asosan moddiy nuqta, absolyut qattiq jism (yoki moddiy nuqtalar sistemasi), tutash muhit kabi modellardan foydalaniladi:

1) *Moddiy nuqta* (o‘lchamlari hisobga olmaslik darajada kichik chekli massali jism) modelidan, masalan, jismning harakat traektoriyasini o‘rganishda foydalaniladi.

2) *Absolyut qattiq jism* (oralaridagi masofa o‘zgarmas holda joylashgan moddiy nuqtalar to‘plami) modelidan, masalan, jismning fazodagi holati, shakli va o‘lchami muhim bo‘lgan holatda foydalaniladi.

3) *Tutash muhit* modelidan esa jism tutashlik xossasiga ega, qo‘yilgan kuch ta’siridagi u deformatsiyalanuvchan va uning massasi fazo bo‘ylab notekis taqsimlangan holatda foydalaniladi.

Endi bu modellar uchun muhim bo‘lgan ba’zi tushunchalarni keltirib o‘taylik.

Moddiy sistema diskret deyiladi, agar u alohida joylashgan moddiy nuqtalardan iborat bo‘lsa, va aksincha u *tutash* deyiladi, agar unda moddalar, uning holatining fizik xarakteristikalari va fazodagi harakati uzluksiz taqsimlangan bo‘lsa. Ikkinchi holatda sistema *tutash moddiy muhit* yoki qisqacha *tutash muhit* deyiladi. *Tutashlik gipotezasi Dalamber tomonodan 1744 yilda kiritilgan.*

Masalan, qattiq jismlar, suyuqliklar (masalan, suv, yog‘, qorishma, eritma va hokazo), gazlar (masalan, gaz, bug‘, gaz aralashmalari va hokazo) tutash muhitga misol bo‘la oladi. O‘zgaruvchan tutash muhit mexanikada *elastik* va *qovushoq* hamda *suyuq va gaz holatdagi jismlar* deb o‘rganiladi.

Mexanikaning o‘zgaruvchan muhitlar harakatini o‘rganuvchi bo‘limi *tutash muhitlar mexanikasi* deyiladi, uning suyuq va gaz holatidagi muhitlarga aloqador bir qismi *suyuqlik va gaz mexanikasi* deyiladi.

Tutash muhitning zarrachasi deb o‘lchamlari molekulyar masofalardan ko‘p marta katta bo‘lgan muhit hajmining juda kichik elementiga aytiladi. Suyuqlikning zarrachalarini taqriban nuqtaviy deb hisoblash mumkin.

Suyuqlik deb ikkita alohida xususiyatga ega bo‘lgan fizik jismga aytiladi: yetarlicha kishik kuch ta’sirida ham o‘z hajmini keskin o‘zgartiruvchan va oquvchan, yengil qo‘zg‘aluvchan. Boshqacha aytganda, suyuqliklar – bu molekulalari betartib joylashgan, vaqti-vaqti bilan bir muvozanat holatdan boshqasiga sakrab o‘tib turadigan moddalar. Suyuqlikning eng muhim mexanik xarakteristikalari bu uning zichligi, solishtirma og‘irligi va qovushoqligi. Suyuqliklar ikki ko‘rinishda bo‘ladi: tomchili suyuqliklar; gazsimon suyuqliklar. Tomchili suyuqliklar odatdagi umumiy suyuqlik deb ataluvchi tushuncha bilan ifodalanuvchi suv, neft, kerosin, yog‘ va hokazo moddalar. Gazsimon suyuqliklar esa odatdagi gazsimon moddalar: havo, kislorod, azot, propan va hokazo.

Suyuqlik va gaz mexanikasida «*suyuqlik*» tushunchasi kengroq ma’noda ishlatiladi. Tajribalar shuni ko‘rsatadiki, tovush tezligiga yaqin, lekin undan pastroq tezliklarda gazlar o‘zini siqilmaydigan suyuqlikdek tutadi, tomchili suyuqliklar (masalan, suv) esa katta bosimlarda o‘zini siqiluvchan suyuqlikdek tutadi. Shuning uchun suyuqlik deganda kam siqiluvchan tomchili suyuqliklarni va osongina siqiluvchan suyuqliklar (gazlar)ni tuchunishga kelishib olingan.

Ingliz tilidagi «*Fluid*» so‘zi ham suyuqlik, ham gaz ma’nosini anglatadi. Ideal gazlarning fizik-mexanik xarakteristikalarini gazlarning kinetik nazariyasi yordamida molekulyar darajada olish mumkin, ammo suyuqliklarning umumiy kinetik nazariyasi hozirgacha yaratilmagan. Texnologik maqsadlar uchun suyuqlik va gaz mexanikasini alohida-alohida ikkita bo‘lim sifatida rivojlantirish zarur, degan fikr hayolga keladi, aslida esa bunga hech qanday zarurat yo‘q. Haqiqatan ham, umumiy «fluid»ni bir jinsli substansiya yoki kontinium deb qarasak va ularga massaning, impulsning va energiyaning saqlanish qonunlarini tadbiq qilsak, juda ko‘p oqimlarning yuqori aniqlikda tavsifini berish mumkin.

Suyuqlik va gazlarning, qattiq jismlardan farqli har xil asosiy belgilarini keltirish mumkin.

Ma’lumki, hamma kuchlarni uch turga ajratish mumkin: siquvchi; cho‘zuvchi; urinma. Tutash muhitlar esa bu kuchlar ta’sirida mos ikki turda deformatsiyalanadi: siqiladi (yoki cho‘ziladi); siljiydi.

Har ikkala turdagi deformatsiyalarga yaxshi qarshilik ko‘rsatuvchi tutash jismlar qattiq jismlardir. Qattiq jismlar oddiy sharoitda o‘z shaklini saqlab turadi, suyuqlik va gazlar esa ularni o‘rab turgan idish shaklidagina tura oladi. Shunga ko‘ra suyuqlik va gazlarning tashqi kuchlarga qarshiligi juda kam, ya’ni ular juda ham oson *deformatsiyalanuvchan* yoki *qo‘zg‘aluvchan* (*oquvchan*)dir.

Kuzatishlar shuni ko‘rsatadiki, suv, neft va boshqa moddalar suyuqliklar deb atalib, ular: siquvchi kuchlarga jiddiy qarshilik ko‘rsatadi; uzilishga (cho‘zuvchi kuchlarga), aksincha, deyarli qarshilik ko‘rsatmaydi; urinma kuchlarga (ya’ni zarrachalarning bir biriga nisbatan siljishiga) esa siljish tezligiga qarab har xil qarshilik ko‘rsatadi. Bu tezlik qancha katta bo‘lsa qarshilik ham shuncha katta bo‘ladi. Gazlar ham xuddi shunday xossalarga ega.

Suyuqlik va gazlarning farqi shundaki, suyuqliklar siqilishda o‘z hajmini juda ham kam o‘zgartiradi, gazlar esa Boyl-Mariot qonuniga bo‘ysungan holda ancha sezilarli siqiladi. Qattiq jismlar uchala xil zo‘riqishlarga (siqilish; cho‘zilish; siljish) yetarlicha qarshilik ko‘rsata oladi.

Suyuqlik tinch turganda yoki absolyut qattiq jismdek harakat qilayotganda unda urinma kuchlanishlar bo‘lmaydi va faqatgina normal kuchlanishlar kuzatiladi. Kuzatilayotgan suyuqlikdagi normal kuchlanishlar asosan siquvchi kuchlanishlardir, ammo cho‘zuvchi emas. Gazlarda esa cho‘zuvchi kuchlanishlar umuman kuzatilmaydi. Real tomchili suyuqliklarda cho‘zish kuchlanishi qisman va juda kam miqdorda kuzatilishi mumkin, ya’ni suyuqlikning uzilishdagi mustahkamligi qattiq jismlarga nisbatan juda kichik bo‘ladi. Agar suyuqlik aralashmalardan iborat bo‘lsa, u holda uning mustahkamligi keskin kamayadi.

Shunday qilib, deformatsiyadagi qarshilik ko‘rsatish xususiyatiga qarab fizik jismlar ikki guruhga bo‘linadi: suyuqliklar (bunda gazlar ham tushuniladi) va qattiq jismlar. Birinchi guruhdagilarni yana qism guruhlarga ajratish mumkin: *siqilmaydigan* (ko‘pincha ular tomchili suyuqliklar deb ataladi) va *siqiluvchan* (ular gazsimon ham deb ataladi) suyuqliklar. Tutash muhitni *siqilmaydigan* deb qarash mumkin, agar qachonki uning hajmini o‘zgartirishga olib keluvchi cho‘zuvchi (siquvchi) deformatsiyalarni hisobga olmaslik darajada kichik bo‘lsa. Bunga nisbatan juda kichik tezliklarda harakat qilayotgan tomchili suyuqliklar, gazlar va plazmalar misol bo‘la oladi. Tushunamizki, barcha *suyuqliklar siqiluvchan*, ammo ularning ko‘pchiligidagi siqilishlarni e’tiborga olmasa ham bo‘ladi. Masalan, suv 1 atm bosimda o‘zining dastlabki hajmiga nisbatan uning 1/20000 qismigacha siqiladi.

Endi tutash muhitlarning, xususan suyuqliklarning, ba’zi xossalarini keltiraylik (keyinchalik quyida muhim xossalari bilan batafsil tanishiladi).

Har xil suyuqliklarning tutashish chegarasida yoki suyuqlik va qattiq yoki gaz shaklidagi jism bilan tutashish chegarasida suyuqlikning tomchili xossasi paydo bo‘ladi va bunda uning *qattiq jism sirtini namlash* hodisasi kuzatiladi. Suyuqliklarning bunday tomchili xossasi ularning ichki sohasida ham, masalan, *kavitatsiya* hodisasi sodir bo‘lishi mumkin bo‘lgan suyuqlik ichida gaz pufakchali sohalari mavjud bo‘lganda, kuzatilishi mumkin. Gazlar suyuqliklarga nisbatan juda ham sezilarli darajada siqiluvchan. Bosimning juda ham kam kamayishi, harakatning juda kichik tezligida muhitning qizish holati yo‘q holatlarida gazni ham siqilmay-digan muhit deb qarash mumkin. Shuning uchun har bir muhitning siqiluvchanlik darajasi bir-biridan keskin farq qiladi.

Suyuqlik va gazlarning siljishga qarshilik ko‘rsatish xossasi *qovushoqlik* deb ataladi. Hamma suyuqliklar qovushoqlik (siljish tezligiga proporsional bo‘lgan ishqalanish kuchlanishiga ega Nyuton suyuqligi) xususiyatiga ega.

Yuqorida ta’kidlaganimizdek, suyuqlik deb tomchili suyuqliklarni, gazlar va plazmalarni qabul qilgan holda, ularning qattiq jismlardan farq qiluvchi muhim jihati – bu ularning oquchanligini e’tiborga olib, suyuqlik va gaz mexanikasida suyuqliklar modellari quyidagicha klassifikatsiya-lanadi: siqiluvchan yoki siqilmaydigan suyuqlik modeli; ideal yoki qovushoq suyuqlik modeli. *Ideal suyuqlik* deb absolyut qovushoqmas, uzilish va siljish qarshiligiga umuman qarshilik ko‘rsatmaydigan (ichki ishqalanishga ega bo‘lmagan) suyuqlikni hayolan tushunamiz. Bu barcha asosiy xususiyatlarini o‘zida aks ettiruvchi real suyuqlik modeli deb qabul qilingan bo‘lib, unda suyuqlikning siqiluvchanlik yoki siqilmaslik xossasini e’tiborga olish mumkin. Bu model yordamida, masalan, suyri jismli suyuqlik oqimidagi tezliklar taqsimoti va bosimni aniqlash mumkin, ammo bu model suyuqlikning qovushoqligi ta’sirini va ayniqsa qarshilik kuchlarini aniqlash imkonini bermaydi. *Qovushoq suyuqlik modeli* esa siqiluvchan yoki siqilmaydigan real suyuqlik modelidir. Suyuqlikning qovushoqligini e’tiborga olish uning oqimini tavsiflovchi differensial tenglamalarni ancha murakkablashtiradi.

Shunday qilib, mexanika fani tuzilmasi nazariy mexanika (moddiy nuqta mexanikasi; moddiy nuqtalar sistemasi mexanikasi; absolyut qattiq jism mexanikasi) va tutash muhit mexanikasi (deformatsiyalanuvchan qattiq jism mexanikasi; suyuqlik va gaz mexanikasi (suyuqlik kinematikasi; gidrostatika; suyuqlik dinamikasi))dan iborat.

Suyuqlik va gaz mexanikasining predmeti va metodi. Suyuqlikning harakati jarayonlarini, xususan, uning tinch holatini, *fenomenologik* (muhitning diskret mikrostrukturasidan voz kechish) va *statistik* (atom va molekulalar hamda ularning o‘zaro ta’sir kuchlarini e’tiborga olish) usullar bilan o‘rganish mumkin. Mazkur o‘quv qo‘llanma doirasida faqatgina fenomenologik usuldan foydalaniladi. Shuning uchun bunga oid quyidagi ba’zi tushunchalarni keltiramiz.

Suyuqlik va gaz mexanikasining asosida quyidagi farazlar yotadi: klassik mexanika – Nyuton mexanikasi o‘rinli; klassik termodinamika o‘rinli; tutash muhit sxemasi o‘rinli.

1) Birinchi farazga ko‘ra tezligi yorug‘lik tezligiga nisbatan kichik bo‘lgan harakatlar tekshiriladi, demakki relyativistik mexanika tushunchalaridan foydalanilmaydi, hamda qaraladigan ob’ektlar kvant mexanikasidagi mikrodunoyga nisbatan etarlicha katta.

2) Sistemaning *termodinamik muvozanat holati* deb tashqi shartlar saqlanib qolgan taqdirda ham yopiq sistemaning barcha ichki xarakteristikalari uzoq muddatgacha o‘z qiymatlarini saqlab qoladi. Termodinamik muvozanat shartida suyuqlik (gaz)larning holatini bir nechta makroskopik parametrlar (masalan, zichlik, tezlik, temperatura va hokazo) yordamida aniqlab olish mumkin.

3) Suyuqlik ham, har qanday jism kabi, molekulyar tuzilishga ega, demakki, suyuqlikning massasi butun geometrik fazoni egallamaydi, balki uning molekulalarida jamlangan. Lekin biz suyuqlikni uzluksiz muhit (kontinium) deb qaraymiz va matematik amallarda har xil uzluksiz funksiyalardan foydalanamiz. Uchinchi farazimizning ma’nosi bilan esa quyidagi boblarda to‘la tanishamiz.

Shunday qilib, fenomenologik nuqtai nazardan tutash muhit mexanikasi quyidagi uchta gipoteza asosida quriladi: moddiy kontinium tushunchasi bilan bog‘liq *tutashlik gipotezasi*; koordinata boshiga nisbatan nuqtaning holatini ifodalovchi koordinatalar deb ataluvchi sonlar bilan bir qiymatli beriladigan cheksiz ko‘p nuqtalar to‘plamidan iborat *fazo* tushunchasi bilan bo‘g‘liq gipoteza (deformatsiyalanuvchi muhit harakati qaraladigan fazo Evklid fazosi deb faraz qilinadi; fazoning o‘lchovi shu fazodagi nuqtaning holatini aniqlovchi koordinatalar sonidan bog‘liq);

absolyut vaqt gipotezasi (deformatsiyalanuvchi muqit harakati qaralayotgan tanlangan sanoq sistemasidan bog‘liq bo‘lmagan holda vaqt bir xil kechadi).

Fanning dastlabki manbalari. Bizga ma’lumki, suyuqlik va gaz mexanikasi chuqur tarixiy ildizga ega bo‘lgan gidromexanika (gidravlika) va nisbatan yosh gaz dinamikasi va aeromexanika kabi fanlarning muhim yutuqlariga tayangan va ularni birlashtirgan holda bugungi holatiga keldi.

Gidravlika tarixan dunyoda eng qadimgi fanlardan biri hisoblanadi. Suyuqliklar mexanikasini o‘rganishga katta amaliy qiziqishning bir qator ob’yektiv sabablari mavjud. Birinchidan, tabiatda juda katta suyuqlik zahirasi majud va hamma vaqt inson unga yengil erisha oladi. Ikkinchidan, suyuq jismlar insonning amaliy faoliyatida qulay «yollanma ishchi» sifatida foydalanishi mumkin bo‘lgan bir qator foydali xossalarga ega. Bundan tashqari hayot uchun muhim bo‘lgan bir qator ximik almashinuv reaksiyalar aynan suyuq fazada (ko‘prog suvli eritmalarda) yuz beradi.

Shu sababli inson o‘z taraqqiyotining dastlabki bosqichlaridayoq suyuqliklarga qiziqqan. O‘sha davrlarda suv va havo (ya’ni suyuqlik va gaz) tabiat hodisalarining asosiy sababchisi deb qaralgan. Tarix shuni ko‘rsatadiki, qadimda insonlar o‘zlarining suv va havo bilan bog‘liq ko‘plab amaliy masalalarini muvaffaqiyatli yechishganlar. Arxeologik tadqiqotlar natijasida taxminan eramizdan 5000 yilcha avval Misr va Xitoyda, keyinchalik qadimgi dunyoning boshqa davlatlari: Suriya, Vavilon, Yunoniston, Rim, Hindiston, Yaqin va O‘rta sharqda har xil gidravlik inshootlar qurilmalari: kanallar, suv to‘g‘onlar, suv charxpalaklarini ifodalovchi rasmlar (dastlabki chizmalar) topilganligi buni tasdiqlaydi. Aslida bu inshootlarning hech qanday hisobi bajarilmagan, ular o‘sha zamon ustalarining amaliy ko‘nikmalari va san’atlari asosida barpo etilgan.

Gidravlik masalalarni yechishga ilmiy yondashishning dastlabki korsatmalari eramizdan avvalgi 250 yilda Yunon olimi Arximed (287-212) tomonidan suyuqlikka botirilgan jismga uning bosimi (yoki suyuqlikka botirilgan jismning muvozanati) haqidagi qonunning ochilishi (Arximedning «Suzuvchi jismlar haqida» nomli dastlabki qo‘lyozmasi yaratilishi) bilan aloqador. Uning ishlari keyinchalik bir qator ajoyib gidravlik apparatlar (porshenli nasos, sifonlar va hokazo)ning, umuman olganda, gidrostatikaning yaratilishiga turtki bo‘ldi. Keyinchalik 1500 yil ichida gidravlikaga deyarli muhim o‘zgartirishlar kiritilmadi. Shu davrda bu fan deyarli rivojlanmadi, xususan XV asrgacha gidravlikaga oid birorta ham qo‘lyozma saqlanmagan.

Fanning yuzaga kelishi. Eramizning XV-XVII asrlariga, ya’ni tiklanish yoki tarixchilar aytganidek Renessans davdiga kelib shunday ilmiy ishlar paydo bo‘ldiki, bunda Leonardo da Vinchi (1548-1620) – jismlarning suzishi, suyuqliklarning quvur va kanallarda oqishi, Galileo Galiley (1564-1642) – suyuqlik muvozanati va harakatining asosiy tamoyillari, Evanjelist Torrichelli (1604-1647) – siqilmaydigan suyuqliklarning idish teshigidan oqib chiqish qonuni va undan oqib chiqayotgan suyuqlikning tezligi formulasi, Blez Paskal (1623-1727) – suyuqlikda bosim uzatilishi (gidrostatik bosimning ikkinchi xossasi), Isaak Nyuton (1643-1727) – mexanikaning asosiy qonunlari, butun olam tortishish qonuni, suyuqliklarning harakatida ichki ishqalanish qonunini yaratib, gidravlikaning muammo va masalalarini yechishga o‘z ilmiy ishlarini bag‘ishlab, ular gidravlikaning, keyinchalik suyuqlik va gaz mexanikasining fan sifatida rivojlanishiga poydevor yaratdilar. XV asrda Leonardo da Vinchining «Daryo va o‘zanlarda suvning harakati va uni o‘lchash» nomli asari uning o‘limidan 307 yil keyin 1828 yilda chop etildi. Golland olimi Simon Stevin (1548-1620) esa 1586 yilda o‘zining «Gidrostatika asoslari» nomli asarini chop etdi.

Ammo faqatgina XVIII asrga kelib suyuq jismlarni o‘rganish sohasida Peterburg Fanlar Akademiyasining akademiklari Daniel Ivanovich Bernulli (1700–1782) – ideal suyuqlikda solishtirma energiya zahirasi tenglamasi, Leonard Pavlovich Eyler (1707–1783) – suyuqlikning muvozanat va harakat differensial tenglamasi, Mixail Vasilyevich Lomonosov (1711–1765) – energiyaning saqlanish qonunini yaratib, zamonaviy gidravlikaga mustahkam poydevor qo‘ydilar.

XVII asr oxirlariga kelib Fransiyada suyuqliklarning texnik mexanikasi nomli fransuz maktabi ochildi. Bu maktabning yetuk namoyondalari, Parij Fanlar Akademiyasining a’zolari Antuan Shezi (1718-1798), J.Sh Borda (1733-1799), X.Pito (1695-1771), mahalliy qarshiliklarga oid bir qator masalalarni yechib, shu sohaning qator ilmiy yutuqlariga erishdilar.

XVIII asr oxirlariga kelib esa suyuqlik mexanikasining texnik yo‘nalishi keskin rivojlandi.

Fransiyalik muhandis–gidrotexnik P.Dyubua (1734-1809) o‘zining «Gidravlika asoslari» nomli kitobi bilan mashhur bo‘lgan. Italiyalik olim G.B.Venturi (1746-1822) va D.Poleni (1685-1761) – suyuqlikning teshikdan, nasadkadan va oqova novidan oqishi, A.Shezi (1718-1798) va E.Bazen (1829-1897) – suyuqlikning tekis harakati, Yu. Veysbax (1806-1871) va P.Dyubua (1734-1809) – suyuqlik oqimiga qarshilik, ingliz fizik olimi O.Reynolds (1842-1912) – laminar va turbulent oqimlarni oʻrganishga katta hissa qoʻshdilar.

XIX-XX asrlarda suyuqlik mexanikasini amaliy fan sifatida rivojlanishiga hamda gidravlika va gidromexanikada qoʻllaniladigan nazariy va amaliy masalalarni oʻrganish usullarini yaqinlashtirgan ilmiy izlanishlar bu nemis olimlarining: M.Veber (1871-1971), F.Forxgeymer (1852-1933), L.Prandtl (1875-1953) – chegaraviy qatlam nazariyasi, X.Blazius (1883-1951) – oqimlar nazariyasini oʻrganishga qoʻshgan salmoqli hissalaridir.

Qovushoq suyuqliklarning harakati haqidagi bilimlar asosini 1821 yilda fransuz olimi Lui Mari Anre Navye (1785-1836) boshlab berdi va u ingliz olimi Dj.G.Stoks (1819-1903) tomonidan 1845 yilda yakuniy holga keltirildi, bunda u kuchlanishning deformatsiya tezligidan chiziqli bogʻliqligini asoslab berdi hamda qovushoq suyuqlikning fazoviy harakat tenglamasini yakuniy shaklga keltirdi (keyinchalik bu tenglama Navye-Stoks tenglamasi deb nom oldi). 1846 yilda Stoks quvur va kanallarda qarshilikni nazariy va amaliy tadqiq qilishning nazariy yechimini berdi.

Franzsuz vrachi va tadqiqotchisi J.Puazeyl (1799-1869) juda kichik diametrli quvurlarda (kapilyarlarda) qovushoq suyuqlikning harakatini eksperimental tadqiq qilib, 1840-1842 yillarda tomirlarda qonning harakatini oʻrgandi.

Suyuqlikning uyurmali harakati haqidagi bilimlarning yaratuvchisi deb 1858 yilda ideal suyuqlikning uyurmali harakati haqidagi asosiy teoremalarni yaratgan nemis olimi G.Gelmgolts (1821-1894)ni bilishadilar. Uyurmalar nazariyasi meteorologiya, samolyot qanoti nazariyasi, propeller va kema vinti nazariyasining rivojida juda katta ahamiyat kasb etdi.

Bularning barchasi suyuqlik va gaz mexanikasi fanining zamonaviy shakliga zamin yaratdi.

Rossiyada ham muhim ilmiy ishlar amalga oshirildi, xususan, 1791 yilda A.Kolmakov tomonidan gidravlikaga oid birinchi qoʻllanma chop etildi; I.S.Gromeka (1851-1889) - suyuqlikning uyurmali harakati tenglamasini, 1881 yilda «Siqilmaydigan suyuqlik harakatining ba’zi hollari» mavzuli ishida suyuqlik harakati tenglamasining yangi shaklini taklif etdi; 1883 yili N.P.Petrov (1836-1920) moylash (smazka) gidrodinamik nazariyasini yaratdi; 1898 yili «rus aviatsiyasining otasi» N.E.Jukovskiy (1847-1921) quvurlarda gidravlik zarba nazariyasini yaratib, suyuq elementning uyurmali va deformatsion harakatini tahlil qilib va bularga doir kitob nashr etib, gidrodinamikaga salmoqli hissa qoʻshdi. Keyinchalik ularning ishlarini S.A.Chapligin (1869-1942), K.E.Siolkovskiy (1852-1935), A.A.Fridman (1888-1925) kabi yetuk olimlar davom ettirib, gidrodinamikaning yangi yo‘nalishlari rivojiga o‘zlarining muhim hissalarini qo‘shishdilar.

Shu va ulardan keyingi olimlardan Veysbax va Prandtlning ilmiy ishlarida suyuqlik va gaz mexanikasi fani, xususan, gidravlikada yaratilgan nazariy tadqiqotlarni amaliy va eksperimental ishlar bilan bog‘lash imkoniyati tug‘ildi. Bazen, Puazeyl, Reynolds, Frud, Stoks va boshqa olimlarning ilmiy tadqiqodlari esa real (qovushoq) suyuqliklar dinamikasi haqidagi bilimlarni rivojlantirdi. Navye-Stoksning differensial tenglamasi real suyuqliklar harakatini tashqi shartlardan bog‘liq holda shu suyuqlik parametrlarining funksiyasi sifatida tavsiflash imkonini berdi. Umumlashtirib aytganda, bu olimlarning ilmiy izlanishlari asosan oqimning turbulentligini, qovushoq suyuqliklar harakatiga qarshilikning umumiy qonunlarini o‘rnatish, suyuqliklarning quvurlarda, kanallarda va oqova novlarda harakatini tadqiq qilishga bag‘ishlangan. Bundan tashqari ular asosiy e’tiborlarini o‘lchov va o‘xshashlik nazariyasini yaratishga va laboratoriya eksperimentlarini o‘tkazishga qaratdilar.

XIX asr oxirlariga kelib gidromexanika bilan bir qatorda gazlar mexanikasi ham keng rivojlandi. Bunga I.Nyuton va P.Laplas ishlari asos bo‘lgan bo‘lsa, keyinchalik bir qator olim va muhandislarning ishlari bug‘ turbinalari, havoda uchuvchi ob’yektlar, qanot profili sohalarining rivojini belgilab berdi.

Suyuqlik va gaz mexanikasi fani rivojining zamonaviy bosqichi. Zamonaviy inshootsozlik, mashinasozlik, aviatsiya, transport va sanoatning boshqa sohalarida ushbu fanning amaliy ahamiyati bebaho. Xususan, gidravlika fani amaliy muhandislik fani sifatida har xil gidrotexnik inshootlar va gidromashinalarni hamda ulardan tashkil topgan har xil gidrotizimlarni loyihalashda keng qo‘llanilmoqda. Har qanday avtomobil, uchuvchi apparat, suzuvchi ob’ektlar, suv to‘g‘onlari va dambalari, oqava novi va boshqalarda asosan gidravlik tizimlar qo‘llaniladi. Sanoatda esa juda katta kuchni yuzaga keltiruvchi gidravlik pressiz (zichlagichsiz) biror ish qilib bo‘lmaydi. Eyfel minorasi qurilishi tarixidan qiziqarli dalilni keltirishimiz mumkin. Minoraning tayyor bo‘lgan ko‘p tonnali qurilmasini beton asosga o‘rnatish uchun uning har bir tayanchiga o‘rnatilgan gidravlik press yordamida unga qat’iy vertikal holat berildi.

Suyuqlik va gaz mexanikasi fani masalalari insonning har bir qadamida uchraydi: ishda, uyda, transportda va hokazo. Tabiatning o‘zi insonda gidravlik tizimni o‘rnatgan: yurak – nasos; jigar – filtr; buyrak – himoyalovchi klapanlar; qon tomirlar (inson organizmida ularning umumiy uzunligi 100000 km) – quvurlar. Bizning yuragimiz bir kunda 60 tonna (bu to‘ldirilgan temiryo‘l sisternasiga teng miqdor) qonni haydaydi.

XX asrga kelib nazariy va amaliy gidrodinamika sohasida yaratilgan ilmiy ishlar amaliy masalalarni yechish usullarini rivojlantirish, tadqiqotlarning yangi usullarini yaratish, yangi yo‘nalishlar (filtratsiya nazariyasi, gazo- va aerodinamika va hokazo)ga yo‘naltirildi. Masalan, A.N.Kolmagorov - turbulentlik nazariyasi; N.N.Pavlovskiy – filtratsiya nazariyasi va suyuqlikning tekis va notekis harakati; I.N.Kukolevskiy – mashinasozlik gidravlikasi nazariyasi; S.A.Xristianovich – suyuqlikning nostatsionar harakati va boshqalar. Gazlar dinamikasi bo‘limi rivojiga katta hissa qo‘shgan olimlardan M.V.Keldish, F.I.Frankl, S.A.Xristianovish, L.I.Sedov, Ya.B.Zeldovich va ularning shogirdlari ishlarini qayt etish mumkin.

Suyuqlik va gaz mexanikasining amaliyotga tadbiqi sifatida, masalan, biomexanikada, G.Galileyning (1564-1642) yurak urishini tekshirishga oid, Dekartning (1596-1650) ko‘z tadqiqotlariga oid, Gukning (1635-1703) hujayralarga oid, Eylerning qon tomirlarida puls to‘lqinlarini o‘rganishga oid, Yungning (1773-1829) ko‘rish va ovoz nazariyalariga oid, Gelmgoltsning (1821-1894) ovoz, ko‘rish va psixofiziologiya nazariyalariga oid, Lambning (1849-1934) qizil qon tomirlarida (arteriyalarda) yuqori chastotali to‘lqinlarni qayd etishga oid, Stefan Xeylsning (1677-1761) arterial bosimni o‘lchash va uning qon ketishi bilan bog‘liqligiga oid, Puazeylning (1799-1869) qon oqimida qovushoqlik va qarshilik tushunchalariga oid, Otto Frankning (1865-1944) yurak faoliyati mexanikasiga oid, Starlingning (1886-1926) inson tanasida membrana orqali massa almashinish qonuni va suv muvozanati tushunchasiga oid, Nobel mukofoti lauretai Krafning mikrosirkulyatsiya mexanikasiga oid ilmiy ishlarini alohida qayd etish mumkin.

Shunday qilib, gidravlika, gidrodinamika, gaz dinamikasi va aerodinamika umumiy «suyuqlik va gaz mexanikasi» nomi bilan birlashgan holda fan va texnikaning yuksak rivojiga xizmat qilmoqda. XXI asrga kelib bu fanning hali to‘lasincha o‘rganilmagan an’anaviy muammolari fan va texnikaning yangi muammolarini keltirib chiqarmoqda. Bular, masalan, yuqori va giper tovush tezlik bilan harakatlanayotgan oqimlarda qarshilik, siyraklashgan gaz va plazmalar harakati, issiqlik va massa almashinuvi jarayonlari chigalliklari, ko‘p fazali muhitlar harakati, murakkab turbulent hatakat, zavod va fabrikalarda esa maxsus o‘ziga xos xususiyatli yo‘nlishlarga ega muhandislik loyihalari, hisoblari va boshqalar shular jumlasidandir. Bunday muammolarni hal qilish uchun ilmiy tadqiqotlarning barcha nazariy va eksperimental usullari, jumladan, taqribiy hisob usullaridan keng foydalanilmoqda. Bularni yaratishda L.I.Sedov, M.D.Millionshikov, V.V.Struminskiy, A.N.Kolmagorov, P.Ya.Polubarinova-Kochina, L.S.Leybenzon, L.G.Loysyanskiy, G.Shlixting, D.B.Spolding, Dj.Betchelor kabi olimlar va ularning ko‘p sonli shogirdlarining xizmatlari juda katta.

O‘zbekistonda esa suyuqlik va gaz mexanikasi fani rivojiga katta hissa qo‘shgan olimlarimizdan X.A.Raxmatullin, M.T.O‘rozboyev, J.F.Fayzullayev, O.Umarov, A.Begmatov, A.Hamidov, J.Akilov, B.Xo‘jayorov va hokazo. Akademik X.A.Raxmatullinning fanga parashyut nazariyasini, gazsimon muhitga (chang va gaz aralashmasiga) qattiq jismning yorib kirishi nazariyasini kiritganligini alohida qayd etishimiz mumkin.

Bugungi kunga kelib suyuqlik va gaz mexanikasi fanining yuksalishiga quyidagi sabablar kuchli turtki bo‘lmoqda. Bular: 1) EHMning rivoji ilgari hisoblash mumkin bo‘lmagan hisoblarni bajarish hamda tadqiq qilish va kuzatish mumkin bo‘lmagan tajribalarni hisoblash tajribalari orqali bajarish imkoniyatini tug‘dirganligi; 2) suyuqlik va gaz mexanikasida qo‘llash mumkin bo‘lgan matematik vositalarning keskin kengayganligi; 3) bugungi kunning ilmiy-texnik revolyutsiyasi, texnika rivojining gurkirashi, mikro- va makrodunyoni o‘rganishda tadqiqotlarning keng quloch yoyganligi.

Hozirgi kunda suyuqlik va gaz mexanikasi rivojining eng muhim yo‘nalishlari sifatida quyidagilarni qayt etish mumkin: suyuqlik va gazlarning unda harakatlanayotgan jismlarga ta’siri (texnik masalalar); suyuqlik va gazlarning quvur va mashinalarning har xil qismlari ichi bo‘ylab harakati (gaz va neft quvurlari, nasoslar, turbinalar va boshqa gidravlik mashinalarni loyihalash ishlari); suyuqlik va gazlarning g‘ovak muhitlar bo‘ylab harakati (filtratsiya); suyuqlikning va uning ichida yoki sirtida oqayotgan jismning muvozanati (gidrostatika); to‘lqinli harakatlar (seysmik jarayonlar, tovush tebranishlari, shovqin muammosi, suvning ko‘tarilishi va qaytishi, dengiz sirti to‘lqinlari, kema harakati natijasida paydo bo‘ladigan to‘lqinlar va hokazo); har xil kimyoviy jarayonlarda gazlarning hostatsionar harakati (detonatsiya, portlash, mashina porsheni va reaktiv dvigatellar yonuv kameralarida gaz oqimi va hokazo); suyuqliklarning turbulent harakati (suyuqlik va gazlarning bulutlarda va Yer atmosferasida, kanallarda, daryolarda, o‘tkazgich quvurlarda, mashina va har xil texnik inshootlarda harakati); qattiq jismlarni yonishdan va kuchli erishdan saqlash (masalan, kosmik kemaning zich atmosfera qatlamida katta tezlik bilan harakati); kuchli siqilgan yoki siyraklashgan yuqori yoki quyi haroratli suyuqlik va gazlarning fizik xossalari keskin oʻzgargandagi harakati (masalan, kriogen suyuqliklar harakati); magnit gidrodinamikasi yoki ferrogidrodinamika va plazmalar harakati; meteorologiya masalalari; kavitatsiya muammolari; biomexanika masalalari va hokazo.

Suyuqlik va gaz mexanikasi fanining, xususan, gidravlikaning amaliy masalalarini yechishda hammaga ma’lum boʻlgan quyidagi tadqiqot usullariga tayaniladi: cheksiz kichik miqdorlarni tahlil qilish usuli; oʻrta qiymatlar usuli; oʻlchovlar tahlili usuli; analog usuli; eksperimental usul.

Cheksiz kichik miqdorlarni tahlil qilish usuli – bu suyuqlik va gazlar muvozanati va harakati jarayonlarini miqdoriy tavsiflashning boshqa usullariga nisbatan eng qulayidir. Bu usul ob’ektlar harakatini atom-molekulyar darajasida, ya’ni harakat tenglamasini chiqarishda suyuqlikni (yoki gazni) modda tuzilishining molekulyar-kinetik nazariyasi nuqtai nazaridan qarash zarur boʻlganda juda yaxshi samara beradi. Bu usulning asosiy kamchiligi – bu abstraktlikning deyarli yuqori darajada ekanligida boʻlib, talabadan nazariy fizika sohasida juda keng bilimga ega boʻlishni hamda matematik analiz va vektor analizning har xil usullaridan mohirona foydalanishni talab qilishidadir.

Oʻrta qiymatlar usuli hammabobroq usullardan biri boʻlib, bu usul moddaning tuzilishi haqidagi sodda farazlarning asosiy gipotezalariga tayanadi. Bunda asosiy tenglamalarni chiqarish koʻp hollarda molekulyar-kinetik nazariyasi bilimlariga ega boʻlishni talab qiladi. Bu usul bilan olingan tadqiqod natijalari esa «sogʻlom fikr»ga qarshi boʻlmaydi va asoslangan boʻlib koʻrinadi. Bu usulning kamchiligi tadqiqot predmeti haqida ba’zi aprior farazlarga ega boʻlish zarurligida.

Oʻlchovlar tahlili usulini tadqiqotning qoʻshimcha usullaridan biri sifatida qarash mumkin va u oʻrganilayotgan mexanik jarayonlarni har tomonlama bilishni taklif etadi.

Analog usuli oʻrganilayotgan mexanik jarayon kabi moddaning oʻzaro ta’sirlashish turiga oid mukammal oʻrganilgan jarayonlar bor boʻlganda qoʻllaniladi.

Eksperimental usul boshqa tadqiqot usullari biror sababga koʻra qoʻllanilishi mumkin boʻlmagan hollarda tadqiqotning asosiy usuli hisoblanadi. Bu usuldan koʻpincha boshqa usullar bilan olingan natijalarning qay darajada toʻgʻriligini tasdiqlash uchun kriteriya sifatida foydalaniladi.

Oʻquv qoʻllanmaning tuzilishi. Yuqorida keltirilgan boshlangʻich tuchunchalarga tayangan holda ushbu oʻquv qoʻllanmada suyuqlik va gaz mexanikasining gidrostatika, kinematika va dinamika bo‘limlari oddiy tushunchalar, izohlar va kerakli formulalar bilan sodda tilda tushuntirilgan.

Dastlab suyuqlik va gazlarning *fizik parametrlari* izohlangan.

Gidrostatikaga oid tushunchalar esa gidravlika fanining *gidrostatika* (suyuqlikning kuchlar maydonidagi muvozanatini o‘rganuvchi bo‘lim) bo‘limida kengroq berilganligi sababli bu o‘quv qo‘llanmada unga oid tushunchalar ancha qisqartirilgan holda keltirilgan.

Suyuqlik va gaz mexanikasining *kinematika* (suyuqlik hajmining shakli, o‘lchamlari va fazoviy holatining o‘zgarishini ularni yuzaga keltiruvchi sabablarsiz o‘rganuvchi bo‘lim) bo‘limiga oid tushunchalar namunaviy fan dasturi doirasida batafsil yoritilgan.

Suyuqlik va gaz mexanikasining *dinamika* (suyuqlikning harakati qonunlarini o‘rganuvchi bo‘lim) bo‘limida esa qator muhim masalalarga e’tibor berilgan.

Suyuqlik va gaz mexanikasida dinamikaning eng muhim masalasi - bu oqimning kinematik va dinamik xarakteristikalari o‘rtasidagi bog‘lanishni o‘rnatishdan iborat bo‘lib, bunda avvalo suyuq yoki gaz muhit bilan unda harakatlanayotgan yoki uni o‘rab turgan qattiq jism o‘rtasidagi o‘zaro ta’sir kuchlarini aniqlash zarur bo‘ladi. Bu o‘zaro ta’sir sirti bo‘ylab taqsimlangan urinma va normal kuchlanishlarni aniqlash imkonini beradi.

Masalaning qo‘yilishidan kelib chiqqan holda oqimning har bir nuqtasi uchun uni xarakterlovchi parametrlarni aniqlash maqsadida mos tenglamalar sistemasi tuziladi. Bu tenglamalar soni suyuqlik yoki gaz uchun aniqlanishi lozim bo‘lgan noma’lum parametrlar sonidan kelib chiqqan holda tuzilgan munosabat tenglamalari sistemasidan iborat bo‘ladi.

Suyuqlik va gaz mexanikasi tenglamalari sistemasini tuzish uchun bu tenglamalar, ularga kirgan har bir had va parametrlarning fizik-mexanik ma’nosini chuqur anglamoq zarur. Qabul qilingan oqim modeli uchun tuzilgan tenglamalar sistemasi ham ko‘p ma’lumot beruvchi va o‘z navbatida optimal tuzilgan bo‘lishi kerak. O‘z navbatida aniq tuzilgan model (ideal yoki qovushoq suyuqlik, siqiluvchan yoki siqilmaydigan suyuqlik, statsionar yoki nostatsionar oqish, tekis yoki fazoviy oqim va hokazo) o‘z navbatida tenglamalarni yetarlicha soddalashtirishga va ularning qo‘llanilishini osonlashtirishga imkon beradi.

Suyuqlik va gaz mexanikasining dinamika bo‘limida differensial tenglamalarning xususiy yechimlari juda katta ahamiyatga ega, masalan, Gromeki, Lagranj, Eyler, Bernulli integrallari shular jumlasidandir. Bu integrallarning fizik-mexanik ma’nosini to‘g‘ri tushuna bilish – bu ularni to‘g‘ri, aniq, maqsadli va ularning qo‘llanilish chegarasini bilgan holda qo‘llay bilish imkonini beradi.

Suyuqlik va gaz mexanikasida dinamikaning bir qator masalalari siqilmaydigan va siqiluvchan suyuqliklar uchun bir o‘lchovli statsionar izentropik oqim masalalariga Bernulli tenglamasini qo‘llab yechishdan iborat. Bunga misol qilib, kanal, sharracha va quvur shaklidagi har xil oqimlarda suyuqlik va siqiluvchan gaz oqishini tekshirish, tormozlanish parametrlarini, kritik parametrlarni, maksimal tezlikni va hokazolarni aniqlash kabi amaliy masalalarni yechishga imkon beradi. Bernulli tenglamasi yordamida esa gazlarning izentropik oqishini ifodalovchi bir qator gazodinamik munosabatlar (funksiyalar) qurilgan.

Shuningdek, suyri jismni o‘z ichiga olgan (xususan, usiz) suyuqlik oqimining tezliklar maydoni hamda ta’sir etuvchi kuchlarning suyuqlikda va qattiq jism chegarasida (xususan, chegaraviy qatlamda) taqsimlanishi tadqiq qilinadi. Buning uchun esa masalalar uch turga bo‘lib o‘rganiladi: *tashqi masala* (masalan, suyri jism suyuqlik oqimi ichida); *ichki masala* (masalan, qattiq devor bilan chegaralangan kanalda yoki quvurda suyuqlikning oqimi); *erkin oqim* (qattiq chegara bo‘lmagan holdagi oqim, masalan, soplodan oqib chiqqan qo‘zg‘almas yoki harakatlanuvchan suyuqlik yoki suyri jism ortidagi aerodinamik iz).

Mazkur o‘quv qo‘llanmada, yuqorida aytilganlar asosida, ideal va qovushoq suyuqliklarning modeli, ularning laminar va turbulent oqishlari kabi masalalar atroflicha yoritilgan, suyuqlik va gaz mexanikasining bir qator klassik modellari keltirilgan, tuzilgan chegaraviy masalalarni yechishning ba’zi usullari bayon qilingan.

Har bir bob oxirida amaliy masalalar namunalari, ularning yechimlari, mavzuni talaba mustaqil o‘zlashtirishi uchun amaliy topshiriqlar hamda talabaning bilimini aniqlash uchun sinov savollari keltirilgan. Amaliyot mashg‘ulotlari va mustaqil ish topshiriqlari uchun qo‘shimcha masala va misollarni foydalanilgan va tavsiya etilgan qo‘llanmalardan olishni taklif qilamiz.

Ushbu fan doirasida o‘rganilishi mo‘ljallangan bo‘limlardan «Chegaraviy qatlam nayariyasi» va «Filtratsiya nazariyasi» shu ixtisoslikning magistratura mutaxassisligida alohida fan sifatida, quvurlardagi gidravlik qarshilik hisobi esa «Gidravlika» fani doirasida o‘rganilishi o‘quv rejaga kiritilganligi sababli ular bu o‘quv qo‘llanma hajmiga kiritilmadi. Bundan tashqari, ushbu o‘quv qo‘llanmaga kirmagan «Gazodinamika» - siqiluvchan gazning nisbatan katta tezlikdagi harakati haqidagi fan, «Magnit gidrodinamikasi» va «Ikki fazali oqimlar gidrodinamikasi» kabi bo‘limlar ham mustaqil fan sifatida alohida o‘rganiladi.

Suyuqlik va gaz mexanikasining deyarli barcha amaliy masalalarini yechish nochiziqli oddiy yoki xususiy hosilali differensial tenglamalarni yechishga olib kelinadi. Ularni analitik usul bilan deyarli yechish mumkin emas. Shunday hollarda bizga *sonli usullar*dan foydalanish samarali natijalar olishimizga imkon beradi. Qolaversa, hozirda bir qator zamonaviy matematik paketlar (Maple, Mathcad, Mathematica, MATLAB va hokazo) mavjudki, ular yordamida sonli usullardan foydalanib, murakkab tizimlardagi oqimlarni tahlil qilish mumkin. Bularni o‘rganish uchun esa ishchi o‘quv rejada alohida «Gidrodinamika masalalarini yechishning sonli usullari» nomli tanlov fan mavjud.

Ushbu o‘quv qo‘llanma universitetlarning mexanika ta’lim yo‘nalishi bakalavr talabalariga suyuqlik va gaz mexanikasi fanini mukammal o‘rganishlarida, ularning mustaqil bilim va ilmiy izlanish ko‘nikmalarini hosil qilishlarida yaqindan yordam beradi, degan umiddamiz.

Ushbu o‘quv qo‘llanma shartli ravishda uch qismdan iborat bo‘lib, 1-qismida gidrostatika, 2-qismida kinematika, 3-qismida esa gidrodinamika tushunchalari kiritildi.

O‘quv qo‘llanmani tayyorlash jarayonida rus tilidagi bir qator darslik va o‘quv qo‘llanmalardan hamda Internet tarmog‘idagi katta hajmdagi ma’lumotlardan bevosita foydalanildi. Ushbu adabiyotlar ro‘yxati o‘quv qo‘llanma oxirida keltirildi.

O‘quv qo‘llanmaning kamchiliklarini bartaraf etishga va uning sifatini oshirishga qaratilgan barcha fikr va mulohazalarni minnatdorchilik bilan qabul qilamiz.

1–BOB.
SUYUQLIKNING ASOSIY FIZIK XOSSALARI VA PARAMETRLARI. KUCHLAR VA KUCHLANISHLAR

Ushbu o‘quv qo‘llanmadagi ba’zi tushunchalar bilan talaba tutash muhit mexanikasi va fizika fanlaridan tanish deb hisoblaymiz, ba’zi zarur matematik tushunchalar esa 1-ilovada keltirilgan. Suyuqlikni tutash muhit deb faraz qilib, silliq, ya’ni uzluksiz va yetarlicha hosilalarga ega gidrodinamik xarakterdagi funksiyalarni kiritamiz. Quyida asosiy fizik parametrlar (bosim, zichlik, qovushoqlik, kuchlanish va hokazo) haqida tushunchalar berilgan. Suyuqlikning harakatini qarashdan avval uning butun hajmi yoki sirti bo‘ylab taqsimlangan kuchlarni qarash lozim.

1.1. Real suyuqlikning asosiy fizik xossalari

Avvalo suyuqlikning asosiy fizik xossalari bilan tanishish foydali bo‘ladi deb hisoblab, ulardan eng asosiylarini keltiramiz.

Bosim. *Bosim birlik yuzaga ta’sir etuvchi kuch kabi aniqlanadi va kuchlanish bilan bir xil o‘lchovga ega bo‘ladi.*

Biror sirtdagi bosim shu sirt normali bo‘ylab unga ta’sir etadi va u juda ham muhim xarakteristika hisoblanadi, chunki suyuqlikka botirilgan jism sirti bo‘ylab integrallash (yig‘indi olish, qo‘shish) yordamida shu jismga ta’sir etuvchi asosiy kuchlar va momentlar aniqlanadi. Tinch holatdagi suyuqlik uchun uning kichik hajmiga ta’sir etuvchi kuchlar va lokal gradient bilan o‘zaro bog‘langan bosim odatda og‘irlik kuchi bilan muvozanatlashadi. Shuning uchun gidrostatik bosimning orttirmasi quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$\Delta p = \rho g h \ , \qquad (1.1)$$

bunda p – bosim (kPa); ρ – zichlik (kg/m^3); h – bosim o‘lchanayotgan balandliklar farqi (m); g = 9,81 m/s^2 – erkin tushish tezlanishi. Ushbu (1.1) tenglama ma’lum shartlarda harakatlanayotgan suyuqlik uchun ham o‘rinlidir. Xususan, ko‘pgina geofizik oqimlarda bosimni vertikal yo‘nalishda o‘lchash (1.1) formula orqali taqriban amalga oshiriladi. Bosimning SI xalqaro birliklar sistemasidagi o‘lchov birligi Pascal (Pa): 1 Pa = 1 N/m^2 = 10^{-3} kPa = 10^{-6} MPa (kPa – kiloPaskal; MPa – megaPaskal); MKGSS birliklar sistemasida 1 kg·k/m^2 = 9,81 Pa (1 Pa = 0,102 kg·k/m^2; kg·k – kilogramm-kuch); SGS birliklar sistemasiga ko‘ra din/sm^2. Bulardan tashqari, bosimning bu sistemalarga kirmaydigan ba’zi birliklari ham ishlatiladi: texnik atmosfera – at (1 at = $9,8\cdot10^4$ Pa); millimetr simob ustuni (1 mm simob ustuni = 133,3 Pa = 9,81 N/m^2 ≈ 10 N/m^2) – buning ma’nosi 1 m^2 tekis yuzaga 1 litr suvni yoyib chiqdik degani; 760 mm simob ustuni = 101325 N/m^2 ≈ 100000 N/m^2 balandligiga ko‘paytirilgan bosimga teng fizik atmosfera (hozirda ko‘proq shu birlik qo‘llaniladi) – atm (1 atm = 1,033 at = $1,013\cdot10^5$ Pa); bar, meteorologiyada millibar qo‘llaniladi (1 bar = 10^5 Pa va 1 мbar = 10^2 Pa).

Temperatura. Har qanday moddaning ko‘pchilik fizik va mexanik xossalari uning temperaturasiga bog‘liq.

Temperatura – bu suyuqlik yoki gazlarning issiqlik holatini xarakterlovchi kattalik (*lotincha «temperatura» – aralashishga doir, normal holat so‘zidan olingan*).

Absolyut temperaturaning SI xalqaro birliklar sistemasidagi birligi Kelvin shkalasida ^{0}K – gradus Kelvin (T^0K kabi belgilanadi) yoki Selsiyning yuz graduslik shkalasida ^{0}C – gradus Selsiy (t^0C kabi belgilanadi) kabi yoziladi, bunda absolyut nol temperatura Kelvin shkalasida $T = 0^0$K, Selsiy shkalasida $t = -273,15^0$C dan boshlanadi, ular orasidagi bog‘lanish esa $T^0\text{K} = 273,15^0\text{C}+t^0\text{C}$. Suyuqlik yoki gazni tashkil qilgan molekulalarning harakat tezligi qancha katta bo‘lsa, ularning temperaturasi shuncha yuqori bo‘ladi. Agar, suyuqlik o‘zining temperaturasidan farq qiladigan temperaturali biror muhit bilan tutashgan bo‘lsa, yoki issiqlik ajralishi bilan kuzatiladigan biror jarayon suyuqlik ichida sodir bo‘lsa, u holda, shu suyuqlikda issiqlik o‘tkazuvchanlik jarayoni yuz berib, uning temperaturasi o‘zgaradi. Suyuqlik temperaturasining o‘zgarishi uning katta tezlikda oqishidagi siqilishi yoki og‘irlik kuchlarini hisobga olgan holdagi atmosfera oqishlarida ham sodir bo‘lishi mumkin. Shuni eslatib o‘tamizki, qaynayotgan suyuqlikning temperaturasi o‘zgarmaydi.

Zichlik. Mexanik nuqtai nazardan *cheksiz kichik hajmning zichligi* yoki *o‘rtacha zichlik* deb uning massasining hajmiga nisbatiga aytiladi, ya’ni bir jinsli modda (suyuqlik) uchun

$$\rho = \frac{M}{V}\ , \tag{1.2}$$

bu yerda M – suyuqlikning massasi (kg); V – suyuqlikning hajmi (m^3). Zichlikning SI xalqaro birliklar sistemasidagi o‘lchov birligi kg/m^3. Gazlarning zichligi ko‘pincha, gram taqsim litrda (g/l) o‘lchanadi (1 kg/m^3 = 1 g/l).

Ammo ba’zi suyuqliklar zichligining o‘zgarishi uchun ularning bosimi juda keskin o‘zgarishi zarur. Shuning uchun suv (suyuq fazasida) ko‘pincha siqilmaydigan (zichligi o‘zgarmaydigan) suyuqlik deb faraz qilinadi. 1.1– va 1.2–jadvallarda bosim, temperatura, zichlik va boshqa parametrlarning har xil qiymatlari uchun mos ravishda havo va suvning xossalari keltirilgan.

Harakatlanayotgan muhitning zichligi temperatura va bosimdan, uning bosimi esa muhit harakatining xarakteridan bog‘liq.

Suvdan boshqa barcha suyuqliklarning zichligi temperatura oshishi bilan kamayadi. Suv t=4^{0}C da yuqori anomal zichlikka ega (1.3-jadval).

1.1–jadval. Atmosfera bosimida havoning xossalari.

Tempe–ratura T [^{0}K]	Zichlik ρ [kg/m^3]	Dinamik qovu–shoqlik μ·10^5 [kg/(m·s)]	Issiqlik o‘tkazuv–chanlik k [Vt/m·^{0}K]	Termo–diffuziya α·10^5 [m^2/s]	Prandtl soni (Pr)	Solish–tirma issiqlik sig‘imlar nisbati
100	3,6010	0,6924	0,00925	0,2501	0,770	1,39
300	1,1774	1,9830	0,02624	2,2160	0,708	1,40
500	0,7048	2,6710	0,04038	5,5640	0,680	1,39
900	0,3925	3,8990	0,06279	14,271	0,696	1,34
1000	0,1858	6,2900	0,11700	48,110	0,704	1,28

1.2–jadval. To‘yingan bug‘ bosimida suvning xossalari.

Tempe–ratura t [^{0}C]	Bosim p [kPa]	Zichlik ρ [kg/m^3]	Dinamik qovu–shoqlik μ· 10^5 [kg/(m·s)]	Issiqlik o‘tkazuv–chanlik k [Vt/m·^{0}K]	Termo–diffuziya α·10^5 [m^2/s]	Prandtl soni (Pr)
0,01	0,611	1002,28	179,2	0,552	0,01308	13,6
40	7,384	994,59	65,44	0,628	0,01512	4,34
100	101,35	960,63	28,24	0,680	0,01680	1,74
200	1553,8	866,76	13,87	0,665	0,01706	0,937
300	8581,0	714,26	9,64	0,540	0,01324	1,019

Ko‘p hollarda zichlik o‘rnida *solishtirma hajm* ishlatiladi.

Zichlikka teskari bo‘lgan kattalik solishtirma hajm deb ataladi:

$$\bar{V} = \frac{1}{\rho} = \frac{V}{M},$$

uning birligi zichlikning teskari birligiga teng.

Solishtirma og‘irlik. *Hajm birligidagi moddaning* (*suyuqlikning*) *og‘irlik miqdori solishtirma og‘irlik deyiladi va γ harfi bilan belgilanadi.*

Bir jinsli modda (suyuqlik) uchun

$$\gamma = \frac{G}{V},$$

bu yerda *G* – suyuqlikning og‘irligi; *V* – uning egallagan hajmi. Bundan ko‘rinadiki, solishtirma og‘irlik: SI xalqaro birliklar sistemasida N/m^3 bilan o‘lchanadi (masalan, suv t=4^{0}C temperaturada $\rho = 1000$ кg/m^3 zichlikka va $\gamma = 9800$ N/m^3 solishtirna og‘irlikka ega); SGS sistemasida [din/sm^3]; MKGSS sistemasida [kg·k/m^3] bilan o‘lchanadi.

Massa bilan og‘irlik o‘zaro $Mg=G$ kabi bog‘langanligidan, $M = G/g$. Ma’lumki, $\rho = M/V$ ekanligidan, $\rho = G/(gV)$. Demak suvning zichligini ushbu

$$\rho = \frac{\gamma}{g} \tag{1.3}$$

formula bo‘yicha aniqlash mumkin.

Ishlab chiqarish sharoitida suyuqlikning solishtirma og‘irligi yoki zichligini aniqlash uchun *areometr* deb ataluvchi maxsus asbobdan foydalaniladi (1.1-rasm).

1.3-jadval. Normal atmosfera bosimida suv jichligining temperaturadan bog‘liqligi.

t, ^{0}C	0	2	4	6	8	10	15	20	25
ρ, kg/m^3	999,87	999,97	1000	999,97	999,88	999,75	999,15	998,26	997,12

t, ^{0}C	30	40	50	60	70	80	90	100
ρ, kg/m^3	995,76	992,35	988,20	983,38	977,94	971,94	965,56	958,65

Areometr – bu cho‘zinchoq, ichi bo‘sh shisha naycha bo‘lib, yuqori tor qismi suyuqlikning solishtirma og‘irligi yoki zichligini ifodalovchi shkalalarga bo‘lingan, quyi kengaygan qismi esa suyuqlikning temperaturasini ko‘rsatadi.

Suyuqlikning solishtirma og‘irligini o‘lchash uchun areometr idishdagi suyuqlikka botiriladi. Areometrning quyi qismida joylashtirilgan yuk (odatda, u simob) hisobiga u suyuqlikda vertikal holatda suzadi. Areometrning cho‘kish darajasini ko‘rsatuvchi areometrik shkala bo‘laklari suyuqlikning mos solishtirma og‘irligi (zichligi) miqdorini ko‘rsatadi.

1.1-rasm. Areometr

Ba’zi suyuqliklarning har xil temperaturadagi zichliklari va solishtirma og‘irliklari 1.4– va 1.5–jadvallarda keltirilgan.

Muvozanat holatidagi suyuqlik kichik hajmining termodinamik holati o‘zaro bog‘liq bo‘lmagan ikkita termodinamik parametrlarning berilishi bilan bir qiymatli aniqlanadi, masalan, havo uchun bosim va temperaturaning berilishi yetarli. Qolgan termodinamik parametrlar (masalan, zichlik, solishtirma hajm, ichki energiya, entalpiya, entropiya va hokazo) va holat parametrlari (masalan, tovush tezligi) yuqoridagi ikkita parametrlarning funksiyaslari bo‘ladilar.

1.4–jadval. Ba’zi suyuqliklar zichligi va solishtirma og‘irligi.

№	Suyuqliklar	Tempera–tura (t, ^{0}C)	Zichlik (ρ, g/sm^3)	Solishtirma og‘irlik (γ, kg·k/sm^3)
1.	Toza suv	4	1	980
2.	Toza suv	15	0.999	999
3.	Dengiz suvi	15	1,02	1020
4.	Kerosin	15	0,79 – 0,82	790 – 820
5.	Benzin	15	0,68 – 0,78	680 – 780
6.	Gliserin	0	1,26	1260
7.	Neft	20	0,76 – 0,90	760 – 900

1.5–jadval. Suv solishtirma og‘irligining temperaturadan bog‘liqligi.

(t, ^{0}C)	0	4	10	20	30	40
γ, kg·k/sm^3	999,87	1000	999,73	998,23	995,67	992,24

Xususan, mo‘tadil temperatura va bosimdagi havo uchun uning termodinamik parametrlari ideal gazning quyidagi holat tenglamasi bilan bog‘langan:

$$p\overline{V} = RT \quad \text{yoki} \quad p = \rho RT\,, \tag{1.4}$$

bunda $\bar{V} = 1/\rho$ – solishtirma hajm; p – bosim (kPa); ρ – zichlik (kg/m^3); T – absolyut temperatura; R – solishtirma gaz doimiysi, masalan, havo uchun R = 287,1 Joul/(kg·^{0}K), tabiiy gaz uchun esa R = 520 Joul/(kg·^{0}K).

Agar μ – gazning molyar massasi (masalan, havo uchun μ = 0,02896 kg/mol) bo‘lsa, u holda $R=R_0/\mu$, bu yerda $R_0 \approx$ 8,314472 Joul/(mol·^{0}K) – universial gaz doimiysi. $\rho = M/V$ ekanligini e’tiborga olsak, u holda bizga ma’lum bo‘lgan quyidagi Mendeleyev-Klapeyron (Klapeyron (1799-1864), fransuz fizigi va muhandisi) tenglamasiga kelamiz:

$$pV = \frac{M}{\mu} R_0 T .$$

Gazlar uchun zichlikning o‘zgarishi ideal gazning (1.4) holat tenglamasiga ko‘ra bosim va temperaturaning o‘zgarishidan bog‘liq bo‘ladi. Bu munosabatdan ko‘rinadiki, temperaturaning oshishi bilan zichlik kamayadi va bosimning oshishi bilan esa zichlik ham oshib boradi. Suv uchun uning har xil termodinamik parametrlari o‘rtasidagi bog‘lanishni sodda arifmetik ifoda ko‘rinishida ifodalab bo‘lmaydi, ammo bu bog‘lanish jadvallar yordamida ham aniqlanishi mumkin.

Umuman olganda, suyuqlik zarrachasining gidrodinamik miqdorlari $Oxyz$ to‘g‘ri burchakli Dekart koordinatalari fazosida $\rho = \rho(x, y, z, t)$ – zichlik, $T = T(x, y, z, t)$ – temperatura, $p = p(x, y, z, t)$ – bosim, $\vec{u} = \vec{u}(x, y, z, t)$ – tezlik va boshqa funksiyalar orqali ifodalanadi.

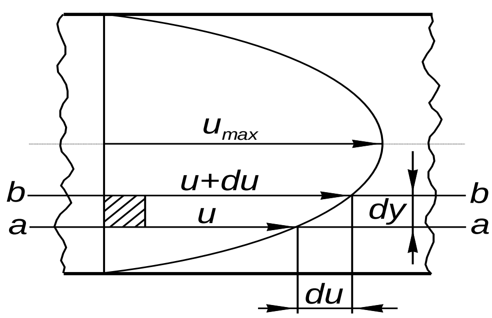
Qovushoqlik. Harakatlanayotgan suyuqlikdagi siljish kuchlarining miqdori dinamik qovushoqlik tushunchasiga olib keladi. *Suyuqlikning qovushoqligi* deb uning zarrachasi ko‘chishiga qarshilik ko‘rsatish xossasiga aytiladi. Molekulalarning o‘zaro ta’sirlashishi qovushoqlikning fizik sababidir. Suyuqlik tomchilari va gazlarning molekulyar tuzilishi farqli bo‘lganligi sababli ularning qovushoqlik tabiati ham farqli bo‘ladi. Suyuqliklarda qovushoqlik – bu uning molekulalari orasidagi ichki ishqalanish kuchining, gazlarda esa molekulalarning xaotik harakati natijasidagi ularning o‘zaro ta’sirlashishining paydo bo‘lishidir. Shuning uchun gazlarda temperaturaning oshishi bilan molekulalar harakati faollashadi, bu esa o‘z navbatida shu gazdagi qovushoqlikning oshishiga olib keladi. Aksincha, tomchili suyuqliklarda temperaturaning oshishi ularning qovushoqligi kamayishiga olib keladi, ya’ni molekulalar orasidagi o‘rtacha masofaning oshishi sodir bo‘ladi.

Moddaning muvozanat holati uning parametrlarining fazoda joylashishi bilan xarakterlanadi. Agar biror ta’sir natijasida fazoning biror nuqtasida muvozanat buzilishi paydo bo‘lsa, u holda bu moddada shu muvozanatni tiklashga intiluvchi mexanik yoki issiqlik almashinishi jarayoni boshlanadi. Umumiy holda bu almashinish *ko‘chirish jarayoni* deb ataladi. Turli hodisalarda energiyani, massani (moddani) va harakat miqdorini ko‘chirish jarayonlarini kuzatish mumkin.

Qovushoqlik – bu harakat miqdorini ko‘chirish jarayonini anglatadi.

Qovushoqlik kuchlari qanday paydo bo‘lishini tushuntirish maqsadida suyuqlikning doiraviy quvurdagi oqishini qaraymiz. Suyuqlik zarrachalarining tezlik vektorlari *Ox* o‘qiga parallel deb hisoblaymiz. Eng sodda holdan kelib chiqib, oqim ko‘ndalang kesimidagi tezliklar taqsimotini quramiz. Ko‘ndalang kesimdagi tezliklar taqsimotining grafik tasviri *tezliklar epyurasi* (*tezliklar maydoni*) deb ataladi. Suyuqlikning quvur devoriga tegib turgan zarrachalari tezliklari nolga teng va simmetriya o‘qiga yaqinlashgan sari bu tezlik oshib boradi, simmetriya o‘qida esa u o‘zining maksimal qiymatiga erishadi: $u = u_{\max}$ (1.2–rasm).

Suyuqlikning o‘zaro *dy* masofada joylashgan ikki qatlamini (*a–a* va *b–b*) qaraylik. Faraz qilaylik, *a–a* qatlam *u* tezlik bilan harakat qilayotgan bo‘lsin. Demak, *b–b* qatlam ham mos ravishda *u+du* tezlikka ega bo‘ladi. Shunday qilib, qatlamlar orasida joylashgan to‘g‘ri to‘rtburchakli suyuqlik zarrachasining yuqori va quyi chegaralari tezliklari turlicha bo‘lganligi hisobidan uning deformatsiyalanishi sodir bo‘ladi. Bunday harakat gidromexanika nuqtai nazaridan *oddiy siljish yoki sof siljish oqimi* deb ataladi.



1.2–rasm. Quvurdagi oqim va tezlik epyurasi.

1.2-rasmda tasvirlangan element orqali molekulalarning o‘zaro ta’sirlashishi kuchlanish tenzorining urinma tashkil etuvchisi paydo bo‘lishiga olib keladi. Bunda tashkil etuvchining ishorasi, ya’ni uning yo‘nalishi shundayki, qaralayotgan elementning ikkala tarafi bo‘yicha tezliklar ayirmasining kamayib borishi mos keladi.

Harakatlanayotgan suyuqlik qatlamlari orasida paydo bo‘ladigan taranglik kuchining miqdori Nyuton tomonidan taklif etilgan va ko‘p sonli tajribalar bilan tasdiqlangan formula bilan aniqlanadi:

$F_{ishq} = \mu \dfrac{du}{dy} S$, bu yerda *S* – o‘zaro tegib turgan qatlamlar sirti yuzasi; *du*/*dy* – miqdor normal yo‘nalishida tezlik o‘zgarishini, boshqacha aytganda, agar epyura haqida gap ketsa – tezlikning o‘zgarish sur’atini bildiradi. Ba’zida bu miqdorni *tezlikning ko‘ndalang gradiyenti* yoki *siljish* *deformatsiyasi tezligi* deb ham atashadi. Oxirgi tenglikning ikkala tarafini S ga bo‘lamiz. F_{ishq}/S nisbat τ – urinma kuchlanishni beradi.

Shunday qilib, tajribalar ko‘rsatdiki, ko‘pgina suyuqliklar uchun Nyuton gipotezasi o‘rinli, ya’ni bunga ko‘ra siljish kuchlanishi deformasiya tezligiga (gradientiga) to‘g‘ri proporsional, ya’ni

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}, \tag{1.5}$$

bunda μ – suyuqlikning fizik tabiatidan, agregat holatidan va temperaturasidan bog‘liq, ammo uning bosimidan deyarli bog‘liq bo‘lmagan proporsionallik koeffisienti bo‘lib, u *dinamik qovushoqlik* yoki sodda qilib *qovushoqlik koeffisienti* deb ataladi va SI birliklar sistemasida Pa · s (bunda s – sekund) bilan o‘lchanadi. Toza suv uchun dinamik qovushoqlikning temperaturadan bog‘liqlik ifodasi fransuz olimi J.Puazeyl tomonidan taklif etilgan bo‘lib, u quyidagicha yoziladi:

$$\mu = \mu_0 \,(1+0{,}0337t+0{,}000221t^2)^{-1},$$

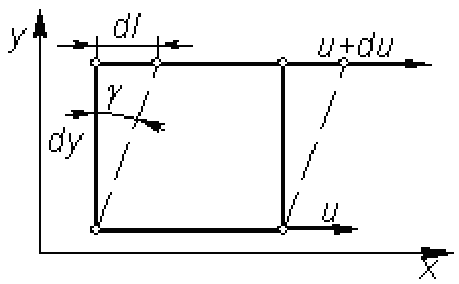
bunda t – temperatura, 0 – 90^{0}C; μ_0 – bu t = 0^{0}C dagi dinamik qovushoqlik. Dinamik qovushoqlik birligi uning nomiga «Puaz» (P) deb ataladi. SI birliklar sistemasida: 1 Pa · s = 10 P; SGS birliklar sistemasida esa 1 P = 1 g/(sm·s).

Yuqoridagi (1.5) munosabatdan yana bitta muhim xulosa chiqarish mumkin: *agar suyuqlik tinch holatda bo‘lsa, u holda u = 0 va buning natijasida τ = 0, ya’ni tinch holatda turgan suyuqlikda qovushoqlik kuchlari sezilmaydi*. Bu tabiiy holda ham kuzatiladi. Haqiqatan ham, idishga solingan suyuq muhitning qovushoqlik darajasini bilish uchun, masalan, stol ustida turgan stakandagi suyuqlikni boshqa idishga quyib ko‘rish yoki shu stakanga biror tayoqchani botirib olib, keyin undan suyuqlik qanday oqib tushishini kuzatish kifoya. Bu bilan biz suyuqlikning harakatini tabiiy holda kuzatgan bo‘lamiz.

Qaralayotgan suyuqlik zarrachasi tezligining ko‘ndalang gradiyenti quyidagicha mexanik ma’noga ega (1.3–rasm): dastlab to‘g‘ri to‘rtburchak shaklidagi suyuqlik zarrachasining yuqori va quyi qirralarida tezliklar farqi natijasida u deformatsiyalanadi va parallelogrammga aylanadi; *dl* kesma deformatsiyaning *dt* vaqt birligi ichidagi miqdorini ifodalaydi, ya’ni $dl = du \cdot dt$, u holda $\frac{du}{dy} = \frac{dl}{dt \cdot dy}$; ammo $\frac{dl}{dy} = \mathrm{tg}\,\gamma$, u holda $\frac{du}{dy} = \frac{\mathrm{tg}\,\gamma}{dt}$.

Bundan tezlikning ko‘ndalang gradienti siljishning nisbiy deformatsiyasi tezligini ifodalashi kelib chiqadi.

Shunday qilib, suyuqlikdagi urinma kuchlanish nisbiy deformatsiya tezligidan chiziqli bog'liq ekan. Suyuqlikning qattiq jismdan prinsipial farqi ham shundadir, chunki qattiq jismda urinma kuchlanish deformatsiyaning tezligiga emas, balki uning miqdoriga bog'liq bo'ladi.



1.3–rasm. Suyuqlik zarrachasi deformatsiyalanishining sxematik tasviri.

Yuqoridagi (1.5) tenglama *Nyuton suyuqligi* deb ataluvchi suyuqliklarning holatini tavsiflaydi. Havo yoki suvning oqishi (1.5) qonuniyatga bo'ysunadi. Shuning uchun (1.5) shart bajarilmaydigan syuqliklar *nonyuton suyuqliklar* deb ataladi. Bunday suyuqliklar haqida 5-bobda ba'zi ma'lumotlar berilgan. Yuqori aniqlikdagi normal temperatura va bosimda havoga o'xshash gazlarning qovushoqligi faqatgina temperaturaga bog'liq bo'ladi.

Havo uchun qovushoqlik temperatura oshishi bilan $T^{0,76}$ qonuniyat bo'yicha oshib boradi. 1.1–jadvalda havo uchun qovushoqlikning o'ziga xos qiymatlari keltirilgan. Suvga o'xshash suyuqliklarda qovushoqlik bosimdan kuchsiz bog'langan bo'ladi, ammo temperaturaning o'zgarishi bilan keskin o'zgaradi. Gazlardan farqli ravishda suyuqliklarning qovushoqligi temperaturaning oshishi bilan keskin kamayadi. Bunga misol sifatida suvning qovushoqlik qiymatlari 1.2–jadvalda keltirilgan. Temperaturaning oshishi bilan qovushoqlikning kamayishi barcha suyuqliklarga xos. Ammo katta bosimlarda bosimning oshishi bilan suyuqlikning qovushoqligi tez oshadi. Bu hodisa faollashuv energiyasining o'shishi va relaksatsiya vaqtining mos kattalashishidan bog'liq. Shuning uchun, suyuqlikning qovushoqligi uning turidan, temperaturasidan va bosimidan bog'liq.

Temperaturasi o'zgarishi kuzatiladigan oqimlar uchun Furye qonuni o'rinlidir, bunda issiqlik ko'chirishning lokal tezligi temperatura gradientiga to'g'ri proporsional bo'ladi, y'ani

$$\dot{Q}_i = -k\frac{\partial T}{\partial x_i}\ , \qquad (1.6)$$

bunda $\dot{Q}_i$ – x_i o'qi yo'nalishdagi birlik yuzaga mos keluvchi issiqlik uzatish tezligi; *k*– issiqlik o'tkazuvchanlik koeffisiyenti. Ta'kidlaymizki, (1.5) va (1.6) munosabatlar o'zaro o'xshash. Agar (1.6) dagi plastinkalar temperaturalarining qiymati har xil bo'lsa, u holda (1.6) qonuniyatga ko'ra suyuqlikda issiqlik uzatishi ushbu

$$\dot{Q}_y = -k\frac{\partial T}{\partial y}$$

munosabatga bo‘ysunadi, bu yerda k – issiqlik o‘tkazuvchanlik koeffisiyenti Vt/m·^{0}K bilan o‘lchanadi. Gazlarning issiqlik o‘tkazuvchanligi, xuddi qovushoqlikka o‘xshab, temperatura oshishi bilan oshib boradi. Suyuqliklar uchun, masalan, suv uchun, bosimning bir atmosferasida va temperaturaning 0^{0}C dan 100^{0}C oralig‘ida issiqlik o‘tkazuvchanlik juda ham kam o‘zgaradi. Havo va suvning o‘ziga xos issiqlik o‘tkazuvchanligi qiymatlari 1.1– va 1.2–jadvallarda keltirilgan.

Qovushoqlik va temperatura kelgusida o‘rganiladigan impuls va energiya tenglamalariga kiradi. Bu parametrlardan tashqari *kinematik qovushoqlik* va *issiqlik diffuziyasi* tushunchalarini ham kiritish zarur. Bular mos ravishda quyidagi munosabatlardan aniqlanadi:

$$\nu = \mu / \rho \quad \text{va} \quad \alpha = k/(\rho C_p),$$

bunda C_p – o‘zgarmas bosimdagi solishtirma issiqlik sig‘imi. ν va α ning qiymatlari SI birliklar sistemasida m^2/s (bunda s – sekund) bilan o‘lchanadi (bundan tashqari bu sistemaga kirmagan sm^2/s - stoks (St) birlik ham ishlatiladi: 1 St = 0,0001 m^2/s; bu birlik ingliz olimi G.Dj.Stoks nomiga qo‘yilgan) va ular *harakat miqdori* va *issiqlikka* mos kelib, *diffuziyani* ifodalaydi. Gazlar uchun xuddi havodagi kabi ν va α lar temperaturaning oshishi bilan oshib boradi (1.1–jadvalga qarang). Suyuqliklarda esa temperaturaning oshishi bilan kinematik qovushoqlik tez pasayadi, issiqlik diffuziyasi esa juda sekin oshib boradi.

Ko‘p hollarda suyuqlikni siqilmaydigan deb hisoblash mumkin. Aynan ana shunday hollarda dinamik qovushoqlik muhim ahamiyatga ega bo‘ladi. Ba’zu suyuqlik va gazlar uchun t = 20^{0}C temperaturada dinamik (μ) va kinematik (ν) qovushoqliklarning qiymatlarini 1.6–jadvalda keltiramiz.

Qovushoqlik suyuqliklarning fizik xossalari va temperaturasiga bog‘liq holda o‘zgaradi. Masalan, suv uchun 1.7–jadvalda dinamik va 1.8–jadvalda kinematik qovushoqlik koeffisiyentlarining temperaturaga bog‘liq o‘zgarishlari keltirilgan.

Eslatib o‘tamizki, gazlarning dinamik qovushoqligi berilgan temperaturada bosimga bog‘liq emas, kinematik qovushoqlik esa mos ravishda zichlikka teskari proporsional.

Mineral yog‘larda bosimning atmosfera qiymatidan 40 MPa gacha o‘zgarishida kinematik qovushoqlik t=80^{0}C da 2 marta va t=40^{0}C da 3 marta ortadi. Suvda bosimning qovushoqlikka ta’sir darajasi kichik.

1.6–jadval. Ba’zi suyuqlik va gazlar uchun $t = 20^0$C temperaturada μ va ν larning qiymatlari.

Suyuqlik va gazlar	μ, g/(sm·s)	ν, sm^2/s
Suv	0,01	0,01
Havo	0,00018	0,15
Spirt	0,018	0,022
Gliserin	8,5	6,8
Simob	0,0156	0,0012

1.7–jadval. Suv dinamik qovushoqligining temperaturaga bog‘liq holda o‘zgarishi.

t, ^{0}C	0	5	10	15	20	30
μ, mPa·s	1,78	1,52	1,31	1,14	1,01	0,80

t, ^{0}C	40	50	60	70	80	90
μ, mPa·s	0,66	0,55	0,47	0,41	0,36	0,32

1.8–jadval. Suv kinematik qovushoqligining temperaturaga bog‘liq holda o‘zgarishi.

t, ^{0}C	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\nu \cdot 10^{-6}$, m^2/s	1,79	1,73	1,67	1,62	1,57	1,52	1,47	1,43	1,39

t, ^{0}C	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$\nu \cdot 10^{-6}$, m^2/s	1,35	1,31	1,27	1,24	1,21	1,18	1,15	1,12	1,19	1,06

t, ^{0}C	20	25	30	35	40	45	50	60	70	90	100
$\nu \cdot 10^{-6}$, m^2/s	1,01	0,90	0,81	0,72	0,66	0,60	0,55	0,48	0,41	0,31	0,28

Suyuqliklarning qovushoqligi har xil viskozimetrlar va qurilmalar yordamida o‘lchanadi.

Siqiluchanlik - *bu suyuqlikning bosim ta’sirida o‘z hajmini o‘zgartirish xossasi.* Bu xossaning miqdoriy xarakteristikasi hajmiy siqilish koeffisientidir. Hajmiy siqilish koeffisienti *deb suyuqlik bosimining bir birlikka o‘zgarishidagi nisbiy hajm o‘zgarishiga aytiladi va* β_V *kabi belgilanadi*:

$$\beta_V = -\frac{\Delta V}{V \cdot \Delta p} = \frac{\Delta \rho}{\rho \cdot \Delta p},$$

bunda ΔV va $\Delta \rho$ – bosimning Δp miqdorga o‘zgarishiga mos keluvchi mos ravishda V hajmning va ρ zichligining o‘zgarishlari (bu yerda ushbu $\rho\Delta V = V\Delta\rho$ massa o‘zgarmaslik sharti e’tiborga olingan). Keltirilgan ta’rifdan ko‘rinadiki, hajmiy siqilish koeffisiyentining o‘lchov birligi Pa^{-1}, ya’ni $[\beta_V] = Pa^{-1}$.

Hajmiy siqilish koeffisientiga teskari miqdor suyuqlikning elastiklik moduli E_s (Pa) deb ataladi:

$$E_s = 1/\beta_V \quad \text{yoki} \quad E_s = \rho\Delta p / \Delta\rho .$$

Bu yerdan

$$\Delta\rho/\rho = \Delta p/ E_s .$$

Bu munosabat suyuqliklar uchun har taraflama siqilish sharoitida Guk qonunini ifodalaydi.

Suyuqliklarning elastiklik moduli E_s ning qiymati bosim va temperaturadan bog‘liq, shuning uchun suyuqliklar Guk qonuniga «aniq bo‘ysunmaydi». Elastiklik moduli adiabatik va izotermik turlarga bo‘linadi. Birinchisi ikkinchisidan biroz katta va u suyuqlik siqilishining tez oqimli jarayonlarida namoyon bo‘ladi, masalan, quvurdagi gidrozarbada. Bosim va temperaturaning kichik o‘zgarish oralig‘ida E_s ning qiymatini o‘zgarmas deb hisoblash mumkin. Masalan, suv uchun $E_s \approx$ 1000 MPa, bu miqdor po‘latnikidan qariyb 100 marta katta. Suv uchun elastiklik moduli E_s ning har xil temperaturadagi qiymatlari 1.9-jadvalda keltirilgan (bosimning o‘zgarishi normal holatdan 50 atm gacha).

Gidravlik uzatgichli mexanizmlarda foydalaniladigan mineral yog‘larning elastiklik moduli t=20^{0}C da 1,35–1,75 GPa (bundagi kichik qiymatlar yengilroq yog‘larga mos keladi), benzin va kerosin uchun 1,3 GPa, simob uchun o‘rtacha 3,2 GPa, burg‘ulashda foydalaniladigan soz tuproqli qorishmalar uchun 2,5 GPa.

1.9-jadval. Suv elastiklik moduli E_s ning har xil temperaturadagi qiymatlari.

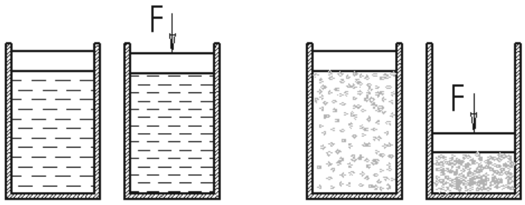
t, ^{0}C	0	10	20	30
E_s, MPa	999,87	999,97	1000	999,97

Agar bosim orttirmasini $\Delta p = p - p_0$ deb, hajm o‘zgarishini $\Delta V = V - V_0$ deb va zichlik orttirmasini $\Delta\rho = \rho - \rho_0$ deb qabul qilsak, yuqoridagi hajmiy siqilish koeffisientini hisoblash ifodasidan quyidagilar kelib chiqadi:

$$V_0 = V(1+\beta_V \Delta p); \qquad \rho_0 = \rho(1-\beta_V \Delta p).$$

Tomchili suyuqliklar uchun β_V ning qiymati juda ham kichik: (3 – 7,4)·10^{-9} Pa^{-1}. Suv uchun uning oʻrtacha qiymati β_V=5·10^{-10} Pa^{-1}. Bu shuni anglatadiki, bosim 0,1 MPa (~1 atm) ga oshganda $\Delta V/V_0$ hajmning nisbiy oʻzgarishi 1/20000 ni tashkil etadi, ya’ni u juda ham sezilarsiz. Shuning uchun koʻpgina hollarda tomchili suyuqliklarni siqilmaydigan suyuqliklar deb hisoblash mumkin. Gazsimon suyuqliklar esa, umuman olganda, juda ham siqiluvchan moddalardir (1.4-rasm).

Gazlarning siqiluvchanligi juda ham katta, masalan, izotermik jarayonda atmosfera havosining hajmiy siqilish koeffisiyenti 10^{-5} Pa^{-1}.



1.4-rasm. Suyuqlik va gazlarning siqilishi.

Ideal gazni taxminan 10 MPa bosimgacha siqish mumkin. Suyuqlikning siqilishi asosan unga aralashgan gaz pufakchalarining siqilishidan bogʻliq. Siqilishda energiya sarflanadi. Siqiluvchanlik gidrotizimda avtotebranishlarni yuzaga keltirishi, bosimning keskin oʻzgarishiga olib kelishi mumkin (masalan, suv quvuridagi joʻmrakni keskin ochish yoki yopishda). Bunday hollarda suyuqlikning siqiluchanligini e’tiborga olmaslik jiddiy xatoliklarga olib keladi.

Agar suv absolyut siqilmaydigan suyuqlik boʻlganda edi, okeanlardagi suv sathining balandligi yana 30 m ga koʻtarilgan boʻlar edi.

Temperaturaviy kengayish koeffisienti *deb suyuqlik temperaturasining bir birlikka oʻzgarishidagi uning hajmining nisbiy oʻzgarishiga aytiladi va u* β_t $({}^0C)^{-1}$ *kabi belgilanadi*:

$$\beta_t = \frac{\Delta V}{V \cdot \Delta t} = -\frac{\Delta \rho}{\rho \Delta t},$$

bunda ΔV va $\Delta \rho$ – temperaturaning Δt miqdorga oʻzgarishiga mos keluvchi mos ravishda V hajmning va ρ zichlikning oʻzgarishi.

Suv uchun temperaturaviy kengayish koeffisienti temperatura va bosimninig oshishi bilan ortadi; boshqa koʻpchilik tomchili suyuqliklar uchun esa β_t $({}^0C)^{-1}$ bosimning oshishi bilan pasayadi. Temperatura va bosimning kichik oraliqlarda oʻzgarishida uni β_t = const deb qabul qilish mumkin. Suv uchun bosimning 0,1 dan 20 MPa gacha oshishida va t (1 – 100)^{0}C temperaturalarda β_t koeffisiyent 14,0·10^{-6} dan 621,0·10^{-6} gacha o‘sadi. Masalan, suv uchun t = 20^{0}C va p = 0,1 MPa bo‘lganda β_t =150,0·10^{-6} (^0C)$^{-1}$. Aniqroq qilib aytganda, suvning β_t temperaturaviy kengayish koeffisiyenti 50^{0}C temperaturagacha o‘sib boradi, 50^{0}C temperaturadan oshganda esa kamayib boradi. Ba’zi suyuqliklarning β_t qiymatlari normal atmosfera bosimi va 20^{0}C temperatura uchun 1.10-jadvalda keltirilgan. Suvning normal atmosfera bosimidagi β_t qiymatlari 1.11-jadvalda keltirilgan.

Neft mahsulotlarining zichligi 920 kg/m^3 dan 700 kg/m^3 gacha kamayganda β_t koeffisiyent 0,0006 dan 0,0008 gacha ortadi. Gidrotizimlarda foydalaniladigan suyuqliklar uchun odatda β_t koeffisiyent temperaturadan bog‘liq emas deb qabul qilinadi. Bunday suyuqliklar uchun bosim atmosfera bosimidan 60 MPa gacha oshganda β_t koeffisiyent 10 – 20 % gacha ortadi, bunday suyuqliklarning temperaturasi qancha yuqori bo‘lsa β_t koeffisiyentning qiymati shuncha sezilarli ortib boradi.

Agar temperatura orttirmasini $\Delta t = t - t_0$ deb, hajm o‘zgarishini $\Delta V = V - V_0$ deb qabul qilsak, yuqoridagi temperaturaviy kengayish koeffisientini hisoblash formulasidan quyidagilar kelib chiqadi:

$$V_0 = V(1 - \beta_t \Delta t) \quad \text{yoki} \quad \gamma_0 = \gamma(1 + \beta_t \Delta t); \quad \rho_0 = \rho(1 + \beta_t \Delta t).$$

Bu yerdan suyuqlik qizdirilganda uning hajmi oshishi hisobiga shu suyuqlik zichligining kamayishini aniqlashning quyidagi D.I.Mendeleev formulasi kelib chiqadi:

$$\rho = \rho_0 / (1 + \beta_t \Delta t).$$

1.10-jadval. Ba’zi bir suyuqliklarning β_t – temperaturaviy kengayish koeffisiyenti

Koeffisiyent	Suv	Glitserin	Spirt	Neft	Simob
β_t, 10^{-3}(^{0}K)$^{-1}$	0,15	0,50	1,10	0,60	0,18

1.11-jadval. Suv uchun β_t koeffisiyentning normal atmosfera bosimidagi qiymatlari.

Bosim p, atm	β_t, 10^{-3} ^{0}K^{-1} ning har xil t (^{0}C) dagi qiymatlari				
	1–10	10–20	40–50	60–70	90–100
1	140	150	420	556	719
100	430	165	422	548	–
500	1490	236	429	523	661

Cho‘zilishga qarshilik. Maxsus fizik tajribalar shuni ko‘rsatadiki, sokin suyuqlik (xususan, suv, simob) ba’zida juda katta cho‘zuvchi zo‘riqishlarga qarshilik ko‘rsatish xususiyatiga ega. Ammo oddiy sharoitda vaznli qattiq zarrachalar va mayda gaz pufakchalarni o‘z ichiga olgan texnik jihatdan toza suyuqliklar, hatto juda kichik cho‘zilish kuchlanishiga ham bardosh bermaydi. *Shuning uchun tomchili* (*xususan, texnik*) *suyuqliklarda cho‘zilish kuchlanishi mavjud emas deb hisoblash qabul qilingan*.

Ammo tajribalar yordamida shu narsa aniqlanganki, sentrifuga (markazdan qochirma kuch ta’sirida qorishmani mexanik ravishda ajratuvchi qurilma) yordamida gazsizlantirilgan distillangan suvning juda ham qisqa vaqt oralig‘ida cho‘zilish kuchlanishi taxminan 25 MPa ga yetgan.

Gazlarning eruvchanligi. Barcha suyuqliklar ma’lum miqdorda gazni eritadi, ya’ni gaz aralashmasiga ega. Daltonning eruvchanlik qonuniga ko‘ra 30 MPa gacha bosimda va o‘zgarmas temperaturada V_g/V_s – erigan gazning nisbiy hajmi k_p – *eruvchanlik koeffisiyenti* deb ataluvchi o‘zgarmas miqdorga teng. Eruvchanlik koeffisiyenti temperaturadan bog‘liq:

$$\frac{d\ln k_p}{dT} = \frac{\Delta h}{RT^2},$$

bu yerda Δh – eruvchanlikda entalpiyaning o‘zgarishi; R – universial gaz doimiysi.

Agar eruvchanlik jarayoni biror p_2 bosimda sodir bo‘layotgan bo‘lsa, u holda ba’zi bir etalon p_1 bosim (masalan, atmosfera bosimi) dagi gaz hajmini hisoblab, quyidagi munosabatni hosil qilamiz:

$$\frac{V_{g,p_1}}{V_{s,p_2}} = k_p \frac{p_2}{p_1},$$

bu yerda V_{g,p_1} - eruvchan gazning p_1 bosim va t temperaturadagi hajmi; V_{s,p_2} - suyuqlikning p_2 bosim va t temperaturadagi hajmi ; k_p – shu gazning t temperaturada qaralayotgan suyuqlikdagi eruvchanlik koeffisiyenti.

Atmosfera bosimiga ega va t = 20^{0}C li suv 1,6% havo eritmasiga (aralashmasiga) ega, ya’ni k_p = 0,16. Agar suvning temperaturasi 0^{0}C dan 30^{0}C gacha oshib borsa, undagi havo eritmasi kamayib boradi. Temperaturasi 20^{0}C bo‘lgan yog‘larda havoning eritmasi taxminan 0,08 – 0,1 qiymatga teng. Kislorod havoga nisbatan ancha eruvchanroq, shuning uchun suyuqlikda erigan havodagi kislorod miqdori atmosferali havodagiga nisbatan taxminan 50% ga ortiq. Bosimi kamaygan suyuqlikdan ajralib chiqqan gaz hajmi yuqoridagi oxirgi formuladan aniqlanadi. Suyuqlikdan gazning ajralib chiqishi jarayoni uning erishiga nisbatan tezroq kechadi.

Qaynash va kavitatsiya. *Qaynash* – bu suyuqlikning gaz holatiga o‘tishidagi ichki jarayon. Berilgan bosimdagi suyuqlikni qaynatish uchun uning temperaturasini qaynash temperaturasigacha oshirib yoki berilgan temperaturadagi suyuqlik bosimini to‘yingan bug‘ bosimigacha kamaytirib borish lozim. Odatda berilgan temperaturadagi suyuqlik bosimi to‘yingan bug‘ bosimigacha kamaytirilganda suyuqlikda undan ajralib chiquvchi bug‘ yoki gaz pufakchalari paydo bo‘ladi va suyuqlikda «*sovuq qaynash*» hodisasi sodir bo‘ladi. Agar bunday suyuqlik erkin sirtga ega bo‘lsa, u holda ular suyuqlik sathiga qalqib chiqadi.

Agar tomchili suyuqlik yopiq fazoda joylashgan bo‘lib, u erkin sirtga ega bo‘lmasa, u holda bu pufakchalar suyuqlik bilan birga uning quyiroq temperaturali yoki yuqoriroq bosimli sohasiga qarab harakatlanadi. Bu jarayonda gaz bug‘lari tomchilanib (suyuq holatga o‘tib), gazlar esa yana suyuqlikka qorishib boshlaydi, hosil bo‘gan bo‘sh joylarga suyuqlik zarrachalari kirib boradi, bu esa o‘z navbatida pufakchalarning oniy «paqillashi»ga olib keladi. Buning natijasida esa pufakchalar paqillagan sohalarda bosim keskin oshadi va u joylarda temperatura ko‘tariladi. Bunday hodisa *kavitatsiya* deb ataladi. Bunday pufakchalar paqillaguncha qancha kam gazga ega bo‘lsa, kavitatsion pufakchalarning paqillashi shuncha kuchli bo‘ladi va tovush impulsini paydo qiladi. Biror sirt yaqinida bunaqangi ko‘p marta takrorlanuvchi tovush zarbalari shu sirtning yemirilishiga (kavitatsion yemirilishga) olib keladi (masalan, quvur devori, turbina parragi va hokazo). Agar suyuqlik gazsizlantirilgan bo‘lsa, u holda berilgan bosimdagi bunday suyuqlik qaynash temperaturasidan yuqori temperaturagacha qizdirilsa ham qaynamaydi.

Gazlar suyuqlikda qorishgan yoki qorishmagan holatda bo‘lishi mumkin. Agar suyuqlikdagi qorishmagan havo (gaz) pufakchalar shaklida bo‘lsa, u holda bunday suyuqlikning elastiklik moduli kamayadi va bunday kamayish havo pufakchalarining o‘lchamidan bog‘liq bo‘lmaydi.

Suvning muhim xossalari. Bizga ma’lumki, «suv» tushunchasi bu faqat H_2O molekulalardan tuzilgan modda degani emas. Vodorod va kislorodlar izotoplarining har xil kombinatsiyalari suvning 36 xili mavjudligini ta’minlaydi. Tabiiy suvda H_2O molekulalar miqdori 99,7% ni, qolgan 0,3% ni esa suvning boshqa xillari molekulalari tashkil etadi. Bu bilan molekulalar har xilligining suv xossasiga ta'siri uning suv hajmidagi mavjud miqdoriga proporsional degani emas.

Suv bu anomal modda. Avvalambor suv bu odatdagi temperatura va bosimda uch xil agregat holatida (qattiq (muz), suyuq va gazsimon (bug‘)) bo‘la oladigan sayyoramizdagi yagona modda. Ko‘pgina suyuqliklar o‘zining kengayishi bilan o‘quvchanlik xususiyatini namoyon qilsa, suv aksincha, ya'ni siqilganda. Xuddi shunday, temperaturaning oshishi bilan suvning zichligi anomal o‘zgarib boradi (1.3-jadval).

Qattiq jismlar eritilganda hosil bo‘lgan moddaning issiqlik sig‘imi juda kam o‘zgaradi, muz eriganda esa bu miqdor keskin ikki martaga (2,052 dan 4,224 kJ/kg gacha) o‘zgaradi. Suv anomal kattalikdagi solishtirma issiqlik sig‘imiga ega (C_p = 4,18 J/(kg·^{0}K)), bu miqdor temirnikidan 9 marta, simobnikidan 33 marta, ohaktoshnikidan 5 marta katta va hokazo. Suv isitilganda avvalo uning issiqlik sig‘imi kamayib, t = 34,5^{0}C da o‘zining minimal qiymati 4,18 kJ/kg gacha tushib ketadi, keyin yana ko‘tariladi. Bunday minimal qiymatning paydo bo‘lishi sababi ana shu temperaturada suv molekulalarining bir guruhi yemiriladi. Suv ikki xil tuzilmaning aralashmasidan tashkil topgan deb faraz qilinadi: yumshoq muzsimon va zich joylashgan, bunda suvning barcha anomal xossalari bir tuzilmadan ikkinchisiga o‘tishi bilan izohlanishi mumkin.

Sunday qilib, masalan, ko‘l va ko‘l qirg‘og‘idagi quruq qumloq plyajdagi suvga havoning bir xil temperaturasi va quyoshning bir xil issiqligi ta'sir qilishiga qaramasdan, ko‘ldagi suv qirg‘oqdagiga qaraganda 5 marta kam isiydi, ammo u o‘ziga olgan issiqlikni qumloqdagi suvqa qaraganda shuncha marta ko‘p vaqt ushlab turadi.

Suv muzlaganda uning hajmi taxminan 10% ga ortadi. Suvning muzlash temperaturasi uning bosim oshishi (19,6 MPa gacha) bilan kamayib boradi, keyin esa ko‘tariladi.

Chuchuk suvli sig‘imdan suvning vertikal harakati t=4^{0}C da to‘xtaydi. Bunday temperaturada suv stratifikatsiyalanadi (quyi qatlamlarda joylashgan suvning zichligi yuqori qatlamlardagiga nisbatan kattaroq).

Dengiz suvi –1,9^{0}C da muzlaydi. Tuproq kapilyarlaridagi suv ba'zan +4,4^{0}C da ham muzlashi mumkin.

Suv juda yuqori bug‘lanish issiqligiga (22,6·10^5 J/kg) va yopiq erish issiqligiga (3,34·10^5 J/kg) ega. Atmosfera bosimida suvning bug‘ holatiga o‘tishi muzning shu bosimda erishidagiga nisbatan atrof muhitdan 6,75 marta ko‘p issiqlik talab qiladi.

Tuman hosil bo‘lganda (namlik to‘planganda) ancha ko‘p issiqlik ajralib chiqadi. Bu jarayondan sun'iy tuman hosil qiluvchi qurilmalarda foydalaniladi. Bunday qurilmalardan nafaqat sugorishda, balki o‘simliklarni muzlashdan asrashda ham foydalanish mumkin.

Quruq muz yoki qorning elektr o‘tkazuvchanligi suvning elektr o‘tkazuvchanligidan ancha kam, bunda suvning elektr o‘tkazuvchanligi undagi aralashmalarning miqdoridan bog‘liq, muz va qorda esa ularning ta’siri juda kam. Suvning elektr o‘tkazuvchanligi undagi erigan tuzlar konsentratsiyasidan bog‘liq. Shuning uchun dengiz suvining elektr o‘tkazuvchanligi daryodagi chuchuk suvnikidan 2-3 marotama ortiq va kimyoviy yo‘l bilan olingan toza (distillangan) suvnikiga (18^0C) nisbatan esa 12000 marta katta.

Suv kuchli erituvchi modda. Uning bu xususiyati yetarlicha yuqori bo‘lgan nisbiy dielektrik o‘tkazuvchanligi bilan xarakterlanadi. Bu miqdor 0^0C li tozalangan suvda 87,0 ga yaqin, temperaturaning oshishi bilan u 100^0C da 55,7 gacha kamayadi. Taqqoslash uchun shuni aytishimiz mumkini, boshqa eritmalarning dielektrik o‘tkazuvchanligi suvnikidan ancha kam va bu miqdor 10 dan 50 gacha, elektrolitlarni eritish xususiyatiga umuman ega bo‘lmagan noqutbiy suyuqliklar uchun esa u 2 dan 2,5 gacha. Shunday qilib, taqqoslash uchun havoning dielektrik o‘tkazuvchanligi 1 ga, muzniki 3,2 ga tengligini e’tiborga olsak, suvning dielektrik o‘tkazuvchanligi qanchalik katta ekanligiga ishonch hosil qilamiz.

Suvda kislorodga boy havo aralashmasining va bir qator «tajovuzkor» komponentalarning mavjudligi suvning inshootlar materiallariga kuchli ta’sirini kuzatishimiz mumkin, masalan, metallarning zanglashi (korroziya). Suvda erigan tuzlar va undagi suzib yuruvchi qattiq zarrachalar qurilma devorida «o‘tirib qolishi» mumkin, masalan, bu quvurlar suv o‘kazish xususiyatining sezilarni kamayishiga olib keladi.

Namunaviy masalalar va ularning yechimlari

1–masala. Benzinning solishtirma og‘irligi γ=7063 N/m^3. Uning zichligini aniqlang. g = 9,81 m/s^2 – erkin tushish tezlanishi.

Yechish: Zichlikni solishtirma og‘irlika nisbatan hisoblash formulasi (1.3) ga asosan

$$\rho = \gamma/g = 7063 / 9{,}81 = 720 \text{ kg/m}^3 .$$

2–masala. Dizel yog‘ining zichligi ρ = 878 kg/m^3. Uning solishtirma og‘irligini aniqlang.

Yechish: (1.3) formulaga asosan

$$\gamma = \rho \cdot g = 878 \cdot 9{,}81 = 8613 \text{ N/m}^3 .$$

3–masala. Diametri d = 100 mm bo‘lgan mis sharning havodagi og‘irligi G=45,7 N, suyuqlikka tushirilgandagisi esa G=40,6 N. Suyuqlikning zichligini aniqlang.

Yechish: Siqib chiqarilgan suyuqlikning og‘irligi:

$$G = G_h - G_s\,; \quad G = 45{,}7 - 40{,}6 = 5{,}1\ \text{Н};$$

Siqib chiqarilgan suyuqlikning hajmi:

$$V = \pi d^3/6 = 3{,}14159 \cdot (0{,}1)^3 / 6 = 0{,}523 \cdot 10^{-3}\ \text{м}^3\ .$$

Endi suyuqlikning zichligini topaylik:

$$\rho = G/(gV) = 5{,}1 / (9{,}81 \cdot 0{,}523 \cdot 10^{-3}) \approx 994\ \text{kg/m}^3\ .$$

4–masala. Diametri d = 500 mm va uzunligi L = 1000 m suv quvuri temperaturasi 5^0C, bosimi 400 kPa bo‘lgan suv bilan to‘ldirilgan. Agar quvurdagi suvning 15^0C temperaturagacha isitilishida suvning hajmiy siqilish koeffisienti $\beta_V = 5{,}18 \cdot 10^{-10}$ Pa^{-1} va temperaturaviy kengayish koeffisienti $\beta_t = 150 \cdot 10^{-6}$ $(^0\text{C})^{-1}$ bo‘lsa, quvur devorining deformatsiya-lanishi va kengayishini hisobga olmagan holda, suv quvuridagi bosimni aniqlang.

Yechish: Avvalo quvurdagi $t = 5^0$C bo‘lgan suvning hajmini aniqlaylik: $V = \pi d^2 L/4$ bo‘lganligidan

$$V = 0{,}785 \cdot d^2 \cdot L = 0{,}785 \cdot 0{,}5^2 \cdot 1000 = 196{,}25\ \text{m}^3\ .$$

Temperaturaning o‘zgarishi natijasida hajmning ΔV ortishini topamiz:

$$\Delta V = V \cdot \Delta t \cdot \beta_t = 196{,}25 \cdot 10 \cdot 150 \cdot 10^{-6} = 0{,}29\ \text{m}^3\ \cdot$$

Suv hajmining ortishi bilan bog‘liq bosim orttirmasini topamiz:

$$\Delta p = \frac{\Delta V}{V\beta_V} = 0{,}29 / (196{,}25 \cdot 5{,}18 \cdot 10^{-10}) = 2850\ \text{kPa}\ \cdot$$

Temperatura oshgandan keyingi quvurdagi bosim:

$$p = 400\ \text{kPa} + 2850\ \text{кPa} = 3250\ \text{кPa} = 3{,}25\ \text{MPa}.$$

5–masala. Neftning Engler viskozimetri bo‘yicha aniqlangan qovushoqligi 8,5 ^{0}E. Agar neftning zichligi ρ = 850 kg/m^3 bo‘lsa, uning dinamik qovushoqligini aniqlang.

Yechish: Ushbu

$$\nu = \left(0{,}0731 \cdot {}^0E - \frac{0{,}0631}{{}^0E}\right) \cdot 10^{-4}$$

Ubellod formulasi bo‘yicha kinematik qovushoqlikni topamiz:

$$\nu = (0{,}0731 \cdot 8{,}5 - 0{,}0631 / 8{,}5) \cdot 10^{-4} = 6{,}14 \cdot 10^{-5}\ \text{m}^2/\text{s}\ .$$

Neftning dinamik qovushoqligi

$$\mu = \nu \cdot \rho = 0{,}614 \cdot 10^{-4} \cdot 850 = 0{,}052\ \text{Pa} \cdot \text{s}$$

ga teng bo‘ladi.

6–masala. Agar zichligi ρ = 1200 kg/m^3 bo‘lgan ebonitdan tayorlangan d = 2 mm diametrli sharcha u = 0,33 m/s o‘zgarmas tezlik bilan suvga tushayotgan bo‘lsa, zichligi ρ = 1000 kg/m^3 bo‘lgan shu suvning dinamik va kinematik qovushoqligini aniqlang.

Yechish: Sharchaning suyuqlikda o‘zgarmas tezlik bilan harakatlanishida qarshilik kuchi shu sharchaning og‘irligiga teng bo‘ladi.

Qarshilik kuchi Stoks formulasidan aniqlanadi:

$$F = 3\pi \mu u d .$$

Sharchaning og‘irligi quyidagi formuladan aniqlanadi:

$$G = \rho g \pi d^3 /6 .$$

Aytilganlarga ko‘ra $F=G$ ekanligidan

$$\rho g \pi d^3 /6 = 3\pi \mu ud.$$

Dinamik qovushoqlik koeffisienti:

$$\mu = \frac{\rho g d^2}{18u} = 1200 \cdot 9{,}81 \cdot (2\cdot10^{-3})^2/(18 \cdot 0{,}33) = 0{,}008 \text{ Pa} \cdot \text{s} .$$

Kinematik qovushoqlik koeffisienti:

$$\nu = \mu / \rho = 0{,}008 / 1000 = 8 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} .$$

7–masala. Yong‘inga qarshi suv ta’minoti tizimining gidravlik sinovida 10 minut ichida bosim Δp = 49710,4 Pa ga tushadi. Hajmi V = 80 m^3 bo‘lgan tizimning sinovdagi mumkin bo‘lgan oqib chiqish hajmi ΔV ni aniqlang. Hajmiy siqilish koeffisienti β_V =5 · 10^{-10} Pa^{-1} .

Yechish: ΔV mumkin bo‘lgan oqib chiqish hajmi quyidagi formulaga ko‘ra hisoblanadi:

$$\Delta V = V \cdot \Delta p \cdot \beta_V = 80 \cdot 4{,}97104 \cdot 10^4 \cdot 5\cdot10^{-10} = 1{,}96 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3.$$

8-masala. Termometr yordamida atmosfera bosimini o‘chash mumkinmi?

Yechish. Suv normal atmosfera bosimi 0,10135 MPa dagina 100^{0}C da qaynaydi. Suvni qaynash temperaturasiga oborib va uning temperarurasini o‘lchab, atmosfera bosimini normal bosim bilan taqqoslash mumkin. Suvning to‘yingan bug‘lari bosimining temperaturadan bog‘liqligi 1.2-jadvalidan foydalanib, to‘yingan bug‘ning o‘lchangan qaynash temperaturasidagi bosimini aniqlaymiz. Bu atmosfera bosimiga teng.

9-masala. Diametri d ga teng vertikal silindrik rezervuarda t=0^{0}C dagi zichligi ρ_0 = 825 kg/m^3 bo‘lgan 100 t yoqilg‘i saqlanmoqda. Rezervuardagi yoqilg‘i 0^{0}C dan 30^{0}C gacha qizdirilganda uning sathi Δh ning o‘zgarishini aniqlang. Rezervuarning kengayishini hisobga olmang.

Yechish. Rezervuardagi yoqilg‘ining 0^0C dagi hajmi:

$$V = \frac{m}{\rho_0} = \frac{100 \cdot 10^3}{825} = 121{,}21 \text{ m}^3.$$

Yuqoridagi temperaturasi 30^0C ga o‘zgarganda yoqilg‘i hajmining kamayichini ifodalovchi formulaga ko‘ra

$$\Delta V = V\beta_t\,\Delta t = 121{,}21 \cdot 0{,}0007 \cdot 30 = 2{,}55 \text{ m}^3.$$

Rezervuardagi yoqilg‘i sathining o‘zgarishi:

$$\Delta h = 4\Delta V/(\pi d^2) = 4 \cdot 2{,}55/(\pi \cdot 3^2) = 0{,}36 \text{ m}.$$

10-masala. Quvurning bosimini oshirish hisobiga uning mustahkamligini tekshirish tajribasida unga ΔV hajmdagi qo‘shimcha suv quyildi. Quvur devori deformatsiyalanmaydi, uning diametri d = 0,5 m, uzunligi L = 4 km hamda undagi suvning bosimi dastlabki ρ_b = 98,1 kPa qiymatidan Δp = 1 MPa ga ortgan deb hisoblab, ΔV hajmni aniqlang.

Yechish. Quvurga qo‘shimcha suv quyilgunga qadar uning hajmi:

$$V_0 = (\pi d^2/4)L = (\pi \cdot 0{,}5^2/4) \cdot 4000 = 785{,}4 \text{ m}^3.$$

Hajmiy siqilish koeffisiyentini hisoblash formulasiga ko‘ra:

$$\beta_V = -(1/V)(dV/dp) = -1/(V_0 + \Delta V) \cdot \Delta V/\Delta p = 1/(2{,}1 \cdot 10^9) = 4{,}76 \cdot 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}.$$

Bu tenglamadan quvurga qo‘shimcha qo‘shilgan suv hajmi ΔV ni topamiz:

$$\Delta V = \beta_V V_0\, \Delta p/(1 - \beta_V\, \Delta p) =$$

$$= (4{,}76 \cdot 10^{-10} \cdot 785{,}4 \cdot 10^6)/(1 - 4{,}76 \cdot 10^{-10} \cdot 10^6) = 0{,}374 \text{ m}^3.$$

Topshiriqlar

1. Havo uchun bosimning p=100 kPa va p= 500 kPa qiymatlarida ν, α, Pr parametrlarning temperaturadan bog‘liqlik grafigini 1.1–jadvaldagi qiymatlarga asoslanib chizing va hosil bo‘lgan egri chiziqlarni izohlang.
2. To‘yingan bug‘ bosimi sharoitidagi suv uchun ν, α, Pr parametrlarning temperaturadan bog‘liqlik grafigini 1.2–jadvaldagi qiymatlarga asoslanib chizing. Hosil bo‘lgan bog‘liqlik grafiklarini izohlang va bu grafiklarni havo uchun 1–masalada olingan xuddi shunday grafiklar bilan o‘zaro taqqoslang.
3. Havo oqimining 1.1–jadvaldagi qiymatlariga asoslanib μ dinamik qovushoqlikning temperaturadan bog‘liqlik grafigini chizing. Hosil bo‘lgan egri chiziqni μ ning ushbu

a) $\mu = \mu_0 \left(T / T_0\right)^{0,76}$; b) $\mu = \left(11{,}458 \cdot 10^{-6} \cdot T^{1,5}\right) / \left(110{,}4 + T\right)$

munosabat bilan aniqlanadigan funksiya grafiqi bilan taqqoslang, natijalarni va ularning farqini izohlang. Bunda T_0 = 573^{0}K – absolyut temperatura; $\mu_0 = 1{,}789 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{Pa \cdot s}$. Gaz doimiysini R = 278 joul/(kg·^{0}K) deb qabul qilib, $p = \rho RT$ holat tenglamasidan bosimni hisoblang va uning grafigini chizing. Yuqoridagi hisoblashlardan foydalanib ν kinematik qovushoqlikni toping va uning ham grafigini chizing. Havo ($k = C_p / C_V = 1{,}4$) oqimidagi tovush tezligini $a = \sqrt{kRT_0}$ formuladan foydalanib hisoblang.

4. Ideal suyuqlik uchun quyidagi holat tenglamasi (*Teta tenglamasi*)dan:

$$(P + B)/(P_0 + B) = \left(\rho / \rho_0\right)^{\chi} \tag{1.7}$$

va 1.2–jadvaldan foydalanib, hamda suv uchun B =298.6 MPa; ρ_0 =1000 kg/m^3; P_0 =0.1 MPa; χ =7.15 ekanligidan bosimning zichlik-dan bog‘liq grafigini chizing va natijalarni izohlang.

5. Suv uchun keltirilgan 1.6–jadvaldagi kinematik qovushoqlik qiymatlaridan foydalanib, uning boshqa xossalarini toping va ularni grafik shaklida tasvirlang.

6. Neftning zichligi ρ (kg/m^3) ga teng. Uning SI birliklar sistemasidagi γ solishtirma ogirligini toping. Ogirligi G (kN) ga teng neft qanday hajmni egallashini hisoblang.

Boshlangich ma’lumotlar	Variantlar				
	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5
ρ (kg/m^3)	700	750	800	850	900
G (kN)	80	90	100	110	120

7. Suyuqlikning kinematik qovushoqligi ν (sm^2/s). Agar uning solishtirma ogirligi γ (kN/m^3) bo‘lsa, u holda uning SI birliklar sistemasidagi dinamik qovushoqligini toping.

Boshlangich ma’lumotlar	Variantlar				
	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5
ν (sm^2/s)	0,28	0,29	0,30	0,31	0,32
γ (kN/m^3)	6,87	7,36	7,85	8,34	8,83

8. Idishning hajmi V (litr). Agar uni to‘ldirib turgan suyuqlikning zichligi ρ (kg/m^3) bo‘lsa, u holda uning og‘irligi qancha? Idishning sof og‘irligi 2 kgk (kilogramm kuch). Javobni SI birliklar sistemasida bering.

Boshlangich ma’lumotlar	Variantlar				
	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5
V (litr)	10	20	30	40	50
ρ (kg/m^3)	800	850	900	950	1000

Sinov savollari

1. Diskret va tutash sistemaga ta’rif bering, misollar keltiring.
2. Suyuqlik va gazlar mexanikasi fani nimani o‘rganadi?
3. Tutash muhit zarrachasi nima?
4. Suyuqlik va gazlarning qanday eng muhim xususiyatlarini bilasiz?
5. Suyuqlik va gazlarning deformatsiyalanuvchi qattiq jismlar bilan umumiy va farq qiluvchi asosiy belgilarini sanab o‘ting.
6. Ideal va qovushoq suyuqlikni tushuntiring.
7. Suyuqlik va gazlar mexanikasi qanday farazlarga asoslanadi?
8. Suyuqlik va gaz moddalari tuchunchalarini ayting va misollar keltiring.
9. Bosim, zichlik, temperatura va solishtirma og‘irlik deb nimaga aytiladi?
10. Kinematik va dinamik qovushoqlik hamda issiqlik diffuziyasi tuchunchalarini keltiring.
11. Qovushoqlik va bosim, zichlik va bosim o‘rtasidagi o‘zaro bog‘lanishni qanday izohlaysiz?
12. Suv va havoning xossalari haqida nimalarni bilasiz?
13. Nyuton va nonyuton suyuqliklar qanday farqlanadi?
14. Hajmiy siqilish va temperaturaviy kengayish koeffisientlari qanday kiritiladi?
15. Gazlarning qorishmalanisi jarayoni qanday parametrlar bilan xarakterlanadi?
16. «Sovuq qaynash» nima va u oddiy qaynashdan nimasi bilan farq qiladi?
17. Kavitatsiya deb nimaga aytiladi?
18. Suvning o‘ziga xos qanday xususiyatlarini bilasiz?

