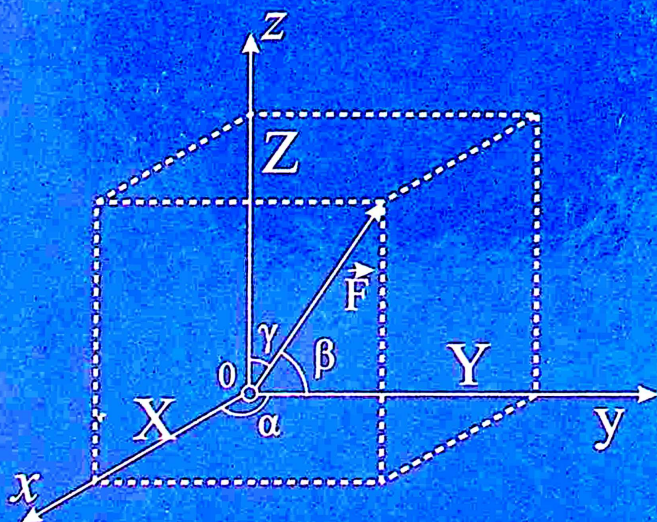


K.KENJAYEV

NAZARIY MEXANIKA
MISOL VA MASALALARDA

I-qism

STATIKA



Toshkent - 2020

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIV VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI**

**TOSHKENT ARHITEKTURA QURILISH
INSTITUTI**

K.KENJAYEV

**NAZARIY MEXANIKA
MISOL VA MASALALARDA**

I-qism

STATIKA

**“Shafolat nur fayz”
Toshkent 2020**

UO'K 531.1(075.8)

KBK 22.21ya73

K 37

Kenjayev, K.

Nazariy mexanika misol va masalalarda. 1-qism. Statika [Matn] : o'quv qo'llanma / K.Kenjayev. - Toshkent : Shafolat Nur Fayz, 2020. - 264 b.

O'quv qo'llanmada "Nazariy mexanika" fani "Statika" bo'limining kesishuvchi kuchlar, kuchning momenti va juft kuchlar nazariyasi, tekislikda va fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar tizimi, parallel kuchlar tizimi, og'irlik markazi mavzulari bo'yicha nazariy ma'lumotlar, masalalar yechish tartibi, masalalar yechish namunalari va mustaqil yechish uchun keyslar, muammolar, ko'p variantli masalalar taqdim etilgan.

O'quv qo'llanmani tuzishda: Engineering mechanics statics. J.L.Meriam, L.G.Kraige 2007, Statics and Dynamics. R.C. Hibbeler 2013, Theoretical mechanics. Vasile Szolga 2010, Engineering mechanics. R.S. Khurmi 2011, xorijiy adabiyotlardan foydalanildi.

O'quv qo'llanma TAQI o'quv ishlari bo'yicha prorektori tomonidan 2015 yil 26 iyulda tasdiqlangan «Nazariy mexanika» fani bo'yicha ishchi o'quv dasturi asosida tuzilgan bo'lib, «Qurilish» yo'nalishida ta'lim oluvchi talabalar uchun «Nazariy mexanika» fanidan yordamchi qo'llanma sifatida tavsiya etiladi.

Taqrizchilar: **A.T. Mamadalimov** –f.-m.f.d. professor Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy Universiteti.

Q.S. Abdurashidov – t.f.d, professor Toshkent arxitektura - qurilish instituti.

ISBN 978-9943-6740-3-5

O'quv qo'llanma Toshkent arxitektura - qurilish instituti ilmiy kengashining 2016 yil – 5 iyuldagi qarori asosida (bayonnoma № 9) chop etishga tavsiya etiladi.

© **Kenjayev K.**

© "Shafolat nur fayz" 2020



MUNDARIJA

SO‘Z BOSHI.....8

I bob KIRISH..... 9

1-§ Umumiy mulohazalar.....9

2-§ Vektor. Vektorlar bilan amallar..... 14

II bob Qattiq jism statikasining asosiy tushunchalari va aksiomalar..... 19

3-§ Statikaning asosiy tushunchalari..... 19

4-§ Statikaning asosiy aksiomalari.....22

5-§ Bog‘lanish va bog‘lanish reaksiyalari.....26

III bob KESISHUVCHI KUHLAR SISTEMASI..... 32

6-§ Bir nuqtada kesishuvchi kuchlar sistemasining ta‘rifi.... 32

7-§ Bir nuqtada kesishuvchi kuchlar sistemasining teng ta‘sir etuvchisini geometrik usulda aniqlash.....32

8-§ Uch kuchning muvozanatiga oid teorema.35

9-§ Bir nuqtada kesishuvchi kuchlar sistemi muvozanatining geometrik sharti.....35

10-§ Kesishuvchi kuchlar sistemasining geometrik muvozanat shartiga oid masalalarni yechish uchun umumiy ko‘rsatmalar..... 38

11-§ Kesishuvchi kuchlar sistemasining geometrik muvozanat shartiga oid masalalar.....39

12-§ Mustaqil o‘rganish uchun talabalarga tavsiya etiladigan muammolar..... 44

13-§ Kuchning o‘qdagi va tekislikdagi proyeksiyasi..... 46

14-§ Bir nuqtada kesishuvchi kuchlar sistemasining teng ta‘sir etuvchisini analitik usulda aniqlash. 49

15-§ Bir nuqtada kesishuvchi kuchlar sistemi muvozanatining analitik sharti..... 50

16-§ Bir nuqtada kesishuvchi kuchlar sistemi muvozanatining analitik shartiga oid masalalarni yechish uchun uslubiy ko‘rsatmalar..... 52

17-§ Bir nuqtada kesishuvchi kuchlar sistemi muvozanatining analitik shartiga oid masalalar..... 53

18-§ Mustaqil o‘rganish uchun talabalarga tavsiya etiladigan muammolar..... 57

IV bob	MOMENTLAR VA TEKISLIKDAGI JUFT KUCHLAR NAZARIYASI.....	60
19-§	Kuchning nuqtaga nisbatan algebraik momenti.....	60
20-§	Juft kuch. Juft kuch momenti.	61
21-§	Bir tekislikda yotuvchi juft kuchlarning ekvivalentligi haqida teorema.....	62
22-§	Bir tekislikda yotuvchi juft kuchlarni qo'shish.....	64
23-§	Bir tekislikda yotuvchi juft kuchlarni qo'shish va ularning muvozanat sharti.....	65
V bob	TEKISLIKDAGI KUCHLAR SISTEMASI	66
24-§	Kuchni o'ziga parallel ko'chirishga oid lemma.....	66
25-§	Tekislikdagi kuchlar sistemasini bir markazga keltirish. Tekislikdagi kuchlar sistemasining bosh vektori va bosh momenti.....	67
26-§	Tekislikdagi kuchlar sistemasini sodda ko'rinishga keltirish.	68
27-§	Tekislikdagi kuchlar sistemasini teng ta'sir etuvchisining momenti haqida Varin'on teoremasi.....	70
28-§	Tekislikdagi kuchlar sistemasining muvozanat shartlari.....	71
29-§	Tekislikdagi kuchlar sistemasining muvozanatiga oid masalalarni yechish uchun uslubiy ko'rsatmalar.	74
30-§	Tekislikdagi kuchlar sistemasining muvozanatiga oid masalalar.....	75
31-§	Mustaqil o'rganish uchun talabalarga tavsiya etiladigan muammolar.....	83
32-§	Tekislikdagi parallel kuchlar sistemasining muvozanat shartlari.....	87
33-§	Taqsimlangan kuchlar.	89
34-§	Statik aniq va aniqmas masalalar.....	92
35-§	Tekislikdagi parallel kuchlar sistemasining muvozanatiga oid masalalarni yechish uchun uslubiy ko'rsatmalar.....	94
36-§	Tekislikdagi kuchlar sistemasining muvozanatiga oid masalalar.....	95

37-§	Mustaqil o‘rganish uchun talabalarga tavsiya etiladigan muammolar.....	98
38-§	Bir tekislikda yotuvchi bir necha jismdan tashkil topgan sistemaning muvozanatiga oid masalalarni yechish uchun uslubiy ko‘rsatmalar.....	100
39-§	Bir tekislikda yotuvchi bir necha jismdan tashkil topgan sistemaning muvozanatiga oid masalalar.....	101
40-§	Mustaqil yechish uchun talabalarga tavsiya etiladigan muammolar.....	108
41-§	Ferma haqida tushuncha.	111
42-§	Ferma sterjenlaridagi zo‘riqishlarni tugunlarni kesish usuli bilan aniqlash.....	116
43-§	Ferma sterjenlaridagi zo‘riqishlarni Ritter usulida aniqlash.....	118
44-§	Tekis fermani hisoblashga oid masalalar.....	119
45-§	Mustaqil o‘rganish uchun talabalarga tavsiya etiladigan muammolar.....	134
46-§	Talabalar tomonidan mustaqil bajariladigan hisob chizma ishlari variantlari.....	136
VI bob	FAZODAGI KUCHLAR SISTEMASI.....	153
47-§	Kuchning nuqtaga nisbatan momenti vektori.....	153
48-§	Kuchning o‘qqa nisbatan momenti.....	154
49-§	Kuchning o‘qqa nisbatan momenti bilan shu o‘qdagi nuqtaga nisbatan momenti orasidagi bog‘lanish.....	156
50-§	Kuchning koordinata o‘qlariga nisbatan momentlarini analitik usulda aniqlash.....	157
51-§	Juft kuch momentining vektori.....	158
52-§	Juft kuchni parallel tekislikka ko‘chirish haqida teorema.....	160
53-§	Fazodagi juft kuchlarni qo‘shish va kuchlarning muvozanat sharti.....	162
54-§	Fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasini bir markazga keltirish.....	164
55-§	Fazodagi kuchlar sistemasini bosh vektori va bosh momenti.....	167

56-§	Fazodagi kuchlar sistemasini juft yoki teng ta'sir etuvchi kuchga keltirish	168
57-§	Fazodagi kuchlar sistemasini dinamik vintga keltirish....	171
58-§	Markaziy o'q tenglamasi.	174
59-§	Fazodagi kuchlar sistemasini teng ta'sir etuvchisining momenti haqida Varin'on teoremasi.	175
60-§	Fazodagi kuchlar sistemasining muvozanat shartlari.....	177
61-§	Fazoda bir nuqtada kesishadigan kuchlar sistemasining muvozanatiga doir masalalarni yechish uchun uslubiy ko'rsatmalar.	182
62-§	Fazoda bir nuqtada kesishadigan kuchlar sistemasining muvozanatiga doir masalalar.	183
63-§	Mustaqil o'rganish uchun talabalarga tavsiya etiladigan muammolar.....	186
64-§	Fazodagi kuchlar sistemasini sodda ko'rinishga keltirishga oid masalalarni yechish uchun uslubiy ko'rsatmalar.....	189
65-§	Fazodagi kuchlar sistemasini sodda ko'rinishga keltirishga oid masalalar.	191
66-§	Mustaqil o'rganish uchun talabalarga tavsiya etiladigan muammolar.....	196
67-§	Fazodagi kuchlar sistemasining muvozanatiga oid masalalarni yechish uchun uslubiy ko'rsatmalar.....	198
68-§	Fazodagi kuchlar sistemasining muvozanatiga oid masalalar.	199
69-§	Mustaqil o'rganish uchun talabalarga tavsiya etiladigan muammolar.....	205
70-§	Talabalar tomonidan mustaqil bajariladigan hisob chizma ishlari variantlari.....	207
VII bob	PARALLEL KUHLAR MARKAZI VA OG'IRLIK MARKAZI.....	219
71-§	Parallel kuchlar markazi, uning radius vektorini hamda koordinatalarini aniqlash.....	219
72-§	Qattiq jismning og'irlik markazi.	222
73-§	Qattiq jismning og'irlik markazini aniqlash usullari.....	224
74-§	Ba'zi bir jismlarning og'irlik markazi.	229

75-§	Qattiq jismlarning og'irlik markazini aniqlash usullariga oid masalalarni yechish uchun uslubiy ko'rsatmalar.....	234
76-§	Qattiq jismning og'irlik markazini aniqlashga doir masalalar.	238
77-§	Mustaqil o'rganish uchun talabalarga tavsiya etiladigan muammolar.....	251
78-§	Talabalar tomonidan mustaqil bajariladigan hisob chizma ishlari variantlari.	256
	FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR	261

SO‘Z BOSHI

Nazariy mexanika fani fundamental fan bo‘lib, uning usullari ko‘p sohalar bo‘yicha muhandislik masalalarini yechishda keng qo‘llanilib kelinadi. Shu sababli, boshqa boshqa fundamental fanlar kabi mazkur fan oliy texnika o‘quv yurtlarida, shu jumladan barcha rivojlangan xorijiy mamlakatlar: AQSH, Buyuk Britaniya, Germaniya, Italiya kabi davlatlarda barcha muhandislik yo‘nalishlarida keng o‘rganiladi.

“Nazariy mexanika” fanining Statika bo‘limi “Qurilish” yo‘nalishida ta‘lim oluvchi talabalar uchun “Materiallar qarshiligi”, “Qurilish mexanikasi” va boshqa qator maxsus fanlarni o‘rganishda nazariy va amaliy asos bo‘lib xizmat qiladi.

“Nazariy mexanika” fanini chuqurroq o‘rganishda bo‘lajak mutaxassislar uning nazariy asoslarini mukammal o‘rganish bilan bir qatorda, olgan bilimini amalda, kasbiy faoliyatida yechishi lozim bo‘lgan masalalarni har tomonlama texnik – iqtisodiy va konstruktiv tahlil qilish yo‘li bilan yechish, loyihalash, qurish va undan foydalanishga safarbar eta olish malakalariga ega bo‘lishi lozim. Bu hol talabalardan fan bo‘yicha masalalar va o‘quv dasturida o‘rin olgan hisob chizma ishlarini mustaqil yechish malakalariga ega bo‘lishni talab etadi.

Ushbu o‘quv qo‘llanma talabalarda “Nazariy mexanika” fanini chuqurroq o‘rganishga qiziqish o‘yg‘otish maqsadida tuzilayotgan bo‘lib, unda mavzular bo‘yicha qisqa nazariy ma‘lumotlar, masalalar yechish tartibi, masalalar yechish namunalari va mustaqil yechish uchun keyslar, muammolar, hisob chizma ishlari mavzulari bo‘yicha ko‘p variantli masalalar taqdim etilgan.

I-BOB. KIRISH

1-§. Umumiy mulohazalar

Moddiy jismlarning o'zaro ta'siri va mexanik harakati o'rganiladigan bir qator fanlar mexanika nomi bilan bog'liqdir. Vaqt o'tishi bilan moddiy jismlarning bir-birlariga nisbatan ko'chishiga *mexanik harakat* deyiladi. Mashina va mexanizmlar harakati o'rganiladigan amaliy mexanika, suyuqliklar va ularga botirilgan jismlarning harakati o'rganiladigan gidromexanika, gazsimon jismlarning harakati va qattiq jismlarning gazsimon muhitdagi harakati o'rganiladigan aeromexanika, tirik organizmlarning mexanik xossalari va ularda sodir bo'ladigan mexanik hodisalar o'rganiladigan biomexanika kabi fanlar ana shular jumlasidandir. Turli inshootlar, mashina va mexanizm qismlarini tadqiq qilish hamda loyihalashning umumiy usullari o'rganiladigan texnika fanlari materiallar qarshilagi qurilish mexanikasi, mashina detallari ham mexanikaga taalluqlidir.

Nazariy mexanika moddiy jismlarning bir-biriga ta'siri va mexanik harakatning umumiy qonunlari haqidagi fandır.

Mexanikada moddiy jismlar o'zaro ta'sirining miqdoriy o'lchoviga *kuch* deyiladi. Yaqin vaqtgacha nazariy mexanikada asosan planetalarning o'zaro tortilish kuchi, muhit (tuproq, havo yoki suv)ning qarshilik kuchi, suyuqlik yoki gazning bosimi, jismlarning bir-biriga tegib turadigan sirtida hosil bo'ladigan kuchlar kabi mexanik tabiatga ega bo'lgan kuchlar ta'siridagi harakatlar tekshirilardi. Hozir yadro energetikasi, kosmonavtika va elektronikaning rivojlanishi natijasida mexanikada turlicha fizik tabiatga xos: elektromagnit, issiqlik, yorug'lik va kimyoviy xususiyatlarga ega bo'lgan kuchlar ta'siridagi sistemalarning harakatini o'rganishga oid masalalar qo'yilmoqda. Masalan, elektr dvigateli yakorining harakatini o'rganishga unga elektr maydonining ta'sir kuchini e'tiborga olish kerak; tovushdan tez uchuvchi samalyotlarning harakati tekshirilayotganda, aerodinamik kuchlardan tashqari, havo bilan samalyot qismlari orasida issiqlik almashishi natijasida hosil bo'ladigan gazlar molekularining dissotsiatsiya kuchlarini ham hisobga olish kerak; Yersun'iy yoldoshlarining harakati o'rganilayotganda Yerning tortish kuchi va aerodinamik kuchlardan tashqari, Yer magnit maydonining ta'sir kuchi va yoldosh bilan kosmosdagi zaryadlangan zarralarning

o'zaro ta'sir kuchlarini hisobga olish kerak; reaktiv dvigatelning tortish kuchini hisoblashda yonish protsessida vujudga keladigan ximiyaviy va termodinamik hodisalarni e'tiborga olish kerak. Mexanikada mazkur kuchlarning miqdoriy o'zgarishigina asosiy ahamiyatga ega bo'lib, ularning fizik tabiati o'rganilmaydi.

Shunday qilib, hozirgi zamon mexanikasi fizika, matematika, astronomiya, kimyo, biologiya kabi fanlar bilan chambarchas bog'langan holda rivojlanmoqda. Shuningdek, texnikaning barcha sohalarida, ayniqsa, mashinasozlik, asbobsizlik, qurilish, avtomatika, kibernetika va kosmonavtikaning rivojlanishida nazariy mexanika alohida o'rinni egallaydi.

Jismning barcha xossalarini hisobga olgan holda sodir bo'ladigan mexanik hodisalarni nazariy va amaliy jihatdan tekshirish ancha murakkabdir. Shu sababli masalaning qanday qo'yilishiga qarab, mexanikada jismning ayrim xususiyatlari e'tiborga olinmaydi. Masalan, jismning deformatsiyalanishi e'tiborga olmay, absolyut qattiq jism tushunchasi kiritiladi. Huddi shuningdek, moddiy nuqta, ideal suyuqlik kabi tushunchalar ham soddalashtirilgan modelga taalluqlidir. Mexanikada bunday abstrakt usulda keng foydalaniladi.

Nazariy mexanikaning asosiy qonunlari ham kuzatish va praktika natijalariga asoslanadi.

Hozirgi zamon texnikasi ko'pgina muammolarni maydonga tashladi. Suvda kata (100 m/s va undan katta) tezlikda harakat qiladigan jismlarga qarshilik kuchini kamaytirish; katta bosim va temperaturalar ta'siridagi materiallar xususiyatini aniqlash; zilzilaga bardosh beradigan inshootlar qurish, Yerning sun'iy yo'ldoshlarini, planetalararo kosmik kemalarni uchirish kabi muammolar ana shular jumlasidandir. Bu muammolarni yechishda texnika fanlari qatorida nazariy mexanika ham munosib o'rinni egallaydi.

Biz o'rganadigan nazariy mezanika Galiley – Nyuton qonunlariga asoslangan bo'lib, odatda, *klassik mexanika* deb ataladi. Klassik mexanikada vaqt va fazo jismlarning harakatiga bog'liq emas deb qaraladi. Shuningdek, jismning massasi uning tezligiga bog'liq bo'lmagan o'zgarmas miqdor deb qaraladi.

XIX asrning oxiri va XX asrning boshida fizikada o'tkazilgan tadqiqotlar klassik mexanika qonunlarini yorug'lik tezligi (300000

km/s) ga yaqin tezlik bilan harakatlanuvchi mikrozaralar va jismlar uchun qo'llash mumkin emasligini ko'rsatdi.

XX asr boshida A. Eynshteynning (1879-1955) nisbiylik nazariyasiga asoslangan relyativistik mexanika bunyodga keldi. Nisbiylik nazariyasi yordamida fazo bilan vaqt hamda massa bilan energiya orasida qonuniy bog'lanishlar oydinlashtirildi va klassik mexanika qonunlari o'rinli bo'ladigan chegara aniqlanadi. Hozirgi zamon texnikasida ko'pchilik hollarda uchraydigan tezliklar yorug'lik tezligidan ancha kichik bo'lgani uchun klassik mexanika qonunlaridan hayotda uchraydigan real masalalarni hal qilishda samarali foydalanish mumkin. Mexanikaga doir dastlabki ilmiy asarlarni qadimgi yunon olimlari yozganlar. Jumladan, eramizdan ilgari 287-212 yillarda yashagan Arximed jismlarning muvozanati va og'irlik markazini aniqlash, shuningdek, suvda suzadigan jismlarning muvozanatiga oid nazariyalarni ishlab chiqqan.