1.2. Kuchlar klassifikatsiyasi. Kuchlanish tenzori

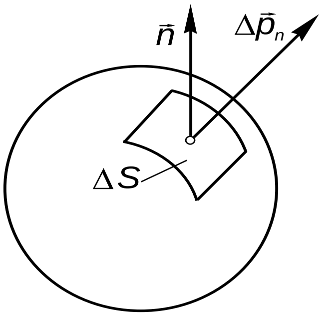
Suyuqlikni tinch yoki harakat holatida bo‘lishidan qat’iy nazar moddiy zarrachalardan tashkil topgan uzluksiz muhit deb qaraymiz. *Kuch* – bu ikki jism o‘zaro ta’sirining miqdor o‘lchovi. Deformatsiyalanuvchi qattiq jismlar mexanikasidagi kabi suyuqlik va gaz mexanikasida ham shu zarrachalarga ta’sir etuvchi barcha kuchlar turli belgilariga qarab klassifikatsiyalanadi: ichki, tashqi, jamlangan va taqsimlangan. Suyuqlik moddiy zarrachalarining bir biriga ta’sir kuchlari *ichki kuchlar* deyiladi. Suyuqlik biror hajmining moddiy zarrachasiga boshqa biror jism hajmidagi moddalarning ta’sir qilayotgan kuchlari, chunonchi, shu qaralayotgan suyuqlik hajmining moddiy zarrachalariga, shu hajmni har tomonlama o‘rab olgan suyuqlikning ta’sir kuchlari *tashqi kuchlar* deyiladi. Suyuqlik mexanikasida suyuq jismning deformatsiyalanishiga olib kelmaydigan taqsimlangan kuchlargina qaraladi. Bunda ular ob’ektga nisbatan tashqi bo‘lmog‘i lozim. Ichki kuchlarning tashqi kuchlarga aylantirilishi ma’lum usullar (kesimlar usuli, «muzlatish» usuli) yordamida amalga oshiriladi. Bu usullarga ko‘ra muhitdan yopiq hajm ajratib olinadi («muzlatiladi»), tashqi muhit hayolan tashlab yuboriladi va uning ta’siri taqsimlangan kuchlar ta’siri bilan almashtiriladi. Suyuqlik va gaz mexanikasida, yuqorida keltirilgan klassifikatsiyadan farqli, suyuqlikning biror kichik hajmini uni o‘rab turgan suyuqlik muhitidan butunlay ajratib qo‘yilgan deb faraz qilingan holda uning bu zarrachasiga ta’sir etuvchi kuchlar ikki xil bo‘ladi: hajmiy (massaviy) va sirt kuchlari.

Qo‘zg‘almas suyuqlikda kuchlanishning faqat bir ko‘rinishi – siqish kuchlanishi mavjud. *Siqish kuchlanishi* – bu sirt kuchlarining taqsimlanish zichligi. Bu tushuncha fransuz matematigi O.Koshi (1789-1857) tomonidan kiritilgan.

Hajmiy (massaviy) kuchlar. *Hajmiy kuchlar* hajmni tashkil etuvchi barcha moddiy zarrachalarga qo‘yilgan. Hajmiy kuchlar: og‘irlik kuchi; inertsiya kuchi; markazdan qochma kuchlar; magnit kuchlari; elektr kuchlari. Xuddi shunday, *massaviy kuchlar* deb qaralayotgan hajm birligi massasiga proporsional miqdorga aytiladi. Suyuqlik zarrachasining zichligi o‘zgarmas bo‘lganda massaviy kuchlar *hajmiy kuchlar* deb ataladi. Bu kuchlarning muhim xususiyati shundaki, ular suyuqlikning barcha zarrachalariga ta’sir etadi. Umuman olganda, bu kuchlar Nyutonning ikkinchi qonuniga ($\vec{F} = m\vec{a}$) bo‘ysunadi. $\vec{F}$ kuchning dekart o‘qlaridagi proeksiyalari quyidagicha: $F_x = ma_x$; $F_y = ma_y$; $F_z = ma_z$. Suyuqlik va gaz mexanikasida a_x, a_y, a_z lar o‘rniga *X*, *Y*, *Z* kabi belgilashlar ishlatish qabul qilingan. Yuqoridagi proeksiyalar ifodalarining ikkala tarafini massaga bolamiz: $\frac{F_x}{m} = X$; $\frac{F_y}{m} = Y$; $\frac{F_z}{m} = Z$. Shunday qilib, *X*, *Y* va *Z* mos koordinat o‘qlaridagi birlik massaviy kuchlarning proeksiyalari va ular ba’zida *massaviy kuchlar kuchlanishi* ham deb ataladi.

Xuddi shunday, $\Delta\vec{F}$ hajmiy kuchlarning nuqtadan nuqtaga o‘zgarishini tavsiflash uchun, bu kuchlarning ΔV hajmga nisbatining hajmning biror ichki nuqtaga yaqinlashish limiti kuchlanish ekanligi haqidagi tushunchani kiritamiz. Shunga ko‘ra berilgan nuqtadagi *hajmiy kuchlar kuchlanishini* $\vec{p} = \lim\limits_{\Delta V \to 0} \dfrac{\Delta \vec{F}}{\Delta V} = \dfrac{d\vec{F}}{dV}$ kabi aniqlaymiz. Shunday qilib, agar suyuqlikdan dV elementar hajm ajratib olsak, u holda uning massasi ρdV bo‘ladi va bu hajmga ta’sir etuvchi massaviy kuch $\rho \vec{F} dV$ kabi, butun hajmga ta’sir etuvchi massaviy kuchlarning bosh vektori esa $\vec{F}^{M} = \iiint\limits_{V} \rho \vec{F} dV$ kabi ifodalanadi. Suyuqlikning o‘z og‘irligi hajmiy kuch bo‘ladi, uning inersiya kuchini esa tashqi hajmiy kuch deb qarash mumkin.

Sirt kuchlari. Sirt kuchlarining massaviy kuchlardan farqi shundaki, ular suyuqlik hajmining sirtida joylashgan zarrachalargagina ta’sir qiladi. Suyuqlik hajmining sirtida ΔS elementar yuzachani ajratib olamiz, bu yuzachaning fazodagi joylashishi $\vec{n}$ tashqi normal bilan beriladi (1.5-rasm). Ana shu ΔS yuzachaga qo‘yilgan sirt kuchini $\Delta \vec{p}_n$ orqali belgilaymiz. $\Delta \vec{p}_n$ sirt kuchlarining nuqtadan nuqtaga o‘zgarishini tavsiflash uchun bu kuchlarning ΔS sirt yuzasiga nisbati ($\Delta \vec{p}_n / \Delta S$) ning sirtning biror ichki nuqtaga yaqinlashish ($\Delta S \to 0$) limiti kuchlanish ekanligi haqidagi tushunchani kiritamiz. Quyidagi limit *sirt kuchining kuchlanishi* deb ataladi:



1.5-rasm. Sirt elementi va uning normali hamda sirt kuchining sxematik tasviri.

$$\lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta \vec{p}_n}{\Delta S} = \vec{p}_n.$$

Shunday qilib, birinchidan tashqi kuchlar ta’sirida suyuqlikda kuchlanish paydo bo‘lar ekan, ikkinchidan, umuman olganda, $\vec{p}_n$ oddiy vektor emas, uning miqdori fazoda yuzachaning joylashishidan bog‘liq. Bu shuni bildiradiki, fazoning berilgan nuqtasi orqali miqdor jihatidan teng, lekin har xil joylashgan yuzachalar o‘tkazsak, u holda ularga ta’sir etuvchi sirt kuchlarining kuchlanishlari har xil bo‘ladi.

Biror nuqtada $\vec{p}_n$ vektor bilan xarakterlanuvchi va yuzachaning joylashishidan bog‘liq holda cheksiz ko‘p qiymatlar qabul qiluvchi fizik miqdor *kuchlanish tenzori* deb ataladi.

Shunday qilib, dS yuzachaga $\vec{p}_n dS$ sirt kuchi, V hajmni chegaralovchi butun S sirt yuzasiga esa ushbu $\vec{F}^{S} = \iint\limits_{S} \vec{p}_n dS$ sirt kuchi ta’sir etadi.

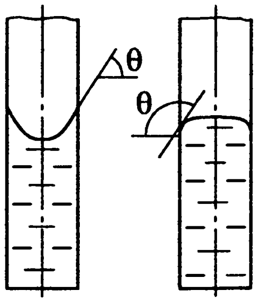
Ushbu $\vec{p}_n$ vektorning $\vec{n}$ normal yo‘nalishidagi proeksiyasi *normal kuchlanish*, S ta’sir yuzachasidagi urinma tekislikka proeksiyasi esa *urinma kuchlanish* deb ataladi.

Sirt kuchlari suyuqlikning har xil sohalari orasidagi o‘zaro ta’sirni ifodalaydi. Sirt kuchlariga bosim kuchi (masalan, atmosfera bosimi ochiq o‘zandagi suyuqlikning erkin sathiga ta’sir etadi), ishqalanish kuchi va boshqa kuchlar misol bo‘ladi.

Suyuqlikning eng muhim xossalaridan biri bu uning *sirt taragligi*. Suyuqlik sirtining xossasi bu uning sirtini kichraytirishga intiluvchi kuch (sirt taranglik kuchi) sifatida namoyon bo‘ladi. Bu xossa moddalarning tutash chegarasida o‘rganiladi.

Sirt taranglik kuchlari – bu suyuqlikka sferik shakl berishga intiluvchi kuchlar. Sirt taranglik kuchlari sirt kuchlaridan bog‘liq va ular suyuqlikning erkin sirtiga perpendikulyar bo‘lib doimo qaralayotgan hajmning ichiga yo‘nalgan. Masalan, erkin sirtda suyuqlikning cheksiz kichik hajmini qaraylik. Bunga qo‘shni hajmlar tomonidan kuchlar ta’sir etadi. Natijada, agar qaralayotgan hajmga ta’sir etayotgan barcha kuchlar vektorlarini yig‘sak, u holda yig‘indi tashkil etuvchi kuch qaralayotgan hajmning ichiga normal yo‘nalgan bo‘ladi.

Sirt taranglik kuchi F ning muhitlarni ajratib turuvchi l chiziq uzunligiga nisbati $\sigma=F/l$ yoki sirt energiyasining yuzaga nisbati $\sigma=E_p/S$ *sirt taranglik koeffisiyenti* deb ataladi. Bu miqdorning birligi [N/m] yoki [J/m^2] bo‘lib, uning qiymati qaralayotgan suyuqlikning tozaligi va temperaturasiga bog‘liq. Masalan, presslangan suv uchun σ=73 J/m^2; spirt uchun σ=22,5 J/m^2; simob uchun σ=490 J/m^2.



a *b*

1.6-rasm. Qattiq sirtni ho‘llaydigan (*a*) va ho‘llamaydigan (*b*) suyuqliklarga misollar.

Temperaturaning oshishi bilan sirt tarangligi kamayadi. t=20^{0}C da va havo bilan tutash chegarada: σ = 0,0726 N/m – suv uchun; σ = 0,486 N/m – simob uchun; σ = 0,022 N/m – etil spirti uchun; σ = 0,0235 – 0,0380 N/m – qayta ishlanmagan neft uchun; σ =0,235 – 0,380 N/m – moylovchi yog‘lar uchun.

Eritilgan po‘latning havo bilan tutash chegarasida σ = 1,86 N/m (t = 1550^{0}C); eritilgan cho‘yan uchun σ = 0,9 – 1,0 N/m (t = 1200^{0}C – 1450^{0}C); suv va simobning tutash chegarasida σ =0,378 N/m (t = 20^{0}C).

Suyuqlikning yana bir xossasi bu uning *kapillyarligi*. *Kapillyar bosim* – bu ikkita suyuqlik yoki suyuqlik va gaz orasidagi sirtning har ikkala tarafidagi bosimlar farqi. Masalan, qovariq sferik sirt uchun kapillyar bosim $p = 2\sigma/r$ (xususan, sovun pufagi uchun $p = 4\sigma/r$) formula bilan hisoblanadi, chunki tomchining ichidagi sirtga ta’sir etuvchi kuch ($p\pi r^2$) sirt taranglik kuchi ($2\pi r\sigma$) bilan muvozanatlashadi, bunda r – sirt egriligi radiusi; σ - sirt taranglik koeffisiyenti.

Real suyuqlikning kapillyarlik xossasini kapillyar quvurlarda kuzatish mumkin. 1.6-rasmda suyuqlik va qattiq devor (naycha) orasida ho‘llanish chegaraviy burchagi θ (suyuqlik erkin sirtining kapillyar devoir bilan tutash nuqtasida shu erkin sirtga o‘kazilgan urinmaning devor bilan hosil qilgan o‘tkir burchagi)ning paydo bo‘lish holatlari tasvirlangan. Masalan, toza suv va shisha uchun $\theta = 0^0$; simob va shisha uchun $\theta = 50^0$. Kichik diametrli naychada suyuqlikning kapillyar ko‘tarilishi (ho‘llanishda) va tushishi (ho‘llanilmaganda) kuzatiladi va uni quyidagi britaniyalik olim *Djeyms Jyuren* (1684-1750) *formulasi* bo‘yicha hisoblash mumkin:

$$h_{kap} = \frac{4\sigma\cos\theta}{gd(\rho-\rho_0)} ,$$

bunda d - kapillyarning diametri; ρ - suyuqlik zichligi; ρ_0 - gazli fazaning zichligi. Masalan, t=20^{0}C da suvning kapillyar ko‘tarilishi balandligi 30/d; spirtning kapillyar ko‘tarilishi balandligi 11,5/d; simobning kapillyar ko‘-tarilishi balandligi 10,15/d (bunda d millimetrlarda). Naycha materialiga qarab kapillyar ko‘tarilishi balandligi oshishi (ho‘llanishda) yoki pasayishi (ho‘llanilmaganda) mumkin. Tuproq qatlamining kapillarlarida suvning ko‘tarilishi unda suvning tarqalishini ko‘rsatadi. Masalan, tuproq qatla-mida kapillyar ko‘tarilishi balandligi 0 (soz tuproq uchun) dan 5 m (soch tolasidek yoriq-kapillarlarga ega tuproq uchun) gacha o‘zgarishi mumkin.

Sirt taranglik va kapillyarlik xossalari vaznsizlik sharoitida suyuqlikning harakati qonuniyatini ifodalaydi hamda bu hossalar suyuqlikning qovushoqlik xossasi bilan juda ham bog’liq.

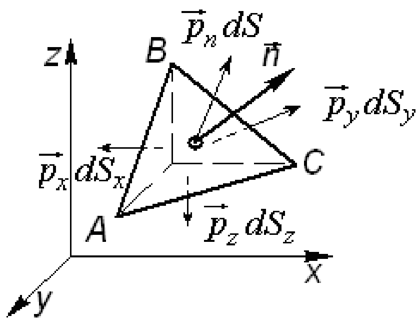
Koshi formulasi. Keyingi tuchunchalarni berish uchun $\vec{p}_n$ vektorni atroflicha qarab chiqish lozim bo‘ladi. Harakatlanayotgan suyuqlik muhitidan tetraedr shaklidagi zarrachasini fikran ajratib olamiz. Tetraedrning uchta o‘zaro perpendikulyar yoqlarini koordinat sistemasi yoqlari bilan ustma-ust tushadigan qilib olamiz. Faraz qilaylik, tetraedr to‘rtinchi (qiya) yog‘ining tashqi normali $\vec{n}$, bu yoqning yuzasi esa dS bo‘lsin (1.7-rasm).

Boshqa yoqlarning yuzalari mos ravishda dS_x, dS_y, dS_z, chunki ularni ABC yoqning koordinat tekisliklaridagi proeksiyalari deb qarash mumkin.

Bundan kelib chiqadiki, $dS_x = dS\cos(\vec{n},\vec{x}) = n_x dS$, bunda n_x – yo‘naltiruvchi kosinusni bildiradi.

Xuddi shunday, $dS_y = dS\cos(\vec{n},\vec{y}) = n_y dS$, $dS_z = dS\cos(\vec{n},\vec{z}) = n_z dS$.

Tetraedrning hajmini dV deb belgilasak, u holda unga ta’sir etuvchi massaviy kuch $\rho\vec{F}dV$, inersiyaning massaviy kuchi esa $\rho\vec{a}dV$ kabi topiladi, bunda $\vec{a}$ – suyuq tetraedrning tezlanish vektori.



1.7-rasm. Tetraedr, uning qiya yog‘idagi normal va tik yoqlariga ta’sir etayotgan sirt kuchlari.

Qiya yoqqa ta’sir etayotgan sirt kuchi $\vec{p}_n dS$ ga teng.

Qolgan uchta yoqlar uchun esa quyidagilarni yozamiz:

$$-\vec{p}_x dS_x = -\vec{p}_x n_x dS, \quad -\vec{p}_y dS_y = -\vec{p}_y n_y dS,$$
$$-\vec{p}_z dS_z = -\vec{p}_z n_z dS,$$

bunda minus ishora $\vec{p}_x$, $\vec{p}_y$, $\vec{p}_z$ vektorlarning koordinat o‘qlariga qarama-qarshi yo‘nalganligidan. Mexanikaning umumiy qonunlariga ko‘ra, tetraedrning harakat tenglamasi quyidagicha yoziladi:

(Massa) × (tezlanish) = (massaviy kuchlar yig‘indisi) + (sirt kuchlari yig‘indisi),

ya’ni

$$\rho\vec{a}dV = \rho\vec{F}dV + \vec{p}_n dS - \vec{p}_x n_x dS - \vec{p}_y n_y dS - \vec{p}_z n_z dS,$$

bu yerda $\rho\vec{a}dV$ va $\rho\vec{F}dV$ qo‘shiluvchilar uchinchi, qolganlari esa ikkinchi tartibli kichik miqdorlardir. Shuning uchun bu ikkita hadni e’tiborga olmasak, *Koshi formulasi* deb ataluvchi quyidagi tenglikka ega bo‘lamiz:

$$\vec{p}_n = \vec{p}_x n_x + \vec{p}_y n_y + \vec{p}_z n_z. \qquad (1.8)$$

Bu tenglikdan kelib chiqadiki, agar qaralayotgan yuzachaning tashqi normali *Ox*, *Oy* va *Oz* koordinat o‘qlariga parallel bo‘lib, uning biror nuqtasidagi kuchlanish aniq bo‘lsa, u holda $\vec{p}_n$ kuchlanish $\vec{n}$ normalning ixtiyoriy yo‘nalishi uchun aniqlanishi mumkin (1.8-rasm).

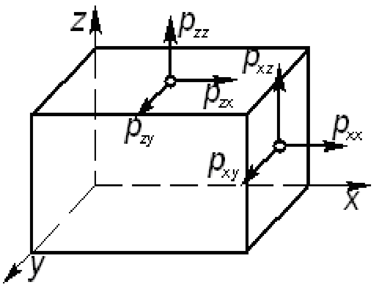
Ushbu (1.8) formuladagi koordinat tekisliklariga qo‘yilgan $\vec{p}_x$, $\vec{p}_y$ va $\vec{p}_z$ kuchlanish vektorlari ob’ektiv fizik ma’noga ega emas, chunki ular koordinat sistemasini tanlashga bog‘liq. Shuning uchun bunday miqdorlarga fizik vektorlarga qo‘llaniladigan barcha munosabatlar qo‘llanilsa ham ular «kvazi-vektorlar» deb ataladi.

Kuchlanish tenzori. Koshi formulasidan kelib chiqqan holda $\vec{p}_x$, $\vec{p}_y$ va $\vec{p}_z$ vektorlarni *Ox*, *Oy* va *Oz* koordinat o‘qlaridagi mos proeksiyalari orqali quyidagicha yozish mumkin:

$$\vec{p}_x(p_{xx}, p_{xy}, p_{xz}) \ , \ \vec{p}_y(p_{yx}, p_{yy}, p_{yz}) \ , \ \vec{p}_z(p_{zx}, p_{zy}, p_{zz}) \, .$$

Natijada ixtiyoriy joylashgan yuzaning nuqtasidagi kuchlanishni hisoblash uchun quyidagi to‘qqizta qiymatdan tashkil topgan ushbu

$$T = \begin{Vmatrix} p_{xx} & p_{yx} & p_{zx} \\ p_{xy} & p_{yy} & p_{zy} \\ p_{xz} & p_{yz} & p_{zz} \end{Vmatrix} \tag{1.9}$$



1.8-rasm. Harakatlanayotgan suyuqlikning parallelepiped shaklidagi zarrachasi va undagi kuchlanishlar.

jadval aniq bo‘lishi kerak. Bunda satrlar bo‘yicha birinchi indeks yuzachaga perpendikulyar bo‘lgan, ikkinchisi esa kuchlanish proeksiyalangan koordinat o‘qini bildiradi.

Keltirilgan 1.8-rasmdan ko‘rinadiki, bir xil indeksli kuchlanishlar normal, har xil indekslilari esa urinma kuchlanishlardir. Yuqoridagi (1.8) ifodani koordinat o‘qlariga proeksiyalasak, ushbu

$$\begin{aligned} p_{nx} &= p_{xx}n_x + p_{yx}n_y + p_{zx}n_z \, , \\ p_{ny} &= p_{xy}n_x + p_{yy}n_y + p_{zy}n_z \ , \\ p_{nz} &= p_{xz}n_x + p_{yz}n_y + p_{zz}n_z \end{aligned} \tag{1.10}$$

tengliklarni yozishimiz mumkin. Kuchlanishning ushbu p_{ij} $(i, j = x, y, z)$ to‘qqizta komponentalari birgalikda kuchlanish tenzorini tashkil etadi va u matritsa shaklida quyidagicha yoziladi: $T = \lVert p_{ij} \rVert$.

Tenzor analizi kursidan ma’lumki, kuchlanish tenzori simmetrik. Bu shuni bildiradiki, $\lVert p_{ij} \rVert$ matritsaning bosh diagonaliga nisbatan simmetrik miqdorlar o‘zaro teng, ya’ni $p_{yx} = p_{xy}$, $p_{xz} = p_{zx}$, $p_{zy} = p_{yz}$. Bundan kelib chiqadiki, kuchlanish tenzorini aniqlash uchun to‘qqizta emas, balki oltita skalyar miqdorlarni bilish yetarli.

Yuqorida ta’kidladikki, suyuqlikning fundamental xossalaridan biri – uning qovushoqligi, bu xossa tinch turgan suyuqliklarda sezilmaydi, ya’ni bunday holda tenzorning urinma kuchlanishlari nolga teng va faqat tashqi normalga orientatsiyalangan p_{xx}, p_{yy}, p_{zz} normal kuchlanishlar ta’sir etadi (1.8-rasm). Bunda ular cho‘zuvchi kuchlanishlardir. Tajribalar shuni ko‘rsatadiki, suyuq jism faqat siquvchi zo‘riqishlarni qabul qiladi, qattiq jismlarda esa, bundan farqli, o‘zining tutashliligini yo‘qotmagan holda cho‘zuvchi (musbat) va siquvchi (manfiy) normal kuchlanishlarni qabul qilishi mumkin. Ko‘rsatish mumkinki, agar suyuq jismda urinma kuchlanishlar bo‘lmasa, u holda $p_{xx} = p_{yy} = p_{zz}$. Bundan berilgan nuqtadagi normal kuchlanishlar yuzachaning joylashishiga bog‘liq emasligi kelib chiqadi.

Son qiymati normal kuchlanishlarga teng, ammo ishorasi qarama-qarshi bo‘lgan miqdor gidromexanikada bosim, to‘laroq qilib aytganda gidrostatik bosim deb ataladi.

Gidrostatik bosim p harfi bilan belgilanadi, ya’ni $p = -p_{xx} = -p_{yy} = -p_{zz}$.

Shunday qilib, gidrostatik bosim skalyar miqdor (tenzor komponentasi sifatida) bo‘lib, o‘zi ta’sir qilayotgan yuzachaning joylashishiga bog‘liq emas. Bunday suyuqlikning harakatini nazariy jihatdan o‘rganish ideal suyuqlikning modeli bilan bog‘liq. Bu modelga ko‘ra suyuqlik absolyut siqilmaydigan, uzilishga olib keluvchi zo‘riqishga qarshilik ko‘rsatmaydigan va absolyut qo‘zgaluvchan, ya’ni qovushoqmas suyuqlik deb qaraladi. Oxirgi faraz bunday suyuqlikda urinma kuchlanishlarning yo‘qligini bildiradi.

Suyuqlikning harakat tenglamalari. Quyida sirt va massaviy kuchlarni bog‘lovchi va kuchlanishlarga nisbatan harakat tenglamalari deb ataluvchi umumiy tenglamani olamiz. Bu tenglamani keltirib chiqarish uchun massasi ρdV ga va sirti dS ga teng bo‘lgan suyuqlik zarrachasining harakatini tahlil qilamiz. Bu zarracha uchun harakat tenglamasi, yuqorida tetraedrga nisbatan chiqarilgani kabi, quyidagicha yoziladi:

$$\rho \frac{d\vec{u}}{d\,t} dV = \rho \vec{F} dV + \vec{p}_n dS \,. \tag{1.11}$$

U holda harakatlanayotgan S sirtli V hajm uchun ushbu

$$\iiint_V \rho \frac{d\vec{u}}{dt} dV = \iiint_V \rho \vec{F} dV + \iint_S \vec{p}_n dS \tag{1.12}$$

tenglamaga ega bo‘lamiz.

Kuchlanish tenzorining ushbu $\vec{p}_n = \vec{p}_x n_x + \vec{p}_y n_y + \vec{p}_z n_z$ ifodasidan foydalanib, (1.12) tenglikning o‘ng tarafidagi sirt integralini hajm integraliga almashtiramiz, bunda n_x, n_y, n_z - yo‘naltiruvchi kosinuslar. Vektorlar analizi kursidan ma’lum va ixtiyoriy vektor uchun o‘rinli bo‘lgan quyidagi formulalardan foydalanamiz:

$$\iint_S n_x \vec{R} dS = \iiint_V \frac{\partial \vec{R}}{\partial x} dV\,,\; \iint_S n_y \vec{R} dS = \iiint_V \frac{\partial \vec{R}}{\partial y} dV\,,\; \iint_S n_z \vec{R} dS = \iiint_V \frac{\partial \vec{R}}{\partial z} dV\,. \quad (1.13)$$

Bu formulalarni $\vec{p}_n$ tenzorining (1.8) ifodasi uchun qo‘llab ushbu

$$\iint_S \vec{p}_n dS = \iiint_V \left(\frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{p}_z}{\partial z} \right) dV \qquad (1.14)$$

tenglikka ega bo‘lamiz. Bu ifodani boshlang‘ich (1.12) tenglamaga qo‘ysak, quyidagini olamiz:

$$\iiint_V \left[\rho \frac{d\vec{u}}{dt} - \rho \vec{F} - \left(\frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{p}_z}{\partial z} \right) \right] dV = 0\,.$$

Ammo $dV \neq 0$ va V ixtiyoriy tanlanganligi uchun:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{F} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{p}_z}{\partial z} \right). \qquad (1.15)$$

Bu suyuq muhitning *kuchlanishlarga nisbatan vektor ko‘rinishdagi harakat tenglamasi* deb ataladi. Bu tenglama koordinat o‘qlariga nisbatan proeksiyalarda quyidagicha yoziladi:

$$\begin{aligned} \frac{du_x}{dt} &= X + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zx}}{\partial z} \right), \\ \frac{du_y}{dt} &= Y + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial z} \right), \qquad (1.16) \\ \frac{du_z}{dt} &= Z + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} \right). \end{aligned}$$

Bu yerda noma’lumlar sifatida to‘qqizta miqdorni o‘z ichiga oladi: tezlikning uchta proeksiyalari va kuchlanishning oltita proeksiyalari. Birlik massaviy kuchlarning proeksiyalari masalaning qo‘yilish shartidan ma’lum bo‘ladi.

Sinov savollari

1. Hajmiy (massaviy) kuchlar va sirt kuchlarini ta’riflab bering.
2. Hajmiy, massaviy va sirt kuchlari kuchlanishi nima?
3. Qiya tekislik nuqtasidagi kuchlanish haqidagi Koshi formulasini ayting.
4. Kuchlanish tenzorini ayting.
5. Kuchlanishlardagi harakat tenglamasini tushuntiring.

2-BOB.
GIDROSTATIKA

Gidrostatikada nisbatan tinch holatdagi suyuqliklar o‘rganiladi. *Suyuqlikning nisbatan tinch holati deb uning zarrachalari bir biriga nisbatan qo‘zg‘almagan holatiga aytiladi.*

Gidrostatika – bu suyuqlik va gazlar mexanikasi fanining suyuqlikning muvozanati va tinch holatidagi suyuqlikning unga botirilgan jismga ta’siri qonuniyatlarini o‘rganuvchi bo‘limi.

Suyuqlik va gazlarning gidrostatik xossalari o‘zining molekulyar tuzilishiga ko‘ra qattiq jismlar xossalaridan keskin farq qiladi. Gazlar o‘zini saqlayotgan idish shaklida bo‘ladi. Yetarlicha kichik ta’sir kuchi yordamida suyuqlikning hajmini o‘zgartirmasdan uning shaklini o‘zgartirish mumkin. Og‘irlik kuchi maydonidagi suyuqlik uni saqlayotgan idish saklida bo‘ladi. Tinch holatdagi suyuqlikning sathi (gazlardan farqli), uni saqlayotgan idishning shaklidan qat’iy nazar, og‘irlik kuchi ta’siri yo‘nalishiga perpendikulyar bo‘ladi.

Gidrostatikaning asosiy qonunlari: Paskal qonuni; energiyaning saqlanish qonuni (gidrostatikaning asosiy tenglamasi); tutash idishlar qonuni; Arximed qonuni; jismning suzish sharti va hokazo.

Gidrostatikaning asosiy tenglamalari: Eyler tenglamasi (suyuqlikning muvozanat tenglamasi); teng bosimli sirt tenglamasi; gidrostatik bosim taqsimoti tenglamasi (Paskal qonuni); uzviylik tenglamasi va hokazo.

Gidrostatikaning asosida ikkita teorema yotadi:

- qaralayotgan suyuqlik zarrachasiga qo‘yilgan barcha kuchlarning yig‘indisi nolga teng;
- qaralayotgan suyuqlik zarrachasiga qo‘yilgan barcha kuchlarning biror o‘qqa nisbatan momentlari yig‘indisi nolga teng.

Gidrostatikaning asosiy qoidalari sodda bo‘lishiga qaramasdan ular muhim amaliy ahamiyatga ega xulosalarni chiqarishga yordam beradi.

2.1. Gidrostatik bosim va uning xossalari. Gidrostatikaning asosiy tenglamalari

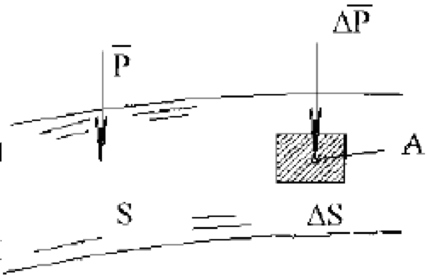
Gidrostatik bosim va uning xossalari. Tinch holatdagi suyuqlik barcha tarafdan sirt kuchlari bilan siqilgan bo‘ladi.

Bu kuchlar sirt nuqtalariga normal bo‘ylab hajmning ichiqa qarab yo‘nalgan. Bunday $\overline{P}$ kuchlar *gidrostatik bosim kuchlari* deb ataladi. $\overline{P}$ kuch ta’sirida suyuqlik ichida $\overline{p}$ siquvchi kuchlanish paydo bo‘ladi va uning moduli *gidrostatik bosim* deb ataladi.

Suyuqlikning berilgan *A* nuqtasidagi gidrostatik bosimning qiymati quyidagi formuladan topiladi (2.1-rasm):

$$p = |\overline{p}| = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{|\Delta \overline{P}|}{\Delta S},$$

bu yerda $\Delta \overline{P}$ – berilgan ΔS yuzachaga ta’sir etuvchi gidrostatik bosim kuchi.



2.1-rasm. Gidrostatik bosimni aniqlash.

Kuchlanish vektori normalining yo‘nalishi ixtiyoriy aniqlangan yuzadan bog‘liq. Har bir vektor yuzaga nisbatan normal va urinma tashkil etuvchilarga ega.

Tinch holatdagi suyuqlikda urinma kuchlanish mavjud emas va qaralayotgan nuqtada molekulalar orasidagi masofa barcha yo‘nalishlarda bir xil (chunki, suyuqlikda tuzilma yo‘q). Shuning uchun, suyuqlik ichki nuqtasidagi kuchlanish vektor emas, balki skalyar miqdordir (u yo‘nalishdan bog‘liq emas). Shunday qilib, *p* bosim (N/m^2 yoki Pa) – bu skalyar miqdor.

Butun *S* sirt bo‘ylab *p* ning o‘rtacha qiymati:

$$p = |\overline{p}| = \frac{|\overline{P}|}{S},$$

bu yerda $\overline{P}$ (N) – berilgan *S* (m^2) yuzaga qo‘yilgan gidrostatik bosim kuchlari yig‘indisi (keyingi yozuvlarda *P* ni bosim kuchi sifatida ishlatamiz).

Suyuqlik bilan to‘ldirilgan vertikal tekis devorli rezervuarni qaraylik (2.2,*a*-rasm). Rezervuarning tubiga unga quyilgan suyuqlik og‘irligi $G = \gamma \cdot V$ ga teng bosim kuchi *P* ta’sir etadi, ya’ni $P = G$.

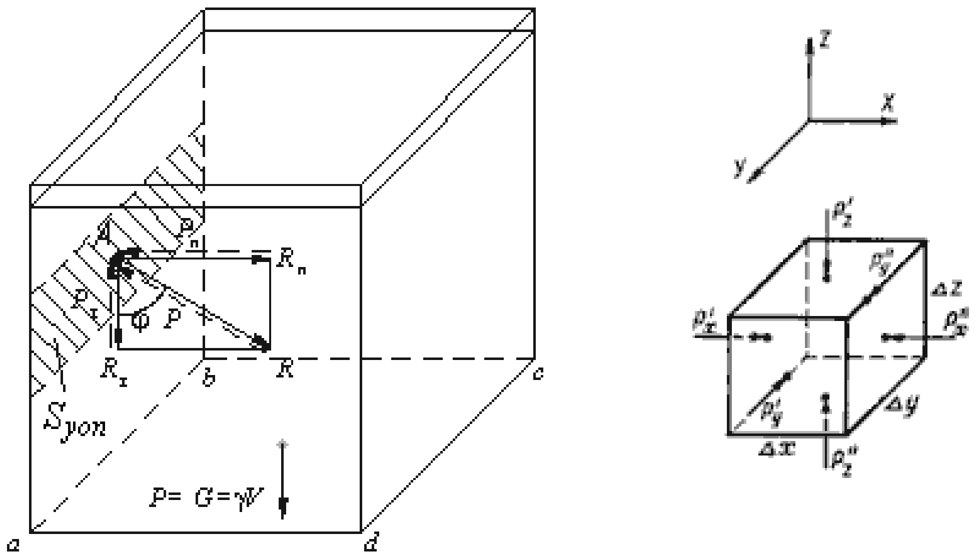
Agar bu *P* kuchni idish tubining yuzasi S_{abcd} ga bo‘lsak, u holda rezervuar tubiga ta’sir etuvchi o‘rtacha gidrostatik bosimni hosil qilamiz: $p_{o‘rt} = P / S_{abcd}$.

Gidrostatik bosim quyidagi xossalarga ega:

1-xossa. *Suyuqlikning ixtiyoriy ichki nuqtasidagi gidrostatik bosim uning ajratib olingan hajmiga uringan yuzaga perpendikulyar va u qaralayotgan hajmning ichiga normal bo‘ylab yo‘nalgan.*

Bu tasdiqni isbotlash uchun 2.2,*a*-rasmga murojaat qilamiz. Rezervuarning yon devorida S_{yon} yuzachani (shtrixlangan) ajratamiz. Gidrostatik bosim bu yuzaga taqsimlangan kuch ko‘rinishida ta’sir qiladi, uni bitta teng ta’sir etuvchi *P* kuch bilan almashtirish mumkin. Faraz qilaylik, shu yuzaga ta’sir etuvchi *P* gidrostatik bosimning teng ta’sir etuvchisi *A* nuqtaga qo‘yilgan va unga φ burchak ostida yo‘nalgan (rasmda strelkali shtrix kesma bilan tasvirlangan). U holda devorning suyuqlikka ta’sir etuvchi reaksiya kuchi *R* xuddi shu miqdorga teng, ammo unga rama-qarshi yo‘nalgan bo‘ladi (strelkali to‘la kesma). Ko‘rsatilgan *R* vektorni ikkita tashkil etuvchi vektorlarga ajratish mumkin: R_n – normal (shtrixlangan yuzachaga perpendikulyar) va R_τ - devorga urinma

.



a) *b*)

2.2-rasm. Gidrostatik bosimning xossalarini ifodalovchi sxemalar:
a) – birinchi xossa uchun; *b*) – ikkinchi xossa uchun.

R_n – normal bosim kuchi suyuqlikda siqish kuchlanishini yuzaga keltiradi. Bunday kuchlanishlarga suyuqlik osongina qarshilik ko‘rsatadi. R_τ - devorga urinma kuch suyuqlikka devor bo‘ylab ta’sir qiladi, odatda u suyuqlikda urinma kuchlanishlarni yuzaga keltirishi va suyuqlik zarrachalari pastga qarab ko‘chishi kerak edi. Ammo rezervuardagi suyuqlik tinch holatda bo‘lganligi uchun R_τ tashkil etuvchi yo‘q. Bu yerdan gidrostatikaning birinchi xossasi kelib chiqadi.

2-xossa. *Suyuqlik ichida berilgan ixtiyoriy nuqtadagi gidrostatik bosimning miqdori barcha yo‘nalishlarda bir xil, ya’ni bosim o‘zi ta’sir qilayotgan normalining yo‘nalishi ixtiyoriy aniqlangan yuzadan bog‘liq emas.*

O‘quvchining muammoni mustaqil o‘zlashtirishiga ko‘maklashish maqsadida ushbu masalani yechishning quyidagi ikki xil yondashuvini qaraylik.

1) Biror rezervuarni to‘ldirib turgan suyuqlikdan tomonlari juda kichik Δx, Δy, Δz elementar kubchani ajratib olamiz (2.2,*b*-rasm). Har bir yon sirtni elementar yuzachaning mos p_x, p_y , p_z bosimlarga ko‘paytmasidan

iborat gidrostatik bosim kuchi siqadi. Musbat yo‘nalishda ta’sir etuvchi bosim vektorinining komponentalarini p'_x, p'_y, p'_z, teskari yo‘nalishda ta’sir etuvchi bosim vektorinining komponentalarini esa p''_x, p''_y, p''_z kabi belgilaymiz. Kub muvozanat holatida bo‘lganligi uchun quyidagi tengliklar o‘rinli:

$$p'_x\Delta y\Delta z=p''_x\Delta y\Delta z\ ; \quad p'_y\Delta x\Delta z = p''_y\Delta x\Delta z\ ;$$
$$p'_z\Delta x\Delta y + \gamma\Delta x\Delta y\Delta z = p''_z\Delta x\Delta y\ ,$$

bu yerda γ – solishtirma og‘irlik; $\Delta x\Delta y\Delta z$ – kubning hajmi.

Hosil bo‘lgan tengliklarda mos qisqartirishlarni bajarsak,

$$p'_x = p''_x; \quad p'_y = p''_y; \quad p'_z + \gamma\Delta z = p''_z\ .$$

Uchunchi tenglamaning $\gamma\Delta z$ hadi p'_z va p''_z larga nisbatan cheksiz kichik bo‘lganligi uchun uni e’tiborga olmaslik mumkin, natijada

$$p'_x = p''_x; \quad p'_y = p''_y; \quad p'_z=p''_z\ .$$

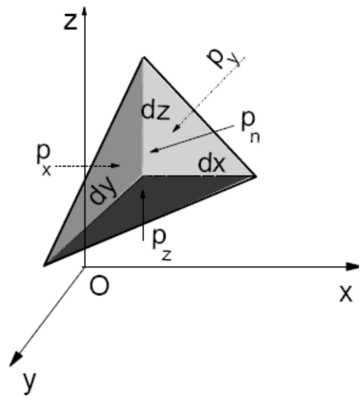
Kub deformatsiyalanmaganligi (o‘qlarning birortasi yo‘nalishida ham cho‘zilmasligi) sababli bosim har xil o‘qlar yo‘nalishida bir xil deb faraz qilish lozim, ya’ni

$$p'_x = p''_x = p'_y = p''_y = p'_z=p''_z\ .$$

Bu gidrostatikaning ikkinchi xossasi isbotini bildiradi.

2) Bu xossani quyidagicha ham isbotlash mumkin. Qo‘zg‘almas suyuqlikdan qirralari koordinata o‘qlariga parallel bo‘lib, ular mos ravishda d_x ,d_y va d_z bo‘lgan to‘gri burchakli parallelopiped shaklidagi elementar hajmdan 2.3-rasmda tasvirlangan tetraedrni ajratib olamiz.

Faraz qilaylik, suyuqlikdan ajratib olingan hajmga tashkil etuvchilari *X*, *Y*, *Z* bo‘lgan birlik massaviy kuch ta’sir etsin. *Ox* o‘qiga normal yoqqa ta’sir etuvchi gidrostatik bosimni p_x, *Oy* o‘qiga normal yoqqa ta’sir etuvchi gidrostatik bosimni p_y va *Oz* o‘qiga normal yoqqa ta’sir etuvchi gidrostatik bosimni p_z deb belgilaylik. Qiya yoqqa ta’sir etuvchi gidrostatik bosimni p_n, shu yoqning yuzasini *dS* deb belgilaylik. Bu bosimlarning barchasi mos yoqlarga normal yo‘nalgan.



2.3-rasm. Gidrostatik bosimning xossasiga oid sxema.

Suyuqlikning ajratib olingan hajmi uchun *Ox* o‘q bo‘ylab muvozanat tenglamasini tuzamiz, u holda *Ox* o‘q bo‘ylab ta’sir etuvchi kuch quyidagiga teng:

$$(1/2)p_xd_yd_z - p_ndS\cos(n,x)\ .$$

Tetraedrning massasi uning hajmiga zichligining ko‘paytmasiga teng, ya’ni $(1/6)\rho d_xd_yd_z$. Natijada, *Ox* o‘q bo‘ylab tetraedrga ta’sir etuvchi massaviy kuch

$$(1/6)\rho d_x\, d_y d_z X\ .$$

Bularga asosan tetraedrning muvozanat tenglamasini quyidagicha yozamiz:

$$(1/2)d_y d_z p_x - p_n dS\cos(n,x) + (1/6)\rho d_x\, d_y d_z X\ .$$

Bu tenglamani hadma had $(1/2)d_y d_z$ ga bo‘lamiz, bu ifoda dS qiya yoqning yOz tekislikdagi proeksiyasini beradi, ya’ni $(1/2)d_y d_z = dS\cos(n,x)$. Natijada ushbu

$$p_x - p_n + (1/3)\rho d_x X = 0$$

tenglikka ega bo‘lamiz.

Tetraedrning o‘lchamlari nolga intilganda bu tenglamaning d_x ko‘paytuvchini o‘z ichiga olgan uchinchi hadi ham holga intiladi, p_x va p_n bosimlar esa chekli miqdorlar bo‘lib qoladi. Natijada, limitdan $p_x - p_n = 0$ yoki $p_x = p_n$ tenglik kelib chiqadi. Xuddi shunday, p_y va p_z bosimlar uchun ham Oy va Oz o‘qlarga mos $p_y = p_n$ va $p_z = p_n$ tengliklarni olish mumkin.

Natijada, ushbu $p_x = p_y = p_z = p_n$ tenglikka kelamiz. Bu aytilgan xossaning isbotini beradi.

Tetraedrning dx, dy va dz o‘lchamlari ixtiyoriy olingani uchun dS qiya yuza ham ixtiyoriy. Tetraedrni bitta nuqtagacha siqib borsak, bu nuqtadagi bosim barcha yo‘nalishlarda bir xil bo‘lib chiqadi.

Qo‘zg‘almas suyuqlikdagi gidrostatik bosim xossasining isboti qovushoqmas suyuqlikning harakatida ham o‘rinli. Qovushoq suyuqlikning harakatida esa urinma kuchlanishlar paydo bo‘ladi, natijada, qovushoq suyuqlikdagi gidromexanik bosim yuqorida ko‘rsatilgan xossaga ega bo‘lmaydi.

3-xossa. Nuqtadagi gidrostatk bosim shu nuqtaning fazodagi koordinatalaridan bog‘liq, ya’ni $p = p(x,y,z)$.

Suyuqlikning muvozanat tenglamasi. Suyuqlikning muvozanat tenglamasi, yuqoridagi (1.16) harakat tenglamalarida $u_x = u_y = u_z = 0$ deb olsak, kelib chiqadi. Yuqorida ta’kidladikki, tinch holatdagi suyuqlikda urinma kuchlanishlar paydo bo‘lmaydi, ya’ni t vaqt bo‘yicha hosilalar nolga teng. Normal kuchlanishlarni bosim bilan almashtirsak, quyidagi tenglamalarga kelamiz:

$$X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0;\quad Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = 0;\quad Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = 0. \tag{2.1}$$

Bu sistemani vektor shaklida quyidagicha yozish mumkin:

$$\vec{F} - \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p = 0. \tag{2.2}$$

Yuqoridagi (2.1) tenglama *gidrostatika uchun Eylerning differensial tenglamalari sistemasi* deb ataladi. Bu tenglama ham siqilmaydigan va ham siqiluvchan suyuqliklarga tegishli. Agar (2.1) tenglamalar sistemasini integrallasak, u holda nuqtadagi gidrostatik bosim va uning koordinatalar orasidagi bog‘lanish ifodasini hosil qilamiz.

Suyuq jismga har xil fizik tabiatga ega kuchlar ta’sir qilishi mumkin. Shuning uchun, “Qo‘yilgan kuchlar ta’sirida suyuqlik hamma vaqt ham tinch holatda turadimi?”, degan savol tug‘iladi. Bu savolga javob berish uchun (2.1) differensial tenglamalar sistemasida ba’zi almashtirishlar bajarish lozim bo‘ladi.

Gidrostatikaning differensial shaklidagi asosiy tenglamasi. Yuqoridagi (2.1) tenglamalar sistemasining har bir tenglamasini mos ravishda *dx*, *dy*, *dz* ga ko‘paytiramiz va ularni yig‘ib chiqamiz. Natijada quyidagi tenglamaga kelamiz:

$$(Xdx+Ydy+Zdz)-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}dx+\frac{\partial p}{\partial y}dy+\frac{\partial p}{\partial z}dz\right)=0. \qquad (2.3)$$

Bu tenglamaning ikkinchi hadidagi qavs ichidagi ifoda bosimning to‘la differensialini beradi, shunga ko‘ra (2.3) tenglamani quyidagicha yoza olamiz:

$$dp=\rho(Xdx+Ydy+Zdz). \qquad (2.4)$$

Bu tenglama *gidrostatikaning differensial shaklidagi asosiy tenglamasi* deb ataladi. Ko‘rinib turibdiki, bu tenglamaning chap tarafi to‘la differensial, demakki uning o‘ng tarafi ham to‘la differensialni berishi kerak. Bundan kelib chiqadiki, kuchlar va zichlik x, y va z larning shunday funksiyalari bo‘lib, ular (2.4) tenglamaning o‘ng tarafini to‘la differensialga aylantirishi lozim. Agar bunday holat bajarilmasa, u holda suyuqlikning muvozanat holati sodir bo‘lmaydi. Boshqacha aytganda, agar suyuqlik muvozanat holatida bo‘lsa, (2.4) tenglamaning o‘ng tarafi biror Φ funksiyaning to‘la differensiali bo‘ladi.

Zichlikni o‘zgarmas ($\rho=\text{const}$) deb faraz qilib, ushbu

$$Xdx+Ydy+Zdz=d\Phi \qquad (2.5)$$

tenglikni yoza olamiz. Nazariy mexanika kursidan ma’lumki, kuchlarning suyuqlik zarrachalari elementar ko‘chishiga skalyar ko‘paytmasi *elementar ish* deb ataladi, ya’ni

$$f_x dx+f_y dy+f_z dz\ . \qquad (2.6)$$

Ish harakatning yo‘liga bog‘liq bo‘lmagan, ya’ni faqatgina uning boshlang‘ich va oxirgi holatiga bog‘liq bo‘lgan holda kuch *potensial kuch* deyiladi. Bunda kuchning ishi harakatning yo‘liga bog‘liq bo‘lmasligi uchun elementar ish ifodasi, ya’ni (2.6) ifoda kuch funksiyasi deb ataluvchi biror *P* skalyar funksiyaning to‘la differensialini berishi zarur va yetarli. Uning teskari ishora bilan olingan qiymati potensial deb ataladi. Shunday qilib, yuqorida qaralgan funksiyani kuch funksiyasi deb atash mumkin, (2.4) ifodani esa quyidagi ko‘rinishda yozish mumkin:

$$dp = \rho d\Phi\,. \tag{2.7}$$

Bundan kelib chiqadiki, potensialga ega bo‘lgan kuch ta’siridagina siqilmaydigan suyuqlik muvozanat holatida bo‘lishi mumkin.

Ekvipotensial va bir xil bosimli sirtlar. Har bir nuqtasida $\Phi = \text{const}$ bo‘lgan sirtlar *ekvipotensial sirtlar* deb ataladi. Xususiy holda, bosimi teng bo‘lgan sirtlar, ya’ni har bir nuqtasida $p = \text{const}$ bo‘lgan sirtlar ekvipotensial sirtlar bo‘ladi. Bunday holda $dp = 0$ bo‘ladi va (2.4) tenglama quyidagicha yoziladi.

$$\rho\left(Xdx + Ydy + Zdz\right) = 0\,.$$

Ammo, ma’lumki, $\rho \neq 0$ va bundan kelib chiqadiki,

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0\,. \tag{2.8}$$

(2.8) tenglama *teng bosimli sirt tenglamasi* deb ataladi. Agar suyuqlikka massaviy kuchlardan faqat og‘irlik kuchi ta’sir etsa, u holda $X = Y = 0$; $Z = -g$ (bunda og‘irlik kuchi koordinat o‘qiga qarama-qarshi yo‘nalganligi uchun minus ishora olingan); $-gdz = 0$ va $z = C = const$, ya’ni tinch holatdagi suyuqlikning gorizontal sirt tekisligi – bu *bosimi nolga teng bo‘lgan tekislik* yoki *sath sirti* (*tekisligi*) deyiladi.

Sath sirti quyidagi xossalarga ega: ikkita sath sirtlari o‘zaro kesishmaydi; massaviy kuchlar sath sirtiga normal yo‘nalgan. Suyuqlik va gazsimon muhitni ajratib turuvchi sath sirti *erkin sirt* deb ataladi.

Bosim taqsimotining gidrostatik qonuni. Suyuqlik siqilmaydigan, ya’ni $\rho = \text{const}$ deb faraz qilib va massaviy kuchlardan faqat og‘irlik kuchi ta’sir qilayapti deb hisoblab, gidrostatikaning differensial shakldagi asosiy tenglamasi (2.4) ni integrallaymiz.

Yuqorida ko‘rsatilgan ediki, bu holda

$$X = Y = 0\,,\ Z = -g\,,\ \text{ya’ni}\ \ dp = -\rho g dz\,.$$

Buni integrallagandan keyin esa

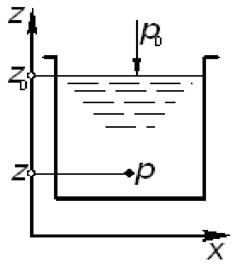
$$p = -\rho g z + C\,, \tag{2.9}$$

bunda *C* – ixtiyoriy integrallash o‘zgarmasi. Uni topish uchun quyidagi chegaraviy shartdan foydalanamiz (2.4-rasm):

$$z = z_0\ \ \text{bo‘lganda}\ p = p_0,$$

bunda p_0 - suyuqlik sathiga qo‘yilgan tashqi bosim.

Chegaraviy shartdan foydalanib, (2.9) dan integrallash o‘zgarmasi uchun quyidagi ifodaga ega bo‘lamiz: $C = p_0 + \rho g z_0$.



2.4-rasm. Idish hajmidagi chuqurlik bo‘yicha bosimni aniqlash.

Bu ifodani (2.6) ga qo‘ysak,

$$p = p_0 + \rho g(z_0 - z). \qquad (2.10)$$

Bosimning (2.10) tenglama bo‘yicha taqsimoti *bosimning chuqurlik bo‘ylab gidrostatik taqsimoti* deyiladi.

Gidrostatikaning asosiy tenglamasi. Taqdim etilgan 2.4-rasmdan ko‘rinadiki, $(z_0 - z)$ - suyuqlik zarrachasining suv ostiga tushish chuqurligi, bu kattalik h harfi bilan belgilanadi, ya’ni

$$p = p_0 + \rho g h. \qquad (2.11)$$

Hosil bo‘lgan (2.11) tenglama fizika kursidan ma’lum bo‘lgan *Paskal qonuni*ni ifodalaydi va *gidrostatikaning asosiy tenglamasi* deb yuritiladi. Suyuqlikning erkin sirtiga qo‘yilgan bosim uning barcha nuqtalariga o‘zgarishsiz uzatiladi. Agar idish ochiq bo‘lsa, u holda tashqi bosim atmosfera bosimiga teng. Olingan (2.11) tenglamaga ko‘ra bosim shu suyuqlikning faqatgina chuqurligiga bog‘liq. Agar har xil shakldagi idishlarga bir xil suyuqliklar quyilsa, u holda bu idishlarning bir xil chuqurliklaridagi gorizontal tublarida bosim bir xil bo‘ladi.

Shubhasiz har qanday to‘g‘ri tuzilgan fizik tenglama birligi bir jinsli bo‘lmog‘i lozim, masalan, oxirgi tenlamadagi $\rho g h$ had bosim bilan bir xil, ya’ni Paskalda o‘lchanmog‘i zarur. Bu miqdor *ortiqcha bosim* deb ataladi. U musbat ham, manfiy ham bo‘lishi mumkin. Bunday talqin qilish, (2.11) tenglamaga mos ravishda, absolyut bosim barotropik (atmosfera) bosim va ortiqcha bosimlar yig‘indisiga teng, degan xulosaga olib keladi, ya’ni

$$p_{abs.} = p_{atm.} \pm p_{ort.} \, . \qquad (2.12)$$

Manfiy ortiqcha bosim v*akuum bosim* deb ataladi va uning qiymati atmosfera bosimidan kichik bo‘ladi.

Gidrostatik bosim *simobli, suvli va mexanik asboblar (manometrlar)* yordamida o‘lchanadi. Vakuumni o‘lchaydigan asbob *vakuummetr* deyiladi.

Yana (2.10) tenglamaga qaytaylik. Bu tenglamaning har ikkala qismini ρg ga bo‘lib, quyidagini olamiz:

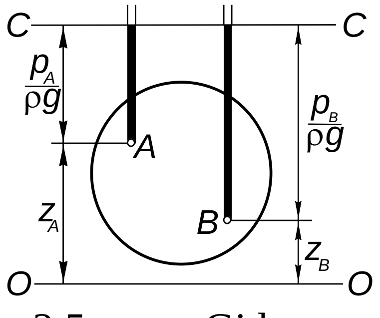
$$z+\frac{p}{\rho g}=z_0+\frac{p_0}{\rho g}. \tag{2.13}$$

Bu tenglama *bosim taqsimotining gidrostatik qonuni*ni ifodalaydi. Yuqoridagi (2.13) tenglamaning barcha hadlari uzunlik birligida ifodalanadi va *napor* deb ataladi. z miqdor hisob boshida tanlangan gorizontal tekislik ustida turgan suyuqlik zarrachasining holatini ifodalaydi, ya’ni z – bu *geometrik napor*; $p/(\rho g)$ - *pyezometrik napor*. Bu miqdorlarning yig‘indisi *gidrostatik napor* deb ataladi. $p_0/(\rho g)$ - atmosfera bosimining keltirilgan balandligi. Bu miqdorlarning mexanik ma’nosini tushuntirish uchun 2.5-rasmda tasvirlangan sodda sxemani qaraylik.

Bosim ta’siri ostida joylashgan suyuqlik bilan to‘ldirilgan va germetik yopilgan idishni qaraylik. Bu idishda joylashgan ixtiyoriy ikkita *A* va *B* nuqtalarni va xuddi shunday hisob boshlanishi tekisligi deb ataluvchi ixtiyoriy *O-O* gorizontal tekislikni tanlaylik.

A va *B* nuqtalardagi suyuqlik zarrachalarining koordinatalari z_A va z_B bo‘ladi. Yuqorida aytilganlarga ko‘ra z_A va z_B miqdorlar geometrik naporni ifodalaydi. Idishning qopqog‘i orqali *A* va *B* nuqtalarda atmosfera bilan tutashgan shisha naychalar tushiraylik. Bu naychalar *pyezometrlar* deb ataladi. Ma’lumki, shartga ko‘ra suyuqlik bosim ostida turibdi, shuning uchun suyuqlik pyezometr orqali ko‘tarila boshlaydi. Hech bir qiyinchiliksiz bu ko‘tarilish balandligini aniqlash mumkin. Tabiiyki, ma’lum vaqt o‘tgandan so‘ng qaralayotgan nuqtadagi suyuqlik ustunining balandligi bosimni muvozanatlashtiradi. Ana shu balandlik *pyezometrik balandlik* yoki *pyezometrik napor* deb ataladi.

Tinch holatdagi suyuqlikning ixtiyoriy tanlangan zarrachasi uchun (2.13) munosabat o‘rinli, ya’ni suyuqlikning ixtiyoriy nuqtasi uchun gidrostatik napor bir xil bo‘ladi, shuning uchun uni umumiy holda quyidagicha yozish mumkin: $z+\frac{p}{\rho g}=\text{const}$,



2.5-rasm. Gidrostatik bosimning fizik talqini uchun sxema.

Bundan kelib chiqadiki, pyezometrlarning sathi bir xil balandlikda to‘xtaydi (2.5-rasmda *C-C* tekislik).

Gidrostatikaning asosiy tenglamasini tahlil qilib, quyidagi xulosalarga kelish mumkin:

- gidrostatik bosim suyuqlikning erkin sirtiga ta’sir etayotgan p_0 – tashqi bosim va suyuqlikning h balandlikli ustuni og‘irligi natijasida paydo bo‘ladigan ρgh – og‘irlik bosimi yig‘indisiga teng;

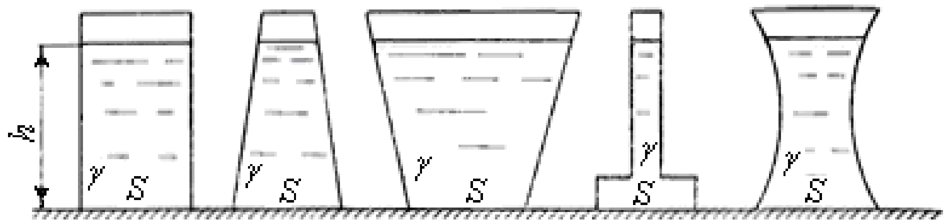
• p_0 – tashqi bosim qaralayotgan nuqtaning koordinatalaridan bog‘liq, ya’ni u tinch holatdagi suyuqlikning barcha nuqtalariga o‘zgarishsiz bir xil uzatiladi, shuning uchun amaliyotda suyuqlik bosim uzatuvchi muhit sifatida qaraladi, masalan, gidravlik mashinalar (gidrozichlagichlar, siquvchi silindrlar, gidroko‘targichlar)ning ishlash jarayoni suyuqlikning ana shu xossasiga asoslangan;

• ρgh – og‘irlik bosimi nuqtaning koordinatalari funksiyasi, nuqtaning suyuqlik sathidan cho‘kish chuqurligi oshishi bilan bu bosim oshib boradi;

• p_0 – tashqi bosim atmosfera bosimidan katta, atmosfera bosimiga teng va atmosfera bosimidan kichik bo‘lishi mumkin; agar p ning sonli qiymati atmosfera bosimini hisobga olib aniqlangan bo‘lsa, u holda (2.11) formula bo‘yicha aniqlangan bosim absolyut bosim va aksincha atmosfera bosimisiz aniqlangan bosim ortiqcha bosim deb ataladi.

2.2. Bosim taqsimotining gidrostatik qonuni va Paskal qonunining tadbiqlari

Gidrostatik g‘ayritabiiylik (paradoks). Suyuqlik va gazlarning gidrostatik xossalari o‘zining molekulyar tuzilishiga ko‘ra qattiq jismlar xossalaridan keskin farq qiladi. Gazlar o‘zini saqlayotgan idish shaklida bo‘ladi. Yetarlicha kichik ta’sir kuchi yordamida suyuqlikning hajmini o‘zgartirmasdan uning shaklini o‘zgartirish mumkin. Og‘irlik kuchi maydonidagi suyuqlik uni saqlayotgan idish saklida bo‘ladi. Tinch holatdagi suyuqlikning sathi (gazlardan farqli), uni saqlayotgan idishning shaklidan qat’iy nazar, ogirlik kuchi ta’siri yo‘nalishiga perpendikulyar bo‘ladi. Biz yuqorida tinch holatdagi suyuqlikka ta’sir etuvchi kuchlar: sirt kuchlari, massaviy kuchlar hamda sirt taranglik kuchi va ularning ahamiyati haqida to‘xtalib o‘tgan edik. Yuqorida aytilganlarga qo‘shimcha qilib, shuni ta’kidlash lozimki, suyuqlik ustunining idish tubiga bosuvchi kuchi suyuqlikning jinsidan, idish tubining yuzasidan va suyuqlik ustuni balandligidan bog‘liq, ammo idishning shaklidan bog‘liq emas. Shunday qilib, idishning shakli har xil, ammo ularning tubi yuzasi bir xil bo‘lib, ularga bir xil jinsli suyuqlik bir xil chuqurlikda quyilgan bo‘lsa, u holda idishlarning tubiga ta’sir etuvchi bosim kuchi bir xil va o‘zaro teng bo‘ladi (2.6-rasm). Bunday hodisa *gidrostatik g‘ayritabiiylik* (*paradoks*) deb ataladi.

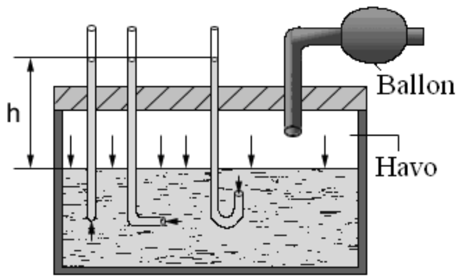


2.6-rasm. Gidrostatik g‘ayritabiiylik (paradoks) sxemasi.

Suyuqlik va gazlar uchun Paskal qonuni va uning tadbiqlari. Qattiq jismlar o‘zlariga ta’sir etayotgan tashqi bosimni shu bosimlarni yuzaga keltirgan kuchlar yo‘nalishida uzatadi. Suyuqlik va gazlarda esa tashqi bosim umuman boshqacha uzatiladi. Gidrostatikaning asosiy tenglamasidan ko‘rinadiki, idishdagi siyiqlik hajmining ixtiyoriy joyidagi nuqtani tanlamaylik, unga tashqi sirtga qo‘yilgan p_0 bosim doimo ta’sir etadi.

Paskal qonuni (1663 yilda yaratilgan): *yopiq idishdagi suyuqlikning tashqi sirtiga qo‘yilgan bosim shu suyuqlikning hamma ichki nuqtalariga barcha yo‘nalishlarda o‘zgarishsiz bir xil uzatiladi.*

Paskal qonunining ma’nosini tushunish uchun avvalo quyidagi eksperimentni qaraymiz (2.7-rasm). Tiqin bilan yopilgan idishda suv saqlanadi. Tiqinga diametrlari bir xil uchta naycha qo‘yilgan bo‘lib, ularning suyuqlikdagi quyi teshiklari bir xil chuqurlikda joylashgan, ammo ular har xil tomonga (quyiga, yonga va yuqoriga) yo‘naltirilgan, yana bitta naycha esa suvga yetmaydigan qilib, purkagichga rezinali ballon orqali ulangan.



2.7-rasm. Suyuqlik va gazlar uchun Paskal qonunini ifodalovchi eksperiment sxemasi.

Uning yordanida idishga havo haydab, idishda suv sirtidagi havo bosimini oshiramiz. Ta’kidlaymizki, bunda har uchala naychada ham suv bir xil balandlikka ko‘tariladi. Natijada, yopiq idishdagi qo‘zg‘almas suyuqlik o‘zining sirtiga qo‘yilgan tashqi bosimni barcha yo‘nalishlarda o‘zgarishsiz bir xil uzatadi. Kuzatishlar shuni ko‘rsatadiki, yopiq idishdagi gazlar ham tashqi bosimni xuddi shunday uzatadi.

Ko‘plab gidravlik qurilmalar (gidroko‘targich, gidrozichlagich, mashinalarning gidrouzatmasi, avtomobillarning tormoz sistemasi va hokazo)ning ishlash prinsipi Paskal qonuniga asoslangan. Paskal qonunining tadbiqi sifatida tutash idishlardagi suyuqlikning muvozanat shartini (tutash idishlar qonunini) hamda gidravlik zichlagich va uning ishlash prinsipini qarash mumkin.

Tutash idishlardagi suyuqlikning muvozanat sharti (tutash idishlar qonuni). O‘zaro aralashmaydigan har xil suyuqliklar bilan to‘ldirilgan ikkita tutash idishlarni qaraylik (2.8-rasm).

Idishlar yopiq, I va II idishlardagi suyuqliklar sathidagi p_{01} va p_{02} bosimlar har xil. *O-O* chiziq har xil jinsli suyuqliklarning bo‘linish chizig‘i. Shu *O-O* chiziq orqali o‘tuvchi gorizontal tekislik teng bosimli tekislik. Ana shu teng bosimli tekislikda yotuvchi C_1 va C_2 nuqtalardagi gidrostatik bosimlarni aniqlaylik. Gidrostatikaning asosiy tenglamasiga ko‘ra

$$p_{C1} = p_{01} + \rho_1 g h_1 \,; \quad p_{C2} = p_{02} + \rho_2 g h_2 \,,$$

bunda h_1 va h_2 – suyuqliklarning I va II idishlarda *O-O* tekislikdan yuqori ko‘tarilish balandligi; ρ_1 va ρ_2 – suyuqliklarning zichliklari.

Ko‘rinib turibdiki, $p_{C1} = p_{C2}$ bo‘lganligi uchun

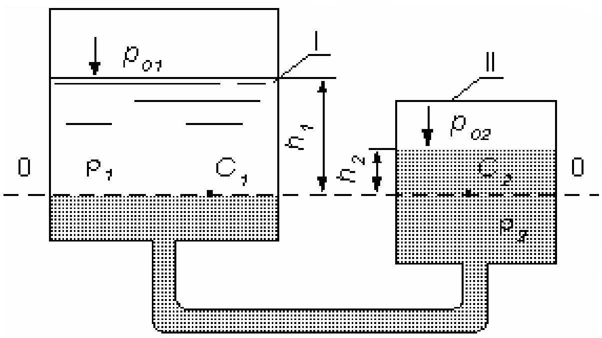
$$p_{01} + \rho_1 g h_1 = p_{02} + \rho_2 g h_2 \quad \text{yoki} \quad p_{01} - p_{02} = \rho_2 g h_2 - \rho_1 g h_1 \,.$$

Bu oxirgi bog‘lanish tutash idishlardagi suyuqliklarning muvozanat shartini ifodalaydi va undan amaliy masalalarni yechishda foydalaniladi. Bunda quyidagi xususiy hollarni qarash amaliyotda yordam beradi:

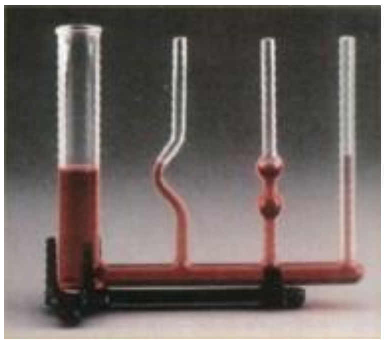
1-hol. Tutash idishlarga bir xil suyuqlik quyilgan, ammo p_{01} va p_{02} bosimlar har xil (2.8-rasm). *O-O* teng bosimli tekislikda yotuvchi C_1 va C_2 nuqtalardagi gidrostatik bosimlarni aniqlaylik. Bu holda $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ ekanligidan

$$p_{01} - p_{02} = \rho\, g\, (h_2 - h_1).$$

2-hol. Tutash idishlarga bir xil suyuqlik quyilgan, ya’ni $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ va $p_{01} = p_{02}$ (2.8-rasm). *O-O* teng bosimli tekislikda yotuvchi C_1 va C_2 nuqtalardagi gidrostatik bosimlarni aniqlaylik. Bu holda $h_2 = h_1$, ya’ni idishlardagi suyuqlik sathlari bir xil bo‘ladi. Bunga misol sifatida 2.9-rasmdagi tutash idishlarni keltirish mumkin.



2.8-rasm. Tutash idishlar sxemasi.



2.9-rasm. Tutash idishlar.

3-hol. Tutash idishlarga bir xil suyuqlik quyilgan, ya’ni $\rho_1 = \rho_2 = \rho$, ammo birinchi idish ochiq ($p_{01} = p_{atm}$), ikkinchisi esa yopiq ($p_{02} > p_{atm}$). *O-O* teng bosimli tekislikda yotuvchi C_1 va C_2 nuqtalardagi gidrostatik bosimlarni aniqlaylik (2.8-rasm). Bu holda

$$p_{C1} = p_{atm} + \rho g h_1 \,; \quad p_{C2} = p_{02} + \rho g h_2 \,,$$

chunki $p_{C1} = p_{C2}$, bu degani $p_{atm} + \rho g h_1 = p_{02} + \rho g h_2$ va bu yerdan $h_1 = h_2 + (p_{02} - p_{atm}) / (\rho g)$. Bundagi $(p_{02} - p_{atm}) / (\rho g)$ ifoda yopiq idishdagi suyuqlik sirtida yotgan nuqta uchun pyezometrik balandlik.

4-hol. Tutash idishlarga aralashmaydigan har xil jinsli suyqliklar ($\rho_2 \neq \rho_1$) quyilgan va $p_{01} = p_{02}$ (2.8-rasm). *O-O* teng bosimli tekislikda yotuvchi C_1 va C_2 nuqtalardagi gidrostatik bosimlarni aniqlaylik. Bu holda

$$\rho_1 g h_1 = \rho_2 g h_2 \quad \text{yoki} \quad h_1 / h_2 = \rho_2 / \rho_1 .$$

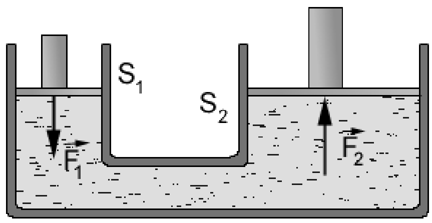
Bu shuni bildiradiki, tutash idishlarda sokin holatda turgan aralashmaydigan har xil jinsli suyuqliklarning ustuni balandliklari nisbati bu suyuqliklarning zichliklari nisbatiga teskari proporsional bo‘lar ekan.

Paskal qonuni, xususan, tutash idishlar qonuni tadbiqining bir misoli sivatida texnikada keng qo‘llaniladigan gidravlik zichlagichni qarash mumkin.

Gidravlik zichlagich va uning ishlash prinsipi. Gidravlik zichlagish deb silindrik shaklidagi har xil diametrli, ya’ni ko‘ndalang kesimlari yuzasi har xil (masalan, $S_2 >> S_1$) ikkita tutash idish tushuniladi. Silindrlar suyuq yog‘ (odatda transformator yog‘i) bilan to‘ldiriladi. Gidravlik zichlagichning sxematik qurilmasi 2.10-rasmda tasvirlangan (bu rasmda yog‘ zaxirasi va klapanlar tizimi ko‘rsatilmagan). Yuklanish qo‘yilmaganda porshenlar bir xil sathga ega bo‘ladi. Ma’lumki, suyuqlikning p bosimi deb uning S yuzachasiga ta’sir etayotgan F kuchning shu yuza birligiga nisbatiga aytiladi, ya’ni $p = F / S$.

Gidravlik zichlagichda S_1 kichik yuzachali porshenga ta’sir etuvchi F_1 kichik kuch S_2 katta yuzachali porshenga ta’sir etuvchi F_2 katta kuch bilan uzatiladi. Haqiqatan ham, Paskal qonuniga ko‘ra $p = F_1/S_1 = F_2/S_2$.

Natigada $F_2 = F_1 \cdot S_2/S_1 > F_1$, bundan esa $F_2/F_1 = S_2/S_1$ tenglikka kelamiz. Bu shuni bildiradiki, gidravlik zichlagich porshenlariga ta’sir eruvchi kuchlar shu porshenlar yuzalari proporsional. Shuning uchun, agar S_2 yuza S_1 yuzaga nisbatan qancha katta bo‘lsa, gidravlik zichlagich yordamida shuncha kuchdan yutish mumkin.



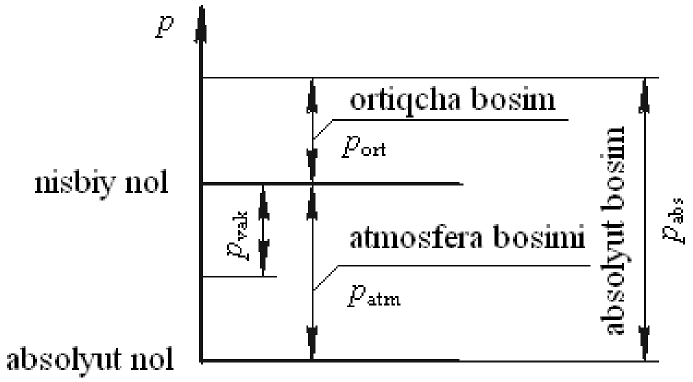
2.10-rasm. Gidravlik zichlagich sxemasi.

2.3. Bosim o‘lchagich asboblar

Agar p bosim absolyut noldan boshlab hisoblansa, u holda uni p_{abs} – *absolyut bosim* deb atashadi. Absolyut bosim doimo musbat bo‘ladi. Absolyut bosim uchun quyi limit nolga teng. Agar bosim atmosfera bosimidan boshlab hisoblansa, u p_{ort} – *ortiqcha bosim* deb ataladi. Ortiqcha bosim musbat ham va manfiy ham bo‘lishi mumkin. Atmosfera bosimi o‘zgarmas p_{at} = 103 kPa (2.11-rasm). Shularga ko‘ra $p_{abs} = p_{ort} + p_{at}$ yoki $p_{ort}/\gamma = (p_{abs} - p_{at})/\gamma = h_p$, bu yerda h_p – ortiqcha bosimning o‘lchovi bo‘lib, *pyezometrik balandlik* deb ataladi. To‘la va atmosfera bosimlari orasidagi farq *manometrik bosim* deb ataladi, ya’ni $p_{man} = p - p_{at}$. Manometrik bosim ortiqcha gidrostatik bosim ham deb ataladi. U nuqtaning suyuqlik erkin sirtidan cho‘ktirish chuqurligidan bog‘liq.

Tashqi bosim p_0 suyuqlik ichidagi ixtiyoriy nuqtasida bir xil ta’sir etadi, uning o‘zgarishi berilgan nuqtadagi absolyut gidrostatik bosimning o‘zgarishiga olib keladi. Gidrotexnik amaliyotda (ochiq idishlar va suv havzalarida) p_0 – tashqi bosim ko‘pincha atmosfera bosimiga teng, ya’ni $p_0 = p_{at}$, bunda p_{at} = 98100 N/m^2 – *texnik atmosfera* deb ataladi. Texnik atmosferaga $h_1 = p/\gamma_{suv}$ = 10 m suv ustuni va $h_2 = p/\gamma_{simob}$ = 0,735 m simob ustuni mos keladi.

Vakuummetrik bosim yoki *vakuum* – atmosfera bosimiga yetmagan bosim (bosim tanqisligi), ya’ni atmosfera yoki barometrik va absolyut bosimlar farqi: $p_{vak} = p_{at} - p$. Boshqacha aytganda, manfiy ishora bilan olingan ortiqcha bosim *vakuummetrik bosim* deb ataladi: $p_{vak} = -\,p_{ort} = -\,p_{man}$.



2.11-rasm. Bosimlarni aniqlash sxemasi.

Yuqorida ta’kidlanganidek, biror sohada bosim atmosfera bosimidan kam ($p' < p_{ат}$) bo‘lsa, u holda bu sohada vakuum hosil bo‘lgan deyiladi. Suyuqlikning berilgan nuqtasidagi *vakuum* – bu bosimning atmosfera bosimiga yetmasligi. Bunday bosimni o‘lchash uchun teskari pyezometr – vakuummetr qo‘llaniladi.

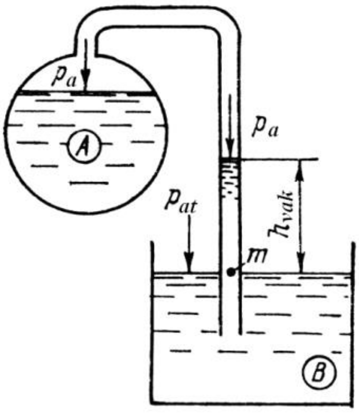
Vakuummetr – bu bir uchi ***A*** soha bilan tutashgan bo‘lib, bosim o‘lchaydigan, ikkinchi uchi esa ***B*** yordamchi suyuqlikli idishga tushirilgan, erkin surtidagi bosim esa atmosfera bosimiga teng naycha (2.12-rasm).

Atmosfera bosimi ta’siri ostida suyuqlik ***B*** idishdan naycha bo‘ylab h_{vak} balandlikka ko‘tariladi va bu balandlik *vakuummetrik balandlik* yoki *vakuumm balandligi* deb ataladi.

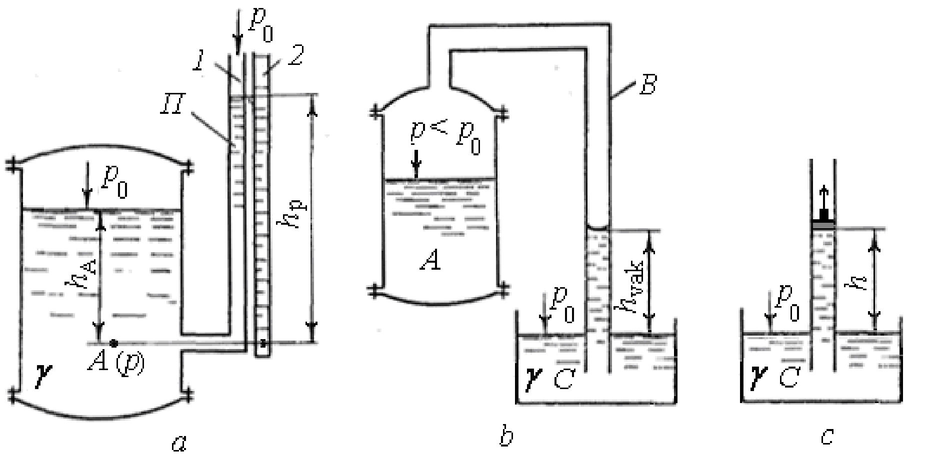
Vakuummetrik balandlik biror nuqtadagi ikkita bosimlar – atmosfera va absolyut farqini ifodalaydi. Aynan ana shu farq (bosimning o‘zi emas) *vakuum* deb ataladi.

Yuqoridagi tushunchalardan foydalanib, quyidagi tushunchalarni kiritamiz: *pyezometrik balandlik* (h_p) – bu ortiqcha bosimning o‘lchovi (rezervuarga ulangan ***П*** – pyezometr ***A*** nuqtadagi ortiqcha bosimni aniqlaydi): $h_p = p_{ort}/\gamma = (p_{abs} - p_{at})/\gamma$ (2.13,*a*-rasm); *vakuummetrik balandlik* (h_{vak}) – bu ortiqcha bosimning o‘lchovi (rezervuarga ulangan ***B*** vakuummetr): $h_{vak} = p_{vak}/\gamma = (p_{at} - p_{abs})/\gamma$ (2.13,*b*-rasm).

Vakuumning o‘lchov birligi bosimniki kabi. Bu ikki ifodadan kelib chiqadiki, vakuum noldan atmosfera bosimigacha o‘zgaradi; 2.13,*c*-rasmda tasvirlangan naychadagi porshenning yuqoriga harakati natijasida $h_{max} = p_0/\gamma$ bo‘lib, normal atmosfera bosimi 1,033 kg/sm^2 ga teng bo‘lganda h_{max} = 0,76 m (simob ushun); 10,33 m (suv ushun); 13,8 m (benzin uchun).



2.12-rasm.Vakuummetr



2.13-rasm. Pyezometrik (*a*), vakuummetrik (*b*), hamda maksimal vakummetrik (*c*) balandliklarni izohlashga oid sxemalar.

Suyuqlik hajmining biror nuqtasidagi *p’* – absolyut bosimini suyuqlikning biror ustuni balandligi yoki *h’* – absolyut (keltirilgan) pyezometrik balandlik bilan ifodalash mumkin va u metrlarda o‘lchanadi.

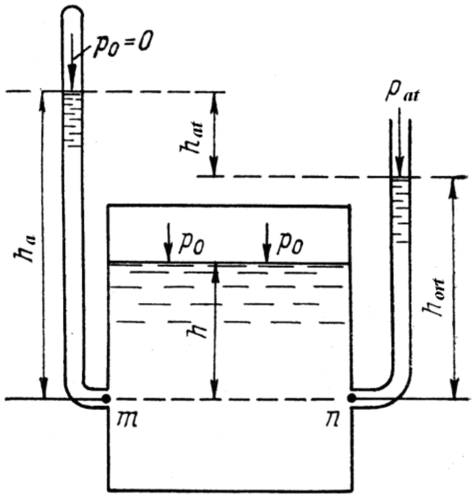
Absolyut (*keltirilgan*) *pyezometrik balandlik* – bu suyuqlik shunday ustunining balandligiki, bu qaralayotgan nuqtadagi absolyut bosimga teng. Bunday balandlikni o‘lchaydigan asbob *yopiq pyezometr* deyiladi (2.14-rasm).

Suyuqlik hajmining biror nuqtasidagi *p* – manometrik bosimini suyuqlik ustuni balandligi yoki *h’* – ortiqcha (keltirilgan) pyezometrik balandlik bilan ifodalash mumkin va u metrlarda o‘lchanadi.

Ortiqcha pyezometrik balandlik (*h*) – bu suyuqlik shunday ustunining balandligiki, bu qaralayotgan nuqtada suyuqlik o‘zining og‘irligi bilan manometrik bosimga teng bosim hosil qiladi (2.14-rasm).

Pyezometrlar kichik bosimlarni (0,3 – 0,4 at gacha) o‘lchashda ishlatiladi (ochiq turdagi pyezometrlar), chunki kattaroq bosimlarni (3–4 m suv ustuni) o‘lchash uchun pyezometrlarning quvurchasi juda ham uzun bo‘lishi talab etiladi. Bu sodda va aniq asboblar laboratoriya gidravlik tadqiqotlarida keng qo‘llaniladi.

Yetarlicha katta bosimlarni o‘lchash uchun boshqa asboblardan foydalanish maqsadga muvofiq. Masalan, simobli manometerda naychadagi suv simob bilan almashtiriladi.



2.14. Ochiq va yopiq turdagi pyezometrlar.

Umuman olganda, laboratoriya sharoitida suyuqlik va gazlarning bosimini o‘lchash uchun, pyezometrlardan tashqari, ikki xil manometrlardan foydalaniladi: *suyuqlikli va mexanik manometrlar*.

Suyuqlikli manometrlar o‘zining tuzilishiga ko‘ra quyidagi sxemalarda bo‘ladi (2.15-rasm):

- U – shaklida (2.15,*a*-rasm);
- bir nechta U-shaklli manometrlar ulanmasi (2.15,*b*-rasm);
- kosali manometrlar (2.15,*c*-rasm);
- U-shakladi differensial manometrlar (2.15,*d*-rasm);
- ikki suyuqlikli mikromanometrlar (2.15,*e*-rasm);
- ikki suyuqlikli kosali manometrlar (2.15,*f*-rasm).

Suyuqlikli manometrlarning ishlash prinsipini qaraylik.

U-shaklli manometr egilgan shishali naychadan iborat bo‘lib, unga simob solingan (2.15,*a*-rasm).

Gazlarda uncha katta bo‘lmagan bosimni o‘lchash uchun spirt qo‘llaniladi.

Ketma-ket ulangan bir nechta U-shaklidagi manometrlar p_{ort} – ortiqcha bosim yetarlicha katta bo‘lgan hollarda qo‘llaniladi va unga mos keluvchi h balandlik U-shaklidagi bitta naycha doirasigacha kamaymaydi. 2.15,*b*-rasmda tasvirlangandek ketma-ket ulangan ikkita U-shaklidagi naychalar (bunda K – jo‘mrak yoki havo qo‘yish uchun qisqich) uchun

$$p_{ort} = \gamma_{simob}(h_1 + h_2) - \gamma_2 (H_1 + H_2)$$

yoki umumiy holda bir nechta naychalar uchun

$$p_{ort} = \gamma_{simob}\sum h - \gamma_2 \sum H.$$

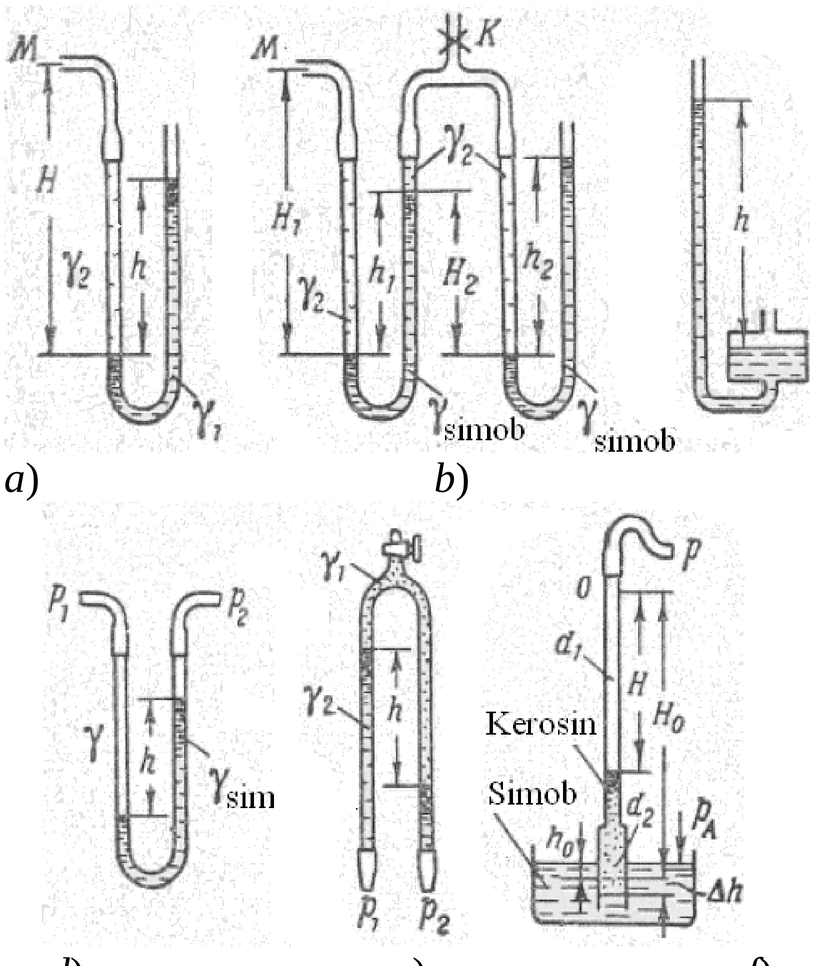
Kosali manometrning (2.15,*c*-rasm) yuqoridagidan qulayligi shundaki, uni qo‘llashda suyuqlikning bitta sathini fiksirlash yetarli. Kosaning naycha diametriga nisbatan yetarlicha katta diametrlarida suyuqlikning sathini o‘zgarmas deb hisoblash mumkin.

Differensial manometr ikkita nuqtadagi bosimlar farqini aniqlash uchun xizmat qiladi, uning eng soddasi U-shakldagi manometer bo‘lib, u 2.15,*d*-rasmda tasvirlangan. Agar simob solingan bundy manometr tutash idishni to‘ldirib turgan γ – solishtirma og‘irlikli suyuqlikning p_1 va p_2 bosimlari farqini o‘lchasa, u holda

$$p_1 - p_2 = h\,(\gamma_{\text{simob}} - \gamma).$$

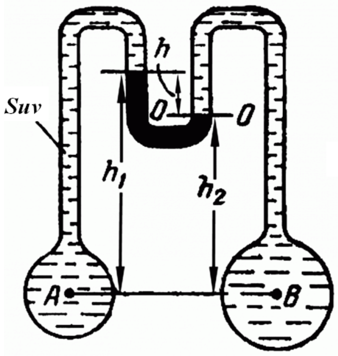
Bu manometrning tadbiqi sifatida 2.16-rasmda tasvirlangan differensial manometrni misol qilib keltirish mumkin.

Ikki suyuqlikli kosali manometrlar taxminan 0,1 dan 0,5 atm gacha intervalda bosimni o‘lchash yoki havoning siyraklashishini aniqlash uchun ishlatiladi (2.17,*e*-rasm), bunda spirtli yoki suvli manometr spirtning juda katta ustunini beradi, shuning uchun undan foydalanish noqulay; simobli manometr esa simob ustunining balandligi etarlicha bo‘lmagani uchun kerakli aniqlikni bermaydi.



2.15-rasm. Suyuqlikli manometrlar sxemalari.

Bunday manometrlar tezkor aerodinamik quvurlarda qo‘llaniladi. Uning ishlash sxemasi 2.15,*f*-rasmda tasvirlangan (kosaga simob, naychaga esa spirt, kerosin yoki boshqa suyuqlik quyilgan, bunda kam bug‘lanuvchan kerosindan foydalanish qulaylik tug‘diradi).



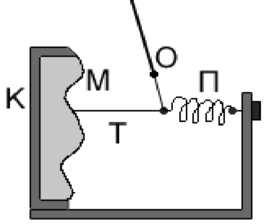
2.16-rasm. Differensial manometer.

Temir yo‘l transportida manometrlar magistraldagi yog‘ bosimini nazorat qilishda qo‘llaniladi.

Hozirgi kunda manometrlarning eng ko‘p tarqalgan turlaridan biri elektrik manometr hisoblanadi, mexanik manometrlar esa ularga ko‘ra kamroq qo‘llaniladi. Elektrik manometrda sezgich sifatida membrana ishlatiladi. O‘lchanayotgan bosim ta’sirida membrana deformatsiyalanadi va uzatgich qurilma orqali potensiometrning dvijogini harakatga keltiradi, o‘z navbatida bu potensiometr kalit orqali elektrik sxemaga ulangan.

Mexanik manometrlar ikki turda bo‘ladi: *prujinali va membranali*. Ularning ishlash prinsipi o‘lchanayotgan bosim ta’sirida to‘la prujinaning yoki membrananing deformatsiyasiga asoslangan bo‘lib, maxsus mexanizm orqali bu deformatsiya strelkaga uzatiladi, uning siferblati o‘lchanayotgan bosimni ko‘rsatadi.

Atmosfera bosimini o‘lchagich aneroid deb ataluvhi metall barometrni bunga misol qilib keltirishimiz mumkin (2.17-rasm). Bu asbob (K – havosi so‘rilgan silindrik kamera; M – kamerani germetik yopuvchi membrana; T – taranglovchi; П – prujina; C – strelka; O – o‘q; Ш - shkala) suvli manometrlarga nisbatan aniqligi kamroq, ammo u bilan atmosfera bosimini har xil balandliklarda o‘lchash qulay. Shishali aneroid (altimetr yoki balandlik o‘lchagich) yordamida Yerdan ko‘tarilish balandligini o‘lchash mumkin, u aviatsiyada, parashyutdan sakrash sportida, alpinizmda va boshqa hollarda keng qo‘llaniladi.



2.17-rasm Barometraaneroid sxemasi.

Insonlar amaliy faoliyatida tez-tez bir birlari bilan qattiq yoki egiluvchan shlanglar bilan ulangan tutash idishlardagi suyuqliklarning muvozanati masalalari bilan to‘qnash keladilar. Idishlarning o‘zi odatda *tirsaklar* deb ataladi. Bunday gidravlika elementlari ko‘pincha gidravlik mashinalarda (gidravlik zichlagichlar va boshqa), gidrouzatma tizimlarda va gidroavtomatlarda, har xil o‘lchagich asboblarda va boshqa holatlarda qo‘llaniladi.

Odamlar tabiiy tutash idishlar bilan qadimdan tanish:

katta hajmdagi tutash idishlar tabiiy gidrodinamik tizimlarning alohida tirsaklari rolini o‘ynovchi quduqlar tizimi bilan suv shimuvchi tog‘ jinslari qatlami orqali bog‘langan bo‘ladi. Bir jinsli suyuqlik bilan to‘ldirilgan ochiq tutash idishlarda suyuqlikning erkin sathi har ikkala tirsakda bir hil bo‘ladi. Agar idishlar tirsaklariga o‘zaro aralashmaydigan suyuqliklar quyilgan bo‘lsa, u holda suyuqlikning erkin sathi suyuqliklarning zichligidan bog‘liq holda chap va o‘ng tirsaklarda har xil balandliklarda bo‘ladi. Bu qoidadan differensial manometrlarda foydalaniladi (2.16-rasm).

Namunaviy masalalar va ularning yechimlari

1-masala. Suv bilan to‘ldirilgan idish tubidagi p' - gidrostatik bosimni aniqlang. Idish og‘zi ochiq, erkin sirtiga ta’sir etayotgan bosim atmosfera bosimi. Idishdagi suvning chuqurligi $h = 0{,}6$ m.

Yechish. Idishdagi gidrostatik bosim $p' = p_0 + \gamma h$. Bu yerda $p_0 = p_{at}$ bo‘lgani uchun $p' = p_{at} + \gamma h$. Berilganlarga ko‘ra $p_{at} = 9{,}81 \cdot 10^4$ N/m^2; $\gamma = 9810$ N/m^3. U holda $p' = p_{at} + \gamma h = 9{,}81 \cdot 104 + 9810 = 103986$ N/m^2.

Javob: $p' = 103986$ N/m^2 = 103,986 kN/m^2.

2-masala. Yopiq idishda suyuqlik sathidan h balandlikda suv ustuni balandligini aniqlang. Idishdagi suv $p'_1 = 1{,}06$ at absolyut bosim ostida turibdi (2.18-rasm).

Yechish. A umumiy nuqta uchun muvozanat shartini tuzamiz. ***A*** nuqtada chapdan gidrostatik bosim $p' = p'_1 + \gamma h_1$. ***A*** nuqtada o‘ngdan gidrostatik bosim $p' = p_{at} + \gamma h + \gamma h_1$.

Bu tenglamalarning o‘ng taraflari tenglashtiramiz:

$$p'_1 + \gamma h_1 = p_{at} + \gamma h + \gamma h_1, \text{ u holda } p'_1 = p_{at} + \gamma h.$$

Natijada $h = (p'_1 - p_{at})/\gamma$ hisob formulasini hosil qilamiz. O–O tekislik hisob shkalasining boshi. Pyezometr suyuqlik ustunining h balandligidagi manometrik bosimning miqdorini o‘lchaydi. Boshlang‘ich berilganlarni hisob formulasiga qo‘ysak,

$$p'_1 - p_{at} = 1{,}06 - 1 = 0{,}06 \text{ at}.$$

Bu yerda at ni N/m ga o‘tkazsak,

$$0{,}06 \text{ at} \cdot 98100 \text{ N/m}^2 = 5886 \text{ N/m}^2;$$

Agar $\gamma = 9810$ N/m^3 desak, u holda

$$h = (p'_1 - p_{at})/\gamma = 5886/9810 = 0{,}6 \text{ m}.$$

3-masala. Ballon ichidagi havoning absolyut bosimi $p'_B = 0{,}95$ at bo‘lsa, u holda vakuummetda suvning h_{vak} – ko‘tarilish balandligini toping (2.20-rasm). Vakuummetr qanday bosimni o‘lchashini aniqlang.

Yechish. O–O gorizontal tekislikka nisbatan muvozanat shartini tuzamiz. Ichkaridan ta’sir qilayotgan gidrostatik bosim quyidagiga teng:

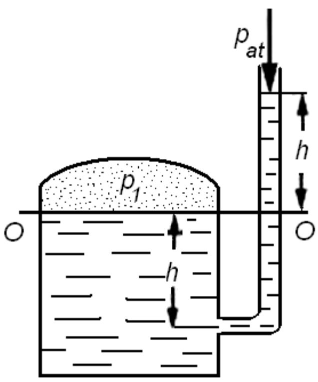
$$p'_{O\text{-}O} = p'_B + \gamma h_{\text{vak}}\ .$$

Tashqi tarafdan gidrostatik bosim:

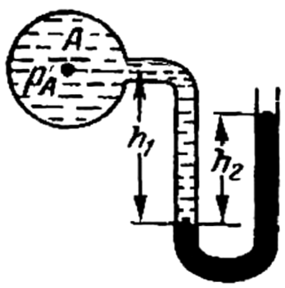
$$p'_{O\text{-}O} = p_{\text{at}}\ .$$

Tizim muvozanatda turganligi uchun bu ikki tenglamaning o‘ng taraflarini tenglashtiramiz:

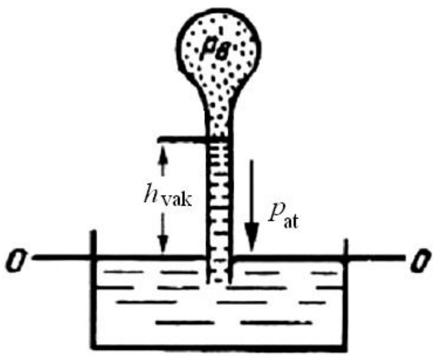
$$p_{\text{at}} = p'_B + \gamma h_{\text{vak}}\ .$$



2.18-rasm.



2.19-rasm.



2.20-rasm.

Bu yerdan quyidagi hisob formulasi kelib chiqadi:

$$h_{\text{vak}} = (p_{\text{at}} - p'_B)/\gamma$$

Vakuummetr atmosfera bosimiga yetmayotgan suyuqlik ustuni h bilan ifodalanuvchi bosimni yoki vakuummni o‘lchaydi.

$$p_{\text{at}} - p'_B = 1 - 0{,}95 = 0{,}05 \text{ at} = 0{,}05 \cdot 98100 = 4905 \text{ N/m}^2;$$

$$\gamma = 9810 \text{ N/m}^3; \quad h_{\text{vak}} = 4905/9810 = 0{,}5 \text{ m}.$$

4-masala. Agar pyezometr bo‘yicha simob ustuni balandligi h_2 = 25 sm bo‘lsa, u holda suv uzatish quvurining ***A*** nuqtasidagi manometrik bosimni aniqlang. Quvurning markazi suv va simobning ajralish chizig‘idan h_1 = 40 sm pastda joylashgan (2.21-rasm).

Yechish. ***B*** nuqtadagi bosimni topamiz. ***A*** nuqta ***B*** nuqtadan h_1 ga pastda joylashganligi uchun

$$p'_{\text{B}} = p'_{\text{A}} - \gamma h_1 = p'_{\text{C}}\ .$$

C nuqtadagi bosim ***B*** nuqtadagi bosimga teng, chunki suv ustunining bosimi muvozanatlashadi. Atmosfera bosimini hisobga olib, ***C*** nuqtadagi bosimni aniqlaymiz:

$$p'_{\text{C}} = p'_{\text{at}} + \gamma_{simob}\, h_2\ .$$

Har ikkala tenglamani tenglashtirsak,

$$p'_{\text{A}} - \gamma h_1 = p_{\text{at}} + \gamma_{simob}\, h_2\ .$$

Natijada manometrik bosim quyidagiga teng bo‘ladi:

$$p_A = p'_A - p_{at} = \gamma_{simob}\, h_2 + \gamma h_1 .$$

U holda p_A =133416 · 0,25 + 9810 · 0,4 = 37278 N/m^2.

5-masala. Atmosfera bosimi $p_{atm} = 10^5$ Pa, idishdagi suv chuqurligi h = 2,5 m bo‘lsa, u holda ochiq idishning tubidagi absolyut va ortiqcha bosimlarni aniqlang.

Yechish. Suv zichligini ρ = 1000 kg/m^3 desak, idish tubidagi ortiqcha bosim $p_{ort} = \rho gh$ = 1000·9,81·2,5 = 24525 *Pa* = 0,245 *bar*. Absolyut bosim esa $p_{abs} = p_{atm} + p_{ort} = 10^5$ + 24525 = 124525 *Pa* = 1,245 *bar*.

Topshiriqlar

1. Yuqoridagi 1-masala shartlaridan kelib chiqib, idish tubiga ta’sir etayotgan manometrik bosimni aniqlang.

2. Agar pyezometrning ko‘rsatgichi h = 0,4 m bo‘lsa, p' – gidrostatk bosimni toping (2.18-rasm). p – manometrik bosim nimaga teng?

3. Agar *A* ballondagi neftning manometrik bosimi p_A = 0,6 at, neft (γ_{neft} = 7848 N/m^3) ustunining balandligi h_1 = 55 sm bo‘lsa, simob ustunining balandligi h_2 ni toping (2.19-rasm).

4. Agar vakuummetrning ko‘rsatgichi h_{vak}= 0,7 m suv ustuni (2.20-rasm) bo‘lsa, u holda ballon ichidagi p_{vak} – vakuumm va p'_B – absolyut bosimni toping.

5. A ballondagi (2.20-rasm) manometrik bosim (p_A) va absolyut bosim (p'_A) larni quyidagi ikki hol uchun hisoblang (hisoblashlarda h_1 = 70 sm, h_2 = 50 sm deb oling):

1) ballonda va chap naychada suv (γ = 9810 N/m^3), o‘ng naychada esa simob (γ_{simob} = 133 416 N/m^3);

2) ballonda va chap naychada havo (γ_{havo} =133,416 N/m^3), o‘ng naychada esa suv.

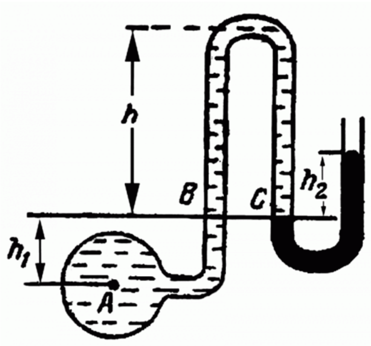
6. Agar quvurning markaziy ***A*** nuqtasi 2.21-rasmda ko‘rsatilganiga nisbatan yuqoriga ko‘tarilib, suv va simobning ajralish chizig‘idan h_1 = 40 sm yuqorida joylashgan bo‘lsa, simob ustuni balandligi h_2 ni toping. Quvurdani manometrik bosimni, p_A =37278 N/m^2 deb oling.

7. Agar quvurdagi p_A =39240 N/m^2 manometrik bosimda va h = 40 sm ko‘rsatgichda tizim muvozanatda turgan bo‘lsa, u holda pyezometrdagi simob sathi qanday *z* balandlikda bo‘lishini aniqlang (2.22-rasm).

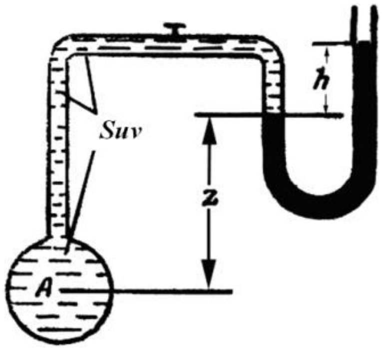
8. Yopiq rezervuarga bosim ostida yog‘ quyilgan (2.23-rasm). Yog‘ning nisbiy solishtirma og‘irligi 0,75. Yog‘ning sathini aniqlash uchun rezervuarning o‘ng tarafiga pyezometr ulangan. Chap pyezometr rezervuardagi bosimni aniqlashga mo‘ljallangan. Quyidagilarni aniqlang:

1) o‘ng pyezometrning ko‘rsatgichi h = 80 sm bo‘lganda rezervuarning maksimal manometrik bosimi p = 5886 N/m^2 ni o‘lchash uchun chap pyezometrning z balandligini qanday o‘rnatish kerak;

2) agar h = 80 sm qatlamda chap pyezometrning z ko‘rsatgichi 1,2 m ga teng bo‘lsa, rezervuardagi absolyut bosim nimaga teng.



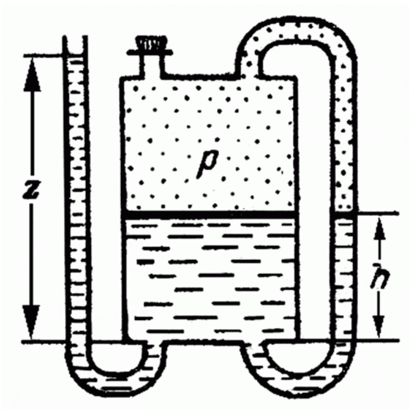
2.21-rasm.



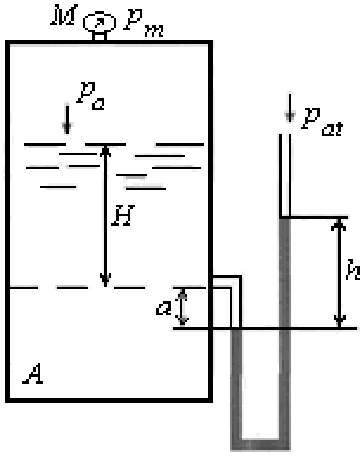
2.22-rasm.

Ko‘rsatma. *Nisbiy solishtirma og‘irlik* – bu shu suyuqlik og‘irligining xuddi shu hajmdagi distillangan 4°C li suv og‘irligiga nisbati. Qaralayotgan hol uchun 0,75 = $\gamma_{yog‘}/\gamma$ va $\gamma_{yog‘}$ = 0,75·γ .

9. Suyuqlik bilan to‘ldirilgan ***A*** rezervuarga simobli manometr va ***M*** manovakuummetr ulangan (2.24-rasm). Agar ulangan simobli manometrning chuqurligi H, simob sathlari farqi h, simobning manometrdagi tushish chuqurligi a bo‘lsa, u holda manovakuummetrning ko‘rsatgichi p_m ni aniqlang. Simobning solishtirma og‘irligi γ = 133,416 kN/m^3.



2.23-rasm.



2.24-rasm.

Masala	Suyuqlik	***H*** **(m)**	***h*** **(m)**	***a*** **(m)**
1.	Suv	1,2	0,15	0,5
2.	I-12 yog‘	1,0	0,12	0,4
3.	Baku nefti (yengil)	2,0	0,2	0,25
4.	Mazut	2,5	0,1	0,15
5.	Glitserin	1,5	0,08	0,3

6.	Metil spirti	1,7	-0,2	0,5
7.	Dixloretan	1,8	-0,1	0,3
8.	Xloroform	2,1	-0,08	0,2
9.	AMG yog‘i	1,5	-0,15	0,1
10.	Kerosin	1,4	-0,05	0,25

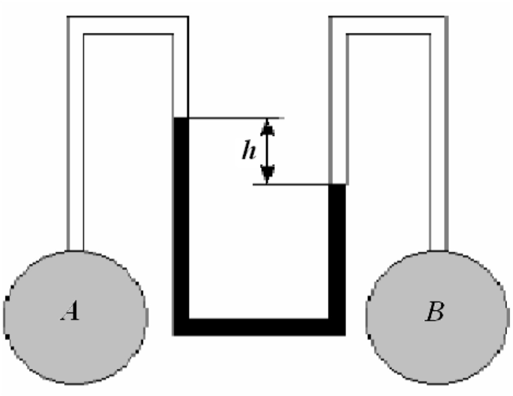
10. Simobli differensial manometrning ko‘rsatgichi h bo‘lsa, u holda γ solishtirma og‘irlikli suyuqlik bilan to‘ldirilgan quvurdagi p_A va p_B bosimlar farqini aniqlang (2.25-rasm).

Masala	**Suyuqlik**	***h* (m)**
1.	I-20 yog‘i	0,2
2.	Etil spirti	0,15
3.	Glitserin	0,1
4.	Mazut	0,3
5.	Transformator yog‘i	0,7
6.	Atseton	-0,2
7.	Toluol	-0,15
8.	4 xlorli uglerod	-0,1
9.	Kerosin	-0,3
10.	Xloroform	-0,7

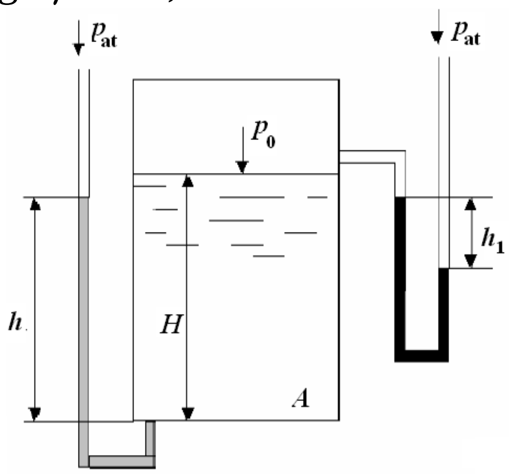
11. H chuqurlikli suyuqlik bilan to‘ldirilgan ***A*** rezervuarga simobli vakuummetr va pyezometr ulangan (2.26-rasm). Agar vakuummetrdagi simob sathlari farqi h_1 bo‘lsa, u holda rezervuarning erkin sirti ustidagi p_0 bosimni va pyezometrda suyuqlikning ko‘tarilish balangligi h ni aniqlang. Simobning solishtirma og‘irligi γ =133,416 kN/m^3.

Masala	**Suyuqlik**	***H* (m)**	**h_1 (m)**
1.	Benzin	2,5	0,12
2.	Benzol	3	0,10
3.	Atseton	4	0,2
4.	Dixloretan	3	0,35
5.	Toluol	1	0,15
6.	I-20 yog‘i	0,5	-0,12
7.	Kerosin	0,8	-0,10
8.	Glitserin	0,9	-0,2
9.	Etil spirti	1	-0,25
10.	Suv	2	-0,15

12. *H* chuqurlikli suyuqlik bilan to‘ldirilgan ***A*** rezervuarga simobli vakuummetr va pyezometr ulangan (2.26-rasm). Agar pyezometrda suyuqlikning ko‘tarilish balangligi *h* bo‘lsa, u holda rezervuarning erkin sirti ustidagi p_0 bosimni va vakuummetrdagi simob sathlari farqi h_1 ni aniqlang. Simobning solishtirma og‘irligi γ =133,416 kN/m^3.



2.25-rasm.



2.26-rasm.

Masala	Suyuqlik	***H*** **(m)**	***h*** **(m)**
1.	Metil spirit	2,5	1
2.	Benzol	3	1,5
3.	AMG-10 yog‘i	4	2
4.	Kerosin	3	2,5
5.	Baku nefti (og‘ir)	1	0,7
6.	Mazut	0,5	0,3
7.	Atseton	0,8	0,6
8.	Turbina yog‘i	0,9	0,5
9.	Toluol	1	0,4
10.	I-50 yog‘i	2	1

13. Qirg‘oq devorini tekshirish uchun g‘avvos *h* (jadvalga qarang) chuqurlikka tushdi. Shu chuqurlikdagi absolyut bosimning miqdorini toping.

Masala	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h, m	3,0	4,0	5,0	6,0,	7,0	3,5	4,5	5,5	6,5	7,5

14. Quyida berilganlarga (jadvalga qarang) ko‘ra gidrozichlagichning detalni siquvchi *P* kuchini va bu kuchdan yutishni aniqlang: *d*, sm – kichik gidrosilindrning diametri; *D*, sm – katta (ishchi) silindrning diametri; *a*, m – dastak uzunligi; *b*, m – dastak kichik yelkasining uzunligi; P_0, kgk – qo‘yilgan zo‘riqish; η - foydali ish koeffisiyenti.

Masala	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d, sm	4,4	4,5	4,6	4,7	4,8	5,0	5,1	5,2	5,4	5,6
D, sm	30	32	33	35	36	38	40	41	44	46
a, m	0,9	0,92	0,94	0,96	1,0	0,98	1,2	1,4	1,6	1,8
b, m	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,1	0,11	0,12	0,13	0,14
P_o,kg·k	5	6	7	8	9	10	12	14	15	16
η	0,85									

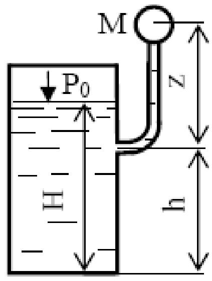
15. Diametri *D*, balandligi *H*, ichi $P = P_0$ bosimli havo bilan to‘ldirilgan yupqa devorli qo‘ng‘iroq suvga *G* og‘irlik ta’sirida tushirildi (jadvalga qarang). Havoning siqilish qonuni izotermik deb hisoblab, qo‘ng‘iroq cho‘ktirilgan *h* chuqurlikni aniqlang.

Masala	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D, sm	25	26	27	29	30	32	33	28	35	36
H, sm	47	49	51	53	55	57	59	61	63	65
G, kg·k	2	4	5	6	7	8	10	12	14	16

16. Nasos ochiq rezervuardan naporli bakka zichligi ρ = 840 kg/m^3 va kinematik qovushoqlik koeffisiyenti ν = 6 mm^2/s bo‘lgan neftni p_m – manometrik bosim bilan *h* balandlikka *Q* miqdorda uzatmoqda. Uzatish quvurining uzunligi *L*, diametri *d*, devorining g‘adir-budirligi Δ va mahalliy qarshiliklarning yig‘indi koeffisiyenti ∑ξ (jadvalga qarang). Nasosning H_n naporini aniqlang.

Masala	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_m, kPa	380	390	400	410	420	430	440	450	460	470
H, m	50	48	46	44	42	40	38	36	34	32
Q, m^3/s	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01
L, m	220	230	230	240	250	250	250	260	260	270
D, mm	80	80	90	90	100	100	110	110	120	120
Δ, mm	0,15	0,15	0,2	0,2	0,23	0,25	0,25	0,15	0,15	0,2
∑ξ, m	20	25	20	25	30	30	35	35	40	40

17. Prujinali manometer suv solingan idishga uning tubidan *h*=1 m balandlikda ulangan (2.27-rasm). Manometrning markazi ulanish nuqtasidan *z*=1 m balandlikda. Quyidagilarni aniqlang: *a*) manometr ko‘rsatgichi p_{man} = 1,5 *bar* = 1,5·10^5 N/m^2 bo‘lganda ortiqcha bosimni; *b*) idishdagi suv sathida absolyut bosimi p_0=1,8·10^5 N/m^2, *H*=1,5 m, atmosfera bosimi p_{atm} = 1·10^5 N/m^2 bo‘lganda manometer ko‘rsatgichini.



2.27-rasm

18. Daryodagi muzlik 700 kPa bosimgacha chidaydi. Shu muzdan og‘irligi 4 t, zanjirlarining muzga tekkan uzunligi 4 m va kengligi 30 sm bo‘lgan traktor o‘ta oladimi?

19. Silindrik idishga simob va suv quyilgan. Ularning og‘irliklari bir xil. Idishdagi suyuqlikning umumiy balandligi h. Agar ρ_1 – simob zichligi, ρ_2 – suv zichligi bo‘lsa, u holda idish tubidagi gidrostatik bosimni aniqlang

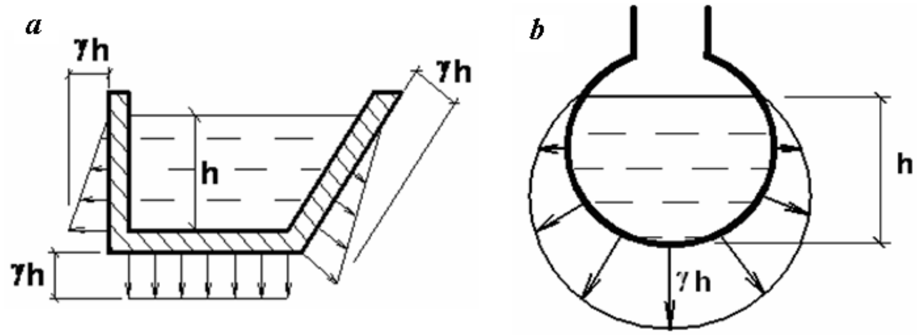
20. Asosining radiusi R bo‘lgan silindrik idishga qanday balandlikda suyuqlik quyilganda, idishning tubiga va yon yog‘ida bosim kuchi bir xil bo‘ladi?