Mexanikaning rivojlanishida Sharq olimlari olib brogan ilmiy ishlar alohida o'rinni egallaydi. Abu Rayhon Beruniy (973-1048), Abu Ali ibn Sino (980-1037), Ulug'bek Muhammad Tarag'ay (1394- 1449) kabi mutafakkirlar ana shular jumlasidandir. Ular matematika va astronomiya bo'yicha qator ilmiy ishlarning mualliflari bo'lishlari bilan birga mexanika ham munosib hissalarini qo'shganlar. Beruniy va Ibn Sino asarlarida umuman harakat (shu jumladan, mexanik harakat) hamda planetalarning harakati haqida ajoyib fikrlar bayon etilgan. Ibn Sino ta'rifiga ko'ra, jism holatining o'zgarib borishi harakatni ifodalaydi; jismlarning fazodagi harakati (mexanik harakat) esa bu harakatning xususiy holidir.

Ulug'bek planetalar harakatini, jumladan, Quyosh va Oyning harakatini kata aniqlikda hisoblay olgan. Mexanika fanining rivojlanishida polyak astronomi N. Kopernik (1473- 1543) tomonidan kashf qilingan galiotsentrik sistema alohida ahamiyatga ega. Kopernik o'z sistemasida Yer ham boshqa sayyoralardek Quyosh atrofida va o'z o'qi atrofida aylanadi, degan fikrni ilgari surgan.

Italiyalik olim Galileo Galiley (1564-1642) inertsiya qonunini kashf etgan. Bundan tashqari, Galiley o'zi o'tkazgan tajribalar asosida jismning og'ma tekislikdagi harakati, gorizontga ma'lum burchak ostida otilgan jismning harakati, erkin tushish haqidagi qonunlarni kashf qilgan.

Mexanikaning asosiy qonunlarini mashxur ingliz olimi Issak Nyuton (1643-1727) 1687 yilda kashf qilgan. Nyutonning butun olam tortilish qonuni mexanikada alohida o'rin egallaydi. Nyuton qonunlari hozirgi kunda ham o'z aktualligini yo'qotmagan.

Rus akademigi L. Eylerning (1707-1783) mexanikaga oid kashfiyotlari 1736 yili bosmadan chiqqan ikki tomlik «Analitik mexanika» kitobida bayon qilingan.

Fransuz olimi J. Dalambening (1717-1783) 1743 yilda nashr qilingan «Dinamika bo'yicha traktat» asarida bog'lanishdagi mexanik sistemalar harakati haqidagi masalalarni uning nomi bilan ataluvchi prinsip asosida yechish metodikasi ko'rsatilgan. Fransuz olimi J.L. Lagranjning (1736-1813) «Analitik mexanika» asari (1788) nazariy mexanika taraqqiyotida alohida o'rin egallaydi.

Bu asarda mexanika masalalariga mumkin bo'lgan ko'chish prinsipini qo'llash bayon etilgan.

M.V. Lomonosov (1711-1765) fizika-matematika fanlari, jumladan, mexanika fani sohasida olib borgan ajoyib tekshirishlari bilan mashxurdir. Lomonosov materiya bo'lmasa, harakat ham bo'lmasligini ta'kidlab materiya va harakatning saqlanish qonunini kashf etgan. Mexanika fanining rivojlanishiga katta hissa qo'shgan rus olimlaridan M.V. Ostrogradskiy (1801-1862) analitik mexanika sohasidagi ilmiy ishlari bilan shuhrat qozongan; P.L.Chebishev (1821-1891) mashina va mexanizmlar nazariyasiga asos solgan; S.V. Kovalevskaya (1850-1891) qo'zg'almas nuqta atrofida aylanuvchi qattiq jism tenglamalarini integrallash sohasidagi ilmiy ishlari bilan nom chiqargan; N.Y.Jukovskiy (1847-1921) aerodinamikaning rivojlanishida muhim ahamiyatga ega bo'lgan qator asarlarning muallifi, «rus aviatsiyasining otasidir» (V.I.Lenin); K.E.Tsiolkovskiy (1857-1935) raketa nazariyasi va suyuq yonilg'ida ishlaydigan raketa dvigateli nazariyasiga asos solgan; I.V.Meshcherskiy (1859-1935) asarlari o'zgaruvchan massali jismlarning harakati, reaktiv texnika va osmon mexanikasining qator muammolarini hal qilishda ilmiy asos bo'ldi; S.A.Chapligin (1869-1942) aerodinamika hamda bog'lanishdagi mexanik sistemalarning harakatini tekshirish sohasidagi ilmiy ishlari bilan mashxurdir; A.N. Krilov (1863-1945) kemalarning ustivor harakativa tashqi ballistikaga oid muhim ilmiy ishlari bilan tanilgan; S.P.Korolev (1906-1966) rahbarligida ballistik va

geofizik raketalar, Yerning sun'iy yo'ldoshlari, «Vostok», «Vosxod» kosmik kemalar yaratilgan; M.B.Keldishning (1911-1978) aerogidrodinamika, tebranishlar nazariyasi va kosmonavtika sohalaridagi tadqiqotlari alohida ahamiyatga ega; A.A.Ilyushin (1911 yilda tug'ilgan) elastiklik va plastiklik nazariyasi, aerogidrodinamika, polimerlar mexanikasi va uzoq muddatli mustahkamlik nazariyasiga oid ilmiy ishlari bilan mashxurdir; A.Y. Ishlinskiy (1913 yilda tug'ilgan) deformatsiyalanuvchi muhit mexanikasi va giroskopik asboblarga to'g'risida bir necha nazariya yaratdi.

Mexanika fanining rivojlanishiga ulkan xissa qo'shgan O'zbek olimlaridan M.T.O'rozboyev (1906-1972) ip mexanikasi va inshootlarning seysmik mustahkamligi nazariyasiga oid qator ilmiy ishlarning muallifidir; X.A.Raxmatullin (1909-1988) inshootlar zaminini hisoblashda va ularni loyihalashda, kema zirxi mustahkamligini aniqlashda qo'llaniladigan «Raxmatullin to'lqinlari» nomini olgan to'lqinlar nazariyasini kashf qildi; V.Q.Qobulovning tutash muhitlar mexanikasi masalalarini algoritmlash, avtomatik boshqarish Sistemalarini yaratish sohasidagi ilmiy ishlari muhim amaliy ahamiyatga ega. Hozirgi zamon mexanikasining tez sur'atlar bilan taraqqiy etishi, texnikani rivojlantirishda ijodiy ishlashga qodir bo'lgan yuqori malakali muhandis xodimlarga muhtojlikni oshiradi. Hozirgi zamon muhandislari o'ta murakkab hisob ishlarini bajarishlari darakor, masalan: inshoot muvozanatlariga oid) imorat, ko'priklar va boshqalar), mashina va mexanizmlar harakatiga oid hisob-kitob ishlari. Bunday masalalarni yechishga faqat "Nazariy mexanika" fani qonun-qoidalarini chuqur o'rgangan muhandislarigina qodirdirlar.

"Nazariy mexanika" fani uch qisimdan iborat: *statika*, *kinematika* va *dinamika*. Statika moddiy jismlar muvozaanatiga oid qonunlarni o'rganadi. Kinematika jism harakati qonunlarini bu harakatni vujudga keltiruvchi yoki o'zgartiruvchi sabab bog'lamay tekshiradi. Bundan ko'rinadiki, kinematika jism harakatini faqat geometrik nuqtayi nazardan tekshiradi, ya'nib u harakatni vujudga keltiruvchi sababga e'tabor bermaydi. Shuning uchun kinematikani to'rt o'lchovli geometriya deb atash mumkin. Bunda uchta fazoviy o'zgaruvchilarga *vaqt* ham qo'shiladi. Dinamika jismlar harakatini bu harakatni vujudga keltiruvchi, o'zgartiruvchi sababga bog'lab tekshiradi.

2-§. Vektor. Vektorlar bilan amallar

Fanda kattaliklarning ikki xili mavjud: skalyar kattaliklar, vektor kattaliklar. Skalyar kattaliklar mazkur kattaliklarning mos o'lovch birliklari bilan munosabatlarini ifodalovchi aniq sonlar orqali, ya'ni mos shkala (scala) bilan solishtirish yo'li orqali aniqlanadi. Skalyar kattaliklarga massa, temperatura, energiya, hajm, yuza va boshqa kattaliklarni misol qilib ko'rsatish mumkin.

Vektor yo'nalishga ega bo'lgan to'g'ri chiziq kesmasi bo'lib, uzunligi va fazodagi yo'nalishi bilan aniqlanadi. Vektorning uzunligi mos kattalik uchun tanlab olingan masshtab orqali aniqlanadi, bunda kesma boshi kesmaning qo'yilish nuqtasi albatta e'tiborga olinadi.

Vektor kattaliklarga tezlik, tezlanish, kuch va h.k. larni keltirish mumkin (vehere- tortib olish yoki tortish so'zidan olingan).

Vektor, qanday fizik kattalikni ifodalashiga bog'liq holda, erkin, siljuvchi va qo'zg'almas bo'lishi mumkin. Erkin vektor fazoning istalgan nuqtasiga qo'yiladi. Siljuvchi vektor ta'sir chizig'ining istalgan nuqtasiga qo'yiladi. Qo'zg'almas vektor, u ifodalovchi fizik kattalik xususiyatiga bog'liq holda, aniq qo'yilish nuqtasiga ega bo'ladi. Vektor kattalik quydagicha belgilanadi:

$$\text{Vektor } AB = \overline{AB}.$$

AB kesmaning uzunligi uning modulini ifodalaydi:

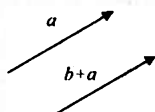
$$\overline{AB} \text{ vektor moduli} = |AB| = AB$$

Adabiyotlarda vektor kattalik qalin shriftda ham yoziladi:

$$\text{Vektor } a = \vec{a} = \mathbf{a}$$

O'zaro parallel, bir tomonga yo'nalgan va bir xil modulga ega ikki vektor teng vektorlar hisoblanadi

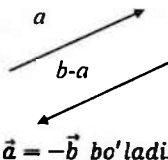
ya'ni, $a = b$ va $\vec{a} \parallel \vec{b}$ bo'lsa,



$$\vec{a} = \vec{b} \text{ bo'ladi.}$$

Agar vektor yo'nalishini teskari tomonga o'zgartirsak, berilgan vektorga qarama-qarshi bo'lgan vektorga ega bo'lamiz

ya'ni $a = b$ va $\vec{a} \uparrow \vec{b}$ bo'lsa,



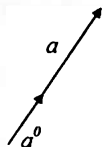
Parallel vektorlar kollinear vektorlar ham deyiladi. Ular bir tomonga yoki qarama-qarshi tomonga yo'nalgan bo'ladi. Ma'lum bir tekislikka parallel bo'lgan vektorlar komplenar vektorlar deyiladi.

Yo'nalishi vektor yo'nalishi bilan bir xil bo'lgan, lekin moduli birga teng bo'lgan vektor mazkur vektorning birlik vektori deyiladi.

Masalan,

\vec{a} vektorning birlik vektori \vec{a}^0 ; uning moduli $|\vec{a}^0|=1$.

Har qanday vektor o'zining birlik vektori orqali quyidagicha yoziladi



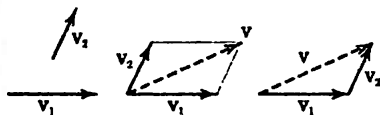
bundan $\vec{a} = a \cdot \vec{a}^0$,
 $\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{a}$.

Vektorlar bilan amallar

1. Vektorlarni qo'shish.

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} \text{ yoki } \vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$$

Vektorlarni qo'shishda uchburchak yoki parallelogram qoidasidan foydalaniladi.

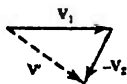


Vektorlarni qo'shishning xususiyatlari:

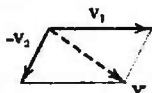
- a) $\vec{a} + 0 = \vec{a}$;
- b) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ - qo'shishning assotsiativligi;
- c) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ - qo'shishning kommutativligi;

2. Vektorlarni ayirish. Vektorlarni ayirishda ham uchburchak yoki parallelogramm qoidasidan foydalaniladi.

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}$$



$$\text{yoki } \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{v}$$



Vektorlarni ko'paytirish.

a) Vektorlarni skalyar ko'paytmasi.

\vec{a} va \vec{b} vektorlarning skalyar ko'paytmasi skalyar miqdor bo'lib, u ko'paytuvchi vektorlar modullarining ko'paytmasini maskur vektorlar orasidagi burchak kosinusiga ko'paytmasiga teng bo'ladi.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a} \wedge \vec{b}) = ab \cos(\vec{a} \wedge \vec{b})$$

Ikki vektorning skalyar ko'paytmasi quyidagi xususiyatlarga ega:

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ - kommutativlik xususiyati;

b) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$;

c) Ikki o'zaro perpendikulyar vektorlarning skalyar ko'paytmasi nolga teng;

ya'ni $\vec{a} \perp \vec{b}$ bo'lsa, $\cos(\vec{a} \wedge \vec{b}) = 0$.

Shuning uchun

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0.$$

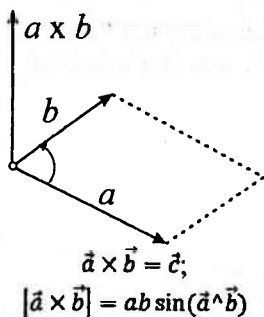
d) Vektorlarning skalyar kvadrati uning modulini kvadratiga teng;

ya'ni $\vec{a} = \vec{b}$ bo'lsa, $\cos(\vec{a} \wedge \vec{b}) = 1$.

Shuning uchun

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = a^2$$

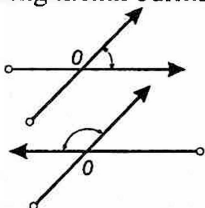
b) Ikki vektorning vektor ko'paytmasi vektor bo'lib, uning moduli ko'paytuvchi vektorlar modullarining ko'paytmasini ular orasidagi burchak sinusiga ko'paytmasiga teng bo'ladi, mazkur vektor vektorlar yotuvchi tekislikka, perpendikulyar holda shunday yo'naladiki, u tomondan qaraganda birinchi ko'paytuvchini ikkinchi ko'paytuvchi tomon kichik burchak orqali ustma ust tushirish uchun soat milining harakatiga teskari yo'nalishda burish lozim.



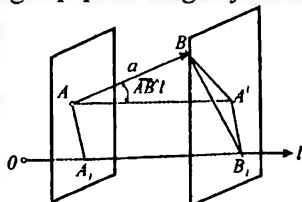
Vektor ko'paytmasining yo'nalishi o'ng vint qoidasiga asoslangan.

Vektorning o'qdagi proyeksiyasi

O'q deb hisoblashning musbat yo'nalishi ko'rsatilgan to'g'ri chiziqqa aytiladi. Ikki vektor yoki vektor va o'q orasidagi burchak deb vektorlardan birini (yoki o'qni) ikkinchi vektor (yoki o'q) bilan ustma ust tushirish uchun eng kichik burilish burchagiga aytiladi.



\vec{AB} vektorning biror ℓ o'qdagi proyeksiyasi deb mos ishora bilan olingan vektor boshi A va uchi B nuqtalarning shu o'qdagi proyeksiyalari orasidagi A_1B_1 masofaga aytiladi.



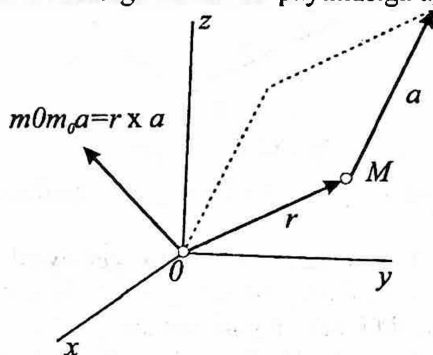
$$pr_{\ell} \vec{AB} = (AB)_{\ell} = \mp |\vec{A_1B_1}| = AB \cos(\vec{AB} \wedge \ell)$$

Bunda vektorning o'qdagi proyeksiyasi musbat hisoblanadi, agarda A_1 dan B_1 ko'chish o'qning musbat yo'nalishida yuz bersa, aks holda vektorning o'qdagi proyeksiyasi manfiy ishoraga ega bo'ladi.



Vektorning nuqtaga nisbatan momenti

\vec{a} vektorning O markazga (yoki nuqtaga) nisbatan momenti deb, \vec{a} vektor qo'yilgan M nuqtaga O nuqtadan o'tkazilgan \vec{r} radius vektorni berilgan \vec{a} vektorga vektor ko'paytmasiga aytiladi.



Vektorning O markazga (yoki nuqtaga) nisbatan momenti quyidagicha ifodalanadi:

$$\text{mom}_O \vec{a} = \vec{r} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix};$$

$$|\text{mom}_O \vec{a}| = ra \sin(\vec{r} \wedge \vec{a}).$$

Agar O markaz (nuqta) koordinata o'qlarining boshi bilan ustma ust tushsa, \vec{a} vektorning O markazga nisbatan momenti quyidagicha yoziladi:

$$\text{mom}_O \vec{a} = \vec{r} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$$

Vektorning koordinata o'qlariga nisbatan momentlari quyidagicha ifodalanadi:

$$\text{mom}_x \vec{a} = (\vec{r} \times \vec{a})_x = y \cdot a_z - z \cdot a_y$$

$$\text{mom}_y \vec{a} = (\vec{r} \times \vec{a})_y = z \cdot a_x - x \cdot a_z$$

$$\text{mom}_z \vec{a} = (\vec{r} \times \vec{a})_z = x \cdot a_y - y \cdot a_x$$

II-BOB. QATTIQ JISM STATIKASINING ASOSIY

TUSHUNCHALARI VA AKSIOMALARI

3-§. Statikaning asosiy tushunchalari

Qadimgi yunon olimi Arximed statikaning asoschilaridan biri hisoblanadi. U parallel kuchlar ta'siridagi richagning muvozanati, jismlarning og'irlik markazini aniqlash nazariyasini yaratish bilan birga gidrostatikaga ham asos solgan. Geometrik statikaning rivojlanishiga fransuz olimlari P. Varinon (1654-1722) va L. Puanso (1777-1859) katta xissa qo'shdilar.

Analitik statikaning asoschisi J.Lagranj hisoblanadi. Statikaning aksiomatik metodlarini rivojlantirishda rus olimlari N.Y.Jukovskiy va S.A.Chapliginlarning ro'li kattadir.

Nazariy mexanikaning statika bo'limida moddiy jismlarning muvozanati, ularga qo'yilgan kuchlarni qo'shish, ayirish va kuchlarni ta'sir jihatdan teng bo'lgan boshqa ekvivalent kuchlar sistemasi bilan almashtirish masalalari o'rganiladi.

Statikaning asosiy tushunchalari quyidagilardan iborat:

1. **Moddiy nuqta.** Harakati yoki muvozanati o'rganilayotgan jismning o'lchamlari va shaklini e'tiborga olmaslik, massasini bir nuqtada joylashgan deb tasavvur qilish mumkin bo'lgan jism moddiy nuqta deyiladi.

2. **Absolyut qattiq jism.** Agar jismning ixtiyoriy ikki nuqtasi orasidagi masofa doimo o'zgarmas holda qolsa, bunday jism absolyut qattiq jism deyiladi.*

Nazariy mexanikada barcha barcha jismlar absolyut qattiq deb qabul qilinadi, yani jismlar harakat davomida yoki muvozanat holatida o'zining geometrik shaklini o'zgartirmaydi deb faraz qilinadi.

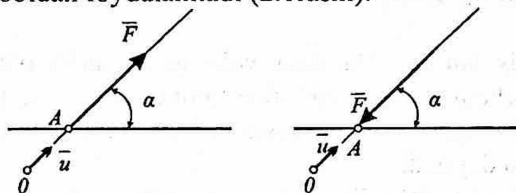
Aslida esa tabiatdagi barcha qattiq jismlar ularga ko'rsatilgan tashqi ta'sirlar (kuchlar) natijasida o'zlarining geometrik shakillarini ma'lum miqdorda o'zgartiradilar. Bunday o'zgarishlar jismning egilishi, siqilishi, buralishi, cho'zilishi, qiyshayishi bo'lishi mumkin va ular jismning deformatsiyalanishi deyiladi. Jismning deformatsiyalanishi uning qaysi modddan tarkib topganiga, shakliga temperaturalariga va ularga ta'sir etayotgan kuchlarga bog'liq

bo'ladi. Inshootlarni qurishda, mashina va mexanizmlarni konstruksiyalashda ularning mustahkamligini ta'minlash maqsadida bunday deformatsiyalar iloji boricha sezilarli bo'lmagan miqdorda bo'lishligini ko'zda tutilishi zarur hisoblanadi.

Shu sababli qattiq jismlarning harakati yoki muvozanatini o'rganishga, sezilarli bo'lmagan miqdordagi deformatsiyalarni e'tiborga olinmaslik qoida sifatida qabul qilinib, ularni deformatsiyalanmaydigan yoki absalyut qattiq jism deb hisoblanadi. Statika masalalarini yechishda barcha jismlarni absalyut qattiq deb qarash uning harakatini o'rganishi soddalashtiradi.

3. **Kuch.** Bir jismning ikkinchi jismga ko'rsatadigan mexanik ta'sirini ifodalovchi qattiq kuch deb ataladi. Kuch vector kattalik bo'lib, moduli (son qiymat), yo'nalishi va quyilish nuqtasi bilan xarakterlanadi.

Kuchning moduli, birlik sifatida qabul qilingan (etalon) qiymatga solishtirish orqali aniqlamadi. Xalqaro (SI) o'lchov birligida kuchning birligi 1 nyuton (1N) deb qabul qilingan. Kuchlarni statik o'lchashda dinamometr (kuch o'lchagich) nomli fizik o'lchov asbobidan foydalaniladi (2.1-rasm).

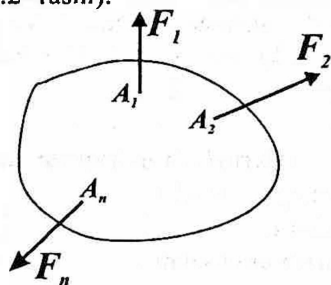


2.1-rasm.

Chizmada \vec{F} orqali kuch vektori tasvirlangan, A nuqta – kuchning jismga qo'yilgan nuqtasi, OA chizig'i kuchning ta'sir chizig'i.

4. Agar bir vaqtda jismga bir nechta kuchlar ta'sir etsa, ular kuchlar sistemasi deb ataladi. Agar barcha kuchlarning ta'sir chiziqlari bir nuqtadan o'tsa, ular kesishuvchi kuchlar sistemasi deyiladi. Agarda kuchlarning ta'sir chiziqlari bir tekislikda yotsa, bunday kuchlar tekislikda yotgan kuchlar sistemasi deyiladi. Agarda barcha kuchlarning ta'sir chiziqlari bir tekislikda yotmasa, bunday kuchlar fazoviy kuchlar sistemasi deb ataladi. Agar kuchlarning ta'sir chiziqlari o'zaro parallel bo'lsa, bunday kuchlar parallel

kuchlar sistemasi deb ataladi. Kuchlar sistemasi ($\vec{F}_1 + \vec{F}_2 \dots, \vec{F}_n$) shaklda belgilanadi (2.2- rasm).



2.2-rasm.

5. Teng ta'sir etuvchi kuch. Kuchlar sistemasining jismga ta'sirini yolg'iz bir kuch bera olsa, bunday kuchga mazkur kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchisi deyiladi. Jismga qo'yilgan ($\vec{F}_1 + \vec{F}_2 \dots, \vec{F}_n$) kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchisini R bilan belgilasak u quyidagicha yoziladi:

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2 \dots, \vec{F}_n) \Leftrightarrow \vec{R}$$

6. Ekvivalent kuchlar sistemasi. Jismga qo'yilgan ($\vec{F}_1 + \vec{F}_2 \dots, \vec{F}_n$) kuchlar sistemasining ta'sirini boshqa ($\vec{Q}_1 + \vec{Q}_2 \dots, \vec{Q}_n$) kuchlar sistemasi bera olsa, bunday kuchlar sistemasi ekvivalent sistema deb ataladi va quyidagicha yoziladi:

$$(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 \dots, \vec{F}_n) \Leftrightarrow (\vec{Q}_1 + \vec{Q}_2 \dots, \vec{Q}_n)$$

7. Muvozanatlashgan kuchlar sistemasi. Muvozanat holati deb biror jismning boshqa jismga nisbatan teng holatiga, masalan: yerga nisbatan harkatsiz holatiga aytiladi.

Tinch holatda bo'lgan jism unga qo'yilgan ($\vec{F}_1 + \vec{F}_2 \dots, \vec{F}_n$) kuchlar sistemasi ta'sirida ham teng holatda qolsa, bunday kuchlar sistemasi muvozanatlashgan kuchlar sistemasi deyiladi. Muvozanatlashgan kuchlar sistemasi nolga ekvivalent bo'ladi va quyidagicha yoziladi:

$$(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 \dots, \vec{F}_n) \Leftrightarrow 0.$$

8. Erkin jism. Boshqa jismlar bilan biriktirilmagan yoki fazoda istalgan tomonga harakatlana oladigan, ixtiyoriy vaziyatni egallashi mumkin bo'lgan jism erkin jism deyiladi (masalan: ichiga engil gaz to'ldirilgan sharning havodagi harakati).

9. Sanoq sistemasi. Berilgan jismning vaziyati boshqa biror jism bilan bog'langan koordinata o'qlari sistemasiga nisbatan aniqlanadi. Bunday koordinatalar sistemasi sanoq sistemasi deyiladi. Statikada jismning harakati yoki muvozanati Yer bilan bog'langan sanoq sistemasiga nisbatan o'rganiladi.

Takrorlash uchun savollar

1. Kuch deb nimaga aytiladi?
2. Kuch vektorini o'z ta'sir chizig'i bo'ylab bir nuqtadan ikkinchi nuqtaga ko'chirish mumkinmi?
3. Kuchlar sistemasi, ekvivalent kuchlar sistemasi nima?
4. Teng tasir etuvchi kuch, muvozanatlashgan kuchlar sistemasi nima?
5. Statikaning ikkita asosiy masalasi nimadan iborat?
6. Kran qismlariga qo'yilgan kuchlar haqida mulohazangizni bildiring?



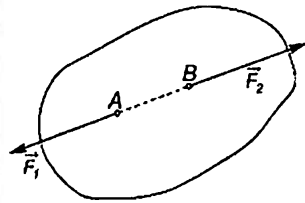
4-§. Statikaning asosiy aksiomalari.

Tayanch so'zlar va iboralar: muvozanat, nollik sistema, muvozanatlashgan kuchlar sistemasi, kuchlar parallelogramma, ta'sir va aks ta'sir, ketish prinsipi, bog'langan jism, erkin jism, silidirik sharnir, sferik sharnir.

Statikada jismga yoki o'zaro ta'sirda bo'lgan jismlarga ta'sir etuvchi kuchlar haqidagi umumiy qonunlar insoniyat tarixida tajriba va kuzatishlar yordamida aniqlangan quyidagi aksiomalar tarzida ifodalanadi.

1 - Ikki kuchning o'zaro muvozanatlashish aksiomasi.

Erkin absolyut qattiq jismga qo'yilgan ikki kuch muvozanatlashishi uchun bu kuchlar miqdor jihatdan teng bo'lib, kuchlar qo'yilgan nuqtalarni birlashtiruvchi to'g'ri chiziq bo'ylab qarama - qarshi tomonlarga yo'nalgan bo'lishi zarur va yetarlidir (2.3- rasm).



2.3- rasm.

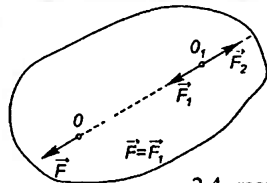
Bunday ikki kuch nollik sistemani tashkil etadi:

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \Leftrightarrow 0$$

1-aksioma eng sodda muvozanatlashgan kuchlar sistemasini ifodalaydi, chunki erkin jism, tajribalarning ko'rsatishicha, bitta kuch ta'sirida muvozanatda bo'la olmaydi.

2 - Muvozanatlashuvchi kuchlarni qo'shish yoki ayirish aksiomasi.

Absolyut qattiq jismga ta'sir etuvchi kuchlar sistemasi qatoriga o'zaro muvozanatlashuvchi kuchlar sistemasini qo'shsak yoki undan ayirsak, kuchlar sistemasining jismga ta'siri o'zgarmaydi:



2.4- rasm.

Faraz qilaylik jismning O nuqtasiga \vec{F} kuch qo'yilgan bo'lsin. Bu kuch jismga ma'lum ta'sir ko'rsatadi (2.4 - rasm). Jismga yana $(F_1, F_1') \Leftrightarrow 0$ sistemani qo'yaylik. Natijada, $(\vec{F}_1, \vec{F}_1, \vec{F}_1')$ kuchlar sistemasi hosil bo'ladi va uning ta'siri \vec{F} kuch ta'siriga ekvivalent bo'ladi:

$$\vec{F} \Leftrightarrow (\vec{F}_1, \vec{F}_1, \vec{F}_1')$$

Yuqoridagi ikki aksiomadan quyidagi muhim natija kelib chiqadi:

Kuchning jismga ta'sirini o'gartirmay, uning quyilish nuqtasini ta'sir chizig'i bo'ylab jismning ixtiyoriy nuqtasiga ko'chirish mumkin.

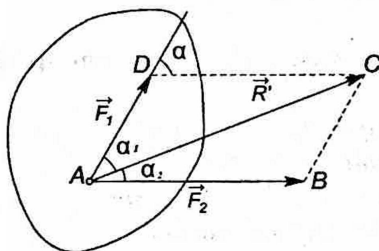
Bu aksiomadan quyidagi natija kelib chiqadi: kuch o'z ta'sir chizig'i bo'ylab bir nuqtadan boshqa ixtiyoriy ikkinchi nuqtaga ko'chirilsa, uning jismga ta'siri o'zgarmaydi. Natija, absolyut qattiq jismga qo'yilgan kuch sirpanuvchi vektor ekanligini ifodalaydi.

3 - Parallelogramm aksiomasi.

Jismning biror nuqtasiga qo'yilgan turli yo'nalishidagi ikki kuchning teng ta'sir etuvchisi miqdor va yo'nalish jihatdan shu kuchlarga qurilgan parallelogramning kuchlar qo'yilgan nuqtadan o'tuvchi diagonali bilan ifodalanadi.

Jismning biror A nuqtasiga qo'yilgan, bir-biri bilan α burchak tashkil etuvchi \vec{F}_1 va \vec{F}_2 kuchlarning teng ta'sir etuvchisini \vec{R} bilan belgilasak (2.5- rasm), aksiomaga ko'ra:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2.$$



2.5- rasm.

Jismning A nuqtasiga qo'yilgan \vec{F}_1 va \vec{F}_2 kuchlarga qurilgan parallelogram kuchlar parallelogram deyiladi, kuchlarni bu usulda qo'yish esa parallelogram usuli deb ataladi.

Teng ta'sir etuvchi kuchning moduli kosinuslar teoremasiga asosan aniqlanadi:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2\cos(\alpha)}$$

yoki

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha}.$$

Agar a) $\alpha=0$ bo'lsa

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2} = \sqrt{(F_1 + F_2)^2} = F_1 + F_2; \quad (1)$$

b) $\alpha = 180^\circ$ bo'lsa

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2} = \sqrt{(F_1 - F_2)^2} = F_1 - F_2; \quad (2)$$

V) $\alpha = 90^\circ$ bo'lsa

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} \quad \text{bo'ladi.} \quad (3)$$

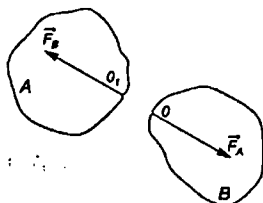
(1) va (2)dan ko'rinib turibdiki, bir tog'ri chiziq bo'ylab yo'nalgan kuchlarning teng ta'sir etuvchisi ularning algebraik yig'indisiga teng bo'lar ekan.

Teng ta'sir etuvchi kuch \vec{R} ning \vec{F}_1 va \vec{F}_2 kuchlar bilan tashkil qilgan α_1 va α_2 burchaklari sinuslar teoremasidan aniqlanadi.

4 - Ta'sir va aks ta'sirning tenglik aksiomasi.

Ikkita jism bir-biriga miqdor jihatdan teng va bitta to'g'ri chiziq bo'ylab qarama - qarshi tomonga yo'nalgan kuchlar bilan o'zaro ta'sir ko'rsatadi (2.6- rasm).

Masalan, **A** va **B** jismlar o'zaro ta'sirda bo'lsin (Quyosh va Yer). **A** jismning **B** jismga ko'rsatadigan \vec{F}_A ta'sir kuchi **B** jismning O nuqtasiga, **B** jismning **A** jismga ta'sir kuchi \vec{F}_B **A** jismning O_1 nuqtasiga qo'yiladi. \vec{F}_A va \vec{F}_B kuchlar miqdor jihatdan bir-biriga teng bo'lib, bir to'g'ri chiziq bo'ylab qarama-qarshi tomonga yo'naladi:



$$F_A = F_B, \quad \vec{F}_A = -\vec{F}_B.$$

Bu aksioma Nyutonning uchinchi qonunini ifodalaydi va tabiatda kuchlarning bir tomonlama ta'siri mavjud bo'lmasligini takidlaydi. \vec{F}_A va \vec{F}_B kuchlar turli jismlarga qo'yilgan kuchlar bo'lganligi uchun, o'zaro muvozanatda bo'lgan kuchlar sistemasini tashkil etmaydi.

5 - Qattiq bo'lmagan jismlar muvozanatining saqlanish qonuni.

Deformatsiyalanadigan jism muvozanat holatida absolyut qattiq jismga aylansa, uning muvozanati o'zgarmaydi.

Bu aksiomaning mohiyati absolyut qattiq jismga qo'yilgan kuchlarning muvozanat sharti deformatsiyalanadigan jismga qo'yiladigan kuchlar uchun ham o'rinli bo'lishidan iborat.

Shuning uchun deformatsiyalanadigan jismlarning muvozanatiga oid (ip, zanjir, qayish, sterjen, masalalarni yechishda yuqoridagi aksiomadan foydalaniladi.

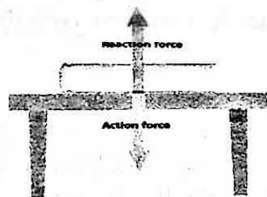
5-§. Bog'lanish va bog'lanish reaksiyalari

Qattiq jism unga ta'sir etayotgan kuchlar ta'sirida fazoning ixtiyoriy tomoniga harakat qila olsa, bunday jism erkin jism deb ataladi.

Agar jismning holati yoki harakati biror sabab bilan cheklangan bo'lsa, bunday jism bog'lanishdagi jism deyiladi. Jismning holati yoki harakatini cheklovchi sabab esa bog'lanish deyiladi. Bog'lanishning jismga ko'rsatadigan ta'siriga bog'lanish reaksiya kuchi deyiladi. Bog'lanish reaksiya kuchi bog'lanishdagi jismning harakati cheklangan tomonga teskari yo'naladi.

Bog'lanishdagi jismlarning bog'lanish reaksiya kuchlarini aniqlash statikaning asosiy masalalaridan hisoblanadi. Bu masalani yechishda bog'lanishdagi jismning harakatini yoki muvozanatini erkin jismning harakati yoki muvozanatiga keltirib tekshirish lozim bo'ladi.

Bog'lanish reaksiyalari ham vektor ko'rinishidagi kuch bo'lib, ushbu kuch faqat aks ta'sir sifatidagina mavjud bo'ladi. Agar bog'lanish olib tashlansa uning reaksiyasi nolga teng bo'ladi. Shuning uchun reaksiya kuchlari ko'p hollarda passiv kuchlar deb ataladi (2.7-rasm).



2.7- rasm.

Bog'lanishlarning turlari juda ko'p, shunga ko'ra ularning reaksiyalari ham turlicha bo'ladi. Reaksiya kuchlarining son qiymatlari har bir masalada jismga ta'sir etayotgan kuchlar sistemasiga bog'liq ravishda aniqlanadi.

Shuning uchun bog'lanishlarning reaksiya kuchlari kuchlarini yo'nalishlarini aniqlash yo'llari bilan tanishib o'taylik.

1. Silliq yassi yuzadan iborat bog'lanish.

Silliq yassi yuzali bog‘lanish deb, shunday yuzaga aytiladiki uning ustida turgan, yoki unga suyanib turgan jismga xech qanday ishqalanish kuchi ta’sir etmaydi.

a) Jism silliq sirtga tiranib turgan bo‘lsin.

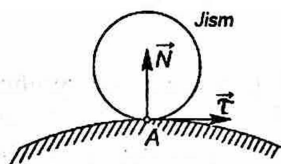
Bu holda reaksiya kuchi jism hamda silliq sirtning o‘zaro tegib turgan nuqtasi orqali o‘tkazilgan urinma tekislikka perpendikulyar yo‘naladi (2.8a, 2.8a – rasmlar).

Buning uchun bog‘lanishdan bo‘shatish prinsipidan foydalanish zarur. Bu prinsipga ko‘ra, bog‘lanishdagi jismni erkin jism shakliga keltirish uchun jismga ta’sir etuvchi kuchlar qatoriga bog‘lanish reaksiya kuchini ham qo‘shish kerak.

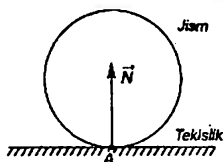
Bog‘lanishlarning asosiy turlari va ularning reaksiya kuchlari.

I. Silliq yassi yuzadan iborat bog‘lanish.

a. Jism qo‘zg‘almas silliq sirtga A nuqtada tayanadi. Silliq sirt jismning shu sirtga o‘tkazilgan normal chiziq bo‘yicha harakatini cheklaydi. Bu holda sirtning reaksiya kuchi N jismning A nuqtasiga qo‘yilgan bo‘lib, shu nuqtada sirtga yoki tekislikka o‘tkazilgan urinmaga perpendikulyar holda yo‘nalgan bo‘ladi (2.5 a,b- rasmlar).



2.8 a- rasm.

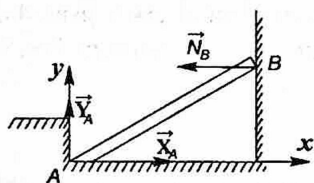


2.8 b- rasm.

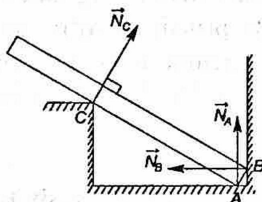
b. jism tayanch tekisligiga bitta nuqtasi bilan tayangan bo‘lsin. Masalan jism (balka – tayanchlarga qo‘yilgan jism) A nuqtada polga, B nuqtada vertikal devorga, C nuqtada ikki yoqli burchak qirrasiga tayanadi (2.9 a- rasm).

c. Pol va devorning reaksiya kuchlari N_A va N_B , A va B nuqtalarda mos ravishda pol va devorga o‘tkazilgan perpendikulyar bo‘yicha yo‘naladi. Ikki yoqli burchakdan tashkil topgan qirraning reaksiya kuchi N_C C nuqtada balka sirtiga o‘tkazilgan perpendikulyar bo‘yicha yo‘naladi. Yuqoridagi misolda balkaning ko‘ndalang

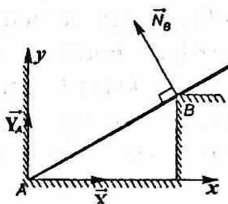
o'Ichamlari hisobga olinmasa, uni bitta A nuqtaga tayangan deb qarash mumkin (2.9 b-rasm). Bunday holda reaksiya kuchi A nuqtadan o'tadi, lekin uning yo'nalishi ma'lum emas. Masalani yechishda A nuqtadagi reaksiya kuchini tanlab olingan koordinata o'qlari bo'ylab yo'nalgan \vec{X}_A , \vec{Y}_A tashkil etuvchilarga ajratib, ularni jismning muvozanat tenglamalaridan aniqlash lozim bo'ladi. A to'siqning reaksiya kuchlari ham xuddi shu usulda aniqlanadi (2.9v- rasm).



2.9 a- rasm.

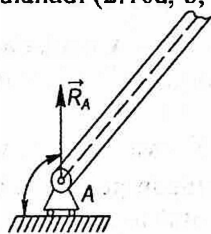


2.9 b- rasm.

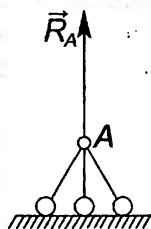


2.9 v- rasm.

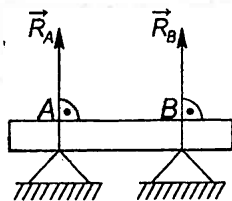
d. Jism qo'zg'almas silliq sirtga g'altaklar (qo'zg'aluvchan sharnirlar) vositasida tayanib tursa, reaksiya kuchi tayanch harakatlanishi mumkin bo'lgan tekislikka o'tkazilgan perpendikulyar bo'yicha yo'naladi. Darsliklarda qo'zg'aluvchan sharnir uch ko'rinishida ifodalanadi (2.10a, b, v- rasmlar).



2.10a- rasm.



2.10b- rasm.

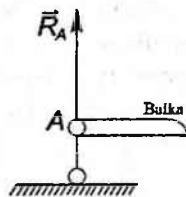


2.10v- rasm.

Balka **A** va **B** nuqtalarda tekislikka oʻrnatilgan sharnirsiz qoʻzgʻalmas tayanchlarga tayanib turibdi. Bunday tayanchlar reaksiya kuchlari balka yoki tayanchlar sirtiga oʻtkazilgan perpendikulyar boʻylab yoʻnaladi (2.11- rasm).

II. Sharnirli bogʻlanishlar.

Umumiy oʻq yoki nuqta atrofida aylana oladigan ikki jism orasidagi bogʻlanish sharnir deyiladi. (zoldirli gʻildirak-podshipnik) Silindirik sharnir bolt 1 va kiygizilgan vtulka 2dan iborat boʻladi. Uning diametrlari jism bilan mahkam biriktirilgan vtulkaning ichki diametrlari bilan barobar boʻladi. Jism shakl tekisligiga perpendikulyar boʻlgan sharnir oʻqi atrofida aylanishi mumkin.



2.11- rasm.