Sinov savollari

1. Suyuqlikka qanday kuchlar ta’sir etadi?
2. Gidrostatik bosim deb nimaga aytiladi? Bu tushunchaning ma’nosini qanday formula ifodalaydi? Berilgan nuqtadagi gidrostatik bosim, yuzaga ta’sir etuvchi o‘rtacha bosim qanday aniqlanadi?
3. Gidrostatik bosimning asosiy xossalarini ayting.
4. Erkin sirt deb nimaga aytiladi? Uning shakli qanday kuchlardan bog‘liq?
5. Gidrostatikaning asosiy tenglamasini bosimlar ko‘rinishida yozing. Uni izohlang.
6. Paskal qonunini ayting va uni izohlang.
7. Gidrostatikaning asosiy tenglamasini naporlar ko‘rinishida yozing. Uning fizik ma’nosini izohlang.
8. Absolyut, ortiqcha (manometrik) va vakuummetrik bosim deb nimaga aytiladi?
9. Bosim qanday birliklarda o‘lchanadi? SI birliklar sistemasi va boshqa birliklar sistemalarida bosimning birliklari orasidagi bog‘lanishlarni ayting.
10. Bosimi aniq bo‘lgan nuqtadan yuqorida (quyida) turgan nuqta uchun gidrostatikaning asosiy tenglamasini yozing.
11. Paskal qonunini ifodalovchi tajribani shakllarda izohlang va shu qonunga ko‘ra gidrostatik bosim uchun qanday formula o‘rinli?
12. Tutash idishlar deb nimaga aytiladi? Tutash idishlar qonunini izohlang.
13. Gidravlik zichlagichning ishlash jarayonini rasmlar orqali izoglang.

2.4. Suyuqlikning jism sirtiga ta’sir etuvchi bosim kuchini aniqlash. Arximed qonuni

Suyuqlik bosimining epyurasi – bu suyuqlik bilan tutash qattiq sirt bo‘ylab suyuqlik bosimi taqsimotining grafik tasviridir. Tekis va egri chiziqli sirtlar uchun epyuralar namunalari 2.28-rasmda tasvirlangan. Rasmdagi strelka bosimning ta’sir yo‘nalishini (to‘g‘riroq aytganda, bosimning ikkinchi xossasiga ko‘ra uning skalyar ekanligidan bosim ta’sirida paydo bo‘lgan normal kuchlanishlarning yo‘nalishini) ifodalaydi. Strelkaning miqdori (ordinatasi) masshtablarda tasvirlangan va bosimning miqdorini son jihatidan ko‘rsatadi.



2.28-rasm. Tekis sirtda (*a*) va egri chiziqli sirtda (*b*) suyuqlik bosimining epyurasi.

Bosimning epyurasi suyuqlik bilan ta’sirlashayotgan qurilma (suzib yuruvchi basseyn, rezervuar, katta suv idishlari devori va hokazo) ning mustahkamligi va ustivorligini hisoblash uchun boshlang‘ich ma’lumot bo‘lib xizmat qiladi. Bunday hisoblar materiallar qarshiligi, qurilish mexanikasi, gidroelastiklik usullari bilan bajariladi. Ko‘pgina hollarda to‘la bosim o‘rniga ortiqcha bosimning epyurasi chiziladi, cheklovchi qurilmanining har ikkala tarafidagi atmosfera bosimlari o‘zaro qisqarganligi sababli ular hisobga olinmaydi. Tekis va egri chiziqli sirtlar uchun bunday epyuralarni chizishda bosimning chuqurlikdan chiziqli bog‘liqligini ifodalovchi ushbu $p_{ort} = \gamma h$ ifoda va gidrostatik bosimning birinchi xossasidan foydalaniladi.

Suyuqlikning jism sirtiga ta’sir etuvchi bosim kuchini aniqlash. Qo‘yilgan masala suyuqlikning uni sheklab turgan devor sirtiga ta’sir etuvchi bosim kuchini aniqlashdan iborat.

Yuzasi *S* ga teng bo‘lgan ixtiyoriy shakldagi *AB* egri chiziqli sirtni, bu sirtdan esa *dS* elementar yuzachani tanlaylik, $\vec{n}$ - yuzachaning tashqi birlik normali bo‘lsin (2.29-rasm). Bu yuzachaga ta’sir etayotgan kuch quyidagiga teng:

$$d\vec{F} = p\vec{n}dS\,,$$

bunda *p* – yuzacha markazidagi gidrostatik bosim.

Odatda texnik tadbiqlarda qo‘shimcha bosimdan paydo bo‘ladigan kuch qiziqish uyg‘otadi, ya’ni $p = \rho g h$ ekanligini e’tiborga olsak, u holda quyidagi tenglamani olamiz:

$$d\vec{F} = \rho g h \vec{n} dS . \qquad (2.14)$$

Butun yuzaga ta’sir etuvchi kuch ushbu

$$\vec{F} = \iint_S \rho g h \vec{n} dS . \qquad (2.15)$$

ifodaga teng. Bu ifodani koordinat o‘qlaridagi proeksiyalari

$$F_x = \rho g \iint_S h \cos(\vec{n}, \vec{x}) dS \ , \qquad (2.16)$$

$$F_z = \rho g \iint_S h \cos(\vec{n}, \vec{z}) dS \ . \qquad (2.17)$$

kabi yoziladi. Qulaylik uchun alohida elementar yuzachani tasvirlab olaylik (2.30-rasm). Rasmdan ko‘rinadiki,

$$dS \cdot \cos(\vec{n}, \vec{x}) = dS_{ver} \ , \qquad dS \cdot \cos(\vec{n}, \vec{z}) = dS_{gor} \ ,$$

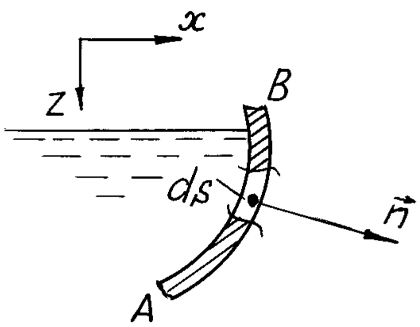
bunda dS yuzacha uchun dS_{ver} - vertikal va dS_{gor} - gorizontal proeksiyalar.

Shunday qilib,

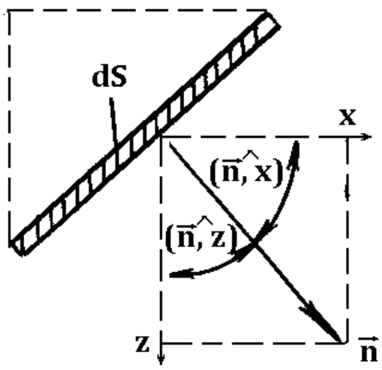
$$F_x = \rho g \iint_S h \cdot dS_{ver} \ , \qquad (2.18)$$

$$F_z = \rho g \iint_S h \cdot dS_{gor} \ . \qquad (2.19)$$

Yuzaga ta’sir etuvchi kuchning gorizontal tashkil etuvchisini qaraylik. Nazariy mexanika kursidan ma’lumki, (2.18) integral yuzaning statik momemti bo‘lib, uning qiymati $h_{ver} S_{ver}$ ko‘paytmaga teng, bunda S_{ver} - devorning vertikal proeksiyasi yuzasi; h_{ver} - vertikal proeksiyadagi og‘irlik markazining koordinatasi.



2.29-rasm. Suyuqlikning jism devori sirtiga ta’sir etuvchi bosim kuchini aniqlashga oid sxema.



2.30-rasm. Yuzachadagi bosim kuchini aniqlashga oid sxema.

Bundan kelib chiqadiki,

$$F_x = \rho g h_{ver} S_{ver} \ , \tag{2.20}$$

ya’ni gorizontal tashkil etuvchi shu devorning vertikal proeksiyasi yuzasi bilan bu proeksiyasi og‘irlik markazidagi gidrostatik bosimning ko‘paytmasiga teng.

Endi kuchlarning vertikal tashkil etuvchilarini topaylik. Buning uchun Gauss-Ostrogradskiy formulasining natijasidan foydalanamiz:

$$\iint\limits_S p\vec{n} dS = \iiint\limits_V \text{grad } p dV .$$

(2.2) muvozanat tenglamasidan $\rho\vec{F} = \text{grad}\, p$ tenglamaga ega bo‘lamiz, ya’ni

$$\iiint\limits_V \text{grad } p dV = \iiint\limits_V \rho\vec{F} dV .$$

Birlik massaviy kuchning vertikal proeksiyasi $\vec{F} = Z = g$ (bu holda ishora musbat, chunki bunda z o‘qi pastga yo‘naltirilgan).

Bundan kelib chiqadiki,

$$F_z = \iiint\limits_V \rho g dV = \rho g \iiint\limits_V dV = \rho g V , \tag{2.21}$$

bunda V – *bosim ostidagi jismning hajmi* (yoki *bosim jismi hajmi*) deb ataladi.

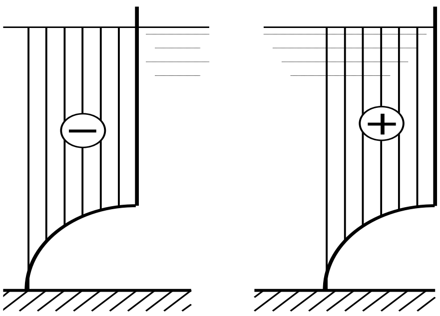
Arximed qonuni. Shunday qilib, *Arximed qonuni* quyidagicha talqin qilinadi: *jism suyuqlikka botirilganda vertikal tashkil etuvchi bosim jism hajmi ichidagi suyuqlikning og‘irligiga teng va og‘irlik markazidan o‘tib, pastdan yuqoriga yo‘nalgan bo‘ladi.*

Bu hajmni aniqlash uchun quyidagi qoidadan foydalanamiz: *bosim jismi – bu egri siziqli sirt, uning erkin sirtdagi proeksiyasi (yoki erkin sirtning davomi) va vertikal proeksiyalanuvchi tekisliklar bilan cheklangan hajmdir.*

2.31-rasmda bosim jismini aniqlashning ikki holati tasvirlangan. Rasmdan ko‘rinadiki, bosim jismi musbat ham, manfiy (soxta) ham bo‘lishi mumkin ekan.

Shunday qilib, (2.21) formulaga asosan Arximed qonunidagi suyuqlikka botirilgan jismga ta’sir etuvchi ko‘taruvchi kuch (Arximed kuchi, F_n) quyidagicha hisoblanadi: $F_n = \gamma V_m$, bunda V_m - jism siqib chiqargan suyuqlik hajmi.

Arximed kuchi og‘irlik kuchi ta’siriga qarama-qarshi yo‘nalgan, uning ta’sir chizig‘i suyuqlikka botirilgan jism bo‘lagi hajmi egallab turgan suyuqlik hajmining og‘irlik markazi orqali o‘tadi va u jismning og‘irlik markazi qayerda (suyuqlik uchida yoki undan tashqarida) ekanligidan bog‘liq emas. Gazga botirilgan qattiq jismga ham Arxımed kuchi ta’sir etadi, ammo gaz zichligining juda kichik bo‘lganligi sababli u jism hajmiga va suyuqliklardagi siqib chiqaruvchi kuchga nisbatan juda kichik.



2.31-rasm. Bosim jismini aniqlashning sxemasi.

Arxımed qonuniga asoslangan holda *jismning suzish sharti*ni keltirib chiqarish mumkin: *agar jismning o‘rtacha zichligi suyuqlik zichligidan kam bo‘lsa, u holda jismning bir qismi suyuqlik yuziga qalqib chiqadi.*

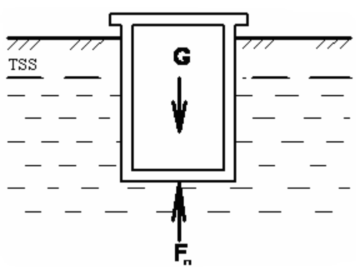
Agar suyuqlikka botirilgan jism sirti suyuqlik bilan to‘la o‘ralgan bo‘lsagina Arxi-med qonuni kuchga ega, aks holda, masalan, jism idish tubiga cho‘kkanda Arxımed qonuni o‘rinli bo‘lmay qoladi, chunki ko‘taruvchi kuch yo‘qoladi. Shuning uchun, masalan, okean tubiga o‘tirgan suv osti kemasi cho‘kadi.

Arxımed qonuni asosida qurilgan asboblar: areometr - suyuqlik zichligini, laktometr – sut yog‘liligini, spirtometr – spirt konsentratsiyasini o‘lchovchi asboblar va hokazo.

Qurilish amaliyotida bu qonunning qo‘llanilishi, masalan, 2.32-rasmda suv shimgan tuproqdagi yer osti rezervuarining suzishi tasvirlangan, bu rasmda ko‘rsatilgan rezervuar tuproq suvi sathidan pastda joylashgan. Rasmdan ko‘rinadiki, idish suvga botirilgan qismi hajmiga teng suv hajmini siqib chiqaradi va F_n Arxımed kuchini paydo qiladi. Agar F_n kuch rezervuarning sof og‘irligi G_p dan katta bo‘lsa, u holda qurilma yuzaga qalqib chiqadi.

Tekis sirt. Bu holni yuqoridagining xususiy holi deb qarash mumkin, ammo undanda qulayroq munosabatni olish mumkin. Haqiqatan ham, bosim kuchi uchun umumiy ifoda (2.15) ko‘rinishida ifodalanadi, ammo sirt tekis bo‘lganligi uchun uning hamma nuqtalari normali orientatsiyasi bir xil bo‘lib qolaveradi va natijada

$$\vec{F} = \rho g \vec{n} h_{ver} S . \qquad (2.22)$$



2.32-rasm. Arxımed qonuniga oid sxema.

Bu (2.22) formuladan kelib chiqadiki, $\vec{F}$ - devorga normal bo‘yicha yo‘nalgan, shuning uchun quyidagi tenglikni yoza olamiz:

$$F = \rho g h_{ver} S \ . \qquad (2.23)$$

Natijada tekis sirtdagi bosim kuchi sirt yuza-sining shu sirt og‘irlik markazidagi gidrostatik bosim bilan ko‘paytmasiga teng bo‘ladi.

Shuni ta’kidlash lozimki, sirtdagi bosim kuchini aniqlashga bog‘liq masalalar gidrotexnik amaliyotda keng qo‘llaniladi.

Namynaviy masalalar va ularning yechimlari

1-masala. Agar tashqi bosim texnik atmosferaga, ya’ni 1 kG/sm^2 = 10000 kG/m^2 = 98100 N/m^2 ga teng va suyuqlik esa solishtirma og‘irligi γ = 1000 kg/m^3 = 9810 N/m^2 ga teng suv bo‘lsa, u holda pyezometrik balandlik (yoki pyezometrik napor) ni toping (2.5-rasmga qarang).

Yechish. Ma’lumki, $h = \dfrac{p_0}{\gamma}$ miqdor ham tashqi bosimdan va ham ko‘tarilish naychasidan kuzatilayotgan suyuqlik turiga bog‘liq. Shuning uchun u quyidagiga teng bo‘ladi:

$$h = \frac{p_0}{\gamma} = \frac{10000}{1000} = \frac{98100}{9810} = 10\ m \text{ suv ustuni.}$$

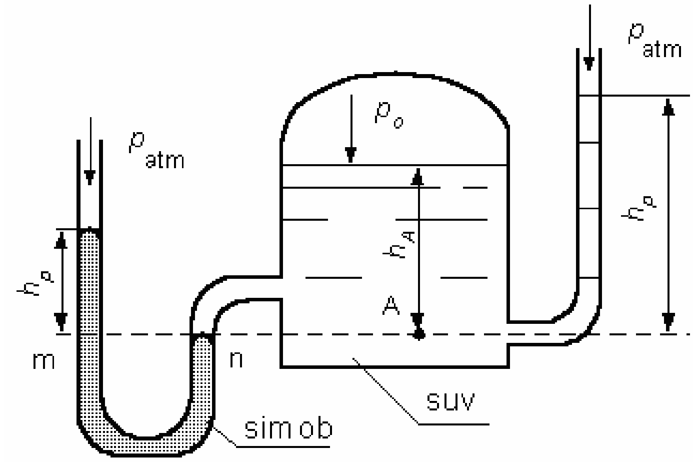
Agar suyuqlik simob (γ=13600 kG/m^3 =134000 N/m^2) bo‘lsa, u holda

$$h = \frac{p_0}{\gamma} = \frac{10000}{13600} = \frac{98100}{134000} = 0.735 \text{ m simob ustuni} = 735 \text{ mm simob ustuni.}$$

Normal barotropik bosim (p_0=1,033 kG/sm^2 = 10330 kG/m^2 = 101500 N/m^2) uchun mos natija quyidagicha bo‘ladi:

$$h = \frac{p_0}{\gamma} = 10{,}33\ m \text{ suv ustuni} \quad \text{va} \quad h = \frac{p_0}{\gamma} = 0{,}760 \text{ m} = 760 \text{ mm simob ustuni.}$$

2-masala. Suv sathidan h_A = 2,5 m suqurlikda joylashga A nuqtaning absolyut va ortiqcha gidrostatik bosimlarini hamda A nuqtaning pyezometrik balandligini, shu sirtdagi absolyut gidrostatik bosim p_0 = 147,2 kPa ekanligini bilgan holda, aniqlang (2.33-rasm).



2.33-rasm. Pyezometrik qurilma sxemasi.

Yechish. Gidrostatikaning asosiy tenglamasiga asosan A nuqtadagi gidrostatik bosim quyidagicha aniqlanadi: $p_{abs} = p_0 + \rho g h_A$.

A nuqtadagi ortiqcha bosim quyidagicha aniqlanadi:

$$p_{ort} = p_{abs} - p_{atm} = 171{,}7 - 98{,}1 = 73{,}6\ kPa.$$

A nuqtaning pyezometrik balandligi quyidagiga teng:

$$h_p = p_{ort} / (\rho g) = 73{,}6\ kN/m^2 / (1\ t/m^3 \cdot 9{,}8\ m/s^2) = 7{,}5\ m .$$

Shuni ta'kidlash lozimki, pyezometr yordamida nisbatan kichik bosimlarni o'lchash mumkin, aks holda esa juda baland pyezometrdan foydalanish lozim bo'ladi, bu esa amaliyotda foydalanish uchun juda noqulay. Bu miqdorni U shaklidagi manometrdan foydalanib topaylik. *m-n* bo'linish sirti bo'yicha ham rezervuar va ham manometrning ochiq tarafida bosimlar bir xil bo'ladi: $p_0 + \rho g h_A = p_{atm} + \rho_{simob}\, g h_{simob}$.

Natijada *m-n* bo'linish sirtidan h_p balandlikdagi simob ustuni og'irligi hisobiga *A* nuqtadagi ortiqcha bosim muvozanatlashadi:

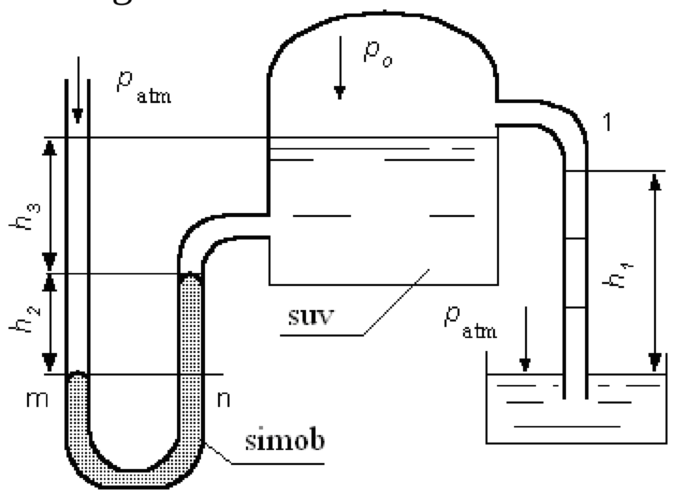
$$\rho\, g h_{simob} = p_0 + \rho g h_A - p_{atm} = 147{,}2 + 1 \cdot 9{,}81 \cdot 2{,}5 - 98{,}1 = 73{,}6\ kN/m^2 .$$

Simob ustuni balandligini topaylik:

$$h_{simob} = p_{ort} / (\rho_{simob}\, g) = 73{,}6 / (13{,}6 \cdot 9{,}81) = 0{,}55\ m ,$$

bu yerda $\rho_{simob} = 13{,}6\ t/m^3$ – simob zichligi.

3-masala. Agar simobli manometrning ko'rsatgichlari $h_2 = 0{,}15\ m$; $h_3 = 0{,}8\ m$; $\rho_{simob} = 13{,}6\ t/m^3$; $\rho_{suv} = 1\ t/m^3$ bo'lsa, u holda rezervuardagi p_0 bosimni va *1*-naychadagi sathning h_1 ko'tarilish balandligini aniqlang (2.34-rasm).



2.34-rasm. Simobli manometrik qurilma sxemasi.

Yechish. Quyidagi tekisliklar bo'yicha simob manometri uchun muvozanat shartlarini yozamiz:

- rezervuar tarafdan $p = p_0 + \rho_{suv} g h_3 + \rho_{simob}\, g h_2$;
- manometr tarafdan $p = p_{atm}$, u holda $p_{atm} = p_0 + \rho_{suv} g h_3 + \rho_{simob}\, g h_2$.

Demak

$$p_0 = 98{,}1 - 1 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}8 - 13{,}6 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}15 = 70{,}24\ kN/m^2 = 70{,}24\ kPa .$$

Shunday qilib, rezervuardagi vakuum miqdori:

$$p_v = p_{atm} - p_0 = 98{,}1 - 70{,}24 = 27{,}86\ kPa .$$

1-naychadagi muvozanat shari:

$$p_0 + \rho_{suv} g h_1 = p_{atm} ; \quad h_1 = (p_{atm} - p_0) / (\rho_{suv} g) = 27{,}86 / (1 \cdot 9{,}81) = 2{,}84\ m .$$

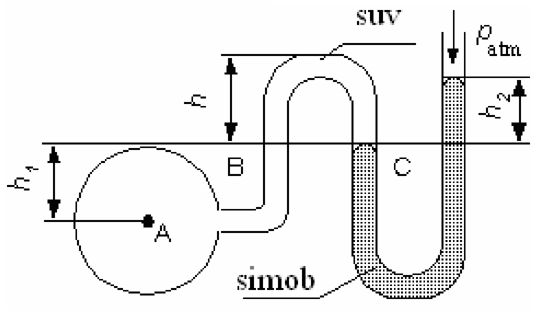
4-masala. Agar pyezometr bo'yicha simob ustuni balandligi $h_2 = 25$ *sm* bo'lsa, u holda *A* suv uzatish quvuridagi manometrik bosimni aniqlang (2.35-rasm). Suv uzatish quvurining markazi suv va simobni ajratuvchi chiziqdan $h_1 = 40$ *sm* pastda joylashgan.

Yechish. *B* nuqtadagi bosimni topamiz. *B* nuqta *A* nuqtadan h_1 balandlikda joylashgan. Demakki, *B* nuqtadagi bosim quyidagiga teng:

$$p_B = p_A - \rho_{suv}\, gh_1 .$$

C nuqtadagi bosim ham xuddi *B* nuqtadagi kabi: $p_C = p_B = p_A - \rho_{suv}\, gh_1$.

Endi *C* nuqtadagi bosimni o‘ngdan hisoblaylik: $p_C = p_{atm} + \rho_{simob}\, gh_2$.



2.35-rasm. Simobli manometrik qurilma sxemasi.

Bu tenglamalarni tenglashtirsak:

$$p_A - \rho_{suv}\, gh_1 = p_{atm} + \rho_{simob}\, gh_2 .$$

Bu yerdan manometrik bosim quyidagiga teng:

$$p_A - p_{atm} = p_m = \rho_{simob}\, gh_2 - \rho_{suv}\, gh_1.$$

$$p_m = 13{,}6 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}25 - 1 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}4 =$$
$$= 29{,}43\ kN/m^2 = 29{,}43\ kPa.$$

5-masala. 2.36-rasmda tasvirlangan $H = 3\ m$ chuqurlikdagi neft solingan idishning barcha turdagi gidrostatik bosimlarini aniqlang, bunda neftning erkin sirtidagi bosim 200 *kPa*, neftning zichligi $\rho = 0{,}9\ t/m^3$.

Yechush. Idish tubidagi absolyut gidrostatik bosim: $p = p_0 + \rho g H$;

$$p = 200\ kN/m^2 + 0{,}9\ t/m^3 \cdot 9{,}81\ m/s^2 \cdot 3\ m = 226{,}5\ kN/m^2 = 226{,}5\ kPa.$$

Idish tubidagi ortigcha (manometrik) bosim:

$$p_{ort.(m)} = p - p_{atm.}\ ;\ \ p_{ort.(m)} = 226{,}5 - 98{,}1 = 128{,}4\ kPa.$$

Suyuqlik ustunidan hosil bo‘ladigan ortiqcha bosim:

$$p_{ort.} = \rho g H = 0{,}9 \cdot 9{,}81 \cdot 3 = 26{,}5\ kPa.$$

Erkin sirtdagi ortiqcha bosim:

$$p_{ort.\ erkin\ sirt} = p_0 - p_{atm.} = 200 - 98{,}1 = =101{,}9\ kPa.$$

6-masala. Batareyka shaklidagi simobli manometr ko‘rsatgichi bo‘yicha quvurdagi suvning ortiqcha bosimini hisoblang (2.37-rasm). Quvur o‘qidan hisoblaganda simob sathlari:

$$z_1 = 1{,}75\ m;\quad z_2 = 3\ m;\quad z_3 = 1{,}5\ m;\quad z_4 = 2{,}5\ m;$$

simob zichligi: $\rho_{simob} = 13{,}6\ t/m^3$; suv zichligi: $\rho_{suv} = 1\ t/m^3$.

Yechish. Batareyka shaklidagi simobli manometr ikkita ketma-ket ulangan simobli manometrlardan iborat. Simob sathlari va manometr naychalaridagi suv sathlarining pasayishi hisobiga quvurdagi suv bosimi muvozanatlashadi.

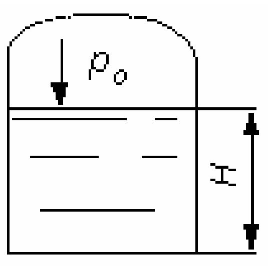
Manometrning ochiq oxiridan uning quvur bilan tutashgan qismigacha ko‘rsatgichini yig‘sak quyidagi natijaga kelamiz:

$$p_{ort} = \rho_{simob}\, g\, (z_4 - z_3) - \rho_{suv}\, g\, (z_2 - z_3) + \rho_{simob}\, g\, (z_2 - z_1) + \rho_{suv}\, g\, (z_1 - z_0);$$

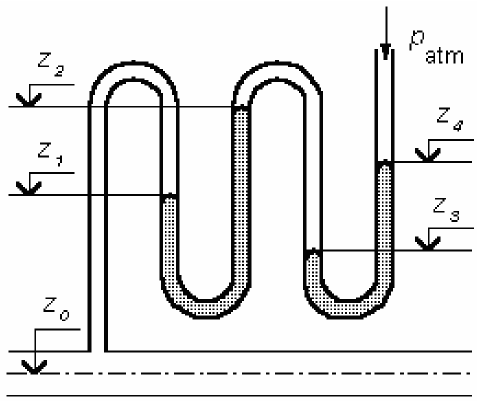
$$p_{ort} = 13{,}6 \cdot 9{,}81\ (2{,}5 - 1{,}5) - 1 \cdot 9{,}81\ (3 - 1{,}5) + 13{,}6\ \cdot$$
$$\cdot\ 9{,}81\ (3 - 1{,}75) + 1 \cdot 9{,}81\ (1{,}75 - 0) = 300\ kPa = 0{,}3\ MPa .$$

7-masala. Tog‘ning 3000 m balandligida vakuum bosimi $\Delta p = 25$ kPa, atmosfera bosimi $p_{atm} = 70{,}6$ kPa bo‘lsa, p_{abs} absolyut bosimni toping.

Yechish. Absolyut bosim formulasiga ko‘ra $p_{abs} = p_{atm} + \Delta p = 70,6 - 25 = 45,6$ kPa.



2.36-rasm. Neft solingan rezervuar.



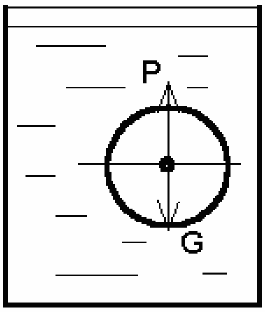
2.37-rasm. Simobli manometr.

Topshiriqlar

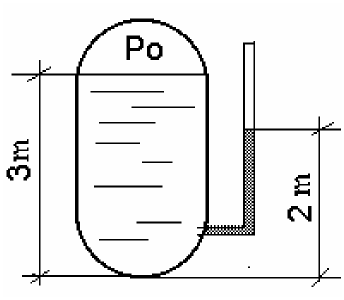
1. Balandligi H va diametri D bo‘lgan idish h sathgacha suyuqlik bilan to‘ldirilgan. Idishni qanday ω burchak tezlik bilan aylantirish mumkinki, undan suyuqlik to‘kilib ketmasin ?
   a) H=0,3 m , D=0,1 m , h=0,2 m ;
   b) H=3 m , D=0,45 m , h=1 m ;
   c) H=0,5 m , D=0,2 m , h=0,2 m
2. Idish suvga to‘ldirilgan. Idishning h=0,6 m suv chuqurligi uchun gidrostatik bosimni aniqlang.
3. Ko‘ndalang kesimi yuzalari har xil bo‘lgan tutash idishlarda bosim kuchining shu devor yuzasiga to‘g‘ri proporsionalligidan P_1=100 N, S_1=0,0005 m^2, S_2 =0,005 m^2 bo‘lsa, ikkinchi idishdagi bosim kuchini aniqlang.
4. Daryoda og‘irligi G=1000000 N va ustiga Q=7000000 N yuk qo‘yilgan to‘gri to‘rtburchak shaklidagi ponton suzib yuribdi. Uning asosining yuzi 320 m^2. Pontonning cho‘kish chuqurligini va siqib chiqarilgan suv hajmini toping.
5. Ichi bo‘sh sharning hajmi V = 1 l va og‘irligi G = 5 N. Bu shar suv yuziga qalqib chiqadimi yoki cho‘kadimi? Javobingizni izohlang (2.38-rasm).
6. Germetik (zich yopilgan) idish suyuqlik bilan to‘ldirilgan. Uning pastki qismiga yuqori uchi ochiq naycha o‘rnatilgan (pyezometr). Naychada suv muvozanati o‘rnatildi (2.36,a-rasm). Idishda ortiqcha bosimmi yoki vakuum? Idishdagi p_0 absolyut bosimni va $p_{ort} = p_0 - p_{atm}$ ortiqcha bosimni aniqlang.
7. Yuqoridagi 6-masala shartidan foydalanib, 2.39,b-rasmda tasvirlangan idishdagi p_{ort} (Pa) ortiqcha bosimni aniqlang.

8. Odam oddiy sharoitda og‘irligi 30 kG bo‘lgan temir sharni ko‘taryapti. Suv ostida shu temir sharni ko‘tarishda uning og‘irligi qancha bo‘ladi?

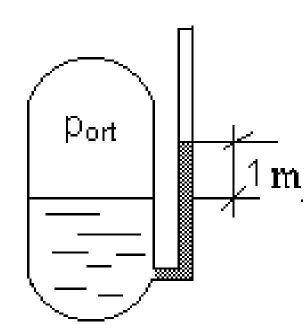
9. Solishtirma og‘irligi 0,8 t/m^3 bo‘lgan yog‘och to‘sin suvda oqayotganda uning qancha hajmi suvga botadi?



2.38-rasm. Arximed qonuniga oid masala sxemasi.



a)

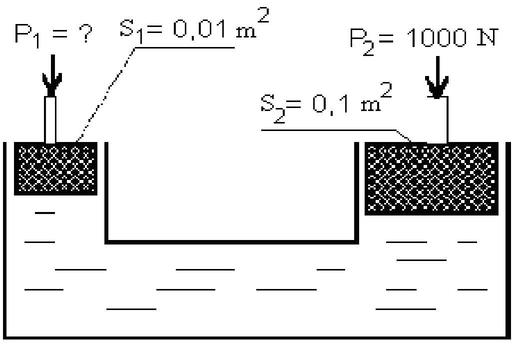


b)

2.39-rasm. Idishdagi bosimni aniqlashga oid sxemalar.

10. 2.40-rasmda tasvirlangan gidravlik press uchun p_1 =?

11. Suv quvuriga o‘rnatilgan manometr $p_{man.}$, kg·k/sm^2 bosimni ko‘rsatmoqda. Bu bosim qanday pyezometrik balandlikka mos keladi va SI birliklar sistemasida suv quvuridagi to‘la bosim nimaga teng?



2.40-rasm. Paskal qonuniga oid masala sxemasi.

Boshlang‘ich ma’lumotlar	Variantlar				
	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5
$p_{man.}$, kg·k/sm^2	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5

12. Ochiq idish sathidan *h* m chuqurlikdagi tubiga diametri 1 m bo‘lgan gorizontal qopqoqqa ta’sir etayotgan kuchni toping.

Boshlang‘ich ma’lumotlar	Variantlar				
	№ 6	№ 7	№ 8	№ 9	№ 10
h, m	1	2	3	4	5

13. Chuqurligi *h* metr suv bilan to‘ldirilgan ochiq idishning tubki nuqtasidagi to‘la va ortiqcha bosimni toping.

Boshlang‘ich ma’lumotlar	Variantlar				
	№ 11	№ 12	№ 13	№ 14	№ 15
h, m	3	4	5	6	8

14. Vertikal devori balandligi 4 (m) va tubi d (m) diametrli doiraviy kesimga ega idish butun balandligi bo‘ylab yerga ko‘milgan. Yer osti suvining sathi yer sirtidan h (m) chuqurlikda. Idishning sof og‘irligi G (kN). Idishni suzib chiqishga tekshiring.

Boshlang‘ich ma’lumotlar	Variantlar				
	№ 16	№ 17	№ 18	№ 19	№ 20
d, m	2	3	4	3,6	2,4
h, m	1	2	3	2,5	1,5
G, kN	100	50	150	120	130

15. Og‘zi ochiq idish h_2 (m) chuqurlikdagi suv bilan to‘ldirilgan va yer sirtidan h_1 (m) chuqurlikka tushurilgan. Idishdagi suv sathidan h_3 (m) chuqurlikdagi nuqta uchun yer sirtiga nisbatan gidrostatik naporni toping.

Boshlang‘ich ma’lumotlar	Variantlar				
	№ 21	№ 22	№ 23	№ 24	№ 25
h_1, m	8	7	6	5	4
h_2, m	2	1,5	2,2	1,8	1,4
h_3, m	1	0,5	1	0,5	1

16. Gorizontal suv quvuriga o‘rnatilgan manometrning bosim ko‘rsatgichi $p_{man.}$, kg·k/sm^2. Quvurning o‘qiga nisbatan gidrostatik naporni toping (quvurning radiusini hisobga olmang).

Boshlang‘ich ma’lumotlar	Variantlar				
	№ 26	№ 27	№ 28	№ 29	№ 30
$p_{man.}$, kg·k/sm^2	2	3	4	5	6

Sinov savollari

1. Suyuqlikning muvozanat tenglamasi (Eyler tenglamasi)ni tushuntiring.
2. Gidrostatikaning differensial shaklidagi asosiy tenglamasini yozing.
3. Ekvipotensial yoki bir xil (teng) bosimli sirtlar nima?
4. Paskal qonunini tushuntiring.
5. Bosimning gidrostatik taqsimoti va ortiqcha bosim nima?
6. Qanday manometrlarni bilasiz? Vakuum bosim nima?
7. Geometrik, pyezometrik va gidrostatik napor nima?
8. Arximed qonunini va Arximed kuchini tushuntiring.
9. Qanday bosim o’lchagich asboblarni bilasiz?
10. Gidrostatikaning asosiy qonunlarini ayting va izohlang.

2.5. Suyuqlikning tekis sirtga bosim kuchi

Suyuqlikning gorizontal sirtga bosim kuchi gidrostatik bosimning shu sirt yuzasi ω ga ko‘paytmasiga teng:

$$P_{to‘la} = (p_0 + \gamma h)\omega, \tag{2.24}$$

bu yerda $P_{to‘la}$ [N] – tashqi bosim hisobga olingandagi bosim kuchi, nyutonlarda o‘lchanadi; h [m] – shu gorizontal tekislikning cho‘kish chuqurligi.

Ushbu (2.24) formuladagi tashqi bosim atmosfera bosimiga teng, ya’ni $p_0 = p_{\text{at}}$ bo‘lsa, manometrik bosim kuchi quyidagi formuladan aniqlanadi:

$$P = \gamma h\omega. \tag{2.25}$$

Suyuqlikning tekis devorga bosim kuchi va shu bosim markazini analitik va grafik usullar bilan gidrostatik bosim epyurasi yordamida hisoblash mumkin. Suyuqlik bosimi epyurasining grafik ifodasi haqida yuqorida tushuncha bergan edik.

Analitik usul. Talabaning analitik usulni mustaqil o‘zlashtirishiga ko‘maklashish maqsadida ushbu masalani yechishning quyidagi uch xil yondashuvini qaraylik.

1-hol. Suyuqlikning vertikal tekis sirtga bosim kuchi. Normalining yo‘nalishi ixtiyoriy aniqlangan *ABCD* tekis sirtga ta’sir etayotgan (unga ta’sir etayotgan gidrostatik bosim kuchini o‘zgarmas deb) to‘la bosim kuchi quyidagi formula bo‘yicha hisoblanadi:

$$P_{\text{to‘la}} = p_0\,\omega + \gamma h_{o.m.}\,\omega, \tag{2.26}$$

bu yerda ω [m^2] – *ABCD* tekis sirtning ho‘llanish yuzasi; γ [N/m^2] – suyuqlikning solishtirma og‘irligi; $h_{o.m}$ [m]– ho‘llangan yuza og‘irlik markazining cho‘kish chuqurligi.

Ushbu (2.26) formulada $p_0 = p_{\text{at}}$ bo‘lganda manometrik bosim kuchi quyidagi formuladan topiladi:

$$P_{\text{to‘la}} = \gamma h_{o.m.}\,\omega. \tag{2.27}$$

AC o‘qqa nisbatan simmetrik, *ABCD* tekis sirt uchun manometrik bosimning teng ta’sir etuvchisi qo‘yilgan nuqta (bosim markazi) quyidagi formulalardan topiladi (2.41,*a*-rasm):

$$l_\partial = J/(\omega l_{o.m}); \tag{2.28}$$

$$l_\partial = l_{o.m} + J_0/(\omega l_{o.m}), \tag{2.29}$$

bu yerda l_∂ [m] – erkin sirtdan bosim markazigacha bo‘lgan masofa (qiya devor bo‘ylab hisoblaganda); $l_{o.m}$ [m] – erkin sirtdan ho‘llangan yuzaning og‘irlik markazigacha bo‘lgan masofa (qiya devor bo‘ylab hisoblaganda); J – suyuqlik kesimi chizig‘iga nisbatan ho‘llangan yuzaning inertsiya momenti; J_0 – suyuqlik kesimi chizig‘iga parallel bo‘lgan ho‘llanish yuzasining *O* og‘irlik markazi orqali o‘tuvchi o‘qqa nisbatan inertsiya momenti

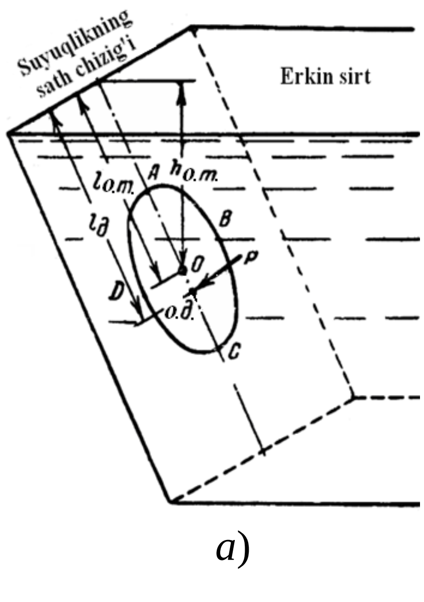
Bosim markazi *AC* simmetriya o‘qida joylashgan. (2.29) formulagan ko‘rinadiki, doimo *o.∂.* – bosim markazi *o.m.* – og‘irlik markazidan $\boldsymbol{J}_0/(\omega l_{\text{o.m}})$ miqdorga pastda joylashgan bo‘ladi.

2-hol. Suyuqlikning gorizontal tekislikka nisbatan α burchak ostida joylashgan qiya tekis sirtga bosim kuchi. Suyuqlikning ixtiyoriy shakldagi *AB* tekis yuzaga ta’sir etayotgan (unga ta’sir etayotgan gidrostatik bosim kuchini o‘zgarmas deb) to‘la bosim kuchi quyidagi formuladan aniqlanadi (2.41,*b*-rasm):

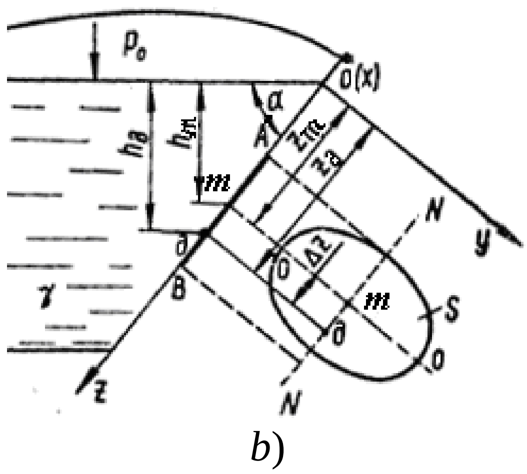
$$P_{\text{to‘la}} = (p_0 + \gamma \cdot h_{\text{m}}) \cdot S = p_{\text{m}} \cdot S,$$

bu yerda p_0 – rezervuardagi suyuqlikning erkin sirtiga ta’sir etayotgan gidrostatik bosim; γ – suyuqlikning solishtirma og‘irligi; *S* – shaklning yuzasi; h_{m} – shaklning ho‘llanish sirti og‘irlik markazining cho‘kish chuqurligi; p_{m} – shaklning og‘irlik markazidagi gidrostatik bosim.

Shunday qilib, suyuqlikning tekis yuzaga ta’sir etayotgan to‘la bosim kuchi shu shakl yuzasining shakl og‘irlik markazidagi gidrostatik bosimga ko‘paytmasiga teng.



a)



b)

2.41-rasm. Suyuqlikning bosim kuchi *a*) vertikal va *b*) qiya tekis sirtga ta’sir etganda bosim markazini aniqlash sxemasi.

Yuqoridagi ifodani $P_{\text{to‘la}} = P_0 + P$ kabi yozish mumkin, bu yerda $P_0 = p_0 \cdot S$ – idishdagi suyuqlik erkin sirtiga qo‘yilgan bosimni yuzaga keltiruvchi sirt bosim kuchi (bu kuchning qo‘yilish nuqtasi shaklning *m* – og‘irlik markazi bilan mos tushadi); $P = \gamma \cdot h_{\text{m}} \cdot S$ – ortiqcha bosimning kuchi bo‘lib, u suyuqlikning shu shaklga ko‘rsatayotgan bevosita bosimini ifodalab, asosi shaklning kesim yuzasi *S* ga, balandligi esa shakl og‘irlik markazining suyuqlikdagi cho‘kish chuqurligi $h_{\text{m}} = z_{\text{m}} \cdot \sin\alpha$ (bunda z_{m} – qaralayotgan *S* yuza og‘irlik markazining qiya devor bo‘ylab kordinatasi) ga teng bo‘lgan suyuqlik ustuni og‘irligi bilan aniqlanadi. P ni hisoblash ifodasidan ortiqcha bosim aniqlanadi va bu holda, agar rezervuar ochiq bo‘lsa, sirt bosimi atmosfera bosimiga teng bo‘ladi.

P kuchning qiya devor bo‘ylab qo‘yilish nuqtasining (2.41,*b*-rasmda ∂ nuqta) z_∂ koordinatasi quyidagi formuladan aniqlanadi:

$$z_\partial = z_m + J_m/(S \cdot z_m),$$

bu yerda z_∂ – suyuqlikning erkin sirtidan (*ox* o‘qidan) boshlab hisoblaganda qaralayotgan shakl tekisligiga qo‘yilgan ortiqcha bosim niqtasining qiya devor bo‘ylab kordinatasi; J_m – shakl yuzasining shu shakl tekisligida yotuvchi va uning og‘irlik markazidan o‘tuvchi gorizontal *o-o* o‘qqa nisbatan inertsiya momenti (markaziy inertsiya momenti deb ham ataladi).

Shunday qilib, ortiqcha bosim kuchining qo‘yilish ∂ – nuqtasi shaklning ho‘llanish tekishligi m – og‘irlik markazidan $\Delta z = J_m/(S \cdot z_m)$ miqdorga pastda (devor bo‘ylab hisoblaganda) joylashgan ekan.

Mashinasozlikda yoki temir yo‘l texnikasida, masalan, har xil gidrostatik mashina va qurilmalar porshenlari devoriga suyuqlik bosim kuchi ta’sirida, P_0 ning qiymati P dan bir necha marotaba katta bo‘lgan hollar uchraydi, bunday holda, ortiqcha bosimning qo‘yilish nuqtasi shaklning og‘irlik markazi bilan deyarli mos tushadi, ya’ni $\Delta z = 0$.

Agar idish yopiq va undagi suyuqlik sirtiga ta’sir etayotgan bosim p_0 bo‘lsa, u holda suyuqlikning tekis yuzaga bosim kuchini aniqlash formulasida ushbu $h_{hisob} = h_m + p_0/\gamma$ hisob naporini kiritish mumkin. Aslida h_m – shakl ho‘llanish sirti og‘irlik markazining cho‘kish chuqurligi, ammo u suyuqlik sirtida mavjud p_0 bosim hisobiga paydo bo‘lgan yangi sathdan boshlab o‘lchanadi.

3-hol. Suyuqlikning gorizontal tekislikka nisbatan α burchak ostida joylashgan tekis to‘g‘ri to‘rtburchakli suv tutgich darvozaga bosim kuchi. Tekis to‘g‘ri to‘rtburchakli suv tutgich darvozaning eni b (m), u gorizontal tekislikka nisbatan α burchak ostida joylashgan bo‘lib, h (m) chuqurlikdagi suvni tutib turadi (2.42-rasm). Shu darvozaga suvning bosim kuchi P ni va bu bosim kuchining markazi y_D ni aniqlang, suv gidrostatik bosimi p ning epyurasini chizing. Gorizontal tekislikka α burchak ostida joylashgan tekis devorga qo‘yilgan gidrostatik bosim kuchi va bosim kuchining qo‘yilish nuqtasi (bosim markazi)ni aniqlash uchun quyidagicha belgilashlar kiritamiz va qurilma sxemasini yasaymiz (2.42-rasm): P - bosim kuchi; P_0 – tashqi bosim kuchi; $A(a,d)$ nuqta – qiya tekis devorning ostki nuqtasi; $B(b,c)$ nuqta - qiya tekis devorning ustki nuqtasi (koordinata boshi); D nuqta - bosim markazi; C nuqta - og‘irlik markazi; a, b, c, d – 1-1 kesim chetki nuqtalari; y - qiya tekis devorning uzunligi; y_C – og‘irlik markazi koordinatasi; y_D – bosim markazi koordinatasi; h – suyuqlik qatlami chuqurligi; h_D - bosim markazining chuqurligi; h_C – og‘irlik markazining chuqurligi.

Quyidagi parametrlar beriladi:

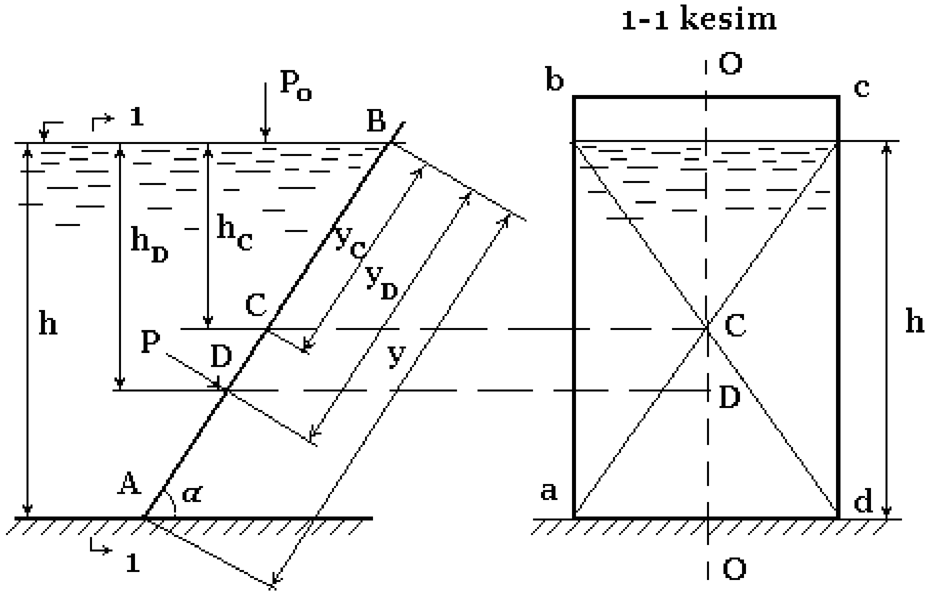
- suyuqlikning solishtirma og‘irligi γ (N/m^3) yoki zichligi ρ (kg/m^3), bunda $g \approx 10\ m/s^2$;
- suyuqlik qatlamining chuqurligi h (m);
- qiya tekis devorning eni b (m);
- qiya tekis devorning og‘ish burchagi α (gradus yoki radian o‘lchovida);
- suyuqlik sathiga qo‘yilgan tashqi bosim kuchi P_0 (N).

Qolgan parametrlar quyidagicha aniqlanadi:

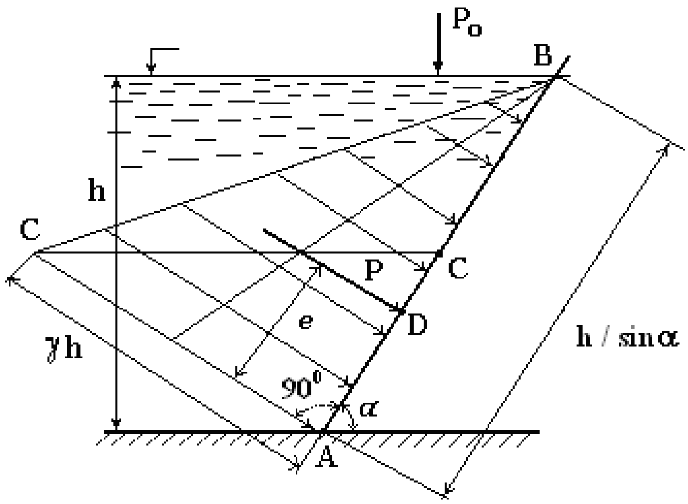
- qiya tekis devorning uzunligi (m): $y = h / \sin \alpha$;
- qiya tekis maydon og‘irlik markazining chuqurligi (m): $h_C = h/2$;
- qiya tekis devorning maydoni (yuzasi, m^2): $\omega = b \cdot y$;
- qiya tekis devorning og‘irlik markazi koordinatasi (m): $y_C=h_C/\sin\alpha$;
- qiya tekis ω maydonning qiya tekislikka perpendikulyar o‘tkazilgan Ox o‘qqa nisbatan statik momenti (m^3): $S_x = \omega \cdot y_C$;
- qiya tekis ω maydonning Ox o‘qiga parallel va C nuqta orqali o‘tkazilgan o‘qqa nisbatan inertsiya momenti (m^4): $J_C = \omega \cdot y^2 / 12$;
- og‘irlik markazi bilan bosim kuchi markazi orasidagi masofa (ekssentrisitet, m): $e = J_C / S_x$;
- qiya tekis devorga ta’sir etayotgan bosim markazining koordinatasi (bosim markazi har doim maydonning og‘irlik markazidan pastda joylashgan bo‘ladi; xususan, agar suyuqlikning bosimi ta’sir etayotgan maydon gorizontal joylasgan bo‘lsa, faqat shu holda, bosim markazi maydonning og‘irlik markazi bilan bir nuqtada joylashadi, m), boshqacha aytganda, teng ta’sir etuvchi bosim kuchining Ox o‘qqa nisbatan yelkasi (ordinatasi): $y_D = y_C + e$ yoki $y_D = 2\,y / 3$;
- qiya tekis devorga ta’sir etayotgan gidrostatik bosim kuchi (yoki uning teng ta’sir etuvchisi, N):

$$P = \gamma \cdot y_C \cdot \omega \cdot \sin\alpha = \gamma \cdot h_C \cdot \omega = \rho \cdot g \cdot h_C \cdot \omega ;$$

- qiya tekis devorga suyuqlikning gidrostatik bosimi: $p = P / \omega$;
- idish tubidagi A nuqtaga qo‘yilgan mutloq bosim kuchi $P_m=P_0 +P$;
- qiya tekis devorga suyuqlikning gidrostatik bosimi epyurasi chiziladi (2.43-rasm).



2.42-rasm. Qiya tekis devorga ta’sir etayotgan suyuqlikning bosim kuchini aniqlash sxemasi.



2.43-rasm. Qiya tekis devorga suyuqlikning gidrostatik bosimi epyurasi sxemasi (*e* – bosim kuchi yelkasi).

Izoh. Agar tekis devor gorizontal tekislikka nisbatan biror α burchak ostida joylashgan bo‘lsa, u holda y_D ning qiymatini $\sin\alpha$ ga bo‘lish kerak.

Xususiy hollar. Chuqurligi h ga teng suyuqlini vertikal holatda tutib turuvchi har xil shaklli suv tutgich darvozalarning (yoki u suv sathidan H chuqurlikka ko‘milgan) y_C – og‘irlik markazi, shu og‘irlik markazi orqali o‘tuvchi o‘qqa nisbatan J_C – inertsiya momenti, y_D – bosim markazining koordinatasi (og‘irlik markazidan pastroqda yotadi) va P – suyuqlikning tekis yuzaga ta’sir etuvchi bosim kuchi (2.42-rasm):

- asosi b va balandili h ga teng bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchak:

$$y_C = h/2;\ \ J_C = bh^3/12;\ \ y_D = 2h/3;\ \ P = \rho g b h^2/2;$$

- tomonlari h ga eng bo‘lgan kvadrat:

$$y_C = h/2;\ J_C = h^4/12;\ y_D = 2h/3;\ P = \rho g h^3/2;$$

- diametri h ga teng bo‘lgan doira:

$$y_C = h/2;\ J_C = \pi h^4/64;\ y_D = 5h/8;\ P = \rho g \pi h^3/8;$$

- diametri h ga teng yarim doira:

$$y_C = h/4{,}71;\ J_C = h^4/145{,}4;$$

- yuqori asosi b va balandligi h ga teng bo‘lgan teng yonli uchburchak:

$$y_C = h/3;\ J_C = bh^3/36;\ y_D = h/2;\ P = \rho g b h^2/6;$$

- pastki asosi b, balandligi h bo‘lgan teng yonli uchburchak:

$$y_C = 2h/3;\ J_C = bh^3/36;\ y_D = 3h/4;\ P = \rho g b h^3/3;$$

- h diagonali bo‘yicha vertikal joylashgan b tomonli trapetsiya:

$$y_C = h/2;\ J_C = b^4/12;\ y_D = 7h/2;\ P = \rho g h b^2/2;$$

- yuqori asosi a, pastki asosi b ($a > b$) va balandligi h ga teng bo‘lgan teng yonli trapetsiya:

$$y_C = (h/3)\cdot((a+2b)/(a+b));\ \ y_D = (h/2)\cdot((a+3b)/(a+2b));$$

$$J_C = (h^3/36)\cdot((a^2+4ab+b^2)/\,/(a+b));\ P = \rho g(h^2/6)(a+2b);$$

- asosi b, balandili h ga teng bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchak suv sathidan H chuqurlikka ko‘milgan:

$$y_C = H+h/2;\ \ J_C = bh^3/12;\ y_D = H+h\cdot(3H+2h)/(2H+h)/3;\ P = \rho g b h(H+h/2);$$

- pastki asosi b va balandligi h ga teng bo‘lgan teng yonli uchburchak suv sathidan H chuqurlikka ko‘milgan:

$$y_C = H+2h/3;\ J_C = bh^3/36;\ y_D = H+(h/2)\cdot(4H+3h)/(3H+2h);$$

$$P = \rho g b h(H+2h/3);$$

- yuqori asosi b va balandligi h ga teng bo‘lgan teng yonli uchburchak suv sathidan H chuqurlikka ko‘milgan:

$$y_C = H+h/3;\ \ J_C = bh^3/36;\ \ y_D = H+(h/2)\cdot(2H+h)/(3H+h);$$

$$P = \rho g b h(H+h/3);$$

- suv tutqich darvoza h diametrli doira shaklida bo‘lib, u suv sathidan H chuqurlikda suyuqlikka ko‘milgan:

$$y_C = H+h/2;\ \ \ y_D = H+h/2+0{,}125\cdot h^2/(H+h/2).$$

Grafo-analitik usul. Suyuqlikning tekis devorga bosim kuchi P ni aniqlash uchun gidrostatik bosimning epyurasini qurishimiz lozim. U holda bosim kuchi S – yuzaning b – devor kengligiga ko‘paytmasiga teng: $P=Sb$. Bu formula, h – chuqurlik o‘zgarganda devorning kengligi o‘zgarmas (b=const) bo‘lsagina o‘rinli.

Tekis devorga ta’sir etuvchi P bosim kuchini aniqlash uchun gidrostatik bosim epyurasini quramiz. U holda bosim kuchi S yuzaning devor kengligi b ga ko‘paytmasiga teng, yani $P=S\cdot b$. Bu tenglik faqatgina h chuqurlik o‘zgarganda devorning kengligi b (b=const) o‘zgarmagandagina o‘rinli.

Agar $P=S\cdot b$ tenglikda S o‘rniga: manometrik bosim epyurasi yuzasini qo‘ysak, u holda P manometrik bosim kuchini; agar to‘la gidrostatik bosim epyurasi yuzasini qo‘ysak, u holda $P_{\text{to‘la}}$ kuchni hosil qilamiz.

Bosim markazini aniqlash uchun epyuraning og‘irlik markazini topib, hosil bo‘lgan markazdan qaralayotgan sirtga perpendikulyar to‘g‘ri chiziqni u bilan kesishquncha davom ettirish va shu nuqtadan erkin sirtgacha bo‘lgan masofani o‘lchash lozim. Bu masofa bosim markazigacha bo‘lgan masofani beradi.Yuqorida qayd etilgan holatlardan tashqari suyuqlikning silindrik va sferik sirtlarga ta’siri mavzulari talabaning mustaqil o‘zlashtirishi uchun qoldirildi.

Namunaviy masalalar va ularning yechimlari

1-masala. Har birining kengligi b, m bolgan tekis devorlarga ta’sir etayotgan gidrostatik bosimning yig‘indi kuchini aniqlang.

1. Masalani grafik usulda yeching: kuchlarning miqdorini va u qo‘yilgan nuqtani (bosim markazini) aniqlang.
2. Masalani analitik usulda yeching: kuchlarning miqdorini aniqlang.
3. Har ikkala usul yordamida aniqlangan kuchlarning qiymatlari natijalarini taqqoslang.

Tekis devorga ta’sir qilayotgan gidrostatik bosim kuchini grafik va analitik usullar yordamida aniqlang va olingan natijalarni taqqoslang. Devorning sxemasi 2.44-rasmda va unga oid ma’lumotlar quyida berilgan: $p_0 = 1{,}5\cdot10^5$ Pa; $\rho = 1000$ kg/m^3; $MN = 5$ m; $l = 3$ m; $b = 2$ m; $\alpha = 150^0$.

Yechish. Masalani avvalo grafik usul yordamida yechaylik. Bosim tenglamasidan foydalanib, har bir devor uchun bosim epyuralarini quramiz (2.45,*a*-rasm):

- sokin suyuqlikning ixtiyoriy nuqtasida $p = p_0 + \rho gh$.
- MN devor uchun:
  $p_M = p_0$, chunki $h = 0$;
  $p_M = 1{,}5\cdot10^5$ Pa;
- $p_N = p_0 + \rho gh = p_0 + \rho gMN\sin30^0 = 1{,}5\cdot10^5 + 1000\cdot9{,}81\cdot5\cdot0{,}5 = 1000$ $(1{,}5 + 23{,}5) = 26000$ Pa.

Ana shu topilhan miqdorlar asosida MN ga perpendikulyar yo‘nalgan bosim epyuralarini quramiz. MP devorga ta’sir etuvchi kuch $MNnm \times b$ trapetsiyaning yuzasi kabi aniqlanadi:

$p_{MN} = 0{,}5\cdot(p_M + p_x)\cdot MN\cdot b = 0{,}5\cdot(1{,}5+24{,}5)\cdot 10^3\cdot 5\cdot 2 =$
$= 130000$ N $= 130$ kN.

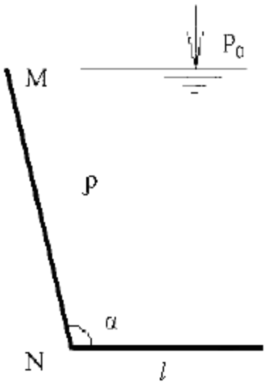
Endi p_{MN} ni analitik usul bilan aniqlaylik:

$$p_{MN} = p_{C_1}\cdot S_{MN\cdot NN},$$

bu yerda p_{C_1} - og‘irlik markazidagi bosim; $S_{MN\cdot NN}$ - devorning yuzasi.

$$p_{C_1} = p_0 + \rho g\frac{h}{2} = p_0 + \rho g\frac{MN}{2}\cdot\sin 30^0 =$$

$$= 1{,}5\cdot 10^3 + 1000\cdot 9{,}81\cdot\frac{5}{2}\cdot 0{,}5 = 13{,}75\cdot 10^3\,\text{Pa};$$

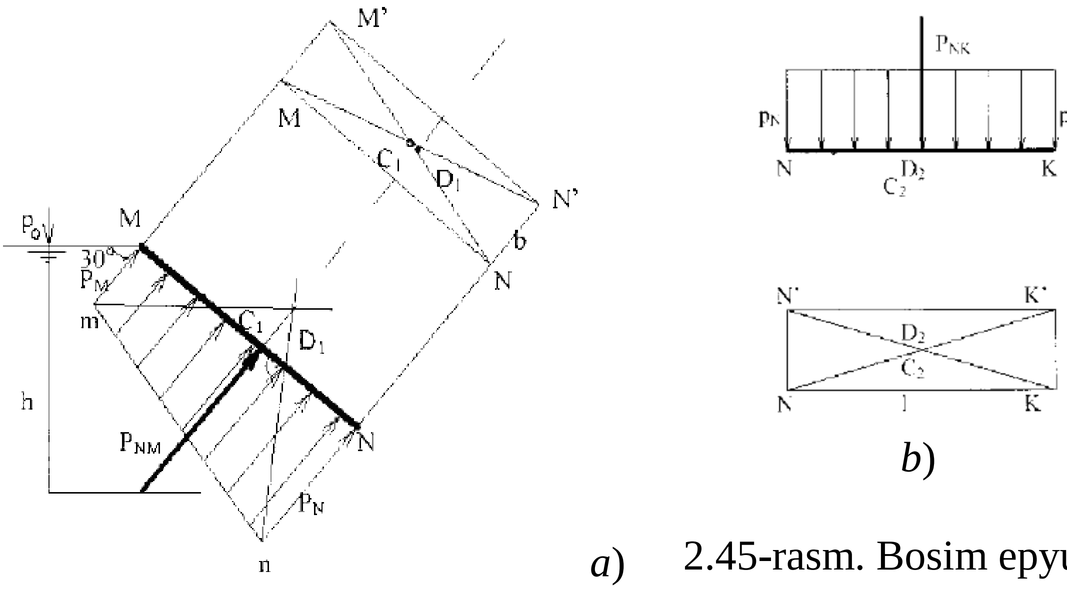


2.44-rasm. Devorning sxemasi

$$S_{MN\cdot NN} = MN\cdot b = 5\cdot 2 = 10;\quad p_{MN} = 13{,}75\cdot 10^3\cdot 10 = 137{,}5\,\text{kN}.$$

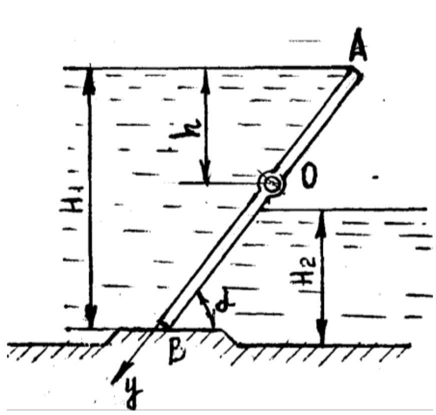
Natijalarni taqqoslasak, farq 6% ekanligini ko‘ramiz.

Endi NK devorni qaraylik (2.45,*b*-rasm): $p_N = p_K = 26000$ Pa.



a) *b*) 2.45-rasm. Bosim epyurasi.

2-masala. Eni *V* ga teng bo‘lgan to‘g‘on (rasm 2.46), o‘zidan oldinda H_1 va o‘zidan keyin H_2 balandlikda suv hosil bo‘lgan taqdirda avtomatik ravishda yopilishi kerak. To‘g‘onning gorizontga og‘ish burchagi α. To‘g‘onning aylanish o‘qi *O* qanday *h* chuqurlikda joylashishi kerakligi topilsin. O‘qlardagi ishqalanish va to‘g‘onning massasi hisobga olinmasin. Masalani yechishda quyidagi jadval qiymatlari olinsin.



2.46-rasm.

№	H_1, m	H_2, m	V, m	α, grad
1	4,2	1,9	2,5	40°
2	4,6	2,0	2,6	45°
3	4,8	2,2	2,7	50°
4	5,0	2,3	2,8	55°
5	4,3	2,1	3,0	60°
6	4,5	2,0	3,2	65°
7	4,7	1,9	3,4	70°
8	4,9	1,8	3,6	75°
9	4,0	1,7	3,8	80°
10	4,4	1,6	4,0	85°

Yechish. Masalaning yechilishi quyidagi ikkita tenglamaga asoslanadi:

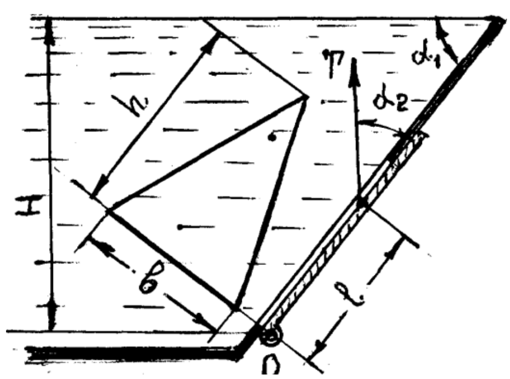
$$P = \rho g h_s \omega \;; \qquad y_D = y_C + \frac{J_C}{\omega y_C},$$

bunda h_c – mos sirt og‘irlik markazining chuqurligi; ω – sirtning yuzi; y_c – qaralayotgan yuza og‘irlik markazining koordinatasi; J_c – og‘irlik markazidan o‘tuvchi o‘qqa nisbatan inersiya momenti.

Birinchi tenglikdan gidrostatik bosim kuchi aniqlanadi, ikkinchisi orqali esa bu kuchning qo‘yilish nuqtasi (bosim markazi) aniqlanadi. To‘g‘ri to‘rtburchak uchun: $J_C = \frac{1}{12} B H^3$, bunda B va H – suv tomonidan ta’sir qilayotgan gidrostatik bosim qo‘yilgan yuzaning o‘lchamlari.

Qopqoqning burilish markazining holati O nuqtaga nisbatan momentlar tenglamasidan foydalanib topiladi. Kuchlarning O nuqtaga nisbatan yelkalari eng sodda geometrik mulohazalardan topiladi.

3-masala. Gorizontga α_1 burchakka og‘gan tekislikdagi uchburchak shaklidagi tirqishining chiziqli o‘lchamlari b va h bo‘lgan qopqoq bilan yopiladi (2.47-rasm). Qopqoqning aylanish o‘qi H chuqurlikda joylashgan.Qopqoqni aylanish o‘qidan l masofada qopqoq tekisligiga α burchak ostida qo‘yilgan qanday miqdordagi T kuch vositasida yopiq holda ushlab turish mumkinligi aniqlansin. Qopqoq massasi e’tiborga olinmasin. Masalani yechishda quyidagi jadvaldagi qiymatlar olinsin.



2.47-rasm.

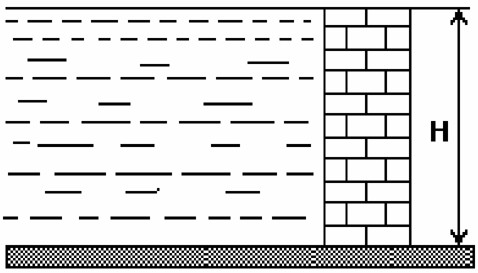
№	α_1, grad	*b*, m	*h*, m	*l*, m	*H*, m	α_2, grad
1	60°	2,5	1,6	1,5	3,2	60°
2	55°	2,6	1,7	1,6	3,4	65°
3	50°	2,8	1,8	1,7	3,6	70°
4	45°	3,0	1,9	1,8	3,8	75°
5	40°	3,2	2,0	1,9	4,0	80°
6	65°	3,4	2,2	2,0	4,2	60°
7	70°	3,5	2,4	2,2	4,6	65°
8	75°	3,6	2,6	2,3	4,8	70°
9	85°	2,7	2,8	2,4	3,5	75°
10	30°	2,9	3,0	2,5	3,9	80°

Yechish. Bu masalaning yechilishi oldingi masalanikidek. Faqatgina bu yerda uchburchakning og‘irlik markazi uning *b* tomoniga tushirilgan balandligining 1/3 qismida yotishini va uchburchakning og‘irlik markaziga nisbatan inersiya momenti quyidagi formula yordamida hisoblanishini e’tiborga olish kerak: $J_C = bh^3/36$. Trosning izlanayotgan taranglik kuchi *O* nuqtaga nisbatan mometnlar tenglamasidan topiladi.

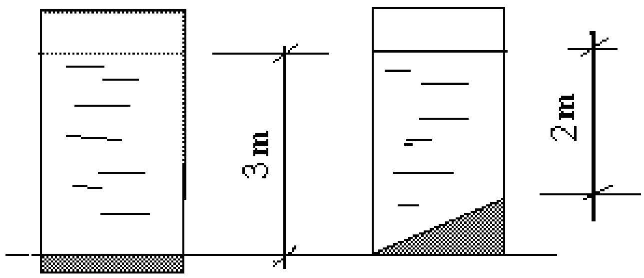
Topshiriqlar

1. Kengligi 200 m to‘g‘ri to‘rtburchakli tayanch devor balandligi 10 m suv naporini ushlab turibdi. To‘la bosim kuchini va devorni ag‘daruvchi momentni aniqlang (2.48-rasm).

2. 2.49-rasmda tasvirlanga idishlarning osti uchun gidrostatik bosim epyuralarini chizing.



2.48-rasm.



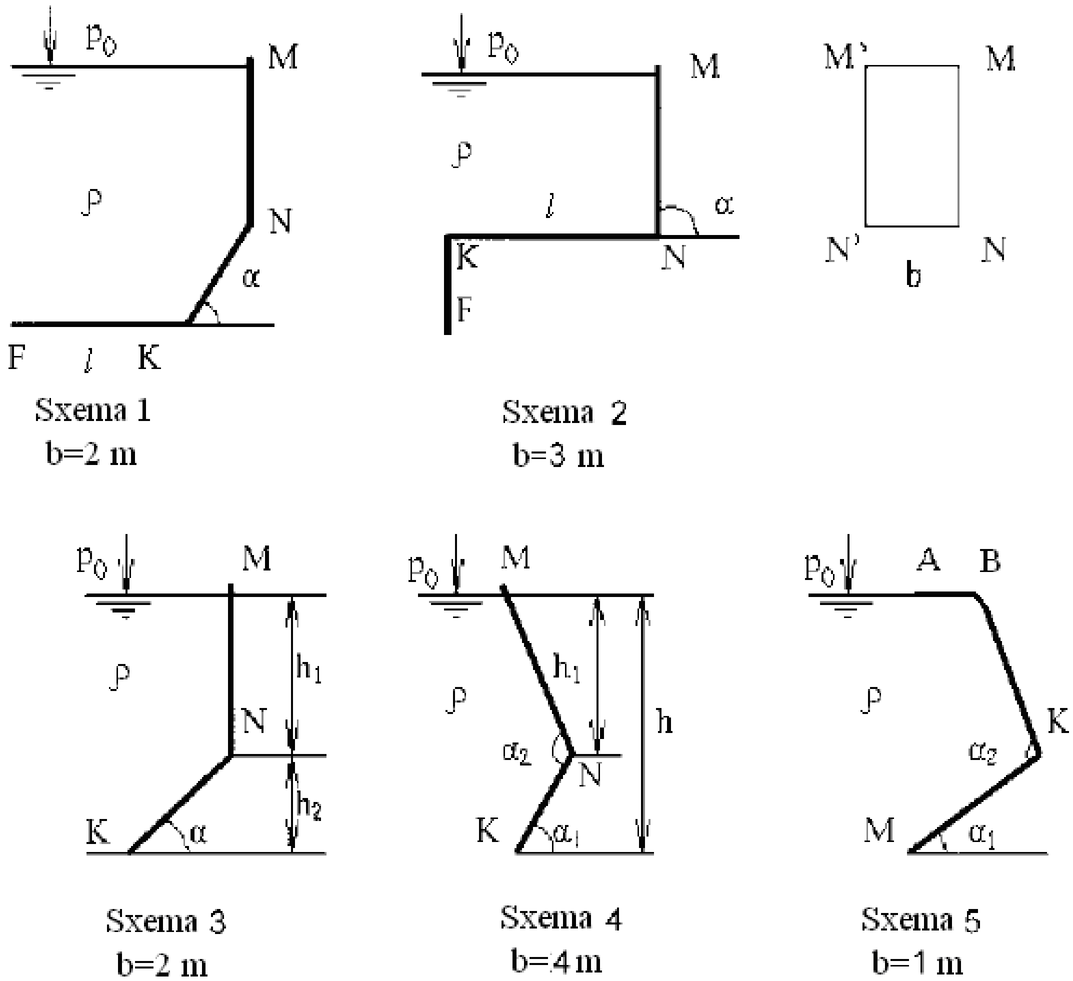
2.49-rasm.

3. Murakkab shaklga ega devorning sxemasi va unga oid ba’zi ma’lumotlar 2.50-rasmda tasvirlangan. Variantlarga oid ma’lumotlar mos ravishda 1-5 jadvallarda keltirilgan.

Bu sxemalarga mos ma’lumotlar jadvallari va variantlar nomeri (№) quyida keltirilgan.

1-jadval (1-sxema uchun)

№	p_0, Pa	ρ, kg/m^3	MN, m	l, m	α, ^{0}	NK, m
1.	$1{,}5\cdot10^5$	1000	4	2	30	3
2.	$0{,}8\cdot10^5$	800	2	3	45	2
3.	0	900	4	4	60	5
4.	$0{,}5\cdot10^5$	750	3	5	120	5
5.	$0{,}7\cdot10^5$	840	4	3	135	4
6.	0	960	5	4	150	7



2.50-rasm. Devor sxemasining variantlari.

2-jadval (2-sxema uchun)

№	p_0, Pa	ρ, kg/m^3	MN, m	l, m	α, ^{0}	KF, m
1.	0	800	2,5	2	150	3
2.	$0{,}7\cdot10^5$	900	3,2	3	30	4
3.	$0{,}4\cdot10^5$	1000	5,0	4	120	5
4.	0	850	4,0	3	60	2,5
5.	$1\cdot10^5$	950	3,0	2	135	3,6
6.	0	780	2,8	3,5	45	2,8

3-jadval (3-sxema uchun)

№	p_0, Pa	ρ, kg/m^3	h_1 , m	h_2 , m	α , ^{0}
1.	0	900	3	5	30
2.	$0{,}4\cdot10^5$	800	4	4	45
3.	$0{,}6\cdot10^5$	750	5	3	60
4.	0	950	4	5	120
5.	$1\cdot10^5$	1000	3,8	4,2	135
6.	$1{,}2\cdot10^5$	1000	6	5	150

4-jadval (4-sxema uchun)

№	p_0, Pa	ρ, kg/m^3	h_1, m	h, m	α_1 , ^{0}	α_2 , ^{0}
1.	$0{,}3\cdot10^5$	950	3	6	45	90
2.	0	800	2	5	30	120
3.	$0{,}5\cdot10^5$	750	3,5	7	60	90
4.	0	1000	4	8	135	225
5.	$0{,}6\cdot10^5$	900	3,5	6,5	120	210
6.	$0{,}4\cdot10^5$	860	3	5,8	150	240

5-jadval (5-sxema uchun)

№	p_0, Pa	ρ, kg/m^3	BK, m	KM, m	l, m	α_1 , ^{0}	α_2 , ^{0}
1.	$0{,}5\cdot10^5$	780	4	3	2	90	120
2.	$0{,}7\cdot10^5$	840	5	4	3	30	90
3.	$1{,}4\cdot10^5$	900	4	6	4	45	135
4.	$0{,}35\cdot10^5$	800	3	5	1,5	90	210
5.	$1{,}2\cdot10^5$	750	6	3	3,2	60	90
6.	$0{,}6\cdot10^5$	982	3	2	2,3	60	120

Sinov savollari

1. Tekis devorga ta’sir etuvchi yig‘indi gidrostatik bosim kuchi qanday aniqlanadi?
2. Bosim markazi deb nimaga aytiladi?
3. Bosim markazi qanday joylashgan?
4. Bosim markazi oq‘irlik markazi va devorning ho‘llanish sirti markaziga nisbatan qanday joylashgan?
5. Bosim markazi joylashishi aniqlanadigan formulani keltiring, unga kirgan barcha parametrlarni izohlang.
6. Gorizontal tekis devorga ta’sir etuvchi kuch qanday aniqlanadi?
7. Silindrik va sferik devorlarga ta’sir etuvchi kuch qanday aniqlanadi?

2.6. Suyuqlikda jismning suzish qonuni. Suyuqlikda suzayotgan jismning ustivorligi

Arximed qonuniga asoslanib, quyidagi muhim tushunchalarni qarab chiqaylik: jismning suzish sharti; jismning cho‘kish chuqurligi va siqib siqargan suv hajmi; og‘irlik markazi; suyuqlikda suzayotgan jismning muvozanat sharti; metomarkaz; suyuqlikda suzayotgan jismning muvozanat holati; mustahkam va nomustahkam muvozanat.

Suyuqlikka to‘lasincha yoki qisman botirilgan jism suyuqlik tarafdan pastdan yuqoriga yo‘nalgan va miqdori jismning V_{bot} – botirilgan qismi hajmining og‘irligiga teng yig‘indi bosim kuchi ta’sirida bo‘ladi, bunda P_{itar} – siqib siqaruvchi bosim kuchi

$$P_{itar} = \rho_s g V_{bot}\,.$$

bu yerda ρ_s – suyuqlik zichligi.

Suyuqlik sirtida suzayotgan bir jinsli jism uchun ushbu

$$\frac{V_{bot}}{V} = \frac{\rho_j}{\rho_s},$$

munosabat o‘rinli, bu yerda V – suzayotgan jism hajmi; ρ_j – jism zichligi.

Suzuvchi jism nazariyasining mavjud tushunchalari juda keng. Bu yerda shu nazariyaning faqatgina gidravlik ma’nosini qarash bilan cheklanamiz.

Muvozanat holatidan chiqarilgan suzuvchi jismning yana avvalgi muvozanat holatiga qaytishi *ustivorlik* deb ataladi. Jismning, faraz qilaylik, kemaning suyuqlikka botirilgan qismi hajmi og‘irligi uning *suv sig‘imi*, teng ta’sir etuvchi bosim qo‘yilgan nuqta (ya’ni bosim markazi) *suv sig‘imi markazi* deb ataladi. Kemaning normal holatida uning C – og‘irlik markazi va d - suv sig‘imi markazi kemaning simmetriya o‘qi bo‘lgan va *suzish o‘qi* deb ataluvchi bitta *O‘-O"* vertikal to‘g‘ri chiziqda yotadi (2.51-rasm).

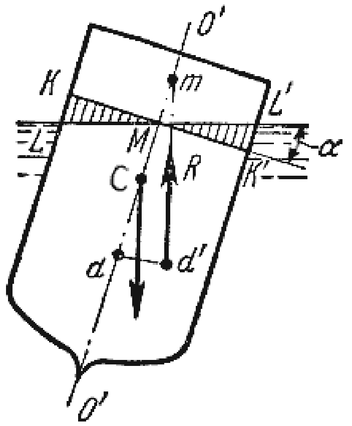
Faraz qilaylik, tashqi kuchlar ta’sirida kema biror α burchakka og‘gan bo‘lsin, kemaning *KLM* qismi suyuqlikdan chiqib turgan va *K'L'M* qismi esa suyuqlikka botirilgan bo‘lsin.

Bunday holda suv sig‘imi markazining yangi d' holati yuzaga keladi. d' nuqtaga R ko‘taruvchi kuchni qo‘yamiz va uning ta’sir chizig‘ini *O‘-O"* simmetriya o‘qi bilan kesishguncha davom ettiramiz.

Hosil bo‘lgan m nuqta *metamarkaz*, $mC = h$ kesma esa *metasentrik* (*metamarkaziy*) *balandlik* deb ataladi. Agar m nuqta C nuqtadan yuqorida yotgan bo‘lsa, u holda h ni musbat, aksincha esa manfiy deb qabul qilaylik.

a) Jism (kema)ning *muvozanat shartlari*:

1) agar $h > 0$ bo‘lsa, u holda kema dastlabki holatiga qaytadi;
2) agar $h = 0$ bo‘lsa, u holda kema befarq muvozanatda;
3) agar $h < 0$ bo‘lsa, u holda kema noustivor muvozanatda, yani kemaning ag‘darilishi davom etadi.



2.51-rasm. Kemaning ko‘ndalang kesimi va uning suzish sxemasi.

Natijada, og‘irlik markazi qancha pastda joylashgan va metasentrik balandlik qancha katta bo‘lsa, kemaning ustivorligi shuncha yuqori bo‘ladi.

b) *Jismning suzish shartlari*ni qaraylik.

Suyuqlikka to‘lasincha yoki qisman botirilgan jismga ikkita kuch ta’sir etadi: og‘irlik kuchi $G = \gamma_j \cdot V$; Arximed kuchi $P_{arx} = \gamma \cdot V$ (jismning suyuqlikka botirilgan qismi hajmicha suyuqlik og‘irligi), u ba’zida suv sig‘imi kuchi yoki ko‘taruvchi kuch deb ham ataladi.

Bu ifodalarda γ_j va γ – jism va suyuqlikning mos solishtirma og‘irliklari; V – suv sig‘imi hajmi, yani jism siqib siqargan suyuqlik hajmi.

Og‘irlik kuchi jismning og‘irlik markazi c nuqtaga qo‘yilgan. Arximed kuchi yuqoriga yo‘nalgan va hajmiy suv sig‘imi markazi ∂ naqtaga qo‘yilgan (2.52-rasmga qarang). Suyuqlikka to‘lasincha botirilgan bir jinsli jismda c va ∂ nuqtalar mos keladi.

Jism suzishining uchta holi mavjud:

1) $G > P_{arx}$ yoki $\gamma_j > \gamma$ – jism cho‘kadi;

2) $G = P_{arx}$ yoki $\gamma_j = \gamma$ – jism muallaq holatda turadi;

3) $G < P_{arx}$ yoki $\gamma_j < \gamma$ – jism suyuqlik sirtida suzib yuradi, bunda jism $G = P_0 = \gamma \cdot V_0$ tenglik bajarilib turguncha suzadi, bu yerda P_0 va V_0 – mos ravishda Arximed kuchi va suyuqlikka qisman botirilgan jismning hajmiy suv sig‘imi.

Shunday qilib, suyuqlik sirtida suzib yurgan jism uchun $\gamma_j \cdot V = \gamma \cdot V$ shart o‘rinli, bu yerdan

$$V_0 / V = \gamma_j / \gamma .$$

Prizmatik jismlar uchun bu bu ifoda quyidagicha:

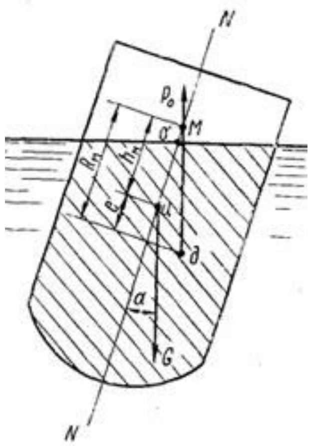
$$h / H = \gamma_j / \gamma$$

bu yerda h va H – jismning suyuqlikka cho‘kish chuqurligi va uning to‘la balandligi.

Suyuqlikka qisman botirilgan jism ustivor bo‘ladi, ya’ni agar

$$e < R_m = I_c / V_0 \quad \text{yoki} \quad h_m = R_m - e$$

bo‘lsa, uni dastlabki vertikal holatdan chiqargan kuch ta’siri yo‘qolgandan keyin u yana shu holatiga qaytadi. Suzuvchi jismning bunday xususiyati uning *statik ustivorligi* deb ham ataladi. Bu yerda *e* – ekssentrisitet yoki *c* nuqtaning ∂ nuqtaga nisbatan balandligi; R_m – *metasentrik* (*metamarkaziy*) *radius*, ya’ni hajmiy suv sig‘imi markazi ∂ nuqtadan metasentrgacha (*M* nuqta) bo‘lgan masofa.



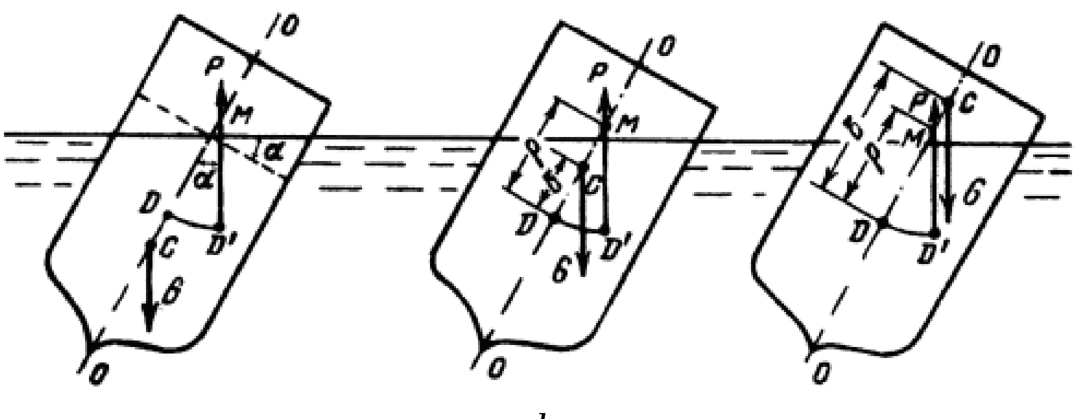
2.52-rasm. Jismning suzish sxemasi.

Oxirgi *M* nuqta Arximed kuchining *N*-*N* – suzish o‘qi bilan kesishish nuqtasini ifodalaydi. I_c – suzish tekisligi yuzasi S_0 ning bo‘ylama simmetriya o‘qi *o'*—*o*' ga nisbatan inertsiya momenti.

Suzayotgan jismning suyuqlik erkin sirti bilan kesishgan chizig‘i *vaterchiziq* deb ataladi. Agar *α* burchakka yetarlicha kichik (α<15°) bo‘lsa, u holda *M* nuqta o‘z holatini saqlab qoladi. Yo‘lovchi, yuk tashuvchi va boshqa kemalar uchun h_m ning qiymati odatda 0,3 … 1,2 m.

Quyidagi 2.53-rasmda kema ustivorligi va noustivorligining har xil holatlari tasvirlangan:

- jismning og‘irlik markazi *C* uning suv sig‘imi markazi *D* dan pastda yotadi (shartli ustivor) – 2.53,*a*-rasm;
- jismning og‘irlik markazi *C* uning suv sig‘imi markazi *D* dan yuqorida yotadi (ustivor) – 2.53,*b*-rasm;
- jismning og‘irlik markazi *C* uning suv sig‘imi markazi *D* dan va metasentrdan yuqorida yotadi (noustivor) – 2.53,*c*-rasm.



a *b* *c*

2.53-rasm. Kema ustivorligi va noustivorligining har xil holatlari:
a) shartli ustivor holat; *b*) ustivor holat; c) noustivor holat.

Namunaviy masalalar va ularning yechimlari

1-masala. Dengizning 300 m chuqurligida hisoblangan ortiqcha bosim p=3,1 MPa. Dengiz suvining zichligini toping.

Yechish. Ortiqcha gidrostatik bosim $p = \rho gh$ ekanligidan, izlanayotgan zichlik quyidagicha topiladi:

$$\rho = p/(gh) = 3{,}1\cdot 10^6/(9{,}81\cdot 300) = 1053 \text{ kg/m}^3.$$

2-masala. Diametrlari D_1= 0,10 m va D_2= 0,15 m bo‘lgan ikkita tutash idishlar yuqoridan porshenlar bilan yopilgan. Birinchi idishning porsheniga og‘irligi G_1 = 200 N bo‘lgan yuk, ikkinchisiga esa og‘irligi G_2 = 200 N bo‘lgan yuk osilgan. Porshenlarning balandliklari farqini aniqlang.

Yechish. Birinchi va ikkinchi porshenlar ostidagi bosimlarning qiymatini aniqlaymiz:

$$P_1 = \frac{4G_1}{\pi D_1^2} = \frac{4\cdot 200}{3{,}14\cdot 0{,}10^2} = 25{,}48 \text{ kPa}; \qquad P_2 = \frac{4G_2}{\pi D_2^2} = \frac{4\cdot 300}{3{,}14\cdot 0{,}15^2} = 16{,}99 \text{ kPa};$$

Bularga ko‘ra $P_1 = P_2 + \rho gH$, bundan esa

$$H = \frac{P_1 - P_2}{\rho g} = \frac{(25{,}48 - 16{,}99)\cdot 10^3}{1000\cdot 9{,}81} = 0{,}87 \text{ m}$$

3-masala. Kengligi B = 5 m va uzunligi L = 20 m, sof og‘irligi G = 250 kN bo‘lgan barja zichligi ρ_{qum} = 2400 kg/m^3 bo‘lgan qumni tashishda H=1,5 m ga suvga botgan bo‘lsa, shu barjada tashilayotgan qumning maksimal hajmi V_{qum} ni aniqlang.

Yechish. Arximed qonuniga ko‘ra suvga maksimal botgan yukli barjaning og‘irligi itarib chiqaruvchi kuchga teng, shunga ko‘ra qumning og‘irligi quyidagicha:

$$G_{qum} = \rho gHBL - G = 1000\cdot 9{,}81\cdot 1{,}5\cdot 5\cdot 20 - 250000 = 1{,}22 \text{ MN}.$$

Bundan tashilayotgan qumning izlanayotgan maksimal hajmi quyidagiga teng: $V_{\text{qum}} = \dfrac{G_{\text{qum}}}{\rho_{\text{qum}} g} = \dfrac{1{,}22\cdot 10^6}{2400\cdot 9{,}81} = 51{,}9 \text{ m}^3$.

Topshiriqlar

1. O‘lchamlari 50×50×10 sm bo‘lgan muz parchasi temperaturasi 0°C suv bilan to‘ldirilgan idishda suzib yuribdi. Muzning nisbiy og‘irligi 0,9. Agar shu muz parchasi erib ketsa suv sathi o‘zgaradimi? Nima uchunligini asoslang.

2. Diametri D=20 sm bo‘lgan po‘kak diametri d=4 sm li qopqoqqa uzunligi h=74 sm li tortqich orqali ulangan bo‘lib, u H≥80 sm qalinlikdagi benzin qatlami ustida suzmoqda. Po‘kakning og‘irligi qanday bo‘lganda qopqoq o‘z-o‘zidan ochiladi? Qopqoq va tortqichning og‘irligini 1,7 deb, benzinning nisbiy solishtirma og‘irligini 0,75 deb qabul qiling.

3. O‘lchamlar 18×9 m bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchakli barja qum bilan yuklangan bo‘lib, u dastlabki holatiga nisbatan 0,5 m ga suvga cho‘kkan. Qumning nisbiy solishtirma og‘irligini 2,0 ga teng deb, barjadagi qum hajmini aniqlang. Qum barja ustida tekis to‘shalgan (devor qalinligini hisobga olmasdan) deb, shu qum qatlamining balandligini aniqlang.

Sinov savollari

1. Arximed qonunining mazmuni nimadan iborat?
2. Jismning cho‘kish chuqurligi va uni siqib chiqargan suv hajmi haqida nimalarni bilasiz?
3. Suyuqlikda suzuvchi jismning muvozanat shartlari, chayqalmaslik sharti qanday? Metamarkaz nima?
4. Qanday hollarda bosim markazi bilan og‘irlik markazi mos keladi?

*

2.7. Suyuqlikning nisbiy sokinligi

Yuqorida ta’kidlagan edikki, barcha nuqtalarida bosim bir xil bo‘lgan sirt *sath sirti* yoki *teng bosimli sirt* deb ataladi. Agar suyuqlik (gaz) uni saqlab tutgan idishga nisbatan sokin holatda bo‘lib, idish Yerga nisbatan sokin yoki o‘zgarmas tezlik bilan harakatlanayotgan bo‘lsa, bunday sokinlik *absolyut sokinlik* deb ataladi. Agar suyuqlik idisga nisbatan sokin, idish esa Yerga nisbatan tezlanish bilan harakatlanayotgan bo‘lsa, bunday sokinlik *nisbiy sokinlik* deb ataladi. Boshqacha aytganda, notekis yoki to‘g‘ri chiziqli bo‘lmagan harakatda suyuqlik zarrachalariga og‘irlik kuchidan tashqari inertsiya kuchi ham ta’sir etadi. Agar ana shu harakatda inertsiya kuchlari vaqt bo‘yicha o‘zgarmas bo‘lsa, u holda suyuqlik o‘zining yangi muvozanat holatini egallaydi, ya’ni suyuqlikning bunday muvozanati *nisbiy sokinlik* deb ataladi. Boshqacha aytganda, suyuqlikning *nisbiy sokinligi* deb harakatlanayotgan suyuqlikning alohida zarrachalari bir-biri bilan aralashmaydigan holatiga aytiladi. Bunda suyuqlik xuddi qattiq jism kabi ko‘chadi. Bunday holda harakatni *ko‘chirma harakat* deb atash mumkin. Bunday holat suyuqlik hajmi shaklining o‘zgarmasligi bilan xarakterlanadi. Ko‘rinadiki, qaralayotgan suyuqlik massasi harakatlanayotgan, masalan, quvur bilan bog‘langan koordinat sistemasiga nisbatan qo‘zg‘almas bo‘ladi. Shunday qilib, nisbiy sokin suyuqlikka massaviy kuchlar (og‘irlik kuchi va ko‘chirma harakatning inertsiya kuchi), sirt kuchlaridan esa bosim kuchi (xususan, atmosfera bosimi) ta’sir etadi.

Nisbiy sokinlikning ikkita xususiy holi mavjud:

- to‘g‘ri chiziqli ko‘chirma harakatdagi sokinlik;
- vertikal o‘qqa nisbatan aylanma ko‘chirma harakatdagi sokinlik.

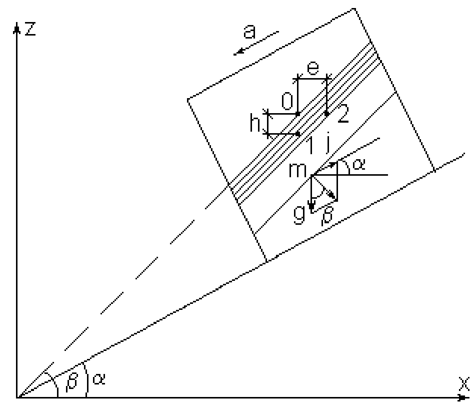
Qiya tekislikdagi tekis parallel harakatda nisbiy sokinlik. Bu holda suyuqlikka ta’sir etuvchi kuchlar: bosim kuchi; og‘irlik kuchi; ko‘chirma harakatdagi inertsiya kuchi.

Erkin tushayotgan rezervuarning butun hajmi bo‘ylab bosim taqsimoti bir xil bo‘ladi va u atmosfera bosimiga teng.

Bu holni talabaning o‘zi mustaqil to‘laroq o‘zlashtirishini taklif qilamiz.

Erkin tushayotgan rezervuarning butun hajmi bo‘ylab bosim taqsimoti bir xil bo‘ladi va u atmosfera bosimiga teng.

Suyuqlikli rezervuarning gorizontal tekislik bilan biror α burchak hosil qilgan qiya tekislik bo‘ylab o‘zgarmas *a* tezlanish bilan harakatini qaraylik (2.54-rasm). Harakatlanayotgan rezervuardagi suyuqlik bosim kuchi, og‘irlik kuchi va ko‘chirma harakatning inertsiya kuchi ostida turadi. Inertsiya kuchining tezlanishi $j=a$ rezervuar tezlanishi a ning yo‘nalishiga qarama-qarshi yo‘nalgan. Massaviy kuchlarning natijaviy vektori g – og‘irlik kuchi va j – inertsiya kuchlaridan tuzilgan parallelegrammning diagonali bo‘yicha aniqlanadi.



2.54-rasm. Qiya tekislik bo‘ylab ilgarilanma harakat.

Bosimga teng bo‘lgan element sirti shu parallelegrammning diagonaliga perpendikulyar va gorizont bilan β burchak tashkil etadi, uning tangensi esa

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{j \cdot \cos\alpha}{g - j \cdot \sin\alpha}.$$

Shunday qilib, teng bosimli sirt gorizont bilan β burchak tashkil etuvchi parallel tekisliklar oilasini tashkil etadi. Shuni e’tiborga olish lozimki, agar rezervuar tekis harakat qilsa (a=0), u holda $h_1 = 0$ va natijada $\mathrm{tg}\beta = 0$ va $\beta = 0$. Bu holda teng bosimli sirt gorizontal tekisliklar oilasini tashkil etadi.

Agar rezervuar og‘irlik kuchi hisobiga harakatlanayotgan (rezervuarning tekislikdagi ishqalanish kuchi nolga teng) bo‘lsa, u holda $j = g{\cdot}\sin\alpha$, $\mathrm{tg}\beta = \mathrm{tg}\alpha$, $\beta = \alpha$, teng bosimli sirt dumalashning parallel tekisliklariga parallel bo‘lgan tekisliklar oilasini tashkil etadi.

Vertikal x = const tekislikda bosimning taqsimot qonunini topaylik. Koordinatalar sistemasi rezervuar bilan birgalikda harakatlanishini, $y = 0$, tanlangan tekislik uchun $dx = 0$ e’tiborga olsak, gidrostatikaning differensial shakldagi asosiy tenglamasi ushbu $dp = \rho{\cdot}Z{\cdot}dz$ ko‘rinishni oladi. Bunday holda $Z = j \cdot \sin\alpha - g$, u holda

$$dp = \rho{\cdot}(j \cdot \sin\alpha - g){\cdot}dz \quad \text{yoki} \quad \frac{dp}{\rho(g - j\cdot\sin\alpha)} + dz = 0 .$$

Buni integrallasak, $\dfrac{p}{\rho(g - j\cdot\sin\alpha)} + z = \text{const}$.

z_0 va z_1 koordinatali ikkita nuqtalar uchun

$$\frac{p_0}{\rho(g - j\cdot\sin\alpha)} + z_0 = z_1 + \frac{p_1}{\rho(g - j\cdot\sin\alpha)} \quad \text{yoki} \quad p_1 = p_0 + \rho(g - j\cdot\sin\alpha)h .$$

Xuddi shunday, gorizontal tekislikda bosim taqsimotini aniqlaymiz: $W = 0{,}785{\cdot}d^{\,2}{\cdot}L$, agar $\alpha = 0$ bo‘lsa, u holda $p_1 = p_0 + \rho\cdot g\cdot h$; $p_2 = p_0 + \rho\cdot j\cdot e$.

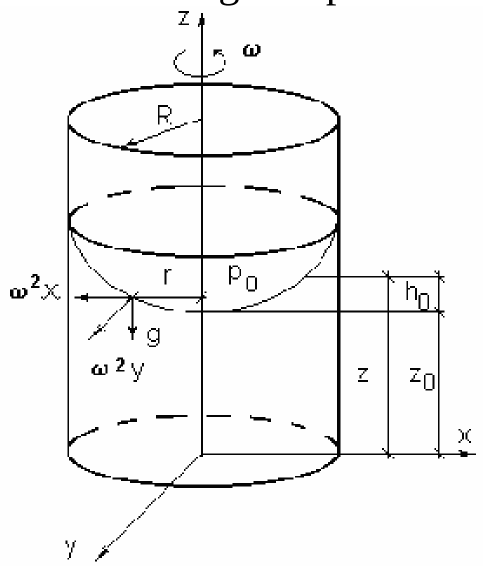
Erkin sirtning gorizont bilan tashkil etgan burchagi $\text{tg}\beta = j/g$.

Rezervuar erkin tushayotganda hajm bo‘ylab bosim bir xil:

$$a = g,\ j = g \ \text{va}\ p_1 = p_2 = p_0,$$

Vertikal o‘q atrofidagi aylanma harakatda nisbiy sokinlik. Bunday holda suyuqlikka ta’sir etuvchi kuchlar: bosim kuchi; og‘irlik kuchi; aylanma ko‘chirma harakatdagi inertsiya kuchlari. Massaviy kuchlar tezlanishining komponentalari quyidagiga teng:

$$X = \omega^2 x;\ \ Y = \omega^2 y;\ \ Z = -g .$$



2.55-rasm. O‘qqa nisbatan aylanma ko‘chirma harakat sxemasi.

Bunga ko‘ra gidrostatikaning differensial tenglamasi ushbu

$$\omega^2 x\,dx + \omega^2 y\,dy - g\,dz = 0.$$

holatga keladi, bu yerda $x^2 + y^2 = r^2$ ekanligini e’tiborga olgan holda bu tenglamani integrallasak: $0.5\omega^2 r^2/g - z = C$.

Bu tenglama aylanma paraboloid tenglamasi bo‘lib, uning bosimga teng sirti vertikal o‘q bo‘yicha siljitilgan aylanma paraboloidlar oilasini tashkil qiladi. Har bir paraboloid C o‘zgarmasning biror qiymati bilan xarakterlanadi. Erkin sirtning paraboloidi uchun $z = z_0$ va $x = y = 0$ (2.55-rasm). Demak $C = -z_0$. Bularga ko‘ra erkin sirtning tenglamasi quyidagicha:

$$0.5\omega^2 r^2 = g\,(z - z_0) = g\,h_0 \quad \text{yoki} \quad 0.5\,v^2/g = h_0 .$$

Eylerning suyuqlik muvozanati differensial tenglamasida o‘rniga qo‘yishlarni bajarib, uni integrallashdan keyin suyuqlik hajmidagi bosim taqsimoti qonuniga kelamiz:

$$p = \rho g\,(0.5\omega^2 r^2 / g - z) + C\,.$$

C integrallash o‘zgarmasini $z = z_0$ va $r = 0$ da $p = p_0$ ekanligidan topamiz: $C = p_0 + \rho g z_0$. Bunga ko‘ra bosim:

$$p = p_0 + \rho g\,(z_0 - z + 0.5\omega^2 r^2 / g)\,.$$

Bitta vertikalda joylashgan suyuqlik zarrachasi uchun esa

$$p = p_0 + \rho g h\,,$$

bunda $h = z_0 - z + h_0$, ya’ni bosim taqsimotining oddiy gidrostatik qonuniga kelamiz.

2.8. Harakatlanayotgan idishlardagi suyuqlik muvozanatining xususiy hollari

Ta’sir etayotgan massaviy kuchlarning xarakteridan bog‘liq holda teng bosimli sirt (xuddi erkin sirt kabi) har xil shakllarni egallashi mumkin. Quyida harakatlanayotgan idishlarda suyuqlik muvozanatining xususiy hollarini qaraymiz:

1) Suyuqlikli sisternaning tezlanish bilan harakati. Goridontal yo‘l bo‘ylab o‘zgarmas $\pm a$ tezlanish (plyus ishora sisternaning tezlanuvchanligiga, minus ishora esa uning sekinlanuvchanligiga mos keladi) bilan harakatlanayotgan sisternadagi suyuqlikning sath sirtini aniqlaylik (2.56-rasm).

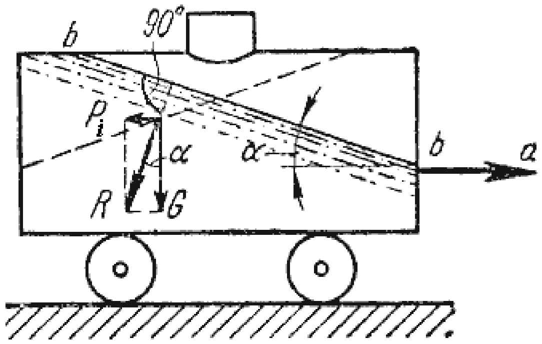
Bunday holda qiya tekislik teng bosimli sirt bo‘lib, suyuqlikning m massali har bir zarrachasiga sirt kuchidan tashqari shu zarrachaning $G=mg$ – og‘irligi va $P_i = ma$ – inertsiya kuchi ham ta’sir etadi. Ularning teng ta’sir etuvchisi $R = \sqrt{(mg)^2 + (ma)^2}$ vertikalga nisbatan α burchak ostida yo‘nalgan bo‘lib (teng bosimli sirt (erkin sirt) ham gorizontga nisbatan shu burchakka og‘adi), uning tangensi tg$\alpha = \pm a/g$.

Bu yerdan ko‘rinadiki, α burchak faqat tezlanishdan bog‘liq bo‘lganligi uchun erkin sirtning holari sisternadagi suyuqlikning jinsidan bog‘liq emas. Har qanday sath sirti gorizontga nisbatan α burchakka og‘adi. Agar sisternaning harakati tekis sekinlanuvchan bo‘lsa, u holda erkin sirt, 2.56-rasmda punktirli chiziq bilan ko‘rsatilgandek, bosqa tarafga og‘adi.

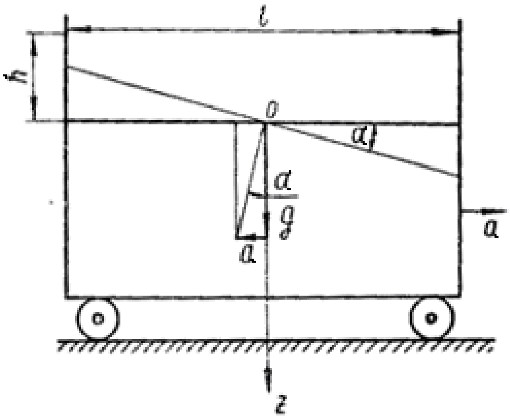
Agar yuqorida ta’kidlagandek harakatlanayotgan idish (sisterna) ochiq bo‘lsa (2.57-rasm), u holda suyuqlikning ixtiyoriy nuqtasidagi bosim

$$p = p_0 + \rho\cdot(g\cdot z \pm a\cdot x)$$

formuladan aniqlanadi.



2.56-rasm. Suyuqlikli sisternaning tezlanish bilan harakati sxemasi.



2.57-rasm. Suyuqlikli ochiq idish-ning tezlanish bilan harakati sxemasi.

Suyuqlikning erkin sirtida $p=p_0$ bo‘lganligi uchun bu tenglama $g\cdot z = \pm a\cdot x$ yoki $z/x = tg\ \alpha = \pm\ a/g$ kabi yoziladi. Bu ifodalar suyuqlikning l uzunlikli ochiq idishdan to‘kilmaydigan holida o‘rinli bo‘lib, a ning berilgan qiymatida bortning h balandligini yoki h ning berilgan qiymatida limitik a tezlanishni topish mumkin.

Agar idish tekis harakatlanayotgan (a = 0) bo‘lsa, u holda tenglama $p = p_0 + \rho\cdot g\cdot z = p_0\cdot\gamma$ ko‘rinishda yoziladi, bu holda teng bosimli sirt gorizontal tekislikdan iborat.

Xulosa qilib aytganda, gorizontal yo‘l bo‘ylab biror a o‘zgarmas tezlanish va ixtiyoriy u tezlik bilan harakatlanayotgan sisternadagi suyuqlikning harakati: *absolyut muvozanatda* (suyuqlik zarrachasiga ta’sir etayotgan barcha massaviy va sirt kuchlari yig‘indisi nolga teng, ya’ni ular o‘zaro muvozanatda) deyiladi, agar a=0 va u=0 (sistema tinch turibdi) yoki a=0 va u=const (sistema tekis ilgarilanma harakatda) bo‘lsa (suyuqlik sathi gorizontal holatda, ya’ni 2.56-rasmda α=0); *nisbiy muvozanatda* (suyuqlik zarrachasiga ta’sir etayotgan barcha massaviy, sirt va inertsiya kuchlari yig‘indisi nolga teng) deyiladi, agar a>0 va $u\neq$const (sistema tezlanuvchan ilgarilanma harakatda; 2.56-rasmda suyuqlik sathi gorizontga nisbatan α burchak holatida tasvirlangan) yoki a<0 va $u\neq$const (sistema sekin-lanuvchan ilgarilanma harakatda; 2.52-rasmda suyuqlik sathi gorizontga nisbatan α burchak holatida punktir chiziq bilan tasvirlangan) bo‘lsa.

Izoh. Inertsiya kuchi massaviy kuchlar sinfiga kiradi. Inertsiya kuchining kuchlanish vektori: $\vec{F}_{\text{iner}} = -d\vec{u}/dt$.

2) Suyuqlikli idishning vertikal o‘q atrofida aylanishi. Vertikal o‘q atrofida o‘zgarmas ω burchak tezlik bilan aylanayotgan ochiq silindrik idishda joylashgan suyuqlik nisbiy sokinligini aniqlaylik (2.58,*a*-rasm). Amaliyotda bunday masalalar, masalan, suyuqliklarni ajratuvchi separatorlar, sentrifuglarda uchraydi. Bu holda suyuqlikning nisbiy muvozanatida uning ixtiyoriy zarrachasiga ta'sir etuvchi kuchlar nafaqat sirt kuchlari, balki massaviy kuchlar hamdir: $G = mg$ – og'irlik kuchi va $P_i = m\omega^2 r$ – markazdan qochuvchi kuch, bu yerda r – zarrachadan aylanish o'qigacha bo'lgan masofa; ω - aylanayotgan idishning burchak tezligi.

Suyuqlikning sirti har bir nuqtasida ana shu kuchlar teng ta'sir etuvchisi R ga normal bo'lishi zarur. Shuning uchun suyuqlik sirti (teng bosimli sirt) aylanma paraboloid shaklida bo'ladi.

2.54,*a*-rasmga ko'ra $\mathrm{tg}\alpha = \frac{P_i}{G} = \frac{m\omega^2 r}{mg}$. Boshqa tarafdan esa $\mathrm{tg}\alpha = \frac{dz}{dr}$, bu yerda z – qaralayotgan nuqtaning koordinatasi. Shunday qilib, $\frac{\omega^2 r}{g} = \frac{dz}{dr}$, bu yerda esa $dz = \frac{\omega^2}{g} rdr$ yoki uni integrallasak, $z = \frac{\omega^2 r^2}{2g} + C$. AOB egri chiziqning aylanish o'qi bilan kesishish nuqtasida $r = 0$, $z = h = C$, shuning uchun $z = h + \frac{\omega^2 r^2}{2g}$, ya'ni AOB egri chiziq parabola, suyuqlikning erkin sirti esa paraboloid. Boshqa sath sirtlari ham xuddi shu shaklga ega.

Aylanayotgan suyuqlikning bosimi o'zgarishi qonunini radius va balandlikning funksiyasi sifatida aniqlash uchum suyuqlikdan r radiusli va z balandlikli, dS gorizontal elementar yuzachali vertikal silindrik hajmni ajratamiz va uning vertikal holatdagi muvozanat shartini yozamiz:

$$pdS - \gamma\left(h - z + \frac{\omega^2 r^2}{2g}\right)dS - p_0\left(\frac{dS}{\cos\alpha}\right)\cos\alpha = 0,$$

bu yerda $h - z + \frac{\omega^2 r^2}{2g}$ - silindrning balandligi.

Soddalashtirishlardan keyin quyidagiga ega bo'lamiz:

$$p = p_0 + \gamma\left(h - z + \frac{\omega^2 r^2}{2g}\right).$$

Bu tenglik bosimning r radiusga proporsional o'sishini va z balandlikka proporsional kamayishini bildiradi.

2.58,*b*-rasmga ko'ra esa suyuqlik chuqurligi bo'ylab bosimning taqsimlanishi

$$p = p_0 + \gamma\cdot((\omega^2\cdot r^2)/(2\cdot g) - z)$$

ifodadan topiladi. Suyuqlik erkin sirtining ixtiyoriy nuqtasi uchun $p = p_0$ bo'lganda bu tenglama quyidagicha yoziladi:

$$z = (\omega^2\cdot r^2)/(2\cdot g) = u^2/(2\cdot g),$$

bu yerda $u = \omega\cdot r$ – aylanish tezligi; r – nuqtaning aylanish radiusi.

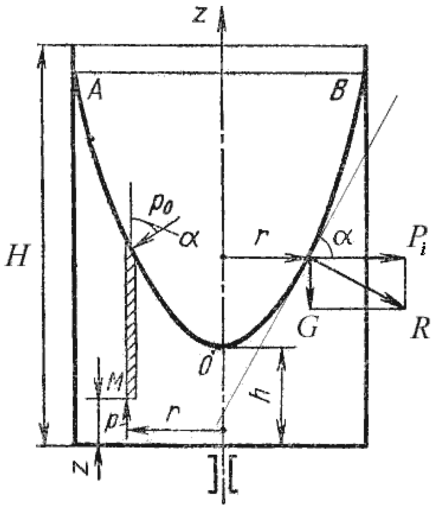
Aylanma paraboloidning balandligi $h = \omega^2 \cdot r^2_0/(2 \cdot g)$, bu yerda r_0 – silindrik idishning radiusi.

Suyuqlikning idish tubiga bosim kuchi

$$P = \gamma \cdot \pi \cdot r^2_0 \cdot h_0 = \gamma \cdot \pi \cdot r^2_0 \cdot (h_1 + h/2),$$

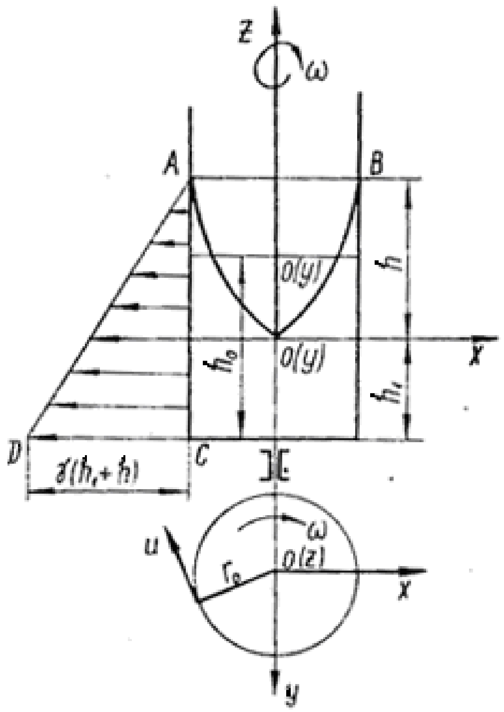
bu yerda h_0 – suyuqlikning idish aylanishidan oldingi chuqurligi.

Idishning yon devoriga beriladigan bosim chiziqli qonuniyat bilan o‘zgaradi. Bosim epyurasi *ACD* – to‘g‘ri burchakli uchburchak shaklida bo‘lib, uning balandligi $h_1 + h$, asosi esa $\gamma \cdot (h_1 + h)$.



a)

2.58-rasm. Suyuqlikli idishning vertikal o‘q atrofida aylanishi.



b)

3) Suyuqlikli idishning gorizontal o‘q atrofida aylanishi. Gorizontal o‘q atrofida o‘zgarmas ω burchak tezlik bilan aylanayotgan ochiq silindrik idishda joylasgan suyuqlik nisbiy sokinligini aniqlaylik (2.59,*a*-rasm). Bu holda suyuqlikka ta’sir etuvchi massavi kuchlar: og‘irlik kuchi va markazdan qochuvchi kuch.

Teng bosimli sirt gorizontal va *Oy* o‘qqa nisbatan ekssentrisiteti $e = g/\omega^2$ miqdorga siljigan silindrning yon sirtiga konsentrik joylashadi.

Idish aylanishlari soni katta bo‘lganda og‘irlik kuchining ta’siri markazdan qochuvchi kuch ta’siriga nisbatan sezilarsiz bo‘lib qoladi, natijada *e* ekssentrisitetning miqdorini e’tiborga olmaslik mumkin. U holda teng bosimli sirt o‘qi idish o‘qi bilan mos keluvchi konsentrik silindlardan iborat bo‘ladi (2.59,*b*-rasm).