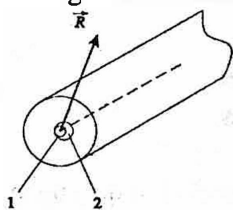
Silindrik sharnir. Qoʻzgʻalmas asosga oʻrnatilgan silindrik sharnirning reaksiya kuchi \vec{R}_A aylanish oʻqiga perpendikulyar boʻladi, lekin uning miqdori va yoʻnalishi oldindan maʼlum boʻlmaydi (2.12 a,b-rasm). Bunday holda reaksiya kuchi R koordinata oʻqlari boʻylab yoʻnalgan R_x va R_y tashkil etuvchilarga ajratiladi. Ular jismning muvozanat shartlarini ifodalovchi tenglamalardan aniqlangandan soʻng, sharnir reaksiyasining moduli quyidagi formula asosida aniqlanadi:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

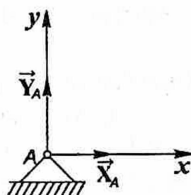
Sharnir reaksiyasining yoʻnalishi esa, yoʻnalturuvchi kosinuslari orqali quyidagicha aniqlanadi:

$$\cos(\vec{R}'\vec{i}) = \frac{R_x}{R}, \quad \cos(\vec{R}'\vec{j}) = \frac{R_y}{R}.$$

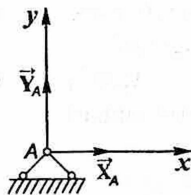
Bunda \vec{i}, \vec{j} – koordinata oʻqlarining birlik vektorlari. Darsliklarda koʻzgʻalmas sharnir ikki koʻrinishida ifodalanadi (2.12 a,b- rasmlar).



2-12a rasm.



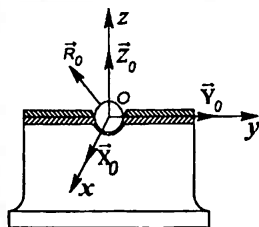
2-12b rasm.



2-12v rasm.

Sferik sharnir.

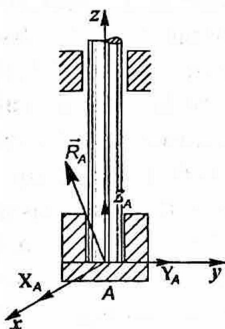
Jism sferik sharnir vositasida bog'langan bo'lsa (2.13a- rasm), bunday sharnir jismni o'z markazi O nuqtadan o'tuvchi har qanday o'q atrofida aylanishiga imkon beradi. Sferik sharnir reaksiyasi O nuqtadan o'tadi, lekin uning miqdori va yo'nalishi oldindan ma'lum bo'lmaydi.



2-13a rasm.

Masalani yechishda sferik sharnir reaksiyasi \vec{R}_0 tanlab olingan koordinata o'qlari bo'ylab

yo'nalgan \vec{x}_0 , \vec{y}_0 , \vec{z}_0 tashkil etuvchilarga ajratiladi. Ularning qiymatlari muvozanat shartini ifodalovchi muvozanat tenglamalaridan aniqlanadi. Aniqlangan \vec{x}_0 , \vec{y}_0 , \vec{z}_0 tashkil etuvchilar qiymatlari orqali R_0 ning miqdori va yo'nalishi topiladi. Podpyatnik (tagtavon – tirilib turgan podshipnik) reaksiya kuchi ham xuddi shu usulda aniqlanadi (2.13b - rasm). Sferik sharnirga taaluqli fotoaparatlarning shtativdagi zuxbirli tutgich, inson va hayvonlarning ko'pgina suyaklarining birlashgan joylari zoldirli sharnirga misol bo'la oladi.

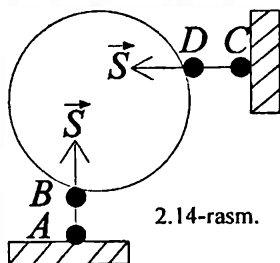


2.13b- rasm.

Vaznsiz sterjenlar vositasidagi sharnirli bog'lanish.

Uchlaridan boshqa nuqtalariga kuch qo'yilmagan, o'z og'irligi hisobga olinmaydigan sterjen vaznsiz sterjen deyiladi.

Agar jism bunday sterjenlar vositasida bog'langan bo'lsa (2.14-rasm), sterjenlarning og'irliklarini e'tiborga



2.14-rasm.

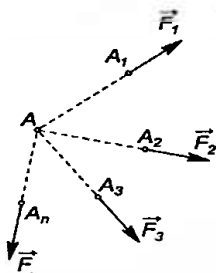
olmasak, ular sterjenlarning A va B, C va D sharnirlariga qo'yilgan ikki kuch ta'sirida muvozanatda bo'ladi. Sterjenlar qo'yilgan kuchlar

III-BOB. KESISHUVCHI KUCHLAR SISTEMASI

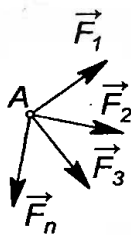
6-§. Bir nuqtada kesishuvchi kuchlar sistemasining ta'rifi

Ta'sir chiziqlarini bir nuqtada kesishadigan kuchlar sistemasi bir nuqtada kesishuvchi kuchlar sistemasi deyiladi (3.1-rasm).

Jismga qo'yilgan kuchlarni ta'sir chiziqlari bo'ylab ko'chirish mumkinligi tufayli, bir nuqtada kesishuvchi kuchlarni doimo bir nuqtaga qo'yilgan kuchlar sistemasi bilan almashtirish mumkin (3.2-rasm). Bir nuqtada kesishuvchi kuchlar, odatda kesishuvchi kuchlar ham deyiladi.



3.1-rasm.

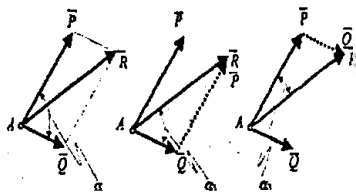


3.2-rasm.

Bir nuqtada kesishuvchi kuchlarni geometrik yoki analitik usulda qo'shish mumkin.

7-§. Bir nuqtada kesishuvchi kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchisini geometrik usulda aniqlash.

Jismning A nuqtasiga o'zaro α burchak tashkil etuvchi P va Q kuchlar qo'yilgan bo'lsin. Kuchlar parallelogrammi aksiomasiga ko'ra, kuchlarning teng ta'sir etuvchisi shu kuchlarga qurilgan parallelogramning kuchlar qo'yilgan A nuqtasidan o'tuvchi diagonali orqali ifodalanadi (3.3-rasm).



3.3-rasm.

Demak, bir nuqtaga qo'yilgan ikkita kuchning teng ta'sir etuvchisi shu kuchlarning geometrik yig'indisiga teng bo'lar ekan:

$$\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q} \quad (3.1)$$

Bir nuqtaga qo'yilgan ikkita kuchning teng ta'sir etuvchisini uchburchak usulida ham aniqlash mumkin (3.4-rasm). Bunda A_1 nuqtaga \vec{F}_1 kuchni qo'yib, uning uchi D_1 nuqtaga \vec{F}_2 kuchni o'ziga parallel holda ko'chiramiz. Birinchi kuchning boshi A_1 va ikkinchi kuchning uchi C_1 nuqtalarni birlashtiruvchi \vec{R} vektor A nuqtaga qo'yilgan ikkita kuchning teng ta'sir etuvchisini ifodalaydi. Keshuvchi kuchlarni bu usulda qo'shish kuchlar uchburchagi usuli deyiladi. Teng ta'sir etuvchi kuchning moduli kosinuslar teoremasiga asosan aniqlanadi:

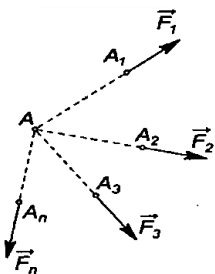
$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 - 2PQ \cos(180^\circ - \alpha)} \quad \text{yoki}$$

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2P_1Q_2 \cos \alpha}. \quad (3.2)$$

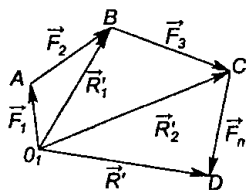
Teng ta'sir etuvchi kuchning P_1 va P_2 kuchlar bilan hosil qilgan α_1 va α_2 burchaklari esa sinuslar teoremasiga ko'ra aniqlanadi:

$$\frac{P}{\sin \alpha_2} = \frac{Q}{\sin \alpha_1} = \frac{R}{\sin(180^\circ - \alpha)}. \quad (3.3)$$

Jismning A_1, A_2, \dots, A_n nuqtalariga qo'yilgan $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ kuchlarning (3.4-rasm) teng ta'sir etuvchisini aniqlash uchun ketma-ket kuchlar uchburchagi usulidan foydalaniladi. Natijada O_1ABCD kuchlar ko'pburchagi hosil bo'ladi (3.5-rasm):



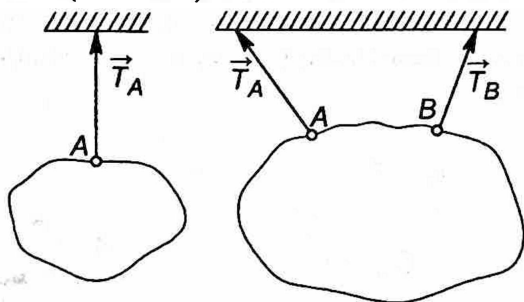
3.4-rasm.



3.5-rasm.

ta'sirida cho'zilishi yoki siqilishi mumkin. Binobarin reaksiya kuchlari sterjenlar o'qlari bo'ylab yo'naladi.

III. Ip, zanjir va qayishlar vositasidagi bog'lanishlar. Agar jism ip, zanjir va qayishlar vositasida bog'langan bo'lsa, ularda hosil bo'ladigan \vec{T}_A, \vec{T}_B reaksiya kuchlariga taranglik kuchlari deyiladi. Taranglik kuchlari ip, zanjir, qayish bo'ylab, ular osilgan nuqta tomon yo'naladi (2.15-rasm).



2.15- rasm.

Takrorlash uchun savollar

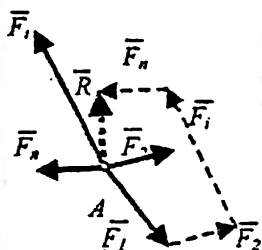
1. Statikaning asosiy aksiomalarini ayting.
2. Bog'lanish deb nimaga aytiladi?
3. Silliqlik gorizontal tekislikdan iborat bog'lanishning reaksiyasi qanday yo'naladi?
4. Egiluvchan bog'lanishlarning (arqon, tros, ip kabilar) reaksiyalari qanday yo'naladi?
5. Silindirik sharnirdan iborat qo'zg'almas va qo'zg'aluvchan bog'lanishlarning reaksiyalari qanday yo'naladi?
6. Sferik sharnirdan iborat bog'lanishlarning reaksiyalari qanday yo'naladi?
7. Ingichka vaznsiz sterjenlardan iborat bog'lanishlarning reaksiyalari qanday yo'naladi?
8. Bog'lanishlar aksiomasi nimadan iborat?

Hosil bo'lgan kuchlar ko'pburchagida \vec{F}_1 kuchning boshi bilan, \vec{F}_n kuchning uchini birlashtiruvchi \vec{R} vektor berilgan - $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ kuchlarning teng ta'sir etuvchisini ifodalaydi:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n \quad (3.4)$$

yoki

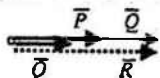
$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i.$$



3.6-rasm.

Yani, bir nuqtada kesishuvchi kuchlarning teng ta'sir etuvchisi \vec{R} shu kuchlarning geometrik yig'indisiga teng bo'lib, kuchlar ta'sir chiziqlarining kesishgan nuqtasiga qo'yiladi (3.6-rasm). Agar kuchlar bir-biriga qarama-qarshi yo'nalgan xolatda kolleniar bo'lsa, yuqorida keltirilgan qoidaga ko'ra, kuchlarning teng ta'sir etuvchisi bir qiymatli bo'ladi.

$$R = P + Q$$



3.7a-rasm.

$$R = P - Q$$



3.7b-rasm.

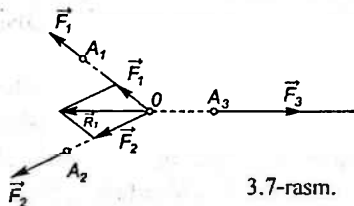
8-§. Uch kuchning muvozanatiga oid teorema

Teorema: Bir tekislikda yotuvchi va o'zaro parallel bo'lmagan uchta kuch muvozanatlashsa, ularning ta'sir chiziqlari bir nuqtada kesishadi.

Isboti. Jismning A_1, A_2, A_3 nuqtalariga bir tekislikda yotuvchi, o'zaro parallel bo'lmagan $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ kuchlar qo'yilgan bo'lsin (3.7-rasm).

Teoremaga ko'ra: $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3) \propto 0$.

Kuchlar parallel bo'lmagani uchun, ulardan ixtiyoriy ikkitasining (masalan \vec{F}_1 va \vec{F}_2) ta'sir chiziqlari kesishgan O nuqtani aniqlab, kuchlarni ta'sir chiziqlari bo'ylab, shu nuqtaga keltiramiz.



3.7-rasm.

Parallelogramm qoidasiga ko'ra, bu kuchlarni qo'shib, ularning teng ta'sir etuvchisi \vec{R}_1 ni aniqlaymiz:

$$\vec{R}_1 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2.$$

Natijada, $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3)$ kuchlar sistemasi o'rniga, unga ekvivalent (\vec{R}_1, \vec{F}_3) kuchlar sistemasiga ega bo'lamiz:

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3) \propto (\vec{R}_1, \vec{F}_3).$$

1-aksiomaga ko'ra, \vec{R}_1 va \vec{F}_3 kuchlar miqdor jihatdan teng bo'lib, bir to'g'ri chiziq bo'ylab, qarama-qarshi tomonga yo'nalgandagina o'zaro muvozanatlashadi. Binobarin, \vec{F}_3 kuchning ta'sir chizig'i ham O nuqtadan o'tadi.

9-§. Bir nuqtada kesishuvchi kuchlar sistemasi muvozanatining geometrik sharti

Bir nuqtada kesishuvchi $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchisi nolga teng bo'lsa, bunday kuchlar sistemasi muvozanatda bo'ladi, aksincha, kuchlar sistemasi muvozanatda bo'lsa, kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchisi nolga teng bo'ladi:

$$\vec{R}' = 0 \quad (3.5)$$

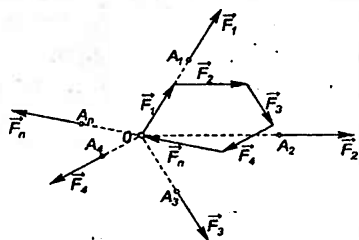
yoki:

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0. \quad (3.6)$$

(3.5) yoki (3.6) tenglamalar kesishuvchi kuchlar sistemasi muvozanatining vektor ko'rinishdagi zaruriy va yetarli shartlarini ifodalaydi.

Binobarin, kesishuvchi kuchlar sistemasi ta'siridagi erkin jism muvozanatda bo'lishi uchun, mazkur sistemani tashkil qiluvchi kuchlarning geometrik yig'indisi nolga teng bo'lishi zarur va yetarli ekan.

(3.6) tenglamaning geometrik ma'nosi quyidagicha: $R'=0$ shart bajarilishi uchun kesishuvchi $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ kuchlardan qurilgan kuchlar ko'pburchagi yopiq bo'lishi kerak, ya'ni mazkur ko'pburchakda birinchi kuchning boshi bilan oxirgi kuchning uchi ustma-ust tushishi kerak (3.8-rasm).



3.8-rasm.

Demak, *bir nuqtada kesishuvchi kuchlar sistemasi muvozanatda bo'lishi uchun, bu kuchlardan qurilgan kuchlar ko'pburchagi yopiq bo'lishi zarur va yetarli ekan.*

Teng ta'sir etuvchi $\vec{R}' = 0$ bo'lsa, (3.3)ga asosan:

$$R'_x = 0, \quad R'_y = 0, \quad R'_z = 0.$$

yoki

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n X_i &= 0, \\ \sum_{i=1}^n Y_i &= 0, \\ \sum_{i=1}^n Z_i &= 0. \end{aligned}$$

bo'ladi.

Bu tengliklar kesishuvchi kuchlar sistemasi muvozanat shartining analitik ifodasidir. Demak, kesishuvchi kuchlar sistemasi ta'siridagi erkin jism muvozanatda bo'lishi uchun kuchlarning har bir koordinata o'qlaridagi proeksiyalarining yig'indisi alohida - alohida nolga teng bo'lishi zarur va yetarli ekan.

Kesishuvchi kuchlar bir tekislikda, masalan *oxy* tekisligida yotsa, mazkur tekislikda yotgan kesishuvchi kuchlar sistemasining muvozanat shartining analitik ifodasi quyidagicha bo'ladi:

$$\sum_{i=1}^n X_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n Y_i = 0. \quad (3.7)$$

Agar muvozanatdagi jism erkin bo'lmasa, bog'lanishlardan bo'shatish prinsipiga ko'ra, bog'lanishlarning jismga ko'rsatadigan ta'sirini bog'lanishlar reaksiya kuchlari bilan almashtirish lozim. Natijada, bunday jism berilgan kuchlar va bog'lanishlar reaksiya kuchlari ta'siridagi erkin jism deb qaraladi. Shu sababli (3.6), (3.7) tenglamalarda berilgan kuchlar bilan bir qatorda bog'lanishlar reaksiya kuchlari ham qatnashadi.

Takrorlash uchun savollar

1. Kesishuvchi kuchlar sistemasi deb, qanday kuchlarga aytiladi?
2. Kesishuvchi kuchlarning teng ta'sir etuvchisining yo'nalishi qanday aniqlanadi?
3. Kesishuvchi kuchlarning teng ta'sir etuvchisining moduli qanday aniqlanadi?
4. Kesishuvchi kuchlarning teng ta'sir etuvchisi qaysi nuqtaga qo'yiladi? Kuch ko'pburchagi qanday quriladi?
5. Oxirgi kuchdan boshlab kuch ko'pburchagini qurish mumkinmi?
6. Qaysi hollarda sinuslar teoremasidan foydalanib masala yechiladi?
7. Qaysi hollarda kosinuslar teoremasidan foydalanib masalalar yechiladi?
8. Kesishuvchi kuchlar sistemasining geometrik muvozanat shartini ko'rsating?
9. Kesishuvchi kuchlar sistemasining geometrik muvozanat sharti?
10. Uch kuch teoremasi qanday ta'riflanadi?

10-§. Kesishuvchi kuchlar sistemasining geometrik muvozanat shartiga oid masalalarni yechish uchun

Umuman statikada jismning muvozanatiga oid masalalar, jismga ta'sir etayotgan kuchlarning o'zaro qanday joylashishidan qat'iy nazar, quyidagi tartibda yechiladi:

- 1) Muvozanati o'rganilayotgan jism (yoki nuqta) aniqlanadi;
- 2) Koordinatalar sistemasi tanlab olinadi;
- 3) Jismga ta'sir etayotgan, berilgan kuchlar ko'rsatiladi;
- 4) Jismni bog'lanishlardan bo'shatib, ularning ta'sirlari bog'lanish reaksiya kuchlari bilan almashtiriladi;
- 5) Muvozanati o'rganilayotgan jism berilgan kuchlar va bog'lanishlar reaksiya kuchlari ta'siridagi erkin jism deb qaraladi;
- 6) Jismga ta'sir etayotgan kuchlar qanday kuchlar sistemasini tashkil etishiga qarab, ularga xos muvozanat tenglamalari tuziladi;
- 7) Tuzilgan muvozanat tenglamalarini yechib, aniqlanishi lozim bo'lgan noma'lum kattaliklar topiladi;

Agar jismga ta'sir etuvchi kuchlar bir nuqtada kesishuvchi kuchlar sistemasini tashkil etsa, mavzuga doir masalalar quyidagi usullarda yechiladi:

Geometrik usul.

Masalada berilgan va noma'lum kuchlar soni uchtaga teng bo'lganda bu usuldan foydalanish qulay bo'ladi. Bunda yuqorida bayon etilgan masalalar yechish tartibidagi 1-5 amallar bajariladi. Keyin:

6) Bir nuqtada kesishuvchi kuchlar sistemasi muvozanatining geometrik shartidan foydalaniladi, ya'ni kuchlardan yopiq kuchlar uchburchagi chiziladi. Kuchlar uchburchagini chizishni miqdori va yo'nalishi ma'lum bo'lgan kuchdan boshlash maqsadga muvofiq bo'ladi;

7) Chizilgan kuchlar uchburchagini yechib, aniqlanishi lozim bo'lgan noma'lumlar topiladi.

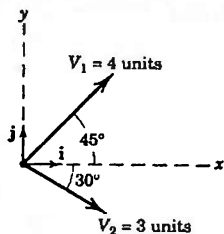
Bunda quyidagi ikki yo'ldan foydalanish mumkin:

a) *grafik yo'l*. Bu yo'lda kuchlar uchburchagi masshtabda chiziladi. Uchburchakning noma'lum kuchni ifodalovchi tomoni, tanlangan masshtab birligida, noma'lum kuch modulini ifodalaydi.

b) *trigonometrik yo'l*. Bu yo'lda kuchlar uchburchagining burchaklari aniqlanadi va trigonometrik formulalar (sinuslar, kosinuslar teoremlari) yordamida noma'lum kuch moduli aniqlanadi.

11-§. Kesishuvchi kuchlar sistemasining geometrik muvozanat shartiga oid masalalar

1-masala: $V_1 = 4N$, $V_2 = 3N$ kuchlar berilgan



3.9-rasm.

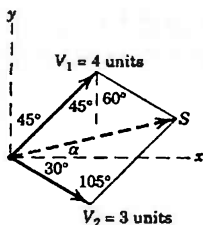
Aniqlansin:

- Kuchlarni teng ta'sir etuvchisini moduli;
- Kuchlarni teng ta'sir etuvchisining x o'qi bilan xosil qilgan burchagi;
- Kuchlarni teng ta'sir etuvchisini vector ko'rinishida yozing;
- Vektorlarning ayirmasini toping.