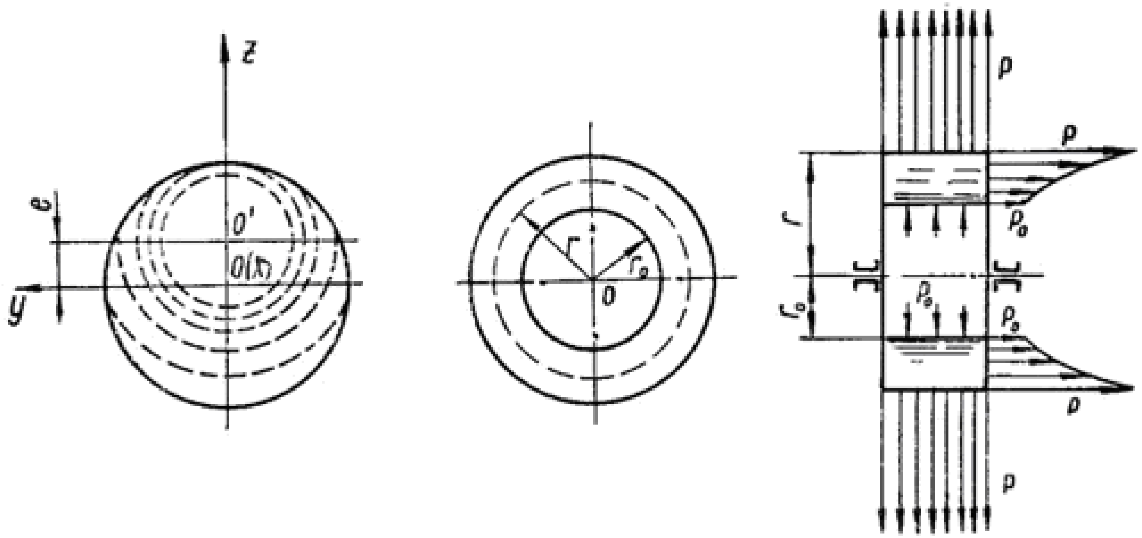
Suyuqlikning chuqurligi bo‘ylab bosimning taqsimoti quyidagi ifodadan topiladi:

$$p = p_0 + \gamma \cdot \omega^2 \cdot (r^2 - r^2_0)/(2 \cdot g),$$

bu yerda p va p_0 – radiuslari r va r_0 bo‘lgan silindrik sirtlar nuqtalaridagi mos bosimlar.

Bu tenglama faqat r radiusli idish suyuqlik bilan qisman to‘ldirilgandagina o‘rinli. Bu holda suyuqlikning erkin sirti r_0 radiusli silindrik sirtdan iborat va uning barcha nuqtalaridagi bosim p_0 bo‘ladi.

Oxirgi tenglamadan ko‘rinadiki, radius bo‘ylab bosimning taqsimoti parabolik shaklda ekan. Bosim epyurasi 2.59,*c*-rasmda tasvirlangan. Bunday taqribiy yechimlarni idish aylanish o‘qining ixtiyoriy joylashuvida topish mumkin, ammo idishning aylanishlari soni katta bo‘lishi shart.

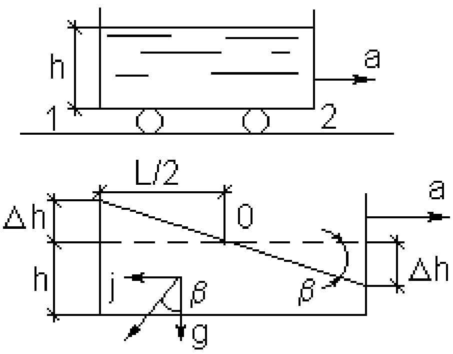


a) *b*) *c*)

2.59-rasm. Suyuqlikli idishning gorizontal o‘q atrofida aylanishi.

Namunaviy masalalar va ularning yechimlari

1-masala. Asosi $L \times B$ to‘g‘ri to‘rburchak shaklidagi idish h balandlikkacha suv bilan to‘ldirilgan va u gorizontal sirt bo‘ylab a tezlanish bilan harakatlanmoqda (2.60-rasm). Idish *1*-orqa va *2*-oldingi devorlarining ostki nuqtalaida suvning idish tubiga ortiqcha bosimini aniqlang.



2.60-rasm. Gorizontal sirt bo‘ylab *a* tezlanish bilan harakatlanayotgan suyuqlikli idish sxemasi.

Yechish. Idishning a tezlanish bilan gorizontal harakatida suyuqlikning erkin sirti gorizontga nisbatan β burchak ostida qiyalashadi. Agar $a = j$ bolsa, u holda $\text{tg}\beta = -a/g$. Suyuqlikning hajmi o‘zgarmaganligi uchun erkin sirt idish uzunligining o‘rtasida joylashjan O o‘q atrofida aylanadi, erkin sirtning devor chegaralarida ko‘ta ko‘tarilishi va pasayishi bir xil bo‘lib, u Δh ga teng: $\Delta h = L$; $\mathrm{tg}\beta = \frac{L}{2}\cdot\frac{a}{g}$.

1-nuqtadagi ortiqcha bosim quyidagicha topiladi:

$$p_1 = \rho\cdot g\cdot(h-\Delta h) = \rho\cdot g\cdot\left(h-\frac{L}{2}\cdot\frac{a}{g}\right).$$

2-nuqtadagi ortiqcha bosim quyidagicha topiladi:

$$p_2 = \rho\cdot g\cdot(h+\Delta h) = \rho\cdot g\cdot\left(h+\frac{L}{2}\cdot\frac{a}{g}\right).$$

2-masala. R_1 radiusli silindrik idish ρ zichlikli suyuqlik bilan o‘qdan R_2 masofada idish qopqog‘iga o‘rnatilgan ochiq kichik diametrli naychalining a sathigacha to‘ldirilgan va markaziy vertikal o‘qqa nisbatan tekis aylanma harakatga keltirilgan (2.61-rasm). Qopqoq ostidagi ortiqcha bosim nolga teng bo‘ladigan holat uchun idish aylanishining burchak tezligini aniqlang.

Yechish. Suyuqlik aylanma harakati uchun uning hajmidagi bosim taqsimoti qonuni tenglamasini qo‘llab va $p_0 = p_{atm}$ ekanligini hisobga olib suyuqlikdagi ortiqcha bosim taqsimoti qonunini topamiz:

$$p_v = \rho\,\omega^2\,r^2 / 2 - \rho\,g\,(z - z_0)\ .$$

$r = R_2$ *va* $z = a$ da $p_v = 0$ chegaraviy shartdan z_0 ni topamiz:

$$\rho\,\omega^2\,R_2^2 / 2 - \rho\,g\,(a - z_0) = 0,$$

bundan esa $z_0 = a - \omega^2\,R_2^2 / (2\,g)$.

Bu ifodani yuqoridagi ifodaga qo‘yib, quyidagi bosim taqsimoti qonuniga ega bo‘lamiz:

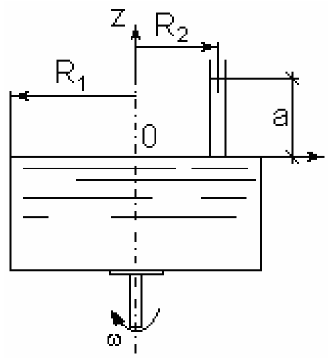
$$p_v = \rho\,\omega^2\,(r^2 - R_2^2)/2 + \rho\,g\,(a - z),$$

qopqoq sirtidagi $z = 0$ nuqta uchun esa:

$$p_v = \rho\,\omega^2\,(r^2 - R_2^2)/2 + \rho\,g\,a\ .$$

$p_0 = p_{atm}$ da $p_v = 0$ shartdan aylanishning burchak tezligini aniqlaymiz: $-\rho\,\omega^2\,R_2^2 / 2 + \rho\,g\,a = 0,$

bu yerdan esa $\omega = \sqrt{2\,g\,a}\,/\,R_2$.



2.61-rasm.

3-masala. Agar suyuqlik solingan idish Oz o‘q atrofida ω burchak tezlik bilan aylanayotgan bo‘lsa, sath sirti shaklini aniqlang (2.58-rasm).

Yechish. Masala Oz o‘qiga nisbatan simmetrik, shuning uchun zOx tekislik bo‘yicha kesimni qarasak yetarli.

Simmetriya o‘qidan ma’lum uzoqlikdagi $M=M(x,z)$ nuqtaga ikkita tashqi hajmiy kuchlar ta’sir qiladi: og‘irlik kuchi va tezlanishi $j = u^2/x$ ga teng markazdan qochma kuch, bunda u – aylanish o‘qidan x masofadagi M

zarrachaning aylanma tezligi. Ammo $u = \omega x$ ekanligidan $j= \omega^2 x$. Sirt sathi tenglamasi (2.8) dan foydalanamiz, bunda $X= j=\omega^2 x$; Y=0 ; Z=-g. Bularni oʻrniga qoʻysak, $\omega^2 xdx–gdz$=0 . Buni integrallasak,

$$z=0,5\omega^2x^2/g+C.$$

Bu kvadratik parabolaning tenglamasi. Shuning uchun bu misolda sath sirti paraboloid shaklida boʻladi. Biror aniq sath sirtini aniqlash uchun C oʻzgarmasni aniqlash lozim boʻladi. A(0;h) nuqta uchun $C=z$-$0,5\omega^2x^2/g=h$.

Shunday qilib, erkin sirt uchun $z=0,5\omega^2x^2/g+C=h+0,5\omega^2x^2/g$.

Ammo $u=\omega x$ ekanligidan $z=h+0,5u^2/g$. Ushbu $0,5u^2/g$ miqdor chiziqli oʻlchamga ega va u aylanma tezlikning *tezlik napori* deb ataladi.

Mustaqil ish topshiriqlari

1. Diametri D=4 sm va balandligi H=10 sm boʻlgan silindrik idish yarmigacha suv bilan toʻldirilgan. Bu idishdan suvni toʻkib yubormasdan uni geometrik vertikal oʻqi atrofida aylantirishlar soni chegarasini aniqlang.

2. Suyuqlik bilan toʻldirilgan idish ω = 11 c^{-1} tezlik bilan aylanganda suyuqlikning idish devoridagi eng yuqori va eng quyi sathlari farqi 0,5 m dan oshmasligi uchun idishning diametrini qanday tanlash kerak? Idishning yon sirtida joylashgan suyuqlik zarrachasining chiziqli tezligini aniqlang.

3. Suyuqlik bilan toʻldirilgan idish ω = 8,1 c^{-1} tezlik bilan aylanmoqda. Agar idishning diametri d=0,6 m, aylanayotgan suyuqlikning eng quyi sathi 0,6 m chuqurlikda boʻlsa, teng bosimi $P'=P_{at}$=98100 Pa; P'=100062 Pa; P'=103986 Pa boʻlgan sirtlarni chizing.

Sinov savollari

1. Absolyut sokinlik deb nimaga aytiladi ?
2. Nisbiy sokinlik deb nimaga aytiladi ?
3. Nisbiy sokinlikning xususiy hollarini ayting.
4. Nisbiy sokinlikda qanday kuchlar ta’siri boʻladi ?
5. Erkin tushayotgan rezervuarga qanday kuchlar ta’sir qiladi ?
6. Qiya tekislikdagi tekis parallel harakatda nisbiy sokinlikni qanday tushunasiz ?
7. Vertikal va gorizontal oʻqlar atrofidagi aylanma harakatda nisbiy sokinlikni qanday tushunasiz ?

3-BOB.
SUYUQLIK VA GAZ KINEMATIKASI

Suyuqliklar kinematikasi – bu suyuqlik va gazlar mexanikasining eng muhim bo‘limlaridan biri hisoblanadi. Kinematika suyuqlik harakatini, uni keltirib chiqaradigan sabablarsiz, o‘rganadi. N.E.Jukovskiy kinematikani «harakat geometriyasi» deb atagan. Suyuqlikning harakatini ifodalovchi uning oqimidagi har bir zarrachasining (moddiy kontinium kichik bo‘lagining) parametrlarini (bosim, zichlik, temperatura va boshqa) aniqlash bilan bog‘liq bo‘lgan suyuqlik va gazlar mexanikasi masalasini yechishni tezliklar maydonini topishga, ya’ni kinematik masalani yechishga olib kelish mumkin. Topilgan yoki berilgan tezliklar tagsimotiga ko‘ra oqimning qolgan barcha parametrlarini keltirib chiqarish mumkin. Shunday qilib, suyuqlik va gazlar kinematikasida suyuqlik va gaz zarrachalarining fazoda vaqtdan bog‘liq holda joylashishi o‘rganiladi.

Suyuqliklar kinematikasini o‘rganish asosida oqim kinematik parametrlari o‘zgarishlarining uzluksizligi haqidagi gipoteza yotadi.

Barcha tushunchalarni ikki usul bilan tushuntirish mumkin. Birinchisiga ko‘ra har bir alohida suyuqlik zarrachasining harakati o‘rganiladi. Buni ajratib olish uchun boshlang‘ich vaqt momenti t_o da uning x_o, y_o va z_o koordinatalari qayd etiladi. Harakat aniqlangan deyiladi, agar har bir vaqt momentida har bir zarrachaning vaqt bo‘yicha yo‘lini ifodalovchi tenglama, ya’ni suyuqlik zarrachalari traektoriyalarining parametrik tenglamasi ma’lum bo‘lsa. Bu usul Lagranj tomonidan tavsiya etilgan. Ikkinchi usul, ya’ni Eyler usuliga ko‘ra (x, y, z) fazoning fiksirlangan nuqtasida tezlik va boshqa parametrlarning vaqtga bog‘liq holda o‘zgarishi o‘rganiladi. Quyida asosan Eyler usuli qo‘llanilgan.

Suyuqliklar kinematikasini o‘rganishda suyuqlik zarrachalarining oqim chiziqlari dastasi tenglamasini va traektoriyasini, tarmoqlangan oqim nuqtalari holatini va hokazolarni aniqlay bilish zarur.

Quyidagi tushunchalar, kinematika masalalarining namunaviy yechimlari va mashqlar suyuq muhit harakatini tekshirishning asosiy usullarini o‘rganishga va suyuqliklar kinematikasining amaliy masalalarini yechishga yaqindan yordam beradi.

3.1. Suyuqlik zarrachasi harakatining tahlili

Suyuqlik zarrachasining tezligi va tezlanishi. Suyuqlik va gaz mexanikasining asosiy usuli Eyler usuli bo‘lib, bunda suyuqlik harakati vaqtning har bir momentida fazoda uning tezliklari maydonini har bir nuqtasi uchun

$$\vec{u} = f(\vec{r}, t)$$

kabi berish yo‘li bilan yoki uning to‘g‘ri burchakli Dekart koordinatalari sistemasi o‘qlaridagi proeksiyalarini

$$u_x = f_1(x, y, z, t),\ u_y = f_2(x, y, z, t),\ u_z = f_3(x, y, z, t) \tag{3.1}$$

kabi ifodalab aniqlanadi, bunda $\vec{u} = u_x\vec{i} + u_y\vec{j} + u_z\vec{k}$ - suyuqlikning fiksirlangan zarrachasi $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ radius vektori bilan aniqlanuvchi fazo nuqtasining t vaqt momentidagi tezligi ; x , y , z , t - *Eyler o‘zgaruvchilari*. Eyler o‘zgaruvchilari sifatida Dekart koordinatalari o‘rnida silindrik, sferik va boshqa koordinatalardan ham foydalanish mumkin.

Suyuqlik zarrachasi tezlik va tezlanishining biror koordinata o‘qidagi, masalan, *Ox* o‘qidagi mos u_x va a_x proyeksiyasini topish uchun uning *x*, *y*, *z* koordinatalar funksiyasi, va o‘z navbatida, umumiy holda *t* vaqtga ham bog‘liq bo‘lishini hisobga olishimiz zarur.

Zarrachalar $\vec{u}$ - tezlik vektori va $\vec{a}$ - tezlanish vektorining koordinat o‘qlaridagi proeksiyalari quyidagilarga teng:

$$u_x = \frac{dx}{dt},\ u_y = \frac{dy}{dt},\ u_z = \frac{dz}{dt},$$

$$a_x = \frac{du_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2},\ a_y = \frac{du_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}\ ,\ a_z = \frac{du_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}. \tag{3.2}$$

Radius-vektorga nisbatan esa

$$\vec{u} = \frac{d\vec{r}}{dt}\ ,\quad \vec{a} = \frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}.$$

Suyuqlik zarrachasining harakati ma’lum bo‘ladi, agar quyidagi sistema ma’lum bo‘lsa:

$$x = \varphi_1(a,b,c,t),\ y = \varphi_2(a,b,c,t),\ z = \varphi_3(a,b,c,t), \tag{3.1$'$}$$

bunda a , b , c - suyuqlik ixtiyoriy zarrachasining $t = t_0$ vaqt momentidagi koordinatalari va ular zarrachalarni belgilash uchun xizmat qiladi. Bu tenglamalardan t vaqtni yo‘qotib zarrachaning *traektoriyasi tenglamasini* hosil qilamiz. Bunda a , b , c va t miqdorlar *Lagranj o‘zgaruvchilari* deyiladi. Lagranj usuliga ko‘ra suyuqlik yakka zarrachasining traektoriyasi bo‘ylab harakati tekshiriladi. Ma’lumki, zarrachalar cheksiz ko‘p, bunday holda traektoriyani berish uchun faqat traektoriyasi qarashli bo‘lgan zarrachani tekshirish lozim. Buning uchun esa zarrachaning xarakteristikasi sifatida a , b , c koordinatalar $t = t_0$ vaqt momentida tanlab olinadi. Shunday qilib, suyuqlik zarrachasining *x*, *y*, *z* koordinatalari a , b , c miqdorlar va t vaqtdga bog‘liq bo‘ladi.

Berilgan funksiyalar uchun zarrachalar $\vec{u}$ tezlik vektori va $\vec{a}$ tezlanish vektorining koordinat o‘qlaridagi proeksiyalari fiksirlangan a , b , c miqdorlarda quyidagilarga teng:

$$u_x = \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}, \quad u_y = \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial t}, \quad u_z = \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_3}{\partial t},$$

$$a_x = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2}, \; a_y = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2}, \; a_z = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial t^2}. \qquad (3.2')$$

Radius-vektorga nisbatan esa

$$\vec{u} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}, \; \vec{a} = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2}.$$

Harakatning har ikkala koordinat usullari uchun to‘la tezlik, to‘la tezlanish va yo‘naltiruvchi kosinuslar mos ravishda quyidagicha hisoblanadi:

$$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}, \quad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2},$$

$$\cos\alpha = \frac{u_x}{u}, \; \cos\beta = \frac{u_y}{u}, \; \cos\gamma = \frac{u_z}{u}.$$

x, y, z koordinatalardan va *t* vaqtdan bog‘liq funksiya uchun zarracha traektoriyasi bo‘ylab vaqt bo‘yicha differensiallash operatorini (hosilani)

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_x \frac{\partial}{\partial x} + u_y \frac{\partial}{\partial y} + u_z \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial t} + \left(\vec{u} \cdot grad\right). \qquad (3.3)$$

kabi kiritamiz, bu yerda $(\cdot)$ belgisi qavs ichidagi miqdorlarning skalyar ko‘paytmasini anglatadi. Kiritilgan (3.3) operator *to‘la* yoki *individual* (ba’zida *substansional*) *hosila* deb ataladi. $\frac{dA(\vec{r},t)}{dt}$ to‘la hosila zarrachadagi *A* miqdorning vaqt bo‘yicha tezligidir. Shunga ko‘ra, to‘la yoki substansional hosila lokal ((3.3) operatorning o‘ng tarafidagi birinchi qo‘shiluvchi) va konvektiv (undagi ikkinchi qo‘shiluvchi) hosilalar yig‘indisiga teng ekan. Suyuqlik zarrachasi $\vec{a}$ tezlanish vektorining to‘g‘ri burchakli dekart koordinatalari sistemasi o‘qlaridagi (3.2) proeksiyalari yuqoridagi (3.3) formulaga ko‘ra quyidagilarga teng:

$$a_x = \frac{du_x}{dt} = \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z},$$

$$a_y = \frac{du_y}{dt} = \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z},$$

$$a_z = \frac{du_z}{dt} = \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

yoki

$$a_x=\frac{\partial u_x}{\partial t}+(\vec{u}\cdot \mathrm{grad}\, u_x), \quad a_y=\frac{\partial u_y}{\partial t}+(\vec{u}\cdot \mathrm{grad}\, u_y),$$
$$a_z=\frac{\partial u_z}{\partial t}+(\vec{u}\cdot \mathrm{grad}\, u_z). \qquad (3.4)$$
Bu ifodalardan ko‘rinadiki, suyuqlik zarrachasining $\vec{a}$ tezlanishi ikkita tezlanishlar yig‘indisiga teng ekan:
$$\vec{a}=\vec{a}_{lok}+\vec{a}_{konv},$$
bu yerda
$$\vec{a}_{lok}=\frac{\partial u_x}{\partial t}\vec{i}+\frac{\partial u_y}{\partial t}\vec{j}+\frac{\partial u_z}{\partial t}\vec{k}$$
-tezliklar maydonining vaqt bo‘yicha o‘zgarishiga asoslangan lokal tezlanish. Lokal tezlanish jarayonning nostatsionarligini anglatadi. Bundan kelib chiqadiki, agar harakat statsionar (barqaror) bo‘lsa lokal tezlanish bo‘lmaydi, ya’ni $\vec{a}_{lok}=0$ yoki
$$\frac{\partial u_x}{\partial t}=0\,, \quad \frac{\partial u_y}{\partial t}=0\,, \quad \frac{\partial u_z}{\partial t}=0;$$
$$\vec{a}_{konv}=\left(u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_x}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_x}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(u_x\frac{\partial u_y}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_y}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_y}{\partial z}\right)\vec{j}+$$
$$+\left(u_x\frac{\partial u_z}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_z}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)\vec{k}$$
- tezliklar maydonining bir jinslimasligiga asoslangan konvektiv tezlanish. Bu tezlanish tezliklar maydonining tekis emasligidan, ya’ni tezliklarning tekis taqsimlanmaganligidan kelib chiqadi.

Har ikkala usulda ham *x*, *y*, *z* koordinatalardan foydalaniladi. Ammo Lagranj usulida o‘zgaruvchan koordinatalar suyuqlik zarrachalarining harakatini ifodalaydi, Eyler usulida esa bu koordinatalar fazoning fiksirlangan nuqtasidan berilgan vaqtda har xil zarrachalarning o‘tishini aniqlaydi.

Langranj usuli bo‘yicha suyuqlik harakati qonuniyatini bilgan holda Eyler usuli bo‘yicha harakat qonuniyatiga o‘tish mumkin. Buning uchun (3.1′) tenglamalardan a, b, c Lagrang o‘zgaruvchilari orqali *x*, *y*, *z* Eyler o‘zgaruvchilari topiladi. Keyin esa (3.2′) tenglamalarda Lagranj o‘zgaruvchilarini almashtirib, Eyler o‘zgaruvchilaridagi tezlik va tezlanish topiladi. Teskaridan o‘tish uchun esa (3.1) oddiy differensial tenglamalar sistemasini *x*, *y*, *z* larga nisbatan yechish zarur. Bu sistemaning yechimi *x*, *y*, *z* lar *t* vaqt va C_1, C_2, C_3 integrallash o‘zgarmaslarining funksiyalari bo‘ladi. Bu o‘zgarmaslar $t=t_0$ fiksirlangan vaqt momentida topiladi va natijada ular Lagranj o‘zgaruvchilari bilan mos tushadi.

Amaliyotda harakat qonuni asosan Eyler o‘zgaruvchilarida beriladi, chunki bunda suyuqlik va gaz mexanikasi masalalarining qo‘yilishi, har xil nazariv va eksperimental tadqiqotlar natijalarini taqqoslash juda qulay. Lagranj usulini yakka moddiy zarrachalar harakatining fizik qonuniyatlarini ifodalashda qo‘llash qulay.

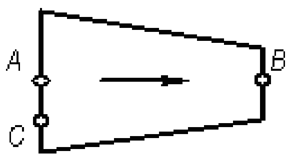
Suyuqlikning statsionar va nostatsionar harakati. Suyuqlikning harakati *statsionar* (*barqaror*) *harakat* deb ataladi, agar berilgan nuqtada vaqt o‘tishi bilan oqimning asosiy parametrlari (tezlik, bosim, zichlik) o‘zgarmasa, ya’ni

$$\vec{u} = f_u(x,y,z); \quad p = f_p(x,y,z); \quad \rho = f_\rho(x,y,z). \tag{3.5}$$

Agar bu shart bajarilmasa va nuqtadagi parametrlar vaqt o‘tishi bilan o‘zgarib borsa, bunday harakat *nostatsionar* (*nobarqaror*) *harakat* deb ataladi, ya’ni

$$\vec{u} = f_u(x,y,z,t); \quad p = f_p(x,y,z,t); \quad \rho = f_\rho(x,y,z,t). \tag{3.6}$$

Bu tuchunchalarda gap nuqtadagi parametrlar to‘g‘risida borayotganligiga e’tibor berish kerak. Buni tushuntirish uchun 3.1-rasmda tasvirlangan kanalni qaraylik. Gidromexanikada oqim harakati bo‘ylab kesim yuzasi kamayib boradigan kanallar *konfuzorlar* deb ataladi.



3.1-rasm. Konfuzordagi oqimning sxematik tasviri.

Bunday kanal yo‘li bo‘ylab oqim oshib boradi va unda suyuqlik harakati statsionar bo‘ladimi? - degan savol tug‘iladi. Tabiiyki, bunday bo‘lishi uchun *A* va *B* nuqtalardagi parametrlar vaqt otishi bilan o‘zgarmasligi kerak. Harakat ko‘rinishining ta’rifi *A*, *B* va *C* nuqtalardagi parametrlarning bir xil bo‘lishini talab qilolmaydi. *Diffuzorlar*dagi oqim harakati esa 3.1-rasmdagi sxemaga aksincha bo‘ladi.

Oqim chiziqlari va traektoriya. *Oqim chizig‘i* deb kuzatilayotgan vaqt momentida ixtiyoriy nuqtasiga o‘tkazilgan urinmasining yo‘nalishi uning tezlik vektori yo‘nalishi bilan mos tushadigan egri chiziqqa aytiladi. Bunday geometrik shakl Eyler usuli bo‘yicha harakatni ifodalaydi. Oqim chizig‘i bu fazodagi chiziq (3.2-rasm). Bu bir vaqtda bir qancha *A*, *B*, *C*, ... zarrachalar shu oqim chizig‘ida harakatlanib bormoqda degani, masalan, temir yo‘l relsi bo‘ylan harakatlanayotgan vagonlar kabi.

Bu shartni vektor shaklida $\vec{u}\times d\vec{S}=0$ kabi yozish mumkin, ya'ni vektor ko'paytma nolga teng bo'lishi lozim. Buni determinant shaklida quyidagicha yozish mumkin:

$$\begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ u_x & u_y & u_z \\ dx & dy & dz \end{vmatrix}=0\ . \tag{3.7}$$

Bu determinantni ochib chiqib, oqim chizig'ining ushbu

$$\frac{dx}{u_x}=\frac{dy}{u_y}=\frac{dz}{u_z} \tag{3.8}$$

differensial tenglamasiga ega bo'lamiz. Bu yerdan

$$\frac{dx}{u_x}=\frac{dy}{u_y}=\frac{dz}{u_z}=ds\ ,$$

bunda s - yordamchi o'zgaruvchi, yoki

$$\frac{dx}{ds}=u_x\ ,\quad \frac{dy}{ds}=u_y\ ,\quad \frac{dz}{ds}=u_z$$

tenglamalar sistemasini yechib, oqim chizig'ini topamiz. (x_0, y_0, z_0) nuqtadan o'tuvchi oqim chizig'ini topish uchun Koshi masalasini oxirgi tenglamalar sistemasi bilan ushbu

$$x\big|_{s=s_0}=x_0\ ,\quad y\big|_{s=s_0}=y_0\ ,\quad z\big|_{s=s_0}=z_0$$

boshlang'ich shartlarda yechish zarur bo'ladi.

Oqim chizig'i ba'zi xossalarga ega. Kuzatilayotgan vaqt momentida fazoning bitta nuqtasidan faqat bitta oqim chizig'i o'tishi mumkin, yani oqim chiziqlar o'zaro kesishmaydi, aks holda bitta nuqta har xil tezliklarga ega bo'lgan bo'lar edi. Ammo shunday maxsus nuqtalar mavjudki, ularda bu qoida buzilishi mumkin, yani bunday nuqtalarda tezlik nolga teng yoki u cheksiz.

Fazodagi harakatlanayotgan zarrachaning vaqt davomoda qoldirgan izi *trayektoriya* deb tushuniladi (3.3-rasm). Bunday geometrik shakl Lagranj usuli bo'yicha harakatni ifodalaydi. Masalan, doskaga bo'r bilan chizilgan chiziq bo'r bo'lagi harakatining trayektoriyasi, havoda tutuni bilan iz qoldirib harakatlanayotgan samolyot izi bu samolyotning harakat trayektoriyasi va hokazo.

Trayektoriyaning Eyler o'zgaruvchilaridagi differensial tenglamasi quyidagicha yoziladi:

$$\frac{dx}{u_x}=\frac{dy}{u_y}=\frac{dz}{u_z}=dt\,. \tag{3.9}$$

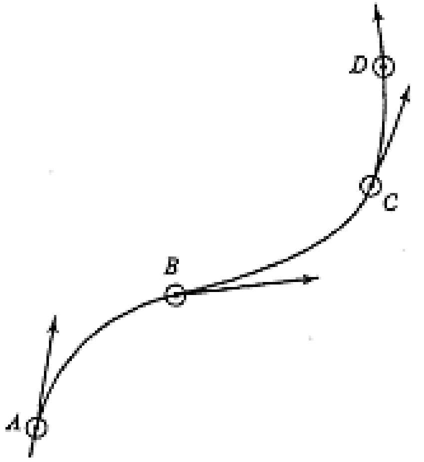
Bu yerdan ushbu

$$\frac{dx}{dt} = u_x\,, \quad \frac{dy}{dt} = u_y\,, \quad \frac{dz}{dt} = u_z$$

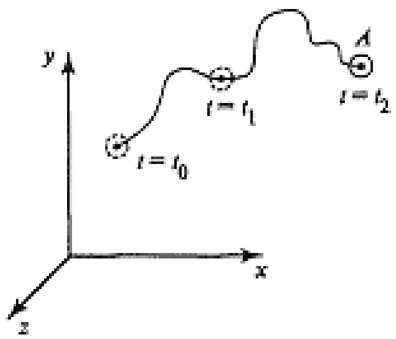
tenglamalar sistemasini yechib, trayektoriya tenglamasini topamiz. Suyuqlik zarrachasining trayektoriyasini topish uchun esa $t = t_0$ da Koshi masalasini oxirgi tenglamalar sistemasi bilan ushbu

$$x\big|_{t=t_0} = x_0\,, \quad y\big|_{t=t_0} = y_0\,, \quad z\big|_{t=t_0} = z_0$$

boshlang‘ich shartlarda yechish zarur bo‘ladi.



3.2-rasm. Berilgan vaqt momentida Eyler usuli bo‘yicha oqim chizig‘i.



3.3-rasm. Suyuqlik zarrachasining Lagranj usuli bo‘yicha trayektoriyasi.

Oqim chizigi trayektoriyadan qanday farq qiladi? Trayektoriya - bu bitta zarrachaning har xil vaqt momentlaridagi holatlari to‘plami, oqim chizig‘i esa – bu bitta vaqt momentida har xil zarrachalar joylashgan chiziq. Yana boshqacha aytganda, Lagrang bo‘yicha *t* vaqt – bu fazodan ajratib olingan bitta zarrachaning harakatini kuzatish vaqti, Eyler bo‘yicha esa *t* vaqt – bu fazoning doimo har xil zarrachalar o‘tib turgan bitta nuqtasini kuzatish vaqti.

(3.8) va (3.9) tenglamalarni taggoslaganda, umumiy holda, ya’ni nostatsionar harakatda oqim chizig‘i va trayektoriya mos tushmaydi. Suyuqlikning statsionar harakatida esa oqim chiziqlari vaqt bo‘yicha o‘zgarmas bo‘lib, suyuqlik zarrachasining traektoriyasi bilan ustma-ust tushadi.

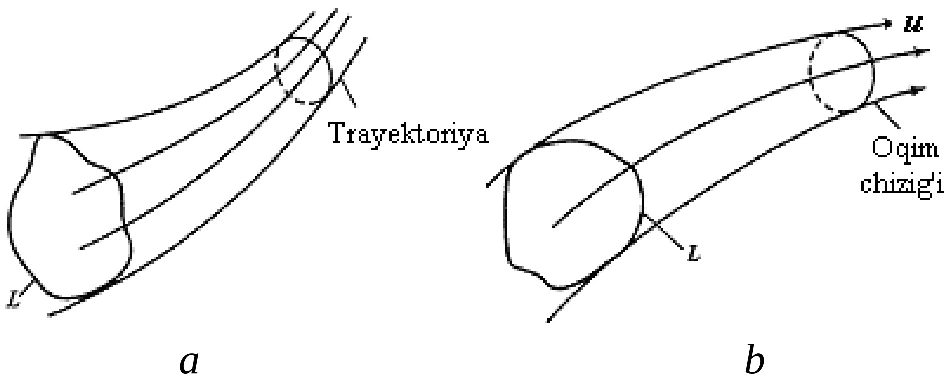
Suyuqlikning harakati potensial yoki *uyurmasiz* deyiladi, agar vaqtning har bir momentida suyuqlikning to‘la hajmida $\mathrm{rot}\,\vec{u} = 0$ tenglik bajarilsa. Suyuqlikning statsionar harakatida $\mathrm{rot}\,\vec{u} = 0$ tenglik uning oqim chiziqlari bo‘ylab o‘rinli bo‘ladi. Shunday qilib, agar oqim chiziqlarining biror nuqtasida uyurma sodir bo‘lmasa, u holda bu uyurma butun shu chiziq bo‘ylab sodir bo‘lmaydi. Agar suyuqlikning harakati nostatsionar bo‘lsa, u holda bu natija shunday farq bilan o‘z kuchida qoladiki, bunda oqim chiziqlari haqida emas, balki vaqt o‘tishi bilan suyuqlikning zarrachasi orqali aniqlangan traektoriya haqida gapirish lozim bo‘ladi. Shuni eslatamizki, nostatsionar harakatda bu traektoriyalar, umuman olganda, oqim chiziqlari bilan mos tushmaydi.

Agar harakatlanayotgan suyuqlikda tezliklar taqsimoti faqat ikkita, masalan, x va y koordinatalarga bog‘liq va barcha nuqtalarda tezlik Oxy tekislikka parallel bo‘lsa, u holda bunday oqim *ikki o‘lchovli* yoki *tekis oqim* deyiladi. Ikki o‘lchovli oqimda suyuqlikning statsionar harakati uchun oqim chiziqlari uchbu

$$\frac{dx}{u_x(x,y,t)} = \frac{dy}{u_y(x,y,t)} = dt \quad \text{yoki} \quad u_y\,dx - u_x\,dy = 0 \qquad (3.10)$$

differensial tenglamadan topiladi. Bu tenglama *tekis holatdagi oqim chiziqlari tenglamasi* deb atalib, u har bir nuqtada oqim chizig‘iga o‘tkazilgan urinma yo‘nalishidagi tezlik yo‘nalishi bilan mos tushishini bildiradi.

Tizillab oqish (struy). Oqim naychasi (oqim sirti). Harakatlanayotgan suyuqlikda cheksiz kichik yopiq L konturni belgilaymiz va uning barcha nuqtalari orqali *a*) trayektoriya chiziqlarini o‘tkazamiz; hosil qilingan sirt bilan chegaralangan fazo orqali oqish *tizillab oqish* (*struya*) deb, undan o‘tayotgan oqim bo‘lagi esa *tizillab oqayotgan suyuqlik* deb ataladi va bu tushunchadan Lagranj usulida foydalaniladi (3.4,*a*-rasm); *b*) oqim chiziqlari o‘tkazamiz; hosil qilingan sirt bilan chegaralangan suyuqlik oqimi bo‘lagi *oqim naychasi (trubkasi)* yoki *oqim sirti* deb, uning ichidan oqayotgan suyuqlik bo‘lagi *sharracha* deb ataladi va bu tushunchadan Eyler usulida foydalaniladi (3.4,*b*-rasm). Tanlangan kontur suyuqlik harakati sodir bo‘layotgan fazoda belgilandi, demakki, harakatdagi suyuqlikning qaysidir bir qismi shu oqim sirtining ichidan o‘tadi.



3.4-rasm. Tizillab oqish (struya) (*a*) va oqim naychasi (*b*): L – yopiq kontur; chiziqlar – trayektoriyalar (*a*) va oqim chiziqlari (*b*).

Suyuqlikning statsionar harakatida oqim naychasi vaqt bo‘yicha o‘zgarmaydi va suyuqlik zarrachalari shunday harakat qiladiki, ularning har biri biror belgilangan sharracha ichida qoladi. Boshqacha aytganda, statsionar oqimda tizillab oqish va oqim naychasi ustma-ust tushadi.

Agar oqim chiziqlari yetarlicha kichik tanlansa, u holda oqim naychasining ixtiyoriy ko‘ndalang kesimida tezlikni bir jinsli deb hisoblash mumkin. Bunday holda, oqim naychasi bo‘ylab $\rho Su = const$ tenglik o‘rinli bo‘lishini massaning saqlanish qonuni talab qiladi.

Ammo tahlil uchun massaning saqlanish qonunini umumiyroq ifodalovchi tenglama – uzviylik differensial tenglamasi talab qilinadi.

Namunaviy masalalar va ularning yechimlari

1-masala. Biror oqimning harakat tenglamalari sistemasi quyidagicha berilgan bo‘lsin:

$$x = a + Ut\ ;\quad y = b\ ;\quad z = c\ .$$

Harakatning xarakterini va uning barcha kinematik parametrlarini aniqlang.

Yechish: Sistema berilishiga ko‘ra ixtiyoriy zarrachaning y va z koordinatalari t vaqtga bog‘liq emas, shuning uchun berilgan harakat Ox o‘qiga parallel. Boshqacha aytganda ixtiyoriy zarrachaning trayektoriyasi Ox o‘qiga parallel to‘g‘ri chiziqdan iborat.

Harakat Lagranj o‘zgaruvchilarida berilgan. Tezlik vektorining proeksiyalarini topaylik:

$$u_x = \frac{\partial f_1}{\partial t} = U\,;\quad u_y = \frac{\partial f_2}{\partial t} = 0;\ ,\quad u_z = \frac{\partial f_3}{\partial t} = 0\ .$$

To‘la tezlik: $u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2} = U$.

Harakatning yo‘nalishi yo‘naltiruvchi kosinuslar bilan aniqlanadi:

$$\cos\alpha = \frac{U}{U} = 1;\quad \cos\beta = \frac{0}{U} = 0;\quad \cos\gamma = \frac{0}{U} = 0\ .$$

Bu yerdan $\alpha = 0^0$; $\beta = 90^0$, $\gamma = 90^0$. Demak, harakat Ox o‘qiga parallel ekan.

Tezlanishning tashkil etuvchilarini topaylik:

$$a_x = \frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2} = 0;\quad a_y = \frac{\partial^2 f_2}{\partial t^2} = 0;\quad a_z = \frac{\partial^2 f_3}{\partial t^2} = 0\,.$$

Shunday qilib, harakat tekis ekan.

Bu masala juda ham sodda bo‘lib, uning berilishidanoq yuqoridagi xulosalarni chiqarish mumkin edi. Bu yerda masalani yechishning ketma-ketligini ko‘rsatish maqsadidagina hisoblashlar keltirildi.

2-masala. Suyuqlikning harakati tezliklari proeksiyalari bilan Eyler o‘zgaruvchilarida quyidagicha berilgan:

$$u_x = mx + nt\ ,\ \ u_y = -ky + lt\ ,\ \ u_z = 0\,,$$

bunda *m, n, k, l* - o‘zgarmas miqdorlar. Eyler o‘zgaruvchilaridan Lagranj o‘zgaruvchilariga o‘ting va bu yangi o‘zgaruvchilarda traektoriya tenglamasini toping.

Yechish: Masalaning shartiga ko‘ra ushbu

$$\frac{dx}{dt} = u_x = mx + nt\ , \tag{1}$$

$$\frac{dy}{dt} = u_y = -ky + lt \tag{2}$$

differensial tenglamalarni integrallaymiz.

(1) ni integrallashda

$$x = u(t)v(t) \tag{3}$$

deb belgilash qabul qilamiz. U holda

$$\frac{dx}{dt} = v\frac{du}{dt} + u\frac{dv}{dt}\,. \tag{4}$$

(4) ni (1) ga qo‘yib quyidagini topamiz:

$$v\left(\frac{du}{dt} - mu\right) + u\frac{dv}{dt} - nt = 0\,. \tag{5}$$

$u(t)$ va $v(t)$ funksiyalardan birini ixtiyoriy tanlash mumkinligidan foydalanib, $u(t)$ funksiyani shunday tanlaymizki,

$$\frac{du}{dt} - mu = 0 \tag{6}$$

bo‘lsin. Bunga mos ravishda

$$u\frac{dv}{dt} - nt = 0\,. \tag{7}$$

(6) tenglamaning yechimi quyidagicha:

$$u = C_1 e^{mt}\,. \tag{8}$$

(8) ni (7) ga qo‘yib, ushbu

$$\frac{dv}{dt} = \frac{n}{C_1}e^{-mt}t \tag{9}$$

tenglamani hosil qilamiz. Buni integrallab esa quyidagi yechimga kelamiz:

$$v = -\frac{n}{C_1 m^2}(mt+1)e^{-mt} + C_2 . \qquad (10)$$

(8) va (10) ni (3) ga qo‘yib, quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$x = C_3 e^{mt} - \frac{nt}{m} - \frac{n}{m^2} . \qquad (11)$$

Xuddi shunday, (2) ni integrallab, quyidagi yechimni topamiz :

$$y = C_4 e^{-kt} + \frac{lt}{k} - \frac{l}{k^2} . \qquad (12)$$

C_3 , C_4 – o‘zgarmaslarni t = 0 deb faraz qilib, boshlangich shartlardan topamiz, ya’ni

$$C_3 = x + \frac{n}{m^2}; \;\; C_4 = y + \frac{l}{k^2} \;\; . \qquad (13)$$

Lagranj usuliga ko‘ra traektoriyasi bo‘ylab harakati o‘rganilayotgan suyuqlik zarrachasining koordinatalari t=0 da ma’lum bo‘lishi kerak. Bu koordinatalarni $x = -\frac{n}{m^2}$; $y = -\frac{l}{k^2}$ deb tanlaylik. U holda (13) asosida C_3 = 0, C_4 = 0 ekanligidan, izlanayotgan traektoriya uchun quyidagi parametrik tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$x = -\frac{n}{m}t - \frac{n}{m^2} \;\; ; \;\; y = \frac{l}{k}t - \frac{l}{k^2} .$$

Bulardan t vaqtni chiqarib tashlasak, quyidagi to‘g‘ri chiziqni ifodalovchi traektoriya tenglamasiga kelamiz :

$$y + \frac{lm}{kn}x = -\frac{l}{k}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{k}\right).$$

3-masala. Tezliklari proeksiyalari quyidagicha berilgan suyuqlikning harakati uchun uning oqim chiziqlari va traektoriyasi tenglamasini toping :

$$u_x = -ay \; , \;\; u_y = ax \; , \;\; u_z = 0 ,$$

bunda a – biror o‘zgarmas miqdor.

Yechish: Ixtiyoriy nuqtasiga o‘tkazilgan urinma tezlik vektori yo‘nalishi bilan mos tushuvchi egri chiziqning t vaqt momentidagi oqim chiziqlarini topamiz. Ma’lumki, (3.8) – oqim chiziqlarining differensial tenglamalari; fazoda suyuqlik zarrachasining ko‘chish egri chizig‘i uning traektoriyasi deb ataladi. Bu traektoriyaga o‘tkazilgan urinma tezlik vektori bilan mos tushadi. Ammo oqim chizig‘idan farqli, traektoriyani fiksirlangan vaqt momentida qurish mumkin. Traektoriya tushunchasi biror vaqt oralig‘ida sodir bo‘lib, bunda suyuqlik zarrachasi aniq bir yo‘lni bosib o‘tadi. Bundan kelib chiqadiki, oqim chizig‘i ham, traektoriya ham suyuqlikning o‘sha bitta zarrachasi harakati izidan iborat va u statsionar oqim bilan mos tushadi.

Tekshirilayotgan harakat tekis (yassi), chunki $u_z = 0$ va statsionar, chunki tezlikning tashkil etuvchilari (u_x va u_y) vaqtga bog‘liq emas. Tekis harakatda oqim chizig‘ining (3.8) differensial tenglamasi, u_x va u_y larning mos qiymatlari unga qo‘yilganda, quyidagicha yoziladi:

$$xdx+ydy=0.$$

Buni integrallab ushbu

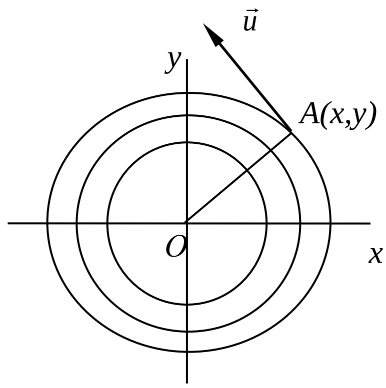
$$x^2+y^2=C$$

oqim chizig‘i tenglamasiga kelamiz. Bu tenglama bilan ifodalanuvchi egri chiziqlar markazi koordinata boshida bo‘lgan konsentrik aylanalar oilasidan iborat. Qaralayotgan oqim statsionar bo‘lganligi uchun traektoriyalar oqim chiziqlari bilan ustma-ust tushadi.

Suyuqlik harakatining yo‘nalishini aniqlash uchun tezlik vektori va koordinat o‘qlari orasidagi burchaklar kosinuslarini topish zarur bo‘ladi :

$$\cos(\vec{u}, x) = \frac{u_x}{u} = -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$\cos(\vec{u}, y) = \frac{u_y}{u} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$



3.5-rasm. Suyuqlikning statsionar oqimi uchun oqim chiziqlari.

Ma’lumki, musbat qiymatli nuqta uchun

$$\cos(\vec{u}, x) < 0\,; \quad \cos(\vec{u}, y) > 0$$

bo‘lsa, u holda tezlik Ox o‘q bilan $\frac{\pi}{2}$ dan katta burchak hosil qiladi, demak, harakat soat miliga qarshi yo‘nalgan bo‘ladi (3.5-rasm).

4-masala. Tezliklari proeksiyalari quyidagicha berilgan suyuqlikning harakati uchun uning oqim chiziqlari va traektoriyasi tenglamasini toping :

$$u_x = x + t\,,\;\; u_y = -y + t\,,\;\; u_z = 0\,.$$

Yechish: Berilgan harakat qonuniyatiga ko‘ra bu suyuqlikning harakati tekis va nostatsionar, chunki tezlikning tashkil etuvchilari (u_x va u_y) ham koordinatadan, ham vaqtga bog‘liq. Shuning uchun bu holda traektoriyalar va oqim chiziqlari mos tushmaydi.

Oqim chiziqlarining differensial tenglamasi quyidagiga teng:

$$\frac{dx}{x+t} = \frac{dy}{-y+t}.$$

Bu tenglamani integrallab va bunda t vaqt fiksirlangan ekanligidan

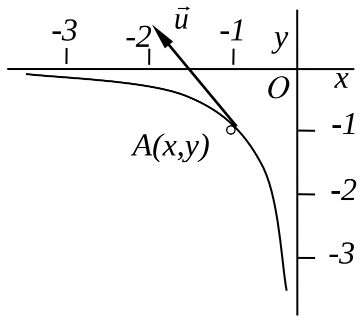
$$(x+t)(y-t)=C,$$

ya’ni oqim chiziqlari har bir vaqt momentida giperbolalar oilasidan iborat.

3.6-rasmda t=0 vaqt momentida A(-1,-1) nuqtadan o‘tuvchi oqim chizig‘i tasvirlangan. Bunga mos keluvchi giperbola tenglamasi quyidagicha: $xy=1$.

Traektoriyani topish uchun quyidagi tenglamani integrallash lozim :

$$\frac{dx}{dt} = x + t\ ; \quad \frac{dy}{dt} = -y + t\,.$$



3.6 rasm. t=0 vaqt momentidagi oqim chizig‘i.

Bu tenglamalarni 1-masaladagi kabi integrallash natijasida quyidagi mos yechimlarga kelamiz:

$$x = C_1 e^{t} - t - 1\ ; \quad y = C_2 e^{-t} + t - 1.$$

Bunda t=0 vaqt momentida A(-1 ;-1) nuqtadagi suyuqlik zarrachasining chizadigan traektoriyani topish uchun C_1 va C_2 o‘zgarmaslarning qiymatlarini topamiz. t=0 da yechimga x=-1 , y=-1 ni qo‘yib, ulardan t ni yo‘qotsak quyidagi traektoriya tenglamasini hosil qilamiz :

$$x+y = -2.$$

Buni xy=1 bilan taqqoslasak, nostatsionar harakat uchun oqim chiziqlari va traektoriyalar mos tushmasligini aniqlaymiz.

5-masala. Tezliklari proeksiyalari quyidagicha berilgan suyuqlikning harakati uchun uning oqim chiziqlari va traektoriyasi tenglamasini toping:

$$u_x = \frac{ax}{R^3}\ , \quad u_y = \frac{ay}{R^3}\ , \quad u_z = \frac{az}{R^3}\,,$$

bunda a – biror o‘zgarmas miqdor ; $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

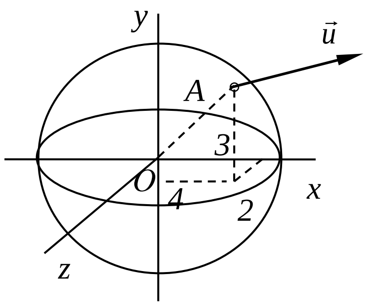
Yechish: Tekshirilayotgan oqish fazoviy va statsionar, chunki parametrlar t vaqtga bog‘liq emas. Shuning uchun traektoriyalar va oqim chiziqlari mos tushadi. Oqim chiziqlarining (3.8) differensial tenglamasi quyidagicha:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}\ .$$

Buni integrallasak,

$$x = Cy\ , \quad x = C_1 z\ , \quad y = C_2 z\ .$$

Bu tenglamalar sistemasi fazoda koordinatalar boshidan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqlar oilasini beradi. C, C_1, C_2 o‘zgarmaslarning qiymatlari oqim chiziqlari (traektoriyalar) o‘tuvchi nuqtalar koordinatalaridan topiladi.



3.7-rasm. Fazoviy manba sxemasi.

A(4 ;3 ;2) nuqta orqali o‘tuvchi oqim chizig‘ini qaraylik (3.7-rasm). Bu shartlarga ko‘ra C = 4/3 ; C_1 = 2 ; C_2 = 3/2. Bu oqim chizig‘ining tenglamasini quyidagicha yozishimiz mumkin:

$$3x\text{-}4y = 0\ ;\quad x\text{-}2z = 0\ .$$

Oqim chiziqlari koordinatalar boshidan chiquvchi nurlar orqali ifodalanuvchi suyuqlik oqimi (a>0) *manba* deb ataladi.

Oqim chiziqlari koordinata boshiga keluvchi nurlar orqali ifodalanuvchi suyuqlik oqimi (a<0) *manfiy manba* deb ataladi.

Topshiriqlar

1. Quyida berilgan harakat qonuniga ko‘ra uning xarakteri va kinematik parametrlarini Eyler va Lagranj o‘zgaruvchilarida hisoblang:

1) $x=at-b$, $y=c-td$, $z=e$;
4) $x=at-b$, $y=c-td$, $z=a-ct$;
2) $x=-a$, $y=bt-c$, $z=d$;
5) $x=t-1$, $y=t+1$, $z=t$,
3) $x=-at+b$, $y=c+td$, $z=-et$;

bunda a , b , c , d , e - biror o‘zgarmas miqdorlar.

2. Tezliklari proeksiyalari quyidagicha berilgan suyuqlikning harakati uchun uning oqim chiziqlari va traektoriyasi tenglamasini toping :

1) $u_x = ax$, $u_y = ay$, $u_z = 0$;
4) $u_x = y + t$, $u_y = x + t$, $u_z = 0$;
2) $u_x = x + 4y$, $u_y = 4x + y$, $u_z = 0$;
5) $u_x = x + t$, $u_y = y + t$, $u_z = z + t$,
3) $u_x = ax$, $u_y = ay$, $u_z = az$;

bunda a – biror o‘zgarmas miqdor.

Sinov savollari

1. Kinematika bo‘limi nimani o‘rganadi?
2. Harakatni ifodalashning Eyler va Lagranj usullarini tushuntiring.
3. Tezlik va tezlanishning Eyler va Lagranj usullaridagi ifodalarini tushuntiring.
4. Substansional hosila nima?
5. Lokal va konvektiv tezlanish deganda nimani tushunasiz?
6. Suyuqlikning statsionar va nostatsionar harakatini tushuntiring.
7. Konfuzor va diffuzordagi oqimlarni tushuntiring.
8. Oqim chiziqlari, trayektoriya va oqim naychasi nima?
9. Trayektoriya va oqim chizig‘i tenglamalarini tushuntiring.
10. Ikki o‘lchovli oqimni qanday tushunasiz?

3.2. Suyuqlik zarrachasining deformatsiyalanishi

Suyuqlik zarrachasi harakatining turlari. Gelmgoltsning birinchi teoremasi. Suyuqlik zarrachasining harakati qattiq jism harakatiga nisbatan ancha murakkab bo‘lib, mexanika kursidan ma’lumki, u ilgarilanma va aylanma bo‘lishi mumkin. Suyuqlik va uning zarrachalarining alohida xususiyati - ularning hajmini saqlagan holda, o‘z shaklini o‘zgartirib, osongina deformatsiyalanuvchanligida. Shuning uchun suyuqlik zarrachasi bir vaqtda ilgarilanma va aylanma harakatdan tashqari deformatsion harakatga ham ega bo‘lishi mumkin. Demakki, tezlik ham mos ravishda ilgarilanma ($\vec{u}_{i\lg.}$), aylanma ($\vec{u}_{ayl.}$) va sof deformatsion ($\vec{u}_{def.}$) harakatdagi tezliklar yig‘indisidan iborat bo‘ladi:

$$\vec{u} = \vec{u}_{i\lg.} + \vec{u}_{ayl.} + \vec{u}_{def.} \; ,$$

bunda $\vec{u}_{i\lg.} = \vec{u}(\vec{r}_0) = \vec{u}_0(x, y, z)$ - qutb tezligi; $\vec{u}_{ayl.} = \vec{\omega} \times \vec{\rho}$ - «qattiqlashgan» suyuqlik zarrachasining $\vec{\omega}$ - burchak tezlik bilan aylanma harakatidagi tezligi; $\vec{u}_{def.} = grad\, F$ - sof deformatsion tezlik; $\vec{r}_0$ - qutb nuqtasining radius-vektori; $\vec{\rho}$ - zarrachaning aylanish o‘qiga nisbatan radius-vektori; *F* – deformatsiyalar tezliklari tenzori elementlariga nisbatan kvadratik funksiya.

Bu holat *Gelmgoltsning birinchi teoremasi* ma’nosini tashkil qiladi. Quyida ana shu teoremani tushuntiramiz va asoslaymiz.

To‘g‘ri burchakli parallelepiped shaklidagi suyuqlik zarrachasini qaraylik (3.6-rasm). Uning qirralari uzunliklari mos ravishda *dx, dy, dz* bo‘lsinlar. Bunday suyuqlik zarrachasining deformatsiyasi *chiziqli* (qirra cho‘ziladi yoki qisqaradi) hamda *burchak* (qirralar siljiydi) *deformatsiyalari* bo‘lishi mumkin.

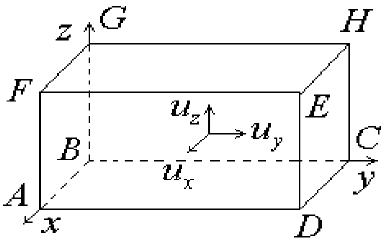
Bu hollarning har birini alohida qarash maqsadga muvofiq. Avvalo burchak deformatsiyalarni qarab chiqaylik.

Burchak deformatsiyalar (siljish deformatsiyalari). 3.8-rasmdan ko‘rinadiki, burchak deformatsiyasi o‘zaro perpendikulyar qirralar tezliklarining o‘zaro farqidan kelib chiqadi. Buni yanada soddaroq holda tushunish uchun 3.9-rasmda tasvirlangan bitta qirra misolida ko‘raylik.

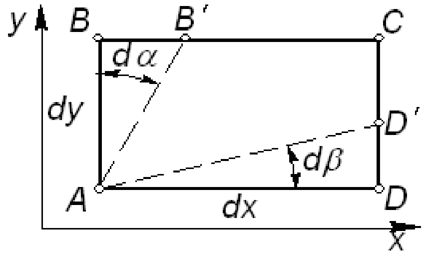
Faraz qilaylik, *A* nuqtadagi tezlik komponentalari u_x, u_y, u_z larga teng bo‘lsin. Harakatni statsionar deb hisoblab *B* nuqtadagi tezlikni topamiz va o‘z navbatida, *t* vaqt bo‘yicha barcha hosilalar nolga tengligini ta’kidlaymiz. Fazoning bir nuqtasidan ikkinchi bir nuqtasiga o‘tishda tezlik komponentalarining orttirmasini *u+du* kabi ifodalash mumkin. Xususan, u_x proeksiya uchun

$$du_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}dx + \frac{\partial u_x}{\partial y}dy + \frac{\partial u_x}{\partial z}dz$$

ekanligidan $u_x + du_x$ deb yozamiz. Xuddi shunday boshqa proeksiyalarni ham yozish mumkin.



3.8-rasm. Eyler bo‘yicha differensial kuzatuv hajmi.



3.9-rasm. Suyuqlik zarrachasi yoqining burchak deformatsiyasi.

A nuqtadan *B* nuqtaga o‘tishdagi u_x orttirmani qaraylik. Bu holda *dx=dz=0*, ya’ni

$$u_{x_{(B)}} = u_{x_{(A)}} + du_x = u_{x_{(A)}} + \frac{\partial u_x}{\partial y}dy.$$

Faraz qilaylik, *A* va *B* nuqtalardagi tezliklar farqi hisobiga *dt* vaqt ichida bu qirra *AB′* holatni egallasin.

Xuddi shunday *A* va *D* nuqtalar uchun u_y tezlikka nisbatan fiksirlasak, quyidagiga ega bo‘lamiz:

A nuqtada: u_y (shartga ko‘ra).

D nuqtada: $u_{y_{(D)}} = u_{y_{(A)}} + \dfrac{\partial u_y}{\partial x}dx.$

Bu tezliklar farqi hisobiga *D* nuqta *D′* holatni egallaydi.

Shunday qilib,

$$u_{x_{(B)}} - u_{x_{(A)}} = \frac{\partial u_x}{\partial y}dy, \quad u_{y_{(D)}} - u_{y_{(A)}} = \frac{\partial u_y}{\partial x}dx.$$

Faraz qilaylik, B nuqtaning *dt* vaqt birligi ichida *B′* holatga o‘tishi siljish miqdorini bersin va uni quyidagicha topish mumkin:

$$BB' = \frac{\partial u_x}{\partial y}dydt$$

Burchak deformatsiya *dα* burchak tangensi bilan xarakterlanadi. Bunda *AB=dy* deb olsak,

$$\mathrm{tg}(d\alpha)=\frac{BB'}{AB}=\frac{\partial u_x}{\partial y}dt\approx d\alpha\,.$$

$d\alpha$ burchakning kichik ekanligidan $\mathrm{tg}(d\alpha)\approx d\alpha$ deb hisoblash mumkin.

Xuddi shunday,

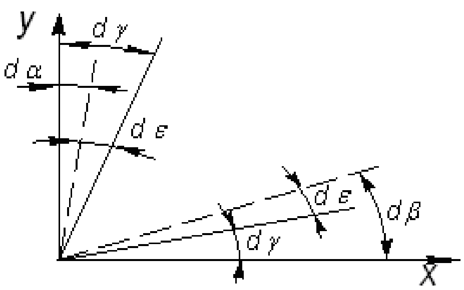
$$\mathrm{tg}(d\beta)=\frac{DD'}{AD}=\frac{\partial u_y}{\partial x}dt\approx d\beta\,.$$

Dastlabki A nuqtaning to‘la siljishi quyidagi yig‘indi bilan ifodalanadi:

$$d\alpha+d\beta=\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial x}\right)dt\ . \tag{3.11}$$

Bu yerda eng muhim bo‘lgan bir holatga e’tibor bermoq lozim: girraning qaralayotgan ko‘chishi nafaqat deformatsiya natijasida, balki zarrachaning aylanishi natijasida ham paydo bo‘ladi. Haqiqatan ham, agar qirra aylanmasdan deformatsiyalanganda edi, har ikkala qirra bir biriga qarab bir xil burchakka burilgan bo‘lar edi. Aksincha, agar faqat aylanish sodir bo‘lganda edi, u holda qirra aylanish yo‘nalishida bir hil burchakka burilgan bo‘lar edi. Natijada elementning umumiy holdagi harakatini deformatsion va aylanma harakatlar yig‘indisi deb qarash mumkin. Bulardan esa $d\alpha$ va $d\beta$ aniqlanadi.

Aylanish soat strelkasiga qarama-qarshi sodir bo‘lmoqda deb, A to‘g‘ri burchakning deformatsiyasini qaraylik. Sof deformatsion harakatni $d\gamma$ burchak bilan, sof aylanma harakatni esa $d\varepsilon$ burchak bilan xarakterlaylik.



3.10-rasm. Suyuqlik zarrachasi qirrasining aylanma harakatidagi buralishi.

3.8-rasmdan kelib chiqadiki,

$$d\alpha=d\gamma-d\varepsilon\ ,\quad d\beta=d\gamma+d\varepsilon$$

yoki ularning yigindisidan

$$d\alpha+d\beta=2d\gamma,$$

bu yerdan esa

$$d\gamma=\frac{1}{2}(d\alpha+d\beta). \tag{3.12}$$

Xuddi shunday ayirmadan

$$d\varepsilon=\frac{1}{2}(d\beta-d\alpha). \tag{3.13}$$

Shunday qilib, deformatsiya burchaklar yig‘indisining yarmi bilan, aylanish esa ular ayirmasining yarmi bilan ifodalanadi. (3.11) ni e’tiborga olsak, u holda

$$d\gamma = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right)dt. \qquad (3.14)$$

Oz o‘q atrofida paydo bo‘ladigan sof deformatsion burchak tezlik:

$$\gamma_z = \frac{d\gamma}{dt} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right). \qquad (3.15)$$

Xuddi shunday, Oy va Ox o‘qlar uchun:

$$\gamma_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right); \qquad (3.16)$$

$$\gamma_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z}\right). \qquad (3.17)$$

Ushbu $\frac{d\varepsilon}{dt} = \omega$ ifoda suyuqlik zarrachasining aylanma burchak tezligidir. Burchak tezligining proeksiyalari esa quyidagilar:

$$\omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}\right); \qquad (3.18)$$

$$\omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right); \qquad (3.19)$$

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right). \qquad (3.20)$$

Olingan (3.18) - (3.20) munosabatlar suyuqliklar mexanikasida juda muhim ahamiyatga ega. Ular suyuqlik zarrachalarining burchak va ilgarilanma tezliklari orasidagi bog‘lanishni ifodalaydi. Ishoralar bu yerda shartli ravishda qabul qilingan. Suyuqliklar mexanikasida soat strelkasiga qarama-qashi harakat musbat, soat strelkasi bo‘yicha harakat esa manfiy deb qabul qilingan.

Burchak tezlik vektorining biror o‘qqa nisbatan proeksiyasini shu o‘qqa nisbatan suyuqlik zarrachasining aylanish burchak tezligi deb qarash mumkin.

Burchak tezlikning vektor shakli quyidagicha yoziladi:

$$\vec{\omega} = \omega_x \vec{e}_x + \omega_y \vec{e}_y + \omega_z \vec{e}_z. \qquad (3.21)$$

Bunda ω_x, ω_x va ω_z larni (3.18)-(3.20) dagi mos ifodalari bilan almashtirsak,

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}\right)\vec{e}_x + \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right)\vec{e}_y + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\vec{e}_z\right] \qquad (3.22)$$

Kvadrat qavs ichidagi ifodani rotor formulasi bilan taqqoslasak, quyidagini yozamiz:

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}\,\mathrm{rot}\,\vec{u} \tag{3.23}$$

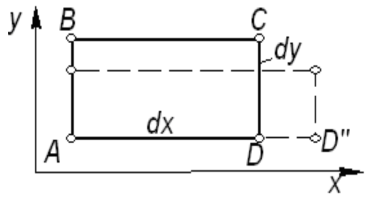
yoki

$$\vec{\Omega} = \mathrm{rot}\,\vec{u} = 2\vec{\omega}, \tag{3.24}$$

bunda $\vec{\Omega}$ - *uyurma tezligi vektori* deb ataladi. Suyuqlik uchun tezlik uyurmasi vektorining proeksiyalari ikkilangan burchak tezliklar bo‘lib, qattiqlashgan suyuqlik zarrachasining mos koordinat o‘qlariga parallel o‘qlar atrofida aylanishini bildiradi.

(3.24) formula vektor maydoni uyurmasi (rotori)ning gidromexanik ma’nosini beradi. Agar $\vec{u}$ oniy tezliklar maydonini ifodalasa, u holda $\mathrm{rot}\vec{u}$ shu maydondagi suyuqlik zarrachalarining ikkilangan burchak tezliklarini ifodalaydi.

Chiziqli deformatsiyalar. 3.11-rasmdan ko‘rinib turibdiki, zarracha-ning chiziqli deformatsiyalari qirra yo‘nalishi bilan mos tezliklar farqi natijasidan kelib chiqadi. Avvalgidek, A nuqtada tezlik komponentalari u_x, u_y, u_z bo‘lsin.



3.11-rasm. Suyuqlik zarrachasi yoqining chiziqli deformatsiyalanishi.

Ox o‘q bo‘ylab:

A nuqtada: $u_{x_{(A)}}$;

D nuqtada: $u_{x_{(D)}} = u_{x_{(A)}} + \frac{\partial u_x}{\partial x}dx$;

AD qirraning cho‘zilishidagi tezliklar farqi:

$\frac{\partial u_x}{\partial x}dx$;

dt vaqt ichida DD'' qirraning cho‘zilishi:

$$DD'' = \frac{\partial u_x}{\partial x}dxdt. \tag{3.25}$$

Nisbiy cho‘zilish:

$$\frac{DD''}{AD} = \frac{\partial u_x}{\partial x}dt = d\varepsilon_x\ . \tag{3.26}$$

Nisbiy cho‘zilish tezligi:

$$\frac{d\varepsilon_x}{d\,t} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = \dot{\varepsilon}_x\ . \tag{3.27}$$

Xuddi shunday, boshqa o‘qlar uchun:

$$\dot{\varepsilon}_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}; \quad \dot{\varepsilon}_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}.$$

Agar bu jarayon barcha o‘qlar bo‘ylab bir vaqtda sodir bo‘lsa, u holda bu suyuqlik zarrachasining hajmiy kengayishiga yoki hajmiy siqilishiga olib keladi.

Hajmiy deformatsiya cho‘zilish yoki siqilish hisobiga parallelepiped dastlabki hajmi *dV=dxdydz* ning $\delta V = \delta V_x + \delta V_y + \delta V_z$ miqdorga o‘zgarishiga olib keladi. Bunda $\delta V_x = DD'' dydz$ va (3.25) ni hisobga olsak, $\delta V_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} dVdt$.

Xuddi shunday, $\delta V_y = \frac{\partial u_y}{\partial y} dVdt$, $\delta V_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} dVdt$.

Sunday qilib, $\delta V = \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) dVdt$.

Nisbiy hajmiy deformatsiya tezligi deb hajm o‘zgarishining dastlabki hajm va deformatsiya tezligiga nisbatini olamiz:

$$\frac{\delta V}{dVdt} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = \varepsilon_V = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \mathrm{div}\,\vec{u}.$$

Agar div$\vec{u}$=0 bo‘lsa, u holda $\delta V = 0$, ya’ni suyuqlik zarrachasining deformatsiyasi uning hajmi o‘zgarmasdan sodir bo‘ladi. Divergensiya nolga tengligining gidromexanik ma’nosi ham shundan iborat edi. Bu holda suyuqlik siqilmaydigan suyuqlik bo‘ladi.

Suyuqlik zarrachasining yuqorida olingan ilgarilanma va aylanma tezliklari orasidagi bog‘lanish munosabatlarini ma’lum bir qiziqish uyg‘otuvchi boshqa bir yo‘l bilan ham olish mumkin edi. Bitta savolga javobni har xil yo‘llar bilan chiqarish tushunchalarni boyitishga imkon beradi. Shuning uchun bu usulni ham qarab chiqamiz.

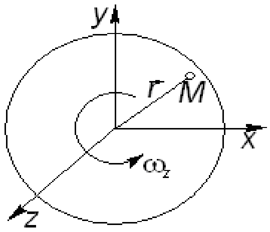
Faraz qilaylik, suyuqlik zarrachasi *Oz* o‘q atrofida ω_z tezlik bilan aylanayotgan bo‘lsin (3.12-rasm).

Bizga ma’lum bo‘lgan rotor uchun ifodani koordinat o‘qlariga nisbatan proeksiyalarda yozamiz:

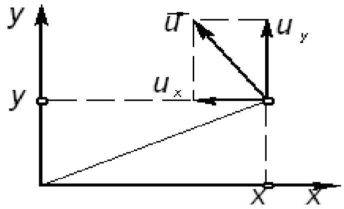
$$rot_x\vec{u} = \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}, \quad rot_y\vec{u} = \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}, \quad rot_z\vec{u} = \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}.$$

Suyuqlik zarrachasining biror M nuqtasini qaraylik (3.13-rasm). Bu zarrachaning chiziqli tezligi $\vec{u} = \vec{\omega}_z \times \vec{r}$ ga teng. Bu ifodani tezlikning koordinat o‘qlaridagi proeksiyalari orqali yozamiz: $u_x = -\omega_z y$; $u_y = \omega_z x$;

$u_z = 0$. Bu yerdan esa $\dfrac{\partial u_y}{\partial x} = \omega_z$; $\dfrac{\partial u_x}{\partial y} = -\omega_z$. Bularga ko‘ra $rot_z\vec{u} = \dfrac{\partial u_y}{\partial x} - \dfrac{\partial u_x}{\partial y} = 2\omega_z$.



3.12-rasm. Aylanma tezlikning sxematik tasviri.



3.13-rasm. Suyuqlik nuqtasining tekislikdagi harakati tezligi sxemasi.

Xuddi shunday, boshqa ikkita komponentalar uchun $rot_x\vec{u} = 2\omega_x$; $rot_y\vec{u} = 2\omega_y$. Vektor shaklida yozsak, ushbu

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}\mathrm{rot}\,\vec{u}$$

formula (3.23) formula bilan to‘la mos tushadi.

Agar harakatda $\mathrm{rot}\,\vec{u} \neq 0$ *bo‘lsa, u holda bu uyurmali harakat, va aksincha* $\mathrm{rot}\,\vec{u} = 0$ *bo‘lganda esa u uyurmasiz yoki potensial harakat deb ataladi.* Bundan kelib chiqadiki, agar harakat uyurmali bo‘lsa, u holda suyuqlik zarrachasining aylanma harakati sodir bo‘ladi.

Shunday qilib, deformatsion harakat uchta chiziqli deformatsiyalar tezliklari ($\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$) va uchta siljish deformatsiyalari ($\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$) orqali ifodalanadi. Ana shu oltita mos keluvchi oltita komponentalar orqali ifodalanuvchi $V^s_{i,j}$ - simmetrik tenzor *deformatsiyalar tezliklari tenzori* deb ataladi. $V_{i,j}$ tenzorni ikkita $V^s_{i,j}$ - simmetrik va $V^A_{i,j}$ – antisimmetrik tenzorlarga ajratish quyidagi fizik ma’noni beradi: bu bilan biz harakarni deformatsion harakat (aylanishsiz) va kvaziqattiq aylanishli (deformatsiyasiz) harakatlarga ajratgan bo‘lamiz:

$$V_{ij}^{s}=\begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial z}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial z}\right) & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix},$$

$$V_{ij}^{A}=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}-\frac{\partial u_y}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z}-\frac{\partial u_z}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}-\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial z}-\frac{\partial u_z}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial x}-\frac{\partial u_x}{\partial z}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y}-\frac{\partial u_y}{\partial z}\right) & 0 \end{pmatrix}.$$

Gelmgoltsning birinchi teoremasi quyidagicha talqin qilinadi: *suyuqlik elementar hajmining ixtiyoriy harakatini qaralayotgan vaqt momentida ikkita harakat: a) kvaziqattiq, yani tanlangan qutb bilan ilgarilanma va qutb atrovidagi aylanma harakatlardan tashkil topgan, va b) deformatsion harakatlar natijasining yig‘indisi deb qarash mumkin.*

Namunaviy masalalar va ularning yechimlari

1-masala: Suyuqlikning oqimidagi tezliklar yassi maydoni $\vec{u}=\left(u_x,u_y\right)=(x-1,\ t+1)$ uchun quyidagilarni aniqlang: *a*) oqimning $t=0$ vaqt momentida *A*(1;1) nuqtadan o‘tuvchi oqim chiziqlarini va traektoriylarini hamda tezlanishlar maydonini toping; *b*) deformatsiyalar tezliklari tenzorini toping. *c*) tezliklar maydoni uyurmalimi?

Yechish: *a*) Berilganlarga ko‘ra

$$u_x=\frac{dx}{dt}=x-1\,,\ \ u_y=\frac{dy}{dt}=t+1$$

ekanligidan bu differensial tenglamalar sistemasining umumiy yechimi

$$x=C_1e^t+1\ ,\ \ y=\frac{t^2}{2}+t+C_2\,,$$

kabi, bu yerda C_1, C_2 - integrallash o‘zgarmaslari bo‘lib, oqim chizig‘ining *A*(1,1) nuqtadan o‘tish shartidan topiladi:

$$C_1=0\,,\ C_2=1.$$

Shunga ko‘ra izlanayotgan yechim

$$x = 1\ ,\quad y = \frac{t^2}{2} + t + 1$$

ekanligi kelib chiqadi. Bu yechim suyuqlik zarrachalarining harakat trayektoriyasi tenglamalaridir.

Tekshirilayotgan oqim tekis va nostatsionar, chunki parametrlar t vaqtdan bog‘liq. Shuning uchun traektoriyalar va oqim chiziqlari mos tushmaydi. Oqim chiziqlarining (3.8) differensial tenglamasi quyidagicha:

$$\frac{dx}{x-1} = \frac{dy}{t+1}\ .$$

Bu tenglamani integrallab va bunda t vaqt fiksirlangan ekanligidan

$$(1-x)(1+t)=C,$$

yani oqim chiziqlari har bir vaqt momentida giperbolalar oilasidan iborat.

t=0 vaqt momentida A(1,1) nuqtadan o‘tuvchi oqim chizig‘i tenglamasi: x=1.

Muhitning tezlanishlar maydonini topish uchun ushbu

$$a_x = \frac{du_x}{dt} = \frac{d(x-1)}{dt} = \frac{dx}{dt} = u_x = x-1,\quad a_y = \frac{du_y}{dt} = \frac{d(t+1)}{dt} = 1$$

hisoblashlarni bajarib, tezlanish uchun ushbu $\vec{a} = (x-1,\,1)$ natijaga kelamiz.

b) Deformatsiyalar tezliklari tenzorining komponentalarini hisoblash formulalari

$$\dot{\varepsilon}_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}\ ;\quad \dot{\varepsilon}_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}\ ;\ \dot{\gamma}_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}\right)$$

kabi ekanligidan ushbu

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = 1;\quad \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0;\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}\right) = 0$$

hisob natijalari topiladi. Shularga ko‘ra deformatsiyalar tezliklari tenzorining quyidagicha ekanliqi kelib chiqadi.

$$T_{\dot{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

c) Harakatning uyurmali yoki potensial ekanligini bilishimiz uchun $\operatorname{rot}\vec{u}$ ning qiymatini tekshiramiz. Harakat tekis bo‘lganligi uchun $\omega_x = 0$ va $\omega_y = 0$ ekanligidan:

$$\operatorname{rot}\vec{u} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\vec{k} = 0-0 = 0\ ,$$

demak harakat potensial (uyurmasiz) ekan. Harakat potensial bo‘lganligi uchun oqim chiziqlari harakat traektoriyasi bilan ustma-ust tushadi.

Topshiriqlar

Harakat tezlikning tashkil etuvchilari tenglamalari bilan quyidagicha berilgan:

1) $u_x = -4y$, $u_y = -4x$, $u_z = 0$;

2) $u_x = x + y + t$, $u_y = x - y - t$, $u_z = 0$;

3) $u_x = -x$, $u_y = -y$, $u_z = x + y$;

4) $u_x = x - y + t$, $u_y = y - x + t$, $u_z = x + y + z + t$.

5) $u_x = x - 4y$, $u_y = -4x - y$, $u_z = 0$.

Tezlikning bu tashkil etuvchilari uchun deformatsiya tezliklari tenzorini tuzing. Tezlik vektorining rotorini, uning yo‘nalishini va burchak tezlik vektorini toping.

Sinov savollari

1. Suyuqlik zarrachasi harakati turlarini tushuntiring.
2. Burchak deformatsiya nima?
3. Chiziqli deformatsiyalarni tushuntiring.
4. Burchak tezlik vektorini tushuntiring.

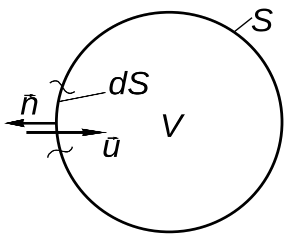
3.3. Uzviylik tenglamasi

Uzviylik tenglamasi tabiatning suyuq muhitga qo‘llaniladigan fundamental qonunlaridan birini - massaning saqlanish qonunini ifodalaydi.

Uzviylik tenglamasini chiqarishda, xuddi suyuqlik harakati dinamikasini ifodalovchi differensial tenglama kabi, har xil, qo‘zg‘almas yoki suyuqlik bilan birgalikda harakat qiluvchi koordinatalar sistemalaridan foydalanish mumkin. Bu ikkala koordinat qoidalari mos ravishda Eyler va Lagranj usullaridir. Tenglamani chiqarishda kichik (differensial) yoki makroskopik (integral) kuzatuv hajmini tanlash mumkin. Biz quyida Eyler va Lagranj differensial usullarini o‘quvchiga amaliyot mashqlarida mustaqil o‘rganish uchun havola qilgan holda *Eylerning integral usuli* bilan uzviylik tenglamasini chiqaramiz.

S sirt bilan chegaralangan *V* hajmni qaraylik (3.14-rasm). *S* sirtning *dS* elementini ajratamiz. Faraz qilaylik, $\vec{n}$ - tashqi normalning birlik vektori, $\vec{u}$ - tezlik vektori bo‘lsin.

Ajratib olingan *dS* element orqali vaqt birligi ichida hajm ichiga $-\rho\vec{u}\cdot\vec{n}dS$ miqdordagi suyuqlik massasi oqib kiradi, bunda manfiy ishora $\vec{n}$ va $\vec{u}$ vektorlarning qarama-qarshi yo‘nalganligidan olingan. Butun yopiq sirt bo‘ylab hajmga kirib kelgan sekundlik massa miqdori quydagiga



3.14-rasm. Suyuqlik zarrachasining sxematik tasviri.

teng: $-\iint\limits_S \rho\vec{u}\cdot\vec{n}dS$. Boshqa tarafdan esa, hajmga oqib kirgan suyuqlik uning massasini o‘zgartiradi. Bunda ajratib olingan hajm o‘zgarmas, u holda massaning o‘zgarishi faqatgina zichlikning o‘zgarishi hisobigagina sodir bo‘ladi. Massaning o‘zgarish tezligini quyidagicha ifodalaymiz: $\frac{\partial}{\partial t}\iiint\limits_V \rho dV$ yoki $V=\text{const}$ ekanligini e’tiborga olsak, $\iiint\limits_V \frac{\partial\rho}{\partial t}dV$.

Ma’lumki, hajm ichidagi massaning o‘zgarishi unga tashqaridan kirgan massaga teng bo‘lishi kerak, ya’ni

$$\iiint\limits_V \frac{\partial\rho}{\partial t} = -\iint\limits_S \rho\vec{u}\cdot\vec{n}dS .$$

Gauss-Ostrogradskiy almashtirishini qo‘llab, sirt bo‘yicha olingan integralni hajm bo‘yicha olingan integralga almastirsak, ushbu

$$\iiint\limits_V \frac{\partial\rho}{\partial t} = -\iiint\limits_V \text{div}(\rho\vec{u})dV \quad \text{yoki} \quad \iiint\limits_V \left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + \text{div}(\rho\vec{u})\right]dV = 0$$

tenglikka ega bo‘lamiz. Bu integralning nolga tengligi faqatgina ushbu

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \text{div}(\rho\vec{u}) = 0 \quad \text{yoki} \quad \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla(\rho\vec{u}) = 0 \tag{3.28}$$

tenglik bajarilgandagina o‘rinli bo‘ladi. Bu tenglama *uzviylik tenglamasi* deb ataladi. Bu tenglamani chiqarishda hech bir cheklanishlar olinmadi, shuning uchun u siqiluvchan va siqilmaydigan suyuqliklarning statsionar va nostatsionar harakati uchun o‘rinli. (3.28) tenglama suyuqliklar mexanikasining fundamental tenglamalaridan biri hisoblanadi. Shunday qilib, massaning saqlanish qonuniga ko‘ra biror V hajmdagi massaning o‘zgarish tezligi shu V hajmni o‘rab turuvchi S sirtni kesib o‘tuvchi massa oqimiga teng bo‘lishi kerak ekan.

Oxirgi tenglamada $\text{div}(\rho\vec{u})$ ifodani ochib chiqsak, uzviylik tenglamasini quyidagicha ham yozish mumkin:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho\,\text{div}\,\vec{u} + \vec{u}\,\text{grad}\,\rho = 0 . \tag{3.29}$$

Suyuqlik oqimining tezliklari zichligi deb $\vec{j} = \rho\vec{u}$ vektorga aytiladi. Bu vektorning yo‘nalishi suyuqlik harakatining yo‘nalishi bilan mos tushadi, uning absolyit qiymati tezlik vektorika perpendikulyar joylashgan yuza birligi orqali vaqt birligida oqib o‘tadigan suyuqlik miqdorini anglatadi.

Yuqoridagi (3.28) tenglamani Lagranj nuqtai nazaridan yozamiz. Bunda harakatdagi sistema bilan bog‘langan koordinatalar sistemasida vaqt bo‘yicha olingan hosila

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u}\nabla$$

ekanligini e’tiborga olsak, uzviylik tenglamasi quyidagicha yoziladi :

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\,\mathrm{div}\,\vec{u} = 0 \quad \text{yoki} \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho\nabla\vec{u} = 0. \tag{3.30}$$

Uzviylik differensial tenglamasini chiqarishda alohida olingan suyuqlik zarrachalarining harakati qaraladi. Bunday tadqiqot usulini gidrodinamikaga Lagranj kiritgan. Birinchi bo‘lib Eyler tomonidan kiritilgan boshqa tadqiqot usulida esa alohida zarrachalarning holati emas, balki fazodagi fiksirlangan nuqtada suyuqlik parametrlarining vaqt bo‘yicha o‘zgarishi qaraladi. Eyler usuli ko‘p hollarda Lagranj usuliga ko‘ra qulayroq, ayniqsa gidrodinamika va gazlar dinamikasida undan ko‘proq foydalaniladi.

Ba’zi xususiy hollarni qaraylik:

- statsionar harakatda vaqt bo‘yicha barcha hosilalar nolga teng, bu shu tushunchaning ta’rifidan kelib chiqadi. Shunga ko‘ra

$$\mathrm{div}\left(\rho\vec{u}\right) = 0. \tag{3.31}$$

- agar harakat statsionar va suyuqlik siqilmaydigan, ya’ni $\rho = \mathrm{const}$ bo‘lsa, u holda

$$\mathrm{div}\,\vec{u} = 0. \tag{3.32}$$

Yuqoridagi (3.32) tenglamani dekart koordinata o‘qlaridagi proeksiyalarda yozsak (divergensiya formulasiga qarang),

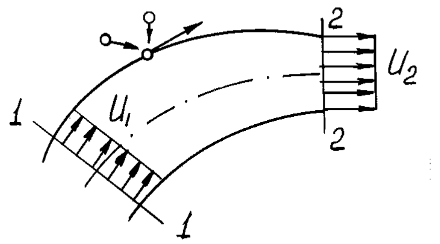
$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0. \tag{3.33}$$

Bu munosabatning mexanik ma’nosini beraylik. Ushbu $\frac{\partial u_x}{\partial x}$, $\frac{\partial u_y}{\partial y}$, $\frac{\partial u_z}{\partial z}$ xususiy hosilalar suyuqlik zarrachasining nisbiy cho‘zilish (siqilish) tezligini ifodalaydi. Agar bu jarayon barcha koordinat o‘qlari bo‘ylab bir vaqtda sodir bo‘lsa, u holda suyuqlik zarrachasining hajmiy kengayishi yoki siqilishiga olib keladi. Ma’lumki, agar suyuqlik zarrachasi x va y o‘qlar bo‘ylab cho‘zilsa, u holda u albatta z o‘qi bo‘ylab siqiladi. Boshqacha aytganda, (3.33) tenglamaga kirgan hosilalardan hech bo‘lmaganda bittasi manfiy bo‘lishi lozim, chunki boshqa holda bu munosabat nolga teng bo‘lmaydi.

Agar qaralayotgan maydonda $\mathrm{div}\,\vec{u}=0$ bo‘lsa, u holda u *solenoidal maydon* deb ataladi.

Oqimning sharrachali modeli. Oqimning sharrachali modeli L.Eyler tomonidan kiritilgan. Bu modelning asosini sharracha (yoki elementar sharracha) haqidagi tushuncha tashkil qiladiki, bunda oqim naychasining ichidan oqayotgan suyuqlik tushuniladi. Avval ta’kidlagan edikki, oqim naychasining yon sirti chegarasi oqim chiziqlaridan iborat, ya’ni zarrachalar tezliklari vektori urinma bo‘lgan chiziqlar shu naychada yotadi, u holda hech bir zarracha tashqaridan sharracha ichiga shu sirt orqali kirmaydi va aksincha, hech biri tashqariga undan chiqmaydi. Haqiqatan ham, agar, masalan, tashqaridan sharracha ichiga kirmoqchi bo‘lgan zarrachalarning tezlik vektori uning chegarasiga qandaydir burchak ostida yo‘nalgan bo‘lishi kerak, chegaraning o‘zida, ya’ni oqim chizig‘ida u urinma yo‘nalishida bo‘lishi kerak (3.15-rasm).

Aytilganlardan shunday xulosa chiqadiki, sharracha o‘zini hech narsa o‘tkazmaydigan devorli naycha kabi tutadi.



3.15-rasm. Elementar sharrachadagi oqimning sxematik tasviri.

Sharrachaning ko‘ndalang kesimi kichik, shuning uchun shu kesim yuzasidagi barcha zarrachalar bir xil tezlik bilan harakatlanadi. Demak, kesimdagi tezliklar epyurasi uch o‘lchovli hol uchun silindr shaklida, ikki o‘lchovli (tekis) hol uchun esa to‘g‘ri to‘rtburchak shaklida ifodalanadi.

3.15-rasmda tekis sharrachaning ixtiyoriy tanlangan ikkita kesimi uchun epyuralar ko‘rsatilgan.

Ta’kidlaymizki, tezliklarning kesimda tekis taqsimlanganligi, ya’ni undagi zarrachalarning bir xil tezlik bilan harakatlanayotganligi boshqa kesimlarda ham xuddi shunday tezliklar ekanligini bildirmaydi, ya’ni $u_1=u_2$ bo‘lishi shart emas (3.15-rasm).

Chekli o‘lchovli kanalning ko‘ndalang kesimini to‘ldiruvchi sharrachalar to‘plami oqimni tashkil etadi. Misol uchun, qamishni sharracha desak, ularning bir bog‘i oqim bo‘ladi.

Sharracha uchun uzviylik tenglamasi. Sharrachaning birinchi xossasi shuni bildiradiki, yon sirti zarrachalarni o‘zkazmaydi, bu o‘z navbatida sekundlik massaning saqlanish qonunini ifodalaydi. Haqiqatan ham, agar *1-1* kesim orqali birlik vaqt ichida dm_1 massa kirgan bo‘lsa, u holda shu vaqt birligi ichida *2-2* kesimdan dm_1 ga teng bo‘lgan dm_2 massa chiqib ketadi (3.15-rasm). Vaqt birligi ichida sharracha ko‘ndalang kesimidan oqib o‘tayotgan suyuqlik massasi elementar massa sarfi deb ataladi va dQ_m kabi belgilanadi.

Osongina ishonch hosil qilish mumkinki, $dQ_m = \rho u dA$, bunda dA – sharracha ko‘ndalang kesimi yuzasi. Haqiqatan ham, bu munosabatga kiruvchi barcha parametrlarni fizik miqdorlarning birliklari orqali ifodalaylik: $\frac{kg}{m^3}\frac{m}{s}m^2 \to \frac{kg}{s}$.

Yuqorida aytilganlardan kelib chiqadiki,

$$\rho_1 u_1 dA_1 = \rho_2 u_2 dA_2 . \tag{3.34}$$

Bu tenglama *sharracha uchun uzviylik tenglamasi* deb ataladi. Agar suyuqlik siqilmaydigan bo‘lsa, ya’ni $\rho = const$, u holda $\rho_1 = \rho_2$ va udA ko‘paytma elementar hajmiy sarfni (dQ) ifodalaydi, ya’ni:

$$u_1 dA_1 = u_2 dA_2 . \tag{3.35}$$

Namunaviy masalalar va ularning yechimlari

1-masala. Tekis (yassi) siqilmaydigan oqimda tezlikning tashkil etuvchilari $u_x = x - 4y$, $u_y = -y - 4x$ tenglamalar bilan berilgan. Tezlikning bu tashkil etuvchilari uzviylik tenglamasini qanoatlantiradimi?

Yechish: Masala shartiga ko‘ra siqilmaydigan suyuqlik uchun uzviylik tenglamasi $\mathrm{div}\vec{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0$ ko‘rinishda bo‘lganligi uchun berilgashlardan $\frac{\partial u_x}{\partial x} = 1$; $\frac{\partial u_y}{\partial y} = -1$ ekanligini topamiz. Bulardan foydalanib $\mathrm{div}\vec{u} = 1 - 1 = 0$ tenglikka ega bo‘lamiz. Demak, masala shartida berilgan yassi siqilmaydigan oqimdagi tezlik vektorining tashkil etuvchilari uzviylik tenglamasini qanoatlantiradi.

2-masala: Suyuqlikning oqimidagi tezliklar yassi maydoni $\vec{u} = \left(u_x, u_y\right) = (x - 1,\ t + 1)$ uchun uzviylik tenglamasini tekshiring.

Yechish: Deformatsiyalar tezliklari tenzorining komponentalarini hisoblash formulalari

$$\dot{\varepsilon}_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}; \quad \dot{\varepsilon}_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}; \quad \dot{\gamma}_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}\right)$$

ekanligidan

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = 1; \quad \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0; \quad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}\right) = 0$$

kabi hisob natijalari topiladi.

Endi suyuqlikning siqiluvchanligini tekshirish uchun $\mathrm{div}\vec{u}$ ning qiymatini tekshiramiz:

$$\mathrm{div}\vec{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 1 - 0 = 1 \neq 0 \ ,$$

demak tekshirilayotgan muhit siqiluvchan ekan.

3-masala. Eylerning differensial usulidan foydalanib, Dekart koordinatalari sistemasida uzviylik tenglamasini chiqaring.

Yechish: To‘g‘ri burchakli koordinatalar sistemasida dastlabki shakli tomonlarining uzunliklari *dx*, *dy*, *dz* bo‘lgan to‘g‘ri burchakli parallelopiped shaklidagi suyuqlik zarrachasini qaraylik (3.8-rasm). Deformatsiyalanuvchi qattiq jismdan farqli, suyuqlik zarrachasi harakati davomida kuchli deformatsiyalanishi mumkin. Vaqt o‘tishi bilan bu zarrachaning yoqlari qiyshayishi (3.9-rasm) va cho‘zilishi (3.11-rasm) mumkin.

Avvalo, *ABCD* yoqini qaraylik (3.8-rasm). Shu yoq orqali hajm elementi ichiga yo‘nalgan suyuqlik massasi sarfi shu yoq yuzasi *dxdy* bilan zichlikning o‘rtacha qiymati va *Oz* o‘q bo‘ylab yo‘nalgan tezlik ko‘paytmasiga teng: $\rho u_z dxdy$. Massaning o‘rtacha oqishi shu yoqning markazidagi qiymat bo‘yicha hisoblanadi:

$$\rho u_z - \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z}\frac{dz}{2} \ .$$

Shuning uchun *ABCD* yoq orqali hajm elementi ichiga massaning kelish tezligi quyidagiga teng:

$$\left(\rho u_z - \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z}\frac{dz}{2}\right)dxdy \, .$$

EFGH yoq orqali massaning chiqish tezligi esa

$$\left(\rho u_z + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z}\frac{dz}{2}\right)dxdy \, .$$

Xuddi shunday, *ABCD* va *EFGH* yoqlar orqali massaning kelishini hamda CDEH va CBGH yoqlar orqali massaning chiqishi uchun mos ifodalarni yozish mumkin.

Hajm elementi ichida massaning o‘zgarish tezligi quyidagiga teng:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho dxdydz) = \frac{\partial \rho}{\partial t} dxdydz \, .$$

Massaning saqlanish qonunini qo‘llab, ya’ni massalar kelish tezligining yig‘indisidan massalar ketish tezligi yig‘indisining ayirmasi massaning o‘zgarish tezligiga teng:

$$\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

yoki vektor shaklida yozsak,

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla(\rho\vec{u})=0\ .$$

Bu tenglama *suyuqlik va gaz mexanikasining uzviylik tenglamasi* deyiladi.

4-masala. Lagranjning differensial usulidan foydalanib, Dekart koordinatalari sistemasida uzviylik tenglamasini chiqaring.

Yechish: Suyuqlik zarrachasi massasining o‘zgarmaslik sharti quyidagicha yozilishi mumkin:

$$M=\rho V=const\ .$$

Bu yerda suyuqlik zichligi ρ deb zarracha ΔM massasining uning ΔV hajmiga limit nisbatini tushunamiz :

$$\rho=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Delta M}{\Delta V}=\frac{dM}{dV}\,.$$

Bu yerda ΔV hajmning nolga intilishi deganda uning biror ichki nuqtasigacha siqilib borishi tushuniladi.

$M=\rho V=const$ tenglamaning ikkala tarafini ham vaqt bo‘yicha differensiallab va natijani M miqdorga bo‘lib, ushbu

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{d\,t}+\frac{1}{V}\frac{dV}{d\,t}=0$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu yerda

$$\frac{1}{V}\frac{dV}{d\,t}=\mathrm{div}\,\vec{u}=\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}$$

miqdor suyuqlik zarrachasi hajmining nisbiy o‘zgarish tezligi deyiladi. Shunga ko‘ra quyidagi uzviylik tenglamasiga kelamiz:

$$\frac{d\rho}{dt}+\rho\,\mathrm{div}\,\vec{u}=0$$

Suyuqlik zichligidan vaqt bo‘yicha to‘la differensial ifodasini xususiy hosilalar bilan almashtirib va $\mathrm{div}\,\vec{u}$ ning ifodasidan foydalanib, ushbu

$$-\rho\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)=\frac{\partial\rho}{\partial\,t}+u_x\frac{\partial\rho}{\partial x}+u_y\frac{\partial\rho}{\partial y}+u_z\frac{\partial\rho}{\partial z}$$

tenglamani olamiz. Differensiallash qoidasidan foydalanib, bu siqiluvchan muhit uchun uzviylik tenglamasini quyidagicha yozamiz:

$$\frac{\partial\rho}{\partial\,t}+\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z}=0$$

yoki bu tenglamani vektor shaklida yozsak,

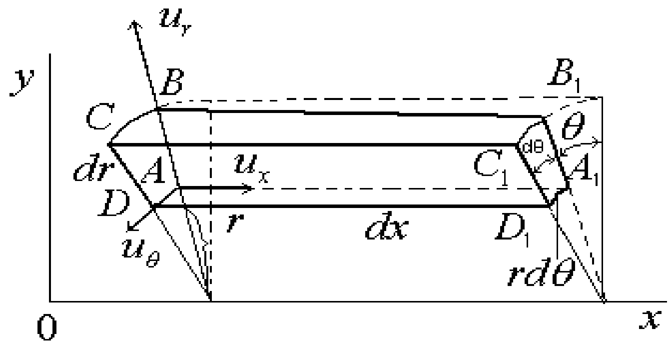
$$\frac{\partial\rho}{\partial\,t}+\mathrm{div}(\rho\vec{u})=0\,.$$

Uzviylikning bunday tenglamasini chiqarishda suyuqlikning alohida zarrachasi harakati qaraldi. Suyuqlik va gaz mexanikasida bunday izlanish usulini Lagranj kiritgan.

5-masala. Eyler usulidan foydalanib, silindrik koordinatalari sistemasida uzviylik tenglamasini chiqaring.

Yechish: Koordinatalari r, θ, z bo‘lgan ixtiyoriy A nuqta atrofida hajmi $rd\theta drdz$ ga teng fiksirlangan cheksiz kichik hajm ajratib olamiz (3.16-rasm).

Massaning saqlanish qonuniga ko‘ra biror vaqt oralig‘ida shu hajmdan chiqayotgan suyuqlik miqdori bilan unga kirayotgan suyuqlik miqdori orasidagi farq ajratib olingan hajm ichidagi massaning o‘zgarishiga teng.



3.16-rasm. Silindrik koordinatalar sistemasida uzviylik tenglamasini chiqarish uchun sxema.

Vaqt birligi ichida $ABCD$ yoq orqali elementar hajmga kirayotgan suyuqlik miqdori $\rho u_z rd\theta dr$ ga teng, qarama-qarshi $A_1B_1C_1D_1$ yoq orqali chiqayotgan suyuqlik miqdori esa

$$\rho u_z rdrd\theta + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u_z rdrd\theta)dz = \left[\rho u_z r + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u_z r)dz\right]drd\theta$$

ga teng. Bu miqdorlar orasidagi farq quyidagicha: $\frac{\partial}{\partial z}(\rho u_z r)dzdrd\theta$.

AA_1D_1D va BB_1C_1C yoqlar orqali Or o‘q yo‘nalishida oqayotgan suyuqlik miqdori mos ravishda $\rho u_r rd\theta$ va $\left[\rho u_r r + \frac{\partial}{\partial r}(\rho u_r r)dr\right]dzd\theta$ ga teng, ular orasidagi farq esa $\frac{\partial}{\partial r}(\rho u_r r)drdzd\theta$.

Xuddi shunday, ABB_1A_1 va DCC_1D_1 yoqlar orqali oqayotgan suyuqlik miqdori mos ravishda $\rho u_\theta dzdr$ va $\left[\rho u_\theta + \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho u_\theta)d\theta\right]dzdr$ ga teng, ular orasidagi farq esa $\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho u_\theta)d\theta dzdr$.

Olingan uchta ifodani yig‘ib, ajratib olingan hajmdagi suyuqlik massasining o‘zgarishi ifodasini hosil qilamiz:

$$\left\{\frac{\partial}{\partial z}(\rho u_z r)+\frac{\partial}{\partial r}(\rho u_r r)+\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho u_\theta)\right\} d\theta dr dz.$$

Ammo ajratilgan hajmdagi suyuqlikning vaqt birligi ichidagi massasi quyidagiga teng:

$$-\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right) r dz dr d\theta.$$

Oxirgi ikkita ifodalarni tenglashtirib, silindrik koordinatalari sistemasidagi uzviylik tenglamasini hosil qilamiz:

$$r\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial z}(\rho u_z r)+\frac{\partial}{\partial r}(\rho u_r r)+\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho u_\theta)=0.$$

Xususan, qutb koordinatalari sistemasida uzviylik tenglamasi quyidagicha yoziladi:

$$r\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial r}(\rho u_r r)+\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho u_\theta)=0.$$

Topshiriqlar

1. Harakat quyidagicha tezlikning tashkil etuvchilari tenglamalari bilan berilgan:

1) $u_x = -4y$, $u_y = -4x$, $u_z = 0$;

2) $u_x = x + y + t$, $u_y = x - y - t$, $u_z = 0$;

3) $u_x = -x$, $u_y = -y$, $u_z = 0$;

4) $u_x = x - y + t$, $u_y = y - x + t$, $u_z = 0$.

5) $u_x = x - 4y$, $u_y = -4x - y$, $u_z = 0$.

Tezlikning bu tashkil etuvchilari uzviylik tenglamasini qanoatlantiradimi?

2. Eyler usulidan foydalanib, sferik koordinatalari sistemasida quyidagi uzviylik tenglamasini chiqaring:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\rho u_r r^2\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho u_\theta \sin\theta)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\rho u_\phi\right)=0.$$

Sinov savollari

1. Uzviylik tenglamasi nima? Uzviylik tenglamasi uchun Eylerning va Lagranjning differrensial ta’riflarini hamda Eylerning integral ta’rifini bering. Solenoidal maydon nima?
2. Tutash muhit chekli hajmining asosiy fizik-mexanik xarakteristikalarini tushuntiring. Oqimning sharrachali modeli nima?
3. Sharracha uchun uzviylik tenglamasini tushuntiring.

3.4. Suyuqlikning uyurmali harakati

Uyurmali harakat tabiatda ham har xil turdagi texnik qurilmalarda ham keng tarqalgan. Shuning uchun uning qonuniyatlarini o‘rganish amaliy ahamiyatga ega. Suyuqlik zarrachasining aylanma harakati *tezlik uyurmasi* bilan xarakterlanadi:

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}\operatorname{rot}\vec{u}. \tag{3.36}$$

Bu shuni bildiradiki, fazoning har bir nuqtasida suyuqlik zarrachasining aylanishi shu vektor bilan ifodalanishi mumkin. Bu $\vec{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ vektorning moduli quyidagiga teng:

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} \tag{3.37}$$

$\vec{\Omega} = \operatorname{rot}\vec{u} = 2\vec{\omega}$ vektor o‘zining berilish nuqtasida *suyuqlik oqimining uyurmalanishi* deyiladi. $\operatorname{rot}\vec{u} \neq 0$ shartda harakat *uyurmali harakat* deb, $\operatorname{rot}\vec{u} = 0$ shartda esa *harakat uyurmasiz* yoki *potensial harakat* deb ataladi.

Uyurmali harakat kinematikasi. Uyurmali harakat uchun kinematika tushunchalarini kinematikaning umumiy tushunchalaridan foydalanib chiqarish mumkin. Uyurmali harakat kinematikasining asosini tashkil qiluvchi uyurma chiziqlari tushunchasi xuddi oqim chiziqlari tushunchalari kabi kiritiladi.

Chiziq uyurma chizig‘i deb ataladi, agar vaqtning har bir momentida tezlik uyurmasi vektorining yo‘nalishi har bir nuqtaga o‘tkazilgan urinma bilan mos tushsa (3.17-rasm).

Boshqacha aytganda, *uyurma chizig‘i* – bu suyuqlik zarrachalarining aylanish oniy o‘qi bo‘lib, ayni paytda zarracha shu o‘q ustida turgan bo‘ladi. Uyurma chizig‘ining differensial tenglamasi oqim chizig‘ining differensial tenglamasi kabi yoziladi:

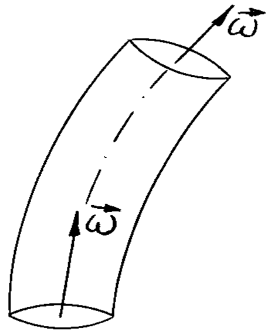
$$\frac{dx}{\omega_x} = \frac{dy}{\omega_y} = \frac{dz}{\omega_z}. \tag{3.38}$$

Bu tenglama $d\vec{r}$ - uyurma chizig‘i elementi va $\vec{\Omega}$ vektorlarning kolleniarlik shartidan kelib chiqadi.

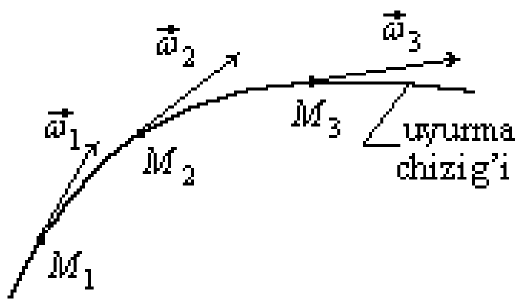
Uyurma sirti cheksiz kichik yopiq konturning barcha nuqtalari orqali o‘tkazilgan uyurma chiziqlaridan tuzilgan.

Uyurma naychasi – bu yopiq kontur orqali o‘tuvchi uyurma sirti bilan chegaralangan va suyuqlik bilan to‘ldirilgan fazo bo‘lagi.

Uyurma chizig‘i va uyurma naychasi oqim chizig‘i va oqim naychasiga (oqim sirtiga) o‘xshash.



a)



b)

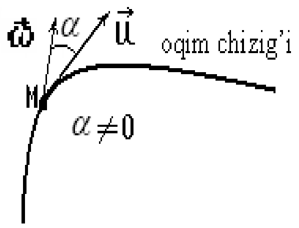
3.17-rasm. Uyurma naychasi (*a*) va uyurma chizig‘i (*b*) ning sxematik tasviri.

Uyurma ipi – bu, xuddi sharracha kabi, kichik (yoki cheksiz kichik) konturli yurma naychasiga o‘ralgan suyuqlikdir. Agar uyurma naychasi chekli o‘lchamlarga ega bo‘lsa, u holda uni to‘ldirib turgan va aylanma harakatda bo‘lgan suyuqlik zarrachalari to‘plami *uyurma shnuri* deb ataladi. Uyurma shnuri haqidagi tushuncha elementar sharracha haqidagi tushunchaga mos keladi.

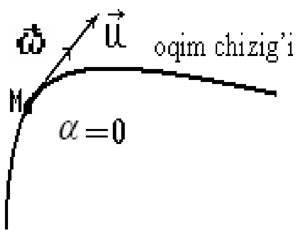
Shunday qilib, harakatning eng muhim ikki ko‘rinishi mavjud: *uyurmali harakat va potensial harakat*. Ularning har biri ham statsionar va ham nostatsionar bo‘lishlari mumkin.

Harakat uyurmali bo‘lishi uchun $\vec{\omega} \neq 0$, ya’ni uyurma vektorining hech bo‘lmaganda bitta komponentasi noldan farqli bo‘lishi kerak (3.18,*a*-rasm).

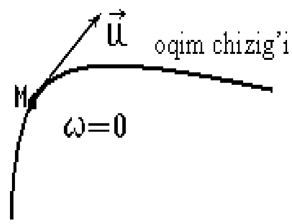
Vintli harakat deb $\vec{\omega}$ burchak tezlik vektorining $\vec{u}$ ilgarilanma tezlik vektori yo‘nalishi bilan mos tushgan holga aytiladi (3.18,*b*-rasm). ω=0, yani $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$ bo‘lgan holda harakat *potensial harakat* deyiladi (3.18,*c*-rasm).



a)



b)



c)

3.18-rasm. Harakat turlari uchun sxema: *a*) uyurmali harakatning umumiy holi; *b*) vintli harakat; *c*) potensial harakat.

Uyurma intensivligi (kuchlanishi). Gelmgoltsning ikkinchi teoremasi. Uyurma intensivligi tushunchasi yetarlicha abstrakt tushuncha va sof matematik tushunchalar bilan kiritiladi. Eslatib o‘tamizki, *vektor maydonning oqimi* deb quyidagi integralga aytiladi:

$$\iint_A \vec{u}\cdot\vec{n}dA \tag{3.39}$$

Ma’lumki, uyurma tezligi (rotori) vektor, u holda $\vec{u}$ o‘rniga $\mathrm{rot}\vec{u}$ ni qo‘yish mumkin, bu o‘z navbatida bizni uyurma intensivligi tushunchasiga olib keladi, ya’ni *uyurma intensivligi* – bu uyurma vektorlari oqimidir:

$$i=\iint_A \mathrm{rot}\,\vec{u}\cdot\vec{n}dA. \tag{3.40}$$

Boshqacha yozuv shaklidan ham foydalanish mumkin:

$$\mathrm{rot}\,\vec{u}\cdot\vec{n}=\mathrm{rot}_n\,\vec{u},$$

bu yerda $\mathrm{rot}\,\vec{u}$ skalyar miqdor bo‘lib, $\mathrm{rot}\,\vec{u}$ vektorining $\vec{n}$ vektor yo‘nalishiga proyeksiyalari yig‘indisidan iborat. U holda

$$i=\iint_A \mathrm{rot}_n\,\vec{u}dA. \tag{3.41}$$

Bu yerda $2\vec{\omega}=\mathrm{rot}\,\vec{u}$ ekanligini e’tiborga olsak,

$$i=2\iint_A \vec{\omega}\cdot\vec{n}dA=2\iint_A \omega_n dA. \tag{3.42}$$

Bunda Gauss-Ostrogradskiy formulasidan foydalanib, sirt integralidan hajm integraliga o‘tsak,

$$i=2\iint_A \omega_n dA=2\iiint_V \mathrm{div}\,\vec{\omega}dV=2\iiint_V\left(\frac{\partial\omega_x}{\partial x}+\frac{\partial\omega_y}{\partial y}+\frac{\partial\omega_z}{\partial z}\right)dV.$$

Uyurma vektorining komponentalarini ushbu

$$\omega_x=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y}-\frac{\partial u_y}{\partial z}\right);\ \omega_y=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z}-\frac{\partial u_z}{\partial x}\right);\ \omega_z=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}-\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)$$

ifodalardan topish mumkinligini e’tiborga olib, oxirgi tenglikdagi integral ostidagi ifodani ochib chiqamiz:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial y\partial x}-\frac{\partial^2 u_y}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial z\partial y}-\frac{\partial^2 u_z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u_y}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2 u_x}{\partial y\partial z}\right)=0.$$

Natijada quyidagiga kelamiz:

$$\iint_A \omega_n dA=0. \tag{3.43}$$

Bu tenglik ixtiyoriy yopiq sirt uchun elementar yuza orqali o‘tayotgan $\vec{\omega}$ vektor oqimlari (sarflar) yig‘indisi nolga teng ekanligini bildiradi. Ta’kidlaymizki, bu tenglama tuzilishiga ko‘ra uzviylik tenglamasini eslatadi.

Ushbu (3.43) tenlamaga uyurma shnurini qo‘llaymiz (3.17-rasm).

Yon sirtda $\omega_n \equiv 0$ tenglik o‘rinli, chunki $\vec{\omega}$ vektor sirtga o‘tkazilgan urinma bo‘ylab yo‘nalgan. Shuning uchun quyidagilarni yozamiz:

$$-\iint_{A_1} \omega_{n1} dA_1 + \iint_{A_2} \omega_{n2} dA_2 = 0; \qquad \iint_{A_1} \omega_{n1} dA_1 = \iint_{A_2} \omega_{n2} dA_2,$$

bu yerda A_1 , A_2 - uyurma naychasi bo‘lagi chetlarining kesimlari yuzasi; ω_{n1} , ω_{n2} – shu kesimlardagi mos uyurmalar miqdori.

Agar kesim doirasida $\omega_n = \text{const}$ deb faraz qilinsa, u holda

$$\omega_{n1} A_1 = \omega_{n2} A_2. \tag{3.44}$$

Uyurma kuchlanishi deb ushbu

$$j = \omega A$$

ko‘paytmaga aytiladi, bunda ω - uyurma (vektor) kattaligi; A – uyurma naychasining ko‘ndalang kesim yuzasi. Bu tushuncha

$$dQ = \vec{u} S$$

elementar sarf tushunchasi bilan yaqin, bunda sarf tenglamasi $\vec{u}$ vektorning oqim naychasi ko‘ndalang kesimi yuzasi S ga ko‘paytmasi bilan ifodalangan.

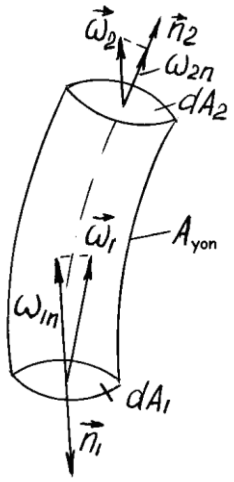
Umumiy holda

$$j = \omega A = \text{const}, \tag{3.45}$$

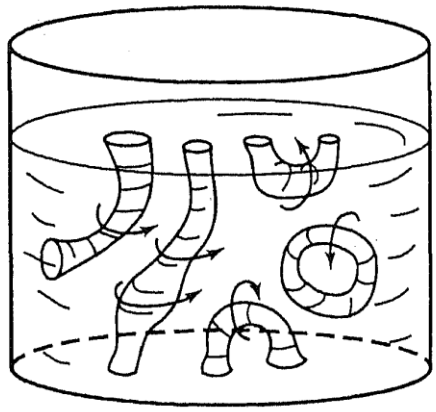
ya’ni bu o‘ziga xos «uzviylik tenglamasi». Olingan natija *uyurma kuchlanishi haqidagi Gelmgolts ikkinchi teoremasi* (yoki *uyurma intensivligining o‘zgarmasligi haqidagi teorema*) deb ataladi va u quyidagicha talqin qilinadi: uyurma shnurining intensivligi yoki uyurma kuchlanishi barcha uyurma naychalari bo‘ylab o‘zgarmas bo‘lib qoladi. Yuqoridagi (3.45) ifodadan, G. Gelmgolts tomonidan 1855 yilda kiritilgan, boshqa bir muhim xulosa kelib chiqadi: ωA ko‘paytma o‘zgarmas bo‘lib qolayotganligi uchun shnur kesimi yuzasining kamayishi suyuqlik zarrachasi aylanishi burchak tezligining oshishiga olib kelmog‘i lozim. Aynan $A = 0$, $\omega = \infty$ bo‘lishi umuman mumkin emas. Demak, uyurma suyuqlikdan qalinroq bo‘lib paydo bo‘lishi yoki tugashi mumkin emas (3.19-rasm).

Gelmgolts ikkinchi teoremasining natijasi: uyurma naychasi qattiq chegaraga yoki erkin sirtga borib taqaladi yoki uyurma halqasini tashkil qiladi (3.20-rasm).

Uyurma intensivligi tushunchasini kiritish, albatta, juda muhim ahamiyatga ega, ammo bu miqdorni to‘g‘ridan to‘g‘ri eksperimentlar yordamida aniqlash ma’lum bir qiyinchiliklarni tug‘diradi. Bundan tash-qari, agar bu tushunchani chekli o‘lchamli uyurmalarga tadbiq qilsak, u holda xuddi o‘rtacha tezlik kabi o‘rtacha burchak tezlik tushunchasini ham kiritish lozim bo‘ladi va bu sof matematik xarakterdagi qiyinchiliklarga olib keladi. Shuning uchun, amaliyotda undanda qulayroq bo‘lgan boshqa bir usul qo‘llaniladi. Bu tushuncha tezlik sirkulyatsiyasi deb ataladi.



3.19-rasm. Uyurma sirti va uyurma intensivligining o‘zgarmasligi haqidagi teorema isboti uchun sxema.

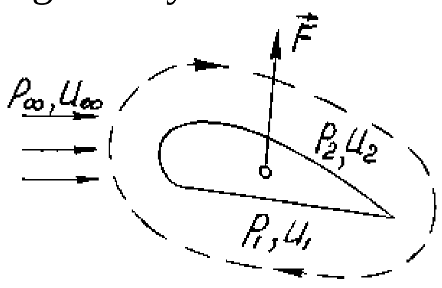


3.20-rasm. Suyuqlikda yurma naychalari sxemasi.

Tezlik sirkulyatsiyasi. Tezlik sirkulyatsiyasi tushunchasini sof matematik iboralarda emas, balki soddaroq va tushunarli fizik iboralar yordamida bayon qilish foydali. Gaz (havo) oqimida turgan qanot profilini qaraylik. Ma’lumki, bunday holda qanotga uni ko‘taruvchi kuch ta’sir qiladi (3.21-rasm). Bu kuchning fizik jihatdan mavjudligini quyidagicha asoslash mumkin: profil ostidagi p_1 bosim eng katta, profil ustidagi p_2 bosim esa undan biror masofa uzoqlikdagi p_∞ bosimdan kichik bo‘ladi. Bu shuni tasdiqlaydiki, qanot profili ostida $u_1 < u_\infty$, uning ustida esa $u_2 > u_\infty$, bunda u_∞ - qo‘zgalmagan oqimdagi tezlik.