Yechimi:

a) \vec{V}_1 va \vec{V}_2 kuchlardan parallelogram chizamiz (3.10-rasm) kosinuslar teoremasiga ko'ra

$$S = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 - 2V_1V_2 \cos 105^\circ} = 5.59N$$



3.10-rasm.

b) Pastdagi uchburchakdan sinuslar teoremasiga ko'ra

$$\frac{\sin(\alpha + 30)^\circ}{V_1} = \frac{\sin 105^\circ}{S}$$

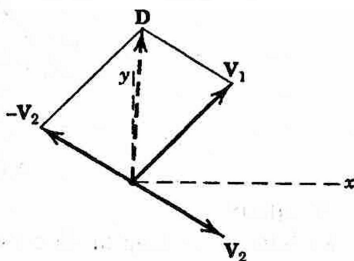
$$\sin(\alpha + 30)^\circ = \frac{V_1 \cdot \sin 105^\circ}{S} = (\alpha + 30)^\circ = 43.8^\circ, \quad \alpha = 13.76^\circ$$

$$c) S = iX + jY = (5.43i + 1.328j)$$

$$D = V_1 - V_2 = 4(i \cos 45^\circ + j \sin 45^\circ) - 3(i \cos 30^\circ - j \sin 30^\circ) = 0.230i +$$

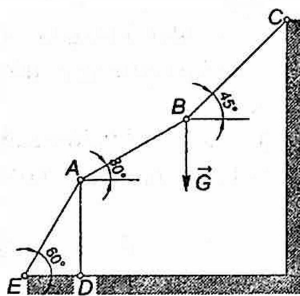
d) $4.33j$

$$\vec{D} = \vec{V}_1 + (-\vec{V}_2)$$



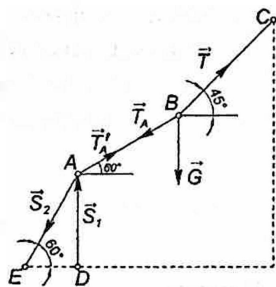
3.11-rasm.

2-Masala: Og'irligi $G=518 \text{ N}$ bo'lgan yuk ABC kanatning B nuqtasiga qo'yilgan. Kanatning AB uchastkasi gorizontal bilan 30° burchak, BC qismi esa 45° burchak hosil qiladi. Kanat A nuqtada vertikal AD ustunga bog'langan va gorizontal bilan 60° burchak hosil qiluvchi tirgak yordamida ushlab turiladi. Kanatning AB , BC qismlaridagi taranglik kuchlari hamda ustun va tirgaklardagi zo'riqishlar aniqlansin (3.12a-rasm).



3.12a-rasm.

Yechish: Masalada B va A nuqtalarning muvozanati alohida-alohida o'rganiladi. B nuqtaga qo'yilgan yuk og'irligi \vec{G} , hamda B nuqta uchun bog'lanishlar bo'lmish CB va BA kanat qismlarining reaksiya kuchlari \vec{T}_B va \vec{T}_A lar ta'sir etadi. A tugunga esa, BA kanat qismining reaksiyasi \vec{T}'_A hamda AD ustun, AE tirgakdagi zo'riqishlar \vec{S}_1 , \vec{S}_2 lar ta'sir etadi (3.12b-rasm). B nuqta muvozanatda bo'lishi uchun tugunga qo'yilgan \vec{G} , \vec{T}_B , \vec{T}_A kuchlarning geometrik yig'indisi θ ga teng bo'lishi kerak:



3.12b-rasm.

$\vec{G} + \vec{T}_B + \vec{T}_A = 0$, yani \vec{G} , \vec{T}_B , \vec{T}_A kuchlardan chizilgan kuchlar uchburchagi yopiq bo'lishi lozim.

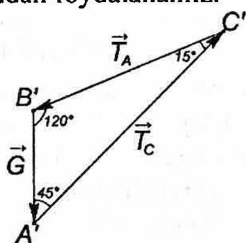
Kuchlar uchburchagini chizish uchun, masshtab tanlab, miqdori va yo'nalishi ma'lum bo'lgan \vec{G} kuchni B' nuqtaga o'ziga parallel ravishda ko'chiramiz, (2.12v-rasm) \vec{G} kuchning boshi B' va uchi A' nuqtalardan kanatning BA , BC qismlariga parallel chiziqlar o'tkazamiz. Bu chiziqlarning kesishgan nuqtasini C' bilan belgilasak hosil bo'lgan $A'B'C'$ uchburchak izlanayotgan yopiq kuchlar uchburchagini ifodalaydi. Bunda $\vec{A'C'}$ va $\vec{B'C'}$ vektorlar \vec{T}_C va \vec{T}_A taranglik kuchlarini ifodalaydi. Taranglik kuchlarini modullarini aniqlash uchun quyidagi ikki yo'ldan foydalanamiz.

a) Grafik yo'l.

Bunda $A'B'C'$ kuchlar uchburchagining $A'C'$ va $B'C'$ tomonlarini tanlangan masshtab birlikida o'lchab, T_C va T_A ning modullari aniqlanadi:

$$A'C' = 8,66 \text{ sm} \quad T_C = 1732 \text{ N.}$$

$$B'C' = 7,07 \text{ sm} \quad T_A = 1414 \text{ N.}$$



3.12v-rasm.

b) Trigonometrik yo'l.

Bunda, hosil bo'lgan kuchlar uchburchagining burchaklarini bilgan holda, reaksiya kuchlarining modullarini trigonometrik formulalar asosida aniqlash mumkin. ABC va $A'B'C'$ uchburchaklarda $AB//A'B'$, $AC//A'C'$ bo'lgani uchun $\angle A'B'C' = 45^\circ$, $\angle A'B'C' = 120^\circ$, $\angle A'B'C' = 15^\circ$. Sinuslar teoremasidan:

$$\frac{\vec{G}}{\sin 15^\circ} = \frac{\vec{T}_A}{\sin 45^\circ} = \frac{\vec{T}_C}{\sin 120^\circ}.$$

Bundan:

$$\vec{T}_A = \frac{\vec{G} \cdot \sin 45^\circ}{\sin 15^\circ} = \frac{518 \cdot 0,707}{0,259} = 1414 \text{ N},$$

$$\vec{T}_C = \frac{\vec{G} \cdot \sin 120^\circ}{\sin 15^\circ} = \frac{518 \cdot 0,866}{0,259} = 1732 \text{ N}.$$

A nuqtaning muvozanatini o'rganamiz. A nuqtaga kanat AB qismining taranglik kuchi \vec{T}'_A hamda ustun va tirgakdagi \vec{S}_1 , \vec{S}_2 zo'riqishlar ta'sir etadi. A tugun muvozanatda bo'lishi uchun \vec{T}'_A , \vec{S}_1 , \vec{S}_2 kuchlarning geometrik yig'indisi 0 ga teng bo'lishi kerak:

$$\vec{T}'_A + \vec{S}_1 + \vec{S}_2 = 0,$$

ya'ni \vec{T}'_A , \vec{S}_1 , \vec{S}_2 kuchlar uchburchagi yopiq bo'lishi lozim.

Kuchlar uchburchagini chizish uchun masshtab tanlab A nuqtaga miqdori va yo'nalishi ma'lum bo'lgan \vec{T}'_A kuchni ko'chiramiz. Kuchning boshi A va uchi B nuqtalardan ustun va tirgakka parallel chiziqlar o'tkazamiz. Bu chiziqlar C nuqtada kesishadi. Hosil bo'lgan ABC uchburchak izlanayotgan yopiq kuchlar uchburchagini tashkil etadi (3.12g-rasm). Bunda uchburchakning AB va BC tomonlari ustun va tirgakda hosil bo'ladigan \vec{S}_1 va \vec{S}_2 zo'riqishlarni ifodalaydi. Zo'riqishlarning modullarini aniqlash uchun, B tugundagidek quyidagi ikki yo'ldan foydalanamiz:

a) Grafik yo'l.

Bunda ABC kuchlar uchburchagining AB va BC tomonlarini tanlangan masshtab birligida o'lchab \vec{S}_1 va \vec{S}_2 zo'riqishlar modullari aniqlanadi:

$$AC = 7,07 \text{ sm};$$

$$\vec{S}_1 = 1414 \text{ N.}$$

$$BC = 12,24 \text{ sm};$$

$$\vec{S}_2 = 2449 \text{ N.}$$

b) Trigonometrik yo'l.

Bunda hosil bo'lgan kuchlar uchburchagining burchaklarini aniqlash lozim. Kuchlar uchburchagida AB , BC tomonlar ustun va tirkakka paralel holda chizilganligini e'tiborga olsak, $\angle ACB=30^\circ$, $\angle BAC=120^\circ$, $\angle ABC=30^\circ$ ekanligi ma'lum bo'ladi. Burchaklarning qiymatlaridan ABC kuchlar uchburchagi teng yonli uchburchak ekanligi ma'lum bo'ladi.

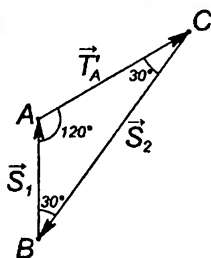
Shuning uchun $S_1 = T'_A = T_A = 1414 \text{ N}$.

Sinuslar teoremasidan:

$$\frac{S_2}{\sin 120^\circ} = \frac{T'_A}{\sin 30^\circ} = \frac{\vec{S}_1}{\sin 30^\circ}$$

Bundan :

$$S_2 = \frac{T'_A \cdot \sin 120^\circ}{\sin 30^\circ} = 1414 \cdot \frac{0,866}{0,5} = 2449 \text{ N.}$$

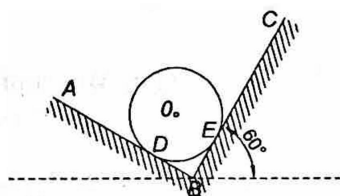


3.12g-rasm.

Hisoblashlardan ko'rinib turibdiki qo'yilgan kuchlar ta'sirida ustun siqilib, tirkak cho'zilar ekan.

3-masala.

Bir biriga tik bo'lgan ikkita silliq AB va BC og'ma tekisliklarda og'irligi 60 N bo'lgan bir jinsli O shar turibdi. BC tekislik bilan gorizont orasidagi burchak 60° . Sharining har qaysi tekislikka ko'rsatadigan bosimi aniqlansin (3.13a-rasm).



3.13a-rasm.

Yechish: Sharining og'irlik markazi O nuqtasining muvozanatini o'rganamiz. O nuqtaga sharining og'irlik kuchi \vec{G} ta'sir etadi. Bir-biriga tik bo'lgan ikkita silliq AB va BC tekisliklar shar uchun bog'lanishlar hisoblanadi. Bog'lanishlardan bo'shatish prinsipiga asosan ularning sharga ta'sirini bog'lanishlar reaksiya kuchlari \vec{N}_D va \vec{N}_E lar bilan almashtiramiz.

Bu kuchlar silliq AB va BC tekisliklarga perpendikulyar holda yoʻnaladi va taʼsir chiziqlari sharning ogʻirlik markazi O nuqtadan oʻtadi. Natijada O nuqtada kesishuvchi (\vec{G} , \vec{N}_D , \vec{N}_E) kuchlar sistemasiga ega boʻlamiz (3.13b-rasm). Kordinata boshi sifatida B nuqtani tanlab, x oʻqini \vec{N}_D reaksiya kuchi boʻylab yoʻnaltiramiz. Hosil boʻlgan bir nuqtada kesishuvchi kuchlar sistemasi uchun muvozanatning analitik shartini ifodalovchi tenglamalar quyidagi koʻrinishda yoziladi:

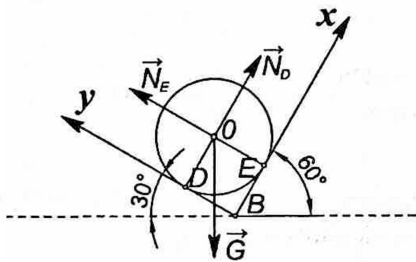
$$\sum X_i = 0 \quad N_D - G \cos 30^\circ = 0, \quad (1)$$

$$\sum Y_i = 0 \quad N_E - G \cos 60^\circ = 0. \quad (2)$$

Tenglamalarni yechib nomaʼlum reaksiya kuchlarini aniqlaymiz:

$$N_D = G \cos 30^\circ = 60 \cdot 0,866 = 52 \text{ N}.$$

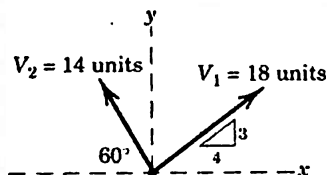
$$N_E = G \cos 60^\circ = 60 \cdot 0,5 = 30 \text{ N}.$$



3.13b-rasm.

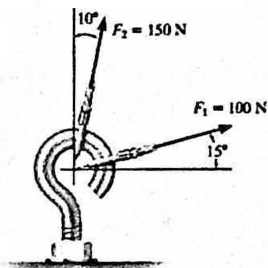
12-§. Mustaqil oʻrganish uchun talabalarga tavsiya etiladigan muammolar

Muammo - 1. 3.14-rasmda koʻrsatilgan $V_1 = 18\text{N}$, $V_2 = 14\text{N}$ kuchlarning teng taʼsir etuvchisi hamda uning x oʻqi bilan xosil qilgan burchagi aniqlansin.



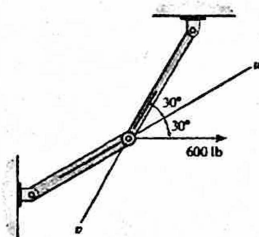
3.14-rasm.

Muammo - 2. 3.15-rasmda ko'rsatilgan \vec{F}_1 va \vec{F}_2 kuchlarning teng ta'sir etuvchisi va uning yo'nalishi aniqlansin.



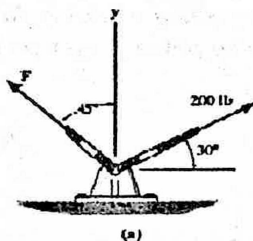
3.15-rasm.

Muammo - 3. Gorizontal holda miqdori $F=600\text{N}$ bo'lgan kuchning u va v o'qlardagi tashkil etuvchilari aniqlansin.



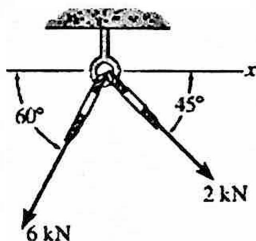
3.16-rasm.

Muammo - 4. 3.17-rasmda ko'rsatilgan \vec{F} tashkil etuvchi kuchning miqdori, hamda kuchlarning F_R teng ta'sir etuvchisi aniqlansin. Agar F_R "y" o'qida yotib, uning musbat yo'nalishi bo'yicha yo'nalgan bo'lsa.



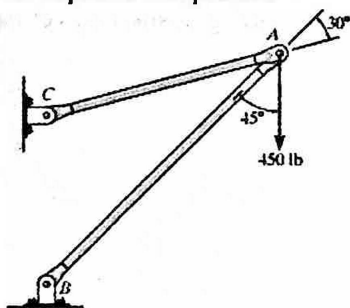
3.17- rasm.

Muammo - 5. 3.18-rasmda ko'rsatilgan kuchlarning teng ta'sir etuvchisi aniqlansin.



3.18-rasm.

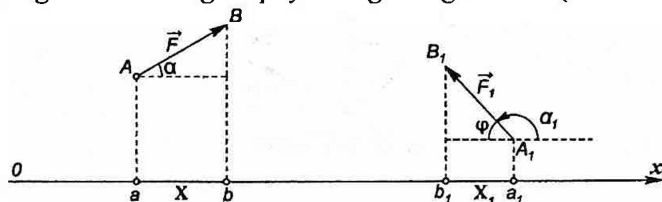
Muammo - 6. $F=450\text{N}$ kuch qurilmaning A nuqtasiga qo'yilgan. AB va AC sterjenlardagi zo'riqishlar aniqlansin.



3.19-rasm.

13-§. Kuchning o'qdagi va tekislikdagi proyeksiyasi

Kuchning biror o'qdagi proyeksiyasi skalyar miqdor bo'lib, kuch moduli hamda kuchning shu o'q musbat yo'nalishi bilan hosil qilgan burchagi kosinusining ko'paytmasiga teng bo'ladi (3.20-rasm):



3.20-rasm.

$$X_1 = a_1 b_1 = F_1 \cos \alpha_1 = \vec{F}_1 \cos(180^\circ - \varphi) = -F_1 \cos \varphi. \quad (3.8)$$

Kuchning o'qdagagi proeksiyasi ta'rifidan quyidagi natijalar kelib chiqadi:

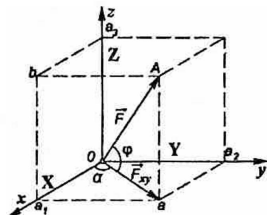
a) Kuchning parallel va bir xil yo'nalgan o'qlardagi proeksiyalari o'zaro teng bo'ladi.

b) Kuchning kuch yo'nalishiga perpendikulyar bo'lgan o'qdagi proeksiyasi nolga teng bo'ladi ($\cos 90^\circ = 0, X = 0$.)

c) Kuchning kuch yo'nalishiga parallel bo'lgan o'qdagi proeksiyasi kuch moduliga teng bo'ladi ($\cos 0^\circ = 1, X = F$.)

\vec{F} kuchning Oxyz Dekart koordinata o'qlaridagi proeksiyalarini aniqlash uchun

koordinatalar boshi sifatida \vec{F} kuch qo'yilgan O nuqtani olamiz (3.21-rasm). Agar \vec{F} kuchning Ox, Oy, Oz o'qlar bilan hosil qilgan burchaklarini α, β, γ bilan belgilasak, diagonali berilgan \vec{F} kuchga teng bo'lgan parallelepiped tomonlarining mos ishoralar bilan olingan uzunligi (3.8)ga asosan, \vec{F} kuchning koordinata o'qlaridagi proeksiyalarini ifodalaydi (3.22 - rasm):

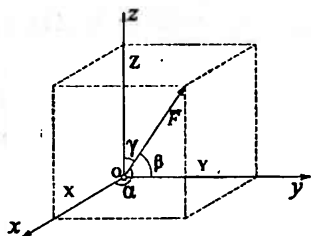


3.21-rasm.

$$X = F \cos \alpha, \quad Y = F \cos \beta, \quad Z = F \cos \gamma. \quad (3.9)$$

Koordinata o'qlaridagi proeksiyalari orqali kuchning miqdori:

$$F = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \quad (3.10)$$



3.22-rasm.

formula asosida, yo'nalishi esa

$$\cos \alpha = \frac{X}{F}, \quad \cos \beta = \frac{Y}{F}, \quad \cos \gamma = \frac{Z}{F}. \quad (3.11)$$

formulalar yordamida aniqlanadi.

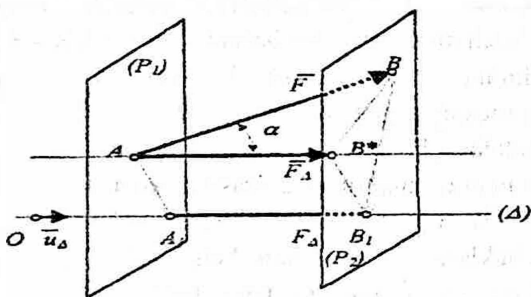
Kuch miqdori va yo'nalishini uning koordinata o'qlaridagi proeksiyalari orqali aniqlash, uni analitik usulda aniqlash deyiladi.

Agar kuch bilan o'q bir tekislikda yotmasa va ular orasidagi burchak ham berilmagan bo'lsa (3.22-rasm), kuchning o'qdagi proeksiyasini aniqlash uchun koordinatalar boshini F kuch qo'yilgan O nuqtada olib, kuchning uchi A nuqtadan xoy tekislikka perpendikulyar Aa chiziqni o'tkazamiz.

Bunday holda:

$$\vec{F}_{xy} = \overline{oa},$$

vektor \vec{F} kuchning xoy tekisligidagi proeksiyasini ifodalaydi.



3.23-rasm.

\vec{F}_{xy} vektorning Ox va Oy o'qlardagi proeksiyalarini aniqlash uchun, a nuqtadan Ox va Oy o'qlarga mos ravishda aa_1 va aa_2 perpendikulyar chiziqlarni o'tkazamiz. U paytda oa_1 va oa_2 kesmalar mos ravishda \vec{F} kuchning Ox va Oy o'qlardagi proeksiyalarini ifodalaydi:

$$X = oa_1 = F_{xy} \cos \alpha = F \cos \varphi \cos \alpha,$$

$$Y = oa_2 = F_{xy} \cos(90 - \alpha) = F \cos \varphi \sin \alpha.$$

3.23- rasmda A nuqtaga qo'yilgan \vec{F} kuch ko'rsatilgan o'nali-shidagi F kuchning proeksiyasini aniqlang.

$$A_1B_1 = \text{pro}_\Delta \vec{F} = F_\Delta.$$

Chizmadan:

$$A_1B_1 = AB^*,$$

$$F_\Delta = F \cdot \cos \alpha.$$

(3.12)

Agar Δ o'qning birlik vektori \vec{U}_Δ orqali belgilasak, \vec{F} kuchning Δ o'qdagi proeksiyasi kuch vektori \vec{F} va o'qning birlik vektorini skalyar ko'paytmasi shaklida ifodalaydi.

$$\vec{F}_\Delta = \vec{F} \cdot \vec{U}_\Delta$$

\vec{F} kuchning Δ yo'nalishdagi tashkil etuvchisi komponenti quyidagicha aniqlanadi:

$$\vec{F}_\Delta = \vec{F} \cdot \vec{U}_\Delta$$

14-§. Bir nuqtada kesishuvchi kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchisini analitik usulda aniqlash

Bir nuqtada kesishuvchi $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ kuchlarning teng ta'sir etuvchisi shu kuchlarning geometrik yig'indisiga teng bo'ladi:

$$\vec{R}' = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i. \quad (3.13)$$

Bu vektorli tenglikni koordinata o'qlariga proeksiyalab, teng ta'sir etuvchi kuchning koordinata o'qlaridagi proeksiyalari aniqlanadi:

$$R'_x = \sum_{i=1}^n X_i, \quad R'_y = \sum_{i=1}^n Y_i, \quad R'_z = \sum_{i=1}^n Z_i. \quad (3.14)$$

Teng ta'sir etuvchining moduli uning koordinata o'qlaridagi proeksiyalari orqali, (3.12)ga asosan, quyidagicha aniqlanadi:

$$R' = \sqrt{(R'_x)^2 + (R'_y)^2 + (R'_z)^2} \quad (3.15)$$

yo'nalishi esa (3.11)ga asosan quyidagicha topiladi:

$$\begin{aligned} \cos(\vec{R}' \cdot \vec{i}) &= \frac{R'_x}{R'}, \\ \cos(\vec{R}' \cdot \vec{j}) &= \frac{R'_y}{R'}, \\ \cos(\vec{R}' \cdot \vec{k}) &= \frac{R'_z}{R'}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

15-§. Bir nuqtada kesishuvchi kuchlar sistemasi muvozanatining analitik sharti

Bir nuqtada kesishuvchi kuchlar sistemasi muvozanatda bo'lishi uchun kuchlar sistemasining bosh vektori nolga teng bo'lishi zarur va yetarli.

$$\vec{R}' = 0$$

Agar :

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$$

Ekanligini e'tiborga olsak (1) o'rinli bo'ladi.

Agar : $R_x = \sum X_k = 0$

$$R_y = \sum Y_k = 0$$

$$R_z = \sum Z_k = 0$$

Bir nuqtada kesishuvchi $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchisi nolga teng bo'lsa, bunday kuchlar sistemasi muvozanatda bo'ladi, aksincha, kuchlar sistemasi muvozanatda bo'lsa, kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchisi nolga teng bo'ladi:

$$\vec{R}' = 0 \quad (3.17)$$

yoki:

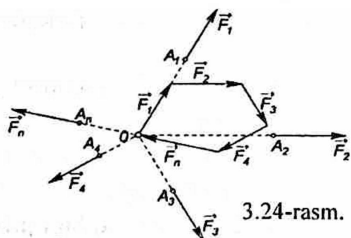
$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0. \quad (3.18)$$

(4.17) yoki (4.18) tenglamalar kesishuvchi kuchlar sistemasi muvozanatining vektor ko'rinishdagi zaruriy va yetarli shartlarini ifodalaydi.

Binobarin, kesishuvchi kuchlar sistemasi ta'siridagi erkin jism muvozanatda bo'lishi uchun, mazkur sistemani tashkil qiluvchi kuchlarning geometrik yig'indisi nolga teng bo'lishi zarur va yetarli ekan.

(4.18) tenglamaning geometrik ma'nosi quyidagicha: $R'=0$ shart bajarilishi uchun kesishuvchi $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ kuchlardan qurilgan kuchlar ko'pburchagi yopiq bo'lishi kerak, ya'ni mazkur ko'pburchakda birinchi kuchning boshi bilan oxirgi kuchning uchi ustma-ust tushishi kerak (3.24-rasm).

Demak, bir nuqtada kesishuvchi kuchlar sistemasi muvozanatda bo'lishi uchun, bu kuchlardan qurilgan kuchlar ko'pburchagi yopiq bo'lishi zarur va yetarli ekan. Teng ta'sir etuvchi $\vec{R}' = 0$ bo'lsa, (2.)ga asosan:



$$R'_x = 0, \quad R'_y = 0, \quad R'_z = 0.$$

Yoki

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n X_i &= 0, \\ \sum_{i=1}^n Y_i &= 0, \\ \sum_{i=1}^n Z_i &= 0. \end{aligned} \quad (4.19)$$

bo'ladi.

Bu tengliklar kesishuvchi kuchlar sistemasi muvozanat shartining analitik ifodasidir. Demak, kesishuvchi kuchlar sistemasi ta'siridagi erkin jism muvozanatda bo'lishi uchun kuchlarning har bir koordinata o'qlaridagi proeksiyalarining yig'indisi alohida - alohida nolga teng bo'lishi zarur va yetarli ekan.

Kesishuvchi kuchlar bir tekislikda, masalan oxy tekisligida yotsa, mazkur tekislikda yotgan kesishuvchi kuchlar sistemasining muvozanat shartining analitik ifodasi quyidagicha bo'ladi:

$$\sum_{i=1}^n X_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n Y_i = 0. \quad (4.20)$$

Agar muvozanatdagi jism erkin bo'lmasa, bog'lanishlardan bo'shatish prinsipiga ko'ra, bog'lanishlarning jismga ko'rsatadigan ta'sirini bog'lanishlar reaksiya kuchlari bilan almashtirish lozim. Natijada, bunday jism berilgan kuchlar va bog'lanishlar reaksiya kuchlari ta'siridagi erkin jism deb qaraladi. Shu sababli (4.19), (4.20) tenglamalarda berilgan kuchlar bilan bir qatorda bog'lanishlar reaksiya kuchlari ham qatnashadi.

Takrorlash uchun savollar

1. Kuchning o'qqa proyeksiyasini aniqlashni tushuntirib bering.
2. Qaysi holda kuchning o'qqa proyeksiyasi nolga teng bo'ladi?
3. Kesishuvchi kuchlar sistemasining geometrik muvozanat shartini ko'rsating.
4. Kuchning o'qdagi proyeksiyasi.
5. Kesishuvchi kuchlar sistemasining analitik muvozanat sharti.
6. Kuchning tekislikdagi proyeksiyasi.

16-§. Bir nuqtada kesishuvchi kuchlar sistemasi muvozanatining analitik shartiga oid masalalarni yechish uchun uslubiy ko'rsatmalar

Umuman statikada jismning muvozanatiga oid masalalar, jismga ta'sir etayotgan kuchlarning o'zaro qanday joylashishidan qat'iy nazar, quyidagi tartibda yechiladi:

- 1) Muvozanati o'rganilayotgan jism (yoki nuqta) aniqlanadi;
- 2) Koordinatalar sistemasi tanlab olinadi;
- 3) Jismga ta'sir etayotgan, berilgan kuchlar ko'rsatiladi;
- 4) Jismni bog'lanishlardan bo'shatib, ularning ta'sirlari bog'lanish reaksiya kuchlari bilan almashtiriladi;
- 5) Muvozanati o'rganilayotgan jism berilgan kuchlar va bog'lanishlar reaksiya kuchlari ta'siridagi erkin jism deb qaraladi;
- 6) Jismga ta'sir etayotgan kuchlar qanday kuchlar sistemasini tashkil etishiga qarab, ularga xos muvozanat tenglamalari tuziladi;
- 7) Tuzilgan muvozanat tenglamalarini yechib, aniqlanishi lozim bo'lgan noma'lum kattaliklar topiladi;

Agar jismga ta'sir etuvchi kuchlar bir nuqtada kesishuvchi kuchlar sistemasini tashkil etsa, mavzuga doir masalalar quyidagi usullarda yechiladi:

Analitik usul.

Bu usulda ham yuqorida bayon etilgan masalalar yechish tartibidagi 1-5 amallar bajariladi. Keyin :

- 6) Jismga ta'sir etayotgan tekislikda yotuvchi bir nuqtada kesishuvchi kuchlar sistemasining muvozanat tenglamalari tuziladi.

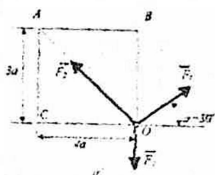
Bunda, koordinata o'qlaridan birini noma'lum kuchga perpendikulyar holda o'tkazish maqsadga muvofiq bo'ladi;

7) Muvozanat tenglamalarini yechib, noma'lum kattaliklar aniqlanadi.

17-§. Bir nuqtada kesishuvchi kuchlar sistemasi muvozanatining analitik shartiga oid masalalar

1. Masala: 3.25a-rasmda ko'rsatilgan kuchlar sistemasi teng ta'sir etuvchisining miqdori va yo'nalishi aniqlansin.

Berilgan: $F_1 = 10N, F_2 = 20N, F_3 = 17.3N$



3.25a- rasm.

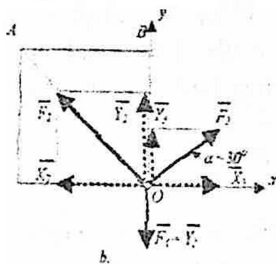
Yechimi. Kuchlar O nuqtaning muvozanatini o'rganamiz. Kordinata boshi sifatida O nuqtani tanlab, kordinata o'qlari Ox va Oy larni o'tkazamiz.

1. O nuqtaga qo'yilgan kuchlarning kordinata o'qlaridagi proyeksiyalarini aniqlaymiz:

$$X_1 = 0; \quad Y_1 = -F_1 = -10N.$$

$$X_2 = F_2 \frac{OC}{OA} = 20 \frac{4a}{5a} = 16N; \quad Y_2 = F_2 \frac{OB}{OA} = 20 \frac{3a}{5a} = 12N.$$

$$X_3 = F_3 \cos \alpha = 17.3 \frac{\sqrt{3}}{2} = 15N; \quad Y_3 = F_3 \sin \alpha = F_3 \frac{1}{2} = 8.65N.$$



3.25b- rasm.

2. Berilgan kuchlarning teng ta'sir etuvchisini kordinata o'qlaridagi proyeksiyalarini aniqlaymiz:

$$X = \sum X_i = -X_2 + X_3 = -16 + 15 = -1N.$$

$$Y = \sum Y_i = -Y_1 + Y_2 + Y_3 = -10 + 12 + 8.65 = 10.65N.$$

Demak, berilgan kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchisi quyidagicha izohlanadi:

$$\vec{R} = -\vec{i} + 10.65\vec{j}$$

Uning moduli quyidagiga teng bo'ladi:

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2} = \sqrt{1^2 + 10.65^2} = 10.75N$$

3. Berilgan kuchlar sistemasi teng ta'sir etuvchisining yo'nalishini aniqlaymiz

$$\tan \alpha = \frac{Y}{X} = \frac{10.65}{-1} = -10.65.$$

$$\alpha = 96^\circ.$$

2-masala.

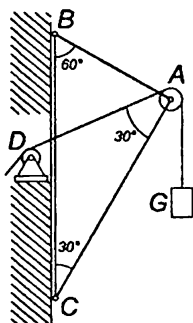
Og'irligi $G=20\text{ N}$ bo'lgan yuk A va D bloklar orqali o'tkazilgan zanjir vositasida BAC magazinli kran bilan ko'tariladi. D blok devorga shunday maxkamlanadiki, burchak $CAD=30^\circ$. Kraning sterjenlari orasidagi burchaklar:

$$\angle ABC=60^\circ, \angle ACB=30^\circ$$

AB va AC sterjenlardagi \vec{S}_1 va \vec{S}_2 zo'riqishlar aniqlansin (3.26a-rasm).

Yechish: A blok va u orqali o'tkazilgan zanjir qismini bir butun deb qarab, ularning muvozanatini o'rganamiz. A blok va u orqali o'tkazilgan zanjir qismiga yuk og'irligi \vec{G} va AD zanjir taranglik kuchi \vec{T} ta'sir etadi. A blok uchun AB va AC sterjenlar-bog'lanishlar hisoblanadi. Ularning A blokga ta'sirini bog'lanishlar-sterjenlar reaksiya kuchlari \vec{S}_1 va \vec{S}_2 bilan almashtiramiz.

Natijada A blok yuk og'irligi \vec{G} , zanjir AD qismidagi taranglik kuchi \vec{T} ($T = G$),



3.26a-rasm.

sterjenlar reaksiyalari \vec{S}_1 va \vec{S}_2 lar ta'sirida bo'ladi. Sterjenlar reaksiya kuchlari sterjenlar bo'ylab yo'naladi. Mazkur kuchlar sistemasi A nuqtada kesishuvchi kuchlar sistemasini tashkil etadi (A blok o'lchamlari hisobga olinmadi) (3.26b-rasm).

Koordinata boshi sifatida A nuqtani tanlab, A_x o'qini AB sterjen bo'ylab, o'ng tomonga yo'naltiramiz. Kuchlar sistemasi uchun muvozanat tenglamalarini tuzamiz:

$$\sum X_i = 0 \quad -S_1 + G \cos 60^\circ - T \cos 60^\circ = 0. \quad (1)$$

$$\sum Y_i = 0 \quad -S_2 - G \cos 30^\circ - T \cos 30^\circ = 0. \quad (2)$$

Tenglamalarni yechib noma'lum zo'riqlashlarni aniqlaymiz:

$$(1) \text{ dan: } \vec{S}_1 = \vec{G}(\cos 60^\circ - \cos 60^\circ) = 0,$$

(2)dan:

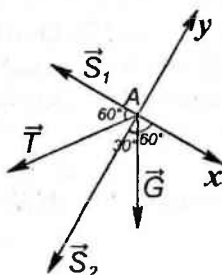
$$\vec{S}_2 = -\vec{G}(\cos 30^\circ + \cos 30^\circ) = -20 \cdot \sqrt{3} = -34.6 \text{ N}.$$

Hisoblashlardan ko'rinib turibdiki, mazkur masalada AB sterjen yuklanmas ekan. Binobarin $S_1 = 0$, AC sterjen esa siqilar ekan.

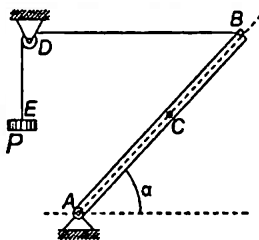
3-masala.

Og'irligi $G=1.5\text{N}$ bo'lgan AB balka A sharnir o'qi atrofida aylanishi mumkin. Balkaning og'irlik markazi C nuqta, bunda $AC=2CB$. Balka BDE arqon yordamida gorizont bilan $\alpha=45^\circ$ burchak tashkil etgan holda ushlab turiladi. Arqonning E uchiga P yuk osilgan. Arqonning $B D$ qismi gorizont. P yuk og'irligi va A sharnir reaksiyasi aniqlansin. Blokdagi ishqalanish hisobga olinmasin (3.27a-rasm).

Yechish: AB balkaning muvozanatini o'rganamiz. Balkaga uning og'irlik kuchi \vec{G} ta'sir etadi. Bu kuch vertikal pastga yo'nalgan bo'lib, balkaning og'irlik markazi C nuqtaga qo'yiladi. Balka uchun bog'lanishlar A sharnir va BDE arqon hisoblanadi.



3.26b-rasm.



3.27a-rasm.

Bog'lanishlardan bo'shatish prinsipiga asosan, ularning balkaga ta'sirini bog'lanishlar reaksiya kuchlari bilan almashtiramiz. Bunda arqon reaksiyasi (\vec{T}) B nuqtaga qo'yiladi va BD arqon bo'ylab yo'naladi. A sharnir reaksiyasi A nuqtaga qo'yilgan, lekin uning yo'nalishi noma'lum. A sharnir reaksiyasining yo'nalishini aniqlash uchun uch kuch muvozanatiga oid teoremadan foydalanamiz. Teoremaga ko'ra, o'zaro parallel bo'lmagan, bir tekislikda yotuvchi uch kuch muvozanatlashsa, ularning ta'sir chiziqlari bir nuqtada kesishadi. Shuning uchun dastlab, balka og'irligi \vec{G} va arqon taranglik kuchi \vec{T} larning ta'sir chiziqlari kesishgan K nuqtani aniqlaymiz (3.27b-rasm). U paytda sharnir reaksiya kuchining ta'sir chizig'ini shu nuqtadan o'tishi ma'lum bo'ladi. K nuqtada kesishuvchi uchta kuchdan yopiq kuchlar uchburchagini chizamiz (3.27v-rasm). Hosil bo'lgan kuchlar uchburchagini yechib, masala shartida talab etilgan noma'lum kattaliklarni aniqlaymiz.

Buning uchun ALK uchburchak tomonlarini aniqlaymiz:

$$AL = \ell \quad \alpha = 45^\circ \text{ bo'lsa,}$$

$$CL = AL = \ell, \quad \Delta CKB \sim \Delta CLA \text{ bo'ladi.}$$

Uchburchaklarning o'xshashligidan:

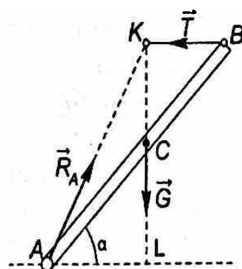
$$\frac{KC}{CL} = \frac{CB}{AC}; \quad \frac{KC}{CL} = \frac{CB}{2CB}; \quad KC = \frac{1}{2} CL = \frac{1}{2} \ell = 0,5\ell,$$

$$KL = KC + CL = \frac{1}{2} \ell + \ell = \frac{3}{2} \ell = 1,5 \ell,$$

$$K = \sqrt{(AL)^2 + (KL)^2} = \sqrt{\ell^2 + \frac{9}{4} \ell^2} = \sqrt{\frac{13}{2}} \ell = \left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right) \ell = 1,8 \ell.$$

abc kuchlar uchburchagi KLA

uchburchakga o'xshash: $\Delta abc \sim \Delta KLA$.



3.27b-rasm.

Shuning uchun,

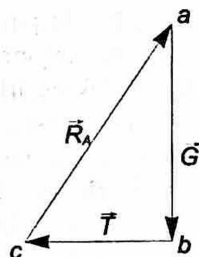
$$\frac{T}{AL} = \frac{G}{KL} = \frac{R_A}{AK}$$

yoki

$$\frac{T}{\ell} = \frac{G}{1,5\ell} = \frac{R_A}{1,8\ell}$$

Bu ifodalardan noma'lum kattaliklarni aniqlaymiz: $T = \frac{G}{1,5} = 1 \text{ kN}$.

$$R_A = \frac{1,8G}{1,5} = 1,8 \text{ kN}.$$



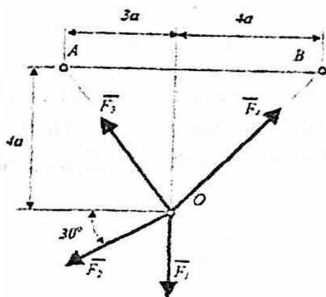
3.27v-rasm.

D blokda ishqalanish kuchi hisobga olinmasa $P = T = 1 \text{ kN}$ bo'ladi.

18-§. Mustaqil o'rganish uchun talabalarga tavsiya etiladigan muammolar

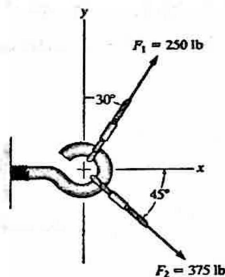
Muammo-1. 3.28-rasmda ko'rsatilgan kuchlar sistemasi teng ta'sir etuvchisini miqdori va yo'nalishi aniqlansin.

Berilgan: $F_1 = 3F$; $F_2 = 5F$; $F_3 = 5F$; $F_4 = 5\sqrt{2}F$.



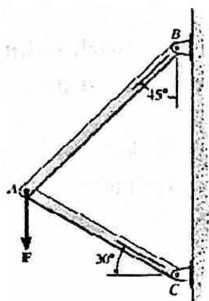
3.28- rasm.

Muammo-2. 3.29-rasmda ko'rsatilgan kuchlar sistemasi teng ta'sir etuvchisini miqdori va yo'nalishi aniqlansin.



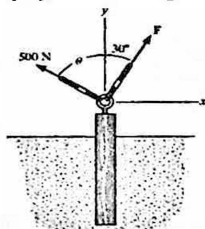
3.29- rasm.

Muammo-3. Qurilmaning A nuqtasiga vertikal pastga yoʻnalgan \vec{F} kuch qoʻyilgan. AC va AB sterjenlardagi zoʻriqishlar aniqlansin (3.30 – rasm).



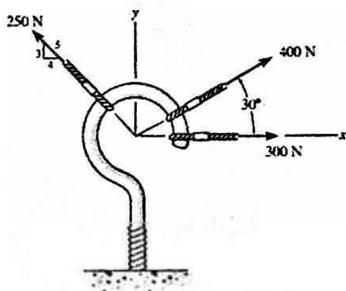
3.30- rasm.

Muammo-4. 3.31-rasmda vintga qoʻyilgan kuchlar koʻrsatilgan. Agar $F=600\text{N}$ boʻlsa, kuchlarni teng taʼsir etuvchisini miqdori va uning vertikal bilan hosil qilgan burchagi topilsin.



3.31- rasm.

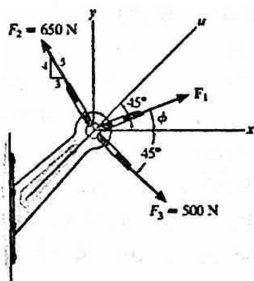
Muammo-5. 3.32-rasmda koʻrsatilgan mexanizmga taʼsir etayotgan kuchlarning teng taʼsir etuvchisi va uning yoʻnalishi aniqlansin.



3.32- rasm.

Muammo-6. 3.34-rasmda ko'rsatilgan kronshteynga ta'sir etuvchi kuchlarning teng ta'sir etuvchisi aniqlansin.