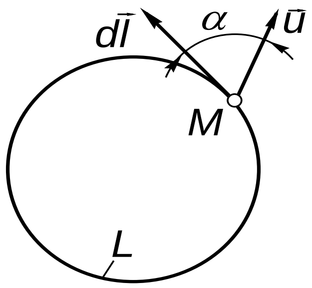
Endi u_1 va u_2 tezliklardan u_∞ ni ayirib tashlaylik, ya’ni $u_1 - u_\infty$ va $u_2 - u_\infty$. Bu amallar qo‘zg‘alish oqimi, ya’ni ichiga boshqa bir jinsli jism kiritilgan oqim harakati tushunchasiga olib keladi, yana boshqacha aytganda, bu ichiga qanot profili kiritilgan oqimning reaksiyasidir.

Endi qo‘zg‘alish oqimlari yo‘nalishini aniqlaylik. Profil ostida $u_1 < u_\infty$ va u u_∞ tezlikka qarama-qarshi yo‘nalgan, profil ustida esa aksincha. Natijada, 3.21-rasmda tasvirlangandek, soat strelkasi yo‘nalishidagi sirkulyatsion oqim paydo bo‘ladi. Bu oqimni miqdor jihatidan ifodalaylik. Shu maqsadda yopiq kontur bo‘ylab tezlik sirkulyatsiyasi tushunchasi kiritiladi.



3.21-rasm. Gaz oqimidagi qanotli profil.

Biror yopiq L konturni qaraylik (3.22-rasm). Faraz qilaylik, uning ixtiyoriy M nuqtasida tezlik $\vec{u}$ bo‘lsin.Ushbu $\vec{u}\cdot d\vec{l}$ skalyar ko‘paytmani tuzaylik, bunda $d\vec{l}$ - konturning aylanib o‘tish tomoniga o‘tkazilgan urinma bo‘yicha yo‘nalgan va yoyning yo‘naltirilgan vektor elementi bo‘lib, uning son qiymati konturning elementar bo‘lagi uzunligiga teng.



3.22-rasm. Yopiq kontur nuqtasining tezligi.

Yopiq L kontur bo‘ylab olingan ushbu

$$\Gamma=\oint_L \vec{u}\cdot d\vec{l} \tag{3.46}$$

egri chiziqli integral shu kontur bo‘ylab *tezlik sirkulyatsiyasi* deb ataladi.

Yuqoridagi (3.46) munosabatning tuzilishiga e’tibor beraylik. Bu ishning ifodasiga o‘xshash qilib tuzilgan, shuning uchun ba’zida sirkulyatsiya – bu tezlik vektori «ishi» deb ham ataladi. $\vec{u}(u_x,u_y,u_z)$ va $d\vec{l}(dx,dy,dz)$ larni e’tiborga olib, skalyar ko‘paytma qoidasidan foydalanib, quyidagiga ega bo‘lamiz:

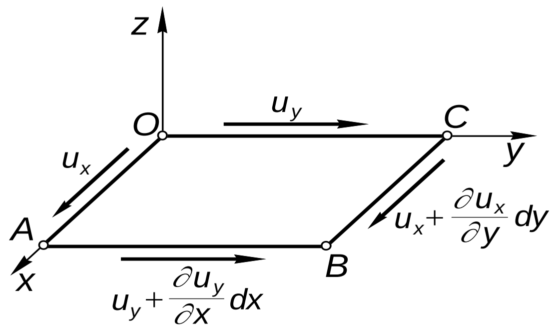
$$\Gamma=\oint_L (u_x dx+u_y dy+u_z dz). \tag{3.47}$$

Tekis oqim uchun:

$$\Gamma=\oint_L (u_x dx+u_y dy)\ . \tag{3.48}$$

Bundan avvalgi mavzu oxirida sirkulyatsiya tushunchasi uyurma intensivligi tushunchasiga qaraganda qulayroq deb aytgan edik. Haqiqatan ham, (3.47) dan ko‘rinadiki, sirkulyatsiyani topish uchun tezlik proeksiyasini topish yetarli. Ammo sirkulyatsiya va uyurma intensivligi o‘rtasida bog‘lanish ifodasi mavjudmi, degan savol tug‘iladi. Bu savolga quyidagi Stoks teoremasi javob beradi.

Stoks teoremasi. Harakatlanayotgan suyuqlikda uyurmali maydonni qaraylik va unda tomonlari dx va dy bo‘lgan kichkina yopiq kontur ajrataylik (3.23-rasm). Faraz qilaylik, koordinata boshida tezliklar u_x va u_y bo‘lsin. Bu kontur bo‘ylab elementar sirkulyatsiya uchun ifodani, uni ikki o‘lchovli oqimda deb, quyidagicha yozamiz:



3.23-rasm. Tekis yuzadagi elementar sirkulyatsiya uchun tezliklar maydonining sxematik tasviri.

$$d\Gamma = u_x dx + u_y dy.$$

OABC konturni qaraylik. Agar *OA* yo‘l bo‘ylab tezlik u_x bo‘lsa, u holda *CB* yo‘l boylab uning orttirmasi $\frac{\partial u_x}{\partial y}dy$ ga teng bo‘ladi. Xuddi shunday, *AB* yo‘l bo‘ylab u_y tezlik orttirmasi $\frac{\partial u_y}{\partial x}dx$ ga teng. Bu tezlikning to‘la differensiali ifodasidan kelib chiqadi, masalan,

$$du = \frac{\partial u_x}{\partial x}dx + \frac{\partial u_x}{\partial y}dy.$$

Endi yuqoridagilardan foydalanib, *OABCO* kontur bo‘ylab elementar sirkulyatsiya ifodasini yozamiz:

$$d\Gamma = u_x dx + \left(u_y + \frac{\partial u_y}{\partial x}dx\right)dy - \left(u_x + \frac{\partial u_x}{\partial y}dy\right)dx - u_y dy.$$

Bunda qavslarni ochib, mos qisqartirishlarni bajarib, quyidagini olamiz:

$$d\Gamma = \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right)dxdy = 2\omega_z dS,$$

bunda *S* – yopiq *L* kontur bilan o‘ralgan sirt yuzasi.

Bundan kelib chiqadiki, cheksiz kichik yopiq kontur bo‘ylab sirkulyatsiya shu konturdan oqib kirgan uyurma intensivligiga teng.

Bu xulosani ixtiyoriy chekli o‘lchamli egri chiziq uchun umumlashtirish mumkin.

Shunday qilib,

$$\Gamma = 2\iint_S \omega_n dS = i. \qquad (3.49)$$

Bu *Stoks formulasi* bo‘lib, ixtiyoriy kontur bo‘ylab sirkulyatsiya shu konturga tortilgan sirt orqali hajm ichiga kirgan uyurmalar intensivligi (kuchlanishi) yug‘indisiga teng.

Tomson teoremasi. Tezlik sirkulyatsiyasining saqlanish qonuni. Stoks teoremasi bo‘yicha (3.49) ni (3.36) ga ko‘ra quyidagicha yozamiz:

$$\Gamma = \iint_S rot_n \vec{u} dS, \qquad (3.50)$$

Bunda $\mathrm{rot}_n \vec{u}$ - $\mathrm{rot}\vec{u}$ ning berilgan S sirtning dS bo‘lagiga o‘tkazilgan $\vec{n}$ tashqi normal yo‘nalishidagi proeksiyasi. Agar suyuqlik harakati potensial bo‘lsa, u holda *L* konturni tanlashga bog‘liq bo‘lmagan holda Γ=0 bo‘ladi. Haqiqatan ham, biror vaqt momentida suyuqlikda o‘tkazilgan yopiq konturni qaraylik. Vaqt o‘tishi bilan bu yopiq kontur ichidan suyuqlik zarrachalari siljiydi, ular bilan esa butun kontur ham qo‘zg‘aladi. Bunda kontur bo‘ylab tezlik sirkulyatsiyasida quyidagi hodisa sodir bo‘ladi. Vaqt bo‘yicha to‘la hosilani

$$\frac{d}{dt}\oint_L \vec{u}\cdot d\vec{l}$$

kabi hisoblaylik, bunda vaqt bo‘yicha to‘la hosila siljiyotgan suyuqlik konturi bo‘ylab sirkulyatsiyaning o‘zgarishini ifodalaydi.

Tezlik sirkulyatsiyasining $\vec{r}$ radius vektorga nisbatan ushbu

$$\oint_L \vec{u}\cdot d\vec{r}$$

ifodasida to‘la differensialni bajarsak, tezlanish uchun Eyler tenglamasidagi ifodasidan foydalansak, keyin esa Stoks formulasini qo‘llasak va rot(gradφ)=0 ekanligini e’tiborga olsak, quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\frac{d}{dt}\oint_L \vec{u}\cdot d\vec{l} = 0 \quad \text{yoki} \quad \oint_L \vec{u}\cdot d\vec{l} = const. \qquad (3.51)$$

Shunday qilib, ideal suyuqlik holatida suyuqlikning yopiq konturi bo‘ylab tezlik sirkulyatsiyasi vaqt bo‘yicha o‘zgarmas bo‘lib qoladi. Bu tasdiq *Tomson teoremasi* yoki *tezlik sirkulyatsiyasining saqlanish qonuni* deyiladi. Bu qonun suyuqlik harakatining izentropikligi haqidagi faraz bilan bog‘liq. Noizentropik harakat uchun bu qonun o‘rinli emas. Bunda (3.51) ifoda uyurmalanishning harakatlanayotgan suyuqlik bilan birga siljishini bildiradi.

Namunaviy masalalar va ularning yechimlari:

1-masala. Oqimning koordinar o‘qlaridagi tezlik proeksiyalari $u_x = axy$, $u_y = ayz$, $u_z = axz$ kabi berilganda quyidagilarni aniqlang: *a*) oqimdagi suyuqlik zarrachalarining $\vec{\omega}$ burchak tezligi tashkil etuvchilarini; *b*) $\vec{\omega}$ burchak tezlikni; c) $\vec{\Omega} = \text{rot}\vec{u}$ ni; d) $\vec{\Omega}$ vektorning yo‘nalishini topish uchun $\vec{u}$ tezlik vektori va $\vec{\omega}$ uyurma tezligi vektorlari tashkil etuvchilariga mos keluvchi og‘ish burchaklari tangensini toping, bunda *a* – biror o‘zgarmas son.

Yechish: *a*) Oqimdagi suyuqlik zarrachalarining burchak tezligi tashkil etuvchilari quyidagilar:

$$\omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}\right) = -\frac{ay}{2};\ \omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) = -\frac{az}{2};$$

$$\omega_z=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}-\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)=-\frac{ax}{2}.$$

b) Demak burchak tezlik vektori quyidagiga teng ekan:

$$\vec{\omega}=-\frac{a}{2}(y\vec{i}+z\vec{j}+x\vec{k}).$$

c) Tezlik vektori rotori esa quyidagicha hisoblanadi:

$$\vec{\Omega}=\mathrm{rot}\,\vec{u}=2\,\vec{\omega}=-a(y\vec{i}+z\vec{j}+x\vec{k}).$$

d) $\vec{\omega}$ burchak tezlik vektori, $\vec{u}$ tezlik vektori va $\vec{\Omega}$ tezlik rotori vektorlarining moduli mos ravishda quyidagilarga teng:

$$|\vec{\omega}|=\frac{a}{2}\sqrt{y^2+z^2+x^2}\ ;\ |\vec{u}|=a\sqrt{(xy)^2+(yz)^2+(xz)^2}\ ;|\vec{\Omega}|=2|\vec{\omega}|.$$

$\vec{\Omega}$ vektorning yo‘nalishini topish uchun $\vec{u}$ tezlik vektori va $\vec{\omega}$ uyurma tezligi vektorlari tashkil etuvchilariga mos keluvchi og‘ish burchaklari tangensini topamiz:

$$\frac{u_y}{u_x}=\frac{z}{x};\ \frac{u_y}{u_z}=\frac{y}{x};\ \frac{u_z}{u_x}=\frac{z}{y}\ ;\quad \frac{\omega_y}{\omega_x}=\frac{z}{y};\ \frac{\omega_y}{\omega_z}=\frac{z}{x};\ \frac{\omega_z}{\omega_x}=\frac{x}{y}.$$

Bu yerdan ko‘rinadiki, rotorning yo‘nalishi tezlik vektorining yo‘nalishi bilan mos tushmas ekan.

Topshiriqlar

Oqimning koordinata o‘qlaridagi tezlik proeksiyalari:

1) $u_x=ax$, $u_y=ay$, $u_z=0$; 2) $u_x=x+4y$, $u_y=4x+y$, $u_z=0$;

3) $u_x=ax$, $u_y=ay$, $u_z=az$; 4) $u_x=y+t$, $u_y=x+t$, $u_z=0$;

5) $u_x=x+t$, $u_y=y+t$, $u_z=z+t$,

bunda *a* – biror o‘zgarmas miqdor, kabi berilganda quyidagilarni aniqlang: *a*) oqimdagi suyuqlik zarrachalarining $\vec{\omega}$ burchak tezligi tashkil etuvchilarini; *b*) $\vec{\omega}$ burchak tezlikni; *c*) tezlik vektori rotorini; *d*) $\vec{\Omega}$ vektorning yo‘nalishini topish uchun $\vec{u}$ tezlik vektori va $\vec{\omega}$ uyurma tezligi vektorlari tashkil etuvchilariga mos keluvchi og‘ish burchaklari tangensini toping.

Sinov savollari

1. Uyurmali harakat, uyurma ipi va uyurma chizig‘i nima?
2. Vektor maydon oqimi nima?
3. Uyurma intensivligi va uyurma naychasi nima?
4. Uyurmalar haqidagi Gelmgolts teoremasini ayting.
5. Tezlik sirkulyatsiyasini tushuntiring.
6. Stoks va Tomson teoremalarini ayting.

4-BOB.
SUYUQLIKNING POTENSIAL HARAKATI

Suyuqlik oqimi uyurmali yoki uyurmasiz (potensial) bo‘lishi mumkin. Uyurmasiz oqimni o‘rganish masalasini qiymatlari har xil oqimlarning tezliklari maydonini aniqlashga imkon beradigan potensial funksiyani (yoki tezlik potensialini) topishga olib kelinishi mumkin. Uyurmali oqimning ba’zi bir hollarida uning kinematik xarakteristikalarini aniqlash masalasi oqim funksiyasi deb ataluvchi bitta funksiyani topishga olib kelinishi mumkin. Natijada tezliklar potensialini va oqim funksiyasini topish eng muhim masalaga aylanadi. Shuning uchun bir qator kinematika masalalari potensial funksiyani va oqim funksiyasini topishga, hamda bu funksiyalar ma’lum bo‘lganda oqimning kinematik xarakterini qurishga va tezliklar maydonini topishga olib kelinadi.

Harakatning potensiallik sharti - bu uyuqma tezligining nolga teng ekanligi $(\mathrm{rot}\,\vec{u} = 0)$ yuqorida qayd etildi. Mexanik nuqtai nazardan bunda suyuqlik zarrachasi aylanmasdan harakat qiladi. Quyida potensial harakat suyuqliklar mexanikasida muhim ahamiyatga ega ekanligi ko‘rsatilgan.

Suyuqliklar kinematikasini o‘rganish kompleks funksiyalar nazariyasi bilan ham chambarchas bog‘langan. Bunda ba’zi analitik funksiyalarni tanlash bilan oqimning xarakterini ifodalash mumkin. Bunday funksiya potensial funksiya va oqim funksiyasini aniqlashga imkon beradi. Ba’zi bir masalalarni yechishda esa oqimning sodda yoki murakkabligiga qarab kompleks potensialni topish orqali oqimning kinematik sxemasi va tezliklar maydoni quriladi.

Quyida keltirilgan tushunchalar, masalalarning namunaviy yechimlari va mashqlar kinematika tushunchalarini yanada chuqurroq o‘zlashtirishga imkon beradi.

4.1. Tezlik potensiali va oqim funksiyasi

Tezlik potensiali. Stoks teoremasining ma’nosi uyurma intensivligi va sirkulyatsiyaning son qiymatlari teng ekanligini tasdiqlaydi, ya’ni

$$i = \Gamma \quad \text{yoki} \quad i = \iint_A \mathrm{rot}\,\vec{u} \cdot \vec{n} dA = \Gamma .$$

Boshqa tarafdan esa, potensial oqim uchun uning ta’rifiga ko‘ra $\mathrm{rot}\,\vec{u} = 0$, ya’ni potensial maydondagi yopiq kontir bo‘ylab sirkulyatsiya nolga teng.

Burchak tezliklar proeksiyalarining ifodalarini yozamiz:

$$\omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}\right); \ \omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right); \ \omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right).$$

Yuqorida aytilganlarga ko‘ra uyurmasiz (potensial) harakat uchun $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$. Demak, bu holda

$$\frac{\partial u_z}{\partial y} = \frac{\partial u_y}{\partial z}; \quad \frac{\partial u_x}{\partial z} = \frac{\partial u_z}{\partial x}; \quad \frac{\partial u_y}{\partial x} = \frac{\partial u_x}{\partial y}. \tag{4.1}$$

Bu munosabatlar u_x, u_y va u_z tezlik komponentalarini hisoblashni juda soddalashtiradi.

Ushbu

$$u_x dx + u_y dy + u_z dz \tag{4.2}$$

ifodani qaraylik. Bu ifoda qattiq jismlar mexanikasidagi elementar ishning ifodasi kabi yozilgan. U qachon to‘la differensialni ifodalaydi, degan savol tug‘iladi. Eslatib o‘tamizki, agar ishning ifodasi to‘la differensial bo‘lsa, u holda bu kuchlar *konservativ kuchlar* yoki *potensialga ega kuchlar* deb ataladi.

Agar (4.2) ifodada ayqash hosilalar o‘zaro teng bo‘lsa, u holda bu ifoda to‘la differensialni ifodalashi Klero tomonidan ko‘rsatilgan. (4.1) munosabatlar ana shu shartlarning bajarilishini ko‘rsatadi, ya’ni (4.2) da olingan ayqash hosilalar (4.1) munosabatlarni beradi. Shunday qilib, (4.2) ifoda biror φ funksiyaning to‘la differensialini beradi va

$$d\varphi = u_x dx + u_y dy + u_z dz. \tag{4.3}$$

Boshqa tarafdan esa, umumiy qoidaga ko‘ra to‘la differensialni quyidagicha ifodalash mumkin:

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz. \tag{4.4}$$

(4.3) va (4.4) larni taqqoslasak,

$$u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad u_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad u_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \tag{4.5}$$

Gelmgolts ta’rifiga ko‘ra φ funksiya *tezlik potensiali* deb ataladi.

Zarrachalarining aylanishisiz sodir bo‘ladigan suyuqlikning har qanday harakatiga o‘zining tezlik potensiali mos keladi. Teskari tasdiq ham to‘g‘ri: agar tezlik potensiali mavjud bo‘lsa, u holda suyuqlik harakati zarrachalarning aylanishisiz sodir bo‘ladi.

(4.5) munosabatni boshqa yo‘l bilan ham olish mumkin. Bitta savolga har xil uslubiyatda javob topish uni chuqurroq o‘rganib chiqishga imkon beradi.

Bilamizki, potensiallik sharti $\mathrm{rot}\vec{u}=0$ dan iborat. Boshqa tarafdan esa, ikkinchi tartibli operatsiyalar haqidagi mavzuga ko‘ra, biror skalyar funksiya gradiyentidan olingan rotor operatsiyasi nolga teng, ya’ni

$$\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\,\varphi)=0.$$

Bu munosabatlarni taqqoslasak,

$$\vec{u}=\mathrm{grad}\,\varphi. \tag{4.6}$$

Bu tenglik ko‘rsatadiki, tezlik vektorini biror φ skalyar funksiyadan olingan gradiyent deb qarash mumkin. $\vec{u}$ va $\mathrm{grad}\,\varphi$ larning qiymatlarini yozaylik, ya’ni

$$\vec{u}=u_x\vec{e}_x+u_y\vec{e}_y+u_z\vec{e}_z; \quad \mathrm{grad}\,\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{e}_x+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{e}_y+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{e}_z.$$

(4.6) ni hisobga olsak, yana (4.5) dagi ushbu

$$u_x=\frac{\partial\varphi}{\partial x};\ u_y=\frac{\partial\varphi}{\partial y};\ u_z=\frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

munosabatlarga kelamiz.

Tezlik potensiali haqidagi tushunchalarni kiritishning maqsadi va zaruriyati haqidagi savolga javob berishga urinamiz. Buning uchun avvalo atrofida suyuqlik yoki gaz oqayotgan jismga ta’sir etayotgan kuchlarni aniqlash asosiy masalalardan biri ekanligini e’tiborga olmog‘imiz zarur. Bunday masalalarni yechish bevosita tezliklar maydonini hisoblash, ya’ni har bir nuqtada u_x, u_y va u_z tezliklar proeksiyalarini aniqlash bilan bog‘liq. (4.5) ifodadan kelib chiqadiki, agar tezlik potensialining bitta qiymati aniq bo‘lsa, u holda tezlik komponentalarining uchalasini ham aniqlash mumkin bo‘ladi. Shunday qilib, tezlik potensiali tezliklar maydonini hisoblashni juda ham osonlashtiradi. Ammo, bir vaqtning o‘zida oqishning tezligi potensialini qanday topish mumkin, degan savol tug‘iladi. Bu savolga javob topish uchun avvalo potensialning bir qator xossalari bilan tanishib chiqish zarur.

Laplas tenglamasi. Skalyar funksiyaning gradiyentidan olingan divergensiya operatsiyasi Laplas operatorini beradi. Agar skalyar funksiya sifatida tezlik potensialidan foydalansak, u holda ushbu

$$\mathrm{div}(\mathrm{grad}\,\varphi)=\nabla^2\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}. \tag{4.7}$$

tenglikni yozamiz. Siqilmaydigan suyuqlik uchun $\mathrm{div}\,\vec{u}=0$, bunda $\mathrm{grad}\,\varphi=\vec{u}$. Shunday qilib,

$$\mathrm{div}(\mathrm{grad}\,\varphi)=0 \tag{4.8}$$

yoki

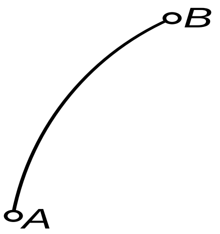
$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \qquad (4.9)$$

(4.8) yoki (4.9) ifoda *Laplas tenglamasi* deb ataladi. Demak, tezlik potensialini topish uchun Laplas tenglamasini integrallash lozim ekan. Laplas tenglamasini qanoatlantiruvchi ixtiyoriy funksiya *garmonik funksiya* deb ataladi. Demak, tezlik potensiali garmonik funksiya ekan. Har qanday differensial tenglama, xuddi shunday Laplas tenglamasi ham, cheksiz ko‘p yechimlarga ega. Shuning uchun tezlik potensialini bir qiymatli aniqlash uchun chegaraviy shartlarni berishimiz zarur. Masalan, jism atrofidagi oqish masalalari uchun chegaraviy shartlarni $u_n = 0$ va $u = u_\infty$ kabi berishimiz mumkin. Birinchi shart oqishning ajralmasligini (tezlikning normal komponentasi nolga tengligini), ikkinchisi esa jismdan uzoqlikda tezliklar taqsimoti ma’lum ekanligini bildiradi.

Har bir huqtasida $\varphi = \text{const}$ bo‘lgan sirtlar (yoki ikki o‘lchovli oqimlar uchun chiziqlar) *ekvipotensial sirtlar* (yoki *chiziqlar*) deb ataladi.

Potensial maydonda tezlik sirkulyatsiyasi. Tekis (ikki o‘lchovli) oqimni qaraylik. Unda ixtiyoriy egri chiziqni ajratamiz (4.1-rasm) va bu egri chiziq bo‘ylab sirkulyatsiya uchun ushbu

$$\Gamma = \int_A^B u_x dx + u_y dy = \int_A^B \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = \int_A^B d\varphi = \varphi_A - \varphi_B \qquad (4.10)$$



4.1.-rasm. Tekis oqimdagi egri chiziqning sxematik tasviri.

ifodani yozamiz, ya’ni egri chiziq bo‘ylab sirkulyatsiya uning shaklidan bog‘liq emas va u faqatgina egri chiziqning chetki nuqtalaridagi potensiallar farqi bilan aniqlanadi.

Agar egri chiziq yopiq bo‘lsa, u holda ko‘rinib turibdiki, $\varphi_B = \varphi_A$ va $\Gamma = 0$, ya’ni potensial maydondagi yopiq kontur bo‘ylab sirkulyatsiya nolga teng.

Tekis oqishda oqim funksiyasi. Ikki o‘lchovli oqimlarga oid amaliy masalalarni yechishda oqim funksiyasi tushunchasi keng qo‘llaniladi.

Ikki o‘lchovli oqimni qaraylik va suyuqlikni siqilmaydi, deb faraz qilaylik.

Avval ko‘rsatilgan ediki, oqim chizig‘ining differensial tenglamasi quyidagicha:

$$\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y} \quad \text{yoki} \quad u_x dy - u_y dx = 0. \qquad (4.11)$$

Bu hol uchun uzviylik tenglamasini yozamiz:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}=0. \qquad (4.12)$$

Tezlik potensialidagi kabi bu yerda ham (4.11) ifodaning biror skalyar funksiya to‘la differensiali bo‘lishligining zaruriy va yetarli shartini qo‘yamiz. (4.11) ifodaga *Klero sharti* (aralash hosilalar tengligi sharti)ni qo‘llaymiz. Natijada quyidagiga kelamiz:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x}=-\frac{\partial u_y}{\partial y} \quad \text{va} \quad \frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}=0.$$

Bu, agar harakat mavjud bo‘lsa, hamma vaqt bajariladi va u tekis holat uchun (4.12) uzviylik tenglamasining o‘zginasidir. Natijada quyidagini yoza olamiz:

$$d\psi=u_x dy-u_y dx, \qquad (4.13)$$

bu yerda ψ - *oqim funksiyasi* deb ataladi. Boshqa tarafdan esa, yuqorida ko‘rsatilgan ediki, $d\psi$ - to‘la differensial, u holda

$$d\psi=\frac{\partial\psi}{\partial x}dx+\frac{\partial\psi}{\partial y}dy. \qquad (4.14)$$

(4.13) va (4.14) larni taqqoslasak,

$$u_x=\frac{\partial\psi}{\partial y};\ \ u_y=-\frac{\partial\psi}{\partial x}. \qquad (4.15)$$

Bundan kelib chiqadiki, agar oqishning oqim funksiyasi ma’lum bo‘lsa, u holda fazoning ixtiyoriy nuqtasidagi tezlik komponentalarini aniqlash mumkin bo‘ladi. (4.11) va (4.13) larni taqqoslashdan esa quyidagi xulosaga kelamiz: agar suyuqlik zarrachasi oqim chizig‘i bo‘ylan harakatlansa, u holda oqim funksiyasi o‘zgarmas bo‘lib qoladi ($\psi=\text{const}$ bo‘lganda $d\psi=0$ va (4.13) tenglik (4.11) ga aylanadi). Endi oqim funksiyasining garmonik funksiya ekanligini, ya’ni u Laplas tenglamasini qanoatlantirishini tekshiraylik.

Tekis potensial oqish uchun $\omega_z=0$, ya’ni

$$\omega_z=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}-\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)=0,$$

bu yerdan esa

$$\frac{\partial u_y}{\partial x}=\frac{\partial u_x}{\partial y}.$$

(4.15) dan

$$u_x=\frac{\partial\psi}{\partial y} \quad \text{va} \quad u_y=-\frac{\partial\psi}{\partial x},$$

natijada

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right),$$

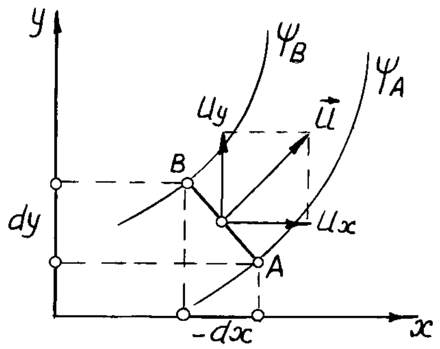
bulardan

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=0\ .$$

Shunday qilib, oqim funksiyasi, xuddi tezlik potensiali kabi, garmonik funksiya ekan.

Agar tezlik potensiali faqatgina potensial oqimlarda mavjud bo‘lsa, oqim funksiyasi uchun bunday cheklov yo‘q. Bu shu bilan tushuntiriladiki, bu tushunchani olish uchun qo‘llaniladigan uzviylik tenglamasi ham uyurmali va ham uyurmasiz harakatlar uchun o‘rinli.

Oqim funksiyasining gidromexanik ma’nosi. Oqim funksiyasining gidromexanik ma’nosini berish uchun yetarlicha yaqin joylashgan ikkita oqim chiziqlarini qaraylik (4.2-rasm).



4.2-rasm. Oqim chiziqlari orasidan oqib o‘tayotgan suyuqlikning sxematik tasviri.

Shu oqim chiziqlari orasidan oqib o‘tayotgan suyuqlik sarfini hisoblaylik. Buning uchun suyuqlik zarrachasining tezligini ifodalovchi $\vec{u}$ vektorni ikkita u_x va u_y tashkil etuvchilariga ajratamiz. Bu o‘z navbatida suyuqlik sarfini

$$dQ=dQ_x+dQ_y$$

yig‘indi bilan ifodalash imkonini beradi, bunda

$$dQ_x=u_x dy \text{ va } dQ_y=-u_y dx\,.$$

Bu yerdan esa $dQ=u_x dy-u_y dx$,

Bularga ko‘ra

$$Q=\int_A^B\left(u_x dy-u_y dx\right)=\int_A^B d\psi=\psi_B-\psi_A\ . \qquad (4.16)$$

Bu tenglikning ma’nosi quyidagicha: tanlangan ikki egri chiziqlardagi oqim funksiyalar qiymatlarining farqi ular orasidagi suyuqlik sarfi hajmiga teng.

Tezlik potensiali va oqim funksiyasi o‘rtasidagi bog‘lanish. Agar tezlik proeksiyalari uchun yuqorida olingan ushbu

$$u_x=\frac{\partial\varphi}{\partial x};\qquad u_y=\frac{\partial\varphi}{\partial y};\qquad u_x=\frac{\partial\psi}{\partial y};\qquad u_y=-\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

ifodalarini e’tiborga olsak, tezlik potensiali va oqim funksiyasi orasidagi bog‘lanish ifodasini osongina o‘rnatish mumkin, ya’ni

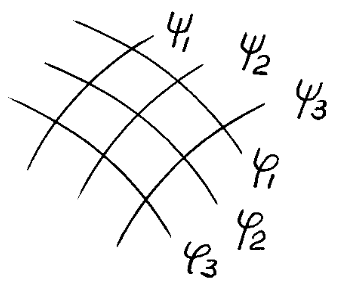
$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \tag{4.17}$$

Bu munosabatlar suyuqliklar mexanikasida juda muhim ahamiyatga ega va ular *Koshi-Riman munosabatlari* (*shartlari*) deb ataladi.

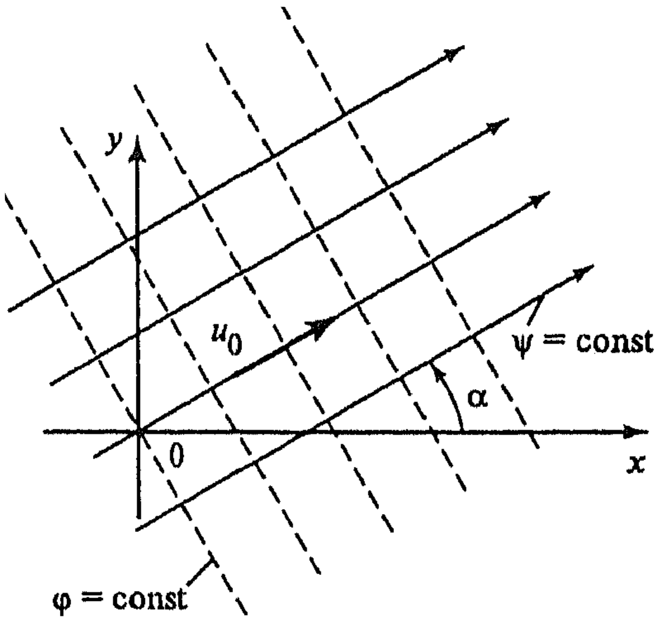
Bu munosabatlar bilan quyida to‘laroq tanishamiz. Hozircha ularni o‘zaro ko‘paytirish bilan cheklanaylik. Bu quyidagini beradi :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial x}. \tag{4.18}$$

Matematika kursidan ma’lumki, (4.18) ko‘rinishidagi ifoda egri chiziqlarning o‘zaro ortogonal ekanligini bildiradi. Demak oqim chiziqlari va ekvipotensial chiziqlar *harakatning gidrodinamik to‘ri* deb ataluvchi to‘r hosil qiladi (4.3,*a*-rasm).



a



b

4.3-rasm. Harakatning gidrodinamik to‘ri : *a* – sxematik tasvir ; *b* – to‘g‘ri chiziqli ilgarilanma oqim uchun.

Xususan, to‘g‘ri chiziqli ilgarilanma oqimni qaraylik. Faraz qilaylik, *Ox* o‘q bilan α burchak tashkil etgan holda o‘zgarmas u_0 tezlik vektori bo‘yicha harakatlanayotgan oqim berilgan bo‘lsin. U holda

$$u_x = u_0 \cos\alpha = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \qquad u_y = u_0 \sin\alpha = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Bu tenglamalarni integrallab, quyidagi tezlik potensiali va oqim funksiyasiga ega bo‘lamiz :

$$\varphi = (u_0 \cos\alpha)\, x + (u_0 \sin\alpha)\, y + c_1 ;$$
$$\psi = -(u_0 \sin\alpha)\, x + (u_0 \cos\alpha)\, y + c_1 .$$

To‘g‘ri chiziqli ilgarilanma oqim uchun harakatning gidrodinamik to‘ri 4.3,*b*-rasmda tasvirlangan.

Namunaviy masalalar va ularning yechimlari

Potensial oqimlarni hisoblash usullari. Potensial oqimlar nazariyasida Laplas tenglamasini integrallamasdan oqim funksiyasi va tezlik potensiali funksiyasining qiymatlarini beradigan holatlar alohida qiziqish uyg‘otadi. Buning umumiy g‘oyasi quyidagicha talqin qilinadi: oldindan Laplas tenglamasini qanoatlantiruvchi birorta funksiya beriladi va u harakatning gidrodinamik to‘rini ifodalaydi, deb izohlanadi. Bu usuldan foydalanib, quyida bir nechta masalalarni yechamiz.

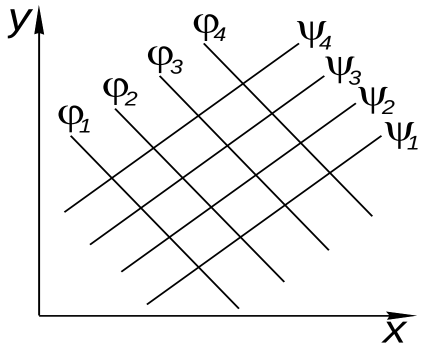
1-masala. Faraz qilaylik, tezlik potensiali uchun uning ifodasi $\varphi = ax + by$ kabi berilgan bo‘lsin, bunda a va b – biror haqiqiy sonlar. Harakatning gidrodinamik to‘rini tuzing.

Yechish. Avvalo tezlik kompotentalarini topaylik:

$$u_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = a \quad \text{va} \quad u_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = b.$$

Ikkinchi tartibli hosilalar nolga teng, yani Laplas tenglamasi to‘la qanoatlantiriladi, chunki $u_x = a$ va $u_y = b$, u holda bundan kelib chiqadiki, suyuqlik oqimi o‘zgarmas tezlik bilan harakat qiladi:

$$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$



4.4-rasm. Chiziqli tezlik potensiali uchun harakatning gidrodinamik to‘ri.

Endi oqim chizig‘i nimani anglatishini izohlaylik. Ushbu

$$d\psi = u_x dy - u_y dx = ady - bdx$$

oqim chizig‘i differensial tenglamasini integrallaymiz:

$$\psi = ay - bx. \tag{4.19}$$

Buni biror o‘zgarmasga tenglashtirsak, koordinat o‘qlari bilan $\text{tg}\,\alpha = \frac{b}{a}$ burchak tashkil etuvchi parallal chiziqlardan iborat oqim chiziqlari oilasiga ega bo‘lamiz (4.4-rasm).

Haqiqatan ham, oqim chiziqlari uchun quyidagilarni yozish mumkin:

$$\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y}; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{u_y}{u_x} = \frac{b}{a}.$$

2-masala. Tezlik potensiali ushbu

$$\varphi = a\left(x^2 - y^2\right)$$

ifoda bilan berilgan, bunda a – biror haqiqiy son. Bu oqimning oqim chiziqlarini toping.

Yechish. Avvalambor φ funksiya Laplas tenglamasini qanoatlantirishini tekshiraylik. Berilganlarga ko‘ra

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2ax; \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -2ay; \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 2a; \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -2a;$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 2a - 2a = 0,$$

ya’ni Laplas tenglamasi qanoatlantiriladi. Endi bu funksiya bilan harakatning qanday ko‘rinishi ifodalanishini aniqlaylik, buning uchun esa oqim funksiyasini topish lozim. Ushbu

$$d\psi = u_x dy - u_y dx = 2axdy + 2aydx = 2a(xdy + ydx) = 2ad(xy)$$

tenglikni integrallasak,

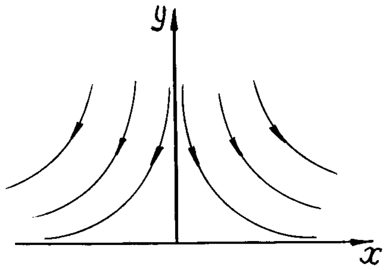
$$\psi = \int 2ad(xy) = 2axy,$$

bu yerda ixtiyoriy o‘zgarmas bizni qiziqtirmaydi.

Oqim chiziqlarini topish uchun ψ ni biror o‘zgarmas miqdorga teng deb olamiz:

$$2axy = \text{const} \quad \text{yoki} \quad xy = \text{const}.$$

Demakki, oqim chiziqlari asimptotalari Ox va Oy koordinat o‘qlaridan iborat bo‘lgan giperbola ekan. 4.5-rasmda yuqori yarim tekislik uchun oqim chiziqlari sxemasi tasvirlangan. Agar koordinat o‘qlarini qattiq devorlar desak, u holda to‘g‘ri burchakda oqimning aylanib oqish tasviriga ega bo‘lamiz.



4.5-rasm. Yuqori yarim tekislikdagi suyuqlik oqishi sxemasi.

Bir qancha sodda oqimlar mavjudki, ular uchun tezlik potensialini analitik usul bilan ham topish mumkin. Ular suyuqlik va gaz mexanikasi masalalarini yechishda muhim amaliy ahamiyatga ega.

3-masala. Manba (yoki manfiy manba)ni tekislikda qaraylik. Tekis masala bilan cheklanaylik.

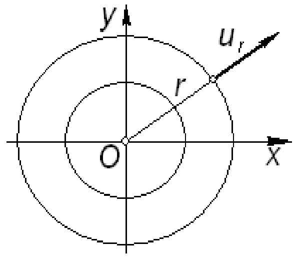
Yechish. Tekislikda *manba* (yoki *manfiy manba*) deb shunday nuqtaga aytiladiki, undan suyuqlikning oqib chiqishi (yoki unga oqib kirishi) tushuniladi. Faraz qilaylik, 4.6-rasmda tasvirlangan O nuqta tekis manbani ifodalasin va markazdan chiqayotgan bir nechta konsentrik aylanalar o‘tkazaylik.

Birlik balandlikka ega silindrik sirt uchun uzviylik tenglamasini yozaylik:

$$Q = 2\pi r u_r ,$$

bu yerdan

$$u_r = \frac{Q}{2\pi r}. \qquad (4.20)$$



4.6-rasm. Tekis manba sxemasi.

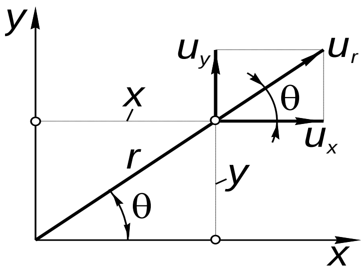
Dekart koordinatalari sistemasida

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}. \qquad (4.21)$$

Qaralayotgan hol uchun silindrik koordinatalari sistemasini kiritish qulay (4.7-rasm). Silindrik koordinatalari sistemasi uchun

$$u_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}; \quad u_r = \frac{\partial\varphi}{\partial r}. \qquad (4.22)$$

(4.22) dan kelib chiqadiki, u_r qutb burchagidan bog‘liq emas, simmetriya shartidan esa $u_\theta = 0$. Shuning uchun $u_r = \frac{d\varphi}{dr}$. Bu ifodani (4.20) bilan tenglashtirsak, $\frac{Q}{2\pi r} = \frac{d\varphi}{dr}$, bu yerdan $d\varphi = \frac{Q}{2\pi}\frac{dr}{r}$.



4.7-rasm. Koordinat tekisligida va silindrik koordinatalar sistemasida tezlik vektori sxemasi.

Buni integrallasak,

$$\varphi = \frac{Q}{2\pi}\ln r. \qquad (4.23)$$

(4.23) dan kelib chiqadiki, manbaning ekvipotensial chiziqlari aylanalardan iborat ekan (4.6-rasm). (4.23) formulani quyidagicha ham yozishimiz mumkin:

$$\varphi = \frac{Q}{2\pi}\ln\sqrt{x^2 + y^2}. \qquad (4.24)$$

Oqim funksiyasini topish uchun dekart koordinatalari sistemasidan foydalanish qulay. (4.20) ni quyidagicha yozamiz:

$$u_r = \frac{Q}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \qquad (4.25)$$

4.7-rasmdan kelib chiqadiki,

$$u_x = u_r \cos\theta = u_r\, x/r.$$

Shunday qilib,

$$u_x = \frac{Q}{2\pi}\frac{x}{r^2} = \frac{Q}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}.$$

Xuddi shunday

$$u_y = \frac{Q}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2} = \frac{\partial\varphi}{\partial y}.$$

Oqim funksiyasining differensial tenglamasi quyidagicha:

$$d\psi = u_x dy - u_y dx. \tag{4.26}$$

u_x va u_y larning qiymatlarini (4.26) ga qo‘ysak,

$$d\psi = \frac{Q}{2\pi}\frac{xdy - ydx}{x^2+y^2}. \tag{4.27}$$

Ba’zi almashtirishlar bajaraylik.

Ma’lumki, nisbatning differensiali

$$d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{xdy - ydx}{x^2}, \quad \text{ya'ni} \quad xdy - ydx = x^2 d\left(\frac{y}{x}\right).$$

(4.27) ning maxrajidan x^2 ni chiqaramiz, natijada

$$x^2 + y^2 = x^2\left[1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right].$$

Shunday qilib, (4.27) quyidagicha yoziladi:

$$d\psi = \frac{Q}{2\pi}\frac{d\left(\frac{y}{x}\right)}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}, \text{ bundan } \psi = \frac{Q}{2\pi}\int\frac{d\left(\frac{y}{x}\right)}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{Q}{2\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right).$$

Ammo $\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\theta$, yani $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\theta) = \theta$ ekanligidan

$$\psi = \frac{Q}{2\pi}\theta. \tag{4.28}$$

Qutb koordinatalari sistemasida (4.28) funksiya koordinat boshidan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqlar oilasini tashkil etadi.

Manfiy manba uchun tezlik potensiali va oqim funksiyasi bir xil ifodaga ega, ammo ishorasi qarama-qarshi, ya’ni

$$\varphi = -\frac{Q}{2\pi}\ln r \quad \text{va} \quad \psi = -\frac{Q}{2\pi}\theta \quad . \tag{4.29}$$

Ba’zida Q ni *manbaning quvvati* ham deb atashadi.

Agar manba (manfiy manba) koordinata boshidan biror R masofadagi $M(x_R; y_R)$ nuqtada bo‘lsa, u holda

$$\varphi = \frac{Q}{2\pi}\ln(r-R); \; u_r = \frac{Q}{2\pi\sqrt{(x-x_R)^2+(y-y_R)^2}}; \; u_\theta = 0.$$

Topshiriqlar

1. Agar siqilmaydigan suyuqlikning tezliklari potensiali ushbu

$a)\ \varphi = a\left(x^2 - 3y^2\right)$; $b)\ \varphi = y\left(x^2 - 3y^2\right)$; $c)\ \varphi = x(x - 3y)$.

funksiya bilan berilgan bo‘lsa ψ oqim funksiyasini toping, bunda a – biror o‘zgarmas son.

2. Tekis siqilmaydigan suyuqlik oqimida tezlikning tashkil etuvchilari quyidagi tenglamalar bilan berilgan bo‘lsin:

$a)\ u_x = -x - 4y,\ u_y = -y - 4x,\ u_z = 0$; $b)\ u_x = -\dfrac{ax}{x+y},\ u_y = \dfrac{ay}{x+y},\ u_z = 0$;

$c)\ u_x = -ay,\ u_y = ax,\ u_z = 0$; $d)\ u_x = -x + y,\ u_y = -y + x,\ u_z = 0$,

bunda a – biror o‘zgarmas son. Oqim funksiyasining ifodasini toping. Potensial oqimda tezliklar potensiali ifodasini oling.

3. Koordinata o‘qi Ox bo‘ylab koordinata boshidan 1 m uzoqlikda joylashgan manba va manfiy manbalarning quvvati bir xil, ya’ni Q=10 m^3/c. Koordinat boshidagi hamda x=-0,5; y=0 va x=0,5; y=0 nuqtalardagi tezliklarni aniqlang.

4. Yuqoridagi 3-masala shartidan kelib chiqib, koordinata o‘qi Ox bo‘ylab oqimning tezligi nolga teng va tezligi maksimal bo‘lgan nuqtalarini aniqlang.

Sinov savollari

1. Tezlik potensiali deb nimaga aytiladi? Konservativ kuchlar nima?
2. Laplas tenglamasini ayting.
3. Potensial maydonda tezlik sirkulyatsiyasi qanday hisoblanadi?
4. Tekis oqimda oqim funksiyasi qanday topiladi?
5. Oqim funksiyasining gidromexanik ma’nosini ayting.
6. Tezlik potensiali va oqim funksiyasi orasidagi bog‘lanish.
7. Koshi-Riman shartini ayting.
8. Harakatning gidrodinamik to‘ri nima?

4.2. Tadbiqiy masalalar

Potensial oqimlarning ustma-ust tushishi (superpozitsiya usuli). Yuqorida ta’kidlagan edikki, tezlik potensialini topish uchun Laplas tenglamasini berilgan chegaraviy shartlarda integrallash zarur. Ayniqsa bu murakkab oqimlar uchun etarlicha murakkab masala. Laplas tenglamasi chiziqli bo‘ lganda buni amalga oshirish uchun *superpozitsiya usuli* (*geometrik yig‘indi usuli*)dan foydlanish mumkin. Bu usulning g‘oyasi quyidagicha: qaralayotgan murakkab oqim avvaldan tezlik potensiallari (yoki oqim chiziqlari) ma’lum yoki ularni topish oson bo‘lgan bir nechta sodda oqimlar ko‘rinishida ifodalab olinadi. Bunga ko‘ra, agar φ_i funksiya i-oqimning tezlik potensiali bo‘lsa, u holda ulardan n tasining ushbu

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n$$

yig‘indisi ham Laplas tenglamasini qanoatlantiradi:

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2 + \ldots + \Delta\varphi_n ,$$

ya’ni φ yig‘indi barcha n ta oqimlarni o‘zaro qo‘shish (superpozitsiya, geometrik yig‘indi)dan hosil bo‘lgan biror yangi oqimning tezlik potensialini ifodalaydi.

Xuddi shunday, ψ_i funksiyalar va ularning yig‘indisi ψ biror k ta oqimlarning superpozitsiyasidan hosil bo‘lgan yangi oqimning oqim funksiyasini ifodalaydi, ya’ni ushbu

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 + \ldots + \psi_k$$

yig‘indi ham Laplas tenglamasini qanoatlantiradi:

$$\Delta\psi = \Delta\psi_1 + \Delta\psi_2 + \ldots + \Delta\psi_k \;.$$

Bu aytganlarimizni eng sodda holda qarab, uni misollar bilan tushuntiraylik. Faraz qilaylik, Laplas tenglamasini qanoatlantiruvchi, oldindan ma’lum bo‘lgan φ_1 va φ_2 tezlik potensiallariga ega ikkita oqim qaralayotgan bo‘lsin. Chiziqli differensial tenglamalar kursidan ma’lumki, xuddi shunday Laplas tenglamasiga ham tegishli, xususiy yechimlar yig‘indisi ham shu tenglamaning yechimi bo‘ladi. Boshqacha aytganda, $\varphi_1 + \varphi_2$ yig‘indidan tuzilgan φ potensial ham Laplas tenglamasini qanoatlantiradi, ya’ni bu yig‘indi φ potensialga ega yangi bir oqimni ifodalaydi. Bundan kelib chiqadiki, avvaldan ma’lum oqimlarni qo‘shish (ustma-ust qo‘yish) bilan yangi oqimni olish mumkin. Bu yerda gap oqimlarning o‘zlarini ustma-ust qo‘yish to‘g‘risida emas, balki oldindan ma’lum oqishlar uchun tezlik potensiallarini qo‘shish tushuniladi.

Yangi oqim har bir nuqtasining tezligi dastlabki oqimlar tezliklari yig‘indisiga teng bo‘ladi. Yangi oqishni topish masalasi ham analitik va ham grafik usulda yechilishi mumkin.

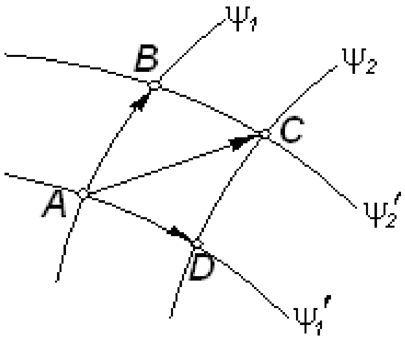
Avvalo grafik usulni qaraylik. Oqim chiziqlarini bir hil masshtabda chizish kerak bo‘ladi, bunda zich chizilgan oqim chiziqlari o‘zaro kesishish natijasida parallelogrammga yaqin shaklni beradi (4.8-rasm). *AB* va *AD* kesmalar biror bir masshtabda oqish tezligini ifodalaydi, bu vektorlarning yig‘indisi (*AC*) esa parallelogrammning diagonalini beradi. Bunday to‘rni qurish uchun quyidagi shartga bo‘ysunish lozim: har ikkala oqishning qo‘shni oqim chiziqlari orasidagi sarf bir xil bo‘lishi zarur.

Misol sifatida manfiy manbadagi tekis parallel oqimini ustma-ust qo‘yishda hosil bo‘ladigan oqish tasvirini qaraylik (4.9-rasm). 4.9-rasmdan kelib chiqadiki, yangi oqimning suyuqlik zarrachalari manfiy manbaga yo‘nalgan egri chiziqlar bo‘ylab yo‘nalgan bo‘ladi.

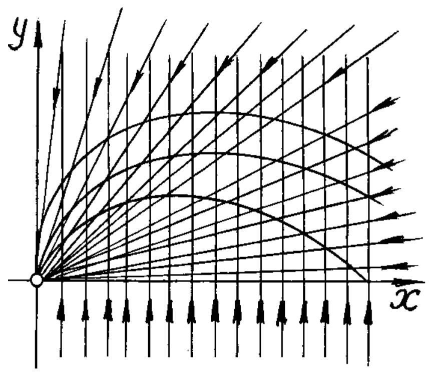
Yuqorida ta’kidladikki, masalani analitik usulda ham yechish mumkin. Bu holda har ikkala oqim uchun φ va ψ lar aniq bo‘lishi zarur.

1-masala. Koordinata boshidan a masofaga uzoqlikda simmetrik joylashgan bir xil sarfga ega manba va manfiy manbalarni qo‘shaylik (4.10-rasm).

Yechish. Tezlik potensiallari: manbaniki $\varphi_m = \dfrac{Q}{2\pi}\ln r_m$; manfiy manbaniki $\varphi_{-m} = -\dfrac{Q}{2\pi}\ln r_{-m}$.



4.8-rasm. Tekislikda bir xil masshtabli oqim chiziqlari sxemasi.



4.9-rasm. Manfiy manbadagi tekis parallel oqimni ustma-ust qo‘yishda hosil bo‘ladigan oqish sxemasi.

Koordinatalari x va y bo‘lgan ixtiyoriy M nuqtani tanlaylik. Bu nuqtadagi tezlik potensiali $\varphi = \varphi_m + \varphi_{-m}$, yani

$$\varphi = \frac{Q}{2\pi}\left(\ln r_m - \ln r_{-m}\right) = \frac{Q}{2\pi}\ln\frac{r_m}{r_{-m}} .$$

Bu munosabatda bir necha almashtirishlar bajaraylik. $MИx$ va MCx uchburchaklardan quyidagini yozamiz:

$$r_m = \sqrt{y^2 + (x+a)^2}\ ; \quad r_{-m} = \sqrt{y^2 + (x-a)^2} .$$

Natijada, yangi oqish uchun tezlik potensialiga ega bo‘lamiz:

$$\varphi = \frac{Q}{2\pi}\ln\sqrt{\frac{y^2 + (x+a)^2}{y^2 + (x-a)^2}} . \tag{4.30}$$

Bizni ko‘proq oqim funksiyasi qiziqtiradi. Avval ko‘rsatgan edikki, $\psi_m = \dfrac{Q}{2\pi}\theta_m$ va $\psi_{-m} = -\dfrac{Q}{2\pi}\theta_{-m}$. Xuddi shunday

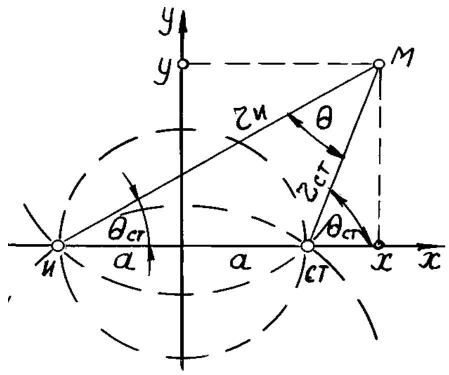
$$\psi = \psi_m + \psi_{-m} = \frac{Q}{2\pi}\left(\theta_m - \theta_{-m}\right) .$$

Boshqa tarafdan esa, 4.10-rasmdan kelib chiqadiki, $\theta_{-m} = \theta + \theta_m$ ekanligidan $\theta_m - \theta_{-m} = -\theta$, ya’ni $\psi = -\dfrac{Q}{2\pi}\theta$.

Bunda $\psi = \text{const}$ (oqim chizig‘iga) shartga $\theta = \text{const}$ mos keladi.

Shunday qilib, yangi oqishning oqim chiziqlari manba va manfiy manbalar orqali o‘tuvchi aylanalardan iborat ekan.

Endi manba va manfiy manbalarni yaqinlashtirishda hosil bo‘ladigan tasvirlarni qaraylik.



4.10-rasm. Koordinata boshidan *a* masofaga simmetrik joylashgan bir xil sarfga ega manba va manfiy manbalarning sxemasi.

2-masala. Shuni oldindan ta’kidlaymizki, manba va manfiy manbalar yaqinlashgan oqish *dipol* deb ataladi. Bu yerda qaraladigan masala qanday xususiyatga ega?

Yechish. Agar masofani nol deb faraz qilsak, ya’ni $a = 0$, u holda $r_m = r_{-m}$ bo‘lib, φ va ψ lar aynan nolga teng bo‘ladi. Shuning uchun boshqa limitik holatni qaraylik. Faraz qilaylik, $2a \to 0$ da sarf $Q \to \infty$, ammo ularning ko‘paytmasi $2a \cdot Q = \text{const} = M$, bunda M *dipolning momenti* deb ataladi. Shunday qilib,

$$Q = \frac{M}{2a}. \tag{4.31}$$

Bunda dipolning potensial tezligi quyidagiga teng:

$$\varphi_D = \frac{M}{2\pi}\,\frac{\ln\sqrt{y^2 + (x+a)^2} - \ln\sqrt{y^2 + (x-a)^2}}{2a}.$$

Bu nisbatning limit qiymati:

$$\varphi_D = \frac{M}{2\pi}\lim_{a\to 0}\frac{\ln\sqrt{y^2 + (x+a)^2} - \ln\sqrt{y^2 + (x-a)^2}}{2a}.$$

Bu ifodada limit ishorasi ostidagi ifoda nimani anglatishini tahlil qilaylik. Bu ifodaning maxrajini erkin o‘zgaruvchining orttirmasi, suratini esa funksiyaning orttirmasi deb qarash mumkin. Haqiqatan ham, $\ln\sqrt{y^2 + x^2}$ funksiyani qaraylik. x ga $x + a$ va $x - a$ qiymatlar beraylik. Agar funksiyaning $x + a$ dagi qiymatidan $x - a$ dagi qiymatini ayirsak, u holda ifodaning suratini olamiz. Erkin o‘zgaruvchining qiymatlari orasidagi ushbu $(x + a) - (x - a) = 2a$ farq maxrajni beradi. Shunday qilib, funksiya orttirmasining argument orttirnasiga nisbatining argument orttirmasi nolga intilgandagi limitini hisoblashimiz lozim bo‘ladi.

Ma’lumki, matematikada bunday limit funksiyaning hosilasi deb ataladi, ya’ni

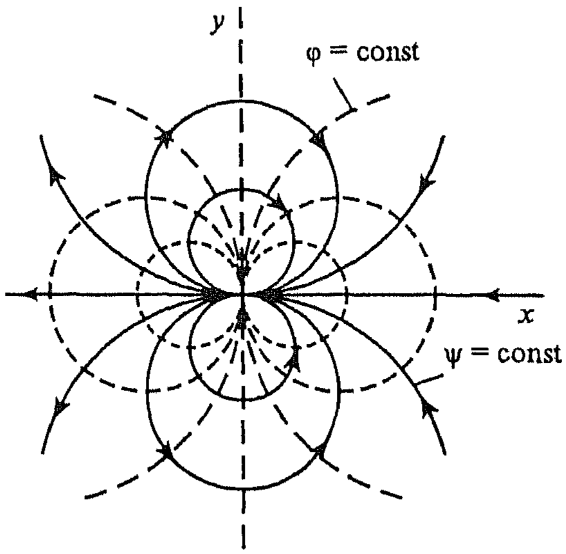
$$\varphi_D = \frac{M}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\ln\sqrt{x^2+y^2} .$$

Differensiallashni o‘rniga qo‘yish usuli bilan bajarish osonroq. Faraz qilaylik,

$$u = \sqrt{x^2+y^2} ; \qquad u^* = x^2+y^2 .$$

U holda $z = \ln u$; $z' = \frac{1}{u}u'$; $u' = \frac{1}{2\sqrt{u^*}}\left(u^*\right)'$. Bularga ko‘ra:

$$u' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} ; \quad z' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{x^2+y^2} ,$$



4.11-rasm. Dipol masalasi uchun oqim chiziqlari va ekvipotensial chiziqlar sxemasi.

ya’ni $\quad \frac{\partial}{\partial x}\ln\sqrt{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} .$

Shunday qilib,

$$\varphi_D = \frac{M}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2} . \qquad (4.32)$$

Xuddi shunday amallarni bajarib, quyidagiga kelamiz:

$$\psi_D = -\frac{M}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2} . \qquad (4.33)$$

Bundan kelib chiqadiki, oqim chiziqlari va ekvipotensial chiziqlar *Ox* va *Oy* koordinat o‘qlariga koordinatalar boshida urinuvchi aylanalardan iborat ekan (4.11-rasm).

Haqiqatan ham, oqim funksiyasiga o‘zgarmas qiymatlarni qo‘shsak, u holda $x^2+y^2 = Cy$, bunda $C = -\frac{M}{2\pi}$. Quyidagi tenglamalar markazi har xil bo‘lgan aylanalar tenglamalaridir:

$$x^2+y^2-Cy+\frac{C^2}{4} = \frac{C^2}{4}; \quad x^2+\left(y^2-Cy+\frac{C^2}{4}\right) = \frac{C^2}{4}; \quad x^2+\left(y-\frac{C}{2}\right)^2 = \left(\frac{C}{2}\right)^2 .$$

Doiraviy silindr atrofidan nosirkulyatsion aylanib oqish. Oqimlarni to‘g‘rilash usulini qarashni davom ettiramiz. 5-masalada qaralgan dipol deb ataluvchi oqish bir qarashda abstrakt xarakterga ega bo‘lib ko‘rinadi. Ammo bunday nuqtai nazarning juda ham to‘g‘ri emasligini quyida ko‘rsatamiz. Dipol tushunchasini qo‘llab, juda ham qiziqarli va amaliy tadbiqlar uchun foydali natijalar olish mumkin. Buni tasdiqlash uchun markazi koordinatalar boshida bo‘lgan dipolga qo‘yiladigan to‘g‘ri chiziqli ilgarilanma oqim paydo bo‘ladigan oqishni qaraylik. To‘g‘ri chiziqli oqim *Ox* o‘qi bo‘ylab miqdori bir birlikka teng bo‘lgan tezlik bilan harakat qiladi, ya’ni $u_x = u_0 = \text{const}$; $u_y = 0$. Uning tezlik potensiali

$$d\varphi = u_x dx + u_y dy$$

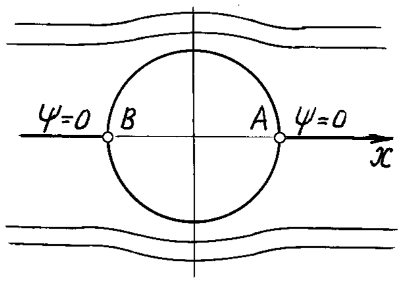
va bundan ixtiyoriy o‘zgarmasgacha aniqlik bilan

$$\varphi_{\bullet} = u_0 x.$$

Oqim funksiyasi uchun $d\psi = u_x dy - u_y dx = u_0 dy$ va $\psi_{\bullet} = u_0 y$. Agar, qabul qulingan shartga ko‘ra, $u_0 = 1$ bo‘lsa, u holda $\varphi_{\bullet} = x$ va $\psi_{\bullet} = y$. Dipol momentini chiqarish uchun bajariladigan amallarni soddalashtirib keltirsak, $M = 2\pi$, u holda $\varphi_D = \frac{x}{x^2 + y^2}$ va $\psi_D = -\frac{y}{x^2 + y^2}$. Potensiallar va oqim funksiyasini qo‘shsak, $\varphi = x + \frac{x}{x^2 + y^2}$ va $\psi = y - \frac{y}{x^2 + y^2}$.

Oqim chiziqlarini topish uchun oqim funksiyasini o‘zgarmasga tenglashtiramiz: $\psi = y - \frac{y}{x^2 + y^2} = C$, bu yerdan

$$y\left[\left(x^2 + y^2\right) - 1\right] = C\left(x^2 + y^2\right). \tag{4.34}$$



4.12-rasm. (4.34) yechimda nolinchi oqim chiziqning sxematik tasviri.

Bundan kelib chiqadiki, oqishning oqim chiziqlari uchinchi tartibli egri chiziqlar oilasidan iborat ekan. Nolinchi oqim chizg‘ini, ya’ni $C = 0$ uchun egri chiziqni topaylik. Bu ikkita tenglamani beradi:

$$y = 0 \text{ va } x^2 + y^2 = 1,$$

ya’ni oqim chizig‘i *Ox* o‘qni va markazi koordinatalar boshida bo‘lgan birlik aylanani ifodalaydi (4.12-rasm). Bu holat aylanani qattiq chegara deb, uning tashqarisidagi oqishni qarashga imkon beradi, yani bu cheksiz uzunlikdagi silindrning aylanib oqishi masalasiga keladi.

Silindrdan yetarlicha katta uzoqlikda tezlik *Ox* o‘q bo‘ylab yo‘nalgan bo‘lishini va $u_\infty = 1$ ekanligini ko‘rsataylik. Tezlikning proeksiyalarini topaylik:

$$u_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x + \frac{x}{x^2 + y^2}\right) = 1 + \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2} = 1 - \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2};$$

xuddi shunday

$$u_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(x + \frac{x}{x^2 + y^2} \right) = -\frac{2xy}{\left(x^2 + y^2\right)^2}.$$

Keyingi hisoblarda $x = r\cos\theta$ и $y = r\sin\theta$ ekanligini e'tiborga olib, qutb koordinatalariga o'tish qulayroq. Bu qiymatlarni u_x va u_y tezlik komponentalari ifodasiga qo'yamiz:

$$u_x = 1 - \frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{r^2}; \tag{4.35}$$

$$u_y = \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}. \tag{4.36}$$

Limitga o'taylik. $r \to \infty$ da $u_{x(\infty)} = 1$ va $u_{y(\infty)} = 0$, ya'ni talab qilingan narsa isbotlandi.

4.12-rasmda ko'rsatilgan *A* va *B* nuqtalar *maxsus* yoki *kritik nuqtalar* deb ataladi, chunki bu nuqtalarda tezlik nolga teng. Buning to'g'ri ekanligini ko'rsataylik. Tezlik potensiali uchun ifodani qutb koordinatalarida yozaylik:

$$\varphi = x + \frac{x}{x^2 + y^2} = r\cos\theta + \frac{r\cos\theta}{r^2}; \quad \varphi = \left(r + \frac{1}{r} \right)\cos\theta \tag{4.37}$$

Xuddi shunday, oqim funksiyasining ifodasini ham chiqarish mumkin:

$$\psi = \left(r - \frac{1}{r} \right)\sin\theta \cdot$$

Ixtiyoriy oqim chizig'idagi ixtiyoriy nuqtaning tezligi proeksiyalarini topaylik:

$$u_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\left(r + \frac{1}{r} \right)\cos\theta = \left(1 - \frac{1}{r^2} \right)\cos\theta;$$

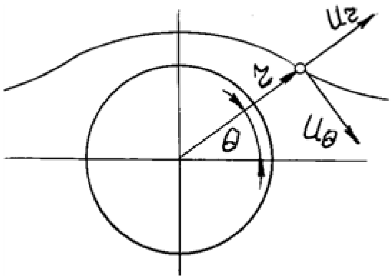
$$u_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \left(1 + \frac{1}{r^2} \right)\frac{\partial}{\partial \theta}\cos\theta = -\left(1 + \frac{1}{r^2} \right)\sin\theta.$$

Silindrning sirti bo'ylab tezlikning taqsimotini qaraylik. Silindrning *r*=1 sirtida tezlikning normal tashkil etuvchisi nolga teng: $u_r = 0$, ya'ni aylanib oqish uzluksiz. Bu suyuqlikni chegaradan o'tkazmaslik sharti. Ikkinchi komponenta esa $u_\theta = -2\sin\theta$ bo'lib, bu tezlikning urinma tashkil etuvchisi sinusoidal qonun bilan o'zgarishini bildiradi. U faqat θ dan bog'liq bo'lib, silindrning radiusi *r* dan bog'liq emas. Umumiy holda, $u_\infty \neq 1$ bo'lganda

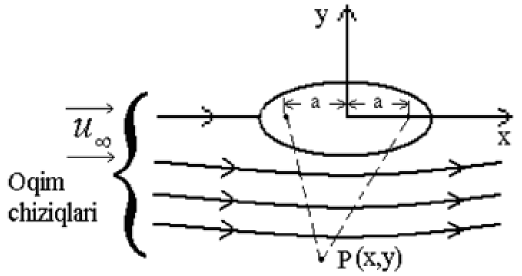
$$u_\theta = -2u_\infty \sin\theta, \tag{4.38}$$

bunda manfiy ishora silindrning yuqori yarimida tezlik yo‘nalishi θ burchak hisobi yo‘nalishiga qarama-qarshi ekanligini bildiradi (4.13,*a*-rasm). Tezlik maksimal qiymatiga ±π/2 da erishadi: $u_\theta = 2u_\infty$.

A va *B* nuqtalarda ($\sin\theta = 0$) tezliklar nolga teng, ya’ni haqiqatan ham bu nuqtalar kritik nuqtalar hisoblanadi. Bir jinsli oqimda joylashgan manba (oval markazidan chapga *a* masofadagi nuqtada) va manfiy manba (xuddi shunday o‘ngdagi nuqtada) *Renkin ovali* atrofidan aylanib potensial oqish masalasini yuqoridagilar asosida yechish mumkin bo‘ladi (4.13,*b*-rasm).



a



b

4.13-rasm. Silindr (*a*) va oval (*b*) atrofida aylanib oqishda oqim chizig‘idagi nuqtaning tezligi komponentalari.

Oqimning ixtiyoriy *P*(*x*,*y*) nuqtasidagi tezlik oqimdagi manba va manfiy manbalar uchun quyidagi ifodalarni chiqarish bilan topiladi (u_∞=1):

$$u_x = 1 + \frac{Q}{2\pi}\left[\frac{x+a}{(x+a)^2+y^2} - \frac{x-a}{(x-a)^2+y^2}\right];$$

$$u_y = \frac{Q}{2\pi}y\left[\frac{1}{(x+a)^2+y^2} - \frac{1}{(x-a)^2+y^2}\right].$$

Kompleks o‘zgaruvchili funksiyalar nazariyasining ideal suyuqliklar tekis oqimini o‘rganishga qo‘llanilishi. Quyida qaraladigan usul tekis oqimlarni tahlil qilishda samarali usullardan biri hisoblanadi. Yuqorida olingan (4.17) – Koshi-Riman munosabatlari shuni ko‘rsatadiki, *x* va *y* haqiqiy o‘zgaruvchilardan bog‘liq ikkita φ va ψ funksiyalarning $\varphi(x,y) + i\psi(x,y)$ - kompleks kombinatsiyasi $z = x + iy$ kompleks o‘zgaruvchining analitik funksiyasidir. Boshqacha aytganda, bu shartlar shuni ko‘rsatadiki, shunday *W*=*W*(*z*) kompleks o‘zgaruvchili funksiya mavjudki, uning haqiqiy va mavhum qismlari mos ravishda φ va ψ funksiyalarga teng, ya’ni

$$W = W(z) = \varphi + i\psi\ .$$

Berilgan biror nuqtada $W(z)$ funksiya *analitik funksiya* deyiladi, agar u shu nuqtaning o'zida ham, uning biror atrofida ham differensiallanuvchi bo'lsa. Gidromexanikada $W(z)$ funksiya *kompleks potensial* deb ataladi. Ma'lumki, analitik funksiyalar va kompleks o'zgaruvchili funksiyalar nazariyasi klassik matematikada juda rivojlangan hisoblanadi. Shuning uchun bular haqida qisqacha tushunchalarni beramiz, qolgan to'laroq ma'lumotlarni o'quv darsliklaridan olish maqsadga muvofiq.

Kompleks o'zgaruvchili funksiyalar nazariyasidan ma'lumki, $W = \varphi + i\psi$ kompleks potensialdan $z = x + iy$ kompleks o'zgaruvchi bo'yicha hosila quyidagicha topiladi:

$$\frac{dW}{dz} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i\frac{\partial \psi}{\partial x} = u_x - iu_y. \qquad (4.39)$$

Bu ifoda *kompleks tezlik* deb ataladi. Bu miqdorning moduli tezlikning o'zini beradi, ya'ni

$$\left|\frac{dW}{dz}\right| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = u. \qquad (4.40)$$

3-masala. $W = az^2$ kompleks potensial uchun tezlik potensialini, oqim funksiyasini va harakat xarakterini aniqlang, bunda a – biror haqiqiy son.

Yechish. $W = \varphi + i\psi$ va $z = x + iy$ ekanligini e'tiborga olib, quyidagini yozamiz:

$$\varphi + i\psi = a(x + iy)^2 = ax^2 + 2aixy - ay^2 = a\left(x^2 - y^2\right) + i2axy.$$

Buni haqiqiy va mavhim qismlarga ajratsak,

$$\varphi = a\left(x^2 - y^2\right) \text{ va } \psi = 2axy.$$

Bunday oqim 2-masalada qaralgan edi. Bu yerda shunga e'tibor berish kerakki, kompleks potensial yordamida masala qisqa yo'l bilan yechiladi.

Kompleks tezlikni topamiz:

$$\frac{dW}{dz} = u_x - iu_y; \quad u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2ax; \quad u_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -2ay;$$

$$\frac{dW}{dz} = 2ax + i2ay = 2a(x + iy) = 2az;$$

$$u = \left|\frac{dW}{dz}\right| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = 2a\sqrt{x^2 + y^2} = 2ar,$$

ya'ni suyuqlik zarrachalari oqimning giperbolik chizig'i bo'ylab $u = 2ar$ tezlik bilan harakat qiladi.

Konform akslantirishlar. Akslantirilayotgan shakl ichidagi ixtiyoriy ikkita chiziqlar orasidagi burchaklar miqdori o'zgarmaydigan geometrik akslantirishlar *konform akslantirishlar* yoki *almashtirishlar* deb ataladi.

Konform akslantirishlar suyuqlik va gaz mexanikasida keng qo‘llaniladi. Bu yerda bu usulning umumiy qoidasinigina berib o‘tamiz: z tekislikda biror (A) shakl berilgan bo‘lib, uni ζ tekislikka akslantirish zarur bo‘lsin (4.14-rasm). Bu amalning bajarilishi uchun quyidagi shartning bajarilishi zarur: ζ va z o‘rtasidagi bog‘lanishni o‘rnatuvchi $\zeta = f(z)$ munosabat ma’lum bo‘lishi kerak. Bu bog‘lanish *akslantiruvchi funksiya* deb ataladi. Faraz qilaylik, u bizga ma’lum bo‘lsin. U holda, A konturning ixtiyoriy nuqtasi sifatida berilgan, masalan 1, nuqtada z_1 ni hisoblab, bu qiymatni uni akslantiruvchi funksiyaga qo‘yib, unga mos ζ_1 qiymatni topish mumkin va bu ζ tekislikda 1' nuqta bo‘ladi. Xuddi shunday amallar bajarib, 2, 3 va hokazo nuqtalar uchun 2', 3', ... larni topamiz. Natijada ζ tekislikda B konturni hosil qilamiz, ya’ni A kontur B konturga akslantirildi. Bunday akslantirishni *konform akslantirish* deb atash qabul qilingan. Kompleks o‘zgaruvchili funksiyalar nazariyasida isbotlanadiki, $\varphi'(z)$ hosilaning moduli akslantirishda sohaning chiziqli o‘lchamlari o‘zgarishini xarakterlaydi, uning argumenti esa radius-vektorning burilish burchagini aniqlaydi.

Bunda analitik funksiya yordamida amalga oshirilayotgan akslantirish akslantirayotgan funksiyaning hosilasi noldan farqli barcha nuqtalarda bu burchaklarni saqlab qoladi. Endi savolni quyidagicha qo‘yamiz: konform akslantirish usulini qo‘llash bilan qanday amaliy yutuqqa ega bo‘lish mumkin?

Bu savolga javob berish uchun eng muhim masalalardan biriga to‘xtalaylik. Ma’lumki, qanot hisobining eng bosh masalasi uning ko‘tarish kuchini aniqlashdan iborat. Buning uchun qanot atrofida aylanib oquvchi oqimning har bir nuqtasida zarrachalarning tezliklarini bilish zarur.

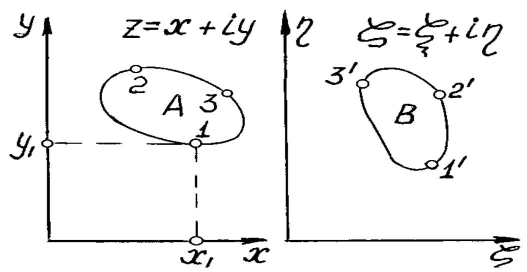
Qanotli profil yetarlicha murakkab shakl va nazariy jihardan bundagi tezliklarni hisoblashning hecham iloji yo‘q. Ammo, yuqorida ko‘rsatildiki, silindr uchun bu masala osongina yechiladi. Shuning uchun qanotli profil atrofidan aylanib oqish masalasini silindr atrofidan aylanib oqish masalasiga almashtira olsak, u holda masala yechilgan bo‘lar edi. Buni konform akslantirish bilan amalga oshirish mumkin.

4.15-rasmni qaraylik, bunda chapdagi shtrixlangan (profilning tashqarisi) sohani o‘ngdagi shtrixlangan (doiraning tashqarisi) sohaga konform aksaltirish bilan profil atrofidan aylanib oqish masalasi silindr atrofidan aylanib oqish masalasiga keltiriladi.

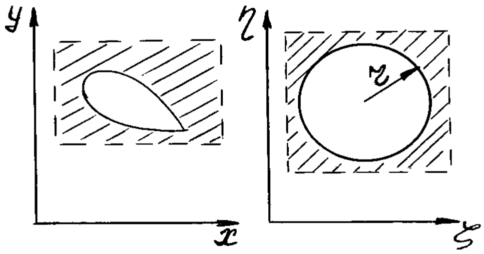
Silindrning ixtiyoriy nuqtasidagi tezlikni hisoblab, teskari akslantirish yordamida profilning mos nuqtasidagi tezlikni topish mumkin. Konform akslantirishning qaralayotgan masalasida aniq shartlar bilan talab qilinayotgan akslantiruvchi funksiyani topish masalasi alohida masaladir. Yuqorida qaralgan masalaning yechimi N.E.Jukovskiy tomonidan topilgan, akslantiruvchi funksiya

$$\zeta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{r^2}{z}\right) \tag{4.41}$$

ko‘rinishda olingan va u *Jukovskiy funksiyasi* deb ataladi.



4.14-rasm. Konform akslantirish sxemasi.



4.15-rasm. Profil atrofidan aylanib oqish masalasini silindr atrofida aylanib oqish masalasiga akslantirish sxemasi.

Namunaviy masalalar va ularning yechimlari

1-masala.Ushbu $u_x = -\dfrac{ax}{x^2+y^2}$, $u_y = \dfrac{ay}{x^2+y^2}$, $u_z = 0$ tezlik proeksiyalari bilan berilgan suyuqlik oqimidagi $A(x,0)$ va $B(0,y)$ koordinatali nuqtalarni tutashtiruvchi K kontur bo‘ylab tezlik sirkulyatsiyasini hisoblang, bunda a – biror o‘zgarmas son.

Yechish. Biror K kontur bo‘ylab tezlik sirkulyatsiyasi deb ushbu

$$\Gamma = \int_K \vec{u}d\vec{S}$$

chiziqli integralga aytiladi, bunda $\vec{u}d\vec{S} = u_x dx + u_y dy + u_z dz$ - ikkita $\vec{u}$ va $d\vec{S}$ vektorlarning skalyar ko‘paytmasi.

Uyurmasiz oqimda tezlik sirkulyatsiyasini tezlik potensiali orqali ifodalash mumkin, chunki $u_x dx + u_y dy + u_z dz = d\varphi$, ya’ni

$$\Gamma = \int_K d\varphi = \varphi_{K1} - \varphi_{K2} ,$$

bunda φ_{K1}, φ_{K2} - potensial funksiyaning qaralayotgan kontur chetlaridagi qiymatlari. Masalaning berilishidan ko‘rinadiki, suyuqlik oqimi tekis statsionar, $\dfrac{\partial u_y}{\partial x} = \dfrac{\partial u_x}{\partial y}$ (ya’ni $\omega_z = 0$) bo‘lgani uchun esa potensialdir. $u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = \dfrac{a}{r}$ - oqim tezligini hisoblab, φ - tezlik potensialini aniqlash mumkin, bunda r – mos nuqtaning qutb radiusi; θ burchak esa $\cos\theta = \frac{u_y}{u} = \frac{y}{r}$ munosabatdan topiladi. Bu yerdan kelib chiqadiki, $\vec{u}$ tezlik vektori nuqtaning qutb radiusiga perpendikulyar.

Shunday qilib,

$$u_r = 0,\ u_s = \frac{a}{r} = \frac{\partial\varphi}{\partial S} = \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}.$$

Bu yerdagi oxirgi tenglamani integrallab, funksiya potensialini topamiz: $\varphi = a\theta$. Uning bu qiymatiga $\psi = -a\ln r$ oqim funksiyasi mos keladi. Bu yerdan oqim chiziqlari tenglamasini topamiz: $\psi = -a\ln r = C$. Bu tenglamaga ko‘ra oqim chiziqlari markazi koordinata boshida yotgan $r = C$ aylanalardan iborat ekanligi ma’lum bo‘ladi.

Endi tezlik sirkulyatsiyasini hisoblaylik:

$$\Gamma = \oint_{A\breve{B}} d\varphi = \varphi_B - \varphi_A = \frac{C\pi}{2}.$$

Agar koordinata boshini o‘z ichiga oluvchi ixtiyoriy yopiq kontur bo‘ylab sirkulyatsiyani hisoblasak,

$$\Gamma = \int_K d\varphi = \varphi_{A1} - \varphi_A = 2\pi a.$$

Shuning uchun $a = \frac{\Gamma}{2\pi}$. Stoks teoremasiga ko‘ra bu holat intensivligi Γ sirkulyatsiyaga teng bo‘lgan uyurma ipida maxsus nuqta ($r = 0$) mavjudligini bildiradi. Bunda uyurma ipidan tashqarida esa oqish uyurmasizdir.

2-masala. $\varphi = x\left(x^2 - 3y^2\right)$ tezlik potensiali bilan aniqlanuvchi harakat uchun $A(x_1{=}0;\ y_1{=}0)$ va $B(x_1{=}1;\ y_1{=}1)$ nuqtalarni tutashtiruvchi to‘g‘ri chiziq kesmasi orqali suyuqlik sarfini hisoblang.

Yechish. Siqilmaydigan suyuqlik uchun φ tezlik potensiali va ψ oqim funksiyasi orasidagi (4.17) bog‘lanish ifodasidan foydalansak, berilgan oqim uchun oqim funksiyasining quyidagi qiymatini topamiz: $\psi = \int \frac{\partial\varphi}{\partial x} dy + c(x)$. Bunga $\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 3(x^2 - y^2)$ ifodani qo‘ysak va uni integrallasak, $\psi = y(3x^2 - y^2) + c(x)$. Ixtiyoriy $c(x)$ funksiyani aniqlash uchun oxirgi ifodani differensiallash va (4.17) bog‘lanishdan foydalanish bilan $\frac{\partial\psi}{\partial x}$ hosilaning qiymatlarini taqqoslaymiz. Natijada $6xy + \frac{dc}{dx} = 6xy$ ekanligi va bu yerdan esa $c(x)=const$ ekanligi kelib chiqadi. Shunday qilib, berilgan oqish uchun $\psi = y(3x^2 - y^2) + const$ ekan. AB chiziq orqali suyuqlik sarfi oqim funksiyasining chiziq oxirgi nuqtalaridagi qiymatlari farqidan topiladi, ya'ni $Q = \psi_B - \psi_A = 2\,m^3 / s$.

3-masala. Tekis siqilmaydigan suyuqlik oqimida tezlikning tashkil etuvchilari ushbu $u_x = x - 4y,\ u_y = -(y + 4x)$ tenglamalar bilan berilgan bo'lsin. Oqim funksiyasining ifodasini toping. Potensial oqimda tezliklar potensiali ifodasini oling.

Yechish. Ma'lumki,

$$u_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} = x - 4y,\ u_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -(y + 4x).$$

Bu yerda birinchi tenglamadan quyidagini topamiz:

$$\psi = \int (x - 4y)dy + f(x) + C = xy - 2y^2 + f(x) + C .$$

x = 0, y = 0 bo'lganda $\psi_0 = 0$ ekanligidan C = 0 va $\psi = xy - 2y^2 + f(x)$. $f(x)$ funksiyani quyidagi shartdan topamiz :

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = y + \frac{d}{dx} f(x) = -u_y = y + 4x .$$

Demak, $f(x) = \int 4x dx = 2x^2$. Shunday qilib,

$$\psi = xy + 2(x^2 - y^2).$$

Suyuqlik harakatining xarakterini aniqlash uchun tezlik rotorining (uyurmaning) $\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right)$ tashkil etuvchisini topish lozim. Ma'lumki, $\frac{\partial u_y}{\partial x} = -4;\ \frac{\partial u_x}{\partial y} = -4$ ekanligidan $\omega_z = 0$, ya'ni suyuqlik oqimi potensial ekan. Potensial oqim uchun $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = u_x = x - 4y$ ekanligidan

$$\varphi = \int (x - 4y)dx + f_1(y) + C_1 .$$

Xuddi yuqoridagidek, x = 0, y = 0 bo'lganda $\psi_0 = 0$ ekanligidan C_1=0 va $\varphi = \frac{x^2}{2} - 4xy + f_1(y)$. Endi esa $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -4x + \frac{d}{dy} f_1(y) = u_y = -y - 4x$ ekanligidan $f_1(y) = -\int y dy = -\frac{y^2}{2}$ va tezlik potensiali $\varphi = \frac{1}{2}(x^2 - y^2) - 4x$ topiladi.

4-masala. Kompleks potensial ushbu

$$W(z) = U(z + r_o^2 / z) - \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z \tag{4.42}$$

funksiya bilan berilgan bo‘lsin. Bu funksiya uchta sodda oqimlarning kompleks potensiallari yig‘indisidan iborat murakkab oqimni ifodalaydi. Bu funksiyadan har bir bunday kompleks potensialni ajrating va oqimning xarakterini aniqlang.

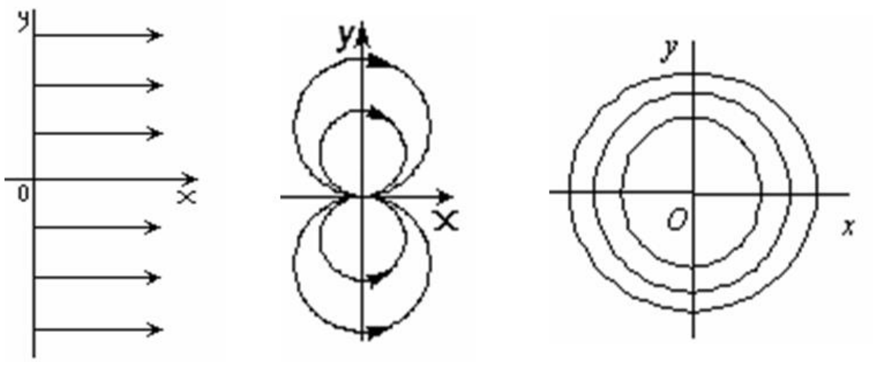
Yechish. (4.42) kompleks potensialni quyidagi ko‘rinishga keltiramiz:

$$W(z) = Uz + Ur_o^2 / z - \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln z\,.$$

Bu tenglamadagi har bir qo‘shiluvchi sodda oqimlarning kompleks potensialini ifodalaydi: $W_1 = Uz$, $W_2 = Ur_0^2 / z$, $W_3 = -\frac{\Gamma}{2\pi i}\ln z$. Ushbu $W_1 = \varphi_1 + i\psi_1$ kompleks potensial bilan ifodalanuvchi oqimni qaraylik. $z = x + iy$ ekanligini e’tiborga olsak, bu potensial uchun $W_1 = \varphi_1 + i\psi_1 = U(x+iy)$ bo‘ladi. Bundan esa $\varphi_1 = Ux$; $\psi_1 = Uy$. Bu oqim uchun oqim chiziqlari tenglamasi $\psi_1 = Uy = const$ kabi, ya’ni u $W_1 = Uz$ kompleks potensial uchun Ox o‘q bo‘ylab U tezlik bilan ilgarilanma harakatlanayotgan oqimni ifodalaydi (4.16,*a*-rasm).

$W_2 = Ur_0^2 / z$ kompleks potensial esa koordinatalar boshida joylashgan dipoldan tarqalayotgan oqimni ifodalaydi. Bu dipolning momenti quyidagicha: $M = -2\pi U r_0^2$ (4.16,*b*-rasm). Dipolning tezliklari potensiali va oqim funksiyasi quyidagicha:

$$W_2 = \varphi_2 + i\psi_2 = \frac{U}{r} r_0^2(\cos\theta - i\sin\theta);\ \varphi_2 = \frac{U}{r} r_0^2 \cos\theta;\quad \psi_2 = -\frac{U}{r} r_0^2 \sin\theta\,.$$



a) *b*) *c*)

4.16-rasm. Suyuqlik oqishining ko‘rinishlari:
a) ilgarilanma oqish; *b*) dipoldan oqish; *c*) sirkulyatsion oqish.

Uchinchi $W_3 = -\frac{\Gamma}{2\pi i}\ln z$ kompleks potensial koordinatalar boshida joylashgan uyurma nuqtasidan hosil bo‘layotgan sirkulyatsion oqimni ifodalaydi (4.16,*c*-rasm).

Tekis potensial uyurma – bu shunday statsionar tekis uyurmasiz harakatki, bunda suyuqlik zarrachalari markaziy nuqta (uyurma markazi) atrofidagi konsentrik aylanalar bo'ylab harakat qiladi. Bu harakatning «uyurma» deb atalishiga qaramasdan, u sirkulyatsion uyurmasiz harakardir. Bunga mos keluvchi tezliklar potensialini va oqim funksiyasini topish uchun W_3 ning ifodasida $z = re^{i\theta}$ almashtirish olib, uni $W_3 = \varphi_3 + i\psi_3 = i\dfrac{\Gamma}{2\pi}(\ln r + i\theta)$ kabi yozamiz.

Shunday qilib,

$$\varphi_3 = -\frac{\Gamma}{2\pi}\theta = -\frac{\Gamma}{2\pi}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}; \quad \psi_3 = \frac{\Gamma}{2\pi}\ln r = \frac{\Gamma}{2\pi}\ln\sqrt{x^2+y^2}$$

Bu holda $\psi_3 = \dfrac{\Gamma}{2\pi}\ln r = const$ tenglama bilan ifodalanuvchi oqim chiziqlari markazi koordinata boshida bo'lgan konsentrik aylanalarni ifodalaydi. Bu holat manba va tekis uyurma masalalari o'zaro qo'shma ekanligini bildiradi.

5-masala. Potensial oqim ushbu φ = -exp(x^2-y^2)cos(2xy) ifoda bilan berilgan qonuniyat asosida kechayotgan bo'lsa, uni Maple matematik paketi yordamida tahlil qiling.

Yechish. Ushbu ifoda deformatsiyalanmaydigan to'gri burchak ichida potensial suyrilikni ifodalovchi Laplas tenglamasining quyidagi

$$x = 0 \text{ da } u = -\partial\varphi/\partial x = 0 \quad \text{va} \quad y = 0 \text{ da } v = -\partial\varphi/\partial y = 0$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi yechinidan iborat.

Buning Maple matematik paketi yordamidagi ketma-ket tahlilini amalga oshirib borish bilan bu jarayonning fizik xossalarini kengroq tushunib boramiz. Avvalo φ funksiyaning o'zini, keyin esa oqim tezligi komponentalarini, oqim tezligi modulini hisoblash komandalarini ketma-ket yozamiz:

```
> phi:=-exp(x^2-y^2)*cos(2*x*y);
```

$$\phi := -\mathbf{e}^{(x^2-y^2)}\cos(2\,x\,y)$$

```
> U:=-diff(phi,x);
```

$$U := 2\,x\,\mathbf{e}^{(x^2-y^2)}\cos(2\,x\,y) - 2\,\mathbf{e}^{(x^2-y^2)}\sin(2\,x\,y)\,y$$

```
> V:=-diff(phi,y);
```

$$V := -2\,y\,\mathbf{e}^{(x^2-y^2)}\cos(2\,x\,y) - 2\,\mathbf{e}^{(x^2-y^2)}\sin(2\,x\,y)\,x$$

```
> q:=sqrt(U^2+V^2);
```

$$q := \mathrm{sqrt}\Big((2\,x\,\mathbf{e}^{(x^2-y^2)}\cos(2\,x\,y) - 2\,\mathbf{e}^{(x^2-y^2)}\sin(2\,x\,y)\,y)^2 + (-2\,y\,\mathbf{e}^{(x^2-y^2)}\cos(2\,x\,y) - 2\,\mathbf{e}^{(x^2-y^2)}\sin(2\,x\,y)\,x)^2\Big)$$

> simplify(%);

$$2\sqrt{e^{(2(x-y)(x+y))}(x^2+y^2)}$$

> diff(U,x)+diff(V,y);

$$0$$

Bu oxirgi komanda berilgan φ funksiya ifodasining Laplas tenglamasini qanoatlantirishini ko‘rsatadi. Demak tahlilni davom ettirgan holda jarayonning ψ oqim chiziqlarini hamda oqim tezligi moduli q ning taqsimotini qurish mumkin.

> psi:=int(U,y);

$$\psi := 2\,\frac{e^{(x^2-y^2)}\tan(x\,y)}{1+\tan(x\,y)^2}$$

> with(plots):

> contourplot(exp(x^2-y^2)*sin(2*x*y),x=-3..3,y=0..0.5, grid=[15,15], contours=[0.05,0.1,0.2,0.4,0.6,0.8,1,2,4,8,10,12], numpoints=4000);

> contourplot(exp(x^2-y^2)*abs(sin(2*x*y)),x=-2.5..2.5, y=0..0.5, grid=[15,15], contours=[0.05,0.1,0.2,0.4,0.6,0.8,1,2,4,8,10,12],numpoints=4000);

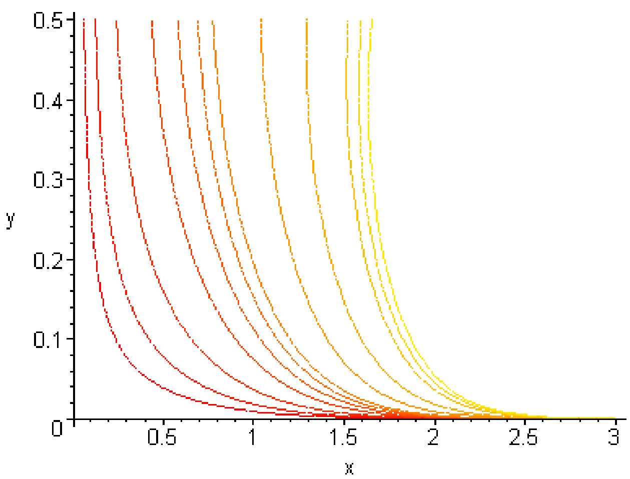
Yechimning to‘g‘riligini tekshirish:

> a:=diff(psi,y);

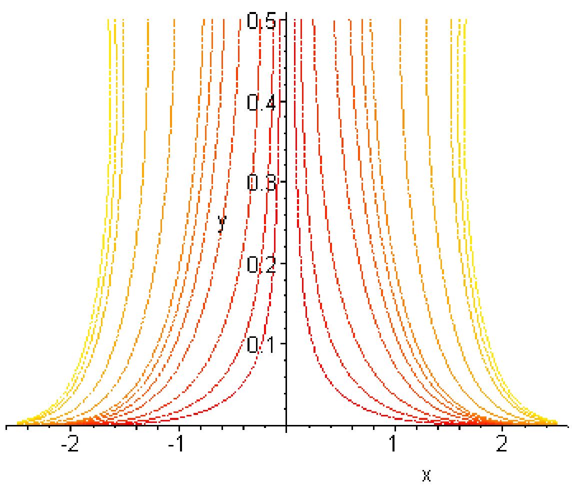
$$a := -4\,\frac{y\,e^{(x^2-y^2)}\tan(x\,y)}{1+\tan(x\,y)^2}+2\,e^{(x^2-y^2)}\,x-\frac{4\,e^{(x^2-y^2)}\tan(x\,y)^2\,x}{1+\tan(x\,y)^2}$$

> simplify(%);

$$-2\,\frac{e^{((x-y)(x+y))}(2\,y\tan(x\,y)-x+\tan(x\,y)^2\,x)}{1+\tan(x\,y)^2}$$



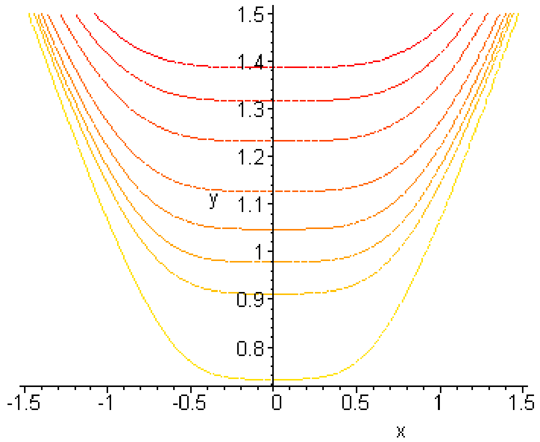
4.17-rasm. Deformatsiyalanmay-digan to‘gri burchak ichida potensial suyrilikning oqim chiziqlari taqsimoti.



4.18-rasm. Tekislikda yassi potensial sharrachaning oqim chiziqlari taqsimoti.

> contourplot(2*sqrt(exp(2*(x^2-y^2)*(x^2+y^2))),x=-1.5..1.5,y=0..1.5, grid=[15,15],contours=[0.05,0.1,0.2,0.4,0.6,0.8,1,1.5], numpoints=4000);

Xulosa sifatida shuni ta'kidlaymizki, olingan yechim ushbu $|x|\leq 3$, $y<0,5$ cheklangan sohadagina o'rinli (4.18-rasm).



4.19-rasm. Tekislikdagi yassi potensial sharrachaning oqimida oqim tezliklari modullarining (q) qiymatlariga teng chiziqlar taqsimoti: 1 - q=0.05; 2 - q=0.1; 3 - q=0.2; 4 - q=0.4; 5 - q=0.6; 6 - q=0.8; 7 - q=1.0; 8 - q=1.5.

Topshiriqlar

1. Siqilmaydigan ideal suyuqlikning statsionar oqimida doiraviy silindrning sirkulyatsion suyriligini ifodalovchi ushbu $W(z)=U(z+r_o^2/z)+\dfrac{\Gamma}{2\pi i}\ln z$ kompleks potensial uchun natijaviy oqimning tezlik potensialini va oqim funksiyasini toping. Aylanib oqayotgan konturning tenglamasini chiqaring, hamda shu oqim va kontur bo'ylab tezliklar taqsimotini toping (4-namunaviy masala yechimidan foydalaning).

2. Harakat $W(z)=(1+i)\ln(z^2-1)+(2-3i)\ln(z^2-4)+1/z$ kompleks potensial bilan aniqlanadi. $x^2+y^2=9$ tenglama bilan aniqlanuvchi aylana orqali suyuqlik sarfini aniqlang va shu aylana bo'ylab Γ tezlik sirkulyatsiyasini toping.

3. Siqilmaydigan ideal suyuqlikning statsionar oqimida doiraviy silindrning sirkulyatsion suyriligini ifodalovchi $W(z)=U(F(z)+r_o^2/F(z))+$ $+\dfrac{\Gamma}{2\pi i}\ln F(z)$ - kompleks porensialga mos [-a,a] kesmada plastinkaning suyriligini ifodalovchi ushbu $W(z)=\dfrac{1}{2}U(z+\sqrt{z^2-a^2})+\dfrac{1}{2}U(z-\sqrt{z^2-a^2})+$ $+\dfrac{\Gamma}{2\pi i}\ln(z+\sqrt{z^2-a^2})$ kompleks potensial uchun oqimning tezlik potensialini va oqim funksiyasini toping. Aylanib oqayotgan konturning tenglamasini chiqaring, hamda shu oqim va kontur bo‘ylab tezliklar taqsimotini toping (4-namunaviy masala yechimidan foydalaning).

4. Siqilmaydigan ideal suyuqlikning statsionar oqimida *a* va *b* yarim o‘qli ellipsning suyriligini ifodalovchi ushbu

$$W(z)=\frac{1}{2}U(z+\sqrt{z^2-(a^2-b^2)})+\frac{1}{2}U(z-\sqrt{z^2-(a^2-b^2)})+$$
$$+\frac{\Gamma}{2\pi i}\ln(z+\sqrt{z^2-(a^2-b^2)})$$

kompleks potensial uchun oqimning tezlik potensialini va oqim funksiyasini toping. Aylanib oqayotgan konturning tenglamasini chiqaring, hamda shu oqim va kontur bo‘ylab tezliklar taqsimotini hamda elliptik silindrga ta'sir etayotgan kuch momentini toping (4-namunaviy masala yechimidan foydalaning).

Sinov savollari

1. Potensial oqim va ularni ustma-ust qo‘yish deganda nimani tushunasiz?
2. Potensial oqimni hisoblashning qanday usullarini bilasiz?
3. Manma va manfiy manba uchun oqim funksiyasi qanday ifodalanadi?
4. Doiraviy silindr atrofidan nosirkulyatsion aylanib oqish masalasini tushuntiring.
5. Renkin ovali nima?
6. Superpozitsiya usulining g‘oyasini tushuntiring.
7. Potensial harakatda kritik nuqtalarni qanday tushunasiz?
8. Dipol deb nimaga aytiladi?
9. Ideal suyuqlik oqimi uchun kompleks o‘zgaruvchili funksiyalar nazariyasi elementlari qanday qo‘llaniladi?
10. Konform akslantirish nima?
11. Akslantiruvchi funksiya deb nimaga aytiladi?
12. Jukovskiy funksiyasi va oqim turlarini tushuntiring.

5-BOB.
SUYUQ MUHITNING SODDA MODELLARI

Ushbu bobda suyuq muhitning saqlanish asosiy qonunlarini ifodalovchi differensial tenglamalari keltirilgan. Saqlanish qonunlarining yozilishini ifodalovchi tenglamalarning bir nechta soddaroq koʻrinishlari berilgan va shularga asoslanib, suyuq muhitning bir nechta sodda modellari keltirilgan. Bu bobda keltirilgan baʼzi tushunchalar «Tutash muhit mexanikasi» fanida toʻlaroq yoritilgan. Shuning uchun baʼzi formulalar toʻgʻridan-toʻgʻri yozilgan. Ularni chiqarish talabaning mustaqil ishlashiga havola qilinadi.

5.1. Tutash muhit chekli hajmining asosiy fizik-mexanik xarakteristikalari

Tutash muhit bilan toʻldirilgan V hajm M - massaga, K - harakat miqdoriga (yoki impulsga), tanlangan nuqtaga nisbatan M - harakat miqdori momentiga (impuls momentiga), E - toʻliq energiyaga (kinetik va ichki energiyalar yigʻindisi) va S - entropiyaga ega. Bu miqdorlar quyidagi integrallar bilan hisoblanadi:

$$M = \iiint_V \rho dV, \quad K = \iiint_V \rho \vec{u} dV, \quad \mathrm{M} = \iiint_V (\vec{r} \times \rho \vec{u}) dV,$$

$$\mathrm{E} = \iiint_V \rho \left(\frac{u^2}{2} + e \right) dV, \quad \mathrm{S} = \iiint_V \rho s dV,$$

bunda dV – tanlangan V hajm elementi; tanlangan V hajmning harakat miqdori momenti aniqlanayotgan nuqtaga nisbatan zarrachaning $\vec{r}$ – radius vektori, ρ – zichligi, $\vec{u}$ – tezligi, e – ichki energiyasi va s – entropiyasi; E va S ga nisbatan ifodalar moddiy hajmni tashkil etuvchi zarrachalar hajmi boʻyicha toʻliq energiya va entropiyaning additivlik xossasi mavjud, degan faraz bilan yozilgan.

Integral belgisi ostiga kiruvchi miqdorlarning fazodagi taqsimoti uzluksiz boʻlmasligi, demakki, silliq boʻlmasligi ham mumkin. Bu miqdorlar fazodagi nuqtada yoki egri chiziq va sirt boʻylab integrallanuvchanlik xususiyatiga ega, deb faraz qilinadi.

5.2. Tutash muhit mexanikasining asosiy qonunlari

Massaning saqlanish qonuni. Mexanikaning asosiy qonunlaridan biri – bu massaning saqlanish qonunidir. Bu fizik qonun boʻlib, yorugʻlik tezligiga nisbatan juda kichik boʻlgan harakatlar uchun oʻrinli. Bu qonunning asosiy tenglamalari yuqorida 3.3-bandda aytib oʻtilgan edi.

Massaning saqlanish qonuni tenglamalari:

● Lagranj o‘zgaruvchilarida integral shaklida yozilishi:

$$\frac{d}{d\,t}\iiint\limits_V \rho dV = \iiint\limits_V q dV \tag{5.1}$$

- bu formula zichligi *q* ga teng fazoviy taqsimlangan manbalar (qo‘zg‘alishlarni yuzaga keltiruvchi boshqa jinsli jismlar yoki moddalar) mavjud bo‘lganda, vaqtning berilgan payti uchun, chekli hajmdagi massaning saqlanish qonunini ifodalaydi;

● Eyler o‘zgaruvchilarida integral shaklida yozilishi:

$$\iiint\limits_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial\, t} + div(\rho\vec{u}) - q\right] dV = 0\,; \tag{5.2}$$

● Eyler o‘zgaruvchilarida differensial shaklida yozilishi (yoki uzviylik tenglamasi):

$$\frac{d\rho}{d\,t} + \rho\,\mathrm{div}\vec{u} = q; \tag{5.3}$$

Massalar manbai mavjud bo‘lmaganda (5.3) tenglamaning yozilishi:

$$\frac{d\rho}{d\,t} + \rho\,\mathrm{div}\vec{u} = 0; \tag{5.3′}$$

● Lagranj o‘zgaruvchilarida differensial shaklida yozilishi (yoki uzviylik tenglamasi):

$$\frac{\partial\rho}{\partial\,t} + \mathrm{div}(\rho\vec{u}) = q. \tag{5.4}$$

Uzviylik tenglamasining xususiy hollari:

● suyuqlikning statsionar oqimi ($\frac{\partial\rho}{\partial\,t}$=0) uchun

$$\mathrm{div}(\rho\vec{u}) = q \quad \text{yoki} \quad \frac{\partial}{\partial x}(\rho u_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho u_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u_z) = q\,; \tag{5.5}$$

● siqilmaydigan suyuqlik ($\frac{d\rho}{d\,t}$=0) uchun

$$\mathrm{div}\vec{u} = \frac{q}{\rho} \quad \text{yoki} \quad \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{q}{\rho}\;; \tag{5.6}$$

● tekis (yassi) oqim uchun

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho u_y) = q\,;$$

● tekis (yassi) statsionar oqim uchun

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u_x)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho u_y)=q\,;$$

● siqilmaydigan suyuqlikning tekis (yassi) statsionar oqimi uchun

$$\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}=\frac{q}{\rho}\,;$$

● simmetriya holida bir o‘lchovli harakat uchun

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho u_x)=q\,.$$

Harakat miqdori qonuni. Moddiy nuqtalar sistemasi uchun harakat miqdori qonuni harakat miqdori o‘zgarishi va bu o‘zgarishni paydo qiluvchi kuchlar o‘rtasidagi bog‘lanishni o‘rnatadi. Suyuqlikning harakati qaralayotganda, moddiy nuqtalar sistemasi harakatidan farqli, butun hajm yoki sirt bo‘ylab uzluksiz taqsimlangan kuchlar bilan ish olib borishga to‘g‘ri keladi. Yuqorida 1.2-bandda suyuqlikning zarrachasiga qo‘yilgan kuchlarni ikki turga ajratish mumkinligi qayd etilgan edi, bular – massaviy va sirt kuchlari. Harakat miqdorining ifodasi esa 5.1-bandda ko‘rsatilgan.

Harakat miqdori qonuni quyidagicha talqin qilinadi: biror massalar sistemasi harakat miqdoridan vaqt bo‘yicha olingan hosila shu sistemaga ta’sir etayotgan tashqi kuchlar bosh vektoriga teng, ya’ni

$$\frac{dK}{dt}=\vec{F}^{M}+\vec{F}^{S}\,. \tag{5.7}$$

bu yerda $\vec{F}^{M}$ - massaviy kuchlar; $\vec{F}^{S}$ - hajmiy kuchlar.

Bundan tashqari, harakat miqdori tenglamasining kuchlanishlardagi ifodasini ham 1.2-bandda keltirib o‘tgan edik. Shuning uchun quyida oxirgi natijalarnigina qayd etamiz:

● harakat miqdori qonunining integral shaklida yozilishi

$$\frac{d}{d\,t}\iiint\limits_{V}\rho\vec{u}dV=\iiint\limits_{V}\rho\vec{F}dV+\iint\limits_{S}\vec{p}_n dS \tag{5.7′}$$

- biror S sirt bilan o‘ralgan V hajmga ega suyuqlik harakat miqdorining vaqt bo‘yicha o‘zgarishi shu hajmga ta’sir etayotgan tashqi kuchlarning bosh vektoriga teng;

● chekli vaqt oralig‘i uchun harakat miqdori qonunining integral shaklida yozilishi

$$\iiint\limits_{V}\rho\vec{u}dV\Big|_{t=t_2}-\iiint\limits_{V}\rho\vec{u}dV\Big|_{t=t_1}=\int\limits_{t_1}^{t_2}\left[\iiint\limits_{V}\rho\vec{F}dV+\iint\limits_{S}\vec{p}_n dS\right]d\,t \tag{5.7″}$$

- biror chekli vaqt oralig‘ida harakat miqdorining o‘zgarishi massaviy kuchlar va sirt kuchlari impulslari yig‘indisiga teng;

● harakat miqdori qonuninig Eyler o‘zgaruvchilarida integral shaklida yozilishi

$$\iiint_V [\frac{d}{d\,t}(\rho\vec{u}) + \rho\vec{u}\,\mathrm{div}\,\vec{u} - \rho\vec{F}]dV = \iint_S \vec{p}_n dS \qquad (5.7''')$$

● harakat miqdori qonunining differensial shaklida yozilishi:

$$\frac{d}{d\,t}(\rho\vec{u}) + \rho\vec{u}\,\mathrm{div}\,\vec{u} - \rho\vec{F} - \left(\frac{\partial\vec{p}_{nx}}{\partial x} + \frac{\partial\vec{p}_{ny}}{\partial y} + \frac{\partial\vec{p}_{nz}}{\partial z}\right) = 0 \qquad (5.8)$$

yoki

$$\rho\frac{d\vec{u}}{d\,t} + \vec{u}(\frac{d\rho}{d\,t} + \rho\,\mathrm{div}\,\vec{u}) = \rho\vec{F} + \frac{\partial\vec{p}_{nx}}{\partial x} + \frac{\partial\vec{p}_{ny}}{\partial y} + \frac{\partial\vec{p}_{nz}}{\partial z}$$

yoki

$$\rho\frac{d\vec{u}}{d\,t} + \vec{u}q = \rho\vec{F} + \frac{\partial\vec{p}_{nx}}{\partial x} + \frac{\partial\vec{p}_{ny}}{\partial y} + \frac{\partial\vec{p}_{nz}}{\partial z}$$

yoki massalar manbai yo‘q bo‘lsa, ya’ni $q = 0$ bo‘lganda

$$\rho\frac{d\vec{u}}{d\,t} = \rho\vec{F} + \frac{\partial\vec{p}_{nx}}{\partial x} + \frac{\partial\vec{p}_{ny}}{\partial y} + \frac{\partial\vec{p}_{nz}}{\partial z} \qquad (5.8')$$

yoki (5.8′) ning koordinat o‘qlaridagi proeksiyalarga nisbatan yozilishi:

$$\begin{aligned}
\frac{du_x}{d\,t} &= X + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{xz}}{\partial z}\right);\\
\frac{du_y}{d\,t} &= Y + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial z}\right);\\
\frac{du_z}{d\,t} &= Z + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z}\right).
\end{aligned} \qquad (5.8'')$$

(5.8′) tenglama *tutash muhitning kuchlanishlardagi harakat tenglamasi* deb ataladi.

1-izoh. Harakat miqdori qonunining integral shaklida yozilishi:

$$\iiint_V [\frac{d}{d\,t}(\rho\vec{u}) + \rho\vec{u}\,\mathrm{div}\,\vec{u} - \rho\vec{F} - \left(\frac{\partial\vec{p}_{nx}}{\partial x} + \frac{\partial\vec{p}_{ny}}{\partial y} + \frac{\partial\vec{p}_{nz}}{\partial z}\right)]dV = 0.$$

Massalar manbai mavjud bo‘lmaganda (5.3′) tenglamaga va Gauss-Ostrogradskiy teoremasiga ko‘ra oxirgi tenglama quyidagicha yoziladi:

$$\iiint_V \rho\frac{d\vec{u}}{d\,t}dV = \iiint_V \rho\vec{F}dV + \iint_S \vec{p}_n dS \quad \text{yoki} \quad \iiint_V (\rho\vec{F} - \rho\vec{w})dV + \iint_S \vec{p}_n dS = 0,$$

ya’ni har bir vaqt holatida ajratib olingan suyuqlik hajmiga qo‘yilgan barcha kuchlar (inertsiya kuchlarini ham qo‘shib hisoblaganda) yig‘indisi nolga teng, bu yerda $\vec{w}$ - tezlanish vektori.

2-izoh. Nuqta uchun yozilgan $\frac{d}{dt}(m\vec{u}) = \vec{F}$ - Nyutonning ikkinchi qonunidan kelib chiqadiki, harakat miqdorining paydo bo‘lish tezligi (agar boshlang‘ich tezlik nolga teng bo‘lsa) kuchga – harakat miqdorini paydo qiladigan manbaga teng. Yuqorida ko‘rsatilgan harakat miqdori o‘zgarishi haqidagi nuqtai nazardan suyuqlik hajmida $\vec{p}_n$ ikki holda paydo bo‘ladi: massaviy kuchlardan paydo bo‘ladigan impulsning hajmiy ajralishi hisobiga va sohaning chegarasi orqali o‘tayotgan impuls oqimi hisobiga.

Harakat miqdori momenti qonuni. *Mexanik sistema uchun harakat miqdori momenti qonuni quyidagicha talqin qilinadi: biror sistema harakat miqdorining to‘la momentidan vaqt bo‘yicha hosila shu sistemaga ta’sir etayotgan tashqi kuchlar bosh momentiga teng.*

Xuddi shu qonunni tutash muhit harakati uchun chiqaramiz.

1) Harakat miqdori momenti qonunining integral shaklda yozilishi. *M* massaning ilgarilanma harakatidan bog‘liq harakat miqdori momenti *orbital moment* deb ataladi va u *S* sirt bilan o‘ralgan to‘la *V* hajm uchun koordinatalar boshiga nisbatan quyidagiga teng:

$$\mathrm{L}_{orb} = \iiint_V (\vec{r} \times \rho\vec{u})dV . \qquad (5.9)$$

Ko‘pgina suyuqliklarda harakat miqdorining to‘la momenti orbital moment bilan mos tushadi.

Suyuqlik molekulyar tuzilishga ega bo‘lganligi uchun, uning holati, undagi molekulalar harakati va ularning o‘zaro ta’siriga ham bog‘liq bo‘ladi. Shuning uchun, suyuqlik zarrachalari harakat miqdorining to‘la momenti orbital moment va aylanayotgan molekulalarning yig‘indi momentini ifodalovchi, harakat miqdorining ichki momentlari (M_{im}) yig‘indisiga teng bo‘ladi, ya’ni massaning harakat miqdori to‘la momenti quyidagiga teng:

$$\mathrm{L} = \mathrm{L}_{orb} + \mathrm{L}_{im} = \iiint_V [(\vec{r} \times \rho\vec{u}) + \rho\,\mathrm{M}_{im}]dV. \qquad (5.10)$$

Harakat miqdori to‘la momentining o‘zgarishi kuch maydonlari (massaviy va sirt kuchlari maydoni, ichki momentning hajm bo‘yicha taqsimlangan manbalari borligi va sirt orqali o‘tayotgan ichki momentlar oqimi)ning borligiga bog‘liq. Tashqi kuchlar momentlari va ichki momentlar uchun ifodalarni keltiraylik.

Massaviy kuchlarning bosh orbital momenti:

$$\mathrm{M}_0 = \iiint_V (\vec{r} \times \rho\vec{u})dV . \qquad (5.11)$$

Sirt kuchlarining bosh orbital momenti:

$$\mathrm{M}_S = \iint_S (\vec{r} \times \vec{p}_n) dS. \qquad (5.12)$$

V hajmda *dt* vaqt birligi ichidagi ichki moment orttirmasini $\mathrm{M}_0^{ich} dt$ desak, u holda massaviy kuchlarning bosh orbital momenti:

$$\mathrm{M}_0^{ich} = \iiint_V \rho \Pi dV, \qquad (5.13)$$

bunda Π - massa birligi va vaqt birligiga keltirilgan moment.

S sirt orqali *dt* vaqt birligi ichidagi o‘tayotgan ichki moment oqimini $\mathrm{M}_S^{ich} dt$ desak, u holda sirt kuchlarining bosh orbital momenti:

$$\mathrm{M}_S^{ich} = \iint_S \vec{\pi}_n dS, \qquad (5.14)$$

bunda $\vec{\pi}_n$ - sirtdan o‘tayotgan ichki momentlar oqimi zichligi.