$\varphi = 30^\circ$ deb qabul qilinsin.



3.34- rasm.

IV-BOB. MOMENTLAR VA TEKISLIKDAGI JUFT KUCHLAR NAZARIYASI

19-§. Kuchning nuqtaga nisbatan algebraik momenti

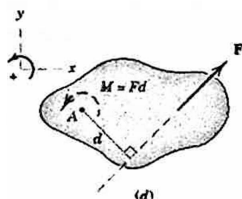
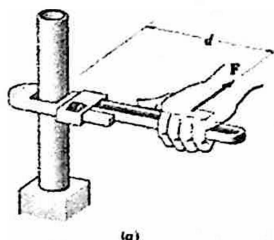
Jismning qo'zg'almas nuqta yoki o'q atrofida aylanishi unga qo'yilgan kuchning momentiga bog'liq bo'ladi. Bunda jismga qo'yilgan kuchning momenti hisoblanadigan nuqta moment markazi, kuchning bu nuqtaga nisbatan momenti – moment markaziga nisbatan kuch momenti deyiladi.

Faraz qilaylik, shakl tekisligiga perpendikulyar o'q atrofida aylana oladigan jismning A nuqtasiga \vec{F} kuch qo'yilgan bo'lsin. O'qning shakl tekisligi bilan kesishgan nuqtasini O bilan belgilaymiz. Bunday holda, *jismning A nuqtasiga qo'yilgan \vec{F} kuchning O nuqtaga nisbatan momenti deb, mos ishora bilan olingan kuch moduli F ni kuch yelkasi d ga ko'paytmasiga teng kattalikka aytiladi* (4.1-rasm). Bunda O nuqtadan \vec{F} kuchning ta'sir chizig'iga tushirilgan perpendikulyarning uzunligi \vec{F} kuchning O nuqtaga nisbatan yelkasi deyiladi.

Kuch momentining algebraik qiymati $M_o(\vec{F})$ bilan belgilanadi va u quyidagi formula yordamida aniqlanadi:

$$M_o(\vec{F}) = \pm F \cdot d. \quad (4.1)$$

Agar \vec{F} kuch jismni O nuqta atrofida soat strelkasi yo'nalishida aylantirsa, kuch momenti musbat, aks holda, manfiy hisoblanadi (4.1a, 4.1d-rasmlar):



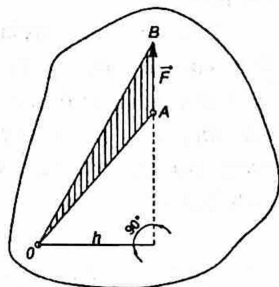
4.1-rasm.

Kuchning nuqtaga nisbatan momenti quyidagi xossalarga ega:

1. Kuchning miqdori va yo'nalishini o'zgartirmay, ta'sir chizig'i bo'ylab ixtiyoriy nuqtaga ko'chirishdan, kuch yelkasi o'zgar olmay qolishi tufayli, kuch momenti o'zgar olmaydi.

2. Kuchning ta'sir chizig'i moment markazidan o'tsa, uning shu nuqtaga nisbatan momenti, kuch yelkasi nolga teng bo'lganligi uchun, nolga teng bo'ladi.

3. 4.3-rasmga ko'ra, kuchning nuqtaga nisbatan momentining absolyut qiymati kuchning boshi va uchini moment markazi bilan tutashtirishdan hosil bo'lgan OAB uchburchak yuzasining ikkilanganiga teng bo'ladi.

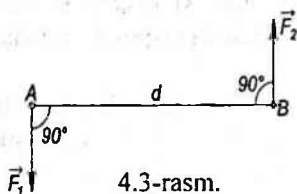


$$|M_o(\vec{F})| = 2S_{\Delta OAB} = |F \cdot d| \quad (4.2)$$

4.2-rasm.

20-§. Juft kuch. Juft kuch momenti.

Juft kuch deb miqdor jihatdan teng, bir to'g'ri chiziqda yotmaydigan, parallel va qarama – qarshi yo'nalgan ikki kuchdan iborat sistemaga aytiladi. Juft kuch (\vec{F}_1, \vec{F}_2) bilan belgilanadi (4.3-rasm).



4.3-rasm.

Juft kuchni tashkil etgan kuchlar orasidagi eng qisqa masofa juft kuch yelkasi deyiladi va u d bilan belgilanadi. Juft kuch yotgan tekislik juft kuch tekisligi deyiladi.

Juft kuchni tashkil etuvchi kuchlar teng ta'sir etuvchiga ega emas. Juft kuchni bitta kuch bilan almashtirib bo'lmaydi. Shu sababli, faqat juft kuch ta'sirida bo'lgan jism ilgarilanma harakat qila olmaydi! Juft kuch statikaning mustaqil elementi hisoblanadi!

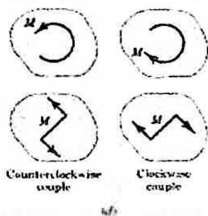
Juft kuch momenti. Juft kuch ta'sirida jism juft tekisligida aylanma harakatda bo'lishi mumkin. Juft kuchning aylantirish effekti:

1. Juft kuchni tashkil etuvchi kuchlarning moduli $|\vec{F}_1|, |\vec{F}_2|$ va juft yelkasining uzunligi d ga;
2. Juft kuch tekisligining egallagan holatiga;
3. Juft kuch ta'siridagi jismning aylanish yo'nalishiga bog'liq bo'ladi.

Juft kuchning aylantirish effektini aniqlash va baholash uchun juft kuch momenti tushunchasi kiritiladi. **Juft kuchning momenti deb, mos ishora bilan olingan juft kuchni tashkil qilgan kuchlardan birining miqdorini juft kuch yelkasining uzunligiga ko'paytmasiga teng bo'lgan kattalikka aytiladi.** Juft kuch momenti M bilan belgilanadi:

$$M = \pm F_1 d = \pm F_2 d \quad (4.3)$$

Juft kuch jismni soat milining aylanishiga teskari yo'nalishda aylantirishga intilsa, uning momenti musbat, aks holda – manfiy hisoblanadi (4.4-rasm). Shartli ravishda juft kuchlar yoysimon strelkalar orqali tasvirlanadi. Bunda juft kuch momentining kattaligi M orqali, uning ishorasi esa strelka yo'nalishi orqali ifodalanadi.



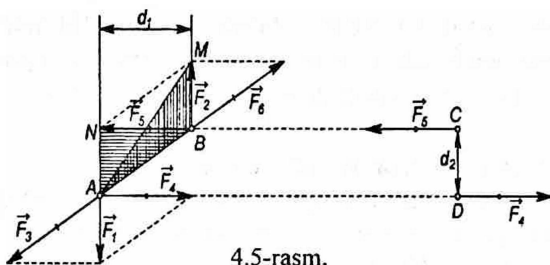
4.4-rasm.

21-§. Bir tekislikda yotuvchi juft kuchlarning ekvivalentligi haqida teorema

Berilgan juft kuchning jismga ko'rsatadigan ta'sirini boshqa juft kuch bera olsa, bunday juft kuchlar ekvivalent juft kuchlar deyiladi.

Juft kuchning asosiy xossalari quyidagi teoremada ifodalangan:

Teorema. Agar juft kuch, shu juft kuch tekisligida yotuvchi va momenti berilgan juft kuchning momentiga teng bo'lgan juft kuch bilan almashtirilsa, juft kuchning jismga ta'siri o'zgarmaydi.



4.5-rasm.

Iisboti. Jismga yelkasi d_1 va momenti M_1 ga teng bo'lgan (\vec{F}_1, \vec{F}_2) juft kuch qo'yilgan bo'lsin (4.5-rasm). \vec{F}_1 va \vec{F}_2 kuchlar qo'yilgan A va B nuqtalardan o'zaro parallel AD va BC chiziqlarni o'tkazamiz. Bu chiziqlar orasidagi eng qisqa masofani d_2 bilan belgilaymiz. \vec{F}_1 kuchni AB va AD chiziqlar bo'ylab yo'nalgan \vec{F}_3, \vec{F}_4 tashkil etuvchilarga, \vec{F}_2 kuchni BC va BA chiziqlar bo'ylab yo'nalgan \vec{F}_5 va \vec{F}_6 tashkil etuvchilarga ajratamiz:

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_3 + \vec{F}_4, \quad \vec{F}_2 = \vec{F}_5 + \vec{F}_6. \quad (4.4)$$

Natijada, (\vec{F}_1, \vec{F}_2) kuchlar sistemasi o'rniga, unga ekvivalent $(\vec{F}_3, \vec{F}_4, \vec{F}_5, \vec{F}_6)$ kuchlar sistemasiga ega bo'lamiz. Kuchlarni qo'yilishiga ko'ra:

$$\vec{F}_3 = -\vec{F}_6, \quad \vec{F}_4 = -\vec{F}_5. \quad (4.5)$$

Bunda \vec{F}_3 va \vec{F}_6 kuchlar miqdor jihatdan teng va bir to'g'ri chiziq bo'ylab qarama – qarshi tomonlarga yo'nalganligi uchun:

$$(\vec{F}_3, \vec{F}_6) \infty 0$$

bo'ladi.

\vec{F}_4 va \vec{F}_5 kuchlar esa yelkasi d_2 ga teng bo'lgan juft kuchni tashkil etadi. \vec{F}_4 va \vec{F}_5 kuchlarni ta'sir chiziqlari bo'ylab, D va C nuqtalarga keltirsak, (\vec{F}_1, \vec{F}_2) juft kuch o'rniga, (\vec{F}_4, \vec{F}_5) juft kuchga ega bo'lamiz:

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \infty (\vec{F}_4, \vec{F}_5). \quad (4.6)$$

Bu juft kuchlar jismni bir tomonga aylantiradi, ya'ni, momentlarining ishoralari bir xil. (\vec{F}_1, \vec{F}_2) juft kuch momentini M_1 , (\vec{F}_4, \vec{F}_5) juft kuch momentini M_2 bilan belgilasak, shakldan:

$$\begin{aligned} M_1 &= F_2 \cdot d_1 = 2S_{\Delta ABM}, \\ M_2 &= F_4 \cdot d_2 = 2S_{\Delta ABN}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Lekin, ABM va ABN uchburchaklarda AB tomon umumiy, $MN \parallel BA$ bo'lgani uchun, ular bir xil balandlikka ega. Demak, bu uchburchaklarning yuzalari ham bir xil. Binobarin:

$$M_1 = M_2.$$

Shunday qilib, teorema isbotlandi.

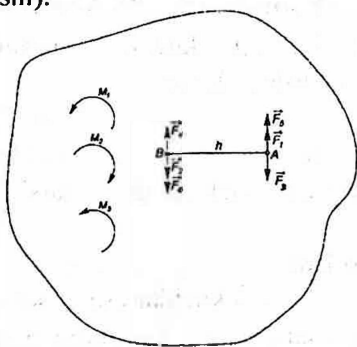
Isbotlangan teoremadan quyidagi natijalar kelib chiqadi:

1. *Juft kuch momentini o'zgartirmay, o'z ta'sir tekisligida ixtiyoriy joyga ko'chirilsa, uning jismga ta'siri o'zgarmaydi.*
2. *Juftning momenti va aylanish yo'nalishini o'zgartirmay, uning tashkil etuvchilari va yelkasi o'zgartirilsa, juft kuchning jismga tasiri o'zgarmaydi.*

22-§. Bir tekislikda yotuvchi juft kuchlarni qo'shish

Jismga bir tekislikda yotuvchi va momentlari M_1, M_2, M_3 bo'lgan juft kuchlar ta'sir etsin. Juft kuchlarni shartli ravishda yoysimon strelkalar bilan almashtiramiz (4.6-rasm).

Ekvivalent juftlar haqidagi teoreмага asosan, jismga ta'sir etayotgan uchta juftni momentlarini o'zgartirmay, umumiy d yelkaga ega bo'lgan, tashkil etuvchilari $AB=d$ kesmaning A va B nuqtalariga juft kuch momentlarining ishoralarini e'tiborga olingan holda qo'yilgan, $(\vec{F}_1, \vec{F}_2), (\vec{F}_3, \vec{F}_4), (\vec{F}_5, \vec{F}_6)$ juftlarga keltiramiz.



4.6-rasm.

Bunda juft kuchlarni tuzuvchi kuchlarning miqdorlari quyidagicha aniqlanadi:

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{M_1}{d}, \\ F_3 &= \frac{M_2}{d}, \\ F_5 &= \frac{M_3}{d}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

A va B nuqtalarga qo'yilgan kuchlarni alohida – alohida qo'shib, A nuqtada \vec{R}_1 , B nuqtada \vec{R}_2 kuchlarga ega bo'lamiz. Bunda:

$$\begin{aligned}R_1 &= F_1 - F_3 + F_5, \\R_2 &= F_2 - F_4 + F_6.\end{aligned}\quad (4.9)$$

Bu kuchlar berilgan juft kuchlarga ekvivalent bo'lgan (\vec{R}_1 , \vec{R}_2) juft kuchni tashkil etadi. Uning momenti:

$$M = R_1 d = M_1 - M_2 + M_3 = F_1 \cdot d - F_3 \cdot d + F_5 \cdot d \quad (4.10)$$

formuladan aniqlanadi. Xuddi shuningdek, bir tekislikda yotuvchi va momentlari M_1, M_2, \dots, M_n bo'lgan juftlar sistemasini qo'shib, ularga ekvivalent bo'lgan juft kuchga ega bo'lish mumkin.

Uning momenti:

$$M = M_1 + M_2 + \dots + M_n = \sum_{i=0}^n M_i \quad (4.11)$$

ormuladan aniqlanadi.

23-§. Bir tekislikda yotuvchi juft kuchlarni qo'shish va ularning muvozanat sharti. Juft kuchlar sistemasining muvozanat shartlari

Bir tekislikda yotuvchi juft kuchlarni qo'shib, ularni momenti M bo'lgan ekvivalent juftga keltirish mumkin ekanligini yuqorida bayon etdik. Binobarin, *tekislikdagi juftlar sistemi muvozanatda bo'lishi uchun berilgan juftlar momentlarining algebraik yig'indisi nolga teng bo'lishi zarur va yetarlidir:*

$$\sum_{i=0}^n M_i = 0. \quad (4.12)$$

Takrorlash uchun savollar

1. Kuchning nuqtaga nisbatan momenti deb nimaga aytiladi?
2. Kuch yelkasi deb nimaga aytiladi?
3. Kuch momenti qachon nolga teng bo'ladi?
4. Kuch momentining ishorasi qanday aniqlanadi?
5. Juft kuch deb nimaga aytiladi?
6. Juft kuch teng ta'sir etuvchiga ega bo'ladimi?
7. Juft momenti deb nimaga aytiladi?
8. Juft yelkasi deb nimaga aytiladi?
9. Tekislikdagi juftlar qanday qo'shiladi?
10. Tekislikdagi juftlarning muvozanat shartini aytib bering.

V-BOB. TEKISLIKDAGI KUCHLAR SISTEMASI

24-§. Kuchni o'ziga parallel ko'chirishga oid lemma

Jismning biror nuqtasiga qo'yilgan kuchni uning ta'sir chizig'i bo'ylab boshqa nuqtaga qo'chirganda, uning jismga ta'siri o'zgar-maydi. Ammo, o'ziga parallel holda ta'sir chizig'ida yotmaydigan boshqa biror nuqtaga ko'chirilsa, kuchning jismga ta'siri o'zgaradi. Kuch o'ziga parallel ravishda jismning qaysi nuqtasiga keltirilsa, shu nuqta keltirish markazi deyiladi.

Kuchning jismga ta'sirini o'zgartirmay, o'ziga parallel ravish-da, bir nuqtadan ikkinchi nuqtaga ko'chirish masalasi, 1804 yilda fransuz olimi Lui Puanso (1777-1859) tomonidan o'rganilgan va quyidagi lemmada ifodalangan.

Lemma. *Jismning biror nuqtasiga qo'yilgan kuch jismda olingan ixtiyoriy keltirish markaziga qo'yilgan xudday kuch-ga va momenti berilgan kuchning keltirish markaziga nisba-tan momentiga teng bo'lgan juft kuchga ekvivalent bo'ladi.*

Isboti. Jismning A nuqtasiga \vec{F} kuch qo'yilgan bo'lsin (5.1a-rasm), uning jismga ta'sirini o'zgartirmay, parallel ravishda ixtiyoriy O nuqtaga ko'chirish talab etilsin.

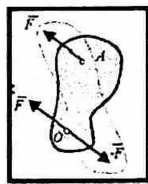
Buning uchun O nuqtaga ta'sir chizig'i \vec{F} ga parallel ($\vec{F}', \vec{F}'' \in \infty 0$ kuchlar sistemasini qo'yamiz (5.1b-rasm).

Bu nollik sistemani tashkil etuvchi kuchlar $|\vec{F}'| = |\vec{F}''| = |\vec{F}|$ bo'lsin. Natijada A nuqtaga qo'yilgan \vec{F} kuch ($\vec{F}, \vec{F}', \vec{F}''$) kuchlar sistemasiga ekvivalent bo'ladi. Lekin ($\vec{F}, \vec{F}', \vec{F}''$) kuchlar sistemasi o'z navbatida, O nuqtaga qo'yilgan $\vec{F}'' = \vec{F}$ kuchga va (\vec{F}, \vec{F}') juftga ekvivalent bo'ladi. (\vec{F}, \vec{F}') juftning momenti \vec{M} kuchning O nuqtaga nisbatan momentiga teng ekanligi juft kuchlar nazariyasidan ma'lum: $M = M_o(\vec{F})$ (5.1)

Binobarin, A nuqtaga qo'yilgan \vec{F} kuch, keltirish markazi O ga qo'yilgan $\vec{F}'' = \vec{F}$ kuchga va momenti $M = M_o(\vec{F})$ bo'lgan juft kuchga ekvivalent bo'lar ekan [4] (5.1v-rasm). Bu juft qo'shilgan juft kuch deyiladi. Shu bilan lemma isbotlandi.



5.1a-rasm.



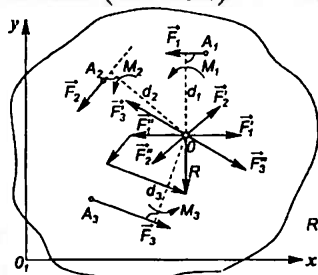
5.1b-rasm.



5.1v-rasm.

**25-§. Tekislikdagi kuchlar sistemasini bir markazga keltirish.
Tekislikdagi kuchlar sistemasining bosh vektori va bosh momenti**

Jismning A_1, A_2, \dots, A_n nuqtalariga bir tekislikda yotuvchi $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ kuchlar ta'sir etsin (5.2-rasm).



5.2-rasm.

Bu kuchlarni Puanso lemmasiga ko'ra, keltirish markazi O ga keltirishda, berilgan kuchlar O nuqtaga qo'yilgan $\vec{F}'_1 = \vec{F}_1, \vec{F}'_2 = \vec{F}_2, \dots, \vec{F}'_n = \vec{F}_n$ kuchlar va momentlari:

$$M_1 = M_0(\vec{F}_1), M_2 = M_0(\vec{F}_2), \dots, M_n = M_0(\vec{F}_n).$$

bo'lgan qo'shilgan

$$(\vec{F}_1, \vec{F}'_1), (\vec{F}_2, \vec{F}'_2), \dots, (\vec{F}_n, \vec{F}'_n),$$

juftlarga ekvivalent bo'ladi.

O markazga qo'yilgan $\vec{F}'_1, \vec{F}'_2, \dots, \vec{F}'_n$ kuchlarni geometrik qo'shib, kuchlar bosh vektori deb ataladigan bitta \vec{R} kuchga ega bo'lamiz:

$$\vec{R} = \vec{F}'_1 + \vec{F}'_2 + \dots + \vec{F}'_n = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum \vec{F}_i. \quad (5.2)$$

Binobarin, kuchlar sistemasining bosh vektori berilgan kuchlarning geometrik yig'indisiga teng bo'ladi.

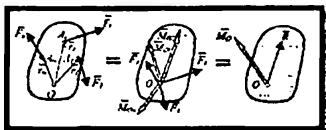
Bir tekislikda yotuvchi juftlarni qo'shib, momenti $M = M_0$ ga teng bo'lgan bitta juftga ega bo'lamiz. Bu juftning momenti mazkur juftlar momentlarining algebraik yig'indisiga teng bo'ladi:

$$M = M_0 = \sum M_0(\vec{F}_i). \quad (5.3)$$

M_0 kattalik tekislikdagi kuchlar sistemasining bosh momenti deyiladi. Demak, tekislikdagi kuchlar sistemasining biror markazga

nisbatan bosh momenti berilgan kuchlarning shu markazga nisbatan momentlarining algebraik yig'indisiga teng bo'lar ekan.