Shunday qilib, *harakat miqdori momenti qonuni quyidagicha*: *harakat miqdorining to‘la momenti L dan vaqt bo‘yicha hosila yuqorida qayd etilgan momentlar yig‘indisiga teng*, ya’ni

$$\frac{d}{dt} \mathrm{L} = \mathrm{M}_0 + \mathrm{M}_S + \mathrm{M}_0^{ich} + \mathrm{M}_S^{ich}. \qquad (5.15)$$

Bu tenglikka (5.10)-(5.14) ifodalarni qo‘ysak, suyuqlikda massalar manbasi yo‘q deb faraz qilsak va mos soddalashtirishlarni (ba’zi almashtirishlar, uzviylik tenglamasi, hakat miqdori qonunidan foydalanib) bajarsak, harakat miqdori momenti qonunining quyidagi integral shakliga ega bo‘lamiz:

$$\iiint_V [\rho \frac{d}{dt} \mathrm{M}_{im} - \rho \Pi - (\vec{i} \times \vec{p}_{nx} + \vec{j} \times \vec{p}_{ny} + \vec{k} \times \vec{p}_{nz})] dV = \iint_S \vec{\pi}_n dS \qquad (5.16)$$

2) Harakat miqdori momenti qonunining differensial shaklda yozilishi. (5.16) tenglikning o‘ng tarafiga sirt integrali uchun 1-ilovadagi Gauss-Ostrogradskiy formulasini qo‘llasak, u holda harakat miqdori momenti qonunining ushbu

$$\rho \frac{d}{dt} \mathrm{M}_{im} - \rho \Pi - \left(\frac{\partial \vec{\pi}_{nx}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{\pi}_{ny}}{\partial y} + \frac{\partial \vec{\pi}_{nz}}{\partial z} \right) = \vec{i} \times \vec{p}_{nx} + \vec{j} \times \vec{p}_{ny} + \vec{k} \times \vec{p}_{nz} \qquad (5.17)$$

differensial shaklidagi ifodasiga kelamiz.

Bundan kelib chiqadiki, moment saqlanish qonuni va kuchlanish tenzorining simmetriklik shartlari o‘rtasida quyidagi bog‘lanish bor:

● agar suyuqlik ichki harakat miqdori momentlarisiz bo‘lsa, ya’ni $\mathrm{M}_{im}=0$ shunday maydonki, hajmda ichki moment paydo bo‘lmaydi, ya’ni $\Pi=0$ va $\vec{\pi}_{ik} = 0$, u holda $\vec{i} \times \vec{p}_{nx} + \vec{j} \times \vec{p}_{ny} + \vec{k} \times \vec{p}_{nz} = 0$ yoki

$$(p_{xy} - p_{yx})\vec{k} + (p_{zx} - p_{xz})\vec{j} + (p_{yz} - p_{zy})\vec{i} = 0.$$

Bu tenglikdan kuchlanish tenzorining simmetrikligi kelib chiqadi:

$$p_{xy} = p_{yx}, \quad p_{zx} = p_{xz}, \quad p_{yz} = p_{zy}. \tag{5.18}$$

● agar muhitda kuchlanish tenzori simmetrik bo‘lsa, u holda harakat miqdori momenti qonuni quyidagicha yoziladi:

$$\rho \frac{d}{dt} \mathrm{M}_{im} - \rho \Pi - \left(\frac{\partial \vec{\pi}_{nx}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{\pi}_{ny}}{\partial y} + \frac{\partial \vec{\pi}_{nz}}{\partial z} \right) = 0. \tag{5.19}$$

Fizik nuqtai nazardan bu suyuqlikda ikkita o‘zaro bog‘liq bo‘lmagan qonunlar mavjud ekanligini bildiradi, bular: orbital momentning saqlanish qonuni va ichki momentning saqlanish qonuni. Bu yerda orbital momentning saqlanish qonuni harakat miqdori saqlanish qonunining natijasi.

Energiyaning saqlanish qonuni. Bunday fundamental fizik qonun – energiyaning saqlanish qonunini yozishdan avval suyuqlik hajmining to‘la energiyasi qanday energiyalar yig‘indisidan iborat ekanligini, tashqaridan oqib kelayotgan energiya turlarini va energiyaning bir turdan ikkinchi turga aylanishini e’tiborga olish zarur.

Biror chekli V hajmdagi tinch turgan suyuqlik massasi ichki energiyaga ega bo‘ladi. Agar suyuqlik harakatda bo‘lsa, u holda u kinetik energiyaga ham ega bo‘ladi. Shularga ko‘ra suyuqlikning to‘la energiyasi uning ichki va kinetik energiyalari yig‘indisiga teng, ya’ni

$$\mathrm{E} = \iiint_V \rho \left(\frac{u^2}{2} + e \right) dV. \tag{5.20}$$

1) Energiya saqlanish qonunining integral shaklda yozilishi. Suyuqlik biror massasining t_1 dan t_2 gacha vaqt oralig‘ida to‘la energiyasining o‘zgarishi massaviy va sirt kuchlarining ishi, hajmiy taqsimlangan issiqlik manbalari borligi natijasida shu vaqt oralig‘ida issiqlik energiyasining oqib kelishi, hamda sirt orqali oqib kelayotgan issiqlik hisobiga sodir bo‘ladi, ya’ni

$$\mathrm{E}\Big|_{t=t_2} - \mathrm{E}\Big|_{t=t_1} = A_V + A_S + Q_V + Q_S, \tag{5.21}$$

bunda:

● to‘la energiyaning ta’rifiga ko‘ra, t vaqt holatidagi to‘la energiyaning qiymati

$$\mathrm{E}\Big|_{t=t_2} - \mathrm{E}\Big|_{t=t_1} = \iiint_V \rho \left(\frac{u^2}{2} + e \right) dV\Big|_{t=t_2} - \iiint_V \rho \left(\frac{u^2}{2} + e \right) dV\Big|_{t=t_1}; \tag{5.22}$$

● massaviy kuchlarning (t_1; t_2) vaqt oralig‘ida bajargan ishi

$$A_V = \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_V \rho \left(\vec{F} \cdot \vec{u} \right) dV; \tag{5.23}$$

● sirt kuchlarining (t_1; t_2) vaqt oralig‘ida bajargan ishi

$$A_S = \int_{t_1}^{t_2} dt \iint_S (\vec{p}_n \cdot \vec{u}) dS ; \qquad (5.24)$$

● (t_1; t_2) vaqt oralig‘ida V hajmga kirib kelgan energiya (ε - energiyaning hajmiy yutilishi yoki ajratilishi)

$$Q_V = \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_V \varepsilon\, dV ; \qquad (5.25)$$

● (t_1; t_2) vaqt oralig‘ida V hajmga S sirt orqali, issiqlik o‘tkazuvchanlik natijasida kirib kelgan issiqlik miqdori

$$Q_S = \int_{t_1}^{t_2} dt \iint_S t_n dS . \qquad (5.26)$$

(5.22) - (5.26) ifodalardan foydalanib, (5.21) – energiyaning saqlanish qonunini integral shaklida yozamiz:

$$\frac{d}{dt}\iiint_V \rho\left(\frac{u^2}{2} + e\right) dV = \iiint_V \rho\left(\vec{F} \cdot \vec{u}\right) dV + \iint_S \left(\vec{p}_n \cdot \vec{u}\right) dS + \iiint_V \varepsilon\, dV + \iint_S t_n dS . \qquad (5.27)$$

Shunday qilib, *suyuqlik biror hajmi to‘la energiyasining o‘zgarish tezligi hajmiy va sirt kuchlari hisobiga paydo bo‘ladigan quvvatlar, energiyaning hajmiy kirish tezligi va sirt orqali energiya oqimining kirish tezligi yig‘indisiga teng.*

Agar massalar manbai bo‘lmasa, Koshi formulasi va Gauss-Ostrogradskiy formulalaridan foydalanib, hamda ba’zi almashtirishlarni bajarib, energiyaning saqlanish qonunini, ya’ni (5.27) ni umumiy holda quyidagicha yozamiz:

$$\iiint_V \left[\rho \frac{de}{dt} - \vec{p}_{nx}\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} - \vec{p}_{ny}\frac{\partial \vec{u}}{\partial y} - \vec{p}_{nz}\frac{\partial \vec{u}}{\partial z} - \varepsilon\right] = \iint_S t_n dS . \qquad (5.28)$$

2) Issiqlik oqimi vektori. t_n issiqlik oqimi uchun formulani chiqaramiz. 2.4-rasmdagi tetraedrni qaraymiz. Koshi formulasini chiqarishda qabul qilingan belgilashlarni kiritamiz. Energiyaning saqlanish qonuni formulasi (5.28) ni shu tetraedr uchun yozamiz va undagi integrallarga o‘rta qiymat haqidagi teoremani qo‘llab va tetraedr balandligini nolga intiltirib, ushbu

$$\vec{t} = t_x \vec{i} + t_y \vec{j} + t_z \vec{k} \qquad (5.29)$$

*issiqlik oqimi vektor*ini hosil qilamiz, bunda t_n=($\vec{t} \cdot \vec{n}$) miqdor shu vektorning $\vec{n}$ - normal yonalishidagi proeksiyasi:

$$t_n = t_x \cos(\vec{n}, x) + t_y \cos(\vec{n}, y) + t_z \cos(\vec{n}, z) . \qquad (5.30)$$

3) Energiya saqlanish qonunining differensial shaklda yozilishi. Energiyaning saqlanish qonuni formulasidagi issiqlik oqimi bilan bog‘liq sirt integralini, Gauss-Ostrogradskiy formulasidan foydalanib, hajm integraliga almashtirish uchun (5.30) formuladan foydalanamiz. Natijada, hajm bo‘yicha integralning nolga teng bo‘lishlik shartiga ko‘ra, energiya saqlanish qonunining differensial shakli quyidagicha yoziladi:

$$\rho\frac{de}{d\,t}=\vec{p}_{nx}\frac{\partial\vec{u}}{\partial x}+\vec{p}_{ny}\frac{\partial\vec{u}}{\partial y}+\vec{p}_{nz}\frac{\partial\vec{u}}{\partial z}+\varepsilon+\frac{\partial t_x}{\partial x}+\frac{\partial t_y}{\partial y}+\frac{\partial t_z}{\partial z}\,. \qquad (5.31)$$

5.3. Suyuq muhitning sodda modellari

Reologiya – bu mexanik yuklangan har xil oquvchi va plastik jismlarning holati haqidagi fan. Muhitlarning asosiy klassifikatsiyasi bu *nyuton va nonyuton muhitlar*. Reologiyaning boshlangich tuchunchasi bu *nyuton suyuqligi* (masalan, chuchuk suv, dengiz suvi, dizel yoqilg‘isi, mineral va sintetik yog‘lar va boshqa) bo‘lib, uning qovushoqligi deformatsiyalanish tartibidan bog‘liq emas, *ideal elastik jism*da esa vaqtning har bir momentidagi deformatsiya qo‘yilgan kuchlanishga proporsional. Bu tushunchalarni bir vaqtning o‘zida ham plastiklik (qovushoqlik) va ham elastiklik xossalarini namoyon qiluvchi jismlar uchun umumlashtiriladi. Agar muhitning qovushoqligi e’tiborga olinmasa, u *ideal muhit* deb qaraladi. Shuning uchun reologiyaning amaliy tadbiqlari aniq materialning yuklanish va oqishdagi holatini tavsiflaydi.

Reologik tenglama deb kuchlanish tenzori va deformatsiyalar tezligi tenzorini bog‘lovchi tenglamaga aytiladi.

Siljish kuchlanishi va siljish tezligi orasidagi bog‘lanishni ifodalovchi reologik tenglamalarga mos grafiklar *reologik egri chiziqlar* deb ataladi. Ma’lumki, nyuton suyuqligida siljish kuchlanishi siljish tezligiga to‘g‘ri proporsional. Bu bog‘lanish grafigi siljish kuchlanishi va siljish tezligining koordinata tekisligi boshidan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq bo‘lib, uning og‘ish burchagi nyuton suyuqligining qovushoqligiga teng.

Massalar manbai bo‘lmagan holda yuqorida keltirilgan saqlanish qonunlarining differensial shaklidagi formulalarini keltirib o‘tamiz:

● massaning saqlanish qonuni

$$\frac{d\rho}{d\,t}+\rho\,\mathrm{div}\vec{u}=0; \qquad (5.32)$$

● harakat miqdori qonuni

$$\rho\frac{d\vec{u}}{d\,t}=\rho\vec{F}+\frac{\partial\vec{p}_{nx}}{\partial x}+\frac{\partial\vec{p}_{ny}}{\partial y}+\frac{\partial\vec{p}_{nz}}{\partial z}; \qquad (5.33)$$

● harakat miqdori momentining saqlanish qonuni

$$\rho\frac{d}{dt}\,\mathrm{M}_{im}=\rho\Pi+\frac{\partial\vec{\pi}_{nx}}{\partial x}+\frac{\partial\vec{\pi}_{ny}}{\partial y}+\frac{\partial\vec{\pi}_{nz}}{\partial z}+\vec{i}\times\vec{p}_{nx}+\vec{j}\times\vec{p}_{ny}+\vec{k}\times\vec{p}_{nz}\;; \quad (5.34)$$

● energiyaning saqlanish qonuni

$$\rho\frac{de}{d\,t}=\varepsilon+\vec{p}_{nx}\frac{\partial\vec{u}}{\partial x}+\vec{p}_{ny}\frac{\partial\vec{u}}{\partial y}+\vec{p}_{nz}\frac{\partial\vec{u}}{\partial z}+\frac{\partial t_x}{\partial x}+\frac{\partial t_y}{\partial y}+\frac{\partial t_z}{\partial z}\,. \quad (5.35)$$

Bu tenglamalarda, odatda, $\vec{F},\,\Pi,\,\varepsilon$ funksiyalar ma'lum, $\rho,\,\vec{u},\,\vec{p}_{ij},\,\vec{\pi}_{ij},\,\vec{t},\mathrm{M}_{im}$ funksiyalar esa noma'lum bo'ladi. Bu yerdan ko'rinadiki, noma'lumlar soni tenglamalar sonidan ko'p. Demak, yuqoridagi saqlanish qonunlarining tenglamalari tutash muhitning harakatini ifodalovchi yopiq tenglamalar sistemasini olish uchun yetarli emas. Bu umumiy tenglamalarda muhitning o'zi haqidagi ma'lumotlar yo'q. Suyuqlikning haqiqiy xossalarini ma'lum aniqlikda ifodalovchi, yetarlicha qulay yopiq tenglamalar sistemasini va uning yechimini olish mumkin bo'lgan tutash muhit modelini kiritish lozim bo'ladi.

Kuchlanish tenzorini simmetrik (bunga ko'ra (5.19) tenglik o'rinli) deb faraz qilgan holda suyuq muhitning quyidagi sodda modellarini keltirib o'tamiz:

● *ideal suyuqlik modeli*: urinma kuchlanishlar nolga teng, faqat normal kuchlanishlargina kuzatiladi, ularning qiymati bir xil bo'lib, bunday skalyar miqdor *bosim* (*p*) deb ataladi; suyuqlik absolyut qattiq jismdek harakat qiladi; normal kuchlanishning qiymati kesim yuzachasining orientatsiyasidan bog'liq emas.

● *qovushoq suyuqlik modeli:* suyuqlikning harakatida normal kuchlanishlardan tashqari urinma kuchlanishlar ham kuzatiladi;

● *Nyuton bo'yicha qovushoq suyuqlik modeli:* suyuqlik absolyut qattiq jismdek harakat qiladi yoki tinch turadi, bunda faqat normal kuchlanishlar kuzatiladi; kuchlanish tenzorining komponentalari deformatsiyalar tezliklari tenzori komponentalarining chiziqli funksiyasi; suyuqlik izotrop, ya'ni barcha yo'nalishlar bo'yicha uning xossalari bir xil.

● *issiqlik o'tkazmaydigan suyuqlik modeli:* issiqlik oqimi vektori nolga teng ($\vec{t}=0$); odatda, bir vaqtning o'zida suyuqlik ideal deb ham qaraladi.

● *Furye issiqlik o'tkazuvchanlik qonuniga bo'ysinuvchi suyuqlik modeli:* muhit izotrop va unda ushbu

$$t_n=k\frac{\partial T}{\partial n}\quad \text{yoki}\quad \vec{t}=k\,\mathrm{grad}\,T\,, \quad (5.36)$$

Furye qonuni o'rinli, bunda k – issiqlik o'tkazuvchanlik koeffisienti; T – normal yo'nalishidagi temperatura.

● *siqilmaydigan suyuqlik modeli:* suyuqlikning harakati jarayonida uning zichligi o‘zgarmaydi ($\rho = \rho_0 = const$); agar suyuqlik bir jinsli bo‘lsa, u holda $\rho = \rho_0 = const$ va $\frac{d\rho}{dt} = 0$ (yoki $\frac{\partial\rho}{\partial t} + u_x\frac{\partial\rho}{\partial x} + u_y\frac{\partial\rho}{\partial y} + u_z\frac{\partial\rho}{\partial z} = 0$) tenglik aynan bajariladi; agar suyuqlik bir jinsli bo‘lmasa, u holda div$\vec{u}$=0 tenglik $\frac{d\rho}{dt} = 0$ tenglik bilan birgalikda qaraladi. Bu model tomchili suyuqliklarda va kichik tezlikdagi gazlarda ishlatiladi. Masalan, 100 m/s dan kichik tezlikdagi havoni (havoda tovush tarqalish tezligi 340 m/s) siqilmaydigan suyuqlik deb qarash mumkin.

● *siqiluvchan suyuqlik modeli:* zichlik, bosim va temperaturani bog‘lovchi ushbu $f(p,\rho,T) = 0$ holat tenglamasi o‘rinli. Xususiy holda, bu - ideal gazlar uchun Klapeyron tenglamasi; yuqoriroq bosimlarda Van der Vaal’s tenglamasi, Teta tenglamasi va hokazo.

● *Nonyuton suyuqlik modeli:* bunday suyuqliklarda kuchlanish tenzorining komponentalari deformatsiyalar tezliklari tenzori komponentalarining nochiziqli funksiyasi, xususan τ_{yx} ning *du*/*dy* dan bog‘liqlik grafigi koordinata boshidan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq bo‘lmaydi, bunda urinma kuchlanishning siljish natijaviy tezligiga nisbati bilan aniqlanuvchi qovushoqlik bo‘lib tuyilgan miqdor *du*/*dy* – siljish tezligi miqdoridan bog‘liq holda o‘zgaradi. Ba’zi bir suyuqliklar uchun bu miqdor urinma zo‘riqishning ta’siri davomiyligidan bog‘liq bo‘lishi mumkin. Nonyuton suyuqliklarning ana shunday anomal qovushoqlik xossalari hamda ularning modellari bilan magistratura mutaxassisligi fanlarida to‘laroq tanishiladi (7-bobda nonyuton suyuqliklar haqida ba’zi ma’lumotlar keltirilgan.

Bu modellarga oid tenglamalar sistemasini hamda ularga oid mashqlarni keyingi boblarda to‘laroq keltirib o‘tamiz.

Sinov savollari

1. Massaning saqlanish qonunini ayting.
2. Uzviylik tenglamasining differensial va integral shakllarini yozing.
3. Uzviylik tenglamasining xususiy hollarini ayting.
4. Harakat miqdori qonunini ayting va uning shakllarini yozing.
5. Tutash muhitning kuchlanishlardagi harakat tenglamasini yozing.
6. Harakat miqdori momenti qonunini ayting, uning shakllarini yozing.
7. Energiyaning saqlanish qonunini ayting va uning shakllarini yozing.
8. Issiqlik oqimi vektorini ayting.
9. Suyuq muhitning sodda modellarini ayting.
10. Nyuton va nonyuton suyuqliklar deb qanday suyuqliklarga aytiladi?

6-BOB.
IDEAL SUYUQLIK GIDRODINAMIKASI

Suyuqliklar mexanikasida «gidrodinamika» tushunchasi juda keng ma’noda ishlatiladi. Ushbu bobda bu tushuncha o‘zining klassik nuqtai nazarida ishlatiladi. Unda, suyuqlik harakatini yuzaga keltiruvchi sabablarni hisobga olmay suyuqlik oqimi o‘rganilgan kinematikadan farqli ravishda, harakatning o‘zi ham va uning paydo bo‘lishiga olib keluvchi sabablari ham o‘rganiladi. Suyuqlikning harakati kuchlar ta’sirida yuzaga keladi. Agar bosim – bu kuchning yuzaga nisbati ekanligini e’tiborga olsak, u holda suyuqlik zarrachalarining biror tezlik bilan harakati paydo bo‘lishiga bosimlar farqi sabab bo‘ladi deyish mumkin. Shunday qilib, suyuqlik oqimini hisoblash uchun nuqtadagi bosimni suyuqlik zarrachasi tezligi bilan bog‘lovchi tenglama zarur bo‘lar ekan.

6.1. Ideal suyuqlik gidrodinamikasining tenglamalari

Ideal suyuqlikning harakat tenglamasi. Ideal suyuqlikning harakat tenglamasini olish uchun (1.16) kuchlanishlarga nisbatan harakat tenglamasida urinma kuchlanishlardan hosilalarni nolga tenglashtirib, normal kuchlanishlarni esa bosim bilan almashtirib, ya’ni $p_{xx} = p_{yy} = p_{zz} = -p$ deb olish zarur bo‘ladi. Shunday qilib, gidrodinamika tenglamasi koordinat o‘qlaridagi proeksiyalarga nisbatan quyidagicha yoziladi:

$$X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{du_x}{dt}; \quad Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{du_y}{dt}; \quad Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{du_z}{dt} \qquad (6.1)$$

yoki vektor shaklida

$$\vec{F} - \frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\, p = \vec{a}\,. \qquad (6.2)$$

Bu (6.1) tenglamalar sistemasi *gidrodinamika uchun Eylerning differensial tenglamalari sistemasi* deb ataladi. Bu tenglama harakatdagi suyuqlikning tezligi va bosimi o‘rtasidagi bog‘lanishni ifodalaydi. (6.1) tenglamalar sistemasining o‘ng tarafidagi ifoda to‘la yoki substansional hosilani beradi. Tezlanishning konservativ hadlari mavjudligi bu sistemaning to‘rtta noma’lumni (tezlikning uchta proeksiyasi va bosimni) o‘z ichiga olgan nochiziqli tenglamalar sistemasi ekanligini bildiradi. Birlik massaviy kuchlarning proeksiyalari odatta masalaning qo‘yilishidan ma’lum bo‘ladi.

Ideal suyuqlik gidrodinamikasining tenglamalari sistemasi. Muhitning harakati bilan uning xossalari uzatiladi – bu gidrodinamik tenglamalar bilan tavsiflanayotgan eng muhim jarayonlardan biri.

Yuqoridagilarni e'tiborga olsak, u holda ideal, issiqlik o'tkazmaydigan va hajmiy issiqlik manbalariga ega bo'lmagan suyuqlik uchun gidrodinamika tenglamalari sistemasi quyidagicha yoziladi:

● uzviylik tenglamasi

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{u} = 0; \tag{6.3}$$

● harakat tenglamasi

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p\,; \tag{6.4}$$

● energiya tenglamasi

$$\rho \frac{dE}{dt} + p \operatorname{div} \vec{u} = 0; \tag{6.5}$$

● holat tenglamasi

$$f(p, \rho, T) = 0\,. \tag{6.6}$$

Bu oltita tenglamalar sistemasidan $u_x, u_y, u_z,\ p,\ \rho, T$ - oltita noma'lum funksiyalar izlanadi, bular x, y, z koordinatalar va t vaqtning funksiyalari. Bu tenglamalardan beshtasi xususiy hosilali birinchi tartibli nochiziqli tenglamalar bo'lib, bittasi chekli munosabatdan iborat. Odatda energiyani ifodalovchi ushbu $E=E(p,T)$ munosabat va $\vec{F}$ - massaviy kuchlar koordinatalar va vaqtning funksiyalari sifatida berilgan deb hisoblanadi.

Yuqoridagi tenglamalar sistemasini to'laroq qilib yozaylik:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial\rho}{\partial t} + u_x \frac{\partial\rho}{\partial x} + u_y \frac{\partial\rho}{\partial y} + u_z \frac{\partial\rho}{\partial z} + \rho\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right) = 0; \\
\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}; \\
\frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} = Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}; \\
\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} = Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}; \\
E = E(p,T)\,; \qquad f(p,\rho,T) = 0\,.
\end{gathered} \tag{6.7}$$

Tenglamalarning bu yopiq sistemasi orqali ideal, issiqlik o'tkazmaydigan suyuqliklarning ham statsionar (vaqt bo'yicha xususiy hosilalar nolga teng), ham nostatsionar oqishini, hamda suyuqlikning har xil sharoitda har xil jismlar atrofidan aylanib oqishini ifodalash mumkin. Xususan, ideal gazning holat tenglamasi ichki energiya tenglamasini soddalashtirish imkonini beradi va o‘z navbatida adiabatik qonun uchun ifodaga aylanadi. Shuni ta’kidlash lozimki, vaqt bo‘yicha Lagranj hosilasi (substansional hosila) uzatish effektini tavsiflaydi, o‘z navbarida bu tenglamalarning har biri muhitning siqiluvchaligi bilan ham bog‘liq.

Chegaraviy va boshlang‘ich shartlar. Bu tenglamalar sistemasining yechimlari to‘plami juda keng. Qo‘yilgan masalaning shartlaridan kelib chiqib, kerakli yechimni tanlashga imkon beruvchi shartlarni (chegaraviy va boshlang‘ich shartlarni) qo‘ya bilish kerak.

Bir qiymatlilik shartlari aniq oqimni ixtiyoriy oqimdan ajratib turadi. Fizik nuqtai nazardan bu shartlar oqimning boshlang‘ich vaqt momentidagi holatini va geometriyasini ifodalaydi. Matematik nuqtai nazardan esa bu shartlar dastlabki tenglamalarni integrallashda hosil bo‘ladigan o‘zgarmaslarni aniqlash imkonini beradi. Bu shartlar ikki turga bo‘linadi: chegaraviy va boshlang‘ich shartlar.

Chegaraviy shartlar suyuqlikdagi qattiq jismning geometrik shaklini va suyuqlikning ixtiyoriy vaqt momentida oqim chegaralaridagi harakat shartlarini ifodalaydi. Shunga ko‘ra ular ichki chegaraviy shartlar (masalan, kanal va quvurlardagi oqim, ichki chegaraviy masala) va tashqi chegaraviy shartlar (masalan, suyuqlik oqimidagi jism, tashqi chegaraviy masala)ga bo‘linadi.

Ideal suyuqlik uchun chegaraviy shartlar quyidagicha:

● agar suyuqlik qistirib mahkamlangan devor bilan chegaralangan bo‘lsa, u holda suyuqlik shu qistirib mahkamlangan sirtdan o‘ta olmaydi, ya’ni qo‘zg‘almas devorning sirtida normal bo‘lgan suyuqlik tezligi komponentasi nolga teng: $u_n = 0$ (umuman olganda, harakatlanayotgan sirtda u_n tezlik sirtning mos tezligi komponentasiga teng bo‘lishi zarur);

● agar o‘zaro aralashmaydigan suyuqliklar sirti qaralsa, u holda tutash sirtdagi har ikkala suyuqliklar bosimlari tengligi sharti va shu sirtda normal tezliklari tengligi sharti bajarilishi zarur.

• suyuqlik tinch turgan yoki harakatlanayotgan sirt bo‘ylab oqishi ham mumkin, bunday holda sirt bo‘ylab sirpanib qo‘zgalish sodir bo‘ladi, ya’ni qo‘zg‘almas devorning sirtiga urinma bo‘lgan suyuqlik tezligi komponentasi noldan farqli ($u_\tau \neq 0$) bo‘ladi va chegara nuqtalarning harakati shu sirt bo‘ylab ko‘chishlarda ifodalanadi.

*Boshlang‘ich shartlar*ning ma’nosi shundaki, $t=t_0$ vaqt momentida hisob sohasining ichida izlanayotgan parametrlar (oqimning izlanayotgan xarakteristikalari), masalan, muhitning uchta holat paramentlari $p(\vec{r},t_0)$, $\rho(\vec{r},t_0)$ va $T(\vec{r},t_0)$ hamda uning tezligi $v(\vec{r},t_0)$ taqsimoti berilgan bo‘ladi. Boshlang‘ich shartlar nostatsionar zarayonlar uchun muhim ahamiyatga ega, masalan, suyuqlikning sokin oqimi uchun ular boshlang‘ich yaqinlashish vazifasini bajaradi. Shu narsa e’tiborliki, *boshlang‘ich shartlarda berilayotgan* $\varphi=\varphi(\vec{r},t_0)$ *– skalyar miqdorlar maydoni soni modeldagi xususiy hosilali tenglamalar soniga teng bo‘lishi lozim.*

Statsionar jarayonlar uchun boshlang‘ich shart qo‘yilmaydi, chunki bunda vaqt bo‘yicha integrallash yo‘q.

Xususiy hol. Gidrodinamikaning tenglamalari sistemasi beshta tenglamani o‘z ichiga oladi, bular temperaturadan bog‘liq ρ – zichlik, $\vec{u}$ – tezlik, ε – ichki energiya zichligi uchun tenglamalar bo‘lib, umumiy holda bu tenglamalarning har biri $(\vec{x},t)$ – fazoviy va vaqt koordinatalaridan bog‘liq.

Avvalo yuqoridagi gidrodinamika tenglamalarini Eyler, konservativ shaklida, ya’ni boshlang‘ich qo‘zg‘almas koordinatalar sistemasiga nisbatan differensial shaklda yozaylik:

- massa $\partial\rho/\partial t + \nabla(\rho\vec{u}) = 0$; (6.3′)
- impuls $\partial(\rho\vec{u})/\partial t + (\nabla\rho\vec{u})\vec{u} = -\nabla p$; (6.4′)
- ichki energiya $\partial(\rho\varepsilon)/\partial t + p\nabla\vec{u} + \nabla(\rho\varepsilon\vec{u}) = 0$; (6.5′)

Muhitning harakati bilan uning xossalari uzatiladi – bu gidrodinamik tenglamalar bilan tavsiflanayotgan eng muhim jarayonlardan biri. Agar tenglamalarni Lagranj hosilasi, ya’ni

$$d/dt = \partial/\partial t + \vec{u}\nabla$$

– muhitning harakari bilan bog‘liq bo‘lgan koordinatalar sistemasida vaqt bo‘yicha hosila yordamida yozsak, u holda gidrodinamika tenglamalari sodda ko‘rinishni oladi. (6.3′) – (6.5′) tenglamalarda divergensiyani hisoblab, quyidagi Lagranj, konservativ ko‘rinishidagi tenglamalarga kelamiz:

- massa $d\rho/dt = -\rho\nabla\vec{u}$; (6.3″)
- impuls $\rho\, d\vec{u}/dt = -\nabla p$; (6.4″)
- ichki energiya $\rho\, d\varepsilon/dt = -p\nabla\vec{u}$. (6.5″)

Holat tenglamasi. Bu gidrodinamikaning (6.7) asosiy tenglamalar sistemasini qaralayotgan muhitning aniq termodinamik xossalarini tavsiflovchi holat tenglamalari bilan to‘ldiriladi.

Agar ideal muhit qaralsa, u holda uning holati faqat ikkita termodinamik parametr (muhit birlik massasi ε – ichki energiyasi va s – entropiyasi hamda ρ – zichlik (yoki V=1/ρ – nisbiy hajm), p – bosim, T – temperatura, h – entalpiya (issiqlik miqdori (grekcha enthálpiõ - isitaman)) parametrlar juftligi) dan bog‘liq bo‘ladi (V va ρ lar juftligidan tashqari). Bunday muhitlar *ikki parametrli* yoki *sodda muhitlar* deb ataladi. Ikki parametrli muhitning hamma termodinamik parametrlari uning berilgan ikki parametri bilan holat tenglamasi deb ataluvchi tenglama yordamida ifodalangan bo‘ladi.

Muhitning holati p – bosim, ρ – zichlik (yoki V – nisbiy hajm) va T – temperatura bilan

$$p = p\,(V,T)$$

kabi yoki umumiy holda

$$f\,(p,V,T) = 0$$

tenglama bilan ifodalanishi mumkin. Bu tenglama *muhit holatining termik tenglamasi* deb ataladi.

Holat termik tenglamasi hamma vaqt ham muhit termodinamik modelining to‘la xarakteristikalarini bermaydi. Masalan, ushbu $E = E\,(V,T)$ – holat tenglamasi V va T dan bog‘liq boshqa termodinamik miqdorlarnigina aniqlash imkonini beradi, bunda p va E lar o‘zaro bog‘liq bo‘ladi.

Holat tenglamasi ichki energiyaning lokal qiymatini muhitning zichligi va bosimi bilan bog‘laydi: $E = E\,(p, \rho)$.

Bunga misol qilib:

- ideal gaz

$$E = kT/[m(\gamma–1)] = p/[\rho(\gamma–1)];$$

- to‘yingan gaz (o‘zgarmas issiqlik sig‘imli ideal gaz)

$$E = c_V\,T = RT\,/(\gamma–1);$$

- siyraklashgan molekulali gaz uchun termik holat tenglamasi

$$p = f\,(V)\cdot T,$$

  bunda $f\,(V)$ – nisbiy hajmning biror funksiyasi;
- ideal politrop muhit uchun adiabatik qonun

$$p/\rho^{\gamma} = \text{const}$$

holat tenglamalarini keltirish mumkin, bu yerda muhit uchun $\gamma=c_p/c_V$ – issiqlik sig‘imlari nisbati, ya’ni adiabata ko‘rsatgichi (masalan, bir atomli gaz uchun γ = 5/3); m – molekulalarning massasi; k – Boltsman doimiysi; T – temperatura.

Zich gazlarning eng sodda termik holat tenglamasi quyidagicha:

$$p\,(V–b) = RT\,.$$

bunda b - o‘zgarmas molekulalar egallab turgan hajmni bildiradi; p - bosim esa $V \to b$ da cheklanmagan holda o‘sadi. Yetarlicha katta bosim va temperaturada (kritik qiymatlardan ham yetarlicha katta) bu tenglama qoniqarli aniqlikni beradi. Bunday gazda, xuddi to‘yingan gazdagi kabi, ichki energiya faqat temperaturaning funksiyasi bo‘ladi, o‘zgarmas issiqlik sig‘imi uchun esa Puasson adiabatasi tenglamasi quyidagicha:

$$p(V-b)^{\gamma} = \text{const.}$$

Bu holat tenglamasining murakkabroq holi bo‘lgan ushbu

$$p = \frac{\rho RT}{1-b\rho} - a\rho^2 = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}$$

Van-der-Vaals holat tenglamasiga bo‘ysinuvchi ideal gazni qaraylik, bunda *R, b, a* – musbat fizik o‘zgarmaslar, masalan, suv uchun a=5.468 · 10^{-3} atm·sm^6/mol; b = 30.52 sm^3/mol. Bu tenglama avvalgi holat tenglamalarini umumlashtiradi. U gaz kondensatsiyasi nuqtalariga yaqin jarayonlarni va suyuq fazaning ba’zi diapazonlari uchun haqiqiy bog‘lanishlarni tavsiflaydi. Bu tenglamaning $-a\rho^2$ qo‘shimcha hadi katta zichliklardagina ta’sirga ega, bu had orqali molekulalar o‘rtasidagi o‘zaro itarish kuchlarining paydo bo‘lishi hisobga olinadi. Shuning uchun bu tenglama suyuqlik va gazlar parametrlarining keng diapazonda o‘zgaruvchi qiymatlarida ham shu muhitlarning holatini qoniqarli tarzda tavsiflaydi, uni gaz va suyuq holatlar orasidagi interpolyatsion formula deb ham qarash mumkin. Van-der-Vaals tenglamasini suyuqlik va uning bug‘ termodinamik muvozanat holatlari orasida turgan ikki parametrli muhitlar holatini ifodalovchi tenglama deb ham ishlatish mumkin.

Ana shu fikrimizni tasdiqlash uchun amaliyotda samarali qo‘llanilib kelinayotgan Van-der-Vaals tenglamasinining xususiy holi bo‘lgan Ximpanning holat tenglamasini keltiraylik:

$$p = \frac{RT}{V-\beta} - \frac{\gamma}{(V-\alpha)(V-\delta)}.$$

Bu tenglama to‘rtta α, β, γ, δ – erkin parametrlar hisobiga real suyuqlikning ustivor sohasidagi termodinamik holatini tavsiflovchi izotermalarni beradi, masalan, T =555.22K temperaturali suv uhun bu tenglama quyidagicha yoziladi:

$$p = \frac{3.864 p_{kp} V_{kp}}{V - 0.2848 V_{kp}} - \frac{13.548 p_{kp} V_{kp}^2}{(V - 0.2317 V_{kp})(V + 2.144 V_{kp})},$$

bu yerda p_{kp}, V_{kp} – termodinamik kritik nuqtadagi bosim va hajm.

Murakkab termodinamik xossalar bilan berilgan gaz uchun $1<\gamma\leq 5/3$ bo‘lganda taqribiy holat tenglamasi quyidagicha:

$$p = A + B\rho^{\gamma},$$

bu yerda A va B umuman olganda entropiyadan bog‘liq, γ esa issiqlik sig‘imlari nisbati va u ixtiyoriy qiymat qabul qilishi mumkin.

Bu holat tenglamasining xususiy hollari quyidagilar:

- $\gamma = -1$ bo‘lganda ushbu holat tenglamasi

$$p = A - B/\rho$$

bilan berilgan gaz modeli *Chapligin gazi* deb ataladi;

- $\gamma = 3$ bo‘lganda *Bexert–Stanyukovich gazi* deb ataladi;
- $p = B\rho^{\gamma}$ bo‘lganda politrop barotropik jarayon uchun holat tenglamasi (γ - ixtiyoriy miqdor);
- $\gamma = 1$ va A=0 bo‘lganda to‘yingan gazning izotermik oqimi politrop jarayonga mos keladi;
- $\gamma = 1{,}4$ va A=0 bo‘lganda havoning adiabatik jarayoniga mos keladi;
- $\gamma = 2{,}7 \ldots 2{,}8$ bo‘lganda portlovchi modda detonatsiyalanganda paydo bo‘ladigan zich gazlar uchun.

Yuqori bosimli suv va boshqa suyuqliklar uchun ushbu

$$p = B[(\rho/\rho_0)^{\gamma} - 1]\ .$$

Tet holat tenglamasi qo‘llaniladi. Bu tenglama o‘zgarmas issiqlik sig‘imli to‘yingan gaz holat tenglamasiga o‘xshashligi yaqin. Tet tenglamasida B koeffisiyent entropiyadan kuchsiz bog‘langan (odatda bu bog‘lanishni hisobga olishmaydi va B ni o‘zgarmas deb hisoblashadi); γ - bu yerda, har doimgidek, issiqlik sig‘imlari nisbati emas, balki bu belgilash bo‘lib, Puasson tenglamasiga o‘xshash bo‘lsin uchun unda p o‘rniga $p+B$ kiritilgan. ρ_0 – suyuqlikning normal bosimidagi zichligi. Masalan, suv uchun: B = 300 MPa; γ = 7,15; ρ_0 = 1000 kg/m^3 ; simob uchun B=300 MPa; γ = 8,2; ρ_0 = 135000 kg/m^3 ; to‘rt xlorli uglerod uchun B=100 MPa; γ = 9,35; ρ_0 = 1600 kg/m^3 ; geptan uchun B=65,4 MPa; γ = 10,6; ρ_0 = 684 kg/m^3 ; silikon uchun B=59,7 MPa; γ = 9,1; ρ_0 = 760 kg/m^3. Normal bosim va temperaturada bu suyuqliklarning entropiyasi qiymatlari yaqin.

Adiabatik harakat. Suyuqlikning harakati *adiabatik harakat* deyiladi, agar suyuqlik tashqaridan issiqlik qabul qilmasa va tashqariga issiqlik bermasa, ya’ni issiqlik almashinish hodisasi yuz bermasa. Shuning uchun ideal suyuqlikning harakatini adiabatik harakat deb qarash mumkin. Adiabatik harakat uchun (6.3) tenglamadan div$\vec{u}$ ni topamiz va (6.4) tenglamaga qo‘yamiz:

$$\rho \frac{dE}{d\,t} - \frac{p}{\rho}\frac{d\rho}{d\,t} = 0\,.$$

Holat tenglamasini hisobga olganimizda ichki energiya p - bosim va ρ - zichlikning funksiyasi bo‘lib qoladi.

Shuni e’tiborga olib, oxirgi tenglikdan quyidagini yozamiz:

$$\rho\left(\frac{\partial E}{\partial p}\frac{dp}{d\,t} + \frac{\partial E}{\partial t}\right) - \frac{p}{\rho}\frac{d\rho}{d\,t} = 0$$

yoki

$$\rho\frac{\partial E}{\partial p}\frac{dp}{d\,t}+\left(\rho\frac{\partial E}{\partial\rho}-\frac{p}{\rho}\right)\frac{d\rho}{d\,t}=0\,.$$

Bu yerdan

$$\frac{dp}{d\rho}=\frac{\dfrac{p}{\rho^2}-\dfrac{\partial E}{\partial\rho}}{\dfrac{\partial E}{\partial p}}\,. \qquad (6.8)$$

(6.8) ning o‘ng tarafini p va ρ ning Q(p,ρ) funksiyasi deb belgilasak, quyidagi birinchi tartibli oddiy differensial tenglamaga ega bo‘lamiz:

$$\frac{dp}{d\rho}=Q(p,\rho)\,. \qquad (6.8')$$

Bu tenglama harakatlanayotgan zarracha bosimining zichlik o‘zgarishidan bog‘liqligini ifodalaydi va uning integrali quyidagiga teng:

$$\Im\,(p,\rho)=C\,, \qquad (6.9)$$

bu yerda C – harakatlanayotgan suyuqlik uchun o‘z qiymatini saqlovchi integrallash o‘zgarmasi. Zarrachadan zarrachaga o‘tishda C ning qiymati o‘zgarishi mumkin. Agar harakat Lagranj o‘zgaruvchilarida qaralsa, u holda C=C(a,b,c) deb yozish mumkin bo‘ladi.

(6.9) tenglik harakatlanayotgan zarracha zichligi faqat bitta bosimning funksiyasi ekanligini bildiradi:

$$\rho=\Phi(p,C)\,. \qquad (6.9')$$

ya’ni zarrachalar uchun barotroplik o‘rinli. (6.9) integral *adiabata* deb ataladi.

Ushbu $p=\dfrac{R_0}{m}\rho T$, c_v = *const* Klapeyron tenglamasiga bo‘ysinuvchi gazni qaraylik, bunda $\dfrac{R_0}{m}=R$ - universal gaz doimiysi; c_v - o‘zgarmas hajmda gazning issiqlik sig‘imi. Bunday farazda siqiluvchan suyuqlik zarrachasi uchun ushbu

$$p=C\rho^k \qquad (6.9'')$$

Puasson adiabatasi o‘rinli, siqilmaydigan suyuqlik holida esa $\rho(p)$ = C, bunda $k=\dfrac{c_p}{c_v}$ - adiabata ko‘rsatgichi; c_p - o‘zgarmas bosimda gazning issiqlik sig‘imi; C – ixtiyoriy o‘zgarmas bo‘lib, zarrachadan zarrachaga o‘zgarishi mumkin, statsionar harakatda u oqim chizig‘ida o‘zgarmas bo‘lib qoladi. Yuqorida aytilganlarga ko‘ra, ideal suyuqlikning oqimi uchun zichlikni har doim bosimning funksiyasi deb qarash mumkin, ya’ni $\rho = \rho(p)$.

Quyidagi ikki holni alohida-alohida qarab chiqamiz.

1) Adiabatik harakatda entropiya. Adiabatik harakatda suyuqlikning har bir bo‘lagidagi entropiya (shu bo‘lakning fazodagi ko‘chishida qaytariluvchan yo‘l bilan zarracha holatining bir nuqtadan ikkinchisiga o‘tishini ifodalovchi holat funksiyasi (muhit birlik massasiga nisbati) *entropiya* (grekcha entropia – o‘zgarib qolish, aylanib qolish) deb ataladi) o‘zgarmas bo‘lib qoladi. Agar suyuqlik massasi birligi nisbatiga keltirilgan entropiyani s bilan belgilasak, u holda harakatning adiabatik ekanligini ushbu

$$\frac{ds}{dt} = 0$$

tenglama bilan ifodalash mumkin, bunda vaqt bo‘yicha to‘la hosila ko‘chayotgan suyuqlik bo‘lagidagi entropiyaning o‘zgarishini ifodalaydi. Bu hosilani quyidagicha ham yozish mumkin:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \vec{u}\,\mathrm{grad}\, s = 0.$$

Bu tenglama ideal suyuqlik harakatining adiabatikligini ifodalaydi. Bu tenglamani entropiya uchun «uzviylik tenglamasi» ko‘rinishida ham yozish mumkin:

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho s\vec{u}) = 0,$$

bu yerda $\rho s\vec{u}$ ko‘paytma *entropiya oqimi zichligi* deb ataladi.

2) Izentropik harakat. Odatda adiabatiklik tenglamasi juda ham sodda shaklni beradi. Agar biror boshlangich vaqt holatida suyuqlik hajmining barcha nuqtalarida bir xil bo‘lsa, u holda suyuqlikning keyingi harakati jarayonida ham u barcha nuqtalarda bir xil bo‘ladi va vaqt bo‘yicha o‘zgarmaydi. Bunday harakat *izentropik harakat* deb ataladi.

Bunday holda adiabatiklik tenglamasini quyidagicha yozamiz:

$$s = \mathrm{const}.$$

Izentropik harakatdan harakat tenglamasini boshqacharoq shaklda yozishda foydalanish mumkin. Buning uchun bizga ma’lum bo‘lgan ushbu

$$dw = Tds + Vdp$$

termodinamik munosabatdan foydalanamiz, bunda suyuqlik massa birligining issiqlik funksiyasi; $V = 1/\rho$ - nisbiy hajm; T – temperatura; p – bosim.

$s = \mathrm{const}$ bo‘lganligi uchun

$$dw = Vdp = \frac{1}{\rho} dp\,,$$

shuning uchun

$$\frac{1}{\rho}\nabla p = \nabla w\,.$$

Shunga ko‘ra Eyler tenglamasini quyidagicha yozamiz:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}\nabla)\vec{u} = -\mathrm{grad}\ w.$$

Natijada Eyler tenglamasining faqat tezlikdan bog‘liq ifodasiga kelamiz. Buning uchun vektor analizidagi ushbu

$$\frac{1}{2}\mathrm{grad}\,u^2 = [\vec{u}\,\mathrm{rot}\,\vec{u}] + (\vec{u}\nabla)\vec{u}$$

Munosabatga ko‘ra, yuqoridagi tenglama quyidagicha yoziladi:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} - [\vec{u}\,\mathrm{rot}\,\vec{u}] = -\ \mathrm{grad}\left(w + \frac{u^2}{2}\right).$$

Bu tenglikning ikkala tarafiga ham rot operatsiyasini qo‘llasak, faqat tezlikka bog‘liq quyidagi tenglamaga ega bo‘lamiz:

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\,\vec{u} = \mathrm{rot}[\,\vec{u}\,\mathrm{rot}\,\vec{u}\,].$$

Muhitning siqiluvchanlik va siqilmaslik tuchunchasi. Umumiy holda muhitning harakati siqiluvchan muhitning gidrodinamika tenglamalari bilan ifodalanadi. Bu sistemaga, yuqorida ta’kidalaganimizdek, beshta uch o‘lchovli nostatsionar tenglamalar kiradi, bular: ρ zichlik, $\rho\vec{u}$ impulsning uchta komponentasi va $\rho\varepsilon$ ichki energiya uchun tenglamalar.

Agar muhitning oqimi tezligini tovush tezligi yoki muhit zarrachalarining issiqlik tezligi bilan taqqoslaganda ularga nisbatan kichik bo‘lmasa, u holda muhitning siqilmasligi to‘g‘risidagi faraz noo‘rin bo‘lib qoladi va bunday masalalarda muhit siqiluvchanligining barcha xossalarini inobatga olish zarur bo‘ladi. Avvalgi yuqorida keltirilgan gidrodinamikaning siqilivchan muhit uchun barcha tenglamalari sistemasi ixtiyoriy muhitlarda yuz beradigan keng hodisa va jarayonlarni tavsiflaydi. Asosiy jarayonlar deganimizda giperbolik tenglamalar bilan ifodalanuvchi uzatish va tovush to‘lqinlari jarayonlarini tushunamiz. Agar muhitda katta amplitudali qo‘zg‘alishlar paydo bo‘lsa, u holda muhitda uzilishlar va zarba to‘lqinlari paydo bo‘lishi mumkin. Oqimning nisbiy harakati, xuddi siqilmaydigan muhitlardagi kabi, noturg‘unlikka yoki nolaminar oqimga yoki ta’siri kuchli bo‘lgan turbulentlikka olib kelishi mumkin. Ko‘pgina muhitlarda issiqlik o‘tkazuvchanlik va qovushoqlik jarayonlari ham muhim ahamiyatga ega va ularni hisobga olmaslik mumkin emas, demakki siqiluvchan muhitning gidrodinamik tenglamalarida bularni qo‘shish zarur.

Qovushoqlik va issiqlik o‘tkazuvchanlik ta’siri kuchsiz bo‘lishi mumkin. Agar qovushoqlik va issiqlik o‘tkazuvchanlik e’tiborga olinmasa, u holda gidrodinamika tenglamalari giperbolik tipda bo‘ladi va ikkita xarakterli tezliklarni o‘z ichiga oladi: u – og‘irlik markazi tezligi; $a = (\gamma p/\rho)^{1/2}$ – issiqlik tezligi bilan bog‘langan tovush tezligi.

Agar oqimning tezligi kichik bo‘lsa, u holda tovush tezligining kattaligidan muhitning siqilmasligini $d\rho/dt = 0$ shart bilan va o‘z navbatida uzviylik tenglamasini e’tiborga olib esa $\nabla\vec{u} = 0$ shart bilan yozish mumkin. Natijada tenglama sezilarli soddalashadi, buni tovush tezligining cheksizligi haqidagi faraz natijasi deb qarash mumkin.

Shunday qilib, siqilmaydigan muhit gidrodinamikasida energiya tenglamasiga zarurat bo‘lmaydi, natijada $\nabla\vec{u} = 0$ – tezliklar maydoni solenoidallik sharti bilan tezliklar uchun uchta tenglama bosim va tezlikning uchta komponentasini ifodalovchi to‘rtta funksiyani aniqlash imkonini beradi.

Siqilmaydigan muhitning harakati. Siqilmaydigan muhitning harakati muhitning tezlanishlari uchun uchta tenglama va tezliklar maydonining solenoidalligi shartidan aniqlanadi:

$$\rho\,[\partial\vec{u}/\partial t + (\vec{u}\,\nabla)\vec{u}\,] = -\nabla p + \rho\nu\nabla^2\vec{u}\;; \qquad (6.10)$$

$$\nabla\vec{u} = 0,$$

bu yerda ν – kinematik qovushoqlik, $\nu = \mu / \rho$ va bir komponentali muhit uchun ρ zichlik o‘zgarmas deb faraz qilinadi, ya’ni $d\rho/dt = 0$ ekanligidan (5.3′) – uzviylik tenglamasi $q = 0$ bo‘lganda $\nabla\vec{u} = 0$ – muhitning siqilmaslik (yoki tezliklar maydonining solenoidallik) shartiga aylanadi. Bu to‘rtta tenglama to‘rtta funksiyani aniqlaydi: tezlikning uchta komponentasi va skalyar bosim.

Siqilmaydigan muhit tenglamalarini yechishning ikkita yo‘li bor:

- Avvalo (6.10) tenglamaning har ikkala tarafidan rotorni hisoblab bosimni yo‘qotish mumkin. Natijada muhitning uyurmalanish vektori uchun tenglamaga kelamiz. Keyin esa $\nabla\vec{u} = 0$ solenoidallik shartidan foydalanib, uyurmalanish orqali Puasson tenglamasi bilan bog‘langan oqim funksiyasini kiritish mumkin. Bu yo‘l quyida batafsilroq yoritilgan.
- (6.10) tenglamaga divergensiya operatorini qo‘llab, markazdan qochma va koriolis kuchlari bo‘yicha bosimni to‘g‘ridan to‘g‘ri aniqlash uchun Puasson tenglamasiga kelinadi:

$$\nabla^2 p^* = -(\nabla(\vec{u}\,\nabla)\vec{u}) = -\nabla\vec{u} : \nabla\vec{u},$$

bu yerda p^* – o‘zgarmas zichlikka normalashtirilgan bosim, $p^* = p/\rho$; qovushoqlik koeffisiyenti o‘zgarmas deb faraz qilinadi.

Xususan, ikki o‘lchovli dekart koordinatalar (x,y) sistemasi uchun bu tenglama quyidagicha yoziladi:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = -\left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial u_x}{\partial y}\frac{\partial u_y}{\partial x} + \left(\frac{\partial u_y}{\partial y}\right)^2\right].$$

(6.10) tenglamaning o‘zi esa quyidagi tenglamalar sistemasiga aylanadi:

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} = -\frac{\partial u_x^2}{\partial x} - \frac{\partial (u_x u_y)}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}\right);$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial t} = -\frac{\partial u_y^2}{\partial y} - \frac{\partial (u_x u_y)}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2}\right).$$

Uyurmalanish va oqim funksiyasi. Siqilmaydigan muhitning harakati albatta uyurmali bo‘ladi, shuning uchun muhitning uyurmalanishini ifodalovchi $\xi(x,t)$ funksiyani kiritish maqsadga muvofiq:

$$\xi = \nabla\times\vec{u}\ .$$

(6.10) tenglamaning har ikkala tarafidan rotorni hisoblab, muhitning harakati tenglamasidan bosimni yo‘qotamiz:

$$\frac{\partial\xi}{\partial t} + \nabla\times[\vec{u}\times(\nabla\times\vec{u})] = \nu\nabla^2\xi\ .$$

Natijada, $\nabla\vec{u} = 0$ solenoidallik shartidan foydalanib, muhitning uyurmalanishi uchun nostatsionar tenglamaga kelamiz:

$$\frac{\partial\xi}{\partial t} + (\vec{u}\,\nabla)\xi = \nu\nabla^2\xi\ .$$

Oxirgi tenglama muhit nostatsionar oqimini tavsiflaydi, chunki qovusoqlik xossasini tashlasak, u holda bu tenglama harakatlanayotgan muhitning uyurmalanishini uzatishni ifodalaydi.

Umuman olganda, $\vec{u}(\vec{r},t)$ tezliklar maydoni vektori uchta had bilan ifodalanadi:

$$\vec{u} = \nabla\times\boldsymbol{\psi} + \nabla\varphi + \nabla\varphi_p\ ,$$

bu yerda $\vec{r}$ – radius vektor; birinchi qo‘shiluvchi aylanish, ikkinchisi siqiluvchanlik komponentasi va uchinchisi xususiy potensial yechim (bu had aylanish va siqilishdan bog‘liq holda qo‘shilgan bo‘lib, chegaraviy shartga qarab tanlanadi) bo‘lib, bunda $\xi = 0$, ya’ni suyuqlikning lokal aylanishi bo‘lmaganda oqim φ – tezlik potensiali bilan to‘la ifodalanadi, $\vec{u} = \nabla\varphi$; agar oqim siqilmaydigan, ya’ni $\nabla\cdot\vec{u} = 0$ bo‘lsa, u holda $\nabla\cdot\vec{u} = \nabla^2\varphi$

=0, demakki, φ potensial Laplas tenglamasidan aniqlanadi, bunday harakat esa *potensial oqim* deb ataladi.

Uyurmalanish bo‘yicha tezlik komponentalari solenoidallik shartini integrallash yo‘li bilan va $\boldsymbol{\psi}$ – oqim funksiyasining vektor qiymatini

$$u = \nabla\times\boldsymbol{\psi}$$

kabi hisoblashdan aniqlanadi, chunki tezliklar maydoni solenoidal. Oqim funksiyasi va uyurmalanish o‘rtasidagi bog‘lanishni topaylik:

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{\psi}) = \nabla\times\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\xi}.$$

rot rot operatorini akslantirib,

$$\nabla^2\boldsymbol{\psi} - \nabla(\nabla\boldsymbol{\psi}) = -\boldsymbol{\xi}\ .$$

Shuni ta’kidlash lozimki, oqim funksiyasi $u = \nabla\times\boldsymbol{\psi}$ tenglama bilan bir qiymatli aniqlanmaydi va bu funksiyani tanlash imkoniyati bor. Eng qulay tanlov quyidagicha:

$$\nabla\boldsymbol{\psi} = 0\ .$$

Bunday holda oqim funksiyasining uchta komponentasi uyurmalanishning uchta komponentasi bilan ushbu

$$\nabla^2\boldsymbol{\psi} = -\boldsymbol{\xi}$$

Puasson tenglamasi orqali bog‘langan.

Shunday qilib, siqilmaydigan muhitning harakatini tavsiflovchi sodda yopiq tenglamalar sistemasiga ega bo‘lamiz, bular:

- uyurmalanish uchun nostatsionar tenglama

$$\frac{\partial\xi}{\partial t} + (\vec{u}\,\nabla)\boldsymbol{\xi} = \nu\nabla^2\boldsymbol{\xi}\ ;$$

- tezlikni aniqlash mumkin bo‘lgan oqim funksiyasi uchun Puasson tenglamasi

$$\nabla^2\boldsymbol{\psi} = -\boldsymbol{\xi}\ .$$

Xususan, ikki o‘lchovli holda bu tenglamalar sodda ko‘rinishni egallaydi. Faraz qilaylik, muhitning harakati (x,y) tekislikda, tezligi $\vec{u} = \{u_x, u_y, 0\}$, u holda uyurmalanish va oqim funksiyasi faqat z komponentali bo‘ladi: $\boldsymbol{\xi} = \{0, 0, \xi\}$; $\boldsymbol{\psi} = \{0, 0, \psi\}$.

To‘la tenglamalar sistemasi quyidagicha yoziladi:

- uyurmalanish uchun nostatsionar tenglama

$$\frac{\partial\xi}{\partial t} + (\vec{u}\,\nabla)\xi = \upsilon\nabla^2\xi\ ;$$

- tezlikni aniqlash mumkin bo‘lgan oqim funksiyasi uchun Puasson tenglamasi

$$\nabla^2\psi = -\xi\ ;$$

- tezlik vektorining oqim funksiyasi orqali ifodasi

$$u = \nabla \times \psi,$$
bu yerda oqim funksiyasi va uyurmalanishni psevdoskalyarlar deb qarash mumkin.

Ko‘pgina amaliy masalalarni yechishda siqilmaydigan muhitning ikki o‘lchovli tenglamalarini yechish talab qilinadi. Shuning uchun qovushoqligi bo‘lmagan muhitning harakatini ξ – psevdoskalyar uyurmalanish va ψ – oqim funksiyasi orqali ifodalash qulay:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} = 0,$$

bu yerda, xuddi yuqoridagidek, oqim funksiyasi uyurmalanish bilan Puasson tenglamasi orqali bog‘langan. Bu tenglamani yakobian orqali yozish qulaylik tug‘diradi:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial(\xi, \psi)}{\partial(x, y)} = 0,$$

bu yerda yakobian

$$\frac{\partial(\xi, \psi)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y},$$

yoki Puasson qavslarini ishlatsak:

$$\partial \xi / \partial t + \xi \times \psi = 0.$$

Endi yuqoridagi tenglamani quyidagi konservativ shakllardan biri ko‘rinishida yozamiz:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\xi \frac{\partial \psi}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\xi \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) = 0;$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\psi \frac{\partial \xi}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\psi \frac{\partial \xi}{\partial y}\right) = 0.$$

Bu tenglamalarning har biri uyurmalanishning saqlanishini ifodalaydi.

Shunday qilib, siqilmaydigan muhitning ikki o‘lchovli tenglamalarini Gamilton shaklida quyidagicha ixcham yozamiz:

$$\partial \xi / \partial t + \xi \times \psi = 0\ ;$$
$$\nabla^2 \psi = -\xi\ .$$

Gromeka-Lemb almashtirishi. Suyuqlik zarrachalarining harakati haqidagi avval qaralgan Gelmgolts teoremalari shuni ko‘rsatadiki, har qanday moddiy jism ilgarilanma va aylanma harakatlarda qatnashishi mumkin. Shuni e’tiborga olish lozimki, zamonaviy texnika qurilmalarida ishni bajarish uchun faqatgina ilgarilanma harakatning energiyasi qo‘llanilishi mumkin. Aylanma (uyurmali) harakatning energiyasi esa to‘lasincha yo‘qotiladi, ya’ni u issiqlikka aylanib, atrof-muhitga tarqalib ketadi.

Eyler tenglamalari sistemasi (6.2) bu ikkala harakatning mavjudligini hisobga olmaydi, ma’lum darajada ularni birlashtiradi. Shuning uchun suyuqlik zarrachasining bunday xususiyatini hisobga olishga imkon beruvchi va *Gromeka-Lemb almashtirishi* deb ataluvchi almashtirishdan foydalanish maqsadga muvofiq. Bu almashtirishning ma’nosiga ko‘ra tezlanishning ifodasiga suyuqlik zarrachalarining aylanma harakatini xarakterlovchi hadlar formal ravishda kiritiladi.

Tezlanishning bitta komponentasini qaraylik:

$$a_x = \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z}. \tag{6.11}$$

Bu (6.11) tenglikning o‘ng tarafidagi oxirgi uchta qo‘shiluvchini quyidagicha yozamiz:

$$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + \left(u_y \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial x}.$$

Tezlanishning ushbu $u_y \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial x}$ konvektiv qismini o‘zaro ham qo‘shib va ham ayiramiz, ishoralariga qarab ifodalarni guruhlaymiz:

$$u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} - \left(u_y \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) = -u_y \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) + u_z \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right).$$

Qavs ichidagi ifodalar uyurmaning ω_z va ω_y komponentalarini beradi, ya’ni

$$-2u_y\omega_z + 2u_z\omega_y = 2\left(u_z\omega_y - u_y\omega_z\right).$$

Bu ifodalarni (6.11) ga qo‘ysak,

$$a_x = \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial x} + 2\left(u_z\omega_y - u_y\omega_z\right), \tag{6.12}$$

bu yerda $u^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2$. Xuddi shunday

$$a_y = \frac{\partial u_y}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial y} + 2\left(u_x\omega_z - u_z\omega_x\right); \tag{6.13}$$

$$a_z = \frac{\partial u_z}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial z} + 2\left(u_y\omega_x - u_x\omega_y\right). \tag{6.14}$$

Tezlanishning vektor shaklidagi ifodasi quyidagicha yoziladi:

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \operatorname{grad} \frac{u^2}{2} + 2\vec{\omega} \times \vec{u}. \tag{6.15}$$

Agar harakat statsionar bo‘lsa, u holda

$$\vec{a} = \mathrm{grad}\frac{u^2}{2} + 2\vec{\omega}\times\vec{u}\,. \tag{6.16}$$

Gromeki-Lemb shaklidagi harakat tenglamasi. Agar (6.2) tenglamaning o‘ng tarafiga tezlanishning (6.15) yoki (6.16) ifodasi qo‘yilsa, u holda *Gromeka-Lemb shaklidagi harakat tenglamasi (yoki Eyler tenglamasi)* hosil bo‘ladi. Nostatsionar harakat uchun quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\vec{F} - \frac{1}{\rho}\mathrm{grad}\,p = \frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + \mathrm{grad}\frac{u^2}{2} + 2\vec{\omega}\times\vec{u}\,. \tag{6.17}$$

Bu tenglamada $2\vec{\omega} = \mathrm{rot}\vec{u} = \vec{\Omega}$ - uyurma vektori ekanligini e’tiborga olib, uni o‘qlardagi proeksiyalarga nisbatan yozaylik:

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2}\right) - \left(u_y\Omega_z - u_z\Omega_y\right) = X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x};$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u^2}{2}\right) - \left(u_z\Omega_x - u_x\Omega_z\right) = Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y};$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{u^2}{2}\right) - \left(u_x\Omega_y - u_y\Omega_x\right) = Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}.$$

Statsionar harakatni qaraylik:

$$\vec{F} - \frac{1}{\rho}\mathrm{grad}\,p = \mathrm{grad}\frac{u^2}{2} + 2\vec{\omega}\times\vec{u}\,. \tag{6.17′}$$

(6.17′) da ba’zi almashtirishlarni bajaramiz.

Gidrostatika bobida kuch funksiyasi deb ataluvchi Φ skalyar funksiya haqida tushuncha kiritgan edik. Unda

$$Xdx + Ydy + Zdz = d\Phi \tag{6.18}$$

ekanligi ko‘rsatilgan edi. Bu funksiya to‘la differensial ekanligidan quyidagini yoza olamiz:

$$d\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\Phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\Phi}{\partial z}dz\,. \tag{6.19}$$

(6.18) va (6.19) larni o‘zaro taqqoslasak,

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = X; \quad \frac{\partial\Phi}{\partial y} = Y; \quad \frac{\partial\Phi}{\partial z} = Z\,. \tag{6.20}$$

Boshqa tarafdan, $\vec{F}$ vektor X, Y, va Z komponentalarga ega:

$$\vec{F} = \vec{e}_x X + \vec{e}_y Y + \vec{e}_z Z\,. \tag{6.21}$$

(6.20) va (6.21) lardan quyidagi tenglik kelib chiqadi:

$$\vec{F}=\vec{e}_x\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\vec{e}_y\frac{\partial\Phi}{\partial y}+\vec{e}_z\frac{\partial\Phi}{\partial z}=\operatorname{grad}\Phi. \qquad (6.22)$$

Bu tenglik massaviy kuchlarning konservativ ekanligini bildiradi. (6.22) ga ko‘ra (6.17′) ni quyidagicha yoza olamiz:

$$\operatorname{grad}\left(\frac{u^2}{2}+\frac{p}{\rho}-\Phi\right)=-2\vec{\omega}\times\vec{u}. \qquad (6.23)$$

Shuni e’tiborga olish lozimki, tenglamaning bu shaklda yozilishi faqatgina siqilmaydigan suyuqliklar uchungina o‘rinli, ya’ni $\rho=\text{const}$ shart uchun. Endi (6.23) harakat tenglamasining o‘ng va chap taraflarini suyuqlik oqimidagi biror egri chiziqning yoy bo‘lagini ifodalovchi ushbu

$$d\vec{l}=\vec{e}_x dx+\vec{e}_y dy+\vec{e}_z dz \qquad (6.24)$$

ixtiyoriy yo‘nalgan kesmaga skalyar ko‘paytirish bilan uni tahlil qilish uchun qulay bo‘lgan shaklga keltirish mumkin. Ushbu

$$d\vec{l}\cdot\operatorname{grad}\left(\frac{u^2}{2}+\frac{p}{\rho}-\Phi\right)=-2\vec{\omega}\times\vec{u} \;=\; -\,d\vec{l}\cdot[(\operatorname{rot}\vec{u}\,)\times\vec{u}\,]$$

ifodaning chap tarafi qavs ichidagi ifodaning to‘la differensialiga teng:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2}+\frac{p}{\rho}+\Phi\right)dx+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u^2}{2}+\frac{p}{\rho}+\Phi\right)dy+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{u^2}{2}+\frac{p}{\rho}+\Phi\right)dz=d\left(\frac{u^2}{2}+\frac{p}{\rho}+\Phi\right),$$

o‘ng tarafidagi vektor esa quyidagiga teng:

$$2\vec{\omega}\times\vec{u} \;=\; (\operatorname{rot}\vec{u}\,)\times\vec{u} \;=\; d\left(\frac{u^2}{2}+\frac{p}{\rho}-\Phi\right)=-2\begin{vmatrix} dx & dy & dz\\ u_x & u_y & u_z\\ \omega_x & \omega_y & \omega_z\end{vmatrix}.$$

Hosil qilingan ifodalardan esa quyidagi natijani keltiramiz:

$$d\left(\frac{u^2}{2}+\frac{p}{\rho}-\Phi\right)=-2\begin{vmatrix} dx & dy & dz\\ u_x & u_y & u_z\\ \omega_x & \omega_y & \omega_z\end{vmatrix}. \qquad (6.25)$$

Namunaviy masala. O‘z o‘qi atrofida o‘zgarmas Ω burchak tezlik bilan aylanayotgan silindrik idishdagi siqilmaydigan suyuqlikning o‘z og‘irlik maydonidagi aylanish sirti shaklini aniqlang.

Yechish. *Oz* o‘qni silindr o‘qi yo‘nalishida tanlaylik, u holda tezlik vektorining komponentalari quyidagilarga teng:

$$u_x=-\Omega y,\; u_y=\Omega x,\; u_z=0.$$

Uzviylik tenglamasi to‘la qanoatlantiriladi, Eyler tenglamasi esa

$$x\Omega^2=\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},\qquad y\Omega^2=\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y},\qquad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+g=0.$$

kabi yoziladi. Bu tenglamalarning umumiy integrali:

$$\frac{p}{\rho} = \frac{1}{2}\Omega^2\left(x^2 + y^2\right) - gz + const\,.$$

Erkin sirtda p = const bo‘lganligi uchun bu sirt paraboloid:

$$z = \left(\frac{\Omega^2}{2g}\right)\left(x^2 + y^2\right),$$

bunda koordinata boshi paraboloid sirtining quyi nuqtasida.

Topshiriqlar

1. Ikki o‘lchovli uyurmasiz, qovushoqmas va siqilmaydigan oqim ushbu $\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0,\ \ \frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x} = 0$ tenglamalar sistemasi bilan ifodalanadi. Bunda ψ oqim funksiyasini kiritib, $u_x = \frac{\partial \psi}{\partial y},\ u_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$ ekanligidan bu tenglamalarni $\nabla^2\psi = 0$ Laplas tenglamasiga keltiring.

2. Eylerning ushbu $\rho\frac{d\vec{u}}{d\,t} = \rho\vec{F} - \mathrm{grad}p$ dinamik tenglamalarini ideal suyuqlikning Gromeka-Lemb shaklidagi harakat tenglamasiga keltiring.

Sinov savollari

1. Ideal suyuqlikning harakat tenglamasini ayting.
2. Ideal suyuqlikning gidrodinamik tenglamalari sistemasini keltiring.
3. Adiabatik va izentropik harakatni izohlang.
4. Puasson adiabatasini ayting. Entropiya va uning oqimi zichligi nima?
5. Gromeka-Lemb almashtirishining qo‘llanilishini tushuntiring.
6. Gromeka-Lemb shaklidagi harakat tenglamasini ayting.

6.2. Ideal suyuqlik harakat tenglamasini integrallash

Statsionar oqish uchun harakat tenglamasini integrallash. Yuqoridagi (6.25) harakat tenglamasini uning o‘ng tarafi nolga teng bo‘lgandagina integrallash mumkin. Determinantlar xossalaridan ma’lumki, unung nolga teng bo‘lish alomatlari bu: biror satrning nolga tengligi yoki biror satr elementlarining boshqa bir satr elementlariga proporsionalligi.

Mexanik nuqtai nazardan bu yerda to‘rtta holat bo‘lishi mumkin:

● agar harakat uyurmasiz bo‘lsa, u holda

$$\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0\,; \tag{6.26}$$

● agar oqim chizig‘i va uyurma chizig‘i mos tushsa, u holda suyuq zarracha harakar o‘qi atrofida aylanadi:

$$\frac{u_x}{\omega_x} = \frac{u_y}{\omega_y} = \frac{u_z}{\omega_z}; \qquad (6.27)$$

● agar harakat uyurmali bo‘lsa, u holda

$$\frac{dx}{\omega_x} = \frac{dy}{\omega_y} = \frac{dz}{\omega_z}; \qquad (6.28)$$

● agar harakat potensialli bo‘lsa, u holda

$$\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y} = \frac{dz}{u_z}. \qquad (6.29)$$

Ularning ixtiyoriy bittasi uchun quyidagini yoza olamiz:

$$d\left(\frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} - \Phi\right) = 0.$$

Buni integrallasak, ushbu

$$\frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} - \Phi = C. \qquad (6.30)$$

*qovushoqmas siqilmaydigan vaznsiz suyuqlikning statsionar uyurmali harakati uchun Gromeka shaklidagi harakat tenglamasi*ga kelamiz.

Agar massaviy kuchlardan faqatgina og‘irlik kuchi ta’sir etsa, u holda, xuddi gidrostatika bobida ko‘rsatilgani kabi, $\Phi = -gz$ va (6.30) ushbu

$$gz + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} = C. \qquad (6.31)$$

kabi yoziladi. Yana bir marta shunga e’tibor berish kerakki, (6.31) tenglamaning ko‘rinishi, qaysi determinantning nolga teng bo‘lish holidan qat’iy nazar, hamma holda bir xil bo‘ladi. Ammo integralning ma’nosi va uning qo‘llanilish sohasi farq qiladi. Shuning uchun aynan shu masalada tahlil zarur bo‘ladi:

● agar harakat potensialli bo‘lsa, u holda (6.31) integral *Koshi-Lagranj integrali* deb ataladi. Bu integral zarrachasi aylanmay, ya’ni potensialli harakat qilayotgan suyuqlikning ixtiyoriy nuqtasi uchun o‘rinli. Bu yerda C o‘zgarmas biror oqim chizig‘ida yotgan nuqta uchun topiladi.

● agar uyurma vektori va tezlik vektori o‘zaro kolleniar bo‘lsa (bu juda kam uchraydigan hol), u holda bunday harakat *vintli harakat* deb ataladi. Bu yerda C o‘zgarmas biror uyurma chizig‘ida yotgan nuqta uchun topiladi.

● agar suyuqlik zarrachasi uyurma chizig‘i bo‘ylab harakatlansa va agar suyuqlik zarrachasi o‘zining oqim chizig‘i bo‘ylab harakat qilsa, u holda (6.31) integral *Bernulli integrali* deb ataladi. Bu ham potensialli va ham uyurmali harakatlarda o‘rinli. Bunda oqim chizig‘i uyurma chizig‘i bilan ustma-ust tushadi va C o‘zgarmas shu chiziqlardagi biror nuqtada aniqlanadi. Bizni aynan shu hol keyingi tuchunchalar uchun qiziqtiradi.

Bernulli tenglamasini keltirib chiqarishning soddaroq holi. Oqim chizig‘i bo‘ylab harakatlanayotgan suyuqlik zarrachasini qaraylik. Eylerning (6.1) differensial tenglamalari sistemasidagi har bir tenglamani mos ravishda *dx*, *dy* va *dz* larga ko‘paytiramiz, keyin esa xuddi gidrostatikadagi kabi, ularni hadma had qo‘shamiz. Bunday almashtirish gidrostatika bo‘limida massaviy kuchlardan faqat og‘irlik kuchi ta’sir qilayotgan holda qaralgan edi. Chap tarafda hosil bo‘lgan hadlar yig‘indisi quyidagicha bo‘ladi: $-gdz-\frac{dp}{\rho}$. Shuning uchun yig‘indining faqat o‘ng tarafini qaraymiz: $\frac{du_x}{dt}dx+\frac{du_y}{dt}dy+\frac{du_z}{dt}dz$. Bu yerda $\frac{dx}{dt}=u_x$; $\frac{dy}{dt}=u_y$; $\frac{dz}{dt}=u_z$ ekanligini e’tiborga olsak, u holda

$$u_x du_x + u_y du_y + u_z du_z = \frac{1}{2}du_x^2 + \frac{1}{2}du_y^2 + \frac{1}{2}du_z^2 =$$

$$= \frac{1}{2}d\left(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2\right) = \frac{1}{2}du^2 = d\frac{u^2}{2}.$$

Shunday qilib,

$$-gdz-\frac{dp}{\rho}=d\frac{u^2}{2} \quad \text{yoki} \quad gdz+\frac{dp}{\rho}+d\frac{u^2}{2}=0. \qquad (6.32)$$

Bu ifoda *Bernulli tenglamasining differensial shakli* deb ataladi. $\rho=\mathrm{const}$ (bir jinsli siqilmaydigan suyuqlik uchun) shartda (6.32) tenglamani integrallash quyidagini beradi:

$$gz+\frac{p}{\rho}+\frac{u^2}{2}=C, \qquad (6.33)$$

ya’ni (6.31) munosabatni hosil qilamiz.

Bernulli tenglamasining energetik ma’nosi. Yuqoridagi (6.33) munosabatning mexanik ma’nosini tahlil qilishdan avval quyidagi muhim holatni esga olaylik. «Suyuqlik va gaz kinematikasi» bobida sharracha haqidagi tushunchani kiriyotganimizda uning eng muhim xossalaridan biri: uning ko‘ndalang kesimi ichida tezliklar taqsimoti tekis ekanligini qayd etgan edik. Bu shuni bildiradiki, (6.33) munosabat shu sharracha ichidan o‘tayotgan ixtiyoriy oqim chizig‘i bo‘ylab o‘rinli bo‘lib qoladi. Shuning uchun (6.33) tenglamani ideal *suyuqlik sharrachasi uchun Bernulli* *tenglamasi* deb atash mumkin. Sharrachaning ixtiyoriy ikkita ko‘ndalang kesimi uchun quyidagini yoza olamiz:

$$gz_1 + \frac{p_1}{\rho} + \frac{u_1^2}{2} = gz_2 + \frac{p_2}{\rho} + \frac{u_2^2}{2}. \qquad (6.34)$$

Bernulli tenglamasiga kirgan miqdorlarning mexanik ma’nosini beraylik. Har qanday fizik munosabatning o‘lchami bir jinsli, ya’ni uning hamma hadlari bir xil o‘lchamga ega. Shuning uchun uning hadlaridan bittasini qarash yetarli. Eng osoni $u^2/2$ hadni qaraylik, uning birligi m^2/s^2. Ifoda o‘lchamining surat va maxrajini *kg* ga ko‘paytiraylik, u holda

$$\frac{m^2 \cdot kg}{s^2 \cdot kg} \to \frac{kg \cdot m \cdot m}{s^2 \cdot kg} \to \frac{N \cdot m}{kg} \to \frac{Dj}{kg}.$$

Bundan kelib chiqadiki, har bir had energiyaning massa birligiga nisbatini, ya’ni nisbiy energiyani ifodalaydi. Bu Bernulli tenglamasining energetik ma’nosini beradi. Dastlabki ikkita had nisbiy potensial energiyani (gz – holat va p/ρ – bosim), uchinchisi esa nisbiy kinetik energiyani ifodalaydi. Natijada, sharrachaning ixtiyoriy kesimida to‘la energiya o‘zgarmasdan qolishini aniqlagan bo‘lamiz. Boshqacha aytganda, Bernulli tenglamasi og‘irlik kuchlari maydonida ideal siqilmaydigan suyuqlikning statsionar oqimi uchun energiyaning saqlanish qonunini, eng sodda holda, ya’ni mexanik energiyaning saqlanish qonunini ifodalaydi.

Bernulli tenglamasining naporlar shakli. Amaliyotda Bernulli tenglamasining naporlar shakli keng qo‘llaniladi. (6.34) tenglamaning ikkala tarafini g - erkin tushish tezlanishiga bo‘laylik, natijada quyidagini olamiz:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g}. \qquad (6.35)$$

Ushbu (6.35) munosabatning har bir hadi chiziqli uzunlik o‘lchamiga ega va qaralayotgan nuqtada bosimni muvozanatlashtiruvchi suyuqlik ustuni balandligi deb tushuniladigan naporni ifodalaydi.

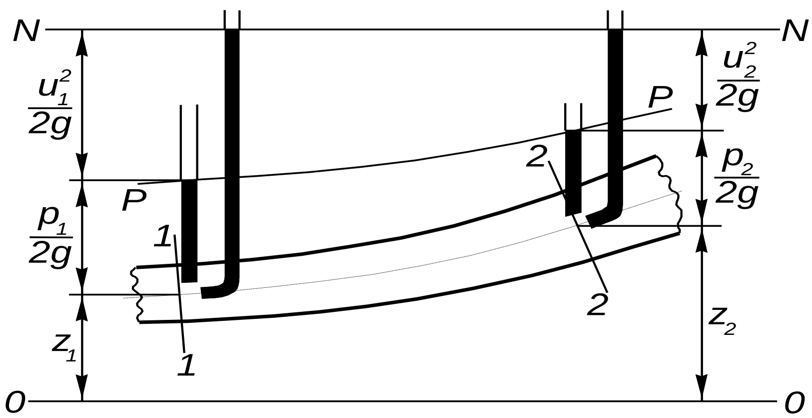
Yuqorida aytilganlar 6.1-rasmda tasvirlangan bo‘lib, u ba’zida *Bernulli tenglamasining diagrammasi* deb ham ataladi.

(6.35) tenglamadagi dastlabki ikkita hadning yig‘indisi gidrostatik napor, uchalasining yig‘indisi esa *to‘liq napor* yoki *gidrodinamik napor* deb ataladi.

Shunday qilib, Bernulli tenglamasiga quyidagicha geometrik talqin beriladi. Uchta: geometrik (z), pyezometrik ($\frac{p}{\rho g}$) va tezlik ($\frac{u^2}{2g}$) balandliklarining yig‘indisi oqim chizig‘i (sharracha) bo‘ylab o‘zgarmas miqdordir. Boshqacha aytganda, sharracha bo‘ylab harakatda to‘liq yoki gidrodinamik napor o‘zgarmaydi.

Bernulli teoremasi: *og‘irlik kuchlari maydonidagi ideal siqilmaydigan suyuqlikning statsionar oqimida tezlik napori ($\rho u^2/2$), gidrodinamik bosim (p) va gidrostatik napor (ρgz)larning yig‘indisidan iborat to‘la napor oqim chizig‘i (sharracha) yoki uyurma chizig‘i bo‘ylab o‘zgarmas miqdordir*:

$$p+\frac{\rho u^2}{2}+\rho gz=\text{const}\,.$$



6.1-rasm. Bernulli tenglamasi diagrammasining sxematik tasviri: *N-N* – napor chizig‘i; *O-O* – hisob boshi tekisligi (chizig‘i); *P-P* – shu kesimdagi tezlik naporiga teng miqdorga napordan pastda yotuvchi pyezometrik chiziq; *z* – hisob boshi tekisligi deb ataluvchi ixtiyoriy tekislik ustida suyuqlik zarrachasining joylashishini xarakterlovchi *geometrik napor*; $p/(\rho g)$ - *pyezometrik napor* yoki *pyezometrik balandlik* (berilgan nuqtada bosimni muvozanatlashtiruvchi suyuqlik ustuni balandligi); $u^2/(2g)$ -*to‘la napor trubkasi* (*Pito naychasi yoki trubkasi*, 6.2-rasmda bu qurilma sxematik tasvirlangan) deb ataluvchi suyuqlik ustuni balandligini ifodalovchi tezlik napori.

To‘yingan gaz uchun Bernulli integrali. Bu holda 6.2-banddagi farazlardan kelib chiqib, Puasson adiabatasini qaraylik. Shularni e’tiborga olsak, Bernulli integralini quyidagicha yoza olamiz:

$$\frac{u^2}{2}+\Phi+\frac{k}{k-1}\frac{p}{\rho}=C\,.$$

Adiabatik jarayon uchun $a^2=\frac{dp}{d\rho}=k\frac{p}{\rho}$, bunda a – tovush tezligi ekanligidan gazlar dinamikasining eng asosiy tenglamalaridan biri bo‘lgan quyidagi tenglamaga kelamiz:

$$\frac{u^2}{2}+\Phi+\frac{a^2}{k-1}=C\,.$$

Odatda gazlar dinamikasida massali kuchlar e’tiborga olinmaydi, C o‘zgarmas esa i_0 orqali belgilanadi. Bu holda Bernulli integrali quyidagicha yoziladi:

$$\frac{u^2}{2}+\frac{a^2}{k-1}=i_0\,, \tag{6.36}$$

bu yerda u – gaz tezligi; a – shu nuqtadagi tovush tezligi. Bu tenglamaning o‘ng tarafidagi o‘zgarmasni topish uchun oqim chizig‘ining biror nuqtasidagi xarakteristikalarni bilish yetarli. Bu tenglamadan kelib chiqadiki, oqim chizig‘ining tezligi nolga teng bo‘lgan nuqtalarida tovush tezligi ham va temperatura ham, xuddi shunday Puasson adiabatasidan esa bosim ham va zichlik ham maksimal qiymatga erishadi. Bu miqdorlar odatda $a_0, T_0,\ p_0,\ \rho_0$ kabi belgilanadi va ular *adiabatik tormozlangan gazning parametrlari* (*tormozlanish parametrlari*) deb ataladi. Ushbu

$$i=\frac{a^2}{k-1}=c_pT=\frac{k}{k-1}\frac{p}{\rho}$$

miqdor *ental’piya* (*issiqlik sig‘imi*) deb ataladi. Mos ravishda i_0 ni *tormozlanish ental’piyasi* deb ataladi. Tezlikni nolga teng (u=0) desak, tormozlangan gaz parametrlari uchun i_0 ning quyidagi ifodasiga ega bo‘lamiz:

$$i_0=\frac{a_0^{\,2}}{k-1}=\frac{k}{k-1}RT_0=\frac{k}{k-1}\frac{p_0}{\rho_0}\,.$$

Shunday holat bo‘lishi mumkinki, ba’zi bir nuqtadagi gaz tezligi shu nuqtadagi tovush tarqalish tezligiga teng bo‘lib qolishi mumkin, ya’ni $u=a=a_*$. Agar (6.36) da $u=a=a_*$ deb olsak, u holda i_0 ning a_* kritik tezlikka nisbatan ifodasi quyidagicha:

$$i_0=\frac{a_*^2}{2}+\frac{a_*^2}{k-1}=\frac{k+1}{k-1}\frac{a_*^2}{2}\,.$$

Bunga mos Bernulli tenglamasi quyidagicha yoziladi:

$$\frac{u^2}{2}+\frac{a^2}{k-1}=\frac{k+1}{k-1}\frac{a_*^2}{2}\,.$$

Bu tenglikdan quyidagilar kelib chiqadi: agar $u>a_*$ bo‘lsa, u holda $u>a$, ya’ni oqim tovishdan tez; agar $u<a_*$ bo‘lsa, u holda $u<a$, ya’ni oqim tovushdan past bo‘ladi. Shuning uchun a_* - *kritik tezlik* deb ataladi.

Lagranj integrali. Quyidagilarni faraz qilaylik: 1) suyuqlik ideal; 2) suyuqlik bilan band bo‘lgan butun fazoda barotroplik o‘rinli, ya’ni $\rho = \Phi(p)$; 3) massaviy kuchlar konservativ; 4) harakat uyurmasiz.

Ideal suyuqlikning uyurmasiz harakati uchun (6.17) tenglama quyidagicha yoziladi:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \text{grad}\left(\frac{u^2}{2}\right) = \vec{F} - \frac{1}{\rho}\,\text{grad}\, p. \qquad (6.37)$$

Suyuqlik barotrop bo‘lganligi uchun quyidagi funksiyani kiritamiz:

$$P(p) = \int \frac{dp}{\rho} = \int \frac{dp}{\Phi(p)}; \qquad (6.38)$$

$$\text{grad}\, P = \frac{1}{\rho}\,\text{grad}\, p. \qquad (6.39)$$

3)-farazimizga ko‘ra

$$\vec{F} = -\,\text{grad}\, V. \qquad (6.40)$$

4)-farazimizga ko‘ra esa

$$\vec{u} = \text{grad}\ \varphi; \quad \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \text{grad}\frac{\partial \varphi}{\partial t}. \qquad (6.41)$$

(6.39), (6.40), (6.41) larni (6.37) qo‘yamiz:

$$\text{grad}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} + V + P\right) = 0. \qquad (6.42)$$

Bu tenglamada qavs ichidagi ifoda koordinataga bog‘liq emas, ammo vaqtga bog‘liq bo‘lishi mumkin:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} + V + P = f(t). \qquad (6.43)$$

Hosil qilingan bu munosabat *Lagranj integrali* deb ataladi. Lagranj integralini quyidagicha ham yozish mumkin:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right] + V + P(p) = f(t). \qquad (6.44)$$

Faraz qilaylik, biz $\varphi(x, y, z, t)$ funksiyani topdik va $f(t)$ funksiya ma’lum bo‘lsin. U holda (6.44) dan p bosimni va o‘z navbatida $\rho = \Phi(p)$ dan zichlikni topishimiz mumkin.

Yuqoridagi (6.44) ning o‘ng tarafiga kiruvchi $f(t)$ funksiyani nolga teng deb hisoblash mumkin, chunki tezliklar potensiali vaqt funksiyasi aniqligida topiladi. Haqiqatan ham, agar $\varphi(x, y, z, t)$ - tezliklar potensiali bo‘lsa, u holda $\varphi' = \varphi + S(t)$ ko‘rinishdagi ixtiyoriy funksiya ham tezliklar potensiali bo‘ladi (gradφ'= gradφ). Bulardan foydalanib, $\overline{\varphi}$ funksiyani shunday kiritish mumkinki, bunda quyidagilar o‘rinli bo‘lsin:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} - f(t) = \frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial t}; \quad \overline{\varphi} = \varphi - \int_0^t f(t)dt.$$

Shularga ko‘ra Lagranj integrali quyidagicha yoziladi:

$$\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial t} + \frac{u^2}{2} + V + P(p) = 0.$$

Lagranj integrali va Bernulli integralini taqqoslaylik. Biz ko‘rdikki, mos shartlarda Eyler tenglamasi bu integrallarga keltiriladi. Lagranj integrali Bernulli integraliga nisbatan ma’lim ma’noda umumiyroq, chunki u nostatsionar harakatlar uchun ham o‘rinli. Ammo Lagranj integrali uyurmasiz harakatni va to‘la barotroplikni talab qilgani uchun shu ma’noda Bernulli integralidan umumiyroq emas, chunki Bernulli integralida faqatgina oqim chizig‘idagi barotroplik yetarli. Shuning uchun bu integrallarning qo‘llanilish sohasi har xil.

Eyler - Bernulli integrali. Faraz qilaylik, suyuqlik ideal, statsionar, massaviy kuchlar potensialga ega, harakat uyurmasiz va statsionar bo‘lsin. Dastlabki to‘rtta farazga ko‘ra Lagranj integrali quyidagicha yoziladi:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} + V + P = f(t). \qquad (6.45)$$

Harakat statsionar bo‘lganligi uchun u_x, u_y, u_z lar va o‘z navbatida φ ham vaqtdan bog‘liq bo‘lmaydi, ya’ni $\varphi = \varphi(x, y, z)$. U holda (6.45) dan $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ hosila tushib qoladi va $f(t)$ funksiya o‘zgarmasga aylanadi. Shularga ko‘ra

$$\frac{u^2}{2} + V + P = C. \qquad (6.46)$$

(6.46) integral *Eyler – Bernulli integrali* deb ataladi. Bunda C – butun oqim uchun yagona o‘zgarmas, Bernulli integralida esa bu o‘zgarmas har xil oqim chiziqlarida har xil bo‘ladi.

Bernullining umumlashgan teoremasi. Ideal suyuqlik oqimi har doim adiabatik, siqiluvchan suyuqlik uchun bosim va zichlik ushbu p/ρ^k=const adiabata tenglamasi bilan bog‘langan, siqilmaydigan suyuqlik uchun esa ρ=const deb, barotropik oqim uchun bosim funksiyasini

$$P(p) = \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\rho(p)} + P_0(p_0)$$

kabi kiritgan holda, shunday tanlangan p_0 – bosim uchun ushbu P_0 (p_0)=0 tenglik oʻrinli boʻlsin. Bularga koʻra

$$\rho dP = dp \quad \text{yoki} \quad \rho\, \nabla P = \nabla p\ .$$

Bu munosabatni e’tiborga olgan holda hamda massaviy kuchlarni Π – potensialli deb, Gromeka-Lemb tenglamasi (6.17) ni quyidagicha yozamiz:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + 2\vec{\omega}\times\vec{u} = -\nabla\left(P + \Pi + \frac{u^2}{2}\right).$$

Harakatni statsionar ($\partial\vec{u}\,/\partial$t = 0) va uyurmasiz ($\vec{\omega}$ = 0) yoki vintli ($\vec{\omega}$ va $\vec{u}$ vektorlar parallel) desak, bu tenglikning chap tarafi nolga aylanadi.

Bernullining umumlashgan teoremasi: *Ideal suyuqlikning statsionar oqimi uchun massaviy kuchlarning potensial maydonida suyuqlik birlik massasining kinetik energiyasi* ($u^2/2$), *bosim funksiyas* (P) *va massaviy kuchlar potensiali* (Π) *yigʻindisi oqim chizigʻi yoki uyuqma chizigʻi boʻylab oʻzgarmas boʻlib qoladi*.

Bu yerda E=P+Π+u^2/2 miqdor Bernullining umumlashgan integrali deb ataladi, bunda oqim chizigʻi yoki uyurma chizigʻi boʻylab E = const.

Tezliklar potensiali uchun tenglamalar. Ideal suyuqlik gidrodinamikasi tenglamalarini xususiy holda yechishning yana bir imkoniyatini keltirib oʻtaylik.

1) Siqilmaydigan suyuqlik uchun uzviylik tenglamasi quyidagicha:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0.$$

Ma’lumki, harakat potensialli, u holda

$$u_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x},\ u_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y},\ u_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

Ushbu u_x, u_y, u_z tezliklarning bu ifodalarini yuqoridagi uzviylik tenglamasiga qoʻysak, u holda siqilmaydigan suyuqlik tezliklari potensiali uchun quyidagi Laplas tenglamasiga ega boʻlamiz:

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0$$

2) Siqiluvchan suyuqlik. Ideal barotrop suyuqlikning uyurmasiz harakatini qaraylik. Faraz qilaylik, massaviy kuchlar yoʻq. Bu farazlarimizga koʻra quyidagilarni yoza olamiz:

$$\vec{u} = \text{grad}\ \varphi; \tag{6.47}$$

$$\rho = \Phi(p); \tag{6.48}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{u^2}{2}+\int\frac{dp}{\Phi(p)}=0. \tag{6.49}$$

(6.49) – Lagranj integrali Eyler tenglamasini almashtiradi. (6.47), (6.48), (6.49) tenglamalarga ushbu

$$\frac{d\rho}{dt}+\rho\,\mathrm{div}\vec{u}=0 \tag{6.50}$$

uzviylik tenglamasini ham biriktiramiz. Bizning maqsadimiz - φ tezliklar potensiali uchun tenglamani hosil qilish.

(6.47) dan quyidagini yozamiz:

$$\mathrm{div}\vec{u}=\mathrm{div}\,(\mathrm{grad}\ \varphi)=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}. \tag{6.51}$$

Tovush tezligini $a^2=\frac{dp}{d\rho}$ kabi kiritib, (6.48) tenglamadan quyidagini yozamiz:

$$\frac{d\rho}{dt}=\frac{d\rho}{dp}\frac{dp}{dt}=\frac{1}{a^2}\frac{dp}{dt}. \tag{6.52}$$

(6.51) va (6.52) larga ko‘ra (6.50) - uzviylik tenglamasini

$$\Delta\varphi+\frac{1}{a^2}\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dt}=0. \tag{6.53}$$

kabi yozamiz. (6.49) – Lagranj integraliga ko‘ra

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dt}=-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{u^2}{2}\right). \tag{6.54}$$

(6.54) ni (6.53) ga qo‘ysak va $\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial t}+\vec{u}\cdot\mathrm{grad}\,f$ ekanligini e’tiborga olsak, quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\Delta\varphi-\frac{1}{a^2}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{u^2}{2}\right)+\vec{u}\cdot grad\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{u^2}{2}\right)\right]=0. \tag{6.55}$$

Bu yerda

$$u^2=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2;\quad a^2=\frac{dp}{d\rho}=\frac{1}{\Phi'(p)}. \tag{6.56}$$

(6.49) dan kelib chiqadiki, p ushbu $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{u^2}{2}\right)$ yig‘indining funksiyasi. Demak, a^2 - tezliklar potensiali φ dan olingan hosilaga teng. Shunday qilib, (6.55) tenglama φ - tezliklar potensiali uchun tenglama ekan. (6.55) ga u^2 ning (6.56) ifodasini qo‘ysak, quyidagiga kelamiz:

$$\Delta\varphi - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \frac{1}{a^2}\sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_j} - \frac{2}{a^2}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial t} = 0. \qquad (6.57)$$

Faraz qilaylik, harakat statsionar bo‘lsin. Bu holda $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$=0 va φ - tezliklar potensiali uchun (6.57) tenglama quyidagicha yoziladi:

$$\Delta\varphi - \frac{1}{a^2}\sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_j} = 0. \qquad (6.58)$$

3) Xususiy hol. Siqiluvchan suyuqlikda kichik qo‘zg‘alishlarning tarqalishi haqidagi masalani qaraylik. Faraz qilaylik, bu qo‘zg‘alish tinch turgan gazning muvozanat holatida sodir bo‘lsin. Gazning u = 0 holdagi parametrlari p_0 , ρ_0, a_0 bo‘lsin, bunda $a_0{}^2 = \left.\frac{dp}{d\rho}\right|_{\rho=\rho_0}$. Bunday holda gidrodinamik miqdorlarni quyidagicha yozishimiz mumkin:

$$u = u'; \; p = p_0 + p'; \; \rho = \rho_0 + \rho', \qquad (6.59)$$

bu yerda u', p', ρ' - tezlik, bosim va zichlikning kichik o‘zgarishlari. Masalada potensial harakat qaralayotganligi uchun $\vec{u}$ = gradφ, bunda φ - qo‘zg‘alish harakatning potensiali ($\vec{u}=\vec{u}'$=gradφ). (6.57) tenglamada birinchidan yuqori darajali barcha kichik miqdorlarni tashlab yuboramiz va quyidagi tenglamani hosil qilamiz:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = \frac{1}{a_0^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}. \qquad (6.60)$$

Bu - *klassik to‘lqin tenglanasi*. Bunda a_0 – tinch turgan suyuqlikda tovush tarqalish tezligi. φ ni (6.60) dan va tezlikni esa $\vec{u}$ = gradφ dan topamiz. Lagranj integralidan foydalanib bosimni aniqlaymiz:

$$p' = p - p_0 = -\rho_0\frac{\partial\varphi}{\partial t}. \qquad (6.61)$$

Suyuqlik barotrop bo‘lganligi uchun $\rho = \Phi(p)$ ekanligidan ρ' ni quyidagicha topamiz:

$$\rho' = \rho - \rho_0 = \left(\frac{dp}{d\rho}\right)_{p=p_0}(p - p_0) = \frac{1}{a_0^2}p'. \qquad (6.62)$$

Bosim va zichlik ham to‘lqin tenglamasini qanoatlantiradi.

To‘lqin tenglamasi (6.60) ni silindrik koordinatalar sistemasida quyidagicha yozamiz:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = \frac{1}{a_0^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}. \qquad (6.63)$$

(6.60) tenglamaning faqat x va t dan bog‘liq xususiy yechimini qaraylik. Xususiy holda, (6.60) dan

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \frac{1}{a_0^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}. \qquad (6.64)$$

Bu tenglamaning umumiy yechimi quyidagicha:

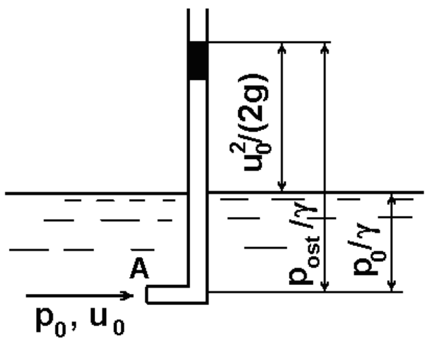
$$\varphi = f_1(x - a_0 t) + f_2(x + a_0 t), \qquad (6.65)$$

bu yerda f_1, f_2 - ixtiyoriy funksiyalar. (6.65) yechim a_0 tezlik bilan qarama-qarshi yo‘nalishda harakatlanayotgan ikkita to‘lqinning tarqalishini ifodalaydi. Shunday qilib, tovush tezligini tinch turgan gazdagi kichik qo‘zg‘alishlarning tarqalish tezligi deb talqin qilish mumkin. Harakatlanayotgan va tinch turgan muhitlarda tovish tarqalish qonunlari akustika fanida o‘rganiladi.

6.3. Bernulli teoremasining amaliyotdagi tadbiqlari

Bir qator asboblar va texnik uskunalarning ishlash tarzida Bernulli tenglamasining tadbiqini ko‘rish mumkin. Ana shulardan ba’zilariga to‘xtalib o‘tamiz:

Pito trubkasi (to‘la napor naychasi) - bu oqim tezligini o‘lchash asbobi bo‘lib, u Pito tomonidan 1832 yilda tavsiya qilingan (6.2-rasm). Yuqorida ta’kidlanganidek, suyuqlik, ideal, naycha uchidagi A nuqta orqali oqim chizig‘i o‘tadi va bu chiziq bo‘ylan Bernulli tenglamasi o‘rinli bo‘ladi.



6.2-rasm. Pito naychasining sxematik tasviri.

Bu A nuqtada suyuqlik to‘la tormozlanadi va unda yuqoridagi $p + \frac{\rho u^2}{2} = p_0$ tenglik o‘rinli, bunda u va p naycha yo‘q paytida shu nuqtadagi oqim tezligi va bosim, p_0 esa tormozlanish bosimi. Ana shunday holda shu A nuqtadagi oqim tezligi quyidagi formuladan topiladi:

$$u = \sqrt{\frac{2(p_0 - p)}{\rho}}.$$

Pito naychasining qulatliklari: qurilma sodda, ishonchli va arzon; Pito naychasini oqimning tabiiy tuzilmasini sezilarli buzmagan holda keraklicha kichik shaklda yasash mumkin va oqimning holati juda qiziqish uyg‘otadigan qurilma sohalariga uni o‘rnatish mumkin. *Pito naychasining kamchiliklari*: oqimning ko‘ndalang kesimda bosim o‘zgarmas bo‘lgandagina bu asbobdan foydalanish mumkin (bu shart hamma vaqt ham bajarilavermaydi); asbobning ko‘rcatgichi nochiziqli ($\Delta p \sim u^2$), bu o‘z navbatida tezliklarni o‘lchash diapazonini qisqartiradi.

Ventura naychasi – bu suyuqlik sarfini o‘lchagich asbob bo‘lib, u differensial manometr shaklida bo‘ladi. Masalan, bu manometrning bir uchi ko‘ndalang kesimi S o‘zgarmas naychaga (undagi u - oqim tezligi, ρ - zichligi va p - bosim o‘zgarmas), ikkinchi uchi esa naychaning ko‘ndalang kesimi S_1 toraygan biror qismining eng minimal kesimli joyiga o‘rnatilgan bo‘lsin (6.3-rasm). Shu bilan birga butun naycha bitta oqim chizig‘iga ega. Ana shunday holda quvur bo‘ylab bosim taqsimoti Bernulli tenglamasini qanoatlantiradi. Buni quyidagi masala yechimi orqali tushuntiramiz.

1-masala. Egriligi kichik nayning S va S_1 yuzali ikkita kesimi orqali siqilmaydigan ideal suyuqlik oqimining statik bosimlari $p = 10^5$ Pa va $p_1 = 0{,}999 \cdot 10^5$ Pa ($\Delta p = p - p_1$ differensial manometr yordamida ham o‘lchanishi mumkin) hamda mos zichlik $\rho = 1{,}226$ kg/m^3 va $S_1/S = 0{,}5$ bo‘lganda kesimlardagi u va u_1 tezliklarni toping (6.4-rasm).

Yechish. Siqilmaydigan ideal suyuqlik oqimi uchun ushbu

$$z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g} = z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g} \tag{6.66}$$

tenglik o‘rinli. Bernulli tenglamasiga ko‘ra quyidagini topamiz:

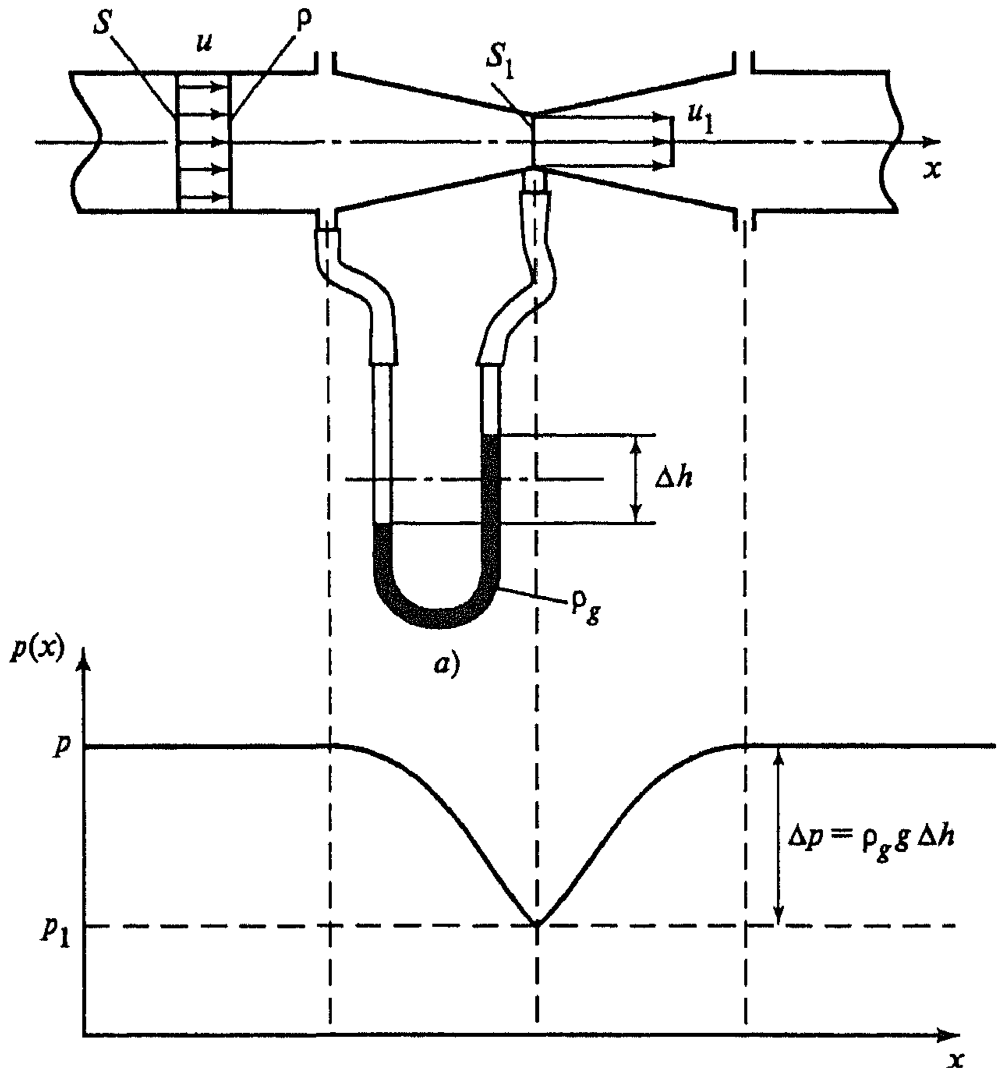
$$u_1^2 - u^2 = 2\frac{p - p_1}{\rho}. \tag{6.67}$$

Uzviylik tenglamasi $u_1 S_1 = u\ S$ dan ushbu

$$\frac{u}{u_1} = \frac{S_1}{S} \tag{6.68}$$

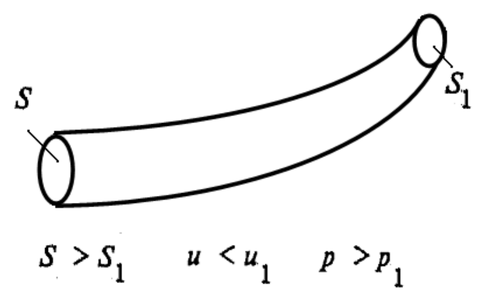
tenglik kelib chiqadi. (6.67) va (6.68) ni birgalikda yechamiz, natijada

$$u = \sqrt{2\frac{p - p_1}{\rho\left[(S/S_1)^2 - 1\right]}}\ ; \quad u_1 = \sqrt{2\frac{p - p_1}{\rho\left[1 - (S_1/S)^2\right]}}.$$



b)

6.3-rasm. Ventura naychasi: *a* – suv sarflagichning ishlash sxemasi; *b* – unda bosim taqsimoti sxemasi; ρ_g – differensial manometrdagi suyuqlik (odatda bu simob) zichligi.



6.4-rasm. O‘zgaruvchan kesimli quvurdagi oqimni Bernulli tenglamasi orqali tahlil qilishga oid sxema.

Bularga masalaning berilishidagi son qiymarlarni qo‘yib hisoblasak, u =7,374 m/s va u_1 =14,75 m/s natijalarni olamiz.

Bundan gidrodinamikaning eng muhim qonunlaridan biri - bu *massaning saqlanish qonuni* kelib chiqadi: *quvurga oqib kirayotgan suyuqlik miqdori chiqayotganiga teng* ($u_1 S_1 = u\ S$). Bu yerdan ko‘rinadiki, chiqishdagi oqim tezligi shu yuzaga teskari proporsional, ya’ni suvning uzoqqa otilishini kuzatish mumkin.

Shuning uchun, masalan, o‘t o‘chirish, ko‘chalarni yuvish, daraxtlar va paxtazorlarni purkab dorilash moslamalarida va hokazo, shu qonuniyatdan foydalaniladi.

Izoh: 1. Odatda haqiqiy suyuqliklar qovushoq bo‘lib, ularning kesimlar bo‘ylab tezligi o‘zgaradi. Ventura naychasi kesim bo‘yicha o‘rtacha tezlikni hisoblaydi. 2. Qovushoq ishqalanish har xil kesimlar orasida bosimning biroz qo‘shimcha pasayishiga olib keladi.

Ventura naychasi bir qator ustunliklarga ega: qurilma sodda, ishonchli, chidamli va zuda arzon; nisbatan kichik xususiy gidravlik qarshilikka ega; oqimga kiruvchi elementlar yoki qismlarning aylanishi va ularning sezilarli deformatsiyalanishi yo‘q.

Ventura naychasining kamchiliklari: Ventura naychasining ko‘rsatgichi tezlikdan nochiziqli bog‘liq ($\Delta p \sim u^2$). Shuning uchun bunday sarf o‘lchagich yetarlicha aniqlikda tezlik (sarf)ning faqat ma’lum bir qiymatlari oralig‘ida ishlashi mumkin; Ventura naychasiga faqatgina barqaror oqim tushgandagina bosim farqi tezlik (sarf)dan bir qiymatli bog‘liq bo‘ladi. Bu shartning bajarilishi uchun Ventura naychasini quvurning uzunroq qismiga ulash lozim bo‘ladi.

Gorizontal quvurdan suyuqlikning oqishi. Bunday holda Bernulli tenglamasi $p+\frac{\rho v^2}{2}=\text{const}$ kabi yoziladi. Bu ifodadan quvurning katta tezlikli bo‘lagida bosimning kam ekanligi kelib chiqadi. Sharrachaning uzviyligi tenglamasiga ko‘ra quvurning ko‘ndalang kesimi kichik bo‘lagida oqimning tezligi katta, natijada, oqim quvurning qisqargan bo‘lagiga o‘tishida bosim kamayadi. Bosimning bunday pasayishi suyuqlikni quvur o‘qi bo‘ylab tezlanish bilan oqishga majbur qiladi. Tezlik va bosim quvur o‘qi bo‘ylab yo‘nalgan koordinatadan bog‘liq, ammo tezlanish yo‘nalishi suyuqlik oqimi tezligining yo‘nalishidan bog‘liq emas.

Suyuqlikning idishdan oqib chiqishi. Faraz qilaylik, suyuqlik idish tubidan burg‘u bilan ochilgan kichkina teshik orqali oqib chiqmoqda. Hamma oqim chiziqlari idish tubidan va teshikdan *h* balandlikda joylashgan erkin sirt orqali o‘tadi, bunda barcha oqim chiziqlari uchun Bernulli tenglamasining o‘zgarmasi bir xil bo‘ladi. Shu chiziqlardan bittasini qaraylik, bunda erkin sirtdagi oqim tezligi teshikdan oqib chiqayotgan suyuqlik tezligiga nisbatan hisobga olmaslik darajada kichik deb faraz qilaylik. Buni hisobga olib, erkin sirt sathi va teshik orasidagi oqim chizig‘iga Bernulli tenglamasini qo‘llaylik:

$$p_{atm} + \rho g h = p_{atm} + \rho v^2 / 2\,,$$

bu yerda p_{atm} – atmosfera bosimi; v – idish teshigidan suyuqlikning oqib chiqish tezligi. Bu tenglamadan *Torricheli formulasi* deb ataluvchi idish teshigi orqali suyuqlikning oqib chiqish tezligi ifodasini olamiz:

$$v=\sqrt{2gh}\ .$$

Ideal suyuqlikning idish teshigidan oqib chiqish tezligi formulasi jismning h balanglikdan erkin tushishi bilan o‘xshash. Aslida esa haqiqiy suyuqliklar uchun idish teshigidan oqib chiqish tezligi qiymati kichikroq bo‘ladi, ya’ni

$$v=\mu_0\sqrt{2gh}\,,$$

bu yerda μ_0 - eksperiment orqali aniqlanuvchi tezlik (suyuqlik sarfi) koeffisienti bo‘lib, teshikning chuqurligi h va suyuqlik sathiga ta’sir etayotgan bosimdan bog‘liq, masalan, doiraviy kesimli teshik uchun μ_0 = 0,95 . . . 0,99.

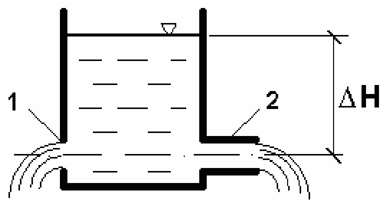
Endi Bernulli tenglamasining tadbiqi sifatida suyuqlikning *teshik va suv uzatish kiygizgichi* (*nasadka*)*dan oqishi* masalasida suyuqlik sarfini qaraylik. Nasadka deb suv oqimini yaxshilovchi, asosiy diametrga nisbatan 3-4 marta kishik diametrli qisqa quvurga aytiladi.

Masalan, suv idishning bir xil chuqurligiga bir xil diametrli teshik va nasadka o‘rnatilgan bo‘lsa, u holda teshikka nisbatan nasadka orqali suv sarfi taxminan 30% ortiq bo‘ladi (6.5-rasm).

Teshik yoki nasadka orqali suyuqlik sarfi quyidagi formuladan topiladi:

$$Q=\mu_o\omega\sqrt{2g\Delta H}\ ,$$

bunda μ_0 – suyuqlik sarfi (tezlik) koeffisienti: μ_0 = 0.62 – teshik uchun; μ_0 = 0.82 – nasadka uchun; ω - teshik yoki nasadkaning ko‘ndalang kesim yuzasi; ΔH – naporlar farqi.



1- teshik; 2- nasadka.
6.5-rasm. Teshik va nasadkadan oqish sxemasi.

2-masala. Yuqorida 4.2-bandda qarab chiqilgan doiraviy silindr atrofidan nosirkulyatsion aylanib oqish masalasi uchun silindr sirti bo‘ylab bosimning taqsimotini topishni Bernulli tenglamasining tadbiqi sifatida qarash mumkin.

Yechish. Bu masalada uyurmasiz harakat qaralganligi uchun Bernulli tenglamasini quyidagicha yozamiz:

$$p+\frac{\rho u^2}{2}=p_\infty+\frac{\rho u_\infty^2}{2}\,,$$

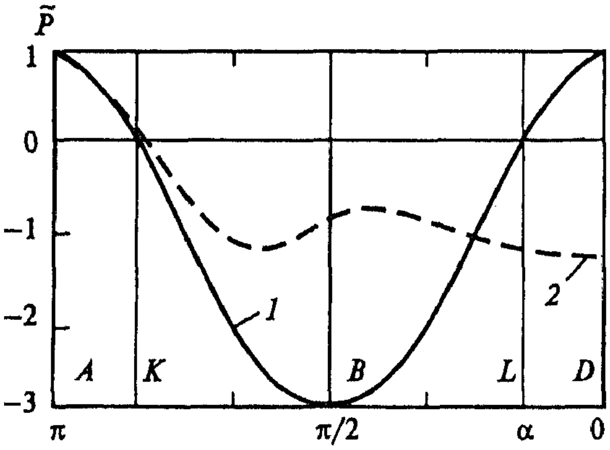
bunda u_∞ , p_∞ - silindrdan uzoqdagi nuqtalarda oqim tezligi va undagi bosimning mos qiymatlari.

Ushbu $\tilde{P}=\dfrac{p-p_\infty}{\rho u_\infty^2/2}$ - *bosim koeffisiyenti* deb ataluvchi o'lchamsiz miqdorni kiritsak, yuqoridagi tenglikdan silindrning sirti bo'ylab bosim taqsimotining ushbu

$$\tilde{P}=1-\frac{u^2}{u_\infty^2}$$

ifodasiga kelamiz. O'sha banddagi tezlikning ifodasi (4.38) dan foydalansak, bosimning $\tilde{P}=1-4\sin^2\theta$ ifodaga ega bo'lamiz. Bu esa, xuddi tezlikniki kabi, silindr sirtidagi bosimning faqat θ dan bog'liq bo'lib, silindrning radiusi r dan bog'liq emasligini ko'rsatadi (6.6-rasm). Xususan, A (θ=0) va D (θ=π) nuqtalarda $\tilde{P}_A=\tilde{P}_D=1$; K (θ=π/6) va L (θ=5π/6) nuqtalarda $\tilde{P}_K=\tilde{P}_L=0$; B (θ=π/2) nuqtada $\tilde{P}_B=-3$. A va D nuqtalardagi bosim tormozlanish bosimi p_0 ga teng: $p_0=p_\infty+\dfrac{\rho u_\infty^2}{2}$. A nuqtadan B nuqtaga qarab harakatlanishda bosim kamayib boradi, bu sohada *konfuzor oqim* (oqim chizig'i bo'ylab bosim kamayib boradi) kuzatiladi. B nuqtada bosim o'zining eng minimal qiymatiga erishadi:

$$p_B=p_\infty-3\frac{\rho u_\infty^2}{2}.$$



6.6-rasm. Ko'ndalang suyri silindrning sirti bo'ylab bosim koeffisiyentining taqsimoti grafigi: *1* – ideal suyuqlik uchun; *2* – qovushoq suyuqlik uchun (real suyuqliklar uchun eksperumentlar yordamida aniqlangan).

B nuqtadan D nuqtaga qarab bosim yana ortib boradi va D nuqtada tormozlanish qiymatiga erishadi. Bu sohada *diffuzor oqim* (oqim chizig'i bo'ylab bosim ortib boradi) kuzatiladi.

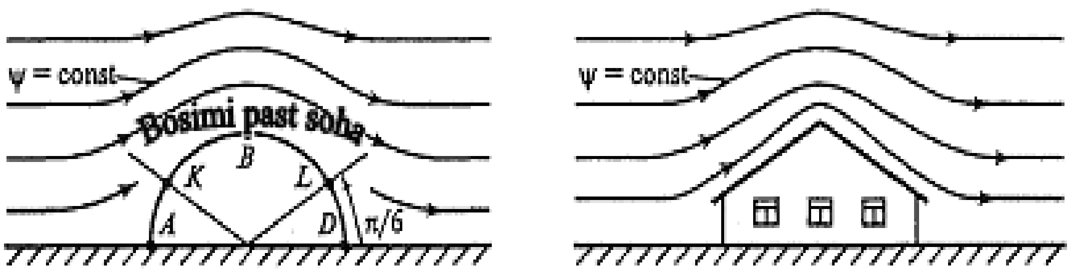
Silindr sirtining katta qismi (π/6<θ<5π/6)da bosimning pasayishi ($p<p_\infty$) kuzatiladi. B nuqtadagi pasaygan bosim miqdorining absolyut qiymati A va D nuqtalardagi maksimal ortiqcha bosimlardan ancha sezilarni katta bo'ladi. Ana shu holat kuchli bo'ron, dovul va samol paytida kuzatilib, uylarning tomini ezib emas, balki sugurib olib, tashqariga uchirib yuborilishiga olib keladi (6.7-rasm).

Dalamber g‘ayritabiiy hodisasi (padadoksi). Silindrning suyriligi jarayonida paydo bo‘ladigan qarshilik kuchini uning sirti bo‘ylab bosimning ifodasini integrallash orqali olish mumkin (chunki ideal suyuqlikda bosim kuchidan boshqa kuchlar yo‘q). 6.6-rasmdan ko‘rinadiki, bosimning *Oy* o‘q bo‘lan taqsimoti simmetrik, uning *Ox* o‘q bo‘ylab proyeksiyasi esa nolga teng.

Ideal suyuqlikda harakat qilayotgan har qanday jism qarshilik kuchiga uchramaydi.

Bu xulosa faqat xususiy holdagina (silindrning ko‘ndalang suyriligida) o‘rinli. Ammo uning ideal suyuqlikda harakat qilayotgan ixtiyoriy shakldagi jism uchun o‘rinli ekanligini ko‘rsatish mumkin.

Ko‘p sonli tajribalar shuni ko‘rsatadiki, real suyuqliklar uchun bu xulosa o‘rinli emas, xususan, real qovushoq suyuqliklardagi qovushoqlik qattiq jismlar sirtida ishqalanish qarshilik kuchini paydo qiladi, jismlarning suyriligi esa silliq emas, balki uzilishli bo‘ladi (ilovadagi II.2-rasmga qarang). Suyri jismning orqa qismidagi sohada uyurmali oqim kuzatiladi, bu soha ichida bosim nisbatan o‘zgarmas, ammo jism peshonasidagi tormozlanish nuqtasidagiga nisbatan ancha past bo‘ladi. Bu esa bosimning qarshilik kuchini paydo qiladi.



a *b*

6.7-rasm. Suyri jismlar atrofidan aylanib oqishda oqim chiziqlari:
a – bosimning pasayish sohasi; *b* – tabiatda shamolning uy atrofida aylanib oqishi.

3-masala. Ushbu o‘quv qo‘llanmaning 4-bobi oxiridagi 4-masala sharti va uning yechimidandan foydalangan holda doiraviy silindrning sirkulyatsiyali suyriligi masalasi jarayonlarini o‘rganamiz.

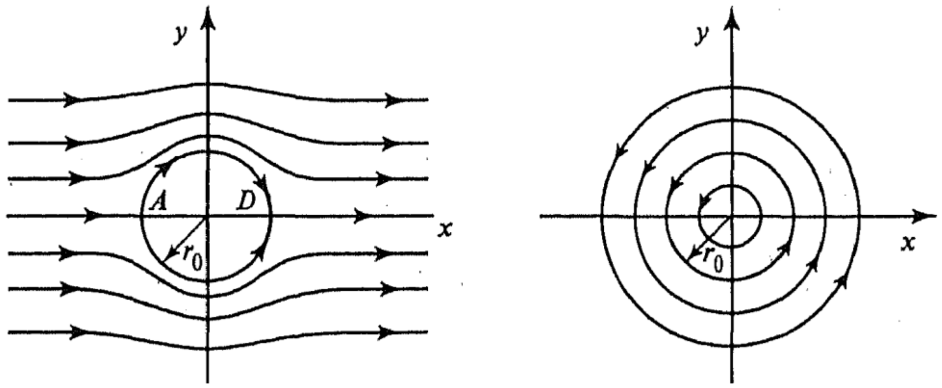
Yechish. Doiraviy silindr suyriligining tezliklari maydoni ustiga tekis uyurma tezliklari maydonini qo‘yaylik (6.8-rasm). 4.2-bandda tavsiflangan superpozitsiya usuliga ko‘ra qaralayotgan masaladagi oqim uchun potensial tezlik va oqim funksiyasining quyidagi ifodalariga ega bo‘lamiz:

$$\varphi = u_\infty\left(1+\frac{r_0^2}{r^2}\right)r\cos\theta+\frac{\tilde{A}}{2\pi}\theta, \qquad \psi = u_\infty\left(1-\frac{r_0^2}{r^2}\right)r\sin\theta-\frac{\tilde{A}}{2\pi}\ln r\,.$$

Bu ikkala oqimni qo‘shish natijasida bir xil r_0 radiusli silindrning suyriligi hosil bo‘ladi, bunda har bir oqimning r_0 radiusli silindr konturi bilan mos tushadigan oqim chiziqlari mavjud (6.7-rasm).

Yig‘indi oqimning tezliklati taqsimoti quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$u_r = \frac{\partial\varphi}{\partial r} = u_\infty\left(1-\frac{r_0^2}{r^2}\right)\cos\theta, \qquad u_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = -u_\infty\left(1+\frac{r_0^2}{r^2}\right)\sin\theta+\frac{\tilde{A}}{2\pi r}\,.$$



6.8-rasm. Doiraviy silindr suyriligining tezliklari maydoni (*a*) ustiga tekis uyurma tezliklari maydonini (*b*) qo‘yish sxemasi.

Bu tengliklardan oqimning *Oy* o‘qqa nisbatan simmetrikligi kelib chiqadi, chunki $u_\theta(\theta) = u_\theta(\pi-\theta)$.

Silindrning $r = r_0$ sirtida esa

$$u_r = 0; \qquad u_\theta = -2u_\infty \sin\theta + \frac{\tilde{A}}{2\pi r_0}.$$

$u_\theta = 0$ shartdan silindr sirtidagi θ_{kr} - kritik nuqtalarning holatini topishimiz mumkin. Bu shardan ushbu

$$\sin\theta_{kr} = \frac{\tilde{A}}{4\pi r_0 u_\infty} = \tilde{A}^*$$

tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglama $\Gamma^*>1$ yechimga ega emas, $0<\Gamma^*\leq 1$ da *Oy* o‘qqa nisbatan simmetrik bo‘lgan ikkita kritik nuqtaga ega, xususan, $\Gamma^*=1$ da bu nuqtalar birlashadi: $\sin\theta_{kr} = \pi/2$. $\Gamma^*=0$ da sirkulyatsiyasiz suyrilikka ega bo‘lamiz va bunda Dalamder paradoksi kuzatiladi, qarshilik kuchining *Ox* o‘qdagi proyeksiyasi nolga teng, ya’ni

$$R_x = 0,$$

Oy o‘qdagi proyeksiyasi esa ko‘taruvchi kuch bo‘lib, uning ushbu

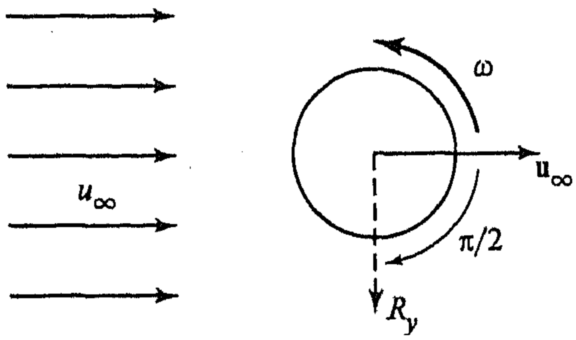
$$R_y=-\rho u_\infty \Gamma$$

ifodasi doiraviy silindrning sirkulyatsion suyriligidan topiladi, bu esa o‘z navbatida ixtiyoriy qattiq jismning suyriligida o‘rinli.

Jukovskiy teoremasi. *Ideal suyuqlikda ixtiyoriy shakldagi jismning suyriligida ko‘taruvchi kuchning qiymati oqayotgan oqimning zichligi va tezligiga hamda shu jismni o‘rab turgan ixtiyoriy konturi bo‘ylab sirkulyatsiya tezligiga to‘g‘ri proporsional.*

Bu R_y ko‘taruvchi kuchning yo‘nalishi sirkulyatsiyaning ishorasidan va o‘tayotgan oqimning yo‘nalishidan bog‘liq.

Magnus effekti (6.9-rasm) – bu havo oqimidagi qattiq jism atrofida havo sirkulyatsiyasi natijasida ko‘taruvchi kuchning paydo bo‘lishi. Bunda ko‘taruvchi kuch o‘tayotgan oqimning yo‘nalishiga perpendikulyar bo‘ladi. Masalan, bunday hodisani tennis to‘pchasi va futbol to‘pi harakatida kuzatish mumkin, bunda aylanib harakatlana-yotgan to‘pga yetarlicha kattalikdagi aerodinamik kuch ta’sir etadi va uning harakat trayektoriyasini sezilarli o‘zgartiradi. Bunda paydo bo‘ladigan kuch Bernulli tenglamasidan topiladi.



6.9-rasm. Magnus effekti. Aylanayotgan jismning harakatida R_y – ko‘taruvchi kuchning yo‘nalishini aniqlash sxemasi.

Izoh. Ideal suyuqlikda jismning aylanisi suyuqlik zarrachalariga uzatilmaydi, chunki undagi qovushoqlik nolga teng. Ideal suyuqlik nazariyasi doirasida sirkulyatsiya berilgan deb faraz qilinadi va uning yuz berish jarayoni tadqiq qilinmaydi.

Muhandislik tarmoqlarining aerodinamikasi. Binolarning shamollatgich va isitish tizimlari aerodinamika qonunlariga asosan hisonlanadi. Bunda gazlar uchun Bernulli tenglamasidan foydalaniladi, bu yerda napor emas, balki bosim hisoblanadi. Masalan, suv bilan isitish tizimi ham bosim bo‘yicha hisob qilinadi, chunki undagi suyuqlik temperaturasi va unga mos zichligi o‘zgaradi, shuning uchun bu yerda napor miqdorlarini qo‘llash noqulay. Bunday tizimlardagi aerodinamik hisoblarda asosan Δp_k - bosimlar farqi, $\Delta p_{yo‘q}$ – yo‘qotilgan bosim, oqim sarfi va quvur kesimimning geometrik o‘lchamlari aniqlanadi.

Hisob Bernulli tenglamasiga ko‘ra quyidagicha bajariladi. Uzatuvchi quvurlar, kanallar va ularning oqimga qarshilik ko‘rsatuvchi o‘tkazish kesimlari o‘lchamlari shunday tanlanadiki, bunda oqimlar tezligi mumkin bo‘ladigan holda, sarf talab darajasida va bosimlar farqi yo‘qotilgan bosimga teng bo‘lsin. Bunda mustahkamlikni oshirish maqsadida yo‘qotilgan bosim sun’iy ravishda 10% ga oshiriladi. Shuning uchun muhandislik tizimlari hisobi uchun Bernulli tenglamasi quyidagicha yoziladi:

$$\Delta p_k = 1.1\ \Delta p_{yo‘q}\ .$$

Hisob qilinayotgan tizim ana shu shartni qanoatlantirishi zarur.

Bundagi bosimlar farqini aniqlash maqsadida tabiiy sirkulyatsiya bilan ishlaydigan tutun uzatish quvurli va suv bilan isitgichli isitish tizimlarini misol sifatida quyida qaraymiz.

Uzatish quvurida, havo uzatgichda yoki gaz uzatish quvurida $\Delta p_{yo‘q}$ – yo‘qotilgan bosimni ushbu

$$\Delta p_{yo‘q} = \zeta\,\rho\, u^2 / 2$$

*Veysbax formulasi*dan aniqlash mumkin, bunda ζ - suyuqliklardagi kabi gidravlik qarshilik koeffisiyenti, faqatgina kesimi doiraviy bo‘lmagan quvurlar uchun diametr o‘rnida d_{ekv} ekvivalent diametr ifodasidan foydalanish lozim.

Umumiy $\Delta p_{yo‘q}$ – yo‘qotilgan bosim Δp_l – chiziqli va Δp_m – mahalliy yo‘qotilgan bosimlar yig‘indisidan iborat:

$$\Delta p_{yo‘q} = \Sigma\ \Delta p_l + \Sigma\ \Delta p_m\ .$$

Δp_l va Δp_m larni hisoblashda gazlar uchun Veysbax formulasidan foydalaniladi, faqat bunda mos ravishda ζ o‘rnida ζ_l va ζ_m lar hamda d o‘rnida d_{ekv} ishlatiladi. Masalan, Δp_l ni aniqlashda chiziqli gidravlik qarshilik koeffisiyenti (o‘lchamsiz miqdor) ushbu $\zeta = \lambda\, l / d_{ekv}$ formuladan topiladi, bunda l – tizimning to‘g‘ri chiziqli qismi uzunligi. Gaz oqimining turbulent rejimi uchun λ - gidravlik ishqalanish koeffisiyenti quyidagicha aniqlanadi:

$$\lambda = 0.11\ (68/\mathbf{Re} + \Delta/d_{ekv}\ )^{0.25}\ ,$$

bunda Δ (*mm*) – uzatish quvuri yoki kanal devorining g‘adir-budirligi; **Re** – Reynolds soni. Masalan, po‘lat qavatli shamollatgich qutisi uchun Δ = 0.1 mm, havo o‘tkazuvchi g‘ishtli devor uchun Δ = 4 mm.

Mahalliy gidravlik qarshilik koeffisienti ζ_m ning qiymati oqimning deformatsiyalanish sohasi (quvurning kirish va chiqish uchastkasi; burilgan quvur, tursak quvur, uchlik quvur va hokazo) uchun fizik kattaliklar jadvalidan topiladi.

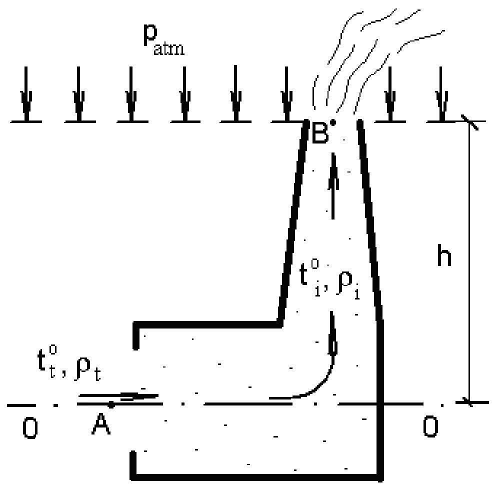
Namunaviy masalalar va ularning yechimlari

1-masala. *Tabiiy tortishga ega tizim hisobi.*

Yechish. Xonadagi tutun va ifloslangan havoni tozalovchi isitish pechkasi quvuri va shamollatgich tizimining ishlash jarayoni ichki va tashqi keltirilgan to‘la bosimlar (Pa) farqi hisobiga paydo bo‘ladigan tabiiy tortishga asoslangan. Tabiiy tortish Δp_{tab} (Pa) quyidagi formuladan topiladi: $\Delta p_{tab} = g\,h\,(\rho_t - \rho_i)$, bunda h – pechka quvuri yoki shamollatgich (ventilyatsiya) shaxtasining balandligi; ρ_t – tashqi sovuq havo zichligi; ρ_i – ichki issiq havo zichligi.

Isitish pechkasining ishlash jarayonini qaraylik (6.10-rasm). Pechkadagi yonilg‘i yonganda tutun uzatish quvurining tortishi ichkaridagi gazni tashqariga chiqaradi. Tortish ichki va tashqi temperaturalar farqi hisobiga paydo bo‘ladi: $t_i°$ - ichki issiq havo temperaturasi; $t_t°$ - tashqi sovuq havo temperaturasi. Havoning har xil temperaturalariga uning har xil ρ_i va ρ_t zichliklari mos keladi. Bunday tizimlarda u tezlik juda kichik bo‘lganligi uchun ulardagi $p_\partial = \rho u^2/2$ – dinamik bosim hisobga olinmaydi. Gaz uchun Bernulli tenglamasiga A va B nuqtalar uchun keltirilgan to‘la bosimlar ifodasini qo‘ysak, u holda tabiiy tortish formulasiga kelamiz va Δp_{tab} ni aniqlaymiz.

Keyingi qadamda $\Delta p_{yo‘q}$ umumiy yo‘qotilgan bosim hisoblanadi va u Δp_{tab} tabiiy tortishning miqdori bilan taqqoslanadi. Agar $\Delta p_k = 1.1\,\Delta p_{yo‘q}$ tenglik bajarilsa, u holda hisob yakunlanadi, tutun chiarish tizimi yaxshi ishlayapti degan xulosaga kelinadi.



6.10-rasm. Tutun uzatish quvurli isitish sxemasi.

Agar bu tenglik bajarilmasa, u holda qurilma tizimini yoki tutun tortishni yoki yo‘qotilgan bosim tizimini qayta tuzish lozim bo‘ladi. Masalan, tortishni ikki yo‘l bilan oshirish mumkin: tutun chiqarish quvurini balandroq qilish; temperaturalar farqini oshirish (bunga hamma vaqt ham samarali erishib bo‘lmaydi). Yo‘qotilgan bosim kam bo‘lishi uchun esa quyidagilarni bajarish lozim: quvur kesimini oshirish; chiqib ketayotgan gaz yo‘lini kamaytirish; burilishlarni va mahalliy qarshiliklarni kamaytirish; quvur yoki kanal devorining g‘adir-budirligini kamaytirish.

Shunday qilib, ana shu hisoblar to‘g‘ri bajarilganda xonadagi tutun va ifloslangan havoni tozalovchi isitish pechkasi quvuri va shamollatgich tizimining ishlash jarayoni samarali bo‘ladi.

2-masala. *Tabiiy sirkulyatsiyali tizim hisobi* uchun suvli isitish tizimining 6.11-rasmdagi sxemasi keltirilgan. Strelkalar bilan isitgichdagi suv harakati ko‘rsatilgan. Bunda suv aylanishi nima hisobiga sodir bo‘ladi?

Yechish. Suv isitish qozonida isitilgan suvning ρ_{is} zichligi sovuq suvning ρ_{sov} zichligidan farq qiladi. Hisob jarayonining soddaligi uchun temperatura va zichlikning keskin o‘zgarishi qozon markazida va batareyka (radiator) markazida yuz beradi, deb faraz qilinadi. Qozon va radiatordagi to‘la bosimlar (Pa) farqini Δp_{tab} – tabiiy bosim (Pa) deb ataymiz. Ana shu bosim isitish tizimida suvning aylanma harakatini vujudga keltiradi va bu *tabiiy sirkulyatsiya* deb ataladi.

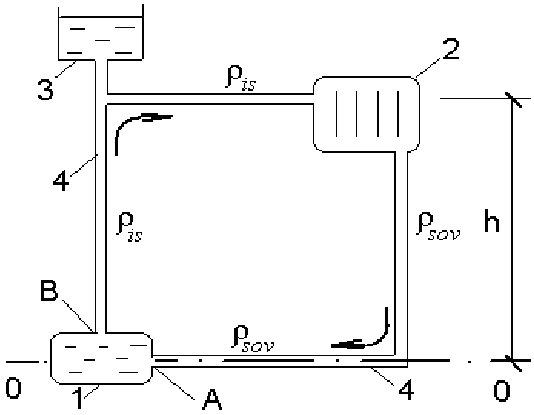
Tabiiy bosimni hisoblash formulasi, xuddi yuqoridagi misoldagi kabi, gaz uchun Bernulli tenglamasidan chiqariladi:

$$\Delta p_{tab} = g\,h\,(\rho_{sov} - \rho_{is})\ ,$$

bunda h – isitish va sovush markazlari balandliklari orasidagi masofa.

Suv uzatish quvurida (6.11-rasmga qarang) B nuqtadan A nuqtaga qarab sirkulyatsion xalqa bo‘ylab suv harakatida avval Δp_{tab} – tabiiy, keyin esa $\Delta p_{yo‘q}$ – umumiy yo‘qotilgan bosim Veysbax formulasidan foydalanib hisoblanadi.

Agar ushbu $\Delta p_{tab} = 1.1\ \Delta p_{yo‘q}$ tenglik saqlanib qolsa, u holda hisob yakunlanadi, sistema normal ishlaydi – xona isitiladi. Agar ana shu tenglik bajarilmasa, u holda tabiiy yo‘qotilgan bosimni to‘g‘rilash lozim bo‘ladi. Ana shunday holda, xuddi yuqoridagi isitish pechkasidagi kabi, bu yerda ham nimalarni bajarish lozimligini talabaga mustaqil o‘zlashtirishni tavsiya etamiz.



6.11-rasm. Tabiiy sirkulyatsiyali suvli isitish sxemasi: 1- suv isitish qozoni; 2- radiator; 3- kengaytirish baki; 4- suv uzatish quvurlari.

3-masala. *Muhandislik-qurilish aerodinamikasi.* Bino qurilishida shamolning ta’sirini e’tiborga olish lozim. Havo oqimi bino, inshoot, qurilish mexanizmlari (masalan, ko‘targich) va boshqa qurilmalarni aylanib harakat qiladi va ularni ag‘darib yuborishi mumkin. Kuchli shamol paytida binoda ko‘tarilgan va pasaygan bosim sohalari paydo bo‘ladi, bular o‘z navbatida qurilmaning ba’zi elementlarini siqishi, cho‘zichi yoki yulib olishi (masalan, bino tomini) mumkin. Binoning har tarafida bosim tushib ketishi bino ichida eshik, deraza, teshiklar orqali o‘tuvchi yelvizak hosil qiladi. Ana shu hodisaning aerodinamik ma’nosini qarab chiqaylik.

Yechish. Havo oqimidagi suyri binoning oqim chiziqlari bino qutisini egadi, bino ortida esa havo oqimi uyurmasi va past bosimli soha hosil bo‘ladi (II.3-rasm), binoning shamolga qarshi qismida esa yuqori bosimli soha paydo bo‘ladi.

Shamol bosimi quyidagi formuladan aniqlanadi:

$$p_{sh} = k_{sh}\, C_{aer}\, p_{\partial} = k_{sh}\, C_{aer}\, \rho\, u^2 / 2\ ,$$

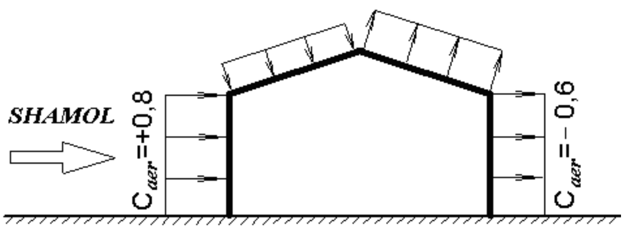
bunda k_{sh} – balandlik bo‘yicha shamol bosimi o‘zgarishi koeffisienti; C_{aer} - aerodinamik koeffisiyent (o‘lchamsiz miqdor); $p_{\partial} = \rho\ u^2/2$ – dinamik bosim (Pa); $\rho \approx 1.22$ kg/m^3 – qurilish hisobida qabul qilinadigan havo zichligi; u – shamol tezligi (m/s).

Yuqoriga ko‘tarilgan sayin shamol kuchayib boradi, shuning uchun balandlik oshishi bilan k_{sh} koeffisient 0.4 dan 1.5 gacha oraliqda tanlanadi.

Dastlabki yaqinlashishda $k_{sh} \approx 1$ deb olish mumkin.

C_{aer} – aerodinamik koeffisiyent, umuman olganda, suyri jism shaklining va Reynolds sonining funksiyasi. Bu son bino shaklining old, kesim, shamol yo‘nalishiga qarab joylashish shartini xarakterlaydi. Qurilish hisoblarida bu son o‘zgarmas: $0 < |C_{aer}| < 1$. Masalan, shamol yo‘nalishiga perpendikulyar qurilgan binoning shamol tarafida $C_{aer} = +0.8$, shamolga orqa tarafida esa $C_{aer} = –0.6$ (6.12-rasm): musbat ishora shamolning bosimi devorga qarab (binoni ko‘tarishga qaratilgan); manfiy ishora devordan tashqariga (devorni ag‘darishga qaratilgan) qarab shamol yonalishida ekanligini bildiradi.

Shamol bosimini o‘rganish uchun bino sirti bo‘ylab bosim taqsimotining epyurasi chiziladi (6.12-rasm). Bu p_{sh} bosimning ordinatasi shamol bosimi formulasidan topiladi. Dinamik bosim p_{∂} ning qiymati shu sohaning meteorologik jadvalidan olinadi. Agar bu soha kam o‘rganilgan bo‘lsa, u holda p_{∂} ning qiymati shu sohadagi shamol tezligidan topiladi.



6.12-rasm. Bino sirti bo‘ylab shamol bosimining epyurasi.

Real holatda p_{∂} ning epyurasi egri chiziqli bo‘ladi, ammo hisob jarayonini soddalashtirish maqsadida bu epyura to‘g‘ri burchakli uchburchak chizig‘i shaklida qabul qilinadi (6.12-rasm).

Topshiriqlar

1. Agar ideal suyuqlikning harakati statsionar $\left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}=0\right)$, suyuqlik barotrop $p=p(\rho)$ va tashqi massaviy kuchlar $\vec{F}$ = grad$U$ potensialga ega bo‘lsa, u holda oqim chizig‘i bo‘ylab ushbu $p+\frac{u^2}{2}-U=C$ Bernulli integrali o‘rinli ekanligini isbotlang, bunda $p=\int\frac{dp}{\rho}$ – bosim funksiyasi; C – oqim chiziqlaridan bog‘liq o‘zgarmas.

2. Barotrop suyuqlikning potensial oqimi uchun: *a*) φ tezliklar potensiali va ρ zichlikka; *b*) φ tezliklar potensiali va p bosim funksiyasiga nisbatan tenglamar sistemasini yozing.

3. Yuqoridagi 6.2-rasmda keltirilgan Pito trubkasi uchun suyuqlikning h=319 mm balandlikka ko‘tarilishiga mos keluvchi quvurdagi oqim tezligini toping.

4. Daryo oqimining 5 m chuqurligiga tushirilgan jismning oldingi qismiga ta’sir etuvchi maksimal ortiqcha bosim 81500 Pa. Daryo oqimining shu chuqurlikdagi tezligini toping.

5. Yer sirtining mo‘tadil sharoitidagi havo oqimida tovush tezligi 11 km balandlikdagiga nisbatan necha marta katta?

6. Har xil muhitlarda tovushning tarqalish tezligini aniqlang:

- suvda (elastiklik moduli E_s =196200 N/sm^2; zichligi ρ = 1000 kg/m^3);
- etil spirtida (elastiklik moduli E_s = 120600 N/sm^2; zichligi ρ = 790 kg/m^3);
- kerosinda (elastiklik moduli E_s=168600 N/sm^2; zichligi ρ=820 kg/m^3);
- T=288^{0}K temperaturali havoda, vodorodda, geliyda, argonda.

Izoh. Suyuqliklar uchun $E_s = a^2\rho$, gazlar uchun esa $a^2 = kRT$ (k – o‘zgarmas bosim va hajmda solishtirma issiqlik sig‘imlar nisbati; R – universial gaz doimiysi; T – absolyut temperatura) tenglik o‘rinli.

7. Agar binoning ichida havo temperaturasi t_{havo} °C , tashqarisida esa t_{tashqi} °C bo‘lsa, u holda balandligi h = 10 m bo‘lgan shamollatgich (ventilyatsiya) shaxtasining tabiiy tortishini aniqlang.

Boshlang‘ich ma’lumotlar	Variantlar				
	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5
t_{havo} , °C	20	20	20	20	20
t_{tashqi} , °C	-20	-10	0	5	10

8. Agar shaxtaga kirishdagi qarshilik ζ_{kirish} = 0,5 va undan chiqishdagisi $\zeta_{chiqish}$ = 1 bo‘lsa, u holda havo tezligi u = 1 m/s, balandligi h (m), ko‘ndalang kesimi 140 x 140 mm bo‘lgan shamollatgich (ventilyatsiya) shaxtasidagi yo‘qotilgan bosimni aniqlang. Shaxta devorining gidravlik ishqalanish koeffisiyenti λ berilgan.

Boshlang‘ich ma’lumotlar	Variantlar				
	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5
h , m	10	12	14	16	18
λ	0,05	0,06	0,05	0,05	0,06

9. Agar shamolning tezligi u (m/s), shamol bosimining koeffisiyenti k_{sh}= 1, havoning temperaturasi 40 °C bo‘lsa, u holda o‘lchamlari 2x2 m shitga shamol qanday kuch bilan ta’sir etadi?

Boshlang‘ich ma’lumotlar	Variantlar				
	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5
u , m/s	20	25	30	35	40

Sinov savollari

1. Statsionar oqish uchun harakat tenglamasi qanday integrallanadi?
2. Bernulli tenglamasini keltirib chiqaring.
3. Bernulli tenglamasining energetik ma’nosini ayting.
4. Pito va Venturi naychalarini tushuntiring.
5. To‘yingan gaz uchun Bernulli integralini yozing.
6. Lagranj va Eyler-Bernulli integrallarini yozing.
7. Siqiluvchan va siqilmaydigan ideal suyuqliklar uchun tezlik potensiali tenglamasini ayting.
8. Klassik to‘lqin tenglamasini ayting. Xususiy hollarni izohlang.
9. Qanday aerodinamik atamalarni bilasiz? Ularni izohlang.
10. Gaz oqimi uchun uzviylik tenglamasi ayting.
11. Keltirilgan to‘la bosim nima va u qanday o‘lchanadi?
12. Gazlar uchun Bernulli tenglamasini ayting.
13. Magnus effekti izohlang.
14. Bosimlar farqi, yo‘qotilgan bosim nima va ular qanday o‘lchanadi?
15. Gaz harakatining rejimini tuchintiring.
16. Aerodinamik masalalarga misollar keltiring.

7-BOB.
QOVUSHOQ SUYUQLIK GIDRODINAMIKASI

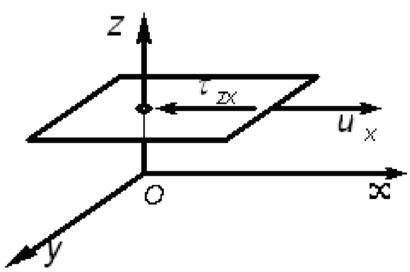
Quyida Nyuton qovushoq suyuqligi uchun barcha munosabatlar Nyutonning ishqalanish qonuni, Furyening issiqlik o‘tkazuvchanlik qonuni, ichki momentlarsiz holat o‘rinli deb chiqarilgan, nonyuton suyuqliklar haqida esa ba’zi tushunchalar keltirilgan.

7.1. Qovushoq suyuqlik modeli

Qovushoq suyuqlik harakatini o‘rganishni boshlashdan avval «qovushoq suyuqlik» atamasi nimani anglatishini tushuntirish lozim bo‘ladi. Matematik nuqtai nazardan kuchlanish uchun bog‘lanish funksiyasini chiqarish, boshqacha aytganda, qovushoq suyuqlik modelini tuzish kerak. Bundan keyingi tushunchalarda *qovushoq suyuqlik* deb quyidagi uchta gipotezalarni qanoatlantiruvchi suyuqliklarni qaraymiz: chiziqlilik; birjinslilik va izotroplik.

1) Chiziqlilik gipotezasi. *xOy* tekislikka parallel harakatlanayotgan suyuqlikka Nyuton qonunini qo‘llaymiz (7.1-rasm) va quyidagini yozamiz:

$$\tau_{zx} = \mu \frac{\partial u_x}{\partial z}.$$



7.1-rasm. *xOy* tekislikka parallel harakatlanayotgan suyuqlikning sxematik tasviri

Suyuqlik zarrachasining harakati haqidagi Gelmgolts teoremasini qarashdan olingan natijalardan foydalanamiz. Teoremaga ko‘ra *Oy* o‘qqa nisbatan burchak deformatsiya tezligi quyidagiga teng:

$$\gamma_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right).$$

Harakat *xOy* tekislikda sodir bo‘layotganligi uchun $u_z = 0$ va shunga ko‘ra

$$\gamma_y = \frac{1}{2}\frac{\partial u_x}{\partial z},$$

bu yerdan esa urinma kuchlanish quyidagiga teng:

$$\tau_{zx} = 2\mu\gamma_y. \qquad (7.1)$$

Olingan natija Stoksning ishqalanish qonunini ifodalaydi. Bu qonunga ko‘ra suyuqlikda hosil bo‘lgan kuchlanish, qattiq jismdagidan farqli, deformatsiyalarning o‘zlariga emas, balki ularning tezliklariga proporsional va ular bilan chiziqli bog‘langan. Bunda proporsionallik koeffisienti o‘zgarmas va u 2μ ga teng. Bundan tashqari, Stoks qonuniga ko‘ra urinma kuchlanish, yuqorida ta’kidlanganidek, burchak deformatsiyalar tezliklariga, normal kuchlanishlar esa chiziqli deformatsiyalar ($\frac{\partial u_x}{\partial x}$, $\frac{\partial u_y}{\partial y}$, $\frac{\partial u_z}{\partial z}$) tezliklariga proporsional. Shunday qilib, quyidagini yozamiz:

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= \tau_{yx} = 2\mu\gamma_z = \mu\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}\right); \\ \tau_{yz} &= \tau_{zy} = 2\mu\gamma_x = \mu\left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}\right); \\ \tau_{xz} &= \tau_{zx} = 2\mu\gamma_y = \mu\left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}\right). \end{aligned} \tag{7.2}$$

Endi qovushoqlik kuchidan paydo bo‘ladigan normal kuchlanishlarni qaraylik. Stoks qonuniga ko‘ra ularni kuchlanish deviatorlari shaklida yozish mumkin:

$$\sigma_{xx} = 2\mu\frac{\partial u_x}{\partial x}; \quad \sigma_{yy} = 2\mu\frac{\partial u_y}{\partial y}; \quad \sigma_{zz} = 2\mu\frac{\partial u_z}{\partial z}. \tag{7.3}$$

To‘la normal kuchlanish shunisi bilan farq qiladiki, yuqorida yozilganlardan tashqari, xoh qovushoq, xoh qovushoqmas suyuqlik uchun, statik bosim ham ta’sir qiladi. Boshqacha aytganda, quyidagi munosabatlar o‘rinli:

$$\begin{aligned} p_{xx} &= -p + 2\mu\frac{\partial u_x}{\partial x}; \\ p_{yy} &= -p + 2\mu\frac{\partial u_y}{\partial y}; \\ p_{zz} &= -p + 2\mu\frac{\partial u_z}{\partial z}. \end{aligned} \tag{7.4}$$

Quyidagi amalni bajaramiz: p_{xx} miqdorning uchlanganidan ushbu $p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}$ yig‘indini ayiramiz. Bu quyidagini beradi:

$$3p_{xx} - \left(p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}\right) = -3p + 6\mu\frac{\partial u_x}{\partial x} -$$

$$-\left[-3p + 2\mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right)\right] = 6\mu\frac{\partial u_x}{\partial x} - 2\mu\,\mathrm{div}\,\vec{u}.$$

Bu yerdan esa

$$p_{xx} = 2\mu\frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu\,\mathrm{div}\,\vec{u} + \frac{p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}}{3}.$$

Qovushoq suyuqlikdagi bosim sifatida ushbu

$$p = -\frac{p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}}{3}$$

o‘rtacha arifmetik miqdorni olamiz. Natijada kuchlanish tenzorining normal p_{xx} komponentasi uchun quyidagi ifodaga kelamiz:

$$p_{xx} = -p + 2\mu\frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu\,\mathrm{div}\,\vec{u}\,; \tag{7.5}$$

Xuddi shunday

$$p_{yy} = -p + 2\mu\frac{\partial u_y}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu\,\mathrm{div}\,\vec{u}\,; \tag{7.5$'$}$$

$$p_{zz} = -p + 2\mu\frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{2}{3}\mu\,\mathrm{div}\,\vec{u}\,.$$

Siqilmaydigan suyuqlik uchun $\mathrm{div}\,\vec{u} = 0$ ekanligidan (7.5) ifodalar soddalashadi, ya’ni ulardan (7.4) ifodalar kelib chiqadi.

Siqilmaydigan suyuqlik uchun kuchlanish tenzori komponentalarining r, θ, z silindrik koordinatalari sistemasidagi ifodalari quyidagilar:

$$p_{rr} = -p + 2\mu\frac{\partial u_r}{\partial r}; \qquad \tau_{r\theta} = \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}\right);$$

$$p_{\theta\theta} = -p + 2\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}\right); \qquad \tau_{\theta z} = \mu\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta}\right);$$

$$p_{zz} = -p + 2\mu\frac{\partial u_z}{\partial z}; \qquad \tau_{zr} = \mu\left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}\right).$$

Xuddi shunday, siqilmaydigan suyuqlik uchun kuchlanish tenzori komponentalarining r, θ, ϕ sferik koordinatalari sistemasidagi ifodalari quyidagilar:

$$p_{rr} = -p + 2\mu\frac{\partial u_r}{\partial r}; \qquad p_{\theta\theta} = -p + 2\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}\right);$$

$$p_{\phi\phi} = -p + 2\mu\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_\theta ctg\theta}{r}\right);$$

$$\tau_{r\theta} = \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}\right); \qquad \tau_{\phi r} = \mu\left(\frac{\partial u_\phi}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\phi}{r}\right);$$

$$\tau_{\theta\phi} = \mu\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\phi}{\partial \theta} - \frac{u_\phi ctg\theta}{r}\right).$$

2) Birjinslilik gipotezasi. Kuchlanishlar va deformatsiyalar tezliklari orasidagi chiziqli boglanish ifodasi suyuqlik egallagan fazoning barcha nuqtalari uchun bir xil deb faraz qilinadi.

3) Izotroplik gipotezasi. Qovushoq suyuqlik izotrop deb faraz qilinadi, ya’ni uning xossalar ixtiyoriy yo‘nalishda bir xil.

7.2. Qovushoq suyuqlikning harakat tenglamasi (Navye-Stoks tenglamasi)

Qovushoq suyuqlikning harakat tenglamasini uning (1.16) kuchlanishlarga nisbatan harakat tenglamasidan, ba’zi almastirishlar bajarish yo‘li bilan, hosil qilish mumkin. Bu tenglamalarning faqat bitta proeksiyasini qaraymiz:

$$\frac{du_x}{dt} = X + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right).$$

Qovushoq suyuqlik modelini qarayotganda ko‘rsatilgan ediki, normal kuchlanishlar quyidagiga teng:

$$p_{xx} = -p + 2\mu\frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu \operatorname{div}\vec{u}\ .$$

Soddalik uchun suyuqlikni siqilmaydigan ($\operatorname{div}\vec{u} = 0$) deb faraz qilaylik, u holda

$$\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-p + 2\mu\frac{\partial u_x}{\partial x}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + 2\mu\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}\ . \tag{7.6}$$

Urinma kuchlanishlar:

$$\tau_{yx} = \mu\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}\right);$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = \mu\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}\right) = \mu\frac{\partial^2 u_y}{\partial y \partial x} + \mu\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}\ , \tag{7.7}$$

Xuddi shunday

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = \mu\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) = \mu\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} + \mu\frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial x}\ . \tag{7.8}$$

(7.6), (7.7) va (7.8) larni yig‘sak va mos hadlarni guruhlasak, quyidagiga kelamiz:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\right) + \mu\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial x}\right).$$

Bu ifodaning uchinchi hadini quyidagicha yozamiz:

$$\mu\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right) = \mu\frac{\partial}{\partial x}\operatorname{div}\vec{u}\ ,$$

ammo suyuqlik siqilmaydigan ($\operatorname{div}\vec{u} = 0$) bo‘lganligi uchun quyidagini yozamiz:

$$\frac{du_x}{dt}=X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\right). \qquad (7.9)$$

Bunda qavs ichidagi ifoda Laplas operatori ($\nabla^2\vec{u}$) va $\frac{\mu}{\rho}=\nu$ ekanligidan esa

$$a_x=\frac{\partial u_x}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_x}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_x}{\partial z}=X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\right). \qquad (7.10')$$

Bunda massaviy kuchlardan faqat og‘irlik kuchi ta’sir qilayapti, ya’ni $X=g\cos\beta$ ($\cos\beta$ yo‘nalishni ko‘rsatadi) deb faraz qilsak, u holda bu tenglamaning har ikkala tarafini ρ ga ko‘paytirganda, uning har bir hadiga quyidagicha mexanik ma’no beriladi: $\rho\frac{\partial u_x}{\partial t}$, $\rho\left(u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_x}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_x}{\partial z}\right)$ - inertsiya kuchlari; $\rho g\cos\beta$ - og‘irlik kuchi; $\frac{\partial p}{\partial x}$ - bosim kuchi; $\rho\nu\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\right)$ - qovushoq ishqalanish kuchi.

Xuddi shunday boshqa ikkita proeksiyani ham yozish mumkin:

$$a_y=\frac{\partial u_y}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_y}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_y}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_y}{\partial z}=Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2}\right).$$

$$a_z=\frac{\partial u_z}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_z}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_z}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}=Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right). \qquad (7.10'')$$

Shunday qilib, (7.10′) va (7.10″) formulalardan ushbu

$$\begin{aligned} a_x &= X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\nabla^2 u_x;\\ a_y &= Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\nabla^2 u_y;\\ a_z &= Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\nabla^2 u_z \end{aligned} \qquad (7.10)$$

sistemaga ega bo‘lamiz.

Hosil bo‘lgan (7.10) tenglamalar sistemasi qovushoq suyuqlik uchun *Navye-Stoksning tenglamalari sistemasi* deb ataladi. Ularning vektor shaklida yozilishi quyidagicha:

$$\vec{a}=\vec{F}-\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p+\nu\nabla^2\vec{u}\,. \qquad (7.11)$$

Bu yerdan ko‘rinadiki, bu tenglama ideal suyuqlikning harakat tenglamasidan qovushoq ishqalanish kuchi ta’sirini hisobga oluvchi ushbu $\nu\nabla^2\vec{u}$ qo‘shimcha had bilan farq qiladi.

Bu yerda ham, xuddi Eyler tenglamasidagi kabi, (7.11) tenglamadan bosimni chiqarib tashlash mumkin. Buning uchun uning ikkala tarafiga rot operatsiyasini qo‘llab, hamda $\frac{d\vec{u}}{dt}=\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}+(\vec{u}\nabla)\vec{u}$ ekanligini e’tiborga olsak, natijada:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{rot}\,\vec{u})=\mathrm{rot}[\vec{u}\,\mathrm{rot}\,\vec{u}]+\nu\Delta\,\mathrm{rot}\,\vec{u}\,.$$

Bu yerda siqilmaydigan suyuqlik qaralayotganligi ichun bu tenglikning o‘ng tarafidagi birinchi hadini ochib chiqib va $\mathrm{div}\,\vec{u}=0$ ekanligini e’tiborga olib, yuqoridagi tenglamani quyidagicha yozish mumkin:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{rot}\,\vec{u})+(\vec{u}\nabla)\,\mathrm{rot}\,\vec{u}-(\mathrm{rot}\,\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u}=\nu\Delta\,\mathrm{rot}\,\vec{u}\,.$$

Agar suyuqlikni siqiluvchan desak, u holda (7.11) *Navye-Stoks tenglamasi* quyidagicha yoziladi:

$$\rho\frac{d\vec{u}}{dt}=\vec{F}-\mathrm{grad}\,p+\mu\nabla^2\vec{u}+\left(\nu+\frac{\mu}{3}\right)\mathrm{grad}\,(\mathrm{div}\,\vec{u}).\qquad(7.11')$$

Tezlikning (6.15) ifodasiga ko‘ra og‘irlik kuchi maydonidagi siqilmaydigan suyuqlik uchun *Navye-Stoksning Gromeka-Lemb shaklidagi tenglamasi* quyidagicha yoziladi:

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}+2\vec{\omega}\times\vec{u}+\nabla\left(\frac{p}{\rho}+\frac{1}{2}u^2+gh\right)=\nu\nabla^2\vec{u}\,.\qquad(7.11'')$$

Siqilmaydigan suyuqlik uchun Navye-Stoks tenglamasining r,θ,z silindrik koordinatalari sistemasidagi ifodalari quyidagicha:

$$a_r=\frac{\partial u_r}{\partial t}+(\vec{u}\nabla)u_r-\frac{u_\theta^2}{r}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}+\nu\left(\Delta u_r-\frac{u_r}{r^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}\right);$$

$$a_\theta=\frac{\partial u_\theta}{\partial t}+(\vec{u}\nabla)u_\theta+\frac{u_r u_\theta}{r}=-\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial\theta}+\nu\left(\Delta u_\theta-\frac{u_\theta}{r^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}\right);$$

$$a_z=\frac{\partial u_z}{\partial t}+(\vec{u}\nabla)u_z=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\Delta u_z\,,$$

bu yerda

$$(\vec{u}\nabla)f=u_r\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}+u_z\frac{\partial f}{\partial z};\qquad \Delta f=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\,.$$

Siqilmaydigan suyuqlik uchun Navye-Stoks tenglamasining r,θ,ϕ sferik koordinatalari sistemasidagi ifodalari quyidagicha:

$$a_r = \frac{\partial u_r}{\partial t} + (\vec{u}\nabla)u_r - \frac{u_\theta^2 + u_\phi^2}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} +$$

$$+\nu\left[\Delta u_r - \frac{2u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial(u_\theta\sin\theta)}{\partial\theta} - \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial u_\phi}{\partial\phi}\right];$$

$$a_\theta = \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + (\vec{u}\nabla)u_\theta + \frac{u_r u_\theta}{r} - \frac{ctg\theta}{r}u_\phi^2 = -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial\theta} +$$

$$+\nu\left[\Delta u_\theta + \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial\theta} - \frac{u_\theta}{r^2\sin^2\theta} - \frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial u_\phi}{\partial\phi}\right],$$

$$a_\phi = \frac{\partial u_\phi}{\partial t} + (\vec{u}\nabla)u_\phi + \frac{u_r u_\phi}{r} + \frac{ctg\theta}{r}u_\theta u_\phi = -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial\phi} +$$

$$+\nu\left[\Delta u_\phi - \frac{u_\phi}{r^2\sin^2\theta} - \frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial\phi} + \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial\phi}\right];$$

bu yerda

$$(\vec{u}\nabla)f = u_r\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta} + \frac{u_\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\phi};$$

$$\Delta f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial f}{\partial\theta}\sin\theta\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}.$$

Gidrodinamik hisobning maqsadi – bu tezliklar maydoni va bosimni topishdan iborat, ya’ni hisob natijasida ushbu u_x, u_y, u_z va p to‘rtta miqdorlar topilgan bo‘lishi shart. Umuman olganda, buning imkoniyati bor, chunki Navye-Stoksning proeksiyalardagi uchta tenglamasi va uzviylik tenglamasi birgalikda yopiq sistemani tashkil qiladi. Ularga kirgan zichlik va qovushoqlik oldindan ma’lum, deb hisoblanadi (umuman olganda, qovushoqlik koeffisientlari bosim va temperaturaning funksiyasi), massaviy kuchlarning proeksiyalari (X, Y, Z) esa aniq masalaning shartlarida berilgan bo‘ladi.

Matematik nuqtai nazardan, Navye-Stoks tenglamasi ikkinchi tartibli xususiy hosilali nochiziqli differensial tenglamalar sistemasi hisoblanadi. Bu tenglamaning asosiy noqulayliklaridan biri – uning tezlanishning konvektiv hadlarini hisobga oluvchi nochiziqliligida. Shuni ta’kidlash lozimki, hozirgi paytgacha birorta ham hol uchramadiki, Navye-Stoks tenglamasining to‘la ko‘rinishida ya’ni barcha konvektiv hadlar va qovushoqlikni hisobga oluvchi barcha hadlar saqlanib qolganda, uning umumiy yechimini chiqarishda hal etib bolmaydigan matematik qiyinchiliklar qolmasin. Faqatgina ba’zi xususiy yechimlargina ma’lum. Bu tenglamani integrallashda asosiy chegaraviy shartlardan biri – bu “yopishib qolish” sharti, ya’ni devorda suyuqlik tezligi nolga teng.

7.3. Qovushoq suyuqlikning gidromexanik tenglamalari sistemasi

a) *Qovushoq suyuqlik tenglamalarining umumiy sistemasi.* Kuchlanish tenzori komponentalari uchun (7.2) va (7.5) tengliklar o‘rinli bo‘lsin.

Tenglamalar sistemasi quyidagilardan iborat bo‘ladi:

● uzviylik tenglamasi

$$\frac{d\rho}{d\,t} + \rho \operatorname{div}\vec{u} = 0\,; \tag{7.12}$$

● tutash muhitning harakat tenglamasi

$$\rho\frac{d\vec{u}}{d\,t} = \rho\vec{F} + \frac{\partial\vec{p}_{nx}}{\partial x} + \frac{\partial\vec{p}_{ny}}{\partial y} + \frac{\partial\vec{p}_{nz}}{\partial z}\,; \tag{7.13}$$

● energiya tenglamasi (5.2-banda qarang)

$$\rho\frac{de}{d\,t} = \varepsilon + \vec{p}_{nx}\cdot\frac{\partial\vec{u}}{\partial x} + \vec{p}_{ny}\cdot\frac{\partial\vec{u}}{\partial y} + \vec{p}_{nz}\cdot\frac{\partial\vec{u}}{\partial z} + \frac{\partial t_x}{\partial x} + \frac{\partial t_y}{\partial y} + \frac{\partial t_z}{\partial z}\,; \tag{7.14}$$

● issiqlik o‘tkazuvchanlikning Furye qonuni (5.2-banda qarang)

$$t_x = k\frac{\partial T}{\partial x},\;\; t_y = k\frac{\partial T}{\partial y},\;\; t_z = k\frac{\partial T}{\partial z}; \tag{7.15}$$

● holat tenglamasi

$$f\,(p,\rho,T) = 0\,. \tag{7.16}$$

Bu tenglamalarga e – ichki energiya, μ,ν - qovushoqlik va k – issiqlik o‘zkazuvchanlik koeffisientlarining quyidagi ifodalarini biriktiramiz:

$$e = e(p,T),\;\; \mu = \mu(p,T),\;\; \nu = \nu(p,T),\;\; k = k(p,T)\,.$$

Bunda $\vec{F}$ massaviy kuchlar maydoni va ε funksiyaning ifodasi ma’lum deb faraz qilinadi.

Shunday qilib, (7.2), (7.5), (7.15) ifodalarni (7.12) – (7.14), (7.16) tenglamalarga qo‘ysak oltita $u_x,\, u_y,\, u_z,\; p,\; \rho, T$ noma’lumli oltita tenglamalar sistemasiga kelamiz. Agar (7.16) da noma’lumlardan birini qolgan ikkitasi orqali ifodalash mumkin bo‘lsa, u holda (7.12)-(7.14) tenglamalardan besh noma’lumli beshta tenglamalar sistemasini hosil qilamiz.

b) *Bir jinsli siqilmaydigan qovushoq suyuqlikning gidromexanik tenglamalari sistemasi.* Faraz qilaylik, bir jinsli ($\rho = \rho_0 = const$) siqilmaydigan ($\frac{d\rho}{d\,t} = 0$, bunga ko‘ra $\operatorname{div}\vec{u} = 0$) qovushoq suyuqlikning qovushoqlik (μ) va issiqlik o‘tkazuvchanlik (*k*) koeffisientlari o‘zgarmas bo‘lsin. Kuchlanish tenzori komponentalari uchun (7.2) va (7.4) tengliklar o‘rinli bo‘ladi.

Tenglamalar sistemasi quyidagilardan iborat bo‘ladi:

● uzviylik tenglamasi

$$\operatorname{div}\vec{u}=0 \quad \text{yoki} \quad \frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}=0; \tag{7.17}$$

● harakat tenglamasi (Navye-Stoks tenglamasi)

$$\vec{a}=\vec{F}-\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p+\nu\nabla^2\vec{u}\ ; \tag{7.18}$$

● energiya tenglamasi

$$c\rho\frac{dT}{d\,t}=\varepsilon+\Phi+k\Delta T\ , \tag{7.19}$$

bunda Furye qonunidan foydalanilgan; $e=cT$+const - energiya; ε - energiyaning hajmiy yutilishi; c – issiqlik sig‘imi; T – temperatura; Φ – dissipativ funksiya (agar suyuqlik tinch yoki u absolyut qattiq jismdek harakat qilsa, ideal suyuqlik qaralsa, u holda bu funksiya nolga teng bo‘ladi):

$$\Phi=\mu\left[2\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)^2+2\left(\frac{\partial u_y}{\partial y}\right)^2+2\left(\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)^2+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u_y}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u_x}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial x}\right)^2\right].$$

Shunday qilib, qovushoq siqilmaydigan suyuqlik tenglamalari beshta (7.17) - (7.19) skalyar tenglamalar sistemasi bo‘lib, ular beshta ushbu $u_x,\, u_y,\, u_z,\; p,\, T$ noma’lumlarni o‘z ichiga oladi.

c) *Energiya tenglamasining xususiy hollari*:

● qo‘zg‘almas suyuqlik ($\vec{u}=0,\ \Phi=0$) uchun issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t}=\varepsilon+k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right); \tag{7.20}$$

● qo‘zg‘almas suyuqlikda $k=k(T)$ bo‘lgan holda issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t}=\varepsilon+\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right). \tag{7.21}$$

Siqiluvchan muhitning harakati. Ko‘p o‘lchovli siqiluvchan muhitning gidrodinamika tenglamalari konservativ ko‘rinishda quyidagicha yoziladi:

$$\partial \mathbf{u}/\partial t+\partial \boldsymbol{F}_x/\partial t+\partial \boldsymbol{F}_y/\partial t+\partial \boldsymbol{F}_z/\partial t=\mathrm{S}\ ,$$

bu yerda $\boldsymbol{u} = \{\rho\ ;\ \rho u_x\ ;\ \rho u_y\ ;\ \rho u_z\ ;\ \rho u^2/2 + \rho\varepsilon\}^T$ – noma'lum funksiyalarning ustun–vektori; $u^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2$; $S=\{0;\ \rho g_x\ ;\ \rho g_y\ ;\ \rho g_z\ ;\ \rho(u_x g_x + u_y g_y + u_z g_z\}^T$ – manbalarning hajmiy quvvati vektori; oqimlar zichligini ifodalovchi vektor bu «tafovut» tashkil etuvchilar:

$$(\boldsymbol{F}_x)_{nv} = \{\rho u_x\ ;\ \rho u_x^2 + p\ ;\ \rho u_y u_x\ ;\ \rho u_z u_x\ ;\ (\varepsilon+u^2/2+p/\rho)\ \rho u_x\}^T\ ;$$
$$(\boldsymbol{F}_y)_{nv} = \{\rho u_y\ ;\ \rho u_x u_y\ ;\ \rho u_y^2 + p\ ;\ \rho u_z u_y\ ;\ (\varepsilon+u^2/2+p/\rho)\ \rho\ u_y\}^T\ ;$$
$$(\boldsymbol{F}_z)_{nv} = \{\rho u_z\ ;\ \rho u_x u_z\ ;\ \rho u_y u_z\ ;\ \rho u_z^2 + p\ ;\ (\varepsilon+u^2/2+p/\rho)\ \rho\ u_z\}^T\ .$$

hamda qovushoqlik va issiqlik o'tkazuvchanlikning molekulyar effektlari ta'sirini ifodalovchi tashkil etuvchilar

$$(\boldsymbol{F}_x)_v = \{0;\ \Pi''_{xx};\ \Pi''_{xy};\ \Pi''_{xz};\ q_x - u_x\,\Pi''_{xx} - u_y\,\Pi''_{yx} - u_z\,\Pi''_{zx}\}^T;$$
$$(\boldsymbol{F}_y)_v = \{0;\ \Pi''_{yx};\ \Pi''_{yy};\ \Pi''_{yz};\ q_y - u_x\,\Pi''_{xy} - u_y\,\Pi''_{yy} - u_z\,\Pi''_{zy}\}^T;$$
$$(\boldsymbol{F}_z)_v = \{0;\ \Pi''_{zx};\ \Pi''_{zy};\ \Pi''_{zz};\ q_z - u_x\,\Pi''_{xz} - u_y\,\Pi''_{yz} - u_z\,\Pi''_{zz}\}^T$$

yig'indisidan iborat bo'ladi, ya'ni:

$$\boldsymbol{F} = \{\boldsymbol{F}_x;\ \boldsymbol{F}_y;\ \boldsymbol{F}_z\ \} = \{(\boldsymbol{F}_x)_{nv}+(\boldsymbol{F}_x)_v;\ (\boldsymbol{F}_y)_{nv}+(\boldsymbol{F}_y)_v;\ (\boldsymbol{F}_z)_{nv}+(\boldsymbol{F}_z)_v;\}.$$

Yuqoridagi munosabatlarda $e = \rho(\varepsilon+u^2/2)$ – to'la energiyani ifodalaydi va bu o'z navbatida energiyaning saqlanish qonunini qanoatlantiradi:

$$\partial(\rho\varepsilon+\rho u^2/2)/\partial t + \nabla\ \{(\rho u^2/2 + \rho\varepsilon + p)\boldsymbol{u}\} = 0\ ,$$

bu energiyaning konservativ ko'rinishdagi tenglamasi bo'lib, unda $\rho\varepsilon$ – muhit ichki energiyasining zichligi; $\rho u^2/2$ – muhit og'irlik markazi kinetik energiyasining zichligi; divergensiya belgisi ostidagi energiya oqimi bu og'irlik markazi kinetik energiyasi oqimi, ichki energiya oqimi va bosim bajargan ish yig'indisidan iborat.

Xususiy hol. Siqiluvchan suyuqlikning bir o'lchovli oqimini Lagranj ko'rinishida quyidagi tenglamalar bilan tavsiflash mumkin:

- zichlik $d\rho/dt = -\rho\partial u/\partial x$;
- impuls $\rho\ du/dt = -\ \partial p/\partial x$;
- bosim $d(p/\rho^\gamma)/dt = 0$.

Siqiluvchan gazning bir o'lchovli oqimini Eyler ko'rinishida quyidagi tenglamalar bilan tavsiflash mumkin:

- zichlik $\partial\rho/\partial t = -\ u\ \partial\rho/\partial x - \rho\ \partial u/\partial x$;
- impuls $\rho\ \partial u/\partial t = -\ \rho u\ \partial u/\partial x - \partial p/\partial x$;
- bosim $\partial p/\partial t = -\ u\ \partial p/\partial x - \gamma p\ \partial u/\partial x$,

bu yerda ideal gaz uchun holat tenglamasi sifatida ushbu $\varepsilon=p/[\rho(\gamma\ -\ 1)]$ sodda tenglama ishlatiladi. Bu tenglamalarning o'ng tarafidagi birinchi qo'shiluvchilar uzatishni tavsiflaydi, ikkinchi qo'shiluvchilar esa siqilish bilan bog'liq.

Nonyuton suyuqliklar modeli. Quyida nonyuton suyuqlik va uning modellari haqida qisqacha ma’lumot berib o‘tamiz.

Agar nonyuton suyuqliklarning oquvchanlik xossasini tavsiflashda paydo bo‘ladigan murakkabliklarni e’tiborga olsak, u holda ularning klassifikatsiyalanish sistemasi turlicha.

Suyuqliklarning qo‘yilgan kuchlanishga nisbatan elastik reaksiyasiga ega bo‘lishligiga qarab ular suyuqliklarning ikkita asosiy turiga bo‘linadilar: *qovushoq-noelastik* yoki *sof qovushoq; qovushoq-elastik*.

Nonyuton suyuqliklarning sodda klassifikatsiyasi:

qovushoq-noelastik yoki sof qovushoq suyuqliklar – bular qo‘yilgan yuklanish olib tashlangandan keyin muhitning deformatsiyalanishi yo‘qolmaydigan, ya’ni muhitning elastiklik reaksiyasi bo‘lmaydigan suyuqliklar. Bizga ma’lumki, ko‘pgina qattiq jismlar, qo‘yilgan yuklanish olib tashlangandan keyin, deformatsiyasi yo‘qoluvchanligi bilan xarakterlanuvchi muayyan elastiklik reaksiyasi darajasiga ega. Guk qonuniga bo‘ysinuvchan elastik qattiq jism shunday sodda jism bo‘lib, uning deformatsiyasi qo‘yilgan kuchlanishga to‘g‘ri proporsional.

Qovushoq-noelastik yoki sof qovushoq suyuqliklarni xossalari vaqtdan bog‘liq bo‘lgan va xossalari vaqtdan bog‘liq bo‘lmagan suyuqliklarga ajratish mumkin:

●*xossalari vaqtdan bog‘liq bo‘lmagan suyuqlik* – bu siljishning davomiyligi qovushoqlik miqdoriga ta’sir etmaydigan suyuqlik:

- *oquvchanlik chegarasiga ega bo‘lmagan suyuqlik* – bu vaqtdan bog‘liq bo‘lmagan xarakteristikalarli biror chegaraviy kuchlanish (oquvchanlik chegarasi) τ_0 ga ega bo‘lgan yoki bo‘lmagan suyuqlik, bunda τ_0 – siljishning nolinchi tezligidagi qovushoqligi:
  - *psevdoplastik suyuqliklar* – bular, agar ular uchun siljish tezligi oshishi bilan tuyiluvchan qovushoqligi kamayuvchan, oquvchanlikning chegaraviy kuchlanishiga ega bo‘lmagan suyuqliklar (masalan, kauchuk qorishmasi, yelimli moddalar, polimerlar qorishmasi va eritmasi, yog‘lar, bo‘yoqlar, ba’zi dispers farmatsevtik muhitlar va biologik suyuqliklar shunday xossaga ega). Bunday suyuqliklar uchun siljishning katta tezlikli sohalarida tuyiluvchan qovushoqligi, ya’ni *du*/*dy* ning katta qiymatlari cheksiz katta siljishlardagi qovushoqlik deb ataladi va u μ_∞ bilan belgilanadi;
  - *dilatant suyuqliklar* – bular siljish tezligi oshishi bilan tuyiluvchan qovushoqligi o‘suvchan (siljishi siyraklashuvchan (masalan, yuqori-molekulyar polimerlar qorishmasi, bosmaxonaning

ko‘pgina bo‘yoqlari, qog‘oz quyqasi) va quyiltiriluvchan (masalan, kraxmal, kaliy silikati, yoyiluvchan qum, qirg‘oqning nam qumi, makkajo‘xori kraxmali va shakar qorishmasi, ikki oksidli titanning suvli suspenziyasi)) suyuqliklar;

- *oquvchanlik chegarasiga ega suyuqlik*, masalan, Bingam plastik suyuqligi uchun qovushoqlik siljish tezligidan bog‘liq emas deb hisoblanadi. τ_0 dan kichik bo‘lgan siljish tezliklari qiymatlarida bunday suyuqliklar o‘zlarini elastik qattiq jismdek, $\tau>\tau_0$ da esa qovushoq suyuqlikdek tutadilar. Bu xususiyatni shunday izohlash mumkin: tinch holatdagi bunday suyuqlik τ_0 dan kichik ixtiyoriy kuchlanishga qarama-qarshi turaoladigan biror yetarlicha qattiq uch o‘lchovli tuzilmaga ega bo‘ladi. Kuchlanish oshishi bilan bu ko‘rsatilgan ichki tuzilma buziladi va suyuqlikning urimna harakati paydo bo‘ladi. Bunday jinsli suyuqliklar: plasmassalar qorishmasi, neft quvurlaridagi burg‘ulash shlaklari (gidrokimyoviy usullarda olinadigan asl (zanglamaydigan) metallarga boy cho‘kindi), yuvish suspenziyalsri, tish yuvish pastasi, margarin, har xil ko‘rinishdagi oshxona yog‘lari va hokazo.

• *xossalari vaqtdan bog‘liq suyuqlik* – bu siljish tezligi ham siljishning miqdoridan va ham davomiyligidan bog‘liq bo‘lgan suyuqlik:

- *tiksotrop suyuqlik* – bu siljishning o‘zgarmas tezligi va o‘zgarmas temperaturaga ega vaqt o‘tishi bilan qovushoqlik kamayishi qaytariluchanligiga olib keluvchi suyuqlik (masalan, yuqori polimerlarning qorishma va eritmasi, neft burg‘ulash quvurlaridagi gillar (tog‘ jinslarining yumshoq cho‘kindisi, u suvda qorilsa loyga aylanadi, quriganda o‘z shaklida qoladi, pishirilganda toshdek qattiq bo‘ladi), ko‘pgina oziq-ovqat mahsulotlari va bo‘yoqlar shunday xossaga ega);
- *reopektik suyuqlik* – bu siljishning o‘zgarmas tezligi qovushoqlik o‘sishi qaytariluvchanligiga olib keluvchi suyuqlik (masalan, bentolitli loy suspenziyalari, gips qorishmalari, ammoniy oleatasi suspenziyasi shunday xossaga ega);

qovushoq-elastik suyuqliklar – bu siljishning deformatsiyalantiruvchi kuchlanishi olib tashlangandan keyin qisman elastik tiklanish paydo bo‘ladigan suyuqliklar, bunda ularda ham qovushoq suyuqliklar va ham elastik qattiq jismlarning xossalari namoyon bo‘ladi. Qattiq jismlar uchun berilgan deformatsiyani paydo qiluvchi Guk qonuniga to‘la bo‘ysinuvchan kuchlanish vaqtdan bog‘liq bo‘lmaydi. Qovushoq-elastik suyuqliklarda esa bu kuchlanish doimo relaksatsiyalaydi. Sof qovushoq suyuqliklardan farqli qovushoq-elastik suyuqliklar tashqi kuchlanish ta'sirida darhol oqib boshlaydi, yuklanish olingandan keyin esa ularning deformatsiyasi asta-sekin tiklanadi. Shunday qilib, bunday suyuqliklarning oqimini tavsiflovchi holat tenglamalarida urinma kuchlanish va siljish tezligidan vaqt bo'yicha hosila qatnashishi zarur. Kuchlanish relaksatsiyasi, qoldiq deformatsiya, qolipining shishi – shunaqa turdagi suyuqliklarga xos ba'zi jarayonlardir. Qattiq jismlar, eritilgan polimerlar va ularning qorishmalarida qovushoq-elastiklik kuchli namoyon bo'ladi. Har xil sovun erirmalari, silikonli zamazka (xamirsimon plastik massa), quyuqlashtirilgan tuxum oqi, ba'zi shampunlar, har xil turdagi quyiltirilgan sut va suvga aralashtirilgan jelatinda ana shunday qovushoq-elastiklik xossalari uchraydi.

Nonyuton suyuqliklar harakatidagi oqim jarayonlarini tahlil qilishdagi asosiy qiyinchilik kuchlanish tenzorini siljish tezligi bilan bog'lovchi biror umumlashgan holat tenglamasining yo'qligida. Qovushoq-noelastik suyuqliklar uchun τ_{yx} – urinma kuchlanish va du/dy – siljish tezligi orasidagi bog'lanishni ifodalovchi bir nechta empirik modellar tavsiya etilgan. Bu modellarning har biri biror aniqlanuvchan sonli empirik parametrlarni o'z ichiga oladi. Tadqiqotchilar ana shu modellar yordamida o'zgarmas temperatura va bosimda τ_{yx} – urinma kuchlanishning du/dy – siljish tezligidan bog'liqligini ifodalovchi barcha eksperimental ma'lumotlarni tavsiflashga urinishadi. Quyida asosan erkin konvektiv uzatish jarayonlarini tadqiq qilishda qo'llaniladigan ba'zi modellarni keltiramiz.

☛ *Siljishning chegaraviy kuchlanishiga ega bo'lmagan vaqtdan bog'liqsiz xossalarli qovushoq-noelastik suyuqliklar.* Odatda bunday suyuqliklar uchun urinma kuchlanish va siljish tezligi o'rtasidagi bog'lanishni tavsiflashda ko'pincha ushbu

$$\tau_{yx} = K\left|\frac{du}{dy}\right|^{n-1}\frac{du}{dy}$$

munosabat bilan yoziladigan *Ostvaldning darajali modeli* qo'llaniladi, bunda K va n parametrlar empirik konstantalar bo'lib, K – suyuqlikning birgalikdalik koeffisiyenti va n – suyuqlikning daraja ko'rsatgichi deb ataladi. Bu parametrlarga ko'ra suyuqlik:

- $n = 1$ va $K = \mu$ bo'lganda – sof Nyuton suyuqligi;
- $n < 1$ bo'lganda – psevdoplastik suyuqlik;
- $n > 1$ bo'lganda – dilatant suyuqlik

deb ataladi. Bu model siljish tezligining oraliq qiymatlarida juda samarali natijalar beradi, ammo limitik holatlarga yaqin, ya'ni siljish tezligining juda kichik va juda katta qiymatlarida u o'rinli emas. Boshqacha qilib aytganda, bu model Nyuton suyuqligiga yaqin suyuqliklarning xossalarini to'g'ri tavsiflamaydi.

Ellis modeli:

$$\tau_{yx} = \frac{1}{A + B\left|\tau_{yx}\right|^{\alpha - 1}} \frac{du}{dy},$$

bu yerda A, B, α - musbat parametrlar bo'lib, $A = 1/\mu_0$; μ_0 – nolinchi siljish tezligidagi qovushoqlik. Bu model:

- $\alpha < 1$ da τ_{yx} ning kichik qiymatlari uchun Nyuton suyuqliklarini darajali modelga ko'ra yaxshiroq tavsiflaydi;
- $\alpha > 1$ da τ_{yx} ning katta qiymatlari uchun Nyuton suyuqliklarini yaxshiroq tavsiflaydi, ammo siljish tezligining μ_∞ katta qiymatli sohalarida tuyilgan qovushoqlik miqdori juda noaniqlik bilan topiladi.

Satterbi modeli:

$$\tau_{yx} = \mu_a \frac{du}{dy}, \quad \text{bunda} \quad \mu_a = \mu_0 \left[\frac{\operatorname{arcsh}(B\,du/dy)}{B\,du/dy}\right]^A.$$

Bu yerda ham uchta A, B, μ_0 - musbat parametrlar bor. Siljishning kichik tezliklarli limitik qiymatlarida $du/dy \to 0$ va $\mu_a \to 0$. Siljish tezligining kichik va o'rta qiymatlarida bu model yaxshi natija beradi.

☛ *Siljishning chegaraviy kuchlanishiga ega vaqtdan bog'liqsiz xossalarli qovushoq-noelastik suyuqliklar*. Bunday suyuqliklar ichida Bingamning plastik suyuqligi modeli keng tarqalgan. Bunday suyuqlik modelining tenglamasi quyidagicha:

$$\tau_{yx} = \pm\tau_0 + \mu_B \frac{du}{dy}, \ \text{agar} \ \left|\tau_{yx}\right| > \tau_0;$$

$$\frac{du}{dy} = 0, \ \text{agar} \ \left|\tau_{yx}\right| < \tau_0 \ \text{va} \ \tau_{yx} = \pm\tau_0,$$

bunda «+» ishora tezlik gradiyentining musbatligiga va «–» ishora tezlik gradiyentining manfiyligiga mos keladi; μ_B – plastik qovushoqlik. Bu model asosan shlam (gidrokimyoviy usullarda olinadigan asl (zanglamaydigan) metallarga boy cho'kindi) va pasta (qaymoq quyuqligidagi ohakli yoki plastik loyli massa)larning holatini tavsiflashda ishlatiladi.

☛ *Vaqtdan bog'liq xossalarga ega qovushoq-noelastik suyuqliklar*. Bunday suyuqliklarning asosiy tenglamalari o'ta murakkab tuzilmaga ega bo'lib, hozirgi kunda ularning real masalalarga tadbiqi yetarlicha tahlil qilinmagan. Shunga qaramasdan, faraz qilish mumkinki, barqaror harakatda bunday suyuqliklar o‘zini xuddi vaqtdan bog‘liqsiz xossalarga ega qovushoq-noelastik suyuqliklar kabi tutadi.

☛ *Qovushoq-elastik suyuqliklar*. Bunday suyuqliklarning reologik xossalari ularning avvalgi holatiga bog‘liq, shuning uchun ular faqat bittagina siljish tezligi va urinma kuchlanish o‘rtasidagi munosabat bilan tavsiflanmaydi. Shunga ko‘ra, mos asosiy tenglamani tanlash va uning yechimini topish juda murakkab muammo.

Namunaviy masalalar va ularning yechimlari

1-masala. Faraz qilaylik, adiabatik suyuqlik og‘irlik kuchlari maydonida bo‘lsin, shunga ko‘ra

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -g\rho \, .$$

Gidrostatik muvozanat shartini tuzing.

Yechish. Faraz qilaylik, suyuqlikning holat tenglamasi $p=p(\rho,s)$ bo‘lsin, bunda s – entropiya. U holda

$$\frac{dp}{dz} = \left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right|_{s=const}\frac{d\rho}{dz} + \left.\frac{\partial p}{\partial s}\right|_{\rho=const}\frac{ds}{dz} \equiv c^2\frac{dp}{dz} + M\frac{ds}{dz},$$

bu yerda c^2 – tovush tezligi kvadrati; $M = \left.\frac{\partial p}{\partial s}\right|_{\rho=const}$.

Biror z nuqtadagi V_0 hajmli suyuqlik zarrachasini qaraylik. Bu zarrachaga $-\rho(z)gV_0$ og‘irlik kuchi va Arxímed kuchi ta’sir qiladi. Zarrachani vertikal boyicha ζ miqdorga ko‘chiramiz. Uning hajmi o‘zgaradi (siqiluvchanligi sababli), massasi va entropiyasi esa saqlanib qoladi. Demak, bu zarrachaga ta’sir etuvchi kuch quyidagiga teng:

$$F = -g\rho(z)V_0 + g\rho(z+\zeta)(V_0+\Delta V),$$

yoki birinchi yaqinlashishda

$$F = g\rho(z)V_0\left[\frac{1}{\rho(z)}\frac{d\rho}{dz}\zeta + \frac{\Delta V}{V_0}\right].$$

Xususan, $\Delta s = 0$ deb, holat tenglamasidan hajm o‘zgarishini chiqarish mumkin:

$$\Delta p = c^2\Delta\rho = c^2\Delta\left(\frac{m}{V}\right) = c^2\rho(z)V_0\Delta\left(\frac{1}{V}\right) = -c^2\rho(z)\frac{\Delta V}{V_0}.$$

Bu yerdan

$$\frac{\Delta V}{V_0} = -\frac{1}{c^2\rho(z)}\Delta p\,; \qquad \Delta p = \frac{\partial p}{\partial z}\zeta = -g\rho(z)\zeta\,.$$

Natijada

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \frac{g}{c^2}\zeta$$

va zarrachaga ta’sir etayotgan kuchning ifodasi

$$F = g\rho(z)V_0\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{g}{c^2}\right)\zeta = -mN^2\zeta,$$

bu yerda

$$N^2 = -g\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{g}{c^2}\right)$$

- Brent-Vyasel chastotasi kvadrati. Agar $N^2 \geq 0$ bo‘lsa, u holda muvozanat holari ustivor bo‘ladi. Bu yerdan

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{g}{c^2} \leq 0,$$

ya’ni balandlik pasayishi bilan zichlik yetarlicha tez kamayishi zarur.

2-masala. Faraz qilaylik, qattiq jism $\vec{\Omega}$ burchak tezlik bilan aylanayotgan bo‘lsin. Qattiq jism zarrachasining uyurma tezligi nimaga teng?

Yechish. Koordinata boshidan $\vec{r}$ masofadagi nuqtaning tezligi $\vec{u} = \vec{\Omega} \times \vec{r}$ ga teng. $\vec{u}$ tezlikning komponentalari

$$\{\Omega_2 x_3 - \Omega_3 x_2,\ \Omega_3 x_1 - \Omega_1 x_3,\ \Omega_1 x_2 - \Omega_2 x_1\},$$

bu yerda $\{\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3\}$ - $\vec{\Omega}$ vektorning komponentalari, $\vec{\omega} = \mathrm{rot}\,\vec{u}$ ekanligidan esa $\vec{\omega} = 2\vec{\Omega}$.

3-masala. Faraz qilaylik, suyuqlik vertikal o‘q atrofida shunday aylanmoqdaki, *r* radiusli silindrik qatlamning aylanish chastotasi $\Omega(r)$. Bu $\Omega(r)$ ning qanday ifodasida oqim potensialli bo‘ladi?

Yechish. Aylanish tezligi quyidagicha:

$$\vec{v} = \{u, v\} = \vec{\Omega} \times \vec{r} = \{-\Omega y, \Omega x\},$$

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \Omega + x \cdot \Omega'_r \cdot \frac{x}{r} + \Omega + y \cdot \Omega'_r \frac{y}{r} = 2\Omega + r\Omega'_r\ .$$

Potensial oqimda $\omega = 0$, natijada

$$\Omega'_r = -\frac{2\Omega}{r}\ ; \qquad \Omega(r) = \Omega_0\frac{a^2}{r^2}\ .$$

4-masala. Barotrop vintli harakat faqat statsionar bo‘lishini isbotlang.

Yechish. Faraz qilaylik, $\vec{\omega} = \mathrm{rot}\,\vec{u}$. Vintli harakat quyidagi munosabatdan aniqlanadi: $\mathrm{rot}\,\vec{u} = \lambda\vec{u}$. Barotrop harakat uchun $\dfrac{d\vec{\omega}}{dt} = (\vec{\omega} \cdot \nabla)\vec{u}$

tenglama o‘rinli. Bu yerga vintli harakat ifodasini qo‘ysak, $\frac{d\vec{u}}{dt} = (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u}$.

Bunda $\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u}$ ekanligidan ushbu $\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} = 0$ kelib chiqadi.

5-masala. Eyler tenglamasini Gromeki-Lemb shaklida quyidagicha yozish mumkinligini ko‘rsating:

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + \mathrm{rot}\vec{u}\times\vec{u} = -\nabla E - \frac{1}{\rho}\nabla p + \nabla\Phi\ ,$$

$$E = \frac{(\vec{u}\cdot\vec{u})}{2}, \qquad (\vec{u}\cdot\vec{u}) = \sum_{i=1}^{3} u_i^2\ .$$

Yechish. Masalaning yechimi quyidagi vektor ayniyatdan kelib chiqadi:

$$(\vec{V}\nabla)\vec{V} = \frac{1}{2}\nabla(V^2) - \vec{V}\times\mathrm{rot}\vec{V}\,.$$

6-masala. Bir xil zarrachalar bilan band suyuqlik elementar hajmining o‘zgarish tezligi ushbu $\frac{1}{V}\frac{dV}{dt} = \mathrm{div}\,\vec{u}$ tenglama bilan aniqlanishini ko‘rsating.

Yechish. Suyuqlik hajmining o‘zgarish tezligi uning sirtining harakati bilan aniqlanadi:

$$\frac{dV}{dt} = \int_S \vec{u}\cdot\vec{n}dS = \int_V \mathrm{div}\vec{u}dV\,.$$

V nolga intilganda quyidagiga kelamiz:

$$\frac{dV}{dt} = V\cdot\mathrm{div}\,\vec{u}\,.$$

7-masala. Ideal gaz uchun quruq adiabata tenglamasini chiqaring.

Yechish. Adiabatik jarayon uchun $dQ = 0$. Shuning uchun

$$c_V dT + pdV = 0\,.$$

Bu yerda $p=RT/V$ ekanligidan, $c_p=c_V+R$:

$$\lg T + \frac{R}{c_V}\lg V = const \equiv c.$$

Bundan

$$T(V)^{R/c_V} = c_1 \quad \text{yoki} \quad \frac{T^{c_p/c_V}}{p^{R/c_v}} = c_1\,.$$

8-masala. Siqilmaydigan suyuqlik bilan to‘ldirilgan L uzunlikdagi quvurni qaraylik. Faraz qilaylik, quvurning $x = 0$ chetidagi p_1 bosim uning $x = L$ chetidagi p_2 bosimiga nisbatan katta, bu esa o‘z navbatida suyuqlikning chapdan o‘ngga qarab harakatlanishiga olib keladi. Siqilmaydigan suyuqlik uchun Eyler bir jinsli tenglamasining yechimini $u(x,y,t) = (u(x,t),0)$ va $p(x,y,t) = p(x)$ ko‘rinishda toping.

Yechish. Suyuqlikning siqilmaslik shartiga ko‘ra $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$. U holda Eyler tenglamasi ushbu $\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}$ ko‘rinishga keladi. Bu yerdan esa $\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0$ va $p(x) = p_1 - \left(\frac{p_1 - p_2}{L}\right)x$. Bu ifodani $\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}$ tenglamaga qo‘yib, uni integrallash ushbu $u = \frac{p_1 - p_2}{\rho_0 L} t + \mathrm{const}$ yechimni beradi. Bu yechim shuni bildiradiki, o‘zgarmas bosim gradiyentili quvurdagi oqim tezligi cheksiz o‘sadi. Aslida esa real suyuqliklarda bunday hol yuz bermaydi, sababi, biz bu masalada ishqalanishni e’tiborga olmadik.

9-masala. μ=const bo‘lganda qovushoq gazning harakat tenglamasi (Navye-Stoks tenglamasi) quyidagicha yoziladi:

$$\frac{du_x}{dt} = X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta u_x + \frac{\nu}{3}\frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{div}\,\vec{u});$$

$$\frac{du_y}{dt} = Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta u_y + \frac{\nu}{3}\frac{\partial}{\partial y}(\mathrm{div}\,\vec{u});$$

$$\frac{du_z}{dt} = Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta u_z + \frac{\nu}{3}\frac{\partial}{\partial z}(\mathrm{div}\,\vec{u}).$$

Vaznsiz siqiluvchan gazning bir o‘lchovli nostatsionar oqimi va vaznsiz siqilmaydigan suyuqlikning tekis (yassi) statsionar harakat uchun bu tenglamalarning ko‘rinishi qanday bo‘ladi?

Yechish. Vaznsiy gaz (siqilmaydigan suyuqlik) modeli uchun og‘irlikning massaviy kuchlarini, $X = Y = Z = 0$ deb, hisobga olmaymiz.

Bir o‘lchovli harakar gazning parametrlari faqat bitta, masalan Ox, o‘q yo‘nalishida o‘zgarishi bilan xarakterlanadi. Bunga ko‘ra vaznsiz siqiluvchan ($\mathrm{div}\,\vec{u} \neq 0$) gazning bir o‘lchovli nostatsionar oqimi $\left(\frac{\partial u_x}{\partial t} \neq 0\right)$ uchun harakat tenglamasi quyidagicha yoziladi:

$$\frac{du_x}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{4}{3}\nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2},$$

bu yerda $\dfrac{du_x}{dt}=\dfrac{\partial u_x}{\partial t}+u_x\dfrac{\partial u_x}{\partial x}$.

Tekis (yassi) harakatning parametrlari ikkita yo‘nalishda (masalan, *Ox* va *Oy* o‘qlar) o‘zgaradi, siqilmaydigan suyuqlikning xossasi esa $\operatorname{div}\vec{u}=0$ bilan xarakterlanadi. Shunday qilib, vaznsiz suyuqlikning tekis statsionar $\left(\dfrac{\partial u_x}{\partial t}=0;\ \dfrac{\partial u_y}{\partial t}=0\right)$ oqim uchun Navye-Stoks tenglamasi quyidagicha yoziladi:

$$\frac{du_x}{dt}=X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\Delta u_x;\qquad \frac{du_y}{dt}=Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\Delta u_y,$$

bu yerda

$$\frac{du_x}{dt}=u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_x}{\partial y};\quad \frac{du_y}{dt}=u_x\frac{\partial u_y}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_y}{\partial y};$$

$$\Delta u_x=\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2};\quad \Delta u_y=\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2}.$$

Topshiriqlar

1. Siqilmaydigan ideal suyuqlik harakatining to‘la tenglamalari sistemasini dekart koordinata o‘qlaridagi proeksiyalarida yozing.
2. Siqilmaydigan ideal suyuqlik harakatining to‘la tenglamalari sistemasini qutb koordinatalaridagi proeksiyalarida yozing.
3. Siqilmaydigan ideal bir jinsli bo‘lmagan suyuqlik harakatining to‘la tenglamalari sistemasini yozing.
4. Faraz qilaylik, birlik kvadratda komponentalari (*u*,*v*) bo‘lgan ikki o‘lchovli $\vec{u}$ vektor maydon berilgan, kvadrat ichida $\operatorname{div}\vec{u}=-\sin 2\pi x\sin 2\pi y$; $\operatorname{rot}\vec{u}=\sin 2\pi x\sin 2\pi y$ va kvadrat chetlarida $\operatorname{div}\vec{u}=0$; $\operatorname{rot}\vec{u}=0$ bo‘lsin. Agar sohaning chetlarida φ – tezlik potensiali va z - vektop potensial B_ω ning komponentasi bo‘lsa, u holda *u* va *v* larni toping.
5. Ideal gaz entropiyasi uchun tenglamani chiqaring.
6. Uzviylik tenglamasini Lagranj koordinatalari sistemasida chiqaring.
7. Bir xil zarrachalar bilan to‘ldirilgan suyuqlik elementar hajmining o‘zgarishi tezligini ushbu
$$\frac{1}{V}\frac{dV}{dt}=\operatorname{div}\vec{u}$$
tenglamadan aniqlash mumkinligini ko‘rsating.
8. Ushbu $dS=\dfrac{dQ}{T}$ to‘la differensial ekanligini isbotlang.

9. O‘zgarmas $\vec{\Omega}$ burchak tezlik bilan aylanayotgan koordinatalar sistemasida Eyler tenglamasi

$$\frac{d\vec{u}}{d\,t}+2\vec{\Omega}\times\vec{u}=\Omega^2\vec{R}-\frac{1}{\rho}\nabla p+\nabla\Phi$$

kabi yozilishini ko‘rsating, bunda $\Phi\equiv gz$ – geopotensial; $\vec{R}$ - radius vektor $\vec{r}$ ning koordinatalar sistemasining aylanish o‘qiga ortogonal tekislikdagi proyeksiyasi.

10. O‘zgarmas issiqlik o‘tkazuvchanlik koeffisientli siqilmaydigan suyuqlik uchun energiyaning statsionar tenglamasi r,θ,ϕ sferik koordinatalar sistemasida quyidagicha yozilishini ko‘rsating: $\rho\dfrac{de}{d\,t}=\Phi+k\nabla^2 T$.

11. Qovushoq siqilmaydigan suyuqlik uchun tashqi kuchlar potensialli bo‘lganda zarrachalarning burchak tezlik vektori $\vec{\omega}=\dfrac{1}{2}\mathrm{rot}\,\vec{u}$ ushbu $\dfrac{\partial\vec{\omega}}{\partial t}+\mathrm{rot}[\vec{\omega},\vec{u}\,]=\nu\Delta\vec{\omega}$ tenglamani qanoatlantirishini ko‘rsating.

Sinov savollari

1. Qovushoq suyuqlik deb qanday suyuqlikka aytiladi? Asosiy gipotezalarni tushuntiring.
2. Qovushoq siqilmaydigan va siqiluvchan suyuqliklar uchun kuchlanish tenzori komponentalarini ayting. Ularning silindrik va sferik koordinatalar sistemasidagi ifodalarini chiqaring.
3. Navye-Stoks tenglamasi va uning xususiy hollarini tushuntiring.
4. Qovushoq suyuqlikning umumiy gidrodinamik tenglamalar sistemasi va uning xususiy hollarini izohlang.
5. Energiya tenglamasi va uning xususiy hollarini tushuntiring.
6. Nonyuton suyuqliklarning reologik sodda klassifikatsiyasini ayting.
7. Sof qovushoq suyuqlik deb qanday suyuqlikka aytiladi?
8. Qovushoq-elastik va qovushoq-noelastik suyuqlik deb qanday suyuqlikka aytiladi? Ularning modellari haqida nimalarni bilasiz?
9. Nonyuton suyuqliklarga misollar keltiring.

8-BOB.
SIQILMAYDIGAN SUYUQLIKNING BIR O‘LCHOVLI OQISHLARI. LAMINAR OQIM

Asosiy parametrlari faqat bitta koordinatadan bog‘liq va yo‘nalishi tezlik vektori yo‘nalishi bilan mos tushuvchi oqimga *bir o‘lchovli oqim* deb aytiladi. Bir o‘lchovli oqimdan foydalanish ko‘plab muhim amaliy masalalarni sodda yechishga imkon beradi. Suyuqlik va gaz mexanikasining bir o‘lchovli oqimlarni o‘rganuvchi bo‘limi *gidravlika* deb ataladi.

8.1. Oqim sarfi va o‘rtacha tezlik

Ko‘plab amaliy muhandislik masalalarini yechishda Eyler tomonidan kiritilgan *oqimning sharrachali modeli* katta samara berib keldi. Bu modelga ko‘ra oqim suyuqlikninig cheksiz ko‘p sharrachalaridan tashkil topgan deb faraz qilinadi. Oqim qaralayotganda uning shunday ko‘ndalang kesimlari tanlanadiki, bunda ularni kesib o‘tayotgan oqim chiziqlari ularga normal bo‘lib qolsin. Bunday holda oqimning kesimi «jonli» deb ataladi. Haqiqatan ham, agar oqim chiziqlari o‘zaro parallel bo‘lsa, u holda jonli kesim tekis (yassi) bo‘ladi.

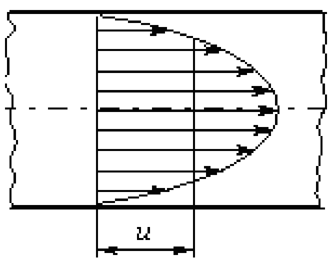
Avval «Kinematika» bo‘limida siqilmaydigan suyuqlikning elementar hajmiy sarfi quyidagicha ifodalanishi mumkinligi ko‘rsatilgan edi:

$$dQ = udA, \tag{8.1}$$

bu yerda u – sharracha oqimining tezligi; dA - uning ko‘ndalang kesimi yuzasi.

Sharracha modeliga ko‘ra oqim sarfi quyidagicha:

$$Q = \iint\limits_{A} udA \tag{8.2}$$



8.1. Quvurning ko‘ndalang kesimidagi tezlik taqsimoti tasviri.

Ko‘ndalang kesimi doiraviy quvurdagi suyuqlik oqimini qaraylik. Qovushoq ishqalanish kuchining tormozlovchi ta’siri ostida quvurning ko‘ndalang kesimidagi tezlik taqsimoti (tezlik epyurasi) 8.1-rasmda ko‘rsatilgandek bo‘ladi. Qulaylik uchun (r,θ) silindrik koordinatalar sistemasiga o‘taylik, bunda θ - qutb burchagi.
Bu koordinat sistemasida

$$dA = rdrd\theta\ . \tag{8.3}$$

(8.3) ni (8.2) qo‘ysak,

$$Q=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^R u(r)rdrd\theta\,. \qquad (8.4)$$

Bu yerda $\int\limits_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$ ekanligini e'tiborga olsak,

$$Q=2\pi\int\limits_0^R u(r)rdr\,, \qquad (8.5)$$

bu yerda $u(r)$ funksiya quvur kesimida mahalliy tezlikning radius bo'ylab o'zgarishini ifodalaydi.

Boshqacha aytganda, $u(r)$ tezlikning o'zgarish qonuni, ya'ni epyuraning matematik ifodasi. Natijada suyuqlik sarfini (8.5) bo'yicha hisoblash uchun hozircha noma'lum bo'lgan tezlikning epyurasi tenglamasini bilishimiz lozim bo'ladi. Ma'lumki, sarf muhim parametr bo'lib, gidravlik hisoblarda yuzaga keladigan har qanday qiyinchiliklarni yengib o'tib, uning qiymatini aniqlash yo'lini topish zarur.

Bu masalaning suyuqlik mexanikasida qanday yechilishini qaraylik. (8.5) ifodaning o'ng tarafi, matematik nuqtai nazardan tezlik epyurasining hajmini ifodalaydi. Faraz qilaylik, Q sarfga ega suyuqlik biror bir sabab bilan o'zining qovushoqlik xususiyatini yo'qotdi. Bunday holda, qovushoq ishqalanish kuchi yo'qolganligi sababli, tezlik epyurasi to'g'rilanib boshlaydi, u holda suyuqlikning barcha zarrachalari bir xil u tezlik bilan harakatlana boshlaydi. Shartga ko'ra sarf eskicha qoladi, u holda yangi epyuraning hajmi eskisinikiga teng bo'ladi. Bunda $u(r)=v=\text{const}$ (v – oqimning o'rtacha tezligi) bo'lgani uchun suyuqlik sarfi quyidagiga teng:

$$Q=2\pi\int\limits_0^R urdr=2\pi u\int\limits_0^R rdr=2\pi u\frac{R^2}{2}=uA\,. \qquad (8.6)$$

Bunda u tezlik *o'rtacha tezlik* yoki *o'rtacha sarf tezligi* deb ataladi. Fizik nuqtai nazardan, kesimdagi barcha zarrachalar uchun bir xil o'rtacha tezlik tushunchasini kiritish suyuqlikning quvur yoki kanaldagi oqishi masalasini bir o'lchovli masalaga keltirish imkonini beradi.

Kam deformatsiyalangan oqimlar va ularning xossalari. Suyuqlikning quvurdagi harakatini boshqacharoq nuqtai nazardan qaraylik. Agar bu harakatni statsionar desak, u holda harakat tenglamasiga kiruvchi vaqt bo'yicha hamma hosilalar nolga teng bo'ladi. Agar bir o'lchovli modelni qarasak, u holda tezlikning u_y va u_z komponentalari ham nolga teng bo‘ladi. Shularga ko‘ra, uzviylik tenglamasidan $\frac{\partial u_x}{\partial x}=0$ ekanligi kelib chiqadi. Yuqoridagilarga ko‘ra Navye-Stoks tenglamasi quyidagicha yoziladi:

$$X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\right)=0; \quad Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}=0; \quad Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}=0. \qquad (8.7)$$

(8.7) ning oxirgi ikkita tenglamasi gidrostatika tenglamalari bilan mos tushadi, bu o‘z navbatida, harakatlanayotgan suyuqlikning ko‘ndalang kesimi yuzasida bosim ushbu

$$z+\frac{p}{\rho g}=\text{const} \ \text{(yoki } gz+\frac{p}{\rho}=\text{const}) \qquad (8.8)$$

gidrostatik qonun bilan taqsimlanganligini bildiradi. Bu xulosa faqatgina kam deformatsiyalangan oqimlar uchungina o‘rinli. *Kam deformatsiyalangan oqimlar* deb oqim chiziqlarining tarqalish burchaklari juda kichik, egrilik radiusi esa juda ham katta bo‘lgan oqimlarga aytiladi, ya’ni bu tushuncha miqdorli xarakterdan ko‘ra sifat xarakterga ega.

8.2. Qovushoq suyuqlik oqimi uchun Bernulli tenglamasi

Ma’lumki, ko‘p hollarda Navye-Stoks tenglamasini integrallab bo‘lmaydi. Shunga qaramasdan, suyuq muhit harakati qonunlarini qo‘llash zarurati bo‘lgan amaliy ishlarda hisoblashlarning muhandislik usullarini ishlab chiqish talab qilinadi. Bu masalani yechishning eng sermahsul yo‘llaridan biri – bu Bernulli tenglamasini umumlashtirishdir, ya’ni uni qovushoq suyuqliklar oqimiga qo‘llashdir. Bu usulning asosida, yuqorida ta’kidlanganidek, sharrachali model – oqim kesimi orqali oqayotgan sharrachalarning cheksiz katta yig‘indisi haqidagidek oqim haqida tushuncha yotadi. Shunga ko‘ra, harakat statsionar va qaralayotgan kesimda oqim kuchsiz deformatsiyalangan bo‘ladi. Kesim orqali sharrachaning sekundlik massasi (ya’ni sharracha quvvati) bilan uzatilayotgan energiyani aniqlaylik. Bu miqdor sharrachaning to‘la solishtirma energiyasi ($gz+\frac{p}{\rho}+\frac{u^2}{2}$) ni uning massaviy sarfi (ρudA) ga ko‘paytmasi sifatida topilishi mumkin. Bunga ishonch hosil qilish juda oson. Haqiqatan ham, solishtirma energiya – *J/kg* , massaviy sarf – *kg/s*, ularning ko‘paytmasi

$$\frac{J}{kg}\frac{kg}{s}=\frac{J}{s}.$$

Shunday qilib,

$$dN=\left(gz+\frac{p}{\rho}+\frac{u^2}{2}\right)\rho u dA. \tag{8.9}$$

Oqimning sekundlik energiyasi (quvvati), sharrachali modelga ko‘ra, quyidagiga teng:

$$N=\iint\limits_A\left(gz+\frac{p}{\rho}+\frac{u^2}{2}\right)\rho u dA \tag{8.10}$$

yoki

$$N=\rho\iint\limits_A\left(gz+\frac{p}{\rho}\right)u dA+\frac{\rho}{2}\iint\limits_A u^3 dA. \tag{8.11}$$

Oqim kuchsiz deformatsiyalanuvchan bo‘lganligi uchun $gz+\dfrac{p}{\rho}=\text{const}$ va birinchi integral quyidagicha yoziladi:

$$\rho\left(gz+\frac{p}{\rho}\right)\iint\limits_A u dA=\rho\left(gz+\frac{p}{\rho}\right)Q; \tag{8.12}$$

$$N=\left(gz+\frac{p}{\rho}\right)\rho Q+\frac{\rho}{2}\iint\limits_A u^3 dA. \tag{8.13}$$

(8.13) dagi ikkinchi qo‘shiluvchi had, fizik ma’noda, sekundlik massaning kinetik energiyasini ifodalaydi. Biz bir o‘lchovli holat bilan cheklanganligimiz uchun (8.13) da o‘rtacha tezlikni kiritishimiz lozim. Buni quyidagicha bajaramiz: tenglamaning ikkala tarafini massaviy sarf ρQ ga bo‘lamiz, ya’ni bu munosabatni, sharracha uchun Bernulli tenglamasi kabi, massa birligiga keltiramiz:

$$(N\rightarrow J/s;\ \rho Q\rightarrow kg/s;\ \ \frac{N}{\rho Q}\rightarrow\frac{J/s}{kg/s}\rightarrow\frac{J}{kg}).$$

Natijada $E=\dfrac{N}{\rho Q}$ - solishtirma energiya.

Shunday qilib,

$$E=gz+\frac{p}{\rho}+\frac{1}{2Q}\iint\limits_A u^3 dA. \tag{8.14}$$

Uchunchi hadni v^2 ga bo‘lsak va ko‘paytirsak, hamda $Q=vA$ ekanligini e'tiborga olsak, quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$E=gz+\frac{p}{\rho}+\frac{v^2}{2}\frac{1}{v^3A}\iint\limits_A u^3 dA. \tag{8.15}$$

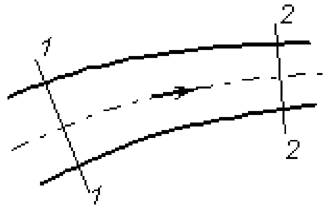
Ushbu $\dfrac{1}{v^3A}\iint\limits_A u^3 dA=\alpha$ belgilashni kiritamiz, u holda

$$E = gz + \frac{p}{\rho} + \frac{\alpha v^2}{2}, \tag{8.16}$$

bu yerda α miqdor *kinetik energiya koeffisienti, tezlik korrektirovkasi yoki Koriolis koeffisienti* deb ataladi. Bu miqdorning fizik ma'nosini keyinroq yoritamiz. (8.16) ning ikkala tarafini erkin tushish tezlanishi g ga bo'lamiz, bu nisbatni uzunlik birligida ifodalaymiz, ya'ni naporlar shaklida

$$\frac{E}{g} = H = z + \frac{p}{\rho g} + \frac{\alpha v^2}{2g}. \tag{8.17}$$

Qovushoq suyuqlikning kanaldagi *1-1* kesimdan *2-2* kesimga harakatini qaraylik (8.2-rasm). Oqimning *1-1* кesimdagi solishtirma energiyasini E_1, *2-2* kesimdagisini esa E_2 orqali belgilaylik.



8.2-rasm. Qovushoq suyuqlik oqimining kanaldagi harakati.

Suyuqlik qovushoq bo'lganligi uchun uning ko'chish jarayoni energiya dissipatsiyasi bilan kuzatiladi, ya'ni uning qaysidir bir qismi ichki ishqalanish kuchini yengishga sarflanadi va u issiqlikka aylanadi, natijada $E_2 < E_1$. Shuning uchun, tanlangan kesim uchun energiya balansi quyidagicha yoziladi:

$$E_1 = E_2 + \Delta e, \tag{8.18}$$

bu yerda Δe - energiya sarfi.

E_1 va E_2 larning qiymatlarini o'rniga qo'yamiz:

$$gz_1 + \frac{p_1}{\rho} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2} = gz_2 + \frac{p_2}{\rho} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2} + \Delta e. \tag{8.19}$$

Bu qovushoq suyuqlik oqimi uchun Bernulli tenglamasining energetik shakli. Amaliyot tatbiqlarida Bernulli tenglamasining naporlardagi ushbu

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + \Delta h \tag{8.20}$$

ifodasi ko'p qo'llaniladi, bu yerda $\frac{\Delta e}{g} = \Delta h$ - napor sarfi.

Siqilmaydigan gaz oqimlarida hamda gidravlik keltirish sistemasini hisoblashda Bernulli tenglamasining bosimlardagi ushbu

$$\rho g z_1 + p_1 + \frac{\rho \alpha_1 v_1^2}{2} = \rho g z_2 + p_2 + \frac{\rho \alpha_2 v_2^2}{2} + \Delta p \tag{8.21}$$

ifodasi keng qo'llaniladi, bu yerda Δp - bosim sarfi.

Odatda, ta'kidlangan sistemalarda $\rho g z$ had qolganlariga nisbatan hisobga olmaslik darajada kichik. Bunday hollarda (8.21) quyidagicha yoziladi:

$$p_1 + \frac{\rho\alpha_1 v_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho\alpha_2 v_2^2}{2} + \Delta p\,. \qquad (8.22)$$

8.3. Koriolis koeffisientining fizik ma’nosi

Yuqorida ta’kidladikki, α koeffisient *kinetik energiya koeffisienti, tezlik korrektirovkasi yoki Koriolis koeffisienti* deb ataladi. Bu miqdorning fizik ma’nosini beraylik.

Yuqorida ta’kidladikki, (8.13) tenglamaning ikkinchi hadi oqim kesimida tezliklarning haqiqiy taqsimotidan aniqlanuvchi oqim sekundlik massasining kinetik energiyasi, ya’ni

$$E_k^{sm} = \frac{\rho}{2}\iint_A u^3 dA\,. \qquad (8.23)$$

Agar oqim kesimida tezliklar tekis taqsimlangan bo‘lsa, u holda $u = v = const$ (v - oqimning o‘rtacha tezligi) oqimning kinetik energiyasi quyidagicha bo‘ladi:

$$E_k^{tt} = \frac{\rho}{2}\iint_A v^3 dA = \frac{\rho}{2} v^3 \iint_A dA = \frac{\rho v^3 A}{2}\,. \qquad (8.24)$$

(8.23) ni (8.24) ga bo‘lamiz, natijada:

$$\frac{E_k^{sm}}{E_k^{tt}} = \frac{1}{v^3 A}\iint_A u^3 dA = \alpha\,. \qquad (8.25)$$

Shunday qilib, Koriolis koeffisienti tezliklarning haqiqiy taqsimoti bo‘yicha hisoblangan kinetik energiyaning o‘rtacha tezlik bo‘yicha hisoblangan kinetik energiyaga nisbatini bildirar ekan.

Buni tushuntirish maqsadida, masalan, tezliklari $u_1 = 2$ m/s va $u_2 = 4$ m/s bo‘lgan ikkita sharrachadan iborat gipotetik «oqim»ni qaraymiz va Koriolis koeffisientini hisoblaymiz.

Haqiqiy kinetik energiya (sharrachalarning kinetik energiyalari yig‘indisi):

$$E_k^{sm} = \frac{u_1^2}{2} + \frac{u_2^2}{2} = \frac{4}{2} + \frac{16}{2} = 10\frac{m^2}{s^2}\,.$$

O‘rtacha tezlik

$$v = \frac{u_1 + u_2}{2} = 3\frac{m}{s}$$

va unga mos kinetik energiya:

$$E_k^{tt} = \frac{v_1^2}{2} + \frac{v_2^2}{2} = \frac{9+9}{2} = 9\frac{m^2}{s^2}\,.$$

Bulardan

$$\alpha = \frac{E_k^{sm}}{E_k^{tt}} = \frac{10}{9},$$

ya'ni $\alpha > 1$ (chin kinetik energiya o'rtachaga nisbatan katta).

Shunga osongina ishonch hosil qilish mumkinki, agar tezliklar taqsimoti qanchalik notekis bo'lib borsa, u holda Koriolis koeffisienti ham shunchalik katta bo'ladi. Masalan, agar $u_1 = 2$ m/s va $u_2 = 6$ m/s bo'lsa, u holda α = 5/4. Bu yerdan ko'rinadiki, agar tezliklar taqsimoti tekis bo'lsa, u holda minimal qiymat α = 1 bo'ladi. Haqiqatan ham, faraz qilaylik, $u_1 = u_2 = 4$m/s bo'lsin, u holda

$$E_k^{sm} = 16\frac{m^2}{s^2} \text{ va } E_k^{tt} = 16\frac{m^2}{s^2}.$$

Natijada, agar tezliklarning haqiqiy taqsimotini shartli tekis taqsimlangan tezliklarga almashtirib, kinetik energiyani hisoblasak, u holda α parametr bu hisobning xatoligini to'g'rilashni ifodalaydi.

Tushunchalardan biroz oldinga ketib, shuni ta'kidlaymizki, suyuqlikning ikkita asosiy oqish rejimi mavjud: laminar va turbulent oqimlar. Laminar oqimda $\alpha_l = 2$, turbulent oqimda esa $\alpha_t = 1{,}02...1{,}04$. Bu shuni tasdiqlaydiki, ko'ndalang kesimdagi tezliklar taqsimoti, laminar oqimga nisbatan, turbulent oqimda yetarlicha tekis (laminar oqim epyurasiga nisbatan turbulent oqim epyurasi «to'laroq», ya'ni to'g'ri to'rtburchakka yaqinroq).

Endi ba'zi xulosalarni keltiraylik. Sharrachali modelni qo'llash va o'rtacha tezlik haqidagi tushunchani kiritish bilan uni bir o'lchovliga keltirish gidrodinamikaning asosiy tenglamalaridan biri – qovushoq suyuqliklar uchun Bernulli tenglamasini keltirib chiqarishga imkon beradi. Bu tenglama yordamida kanalda statsionar oqayotgan va tanlangan kesimlarida oqim kuchsiz deformatsiyalanuvchan yoki parallel sharrachali holda suyuqlik harakatini hisoblash mumkin. Ammo, masalani to'la yechish uchun suyuqlikning kanaldagi oqishi jarayonida paydo bo'ladigan Δh - napor yo'qotilishini hisoblashni bilish lozim bo'ladi. Bu sodda bo'lmagan masala bo'lib, keyinchalik uni yechishni qarab chiqamiz.

8.4. Qovushoq siqilmaydigan suyuqlikning quvur bo'ylab statsionar oqishi bo'yicha namunaviy masalalari va ularning yechimlari

Sodda xususiy hollardan birida Navye-Stoks tenglamasining aniq yechimini ko'rsataylik. Buning uchun qatlamli oqish masalasini qaraymiz, bunda tezlikning faqat bitta tashkil etuvchisi noldan farqli, qolganlari nolga teng, ya'ni $u_x = 0$; $u_y = 0$; $u_z = u_z(x, y, z, t)$. Agar massaviy kuchlarni hisobga olmaslik darajasida kichik desak, u holda

● harakat tenglamasi

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\nu}{3}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right), \qquad 0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\nu}{3}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_y}{\partial y}\right), \tag{8.26}$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_z\frac{\partial u_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\nu}{3}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u_z}{\partial z}\right) + \nu\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right);$$

● uzviylik tenglamasi

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} = 0. \tag{8.27}$$

Agar siqilmaydigan suyuqlik (ρ=const)ning statsionar oqishi $\left(\frac{\partial u_z}{\partial t} = 0\right)$ holi bilan cheklansak, u holda uzviylik tenglamasidan oqim bo'ylab tezlikning o'zgarmas $\left(\frac{\partial u_z}{\partial z} = 0\right)$ ekanligi hamda dastlabki ikkita harakat tenglamasidan ko'ndalang yo'nalishlarda bosimning o'zgarmas $\left(\frac{\partial p}{\partial x} = 0;\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0\right)$ ekanligi kelib chiqadi. Shularga asoslanib, (8.26) harakat tenglamasining uchinchisidan quyidagini yozamiz:

$$\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dz} = \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}. \tag{8.28}$$

1-masala. Ikkita cheksiz parallel tekisliklardan tashkil topgan kanalda qovushoq siqilmaydigan suyuqlikning tekis parallel qatlamli oqishi masalasini yeching.

Yechish. Faraz qilaylik, qovushoq siqilmaydigan suyuqlikning qatlamli oqishi tekis parallel bo'lib, uning *Oz* o'qi bo'ylab oqish tezligi o'zgarmas $\left(\frac{\partial u_z}{\partial z} = 0\right)$ bo'lsin, u holda (8.26) harakat tenglamasining uchinchisida *Oxy* tekislikda ta'sir etayotgan tangensial qovushoq kuchlanish saqlanib qoladi, ya'ni

$$\sigma_z = 0; \quad \tau_{xz} = 0; \quad \tau_{yz} = \mu\frac{\partial u_z}{\partial y}. \tag{8.29}$$

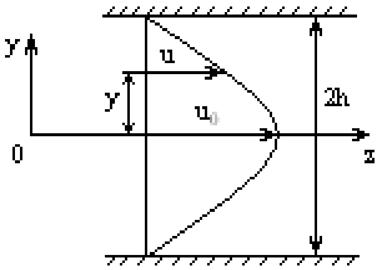
(8.29) munosabat sodda holda Nyutonning qovushoq ishqalanish qonunini ifodalaydi. Uni differensiallasak

$$\frac{d\tau_{yz}}{dy} = \mu\frac{d^2 u_z}{dy^2},$$

(8.26) harakat tenglamasining uchinchisidan quyidagi tenglamani hosil qilamiz:

$$\frac{dp}{dz} = \mu \frac{d^2 u_z}{dy^2} . \qquad (8.30)$$

Tekisliklar orasidagi masofa $2h$ va koordinatalar markazi kanal o‘qida yotgan bo‘lsa (8.3-rasm), u holda masalaning chegaraviy sharti sifatida suyuqlikning kanal devoriga yopishish shartini qabul qilishimiz mumkin, ya’ni $u\big|_{y=\pm h} = 0$.



8.3-rasm. Kanaldagi tekis parallel oqish sxemasi.

(8.30) tenglamani integrallasak,

$$\frac{dp}{dz} y + C_1 = \mu \frac{\partial u_z}{\partial y} . \qquad (8.31)$$

Simmetriya shartiga ko‘ra $y = 0$ o‘rta sirtda $\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} = 0 \right)$, demak C_1=0. (8.31) ni integrallasak, $\frac{1}{2}\frac{dp}{dz} y^2 + C_2 = \mu u_z$, bu yerdan esa $C_2 = -\frac{1}{2}\frac{dp}{dz} h^2$. Natijada

$$u_z = \frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dz}(y \;\; - h^2) .$$

Kanalning o‘qi (y=0) da oqim tezligi quyidagiga teng:

$$u_0 = -\frac{h^2}{2\mu}\frac{dp}{dz} .$$

Oxirgi ikkita tenglamani hadma-had bo‘lsak,

$$\frac{u_z}{u_0} = 1 - \frac{y^2}{h^2} .$$

Qo‘zg‘almas devorga ta’sir etuvchi ishqalanish kuchi:

$$\tau_{yz} = \mu \frac{\partial u_z}{\partial y}\Big|_{y=\pm h} = -h \frac{\partial p}{\partial z} .$$

Shunday qilib, tekis kanaldagi suyuqlikning qatlamli oqishida tezlikning o‘lchamsiz shakli kvadratik parabola shaklida bo‘lib, u qovushoqlik miqdoriga ham va bosimning bo‘ylama gradientiga ham bog‘liq emas ekan.

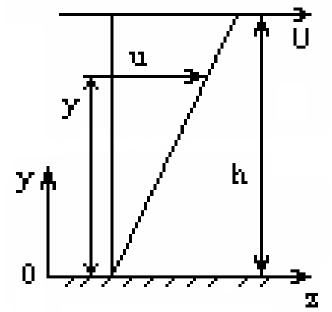
Oz o‘qi bo‘yicha birlik qalinlikdagi plastinkalar orasidagi kesim orqali suyuqlik sarfi quyidagiga teng:

$$Q = \iint\limits_S u_z ds = -\frac{2}{3\mu}\frac{dp}{dz} h^3 ,$$

ya’ni suyuqlik sarfi bosim kamayishiga va plastinkalar orasidagi masofa kubiga to‘g‘ri proporsional, qovushoqlik koeffisientiga esa teskari proporsional.

2-masala (Kuett oqimi masalasi). O‘zaro o‘zgarmas tezlik bilan harakatlanayotgan ikkita cheksiz parallel tekisliklardan tashkil topgan kanalda qovushoq siqilmaydigan suyuqlikning tekis parallel qatlamli oqishi masalasini yeching.

Yechish. Faraz qilaylik, *Oyz* tekislikning hamma joyida suyuqlik zarrachalari *Oz* o‘q bo‘ylab *U* tezlik bilan yo‘nalgan va hamma miqdorlar faqat *y* koordinatadan bog‘liq (8.4-rasm). Statsionar oqim uchun harakat tenglamasidan *gradiyentsiz oqim yoki Kuettning sodda oqimi* tushunchasiga kelamiz, ya’ni



8.4-rasm. Kanaldagi tekis parallel qatlamli oqish sxemasi.

$$\frac{dp}{dy} = 0, \quad \frac{d^2u_z}{dy^2} = 0,$$

bu yerdan esa p=const, $u=ay+b$. $y=0$ va $y=h$ da (h – tekisliklar orasidagi masofa) mos ravishda $u_z = 0$ va $u_z = U$. Bularga ko‘ra

$$u_z = \frac{y}{h}U .$$

Bu tenglik suyuqlik tezligi taqsimoti chiziqli ekanligini bildiradi.

Bunday oqim *Kuettning laminar statsionar oqimi* deb ataladi. Suyuqlikning o‘rtacha tezligi quyidagicha:

$$u_0 = \frac{1}{h}\int_0^h u_z dy = \frac{U}{2} .$$

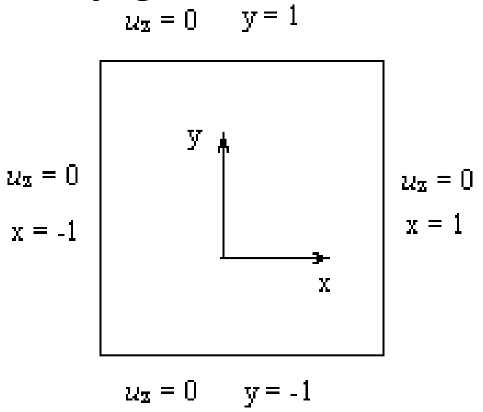
Tangensial ishqalanish kuchi y=0 tekislikda quyidagiga teng:

$$\tau_{yz} = \mu\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z}\right) = \mu\frac{du_z}{dy} = \mu\frac{U}{h},$$

y=h tekislikda uning qiymati shu miqdorning qarama-qarshi ishoralisiga teng. Bu tenglikdan ko‘rinadiki, urinma kuchlanish o‘zgarmas va u qovushoqlikka proporsional. Urinma kuchlanish siljish kuchlanishi deb ham ataladi, shuning uchun Kuettning sodda oqimi *sof siljish oqimi* deb ham ataladi.

3-masala. Ko‘ndalang kesimi kvadrat shaklidagi quvurdan qovushoq siqilmaydigan (ρ=const) suyuqlikning statsionar $\left(\frac{\partial u_z}{\partial t} = 0\right)$ oqishi masalasini yeching (8.5-rasm).

Yechish. Quvurning kirish va chiqish kesimlaridan uzoqda suyuqlik oqishi *Oz* o‘q bo‘ylab o‘zgarmas bo‘lib qoladi, u holda (8.28) tenglama o‘rinli. Bunday turdagi oqishda $\frac{dp}{dz}$ miqdor o‘zgarmas bo‘ladi. Agar bunda masshtabga nisbatan o‘lchamsiz holatga o‘tsak, u holda (8.28) tenglama u_z funksiyaga nisbatan ushbu



8.5-rasm. Kvadrat kesimli quvur sxemasi.

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}+1=0$$

Puasson tenglamasiga keladi, bunda chegaraviy shartlar quyidagicha:

$$u_z\big|_{x=\pm 1}=0\ ;\quad u_z\big|_{y=\pm 1}=0.$$

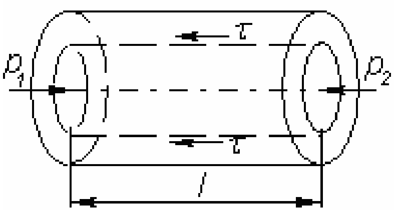
Quvurning markaziy nuqtasidagi maksimal tezlik quyidagicha:

$$u_{z,\max}=0{,}2947.$$

4-masala (Doiraviy quvurda laminar oqim qonuniyatini ifodalovchi masala). Yuqoridagi masala tenglamasini doiraviy kesimli quvur uchun yeching (8.6-rasm).

Yechish. Suyuqlikning o‘zgarmas bosim sarfi ta’sirida gorizontal quvurdagi statsionar laminar oqimini qaraylik. Oqim statsionar bo‘lganligi uchun *R* radiusli silindrga ta’sir etayotgan barcha kuchlarning o‘qdagi proeksiyalari yig‘indisi nolga teng, ya’ni suyuqlik zarrachalarini harakatga keltiruvchi aktiv kuchlar qarshilik kuchlariga teng bo‘lishi lozim. Quvur ichidan *r* radiusli silindr ajrataylik.

Faol kuchlar:



8.6-rasm. Doiraviy kesimli quvurdagi oqim sxemasi.

$$p_1A-p_2A=\Delta pA=\pi r^2\Delta p\ .$$

Qarshilik kuchlari: $2\pi rl\tau$. Shunday qilib,

$$\pi r^2\Delta p=2\pi rl\tau\ .$$

Natijada $\tau=\frac{\Delta pr}{2l}$. Bu yerdan urinma kuchlanishning radius bo‘ylab chiziqli o‘zgarishi kelib chiqadi.

Doiraviy kesim markazini koordinata boshi deb tanlaymiz va qutb koordinatalari sistemasini kiritamiz. Simmetriya shartiga ko‘ra $u=u_z(r)$. Laplas operatorining qutb koordinatalari sistemasidagi ifodasidan foydalanib, ushbu

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right)=-\frac{\Delta p}{\mu l}$$

tenglamani tuzamiz, bunda l – quvur bo‘lagi uzunligi; $\Delta p=p_2-p_1$ – quvur oxirgi kesimlaridagi bosimlar farqi; μ - dinamik qovushoqlik; $\Delta p/l$ - bosim gradienti. Bu tenglamani integrallasak,

$$u=-\frac{\Delta p}{4\mu l}r^2+a\ln r+b, \tag{8.32}$$

bunda a, b – integrallash o‘zgarmaslari. a o‘zgarmasni nolga teng deb olish zarur, chunki tezlik quvurning barcha kesimlari nuqtalarida, uning markazida ham, chekli miqdor bo‘lib qolishi kerak. b o‘zgarmasni esa $r=R$ (R – quvur radiusi) chegarada u=0 shartdan topamiz: $b=\frac{\Delta p}{4\mu l}R^2$.

Natijada

$$u=-\frac{\Delta p}{4\mu l}(R^2-r^2) \quad \text{yoki} \quad u=\frac{\Delta pR^2}{4\mu l}\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right). \tag{8.33}$$

Shunday qilib, quvur kesimi bo‘ylab tezlik aylanma paraboloid qonuniyat bilan taqsimlangan ekan. Oxirgi (8.33) formula *Puazeyl formulasi* deb ataladi.

Suyuqlik zarrachasining maksimal tezligi quvur markazida bo‘ladi, ya’ni $r=0$ da uning miqdori

$$u_{\max}=\frac{\Delta pR^2}{4\mu l}.$$

Bunga ko‘ra

$$u=u_{\max}\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right) \quad \text{yoki} \quad \frac{u}{u_{\max}}=1-\frac{r^2}{R^2}.$$

Bundan kelib chiqadiki, oqimning ixtiyoriy nuqtasidagi tezlikning o‘qdagisiga nisbati suyuqlik sarfi va tarkibi hamda quvur devorining materialiga bog‘liq emas ekan.

Quvurning ko‘ndalang kesimi orqali bir sekundda oqayotgan Q suyuqlik miqdori (massasi) yoki quvurdagi suyuqlik sarfi osongina aniqlanadi. Xalqali elementning quvur kesimi yuzasi ($2\pi rdr$) orqali bir sekundda $2\pi ru\rho dr$ suyuqlik miqdori oqib o‘tadi. Shunga ko‘ra,

$$Q=2\pi\rho\int_0^R rudr.$$

Bu yerda tezlikning yuqoridagi ifodasidan foydalansak, quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$Q = \frac{2\pi\Delta p}{4\nu\, l}\int_0^R \left(R^2 - r^2\right) r dr = \frac{\pi\Delta p}{8\nu\, l} R^4,$$

bu yerda ν - kinematik qovushoqlik. Demak, quvurdan oqayotgan suyuqlik miqdori shu quvur radiusining to‘rtinchi darajasiga to‘g‘ri proporsional ekan. Bunda maksimal tezlik ifodasidan foydalansak,

$$Q = \frac{\pi u_{\max} R^2}{2} = \frac{1}{2} u_{\max} A = v A.$$

Bu yerdan esa, $u_{\max} = 2v$. Bunga $u_{\max}$ ning yuqoridagi ifodasini qo‘yib, doiraviy quvurdagi laminar rejim uchun bosim sarfining radius yoki diametrga nisbatan quyidagi ifodalariga kelamiz:

$$\Delta p = \frac{8\mu l v}{R^2} = \frac{32\mu l v}{d^2}. \qquad (8.34)$$

Olingan oxirgi (8.34) ifoda *Xagen-Puazeyl formulasi* deb ataladi. Napor sarfi uchun formulani $\Delta p = \rho g \Delta h$ munosabatdan foydalanib topamiz:

$$\Delta h = \frac{32\mu l v}{\rho g d^2}.$$

Shunday qilib, doiraviy quvurdagi laminar oqimda bosim (napor) sarfi o‘rtacha tezlikdan chiziqli bog‘liq bo‘lar ekan.

5-masala. Xalqa kesimli (ichki radiusi R_1 va tashqi radiusi R_2) doiraviy quvur bo‘ylab suyuqlik oqimini aniqlang.

Yechish. (8.32) tenglamadagi a va b o‘zgarmaslarni $r = R_1$ va $r = R_2$ da $u = 0$ degan chegaraviy shartlardan topamiz.

Shunga ko‘ra suyuqlik tezligi:

$$u = \frac{\Delta p}{4\mu l}\left\{R_2^2 - r^2 + \frac{R_2^2 - R_1^2}{\ln\left(R_2 / R_1\right)} \ln\left(r / R_2\right)\right\}.$$

Oqib o‘tayotgan suyuqlik miqdori:

$$Q = \frac{\pi\Delta p}{8\nu\, l}\left\{R_2^4 - R_1^4 - \frac{\left(R_2^2 - R_1^2\right)^2}{\ln\left(R_2 / R_1\right)}\right\}.$$

6-masala. Elliptik kesimli quvur bo‘ylab suyuqlik oqimini aniqlang.

Yechish. (8.32) tenglamaning yechimini ushbu

$$u = Ax^2 + By^2 + C$$

funksiya ko‘rinishida izlaymiz. A, B, C o‘zgarmaslar shunday topiladiki, ular ham tenglamani va ham quvur konturi bo‘ylab u=0 chegaraviy shartni qanoatlantirishi lozim, ya’ni $Ax^2 + By^2 + C = 0$ tenglama $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (a, b – ellips yarim o‘qlari) – kontur tenglamasini qanoatlantirishi zarur. Natijada

$$u=\frac{\Delta p}{2\mu l}\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right),$$

bu yerda $a = b = r$ desak, u holda doiraviy kesimli quvur uchun 4-masaladagi yechimga kelamiz.

Oqib o‘tayotgan suyuqlik miqdori:

$$Q=\frac{\pi\Delta p}{4\nu l}\frac{a^3b^3}{a^2+b^2}.$$

7-masala. R_1 radiusli silindr unga qo‘sh o‘qli bo‘lgan R_2 radiusli silind ichida o‘z o‘qiga parallel U tezlik bilan harakat qilmoqda. Silindrlar orasidagi suyuqlik harakatini aniqlang.

Yechish. Silindrik koordinatalar sistemasini tuzaylik, bunda Oz o‘q silindr o‘qi bo‘ylab yo‘nalgan bo‘lsin. Bunda tezlik Oz o‘q boylan yo‘nalgan va u faqat r koordinatadan bog‘liq, ya’ni $u_z=u(r)$. Uning uchun quyidagi tenglamani yozamiz:

$$\Delta u=\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right)=0.$$

(8.32) dan $(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u}=u\dfrac{\partial\vec{u}}{\partial z}$ had yo‘qoladi. $r=R_1$ da $u=U$ va $r=R_2$ da $u = 0$ ekanligidan tezlik quyidagiga teng:

$$u=U\frac{\ln(r/R_2)}{\ln(R_1/R_2)}.$$

Har bir silindrning birlik uzunligiga ta’sir etayotgan ishqalanish kuchi quyidagiga teng:

$$F=U\frac{2\pi\mu}{\ln(R_1/R_2)}.$$

8-Masala. Ko‘ndalan kesimi to‘g‘ri to‘rtburchak bo‘lib, balandligi $2H$ kengligi b dan kichik bo‘lgan tekis quvurdan oqayotgan suyuqlikning laminar oqimi tezliklari taqsimoti qonuni ushbu $u=\dfrac{3}{2}U\left(1-\dfrac{x^2}{H^2}\right)$ formula bilan berilgan. O‘rtacha solishtirma kinetik energiya ifodasini to‘g‘rilovchi koeffisiyentning o‘rtacha tezlik bo‘yicha hisoblangan qiymatini toping.

Yechish. Oqimning kinetik energiyasi: $Э=\dfrac{1}{2}\int\limits_F u^2dm$. Qaralayorgan holda $dm=\rho u\,dF=\rho u\,b\,dx$.

U holda $Э=\dfrac{1}{2}\cdot 2\int\limits_F b\rho u^3dx=b\rho\int\limits_o^H\dfrac{27}{8}U^3\left(1-\dfrac{x^2}{H^2}\right)^3dx=\dfrac{54}{35}\rho bHU^3$.

Agar kinetik energiyani o‘rtacha tezlik bo‘yicha hisoblasak, u holda $\overline{Э} = \frac{1}{2}\rho b \cdot 2H \cdot U \cdot U^2 = \rho bHU^3$. Shunday qilib, o‘rtacha tezlik bo‘yicha hisoblangan jonli kuchga to‘g‘rilovchi miqdor quyidagicha ekan: $Э = \frac{54}{35}\overline{Э}$.

9-masala. Quvurdagi laminar oqimning o‘rtacha tezligini aniqlash uchun Pito naychasini quvur o‘qidan qanday *r* masofada o‘rnatish lozim?

Yechish. Laminar oqimda quvurdagi tezlik taqsimoti quyidagi funksiya bilan ifodalanadi: $u = 2U\left(1 - r^2/a^2\right)$. Bu yerdan $u=U$ shartni qanoatlantiruvchi *r* ni topamiz: $1 = 2\left(1 - r^2/a^2\right)$. Natijada $r = a/\sqrt{2}$.

Topshiriqlar

1. Ko‘ndalan kesimi tomoni *a* ga teng bo‘lgan teng tomonli uchburchak shaklidagi quvurdan qovushoq siqilmaydigan (ρ=const) suyuqlikning statsionar $\left(\frac{\partial u_z}{\partial t} = 0\right)$ oqishi masalasini yeching (3-5-masalalarga qarang). Bunda suyuqlik zarrachalarining tezligi $u = \frac{\Delta p}{l}\frac{2}{\sqrt{3}a\mu}h_1 h_2 h_3$ va quvur ko‘ndalang kesimi orqali 1 sek da oqib o‘tadigan suyuqlik miqdori (massasi) $Q = \frac{\sqrt{3}a^4\Delta p}{320\nu\, l}$ ekanligini ko‘rsating, bunda h_1, h_2, h_3 – uchburchakning ichki nuqtasidan uning tomonlariga o‘tkazilgan balandliklar uzunligi.

2. Qo‘sh o‘qli cheksiz uzunlikdagi o‘z o‘qi atrofida Ω_1 va Ω_2 burchak tezliklar bilan aylanayotgan R_1 va R_2 radiusli silindrlar orasidan oqayogan suyuqlikning tezligini toping (Kuett oqimi yoki Kuett masalasi).

Sinov savollari

1. Bir o‘lchovli oqim deb nimaga aytiladi?
2. Oqim sarfi va o‘rtacha tezlikni ayting.
3. Laminar oqim deb nimaga aytiladi?
4. Puazeyl formulasini ayting.
5. Qovushoq suyuqlik uchun Bernulli tenglamasini ayting.
6. Koriolis koeffisienti va uning fizik ma’nosi nima?

9-BOB.
SUYUQLIK OQIMINING USTIVORLIGI VA UNING KLASSIFIKATSIYASI

Ushbu bobda oqimning turi, ustivorligi, oqim uchun gidrodinamik o‘xsaslik va oqimning klassifikatsiyalar haqida tushunchalar hamda suyuqliklarning ba’zi dinamik xarakteristikalari keltirilgan.

Kam sondagi hisoblashlar yoki eksperimental kuzatishlar orqali oqim haqida to‘laroq ma’lumotlarga ega bo‘lish uchun bir qator parametrlarni o‘lchamsiz holga keltirish maqsadga muvofiq. Ikkita oqim o‘zaro dinamik o‘xshash deyiladi, agar bu oqimlarni ifodalovchi o‘lchamsiz sonlar o‘zaro teng bo‘lsa. Bu o‘lchamsiz kombinatsiyalarga kiruvchi o‘lchamli parametrlar har xil bo‘lishi mumkin. Quyida ana shu o‘lchamsiz miqdorlarni aniqlashning eng sodda yo‘llari qaralgan.

Amaliy ahamiyatga ega bo‘lgan oqimlar uchun ularning klassifikatsiyasi quyida ikki parametr: qovushoqlik va zichlik bo‘yicha keltirilgan.

9.1. Oqim ustivorligi kriteriyasi

XIX-asrning 80-yillarida quvurlardagi oqimda suyuqlikning harakat qarshiligini o‘rganish bilan bog‘liq ishlar qisman to‘xtab qoldi. Tadqiqotchilardan nemis muhandis-quruvchisi G.Xagen va fransuz vrachi J.Puazeylning tajribalari shuni ko‘rsatdiki, qarshilik tezlikka chiziqli bog‘liq. Xuddi shu vaqtda fransuz muhandisi A.Darsining sinchkovlik va aniqlik bilan o‘tkazgan tajribasi shuni tasdiqladiki, qarshilik tezlik kvadratiga proporsional ekan. Bu tasdiqlarda hosil bo‘lgan qarama-qarshiliklar muhandislik amaliyoti taraqqiyotiga salbiy ta’sir ko‘rsatdi.

1885 yilda G.Xagen tomonidan o‘tkazilgan kuzatishlar esa shuni ko‘rsatdiki, quvurdagi oqim xarakterining o‘zgarishi ma’lum shartlarda sodir bo‘ladi. Bu narsa 1870 yilda prof. N.N.Petrov tomonidan gidrodinamik moylash nazariyasini ishlab chiqishda ko‘rsatilgan edi.

Bu gipoteza ingliz fizigi Osbor Reynoldsning ajoyib tajribalarida o‘z tasdig‘ini topdi, uning natijalari 1883-1884 yillarda chop etildi va bu suyuqliklar mexanikasi taraqqiyotiga katta turtki bo‘ldi. Tajribalar tushunarliligi va soddaligi bilan ajralib turadi. Reynolds tajribasida suvning harakat tezligi boshqariladigan shisha quvurda rangli suyuqlik sharrachasi kiritiladi. Kichik tezliklarda sharracha quvur o‘qiga parallel harakat qiladi va butun holat qo‘zg‘almas bo‘lib ko‘rinadi. Jo‘mrakni ochib suv tezligi oshirilsa, u holda rangli suyuqlik harakati avvalo sinusoidal shaklda, keyingi tezliklar oshishida esa tartibsiz tarqalish yoki tartibsiz harakat kuzatiladi. Birinchi hol – tinch, zarrachalar aralashmaydigan qatlamli oqish bo‘lib, *laminar oqish* deb ataldi. Ikkinchisi esa xaotik, zarrachalar aralashishiga olib keladigan va keyinchalik U.Tomson (Lord Kel’vin) tavsiyasi bilan turbulent harakat deb ataldi.

Reynolds o‘z tadqiqotlarini davom ettirib, oqim tezligining oshishi uning tuzilishi o‘zgarishiga olib keluvchi qandaydir qo‘zg‘alishlarning paydo bo‘lishiga olib kelishini faraz qildi. Agar suyuqlik oqimining turg‘unligi deb uning o‘zida paydo bo‘ladigan qo‘zg‘alishlarni bostiruvchi qobiliyati desak, u holda oqimning turbulent holatga o‘tishini turg‘unlikning buzilishi deb atash mumkin. Bunda suyuqlik zarrachasiga ta’sir etuvchi ikki xil kuch mavjud: qovushoq ishqalanish (harakatni stabillashtiradi) va inertsiya (harakatni destabillashtiradi).

Shunday qilib, bu kuchlar nisbati oqimning turg‘unligi kriteriyasi (o‘lchami)ni ifodalaydi, bu o‘z navbatida son o‘lchovni chiqarishga ham imkon beradi. Haqiqatan ham, $F = ma$ inertsiya kuchi. Massani esa zichlikning hajmga ko‘paytmasi hamda hajm chiziqli o‘lchovning kubi desak, u holda $m \cong \rho l^3$. Vaqt birligi ichida tezlikning o‘zgarishi bu $a = u/t$ - tezlanish.

Shunday qilib,

$$F_{iner} \cong \frac{\rho l^3 u}{t}. \qquad (9.1)$$

Ma’nosiga ko‘ra l/t nisbat tezlikni ifodalaydi, natijada

$$F_{iner} \cong \rho l^2 u^2. \qquad (9.2)$$

Qovushoq ishqalanish kuchu (Nyuton bo‘yicha):

$$F_{ishq} = \mu \frac{du}{dy} S. \qquad (9.3)$$

Xuddi yuqoridagi kabi amallarni bajarsak,

$$F_{ishq} \cong \mu \frac{u}{l} l^2 \cong \mu u l$$

va turg‘unlikni ifodalovchi o‘lchamsiz kompleks quyidagicha yoziladi:

$$\frac{F_{iner}}{F_{ishq}} = \frac{\rho u l}{\mu}. \qquad (9.4)$$

Keyinchalik bu nisbat *Reynolds soni* deb nom oldi, ya’ni

$$\mathbf{Re} = \frac{\rho u l}{\mu}, \qquad (9.5)$$

bunda u – oqimning xarakterli tezligi; l – xarakterli chiziqli o‘lcham.

Doiraviy quvur uchun xarakterli o‘lcham bu – diametr, xarakterli tezlik esa bu oqimning o‘rtacha tezligi. Shularga ko‘ra, $\mu / \rho = \nu$ ekanligini e’tiborga olsak, u holda (9.5) ifoda quyidagicha yoziladi:

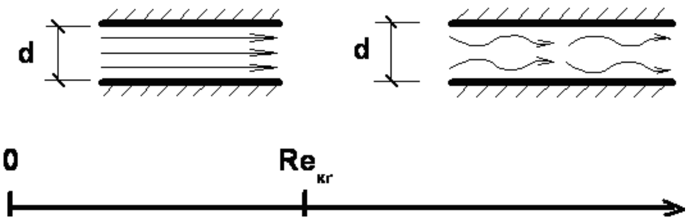
$$\mathbf{Re} = \frac{vd}{\nu}. \tag{9.6}$$

Nodoiraviy kesimli quvurlardagi oqim uchun xarakterli o‘lcham sifatida gidravlik radius

$$R = \frac{A}{\Pi} \tag{9.7}$$

olinadi, bunda A – quvur ko‘ndalang kesimining yuzi; Π - namlangan perimeter (perimetrning suyuqlik bilan tutashgan qismi).

Naporli harakatda doiraviy kesimli quvur uchun $A = \pi d^2 / 4$, $\Pi = \pi d$ va $R = d / 4$, ya’ni gidravlik radius geometrik radiusdan ikki marta kichik. Reynolds tajribalaridan aniqlangan eng muhim natijalardan biri bu u tomonidan ustivorlik kriteriyasiga asoslanib kiritilgan sonli qiymatda laminar oqimdan turbulent oqimga o‘tish jarayoni sodir bo‘ladi. Keyinchalik bu son kritik *Reynolds soni* ($\mathbf{Re}_{kr}$) deb ataldi.



a *b*

9.1-rasm. Suyuqlik harakati rejimini aniqlash uchun Reynolds soni skalasi (*a* – laminar oqim; *b* – turbulent oqim).

Doiraviy kesimli quvurlardagi naporli oqimlar uchun, ko‘p sonli tajribalarga asoslanib, bu son $\mathbf{Re}_{kr} \approx 2320$ va naporsiz oqimlar uchun esa $\mathbf{Re}_{kr} \approx 500$ ekanligi aniqlandi. Bu Reynoldsning quyi kritik qiymati bo‘lib, oqimni stabillashtiruvchi maxsus choralar qo‘llanilmagan holda olingan. Agar qo‘shimchachoralar ko‘rilsa, u holda harakatning turbulent holatiga o‘tish jarayonini cho‘zish mumkin. Texnik hisob jarayonlarida aniq parametrlar qiymatlarida Reynolds soni kritik qiymatidan kichik bo‘lsa, harakat laminar, aks holda esa turbulent bo‘ladi (9.1-rasm).

9.2. Dinamik o‘xshashlik

Jismlardagi konfiguratsiyaga o‘xshash oqim tasvirini eng samarali (eng kam hisob, eksperimentlar va kuzatishlar nuqtai nazaridan) olish uchun hamma parametrlarni (masalan, L - jism uzunligi, U - harakatdagi oqim tezligi, ν - kinematik qovushoqlik) bir qator o‘lchamsiz parametrlarga guruhlashtirish maqsadga muvofiq. Suyuqlik har bir harakatining turini ana shu uchta parametr orqali aniqlash mumkin, bunda

$[L]$ = sm; $[U]$ = sm/s; $[\nu]$ = sm^2/s; Ikkita oqim *dinamik o‘xshash* deyiladi, agar oqimni ifodalovchi o‘lchamsiz parametrlar teng bo‘lsa. Bunda o‘lchamsiz kombinatsiyalarga kiruvchi o‘lchamli parametrlar farqli bo‘lishi mumkin. O‘lchamsiz miqdorlarni aniqlashning eng sodda yo‘li suyuqlik oqimini ifodalovchi tenglamalar va chegaraviy shartlarni o‘lchamsiz holga keltirishdan iborat.

Masalan, U_∞ tezlik bilan harakatlanayotgan L uzunlikdagi kemadan hosil bo‘lgan to‘lqinni tadqiq qilishda dastavval qovushoq siqilmaydigan oqim impulsining z-komponentasini tavsiflovchi tenglamani qarash yetarli:

$$\frac{\partial u_z}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_z}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_z}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}=\frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right)-g.$$

O‘lchamsiz o‘zgaruvchilar quyidagicha kiritiladi:

$$x^*=\frac{x}{L},\quad y^*=\frac{y}{L},\quad z^*=\frac{z}{L},\quad t^*=\frac{U_\infty t}{L},$$

$$u_x^*=\frac{u_x}{U_\infty},\quad u_y^*=\frac{u_y}{U_\infty},\quad u_z^*=\frac{u_z}{U_\infty},\quad p^*=\frac{p-p_\infty}{\rho U_\infty^2}.$$

Shularga ko‘ra yuqoridagi tenglama quyidagicha yoziladi:

$$\frac{\partial u_z^*}{\partial t^*}+u_x^*\frac{\partial u_z^*}{\partial x^*}+u_x^*\frac{\partial u_z^*}{\partial y^*}+u_z^*\frac{\partial u_z^*}{\partial z^*}+\frac{\partial p^*}{\partial z^*}=\left(\frac{\nu}{U_\infty L}\right)\left(\frac{\partial^2 u_z^*}{\partial x^{*2}}+\frac{\partial^2 u_z^*}{\partial y^{*2}}+\frac{\partial^2 u_z^*}{\partial z^{*2}}\right)-\frac{gL}{U_\infty^2}.$$

Bu tenglamada ikkita o‘lchamsiz parametr bor, bular:

$$\mathbf{Re}=\frac{U_\infty L}{\nu}\quad \text{va}\quad \mathbf{Fr}=\frac{U_\infty}{\sqrt{gL}}.$$

Ularning birinchisi *Reynolds soni* (*Osborn Reynolds*), ikkinchisi esa *Frud soni* deb ataladi. Agar U_∞, L va ν parametrlar har xil miqdorlar bo‘lishiga qaramasdan bu oqimlar uchun **Re** va **Fr** sonlari o‘zaro teng bo‘lsa, u holda erkin sirtli ikkita siqilmaydigan qovushoq oqish *dinamik o‘xshash* deyiladi.

9.3. Suyuqliklarning ba’zi dinamik xarakteristikalari

Yuqorida keltirilgan Reynolds va Frud sonlaridan boshqa o‘lchamsiz parametrlar (masalan, Max va Prandtl sonlari, solishtirma issiqlik sig‘imlari nisbati) energiya tenglamasini o‘lchamsiz holga keltirishdan hosil qilinadi. Ideal gaz deb hisoblanuvchi havo uchun energiya tenglamasini quyidagicha yozish mumkin:

$$\rho c_p\frac{dT}{dt}-\frac{dp}{dt}=\Phi+\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right).$$

Yuqoridagilarga qo‘shimcha ravishda quyidagi o‘lchamsiz o‘zgaruvchilar kiritiladi:

$$T^* = \frac{T}{T_\infty}, \quad p^* = \frac{p}{\rho U_\infty^2}, \quad \rho^* = \frac{\rho}{\rho_\infty}, \; \Phi^* = \frac{\Phi L^2}{\mu U_\infty^2}, \; k^* = \frac{k}{k_\infty}.$$

Bularni yuqoridagi energiya tenglamasiga qo‘ysak va ba’zi almashtirishlardan keyin quyidagiga kelamiz:

$$\rho^* \frac{dT^*}{dt^*} = (\gamma - 1) M_\infty^2 \left(\frac{dp^*}{dt^*} + \frac{\Phi^*}{\mathrm{Re}} \right) + \frac{1}{\mathrm{Pr} \cdot \mathrm{Re}} \left[\frac{\partial}{\partial x^*} \left(k^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} \right) + \frac{\partial}{\partial y^*} \left(k^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right) + \frac{\partial}{\partial z^*} \left(k^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*} \right) \right].$$

Bu tenglamadan ko‘rinadiki, qovushoq siqiluvchan ideal gazning oqishi masalasini yechish hech bo‘lmaganda to‘rtta o‘lchamsiz sonlarga bog‘liq bo‘lar ekan:

- **Re** $= \dfrac{U_\infty L}{\nu}$ - *Reynolds soni*;
- **Pr** = $\dfrac{\mu_\infty c_p}{k_\infty}$ - *Prandtl soni*;
- **M∞**$= \dfrac{U_\infty}{a_\infty} = \dfrac{U_\infty}{\sqrt{\gamma RT}}$ - *Max soni* ;
- $\gamma = \dfrac{c_p}{c_V}$ - *solishtirma issiqlik sig‘imlari nisbati (Puasson soni)*.

Agar qovushoqlik va issiqlik o‘tkazuvchanlikning temperaturadan bog‘liqligini e’tiborga olsak, u holda beshinchi o‘lchamsiz parametrga ega bo‘lamiz. Ammo yuqorida keltirilgan beshta o‘lchamsiz parametr suyuqlik oqimining ko‘plab masalalari sinfini dinamik o‘xshashlik bilan ta’minlashga yetarli. Shulardan uchtasi (Reynolds, Max va Frud sonlari) suyuqlik oqimi bilan bog‘liq. Qolgan ikkitasi (Prandtl soni va solishtirma issiqlik sig‘imlari nisbati) suyuqlikning xossasidan aniqlanadi. (1.1- va 1.2- jadvallarga qarang).

Reynolds soni (**Re**) inertsiya kuchlarining qovushoqlik kuchlariga nisbatini ifodalaydi: **Re**$= \dfrac{U_\infty L}{\nu}$. Bu son har xil masalalarda noldan (inertsiya kuchlari hisobga olmaslik darajasida kichik) 10^{10} gacha va hatto undan ham katta (qattiq jismga yaqin bo‘lgan nuqtalardan boshqa barcha nuqtalarda qovushoqlik kuchlari juda kichik) songacha o‘zgarishi mumkin. Reynolds sonining ba’zi qiymatlari 9.1-jadvalda keltirilgan.

Max soni (**M**) – bu gaz tezligining tovush tezligiga nisbati va siqiluvchanlik o‘lchami yoki harakat bilan bog‘liq holda zichlik o‘zgarishidir: **M∞**$= \dfrac{U_\infty}{a_\infty} = \dfrac{U_\infty}{\sqrt{\gamma RT}}$. Masalan, havo uchun **M**<0,3 bo‘lsa, u holda zichlik o‘zgarishi 5% dan oshmaydi. Demak bu jarayonda oqimdagi gazni siqilmaydigan suyuqlik deb faraz qilish mumkin. Ammo ba’zi jarayonlar mavjudki, Max soni kichik bo‘lsa ham, undagi suyuqlikni siqilmaydigan deb qarash mumkin emas, masalan, nostatsionar oqimlar yoki tutash muhitlarda bosim to‘lqinlarining tarqalishi masalalari. Harbiy samolyotlar uchun Max soni uchinchi tartibli, uchirilgan kosmik apparatlar uchun esa undan ham katta bo‘lishi mumkin. Max soni juda katta bo‘lganda oqimdagi bosim va temperatura keskin o‘zgarishi mumkin, ayniqsa bu tormozlanish nuqtasi atrofida kuzatiladi.

9.1-jadval. Reynolds sonining ba’zi qiymatlari.

№	**Harakat turi**	**Re**
1.	Havoda tushayotgan suv tomchisi (*D*=0,07 mm)	$6{,}4\cdot 10^{-1}$
2.	Telegraf simini puflayotgan shamol (*U*=10 m/s)	$1\cdot 10^{3}$
3.	Beysbol to‘pi (*U*=35 m/s)	$2\cdot 10^{5}$
4.	Maksimal tezlikda suzayotgan akula (*L*=1,5 m)	$8\cdot 10^{6}$
5.	Kreyser balandligida uchayotgan katta reaktiv transport samolyoti (747)	$7\cdot 10^{7}$
6.	Okean layneri (*U*=15 m/s)	$4{,}5\cdot 10^{9}$
7.	Planetar chegaraviy qatlam (*L*=1000 km, *U*=20 m/s)	$18\cdot 10^{12}$

Frud soni (**Fr**) inertsiya kuchlarining gravitatsion kuchlarga nisbatini ifodalaydi: **Fr** $= \dfrac{U_\infty}{\sqrt{gL}}$. Erkin sirtli oqimlar uchun Frud soni muhim parametr hisoblanadi. Bunday oqimlar, masalan, bo‘g‘ozlarda, daryolarning dengizlarga quyilish havzalarida, kemalarning harakatida paydo bo‘lishi mumkin. Agar Frud soni kichik bo‘lsa, u holda og‘irlik kuchi ta’sirida suyuqlik sirti tekis bo‘ladi va sirt to‘lqinlari hosil bo‘lishiga bog‘liq harakat qarshiligini e’tiborga olmaslik mumkin.

Prandtl soni (**Pr**) impuls dissipatsiyasining issiqlik dissipatsiyasiga nisbatini ifodalaydi: **Pr** $= \dfrac{\mu c_p}{k} = \dfrac{\nu}{\alpha}$. Normal temperatura va bosimdagi havo uchun **Pr** = 0,72 va temperaturaning oshishi bilan juda sekin kamayadi (2.1-jadval). Suv uchun temperaturaning oshishi bilan uning qiymati tez kamayadi: **Pr** = 8,1 (T=15^{0}C) ; 1,74 (T=100^{0}C) (2.2-jadval).

Solishtirma issiqlik sig‘imlar hisbati: havo uchun $\gamma = 1{,}4$; suv uchun $\gamma = 1{,}0$.

Struxal soni (*Strouhal*) deb nostatsionar harakatda uchta U_∞, L va ν parametrlardan tashqari harakatning biror τ vaqt intervalida ham o‘zgarishini ifodalovchi parametrga aytiladi: **Sh** = $U_\infty \tau / L$.

9.4. Oqimlar klassifikatsiyasi

Klassik gidrodinamika biz har kuni uchratadigan muhitning dinamikasini tavsiflaydi. Bunday muhitlardagi hodisalarga har xil oqishlar (ochiq va yopiq o‘zanlar; atmosfera uyurmasi va harakati; sharsharalar; tovush to‘lqinlari; okeandagi to‘lqinlar, quvurlardagi suyuqlik oqimi; havzalar va hokazo) misol bo‘la oladi. Uzluksiz muhitda hodisaning murakkabligi va ko‘pxilligi sababli gidrodinamika tenglamalari murakkablashib boradi, nochiziqlilik va masalani yechishning qiyinlashuvi kuzatiladi.

Asosiy saqlanish qonunlarini qo‘llab, makroskopik nuqtai nazaridan gidrodinamika tenglamalari keltirib chiqariladi. Yuqorida biz keltirib o‘tgan tenglamalar sistemasi holat tenglamasi, boshlang‘ich va chegaraviy shartlar bilan to‘ldirilib, ular uch o‘lchovli fazoda qovushoq siqiluvchan suyuqlikning nostatsionar harakatini ifodalaydi. Ammo bunday tenglamalar sistemasi juda ham murakkab bo‘lib, ularni yechish juda ko‘p hisoblashlarni va vaqtni talab qiladi yoki ba’zilarini umuman yechib bo‘lmaydi.

Suyuqliklar dinamikasining tarixiy rivojlanishida bir qator oqimlar sinfi kiritilgan bo‘lib, ular sezilarli soddaroq, aniqlik darajasi kamroq bo‘lgan tenglamalar sistemasi bilan ifodalanib kelingan. Umuman olganda, bunday har xil soddaroq oqishlar suyuqlik oqimining ba’zi xossalarini e’tiborga olmaslikdan yoki ba’zi cheklanishlardan hosil qilinadi. O‘z navbatida bu narsalar soddalashtirilgan tenglamalardagi ba’zi o‘lchamsiz parametrlarning yoki chegaralanganligiga yoki umuman qatnashmasligiga olib keladi.

Amaliy ahamiyatga ega bo‘lgan oqimlar uchun mos sinflashtirish 9.2-jadvalda keltirilgan. Bu jadval kanallarda, turbinalarda, diffuzorlarda va hokazo shunga o‘xshash ichki oqishlarni tahlil qilishda yordam beradi. Bunday oqishlar sinfi haqidagi to‘laroq ma’lumotlarni darsliklardan olish mumkin.

Bu klassifikatsiya ikkita parametr (qovushoqlik va zichlik) bo‘yicha keltirilgan siqilmaydigan oqish tezligi tovush tezligidan kam bo‘lgan (**M**<<*1*) oqishlarda sodir bo‘ladi. Aksincha, siqiluvchan oqish (**M**>0.1 yoki oqishda temperaturalar farqi yuqori) uchun emas, balki to‘liq uzviylik tenglamasini va energiya tenglamasini qarash zarur bo‘ladi.

Qovushoqlikning ta’sirini qarashda oqishning asosiy 3 ta sinfi vujudga keladi. Yaxshi suyri jismlar oqishi holatida oqishning katta qismi xossasi, xususan, jism bo‘ylab bosimning taqsimotini suyuqlikning qovushoqligi nolga teng deb topish mumkin. Siqiluvchan qovushoqmas oqish uchun keyingi sinflar taqsimoti Max soniga bog‘liq (**M**>1; **M**=1; **M**<1). Agar **M**>1 bo‘lsa, u holda suyuqlikning harakatini tavsiflovchi tenglama giperbolik tipda bo‘ladi va oqish maydonida zarbali to‘lqinlar paydo bo‘lishi mumkin.

9.2-jadval. Oqishlar klassifikatsiyasi.

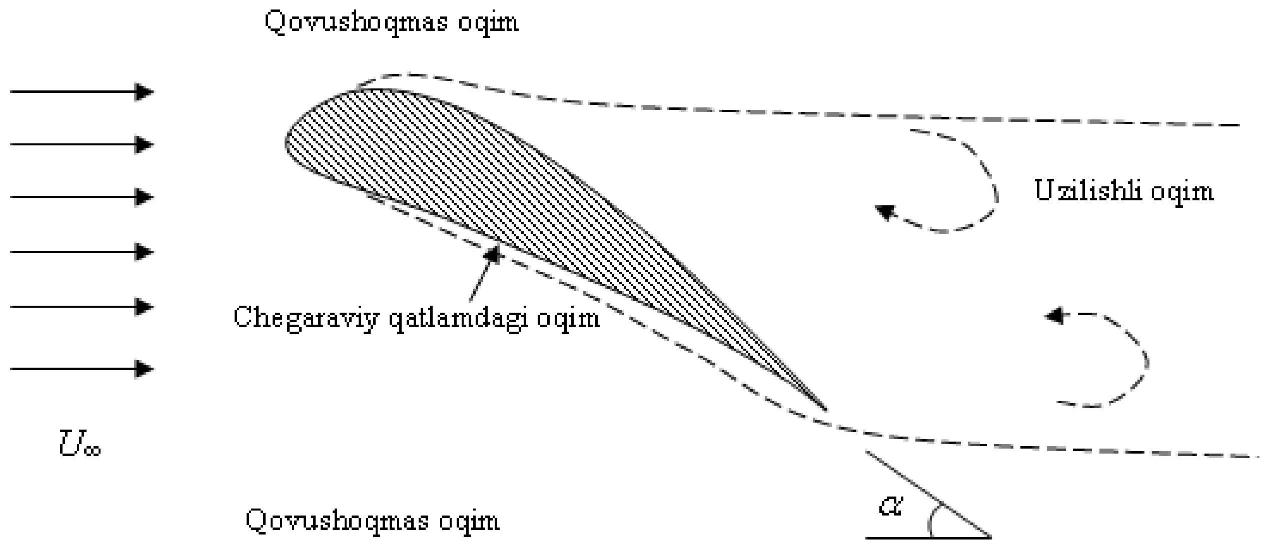
Qovushoqlik	**Zichlik**	
	Siqilmaydigan (zichlik o‘zgarmas)	**Siqiluvchan (zichlik o‘zgaruvchan)**
Qovushoqmas oqish (μ=0)	Potensial oqish (agar uyurmaviylik nolga teng bo‘lsa)	Gazlar dinamikasi (*k=0*)
Chegaraviy qatlamda oqish (qovushoqlik sirt yaqinida sezilarli)	Laminar oqish (**Re** juda ham kichik) Turbulent oqish (**Re** yetarlicha katta)	Issiqlik ko‘chishi (bu ham sezilarli)
Uzlukli oqish (qovushoqlik barcha joyda sezilarli)	Laminar oqish (**Re** juda ham kichik) Turbulent oqish (**Re** yetarlicha katta)	Issiklik ko‘chishi (bu ham sezilarli)

Yaxshi suyri jismlar yaqinidagi o‘qish uchun qovushoqlik samarasi jismning sirtiga bevosita yaqin bo‘lgan yupqa chegaraviy qatlamdagina sezilarli. Jismga ta’sir etayotgan ishqalanish kuchi (sirt ishqalanishi qarshiligi) chegaraviy qatlamning qovushoqligi bilangina aniqlanadi. Noldan farqli issiqlik o‘tkazuvchanlikda issiqlik ko‘chishi chegaraviy qatlamidagi oqishdangina aniqlanadi.

Katta Reynolds soniga ega oqishlar uchun qovushoqlik chegaraviy qatlamning ichida yuzaga keladigan qo‘zg‘alishlarni bostirish qobiliyatiga ega emas. Shunday ekan oqishning vaqt bo‘yicha o‘rtacha parametrini olish uchun oqimning turbulentligini hisobga oluvchi ba’zi empirik parametrlar kiritish lozim bo‘ladi.

Yomon suyri jismlar (masalan, avtomobil) shamolga qarshi qismida qovushoqlik effekti sezilarli bo‘lgan uzilishli oqim paydo bo‘ladi. Agar Reynolds soni yetarlicha kichik bo‘lmasa, u holda bu sohalarda oqim turbulent va ko‘pincha nostatsionar bo‘ladi. Odatda uzilishli oqimlarni tavsiflshda siqiluvchan va siqilmaydigan suyuqliklar uchun Navye-Stoks tenglamalari sistemasini to‘laligicha yechish zarur bo‘ladi.

9.2-rasmda oqim yo‘nslishiga nisbatan α burchak ostida joylashgan aerodinamik profil (yoki turbina lopatkasi, yoki qanot) tasvirlangan. Profildan uzoq nuqtalarda oqim qovushoqmas oqadi, oqimga yuzma-yuz va profilga yaqin nuqtalarda yupqa chegaraviy qatlam paydo bo‘ladi va bu sohadagi oqimni chegaraviy qatlam teglamalari bilan yetarlicha aniqlikda tavsiflash mumkin. Profilning oqimga nisbatan orqa tarafida esa uzilishli oqimdan iborat katta soha hosil bo‘ladi va bu sohada Navye-Stoksning to‘la tenglamalari sistemasini yechish lozim bo‘ladi. 9.2-rasmda tasvirlangandek uzilishli oqimdan iborat katta sohada oqish nostatsionar. Bu misol bitta masalaning o‘zida bir nechta har xil tenglamalar va tenglamalar sistemalarini birgalikda yechishni yoki har bir soha uchun yechimlarni tutash chegaralarda birlashtirishni talab qiladi.



9.2-rasm. Oqim yo‘nslishiga nisbatan burchak ostida joylashgan aerodinamik profil (qanot).

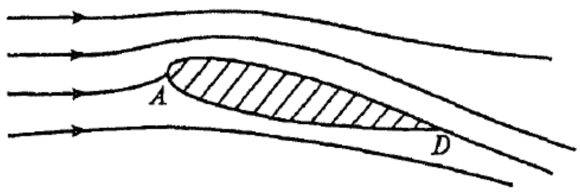
Xususiy holda, agar suyuqlik ideal va siqilmaydigan (demak oqimda faqat bosim kuchi mavjud), uning oqimi statsionar va faqatgina sirtga yaqin yupqa uyurmali qatlam nuqtalari (ularda sirkulyatsiy mavjud)dan tashqari nuqtalarda uyurmasiz (potensial) bo‘lsa, bu *chegaraviy qatlam* (bunda sirkulyatsiyaning mavjudligi qovushoqlikning ta’siridan)da quyidagi postulat o‘rinli.

Chapligin-Jukovskiy postulati. *Orqa cheti juda o‘tkir bo‘lgan profilning cheksiz ko‘p sirkulyatsion suyriliklari ichida orqa uchdan chekli tezlik bilan chiquvchi silliq oqim mavjud.*

Bunday suyrilikning sxematik ifodasi 9.3-rasmda tasvirlangan. Ana shunday holatga mos keluvchi Γ sirkulyatsiyaning qiymatini ushbu

$$R_y = -\rho u_\infty \Gamma$$

Jukovskiy formulasiga qo‘yib, ko‘taruvchi kuchni topish mumkin (ushbu o‘quv qo‘llanmaning 6.3-banddagi 3-masalaga qarang).



9.3-rasm. Chapligin-Jukovskiy postulati uchun sxema.

Namunaviy masalalar va ularning yechimlari

1-masala. Gidroo‘zanda haqiqiy uzunligi L_h = 160 m va tezligi U_h =14 m/s bo‘lgan kemaning modeli o‘rganilyapti. Uzunligi L_m = 3 m bo‘lgan kema modeli gidroo‘zanda qanday tezlik bilan harakat qiladi?

Yechish. O‘xshashlik qoidasiga ko‘ra har ikkala holdagi Frud sonlari o‘zaro teng bo‘lishi zarur, ya’ni $\mathbf{Fr}_h = \mathbf{Fr}_m$ yoki $\frac{U_h}{\sqrt{gL_h}} = \frac{U_m}{\sqrt{gL_m}}$, bu yerdan esa $U_m / U_h = \sqrt{L_m / L_h}$. Berilganlarni bu formulaga qo‘yib, U_m = 1,917 m/s ekanligini topamiz.

2-masala. Uchuvchi apparat normal atmosfera sharoitida U_n = 80…160 m/s tezlikka moslashtirilgan. Zichligi o‘zgaruvchan aerodinamik quvurda shu apparatning 1:10 masshtabli modeli sinovdan o‘tkazilmoqda. Purkash aerodinamik quvurning ishchi qismidan p = $2{\cdot}10^6$ Pa bosimda va T = 298 K temperaturada berilmoqda. Reynolds soni bo‘yicha aerodinamik o‘xshashlikni ta’minlash maqsadida qanday tezliklarda modelni sinovdan o‘tkazish mumkin?

Yechish. Avvalo T = 298 K temperatura sharoitida T_0 = 288 K va μ_0 =$1{,}789{\cdot}10^{-5}$ Pa·s boshlang‘ich qiymatlarga ko‘ra dinamik qovushoqlikni

$$\mu = \mu_0 (T / T_0)^{0,76} \tag{9.8}$$

formuladan topamiz, ya’ni μ = $1{,}836{\cdot}10^{-5}$ Pa·s. Holat tenglamasidan foydalanib esa R=287 Dj/(kg·K) ekanligidan ρ=p/(RT)=23,38 kg/m^3

zichlikni va bulardan esa kinematik qovushoqlik $\nu_m = \mu/\rho$=0,07853·10^{-5} m^2/s ekanligini topamiz. Reynolds sonining har ikkala holda o‘zaro teng (**Re**$_n$ = **Re**$_m$) ekanligidan $U_m = (L_m/L_n)\cdot U_n\cdot(\nu_m/\nu_n)$. Berilganlarni va normal sharoitda kinematik qovushoqlik ν_n =1,461·10^{-5} m^2/s ekanligini hisobga olsak, u holda U_m = 0,5375· U_n . Uchuvchi apparatning U_n = 80…160 m/s tezlik diapazoniga ko‘ra U_m = 43…86 m/s ekanligi kelib chiqadi.

3-masala. O‘zgaruvchan zichlikli aerodinamik quvurda vatari b_m=150 mm bo‘lgan qanot modeli sinovdan o‘tkazilmoqda. Quvurdagi havo oqimining tezligi U_m=25 m/s va havo harorati T=303^{0}K. **Re** soni bo‘yicha aerodinamik o‘xshashlikni ta’minlash uchun sinovni qanday bosimda otkazish mumkin? Qanot vatari b_h=1,2 m va uning harakat tezligi U_h=90 m/s.

Yechish. Haqiqiy va model qanotlar atrofidagi oqimlarda **Re** sonlarinig tengligi (**Re**$_h$ = **Re**$_m$) va ν_n =1,461·10^{-5} m^2/s deb faraz qilishdan $\nu_m =(U_m/U_h)\cdot b_h\cdot \nu_h / b_h$ = 0,05073·10^{-5} m^2/s qiymatni topamiz. $\nu_m = \mu/\rho$ munosabatni va (9.8) bog‘lanishni e’tiborga olsak, u holda aerodinamik quvurdagi havo oqimi modelining zichligini $\rho = \mu_0 (T/T_0)^{0,76}/\nu_m$ kabi aniqlagan bo‘lamiz. Mos ravishda T_0 = 288^{0}K , μ_0 = 1,789·10^{-5} Pa·s va R=287 Dj/(kg·^{0}K) ekanligidan $p=\rho RT=\mu_0 (T/T_0)^{0,76} RT/\nu_m$ = =31,87·10^5 Pa bosimni topamiz.

4-masala. Loyihalashtirilayotgan samolyotning Yer atmosferasida H = 10 km balandlikda U_h =100 m/s tezlik bilan harakati qaralmoqda. Sinovda esa o‘lchami 10 marta kichiklashtirilgan samolyot modeli uchun harorati T = 293 K bo‘lgan havo oqimi haydalgan o‘zgaruvchan zichlikli aerodinamik quvurda **M** soni bo‘yicha o‘xshashlikka erishilgan. Eksperiment paytida aerodinamik quvurdagi oqimning tezligini aniqlang.

Yechish. Haqiqiy va model samolyotlar atrofidagi oqimlarda **M** sonlarinig tengligi (**M**$_h$ = **M**$_m$) dan $U_m = U_n (a_m / a_h)$. Standart atmosfera uchun 10 km balandlikda tovush tezligi a_h = 299,4 m/s. Aerodinamik quvurning ishchi qismida havo oqimidagi tovush tezligi esa $a_m = \sqrt{kRT_m}$ formuladan topiladi, bunda havo uchun k=1,4 va R = 287 Dj/(kg·K). T_m = 293 K deb qabul qilsak, u holda a_m=343,1 m/s. Shunday qilib, U_h=100 m/s ekanligidan aerodinamik quvurdagi oqim tezligi U_m =114,6 m/s kelib chiqadi.

Topshiriqlar

1. Loyihalashtirilayotgan samolyotning Yer atmosferasida H = 10 km balandlikda U_h =100 m/s tezlik bilan harakati qaralmoqda. Sinovda esa o‘lchami 10 marta kichiklashtirilgan samolyot modeli uchun harorati T = 293^0K bo‘lgan havo oqimi haydalgan o‘zgaruvchan zichlikli aerodinamik quvurda **Re** soni bo‘yicha o‘xshashlikka erishilgan. Eksperiment paytida aerodinamik quvurdagi oqimning bosimini aniqlang.

2. Quyidagicha $x=a\xi$, $y = a\eta$, $z = a\zeta$, $t = a^2\ \tau/\nu$ (bunda a – o‘rganilayotgan oqimning xarakterli o‘lchami, masalan, qanot vatari yoki siltovi) o‘lchamsiz koordinat almashtirishlar yordamida

$$\boldsymbol{v} = \nu\boldsymbol{u}/a, \quad p/\rho = (\nu/a)^2\,\Pi, \quad \boldsymbol{g} = \nu^2\boldsymbol{\gamma}/a^2$$

(bunda $\boldsymbol{g}$ – o‘zgarmas massaviy kuchlar; $\boldsymbol{u}$, Π, $\boldsymbol{\gamma}$ funksiyalar ξ, η, ζ, τ o‘zgaruvchilarning o‘lchamsiz funksiyalari) kabi o‘lchamsiz funksiyalar kiritib, ushbu

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{g} - \frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\,p + \nu\Delta\boldsymbol{v}\,, \qquad \mathrm{div}\,\boldsymbol{v} = 0$$

qovushoq suyuqlik tenglamalari sistemasi quyidagicha o‘lchamsiz shakldagi Navye-Stoks tenglamalari sistemasiga kelishini isbotlang:

$$\frac{d}{d\tau}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\gamma} - \frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\,\Pi + \Delta\boldsymbol{u}\,, \qquad \mathrm{div}\,\boldsymbol{u} = 0,$$

bunda $\frac{d}{d\tau}$, Δ, grad, div operatorlar ξ, η, ζ, τ o‘zgaruvchilarga nisbatan yoziladi.

3. Laminar siqilmaydigan ikki o‘lchovli chegaraviy qatlam quyidagi tenglamalar sistemasi bilan tavsiflanadi:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0\,; \qquad u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = u_e\frac{du_e}{dx} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,,$$

bunda $u_e(x)$ - chegaraviy qatlamning tashqi sirtidagi tezlik taqsimoti. Bu tenglamalar sistemasini quyidagi almashtirishlar yordamida o‘lchamsizlantiring:

$$x' = x/L;\ y' = y\cdot\sqrt{\mathrm{Re}}/L;\ u' = u/U;\ v' = v\cdot\sqrt{\mathrm{Re}}/U\,,$$

bunda U va L – xarakterli tezlik va uzunlik.

4. D diametrli quvurdan v tezlik bilan tekis ilgarilanma harakat qilayotgan ν kinematik qovushoqli suyuqlikning harakat tartibini aniqlang (T=20^0C). (Izoh: agar **Re**=vD/ν<2320 bo‘lsa, u holda harakat tartibi laminar, aks holda esa turbulent).

Suyuqlik turi	***D*, m**	***v*, m/s**	**ν, 10^{-6} m^2/s**
Suv	0,01	1,0	1,01
Gazsimon suyuqlik	0,01	1,0	15
Neft	0,01	1,0	80

5. Yuqoridagi 4-masala uchun suyuqlik oqimining kritik tezligi $v_{kr} = \nu \mathbf{Re}_{kr}/D$ ni, ya'ni bir tartibdan ikkinchi tartibga o'tishdagi chegara tezligini aniqlang ($\mathbf{Re}_{kr}$ = 2320 – kritik Reynolds soni).

Sinov savollari

1. Laminar va turbulent harakatga ta'rif bering. Misollar keltiring.
2. Reynolds soni nima va u qanday ma'noni anglatadi?
3. Harakat turini aniqlashda kritik Reynolds soni qanday ma'noga ega?
4. Gidravlik radius nima?
5. Oqim ustivorligini tushuntiring.
6. Prandtl, Frud, Struxal va Max sonlari nima?
7. Oqimlar klassifikatsiyasini tushuntiring.

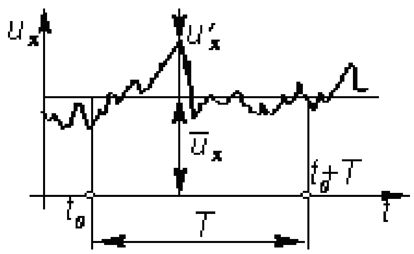
10-BOB.
SUYUQLIKNING TURBULENT HARAKATI

Turbulent oqimlar nazariyasi amaliyot uchun juda muhim ahamiyatga ega bo‘lishi bilan birga gidrodinamikaning murakkabroq bo‘limi hamdir. Yuqorida ta’kidlaganimizdek, turbulentlik haqidagi dastlabki jiddiy izlanishlar O.Reynolds tomonidan 1883 yilda o‘tkazilgan edi. U Stoksning ishlariga murojaat qilib, quyidagicha javob berdi: «Statsionar oqimning uyurmalanishiga, ya’ni statsionar harakatning ba’zi hollarda turg‘un-masligiga umumiy sabab - bu cheksiz kichik qo‘zg‘alishlar harakatning to‘lqinli harakatga aylanishiga olib kelishidir». Turbulent harakat Reynolds tomonidan dastlab «To‘lqinli harakat» deb atalgan edi. Afsuski, cheksiz kichik qo‘zgalishlarni tajribalarda tadqiq qilish kritik qiymatlarni bermadi. Turbulent harakatning eng muhim xususiyati bu uning xaotikligida (tartibsizligida). Bu shuni bildiradiki, oqimning ixtiyoriy nuqtasidagi tezlik (va boshqa parametrlar ham) vaqtga bog‘liq bo‘ladi. Ayniqsa bu nuqtalardagi tezlikning nomuntazam o‘zgarishi (fluktuatsiyasi) xaotikdir.

Quyida turbulent harakatning eng muhim umumiy tushunchalari-gagina to‘xtalamiz.

10.1. Umumiy tushunchalar

Turbulent ko‘chishning fizik mexanizmi haqidagi gipoteza birinchi bo‘lib ingliz olimi L.Richardson tomonidan 1922 yilda aytib o‘tilgan. Turbulent harakat – ham ilgarilanma va ham aylanma harakat qiluvchi, uyurmalar deb ataluvchi alohida tizimlarning birgalikdagi harakati, deb shartli ravishda qabul qilingan. Richardson bo‘yicha turbulentlikning rivojlanishi «uyurmalar»ning shajarasi (ierarxiyasi) deb faraz qilinadi. O‘lchami kanal o‘lchamiga yaqin uyurmalar paydo bo‘ladi. Keyin esa noustivorlik natijasida ular, o‘z energiyasini uzatgan holda, mayda bo‘laklarga bo‘linib ketadi. O‘rtacha oqim energiyasi o‘lchamlari kichiklashib borayotgan uyurmalarga ketma-ket uzatilib boradi. Oxir oqibatda minimal o‘lchamli uyurmalar qoladi va ular boshqa bo‘linmaydi. Bunda uyurmaning turbulentlikni tashkil etuvchi eng kichik o‘lchami muhitning qovushoqligidan aniqlanadi. Eng kichik uyurmalarda turbulentlikning kinetik energiyasi qovushoq ishqalanish kuchi hisobiga issiqlikka aylanadi, ya’ni energiya dissipatsiyasi sodir bo‘ladi. Bu esa jarayonning qaytmasligini bildiradi. Aytilganlardan ko‘rinadiki, o‘zining fizik tabiatiga ko‘ra turbulent harakat nostatsionar harakatdir. Boshqa tarafdan esa bevosita o‘lchashlar shuni ko‘rsatadiki, oqimning turbulentlik xarakterida uning tasodifiy qismlaridan tuzilgan muntazam (regulyar) qismini ajratib olish mimkin.



10.1-rasm. Turbulent harakatda tezlik proeksiyasining eksperiment orqali aniqlangan vaqtga bog‘liq o‘zgarishi grafigi.

O‘zgarmas chegaraviy shartda oqimning biror nuqtasidagi tezlik proeksiyasining vaqtga bog‘liq o‘zgarishining eksperimental ravishda aniqlangan tipik ko‘rinishi 10.1-rasmda tasvirlangan. Grafikdan ko‘rinadiki, bu jarayonning eng muhim xususiyati uning davriy emasligida, bunda

$$u'_x = u_x - \bar{u}_x \ ,$$

bu yerda $\bar{u}_x$ - oqim regulyar qismining o‘rtacha tezligi; u'_x - tezlikning oniy va regulyar qiymatlari orasidagi farqdan iborat pulsatsion tezlik. Boshqa komponentalarga nisbatan ham shunga mos munosabatlarni yozish mumkin.

Shunday qilib, o‘rtacha tezlik – bu berilgan hol uchun atrofida qaralayotgan tezlik proeksiyasining o‘zgarishi sodir bo‘layotgan biror ustivor qiymatdir. Bu aytilganlarning barchasi boshqa parametrlarga, xususan bosimga ham teng kuchli taalluqli. Oqimning eng muhim xarakteristikasi - bu uning tezliklari maydonidir. Yuqorida ta’kidlaganimizdek, turbulent oqayotgan oqimning ixtiyoriy nuqtasida tezlik tasodifiy miqdor bo‘lib hisoblanadi, bu o‘z navbatida Navye-Stoks differensial tenglamalari sistemasi uchun boshlang‘ich shartlarni qo‘yish imkonini bermaydi, ya’ni masalaning matematik qo‘yilish imkoni yo‘q. Xuddi ana shu narsa jarayonni tezliklar va bosimlarning haqiqiy emas, balki biror o‘rta qiymati bo‘yicha tavsiflashga majbur qiladi. O‘rtacha tezlik va bosim $u_x(x,y,z,t)$, $u_y(x,y,z,t)$, $u_z(x,y,z,t)$, $p(x,y,z,t)$ funksiyalarni turbulent pulsatsiyalarning xarakterli vaqtidan ancha katta biror T vaqt oralig‘ida integrallashdan olinadi (masalan, 10.1-rasmga qarang). Bu vaqt l masshtabni turbulent pulsatsiyalar tezligiga bo‘lgandagi nisbatdan aniqlanadi. Turbulent pulsatsiyalar masshtabi deb pulsatsiyalar sezilarli o‘zgarishlarga erisha oladigan masofa tushuniladi. Masalan, quvurdagi turbulent harakatda pulsatsiyaning eng katta masshtabi shu quvur diametriga teng. Shunday qilib, tezlikning o‘rtalashtirilgan komponentasi, masalan

$$\bar{u}_x = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} u_x(t)dt\,. \qquad (10.1)$$

Xuddi shunday munosabatni bosim uchun ham yozish mumkin. Bunda fluktuatsiya (xuddi shunday, pulsatsiya) ham musbat va ham manfiy bo‘lishi mumkin, u holda

$$\bar{u}'_x = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} u'_x(t)dt \equiv 0\,. \qquad (10.2)$$

Ma’lumki, $\bar{u}'^2_x \neq 0$. *Agar berilgan nuqtada* $\bar{u}'^2_x = \bar{u}'^2_y = \bar{u}'^2_z$ *bo‘lsa, u holda turbulentlik izotrop va agar bu shart hamma nuqtalarda saqlanib qolsa, u holda turbulentlik bir jinsli ham deb ataladi.*

Reynolds tenglamasi. Yuqorida ta’kidladikki, turbulent harakatning murakkabligi berilgan chegaraviy shartlarda oqimni qat’iy tadqiq etish imkonini bermaydi. Alternativ imkoniyatlardan biri bu haqiqiy holatdan o‘rtalashtirilgan turbulent oqishni qarashga o‘tish mumkinligida, ya’ni qat’iy nostatsionar harakatni kvazistatsionar harakat bilan almashtirishdir. Bu o‘tish O.Reynolds tomonidan tavsiya etilgan edi. Buning ma’nosi quyidagicha: Qovushoq suyuqlikning harakat tenglamasi (Navye-Stoks tenglamasi) va uzviylik tenglamasida parametrlarning haqiqiy qiymatlari ma’lum bir qoidalarga asoslanib ularning o‘rtalashtirilgan qiymatlari bilan almashtiriladi. Natijada hosil bo‘lgan tenglama *Reynolds tenglamasi* deb ataladi. Bu tenglamani keltirib chiqarishni darsliklardan topish mumkin. Bunday almashtirishning eng muhim natijasi bu Navye-Stoks tenglamasining nochiziqliligidan Reynolds tenglamasida *Reynolds kuchlanishi* deb ataluvchi qo‘shimcha had paydo bo‘ladi. Eng sodda tekis parallel oqishlarda bu kuchlanish quyidagicha bo‘ladi:

$$\tau_R = -\rho\overline{u'_x u'_y}\,, \qquad (10.3)$$

bunda hadlar ustidagi chiziqcha o‘rtalashtirish belgisi.

Shunday qilib, o‘rtalashtirilgan turbulent oqimda oddiy qovushoqlik kuchlanishlariga tezlik pulsatsiyasidan bog‘liq kuchlanish qo‘shiladi. Buning fizik ma’nosi quyidagicha: zarrachalarning ko‘chishi hisobiga turbulent oqimning har xil uchastkalari orasida harakat miqdori almashinishi sodir bo‘ladi. Harakat miqdorining uzatilishi qo‘shimcha tormozlanishni yoki suyuqlikning alohida massalari tezlanishini paydo qiladi, ya’ni turbulent kuchlanishlarning paydo bo‘lishiga olib keladi. Ma’lumki, boshlang‘ich tenglamalar sistemasi (to‘rtta tenglama va to‘rtta u_x, u_y, u_z, p noma’lum) yopiq, u holda Reynolds tenglamasida qo‘shimcha hadlarning paydo bo‘lishi bu sistemaning yopiqmas holatiga olib keladi. Natijada «Reynolds tenglamalari sistemasini yopish» muammosi paydo bo‘ladi.

10.2. Turbulentlikning yarim empirik nazariyalari

Turbulentlikning zamonaviy nazariyasi Reynolds kuchlanishini aniqlashning nazariy yo‘l bilan olingan tenglamasiga ega emas. Shuning uchun sistemani yopiq holatga keltirishning yagona yo‘li bu kuchlanishni tezlik komponentalari $\bar{u}_x$, $\bar{u}_z$, $\bar{u}_z$ ning vaqt bo‘yicha o‘rtalashtirilgan qiymatlari orqali bog‘lovchi yarim empirik bog‘lanishlarni qo‘llashdan iborat.

Turbulentlikni dastlab tadqiq qilganlardan biri J.Bussinesk turbulent kuchlanishlarni xuddi Nyutonninig ishqalanish qonuniga o‘xshash had bilan ifodalashni taklif etdi, ya’ni

$$\tau_R = -\rho\overline{u'_x u'_y} = \eta\frac{d\bar{u}}{dy}, \qquad (10.4)$$

bunda η - turbulent qovushoqlik. Fizik qovushoqlikdan farqli turbulent qovushoqlik suyuqlikning fizik xossasini emas, balki pulsatsion harakatning statistik xossasini xarakterlaydi. Shuning uchun bu o‘zgarmas miqdor emas, u ham fazoviy va ham vaqt bo‘yicha o‘zgaruvchan. Yana shunisi muhimki, hatto qattiq chegaradan ozgina uzoqlashilganda turbulent qovushoqlik fizik qovushoqlikdan anchagina oshib ketadi ($\eta >> \mu$).

Umuman olganda, turbulent oqim uchun quyidagini yozish mumkin:

$$\tau = \mu\frac{d\bar{u}}{dy} + \eta\frac{d\bar{u}}{dy}. \qquad (10.5)$$

Ammo Bussineskning bunday tasavvuri masalani yechishga olib kelmaydi, chunki turbulent qovushoqlikni aniqlashning to‘g‘ri usullari mavjud emas.

Bu yo‘nalishda dastlabki muvaffaqiyatga 1925 yilda L.Prandtl erishdi. U aralashtirish (qorishtirish) yo‘li nazariyasini taklif etdi. Bu nazariyaning asosida gazlarning kinetik energiyasiga o‘xshashlik yotadi va qorishtirish yo‘li oqish shartiga bog‘liq deb faraz qilinadi. Prandtl gipotezasiga ko‘ra suyuqlikdagi har bir turbulent mol (uyurma) biror harakat miqdorini uzatadi va u aralashtirish jarajonidagi yo‘lda o‘zgarmasligini saqlab qoladi. Boshqacha aytganda, aralashtirish yo‘li uzunligi, ma’lum o‘lchamda, gazlar kinetik nazariyasidagi molekulaning erkin bosib o‘tgan yo‘li uzunligi bilan bir xil va u o‘z navbatida suyuqlikning boshqa bo‘laklari bilan aralashadi hamda ularga o‘zidagi impulsni uzatadi.

Faraz qilaylik, pulsatsion tezlikning vertikal va gorizontal komponentalari (u'_x va u'_y) bir xil tartibli miqdorlar bo‘lsin. L.Prandtl turbulent kuchlanishni aniqlash uchun quyidagi formulani oldi:

$$\tau_R = \rho l_*^2 \left(\frac{du}{dy} \right)^2, \tag{10.6}$$

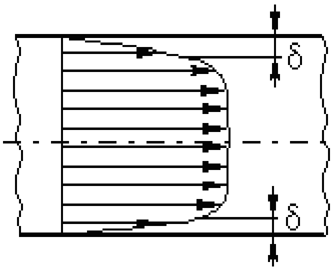
bunda l_* - aralashtirish yo‘li uzunligi; u – o‘rtalashtirilgan tezlik.

Dastlab qaraganda (10.6) Prandtl formulasi (10.4) Bussinesk formulasidan farq qilmaydigandek tuyiladi, aslida esa bunda η o‘rniga yangi l_* parametr kiritilgan. Bunda l_* miqdorni baholash η ga ko‘ra osonroq, xususan l_* parametr kanal o‘lchamidan katta bo‘lishi mumkin emas va qattiq devor yaqinida u nolga intilishi lozim, ya’ni devorda ko‘ndalang harakat yo‘q.

10.3. Quvurlarda turbulent harakat

Quvurlardagi turbulent harakat hisobi muhandislik masalasi hisoblanadi. Bu hisobning eng muhim elementi shu quvur ko‘ndalang kesimi yuzasidagi o‘rtalashtirilgan tezliklar taqsimoti qonunini topishdan iborat. Prandtl bo‘yicha turbulent oqayotgan quvurdagi oqim shartli ravishda ikkita sohaga bo‘linadi (Prandtlning ikki qatlamli modeli): Reynolds kuchlanishini ifodalovchi turbulent yadro; devor yaqinidagi yupqa qovushoq qatlam osti (Prandtl bo‘yicha laminar qatlam osti yoki devorga yopishgan qatlam), bunda turbulentlik hisobga olmaslik darajada kichik, urinma kuchlanish esa Nyuton ishqalanish qonuniga mos fizik qovushoqlikdan kelib chiqadi.

10.2-rasmda doiraviy quvurda turbulent oqimda o‘rtalashtirilgan tezliklar maydoni (tezlik epyurasi) taxminan tasvirlangan. Bunda laminar oqimga nisbatan to‘lalik kengligi kattaligiga (tekis o‘lchamning katta ekanligiga) e’tibor beraylik. Buni shunday izohlash mumkin: turbulent pulsatsiyalar hisobiga zarrachalarning aralashishi natijasida harakat miqdori almashinishi sodir bo‘ladi. Natijada esa ko‘ndalang kesimda tezliklarning tekisroq taqsimlanishi sodir bo‘ladi. Bunda devorning qattiqligi va o‘tkazmovchanligi, zarrachalarning yopishqoqlik xususiyati bevosita devor yaqinidagi unga yopishgan qatlam o‘lchamida oqimga hal qiluvchi ta’sir o‘tkaza olishini ko‘ramiz.



10.2-rasm. Doiraviy quvurda turbulent oqimda o‘rtalashtirilgan tezliklar maydoni (tezlik epyurasi) sxemasi.

Devorda quyidagi shartlar o‘rinli:

$$u_x = u_y = u_z = 0; \quad u'_x = u'_y = u'_z = 0; \quad \rho\overline{u'_x u'_y} = 0.$$

Shunday qilib, qovushoq qatlam osti o‘lchamidagi sohada quyidagini yozamiz:

$$\tau = \tau_0 = \mu \frac{du}{dy}, \tag{10.7}$$

bunda τ_0 - devordagi urinma kuchlanish. Buni integrallasak,

$$\mu u = y\tau_0 + C,$$

bunda *y* – quvur o‘qidan tezlik o‘lchanayotgan nuqtagacha bo‘lgan masofa. Bu yerdan quvur o‘qidagi $y = 0$ nuqtada $u = 0$ va $C = 0$ bo‘lgani uchun

$$u = \frac{\tau_0}{\mu} y. \tag{10.8}$$

$\mu = \nu\rho$ ekanligini e’tiborga olsak, u holda

$$u = \frac{\tau_0}{\rho}\frac{y}{\nu}. \tag{10.9}$$

Bu yerdan kelib chiqadiki, qatlam osti o‘lchamidagi sohada tezlik chiziqli qonun bo‘yicha o‘zgaradi. τ_0 / ρ miqdor tezlik kvadrati o‘lchovida, shuning uchun undan kvadrat ildiz chiqarsak, u holda ushbu

$$\sqrt{\tau_0 / \rho} = u_\tau \tag{10.10}$$

dinamik tezlik yoki *ishqalanish tezligi* deb ataluvchi miqdorga ega bo‘lamiz. Reynolds kuchlanishi uchun chiqarilgan (10.3) ifodadan $|\tau_R| = \rho\overline{u'_x u'_y}$ ekanligi va o‘z navbatida esa

$$\sqrt{|\tau_R| / \rho} = \sqrt{\overline{u'_x u'_y}} = u_\tau \tag{10.11}$$

tenglik kelib chiqadi.

Shunday qilib, dinamik tezlik – bu turbulent pulsatsion harakatning intensivlik o‘lchami ekan, ya’ni harakat miqdorini uzatishning intensivligi o‘lchami ekan. (10.10) ni (10.9) ga qo‘ysak, u holda

$$u = u_\tau^2 \frac{y}{\nu}. \tag{10.12}$$

Qovushoq qarlam osti qalinligini baholaylik. Uning $y = \delta$ chegarasida (10.12) ni quyidagicha yozamiz:

$$\frac{u}{u_\tau} = \frac{u_\tau \delta}{\nu}. \tag{10.13}$$

Bu tenglikning o‘ng tarafidagi ifoda Reynolds soniga o‘xshash.

L.Prandtlning safdoshi Nikuradze izchil tajribalar natijasida bu miqdorning taxminan 11,6 ga tengligini isbotladi. Shunga ko‘ra

$$\delta = 11{,}6\frac{\nu}{u_\tau}. \tag{10.14}$$

Ko‘rinib turibdiki, bu munosabatlardan faqatgina dinamik tezlik ma’lum bo‘lgandagina foydalanish mumkin. Buni topish uchun esa yechilayotgan masalada o‘rtalashtirilgan oqim parametrlari bilan uni bog‘lash lozim bo‘ladi.

Quvurdagi turbulent oqish haqidagi savolga to‘liq javob berish uchun endi oqim yadrosidagi o‘rtalashtirilgan tezliklar taqsimoti qonunini o‘rnataylik. Bu sohada turbulent urinma kuchlanishlar eng muhim ahamiyatga ega, demak (10.6) Prandtl formulasidan foydalanishimiz mumkin. Ammo keyingi hisoblar uchun yana qo‘chimcha farazlar kiritish lozim bo‘ladi. Bu farazlar juda qo‘pol, lekin ular yordamida olingan natijalarning eksperimental ma’lumotlar bilan yaqinligi ularning qaysidir ma’noda to‘g‘ri ekanligini tasdiqlaydi.

Birinchi faraz aralashish yo‘li uzunligi bilan bog‘liq. L.Prandtlga tegishli eng sodda gipotezaga ko‘ra

$$l_* = \kappa y, \tag{10.15}$$

bunda κ - *Karman doimiysi* deb ataluvchi miqdor. Bajarilgan o‘lchashlar shuni ko‘rsatadiki, $\kappa \approx 0{,}4$ ekan (masalan, κ =0,36 …0,435 (Karman tajribasi bo‘yicha); 0,435 (L.Prandtl); 0,44 (G.A.Gurjienko); 0,46 (A.Yu.Umarov); 0,4 (I.Nikuradze); 0,54 (G.V.Jeleznyakov); $0{,}337/d^{0{,}08}$ (F.A.Shevelev, quvur devoridan bog‘liq o‘zgaradi). Keyinroq o‘tkazilgan tadqiqotlar (10.15) bog‘lanish oqim turbulent yadrosining devorga yaqin qismida o‘rinli ekanligini ko‘rsatdi.

Ikkinchi faraz urinma kuchlanishlar haqida. Umuman olganda, bular o‘zgaruvchan miqdorlar. Ammo, agar devorga yetarlicha yaqin soha qaralsa, u holda bunda urinma kuchlanishlar miqdori sezilarsiz o‘zgaradi va uni devordagi urinma kuchlanishga teng deb olish mumkin, ya’ni $\tau_R = \tau_0$.

Bunday farazlar natijasida Pranfl formulasi quyidagicha yoziladi:

$$\tau_0 = \rho\kappa^2 y^2\left(\frac{du}{dy}\right)^2 \quad \text{yoki} \quad u_\tau^2 = \kappa^2 y^2\left(\frac{du}{dy}\right)^2.$$

Bulardan kvadrat ildiz chiqarib, o‘zgaruvchilarni ajratib, $du = \frac{u_\tau}{\kappa}\frac{dy}{y}$ tenglikni va uni integrallab esa ushbu

$$u = \frac{u_\tau}{\kappa} \ln y + C \tag{10.16}$$

ifodani hosil qilamiz, ya'ni oqim yadrosining tezligi logarifmik qonun bo'yucha taqsimlangan. Integrallash o'zgarmasini quvurning o'qi bo'yicha qo'yilgan chegaraviy shartdan topamiz: $y = R$ da $u = u_{\max}$. O'rniga qo'yish va sodda almashtirishlar bilan quyidagiga kelamiz:

$$\frac{u_{\max} - u}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{R}{y}. \tag{10.17}$$

Qat'iy qilib aytganda, (10.17) munosabat yassi quvurlar uchun chiqarilgan, ammo tajribalar shuni ko'rsatdiki, u doiraviy kesimli quvurlar uchun ham o'rinli bo'lib, eksperimentlar natijasida tasdiqlanganki, tezlik taqsimoti urinma kuchlanishlar (qovushoqlik, g'adir-budirlik)ning paydo bo'lishiga olib keluvchi sabablarga bog'liq emas ekan. (10.17) ifoda ba'zan *tezlik defekti qonuni* deb ham ataladi.

Ikki qatlamli modelning qo'llanilishi, ya'ni oqimning yadro va devor yaqinidagi qatlamlarga ajratilishi quvur devorini maxsus klassifikatsiyalashga olib keladi. Agar quvur devori yaqinidagi gatlam qalinligi g'adir-budirlik pillapoyasidan katta bo'lsa, u holda *quvur gidravlik silliq,* aks holda esa u *g'adir-budirli* deb ataladi.

Quyidagi holga alohida e'tibor beraylik. Ta'kidladikki, quvur ko'ndalang kesimi bo'ylab tezlik taqsimoti qonunini olish uchin sodda gipotezalardan foydalanildi: oqim yadrosida urinma kuchlanish o'zgarmas ($\tau_R = \tau_0$) va aralashish yo'li uzunligiga chiziqli bog'liq ($l_* = \kappa y$). Osongina ko'rsatish mumkinki, quvurdagi oqim qaralganda birinchi gipoteza real holat uchun o'rinli emas. Haqiqatan ham, quvurdan uzunligi l, radiusi r ga teng va unga doimiy Δp bosim qaytishi ta'sir qilayotgan silindrik element ajratib olaylik. Bu elementga ta'sir qilayotgan bosim kuchi $\Delta p \pi r^2$ ga va ishqalanish kuchi esa $2\pi r l \tau$ ga teng. Bu kuchlarni tenglashtirsak, u holda

$$\Delta p = \frac{2l}{r} \tau. \tag{10.18}$$

l uzunlikli va R radiusli butun quvur uchun esa

$$\Delta p = \frac{2l}{R} \tau_0, \tag{10.19}$$

bunda τ_0 - devordagi kuchlanish. Ma'lumki, shartga ko'ra $\Delta p = \text{const}$, u holda (10.18) va (10.19) larni tenglashtirib hamda $r = R - y$ ekanligini e'tiborga olib quyidagini yozamiz:

$$\tau = \tau_0\left(1-\frac{y}{R}\right), \tag{10.20}$$

ya’ni urinma kuchlanish kesim bo‘yicha o‘zgarmas emas, balki u chiziqli qonun bilan o‘zgaradi, faqatgina devordan yetarlicha kichik masofa ($\frac{y}{R} << 1$) da $\tau = \tau_0$ deb hisoblash mumkin.

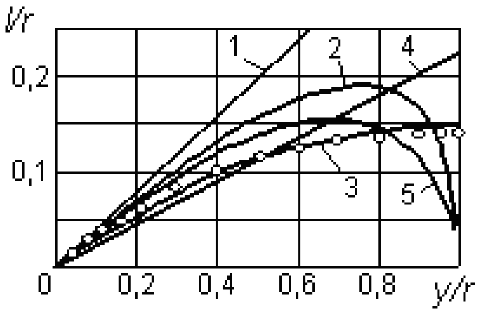
Ikkinchi gipoteza sinovlardan olingan ma’lumotlar bilan mos tushmaydi. 10.3-rasmda doiraviy quvur ko‘ndalang kesimida aralashish yo‘li uzunligining taqsimlanishini xarakterlovchi grafiklar Nikuradze sinovlari ma’lumotlaridan (doirachalar) va har xil mualliflar tomonodan taklif qilingan formulalar bo‘yicha chizilgan.

Rasmdan ko‘rinadiki, Prandtl gipotezasini qo‘llab bo‘lmaydi (*1*- to‘g‘ri chiziq).

Sinovlar va boshqa mualliflar (*2*- Karman sinovlari; *4* – Konakov sinovlari; *5* – Satkevich sinovlari) natijalari grafiklari keskin farq qiladi. Eksperimentga yetarlicha yaqini aralashish yo‘li uzunligini ifodalovchi ushbu

$$l_* = \kappa_1\left[\frac{2y}{R}-\left(\frac{y}{R}\right)^2\right] \tag{10.21}$$

formula yordamida topilgan A.D.Al’tshul natijalari (*3*-egri chiziq) ekan.



10.3-rasm. Doiraviy quvur ko‘ndalang kesimida aralashish yo‘li uzunligining taqsimlanishini xarakterlovchi grafiklar: doirachalar – Nikuradze sinovlari; *1*- Prandtl gipotezasi; *2*- Karman sinovlari; *3* – Al’tshul eksperimenti; *4* – Konakov sinovlari; *5* – Satkevich sinovlari

Oxirgi paytlarda D.N.Vasilyev tomonidan sinovlar natijalari bilan deyarli mos tushuvchi ushbu

$$l_* = \frac{\kappa}{3}\left[1-\left(1-\frac{y}{R}\right)^3\right]R \tag{10.22}$$

bog‘lanish formulasi chiqarildi. Quvur kesimi bo‘ylab urinma kuchlanishlarning chiziqli taqsimotini hisobga olgan holda (10.22) formuladan foydalanish giperbolik tangensga mos keluvchi tezliklar taqsimoti qonuniga olib keladi.

Bu murakkab savolga javob beruvchi boshqa usullar ham mavjud. Masalan, A.D.Al’tshul oqimni ikkita sohaga bo‘lish bu qo‘pol sxemalashtirish, u sun’iy xarakterga ega deb hisoblaydi. Laminar qatlam ostida pulsatsiyalarning bo‘lmasligi haqidagi gipoteza nazariy jihatdan o‘z tasdig‘ini topgan emas. Pulsatsiyalar shu qatlamga ham kirib boradi, ammo u yerda maxsus qonuniyat kelib chiqadi. Oqimning yadrosida fizik qovushoqlik hech qanday ahamiyatga ega emas degan tasdiq juddiy asoslanmagan. Ana shu farazlar asosida A.D.Al’tshul tomonidan quvurdagi turbulent oqimni butunligicha ifodalovchi (uni hech qanday yadro va laminar qatlam ostiga bo‘lmasdan) yarim empirik nazariya yaratilgan. Yarim empirik nazariyalar ko‘p marta jiddiy tanqidga uchragan. Asosiy qarshilig turbulentlikning tuzilish xususiyatlari bilan bog‘liq xulosalarga qaratilgan. Bu nazariyalardan olingan natijalar yetarlicha qo‘pol va taqribiy bo‘lishiga qaramasdan ular soddaligi va qulayligi bilan keng tarqalgan.

Tezliklar taqsimotining darajali qonunlari. Tezliklar taqsimotining logarifmik qonuniyati eksperiment natijalari bilan tasdiqlanadi, ammo sonli hisoblarda ma’lum qiyinchiliklar tug‘diradi. Shuning uchun oxirgi yillarda quyidagi ko‘rinishdagi darajali bog‘lanishlar kengroq tarqalmoqda:

$$\frac{u}{u_{\max}} = \left(\frac{y}{R}\right)^{1/n}. \tag{10.23}$$

Bunday formulalarning bosh yutug‘i ularning soddaligi, kamchiligi esa daraja ko‘rsatgichning Reynolds sonidan bog‘liqligida. Shuning uchun darajali qonunni universal deb qarab bo‘lmaydi. Reynolds sonining **Re** = $4{\cdot}10^3 \ldots 3{\cdot}10^6$ diapazonda o‘zgarishiga daraja ko‘rsatgichining $1/n$ = 1/6…1/10 qiymatlar o‘zgarishi mos keladi.

Shuni ta’kidlas lozimki, logarifmik qonun ham darajali qonun ham oqim simmetriya o‘qidagi tezlikdan olingan hosilaning nolga tenglik shartini qanoatlantirmaydi.

10.4. Quvurlardagi turbulent oqimda yo‘qotilgan bosim (napor)

Shuni eslatish lozimki, quvurlardagi turbulent va laminar oqimlar qonuniyatlarini qarab chiqishdan maqsad bilimlarni ochirish va amaliy maqsadlarda foydalanishni o‘rganish, ya’ni muhandislik hisob jarayonlarini bajarayotganda uzatish quvurlari tizimidagi yo‘qotilgan bosim (napor)ni aniqlashga imkon beruvchi formulalarni chiqarishdan iborat. Laminar oqim uchun bu masala Xagen-Puazeyl formulasi yordamida bajariladi. Turbulent oqimlarning qonuniyatlarini qarayot-ganimizda ma’lum bo‘ladiki, munosabat formulalarini sof nazariy jihatdan chiqarib bo‘lmaydi. Shuning uchun, hozirgacha ma’lum bo‘lgan qoidalarga asoslanib zaruriy formulalarning umumiy tuzilishini chiqarish mumkin. Yuqorida ko‘rsatgan edikki, turbulent urinma kuchlanish

(Reynolds kuchlanishi) uchun ifoda quyidagicha: $\tau = \rho\overline{u'_x u'_y}$. Bu shuni ishonch bilan aytishga imkon beradiki, quvur devorida o‘rtacha tezlik va urinma kuchlanish orasidagi bo‘glanish quyidagicha:

$$\tau_0 = k\rho v^2, \qquad (10.24)$$

bunda k - proporsionallik koeffisienti.

Boshqa tarafdan esa, suyuqlikning l uzunlikka ega silindrik bo‘lagi harakatining o‘zgarmas bosim tushishi ta’siridagi muvozanatlik sharti (10.19) dan

$$\Delta p = \frac{2l}{R}\tau_0 .$$

Bunda radiusni diametr bilan almashtirsak va τ_0 ning ifodasini o‘rniga qo‘ysak, u holda

$$\Delta p = 4k\frac{l}{d}\rho v^2 \qquad (10.25)$$

yoki

$$\Delta p = 8k\frac{l}{d}\frac{\rho v^2}{2}, \qquad (10.26)$$

bunda $\frac{\rho v^2}{2}$-oqimning o‘rtacha tezlikdan kelib chiqadigan dinamik bosimi yoki oqimning birlik hajmidagi kinetik energiyasi.

Ushbu $8k = \lambda$ belgilashni kiritamiz va uni *gidravlik ishqalanish koeffisienti* deb ataymiz, u holda

$$\Delta p = \lambda\frac{l}{d}\frac{\rho v^2}{2} \qquad (10.27)$$

yoki

$$\Delta h = \lambda\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g}. \qquad (10.28)$$

Oxirgi munosabat *Darsi formulasi* deyiladi. Qat’iyroq holda, bu munosabat o‘lchamlarni tahlil qilish usuli bilan olinadi. Shuni ta’kidlaymizki, agar (10.17) Xagen-Puazeyl formulasida 64/**Re** $=\lambda$ belgilash kiritsak, u holda u Darsi formulasiga aylanadi. Shu ma’noda Darsi formulasini ham laminar (λ =64/**Re**) va ham turbulent (λ =0,11(68/**Re**+$\Delta/d)^{1/4}$) oqishlar uchun umumiy deb atash mumkin. Oxirgi holda ishqalanishning gidravlik koeffisiyentini aniqlash masalasi ochiq qoladi, bu masalani faqatgina eksperimental yo‘l bilangina yechish mumkin.

Xulosada ta’kidlaymizki, ushbu bobda qo‘yilgan bosh muammo nazariy jihatdan yechilmaydigan bo‘lsa ham olingan natijalar muhim amaliy ahamiyatga ega bo‘lgan ko‘plab xususi masalalarni yechishga imkon beradi.

Namunaviy masalalar va ularning yechimlari

1-masala. Berilgan: *D*=100 *mm* diametrli quvur; gidravlik qiyalik *i*=0,0025; qovushoqlikning kinematik koeffisienti ν=0,01 *sm*^{2}/*sek*. Laminar qatlam qalinligi δ ni toping.

Yechish. Quyidagini topamiz: $\delta = \frac{23{,}2\nu}{\sqrt{g\,D\,i}} = \frac{23{,}2 \cdot 0{,}01}{\sqrt{981 \cdot 10 \cdot 0{,}0025}} = 0{,}10\,sm$ = 1 *mm*.

Re ning oshishi bilan laminar qatlam qalinligi oshib boradi.

2-masala. Diametri *d*=0,2 m bo‘lgan doiraviy quvurdan *t*=10^{0}C temperaturali suv *u* = 1,5 m/s tezlik bilan oqmoqda. Ana shu oqim sharoiti uchun uning turini aniqlang.

Yechish. Reynolds sonini hisoblash formulasi va berilgan temperaturadagi suvning qovushoqligini hisoblash jadvalidan foydalanib, **Re** = *ud*/υ = 1,5 · 0,2/(1,31·10^{-6}) = 231000 ekanligini aniqlaymiz. Reynolds sonining hisoblangan qiymatiga ko‘ra **Re**>**Re**$_{kp}$=2320 ekanligidan o‘rganilayotgan suyuqlikning oqim sharoiti uchun uning turi turbulent ekan.

Topshiriqlar

1. Gidravlik radiusi *r*=3,0 m bo‘lgan ochiq kanaldan *t*=10^{0}C temperaturali suv *u* = 0,5 m/s tezlik bilan oqmoqda. Ana shu oqim sharoiti uchun uning turini aniqlang.
2. Oqim turini aniqlashning O.Reynolds tajribasini amalda sinab ko‘ring va tegishli asoslangan xulosalar chiqaring.

Sinov savollari

1. Turbulent oqimga oid asosiy tushunchalar va gipotezalarni ayting.
2. Turbulentlik gipotezalarini ayting.
3. Turbulent urinma kuchlanish (Reynolds kuchlanishi) nima?
4. Reynolds tenglamasini ayting.
5. Turbulent oqimda o‘rtalashtirilgan tezlik va tezliklar taqsimotini tushuntiring.
6. Xagen-Puazeyl formulasini ayting.
7. Darsi formulasini ayting.
8. Turbulentlikning yarim empirik nazariyalarini ayting.

1-Ilova
MAYDON NAZARIYASINING ASOSIY MUNOSABATLARI

Ushbu ilovada vektor funksiyalar ustida bajariladigan operatsiyalar va operatorlarning xossalarini tavsiflovchi formulalar keltirilgan. Bu xossalar suyuqlik va gazlarning asosiy modellari tenglamalarini chiqarishda keng qo‘llaniladi.

1. Skalyar va vektor ko‘paytmalarning xossalari

Asosiy munosabatlar:

$$\vec{u}\times\vec{v}=-\vec{v}\times\vec{u}\,;\quad \vec{u}\times\vec{u}\equiv 0\,;$$
$$\vec{u}\times(\vec{v}\pm\vec{w})=(\vec{u}\times\vec{v})\pm(\vec{u}\times\vec{w});$$
$$(\vec{u}\pm\vec{v})\times\vec{w}=(\vec{u}\times\vec{w})\pm(\vec{v}\times\vec{w}).$$

Yakob ayniyati:

$$(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w}+(\vec{v}\times\vec{w})\times\vec{u}+(\vec{w}\times\vec{u})\times\vec{v}\equiv 0.$$

Ikki marta ko‘paytma:

$$(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w}=(\vec{u}\cdot\vec{w})\vec{v}-(\vec{v}\cdot\vec{w})\vec{u}\,.$$

Aralash ko‘paytma:

$$(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}=(\vec{v}\times\vec{w})\cdot\vec{u}=(\vec{w}\times\vec{u})\cdot\vec{v}=-(\vec{v}\times\vec{u})\cdot\vec{w}=-(\vec{w}\times\vec{v})\cdot\vec{u}=-(\vec{u}\times\vec{w})\cdot\vec{v}\,.$$

2. Gradiyentning xossalari

Gradiyent operatori uchun quyidagi munosabatlar o‘rinli
(c = const):

$$\operatorname{grad}(u\pm v)=\operatorname{grad}u\pm\operatorname{grad}v\,;$$
$$\operatorname{grad}(cu)=c\operatorname{grad}u\,;$$
$$\operatorname{grad}(uv)=v\operatorname{grad}u+u\operatorname{grad}v\,;$$
$$\operatorname{grad}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\operatorname{grad}u-u\operatorname{grad}v}{v^2}\,;$$
$$\operatorname{grad}f(u)=f'(u)\operatorname{grad}u\,.$$

Ba’zi hollarda grad belgilash o‘rniga ∇ (nabla) belgilash ham ishlatiladi:

$$\operatorname{div}\vec{u}=\nabla\cdot\vec{u}\;;\quad \operatorname{grad}\varphi=\nabla\varphi.$$

3. Divergensiyaning xossalari

Divergensiya operatori uchun quyidagi munosabatlar o‘rinli (c = const, $\vec{c}$ = const):

$$\operatorname{div}(\vec{u}\pm\vec{v})=\operatorname{div}\vec{u}\pm\operatorname{div}\vec{v}\,;$$
$$\operatorname{div}(c\vec{u})=c\operatorname{div}\vec{u}\,;$$

$$\operatorname{div}(f\,\vec{u}) = f\operatorname{div}\vec{u} + \vec{u}\cdot\operatorname{grad} f\,;$$
$$\operatorname{div}(f\,\vec{c}) = \vec{c}\cdot\operatorname{grad} f\,.$$

3. Rotorning xossalari

Rotor operatori uchun quyidagi munosabatlar o‘rinli:

$$\operatorname{rot}(\vec{u}\pm\vec{v}) = \operatorname{rot}\vec{u} \pm \operatorname{rot}\vec{v}\,;$$
$$\operatorname{rot}(f\,\vec{u}) = f\operatorname{rot}\vec{u} + (\operatorname{grad} f)\times\vec{u}\,;$$
$$\vec{v}\cdot\operatorname{rot}\vec{u} - \vec{u}\cdot\operatorname{rot}\vec{v} = \operatorname{div}(\vec{u}\times\vec{v}).$$

4. Ikkinchi tartibli differensial operatsiyalar

Laplas operatori (laplasian) deb quyidagi differensial operatorga aytiladi (Δ - delta; ∇ - nabla):

$$\Delta f = \nabla^2 f = \operatorname{div}\operatorname{grad} f\,.$$

Aynan nolga keluvchi operatsiyalar:

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} f \equiv 0\,; \qquad \operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{u} \equiv 0\,.$$

Ikkilangan rotorning divergensiya va gradiyent bilan bog‘lanishi:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{u} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{u} - \left(\vec{i}\,\Delta u_x + \vec{j}\Delta u_y + \vec{k}\Delta u_z\right).$$

Vektor funksiya uchun Laplas operatori:

$$\Delta\vec{u} = \vec{i}\,\Delta u_x + \vec{j}\Delta u_y + \vec{k}\Delta u_z = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{u} - \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{u}\,.$$

5. Grinning vektorli teoremalari

Grinning birinchi teoremasi:

$$\int_{\Omega}\left[p(\operatorname{rot}\vec{u}\cdot\operatorname{rot}\vec{v}) - \vec{u}\cdot\operatorname{rot}(p\operatorname{rot}\vec{v})\right]\mathrm{d}\Omega = \int_{\partial\Omega} p\left[(\vec{u}\times\operatorname{rot}\vec{v})\cdot\vec{n}\right]\mathrm{d}S\,.$$

Grinning ikkinchi teoremasi:

$$\int_{\Omega}\left[\vec{v}\cdot\operatorname{rot}(p\operatorname{rot}\vec{u}) - \vec{u}\cdot\operatorname{rot}(p\operatorname{rot}\vec{v})\right]\mathrm{d}\Omega = \int_{\partial\Omega} p\left[(\vec{u}\times\operatorname{rot}\vec{v} - \vec{v}\times\operatorname{rot}\vec{u})\cdot\vec{n}\right]\mathrm{d}S\,.$$

6. Stoksning umumiy teoremasi natijalari

Stoks formulasi (S – bu R^3 fazoda yopiq bo‘lmagan silliq sirt):

$$\int_{S}(\vec{n}\cdot\operatorname{rot}\vec{u})\,\mathrm{d}S = \int_{\partial S}\vec{u}\cdot\mathrm{d}\vec{r}\,.$$

Gauss–Ostrogradskiy formulasi:

$$\int_{\Omega}\operatorname{div}\vec{u}\,\mathrm{d}\Omega = \int_{\partial\Omega}(\vec{u}\cdot\vec{n})\,\mathrm{d}S\,.$$

2-ILOVA
KO‘P QO‘LLANILADIGAN BA’ZI MA’LUMOTLAR

1. Ba’zi ma’lumotlar

1) Suvning zichligi (ρ) va kinematik qovushoqligi (v)

t, °C	**+10**	**+20**	**+30**	**+40**	**+50**
ρ, kg/m^3	999.73	998.23	995.67	992.24	988.07
v, sm^2/s	0.01306	0.01006	0.00805	0.00659	0.00556

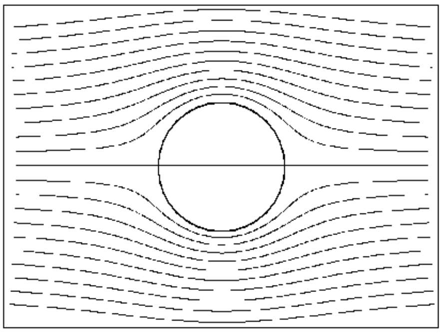
2) Ba’zi amaliy o‘zgarmaslar

Erkin tushish tezlanishi: g = 9.80665 ≈ 10 m/s^2.
Atmosfera bosimi (dengiz sathida): p_{atm} =1 atm = 101325 Pa ≈100000 Pa ≈0.1 MPa.
Universal (molyar) gaz doimiysi: R_g = 287 J/(kg·K).

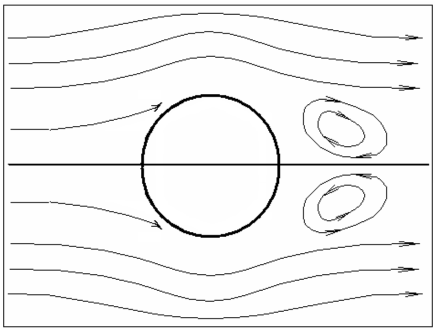
3) Miqdorlarning har hil sistemalardagi o‘lchamlari:

Miqdorlar	**SI**	**Boshqa birliklarga o‘tkazish**
Uzunlik	m	1 m = 100 sm = 1000 mm
Yuza	m^2	1 m^2 = 10^4 sm^2 = 10^6 mm^2
Hajm	m^3	1 m^3 = 10^6 sm^3 = 1000 l
Massa	kg	1 kg = 1000 g
Kuch, og‘irlik	N	10 N ≈ 1 kg·k
Zichlik	kg/m^3	1000 kg/m^3 = 1 g/sm^3
Solishtirma og‘irlik	N/m^3	10^4 N/m^3 = 1 t · k /m^3
Dinamik qovushoqlik	Pa·s	1 Pa·s = 1 N · s / m^2 = 10 Pz
Kinematik qovushoqlik	m^2/s	1 m^2/s = 10^4 sm^2/s =10^4 St (Stoks)
Standart atmosfera bosimi	Pa = =N/m^2	101300 Pa ≈ 1 atm ≈ 1 bar = = 1,33 kg· k/sm^2 = 10,33 m suv ustuni = = 760 mm simob ustuni

2. Suyri jismlar uchun oqim chiziqlaridan namunalar

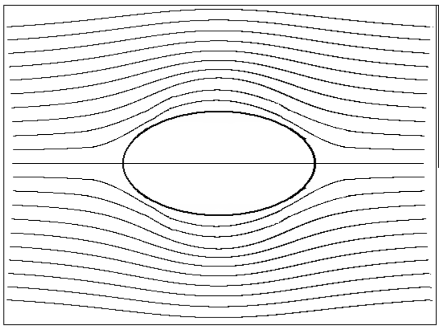


a)

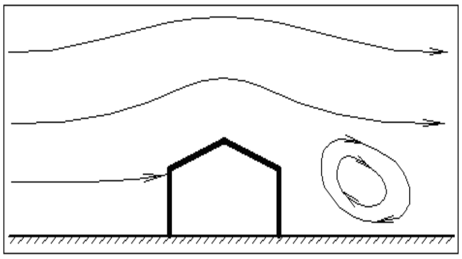


b)

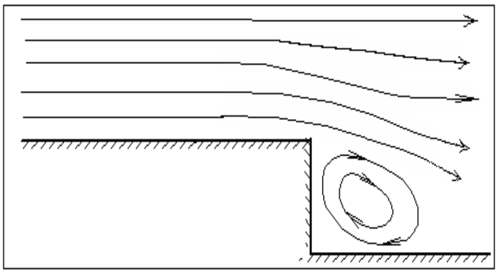
II.1-rasm. Suyuqlik oqimidagi shar (yoki silindr) ning laminar (*a*) va turbulent (*b*) suyriligi sxemasi.



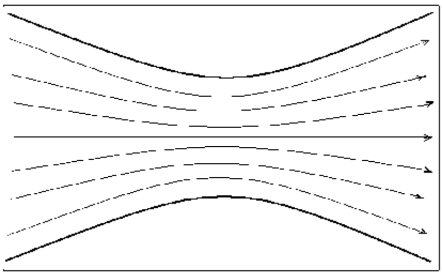
II.2-rasm. Suyuqlik oqimidagi ellipsoid (yoki ellips kesimli silindr) ning laminar suyriligi sxemasi.



II.3-rasm. Havo oqimidagi binoning turbulent suyriligi sxemasi.



II.4-rasm. Suyuqlikning pillapoyadan oqib o‘tishida oqim chiziqlari sxemasi.



II.5-rasm. Quvurning toraygan qismida oqim chiziqlari sxemasi

3. Ba’zi o‘lchamsiz sonlar

Nomi	Bel-gisi	Ta’rifi	Tavsifi
Atvud soni	**A**	$\Delta\rho / (\rho_1 + \rho_2)$	Zichliklar farqining zichliklar yig‘indisiga nisbati
Kapilyarlik	**Cp**	$\mu v / \sigma$	Qovushoqlik kuchining sirt taranglik kuchiga nisbati
Singdiruvchanlik	**Cr**	$\mu \lambda / (\sigma l \rho c_p)$	Diffuziya va sirt tarangligi parametrlarining nisbati
Eyler soni	**Eu**	$P / (\rho v^2)$	Bosimning inertsiya kuchiga nisbati
Frud soni	**Fr**	$v^2 / (l g)$	Kinetik energiyaning tortishish energiyasiga nisbati
Max soni	**M**	v / c_s	Siqiluvchanlik ta’sirini xarakterlovchi miqdor
Nyuton soni	**Nt**	$F / (\rho l^2 v^2)$	Tashqi kuchning inertsiya kuchiga nisbati
Puazeyl soni	**Po**	$L \Delta p / (\mu v)$	Bosim kuchining qovushoqlik kuchiga nisbati
Prandtl soni	**Pr**	$c_p \mu / \lambda$	Qovushoqlik va issiqlik o‘tkazuvchanlik koeffisientlari nisbati
Reynolds soni	**Re**	$lv\rho / \mu$	Inertsiya kuchining qovushoqlik kuchiga nisbati
Stoks soni	**S**	$\mu / (\rho \upsilon l^2)$	Qovushoq so‘nish tezligining tebranish chastotasiga nisbati
Struxal soni	**Sr**	$\upsilon l / v$	Tebranish tezligining konvektiv oqim tezligiga nisbati
Veber soni	**W**	$\rho l v^2 / \sigma$	Inertsiya kuchining sirt taranglik kuchiga nisbati
Grasgof soni	**Gr**	$g\rho^2 l^3 \beta \Delta T/\mu^2$	Ko‘tarish kuchining qovushoqlik kuchiga nisbati

FOYDALANILGAN VA TAVSIYA ETILADIGAN ADABIYOTLAR RO‘YXATI

Asosiy adabiyotlar

1. Абрамович Г.Н. Прикладная газовая динамика – М.: Наука, 1991., I – 600 с., II – 304 с.
2. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. – М.: Мир, 1973. – 758 с.
3. Валландер С.В. Лекции по гидроаэромеханике. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1978. – 295 с.
4. Валуева Е.П., Свиридов В.Г. Введение в механику жидкости: Учебное пособие.– М.: Изд-во МЭИ, 2001.–212 с.
5. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. В 2-х частях. – М.: Физматлит, 1963., II – 612 с.
6. Ландау Л.Д., Ливщиц Е.М. Теоретическая физика: В 10-ти томах. Т. VI. Гидродинамика. - М.: Наука, 1988. - 736 с.
7. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. // Изд. 7-е, испр. - М.: Дрофа, 2003. – 840 с.
8. Мейз Дж. Теория и задачи по механике сплошных сред. – М.: Мир, 1974. – 734 с.
9. Механика жидкости и газа: Учеб. пособие для вузов / В.С.Швыдкий, Ю.Г.Ярошенко, Я.М.Гордон и др.; Под науч. ред. В.С.Швыдкого. – М.: Академкнига, 2003. – 464 с.
10. Седов Л.И. Механика сплошной среды. В 2-х томах.- М.: Наука, 1994. I – 528 с., II – 560 с.
11. Черный Г.Г. Газовая динамика. - М.: Наука, 1988. – 424 с.
12. Эглит М.И. и др. Механика сплошной среды в задачах. В 2-х томах. – М.: Наука, 1996. I – 396 с., II – 394 с.
13. Xudoynazarov X., Abdirashidov A., Yalg‘ashev B.F. Suyuqlik va gaz mexanikasi. Gidrostatika va kinematika. Uslubiy qo‘llanma.– Samarqand: SamDU nashri, 2014.– 159 b.
14. Xudoynazarov X., Abdirashidov A., Yalg‘ashev B.F. Suyuqlik va gaz mexanikasi. Gidrodinamika. Uslubiy qo‘llanma.– Samarqand: SamDU nashri, 2014.– 158 b.
15. Xudoynazarov X., Amirqulova F.A. Tutash muhitlar dinamikasi. Uslubiy qo‘llanma. – Samarqand: SamDU nashri, 2005. – 90 b.
16. Xudoynazarov X., Amirqulova F.A. Tutash muhitlar kinematikasi. Uslubiy qo‘llanma. – Samarqand: SamDU nashri, 2003.–90 b.

Qo‘shimcha adabiyotlar

1. Альбом течений жидкости и газа / Сост. и авт.текст М. Ван-Дайко. – М.: Мир, 1986. – 181 с.
2. Альтшуль А.Д. Гидравлические сопротивления. - М.: Недра, 1970. - 215 с.
3. Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен. – М.: Мир, 1990. – 480 с.
4. Аржаников Н.С., Мальцев В.Н. Аэродинамика. - М.: Изд-во оборонной промышл., 1956. - 483 с.
5. Бай Ши-и. Введение в теорию течения сжимаемой жидкости. – М.: Изд-во ИЛ, 1962. – 410 с.
6. Бай Ши-и. Теория вязкого течения. В 2-х томах: 1. Ламинарные течения; 2.Турбулентные течения. – М.: Изд-во ИЛ, 1962. – 344 с.
7. Гольдштейн Р.В., Городцов В.А. Механика сплошных сред. Часть 1. Основы и классические модели жидкостей. - М.: Наука, Физматлит, 2000. -256 с.
8. Дроздова Ю.А., Эглит М.Э. Механика сплошных сред. Теория и задачи: Учеб. пособие. – М.: ЦентрЛитНефтеГаз, 2010. – 288 с.
9. Ильюшин А.А., Ломакин В.А., Шмаков А.П. Задачи и упражнения по механике сплошной среды.– М.: Изд-во МГУ,1973.– 166 с.
10. Кондранин Т.В., Ткаченко Б.К., Березникова М.В., Евдакимов А.В., Зуев А.П. Применение пакетов прикладных программ при изучении курсов механики жидкости и газа: Учебное пособие. – М.: МФТИ, 2005. – 104 с.
11. Ламб Г. Гидродинамика. – М.-Л.: ГИТТЛ, 1947. – 840 с.
12. Лойцянский Л.Г. Ламинарный пограничный слой. – М.: Наука, 1962.
13. Мирзаев Р.О., Аловуддинов А.Б. Физик катталикларнинг халкаро бирликлар системаси. – Т.: Ўқитувчи, 1983. – 208 б.
14. Монин А.С., Яглом А.М. «Статистическая гидромеханика» ч.1. - М.: Наука, 1968. - 639 с.
15. Овсянников Л.В. Лекции по основам газовой динамики. – М.: Наука, 1981.
16. Павленко В.Г. Основы механики жидкости.– Л.: Судостроение, 1988.– 240 с.
17. Поттер Д. Вычислительные методы в физике.- М.: Мир, 1975. – 392 с.

18. Прандтль Л. Гидроаэромеханика. – Москва–Ижевск: R&C Dynamics, 2000. — 576 с.
19. Рауз Х. Механика жидкости. - М.: Стройиздат, 1967. - 390 с.
20. Ривкин С.Л., Александров А.А. Термодинамические свойства воды и водяного пара: Справочник. - М.: Энергоатомиздат, 1984
21. Рихтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач. – М.: Мир, 1972. – 468 с.
22. Роберт Вихард Поль. Механика, акустика и учение о теплоте. – М.: Мир, 1984. – 480 с.
23. Роуч П.Д. Вычислительная гидродинамика. – М.: Мир. 1980. – 616 с.
24. Самарский А.А., Попов Ю.Г. Разностные методы решения задач газовой динамики. – М.: Наука, 1980. – 352 с.
25. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. – М.: Наука, 1987. – 814 с.
26. Седов Л.И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. – М.: Наука, 1986. – 448 с.
27. Станюкович К.П. Неустановившиеся движения сплошной среды. – М.: Наука, 1971. – 620 с.
28. Степачкова А.А. Задачник по гидрогазовой динамике. – М.: Машиностроение, 1980. – 182 с.
29. Умаров А.Ю. Гидравлика.–Т.: «Ўзбекистон» нашри,2002.– 462 б.
30. Фабер Т.Е. Гидроаэродинамика. – Постмаркет: Физматлит, 2001. – 560 с.
31. Федяевский К.К., Войткунский Я.И., Фаддеев Ю.И. Гидромеханика. - Л.: Судостроение, 1968. - 567 с.
32. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей. В 2-х томах. – М.: Мир, 1991. – 504 с.
33. Фын Я.Ц. Введение в теорию аэроупругости. – М.: ГИФМЛ, 1959.
34. Черноусов А.А. Основы механики жидкости и газа. Конспект лекций. – Уфа: Изд-во УГАТУ, 2010. – 233 с.
35. Чертов А.Г. Физические величины (Терминология, определения, обозначения, размерности, единицы). Справ. пособие. – М.: Высш. шк., 1990. – 335 с.
36. Чжен П. Отрывные течения В 3-х томах.– М.: Мир, 1972-73.
37. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя.- М.: Наука, 1974.- 711 с.
38. Яворский Б.М., Детлаф А.А. Справочник по физике для инженеров и студентов ВУЗов. – М.: Наука, 1978. – 942 с.

39. Abdirashidov A. Suyuqlik va gaz mexanikasi. Dinamika. Uslubiy qo‘llanma. – Samarqand: SamDU nashri, 2006.– 114 b.
40. Abdirashidov A. Suyuqlik va gaz mexanikasi. Kinematika. Uslubiy qo‘llanma.– Samarqand: SamDU nashri, 2005.– 154 b.
41. Abdirashidov A. Suyuqlik va gaz mexanikasidan amaliy mashg‘u-lotlar. Uslubiy qo‘llanma.– Samarqand: SamDU nashri, 2007.– 114 b.
42. Bruce R. Munson, Donald F. Young, Theodore H. Okiishi, Wade W. Huebsch. Fundamentals of Fluid Mechanics. 6th ed. John Wiley & Sons, Inc.,USA, 2009. – 783 p.
43. Evett, Jack B., Cheng Liu. 2500 solved problems in fluid mechanics and hydraulics. USA, The University of North Carolina at Charlotte, 1988. – 807 p.
44. Frank M. White. Fluid Mechanics. 7th ed. New York, 2011. – 885 p.
45. Joseph H. Spurk, Nuri Aksel. Fluid Mechanics. 2th ed. Germany, 2008. – 534 p.
46. Nakayama Y., Boucher R.F. Introduction to Fluid Mechanics. Hongo, Bunkyo-ku, Tokyo, 2000. – 322 p.
47. Robert W. Fox, Alan T. Mcdonald, Philip J. Pritchard. Introduction to Fluid Mechanics. 6th ed. John Wiley & Sons, Inc.,USA, 2004. – 802 p.
48. Sedat Biringen, Chuen-Yen Chow. An introduction to computational fluid mechanics by example. John Wiley & Sons, Inc.,USA, 2011. – 319 p.
49. Zucker R.D., Biblarz O. Fundamentals of Gas Dynamics.- John Wiley & Sons, Inc., 2002. – 493 p.
50. Hisoblash gidrodinamikasining universial paketlari:
    www.fluent.com/software/fluent/
    www.flowvision.ru/
    www.flow3d.com/Parallel.htm
    www.cfd.ru/
    www.sigmaflow.ru
    http://window.edu.ru/resource/637/37637/files/CFDinEducation.pdf
51. Elektron kitoblar manbai:
    http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mechanics/fluid.htm
    http://www.booksgid.com/humanities/1820-lojjcjanskijj-l.g.-mekhanika-zhidkosti.html
    http://www.newlibrary.ru/genre/nauka/fizika/mehanika_zhidkosti_i_gaza/
    http://www.ph4s.ru/book_ph_gidro.html

MUNDARIJA

ОГЛАВЛЕНИЕ

CONTENTS

SUYUQLIK VA GAZ MEXANIKASI

O‘zbekiston Respublikasi Oliy va o‘rta maxsus ta’lim vazirligining 2015 yil 30 maydagi 191-sonli buyrug‘iga asosan o‘quv qo‘llanma sifatida nashrga tavsiya etilgan.

Tuzuvchilar: **X.Xudoynazarov, A.Abdirashidov**

Muharrir: M.Abdurahmonov

Musahhih: G.Xoldorova

Texnik muharrir: S.Axtamova

Nashriyot litzenziyasi AL№153,14.08.2013.
Terishga berildi 15.11.2017 y.
Bosishga ruxsat etildi: 20.10.2017 y.
Ofset bosma qog‘ozi. Qog‘oz bichimi 60x84, 1/16.
«Times New Roman» garniturasi. Ofset bosma usuli.
Hisob-nashriyot t. 19.5. Shartli bosma tabog‘i – 20,0.
Adadi 200 nusxa. Buyurtma.

«Zarafshon» nashriyotida nashrga tayyorlandi.
140100, Samarqand shahri, Amir Temur ko‘chasi, 12-uy.

Tel.: (+99876)235-28-40
E-mail: zar-nashriyot@inbox.uz

ISBN 978-9943-385-97-8

«Mehribon Poligraf Servis» MChJ bosmaxonasida chop etildi.
Samarqand shahar, M.Qoshg‘ariy ko‘chasi, 85-A.