Tekislikdagi kuchlar sistemasini bir markazga keltirishni quyidagi misolda ham ko'rish mumkin. Shunday qilib, tekislikdagi kuchlar sistemasini bir markazga keltirish natijasida bu kuchlar



keltirish markaziga qo'yilgan bosh vektor \vec{R} ga teng bitta kuch hamda momenti bosh moment M_0 ga teng bo'lgan bitta juftga ekvivalent bo'lar ekan. Bunday usul bilan kuchlar sistemasini bir markazga keltirish Puanso usuli bilan kuchlarni berilgan markazga keltirish deyiladi. Bosh vektor berilgan kuchlarning geometrik yig'indisiga teng bo'lishi tufayli, keltirish markazining tanlanishiga bog'liq bo'lmaydi. Ammo, bosh moment esa, keltirish markazini o'zgartirish natijasida kuch yelkasi o'zgarishi tufayli, keltirish markazining tanlanishiga bog'liq bo'ladi. Bosh vektor \vec{R} ning miqdori va yo'nalishini analitik usulda aniqlash uchun, keltirish markazi O nuqtadan kuchlar yotgan tekislikda Ox va Oy o'qlarini o'tkazamiz. Agar, \vec{F}_i kuchning koordinata o'qlaridagi proeksiyalarini X_i, Y_i , \vec{R} bosh vektorning koordinata o'qlaridagi proeksiyalarini R_x, R_y bilan belgilasak, bosh vektorning miqdori quyidagi formula asosida hisoblanadi:

$$R_x = \sum X_i, R_y = \sum Y_i, \quad (5.4)$$

$$R = \sqrt{(\sum X_i)^2 + (\sum Y_i)^2}.$$

Yo'nalishi esa quyidagicha aniqlanadi:

$$\cos(\vec{R} \vec{i}) = \frac{R_x}{R},$$

$$\cos(\vec{R} \vec{j}) = \frac{R_y}{R}, \quad (5.5)$$

bunda \vec{i}, \vec{j} lar Ox va Oy o'qlarining birlik vektorlari.

26-§. Tekislikdagi kuchlar sistemasini sodda ko'rinishga keltirish

Tekislikdagi kuchlar sistemasining bosh vektori va bosh momentining qiymatlariga bog'liq holda, kuchlar sistemasini quyidagi sodda ko'rinishlarga keltirish mumkin:

1) Agar berilgan tekislikdagi kuchlar sistemasi uchun:

$$\vec{R} = 0, M = \sum M_0(\vec{F}_i) \neq 0,$$

bo'lsa, kuchlar sistemasi momenti M_0 bo'lgan juft kuchga keltiriladi. Bunda, M_0 qiymati keltirish markazi O ning vaziyatiga (tanlanishiga) bog'liq bo'lmaydi.

2) Agar berilgan tekislikdagi kuchlar sistemasi uchun:

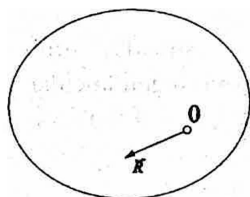
$$\vec{R} \neq 0, M = \sum M_0(\vec{F}_i) = 0$$

bo'lsa, kuchlar sistemasi bitta kuchga, ya'ni teng ta'sir etuvchiga keltiriladi. Bunda, quyidagi hollar bo'lishi mumkin:

a) $\vec{R} \neq 0, M = \sum M_0(\vec{F}_i) = 0$

Bunday holda, tekislikdagi kuchlar sistemasi keltirish markazi orqali o'tuvchi teng ta'sir etuvchi kuchga keltiriladi (5.3a-rasm):

b) $\vec{R} \neq 0, M_0 = \sum M_0(\vec{F}_i) \neq 0.$



5.3a-rasm.

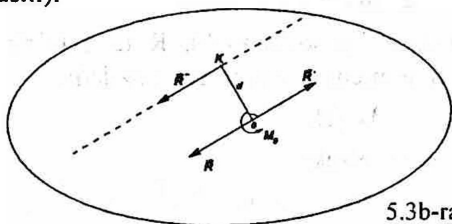
Bunday holda, momenti M_0 bo'lgan juft kuchni \vec{R}' va \vec{R}'' kuchlardan tashkil topgan deb qarash,

$$|\vec{R}'| = |\vec{R}|, \vec{R}' = -\vec{R}$$

bo'lgani uchun, juft yelkasi:

$$OC = d = \frac{M_0}{R}$$

bo'ladi (5.3b-rasm).



5.3b-rasm.

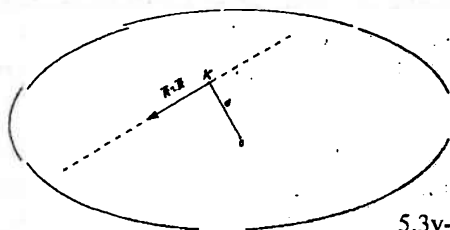
Natijada, \vec{R} va \vec{R}' kuchlarni o'zaro muvozanatda bo'lgan kuchlar sifatida tashlab yuborsak, tekislikdagi kuchlar sistemasi keltirish markazi O dan

$$OK = d = \frac{|M_0|}{R} \quad (5.6)$$

masofa uzoqlikda yotuvchi K nuqtaga qo'yilgan

$$\vec{R}'' = \vec{R}$$

teng ta'sir etuvchi kuchga keltiriladi (5.3v-rasm).



5.3v-rasm.

Shunday qilib, muvozanatda bo'lmagan tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi $\vec{R} \neq 0$ bo'lganda bitta teng ta'sir etuvchi kuchga, $\vec{R} = 0$ bo'lganda bitta juftga keltirilgan ekan.

27-§. Tekislikdagi kuchlar sistemasini teng ta'sir etuvchisining momenti haqida Varin'on teoremasi

Teorema. Tekislikdagi kuchlar sistemasi teng ta'sir etuvchisining shu tekislikdagi ixtiyoriy nuqtaga nisbatan momenti tashkil etuvchi kuchlardan mazkur nuqtaga nisbatan hisoblangan momentlarning algebraik yig'indisiga teng:

$$M_0(\vec{R}) = \sum M_0(\vec{F}_i). \quad (5.7)$$

Isbot. 5.3v-rasmdan ko'ramizki, R teng ta'sir etuvchining O nuqtaga nisbatan momenti quyidagicha yoziladi:

$$M_0(\vec{R}) = R \cdot d. \quad (5.8)$$

(5.6) ni e'tiborga olsak:

$$M_0(\vec{R}) = \frac{R \cdot M_0}{R} = M_0.$$

O'z navbatida, (5.3) ga ko'ra tekislikdagi kuchlar sistemasining bosh momenti quyidagicha aniqlanadi:

$$M_0 = \sum M_0(\vec{F}_i).$$

Oxirgi ikkita tengliklarni solishtirib, (6.7) o'rinli ekanligini ko'ramiz.

28-§. Tekislikdagi kuchlar sistemasining muvozanat shartlari

Yuqorida, tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasini bir markazga keltirishda, kuchlar sistemasi bosh vektorga teng bo'lgan bitta kuchga va momenti bosh momentga teng bitta juftga keltirilishini ko'rib o'tdik. Bunday kuchlar sistemasi $\vec{R} \neq 0$ bo'lsa teng ta'sir etuvchi kuchga, $\vec{R} = 0$, $M_o \neq 0$ bo'lganda bitta juftga ekvivalent bo'ladi. Lekin, tekislikdagi kuchlar sistemasini shu tekislikdagi ixtiyoriy O nuqtaga keltirish natijasida, bir vaqtning o'zida bosh vektor \vec{R} , bosh moment M_o ham nolga teng bo'lishi mumkin:

$$\vec{R} = 0, M = 0, \quad (5.9)$$

yoki:

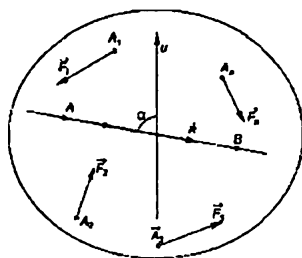
$$\sum \vec{F}_i = 0. \quad \sum M_o(\vec{F}_i) = 0. \quad (5.10)$$

(5.9) va (5.10) tenglamalar tekislikdagi kuchlar sistemasi muvozanatining zarur va yetarli shartlarini ifodalaydi. (5.9) shartlarning zarurligi shundan iboratki, ularning birortasi bajarilmasa, kuchlar sistemasi muvozanatda bo'la olmaydi. (5.9) shartlarning etarililigi shundan iboratki, $\vec{R} = 0$ bo'lsa, tekislikdagi kuchlar sistemasi momenti M_o ga teng bo'lgan juftga keltiriladi, lekin $M_o = 0$ bo'lgani uchun, bu kuchlar sistemasi muvozanatda bo'ladi.

Bosh vektorning moduli (5.4) formula asosida aniqlanishini e'tiborga olsak, (5.9) yoki (5.10) tenglamalar o'rniga, tekislikdagi kuchlar sistemasi muvozanati shartlarining analitik ifodasi uchun quyidagi tenglamalarga ega bo'lamiz:

$$\sum X_i = 0, \quad \sum Y_i = 0, \quad \sum M_o(\vec{F}_i) = 0. \quad (5.11)$$

Demak, tekislikdagi kuchlar sistemasi muvozanatda bo'lishi uchun, bir vaqtda kuchlarning shu tekislikda yotuvchi ikkita koordinata o'qlariga proeksiyalarining algebraik yig'indilari alohida-alohida nolga teng bo'lishi va shu tekislikdagi ixtiyoriy nuqtaga nisbatan momentlarining algebraik yig'indisini ham nolga teng bo'lishi zarur va yetarli bo'lar ekan.



5.4-rasm.

Tekislikdagi kuchlar sistemasi muvozanatining yana quyidagi shartlari ham mavjud:

1) *Tekislikdagi kuchlar sistemasi muvozanatda bo'lishi uchun, kuchlarning shu tekislikda yotuvchi ixtiyoriy ikki nuqtaning har biriga nisbatan momentlarining algebraik yig'indisi alohida – alohida nolga teng bo'lishi va mazkur nuqtalarni birlashtiruvchi to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'lmagan o'qdagi proeksiyalari-ning algebraik yig'indisini ham nolga teng bo'lishi zarur va yetarlidir (6.3-rasm):*

$$\sum M_A(\vec{F}_i) = 0, \quad \sum M_B(\vec{F}_i) = 0, \quad \sum U_i = 0. \quad (5.12)$$

Tekislikdagi kuchlar sistemasi muvozanatda bo'lishi uchun bu shartlarning zarurligi shundaki, (5.12) dagi shartlardan birortasi bajarilmasa, bunday kuchlar sistemasi muvozanatlashmaydi.

(5.12) dagi shartlarning tekislikdagi kuchlar sistemasi muvozanatda bo'lishi uchun yetarililigini isbotlaylik. (5.12) dagi shartlardan birinchi tenglikning bajarilishi A nuqtaga nisbatan bosh momentning nolga tengligini ifodalaydi: $M_A = 0$. Bunday holda, tekislikdagi kuchlar sistemasi A nuqtadan o'tuvchi teng ta'sir etuvchiga keltirilishi mumkin (5.4-rasm).

(5.12) ning ikkinchi ifodasi va teng ta'sir etuvchi kuchning momenti haqida Varin'on teoremasiga asosan:

$$M_B(R) = \sum M_B(\vec{F}_i) = 0,$$

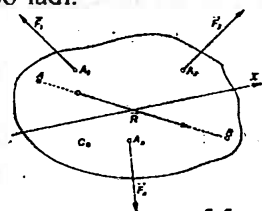
tenglik bajariladi. Binobarin, \vec{R} ning ta'sir chizig'i B nuqtadan o'tadi, ya'ni AB da yotadi. (5.12) ning uchinchi shartiga ko'ra $R_u = \sum U_i = 0$. U o'q AB ga perpendikulyar bo'lmagani uchun, bu tenglik faqat $\vec{R}_u = 0$ bo'lgandagina bajariladi. Demak, (5.12) shart bajarilganda tekislikdagi kuchlar sistemasi muvozanatda bo'ladi.

2) *Tekislikdagi kuchlar sistemasi muvozanatda bo'lishi uchun barcha kuchlarning shu tekislikdagi bir to'g'ri chiziqda yotmaydigan uchta nuqtaning har biriga nisbatan hisoblangan momentlarining yig'indilari alohida – alohida nolga teng bo'lishi zarur va yetarlidir:*

$$\sum M_A(\vec{F}_i) = 0, \quad \sum M_B(\vec{F}_i) = 0, \quad \sum M_C(\vec{F}_i) = 0. \quad (5.13)$$

Kuchlar sistemasi muvozanatda bo'lishi uchun bu shartlarning zarurligi bevosita (5.13) dan kelib chiqadi. Chunki bu shartlarning birortasi bajarilmasa, kuchlar sistemasi muvozanatlashmaydi.

(5.13) shartlarning tekislikdagi kuchlar sistemasi muvozanatda bo'lishi uchun yetarli ekanligi, teskarisini faraz qilish bilan isbotlanadi. (5.13) shartlarning bajarilishiga qaramay, tekislikdagi kuchlar sistemasi muvozanatda bo'lmasligi uchun, berilgan kuchlar sistemasi bir vaqtning o'zida A, B, C nuqtalardan o'tuvchi teng ta'sir etuvchiga keltirilishi kerak (5.5-rasm). Bunday hol bo'lishi mumkin emas, chunki A, B, C nuqtalar bir to'g'ri chiziqda yotmaydi. Shuning uchun (5.13) shartlar bajarilsa, tekislikdagi kuchlar sistemasi muvozanatda bo'ladi.



5.5-rasm.

Takrorlash uchun savollar

1. Kuch vektorini o'ziga parallel ko'chirish uchun nima qilish zarur?
2. Tekislikdagi kuchlar tizimining bosh momenti qanday aniqlanadi?
3. Agar bosh moment nolga teng bo'lsa bu nimani anglatadi?
4. Tekislikdagi kuchlar tizimining bosh vektori qanday aniqlanadi?
5. Agar bosh vektor nolga teng bo'lsa bu nimani anglatadi?
6. Varin'on teoremasi nimani ifodalaydi?
7. Tekislikdagi kuchlar tizimining muvozanat shartlarini ayting.
8. Tekislikdagi kuchlar tizimining muvozanat tenglamalarini yozib bering.

29-§. Tekislikdagi kuchlar sistemasining muvozanatiga oid masalalarni yechish uchun uslubiy ko'rsatmalar

Tekislikdagi kuchlar tizimining muvozanatiga doir masalalarni quyidagi tartibda yechish tavsiya etiladi:

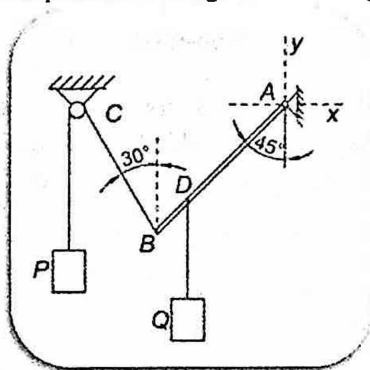
- 1) Muvozanati o'rganilayotgan jism (yoki nuqta) aniqlanadi;
- 2) Koordinatalar sistemasi tanlab olinadi;
- 3) Jismga ta'sir etayotgan, berilgan kuchlar ko'rsatiladi;
- 4) Jismni bog'lanishlardan bo'shatib, ularning ta'sirlari bog'lanish reaksiya kuchlari bilan almashtiriladi;
- 5) Muvozanati o'rganilayotgan jism berilgan kuchlar va bog'lanishlar reaksiya kuchlari ta'siridagi erkin jism deb qaraladi;
- 6) Berilgan masala statik aniq masala ekanligi tekshiriladi, ya'ni masaladagi algebraik noma'lum kattaliklar soni uchtdan oshmasligi aniqlanadi.
- 7) Koordinata o'qlarining boshi, yo'nalishi va moment hisoblanadigan nuqta (yoki nuqtalar) tanlanadi.
- 8) Qattiq jismga qo'yilgan tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi uchun muvozanat tenglamalari tuziladi.
- 9) Tuzilgan muvozanat tenglamalari yechiladi va noma'lum kattaliklar aniqlanadi.

Muvozanat tenglamalarini tuzishda har bir tenglamada faqat bittadan noma'lum kattalik qatnashishiga e'tibor berish lozim. Chunki bunda har bir noma'lum kattalik bevosita shu noma'lum kattalik qatnashgan tenglamani yechish orqali aniqlanadi. Bunday hol masalani yechishni soddalashtiradi. Buning uchun koordinata o'qlarini shunday o'tkazish lozimki, bunda ba'zi noma'lum kuchlar o'qqa perpendikulyar holda yo'nalgan bo'lsin. Bunday holda ularning mazkur o'qdagi proektsiyalari nolga teng bo'ladi. Moment hisoblanadigan nuqta sifatida odatda ikki noma'lum kuchning ta'sir chiziqlari kesishadigan nuqtani olish maqsadga muvofiq bo'ladi. Bu hol tuziladigan momentlar tenglamasidan bevosita uchinchi noma'lum kuchni aniqlashga imkon beradi. Agar masalada bog'lanish reaksiyasining yo'nalishi aniq bo'lmasa, uni koordinata o'qlarining musbat yo'nalish bo'ylab yo'nalgan tashkil etuvchilarga ajratish maqsadga muvofiq bo'ladi. Hisoblash natijasida kuchning miqdori manfiy ishorali chiqsa, bu hol mazkur kuchning

yoʻnalishi dastlab chizmada koʻrsatilgan yoʻnalishiga teskari ekanligidan darak beradi.

30-§. Tekislikdagi kuchlar sistemasining muvozanatiga oid masalalar

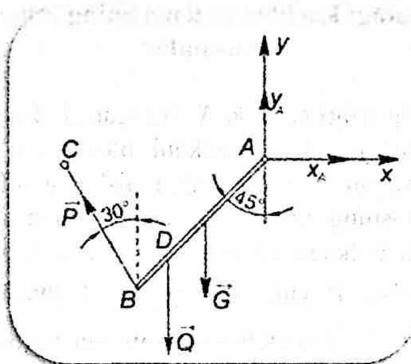
1-masala. Ogʻirligi $G=100\text{ N}$. boʻlgan A sharnir bilan devorga mahkamlangan bir jinsli AB balkani blokdan oʻtkazilgan va bir uchiga P yuk osilgan tros vertikalga nisbatan 45° burchak ostida ushlab turadi. Trosning BC qismi vertikal bilan 30° burchak hosil qiladi. D nuqtada balkaga ogʻirligi 200 N . boʻlgan Q yuk osiladi. Agar $BD = \frac{1}{4}AB$ boʻlsa, P yuk ogʻirligi va A sharnirning reaksiyasi topilsin. Blokdagi ishqalanish hisobga olinmasin.(5.6a-rasm)



5.6a-rasm.

Yechish. AB balkaning muvozanatini oʻrganamiz. AB balkaga uning ogʻirligi \vec{G} va D nuqtaga qoʻyilgan \vec{Q} kuchlar taʼsir etadi. A sharnir va BC tros balka uchun bogʻlanishlar hisoblanadi. Bogʻlanishlardan boʻshatish prinsipiga koʻra, bogʻlanishlarning balkaga taʼsirini ularning reaksiya kuchlari bilan almashtiramiz: A sharnir reaksiyasining yoʻnalishi oldindan nomaʼlum boʻlganligi uchun uni koordinata oʻqlarining musbat yoʻnalishi boʻylab yoʻnalgan \vec{x}_A, \vec{y}_A tashkil etuvchilariga ajratamiz, Tros BC qismidagi taranglik kuchi balkaning B nuqtasiga qoʻyiladi va tros boʻylab C blok tomon yoʻnaladi. (C bloki P kuchning taʼsir chizigʻini oʻzgartiradi).

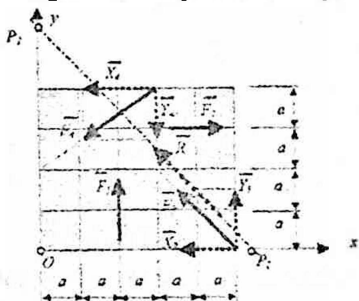
Natijada balkaga ta'sir etuvchi ($\vec{G}, \vec{Q}, \vec{P}, \vec{X}_1, \vec{Y}_1$) kuchlardan iborat tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasiga ega bo'lamiz (5.6b-rasm).



5.6b-rasm.

2-masala. 5.7-rasmda ko'rsatilgan tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasini sodda ko'rinishga keltiring.

Berilgan: $F_1 = 3F$; $F_2 = 2F$; $F_3 = 2\sqrt{2}$; $F_4 = \sqrt{13}F$.



5.7-rasm.

Masalaning yechimi.

1) Berilgan kuchlarni koordinata o'qlaridagi proyeksiyalarini aniqlaymiz. O'qlar rasmda ko'rsatilgan.

$$X_1 = 0; \quad X_2 = F_2 = 2F; \quad X_3 = -F_3 \frac{2a}{2a\sqrt{2}} = \frac{-2\sqrt{2}F * 2a}{2a\sqrt{2}} = -2F$$

$$X_4 = -F_4 \frac{3a}{a\sqrt{13}} = \frac{-\sqrt{13}F * 3a}{a\sqrt{13}} = -3F.$$

$$Y_1 = F_1 = 3F; \quad Y_2 = 0; \quad Y_3 = F_3 \frac{2a}{2a\sqrt{2}} = 2F;$$

$$Y_4 = -F_4 \frac{2a}{a\sqrt{13}} = -\sqrt{13}F \frac{2a}{a\sqrt{13}} = 2F$$

2) Berilgan kuchlar sistemasi teng ta'sir etuvchisining koordinata o'qlaridagi tashkil etuvchilarini aniqlaymiz.

$$X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 0 + 2F - 2F - 3F = -3F$$

$$Y = Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 = 3F + 0 + 2F - 2F = 3F$$

Demak, berilgan kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchisi koordinata o'qlaridagi tashkil etuvchilari orqali quyidagi ko'rinishda ekan

$$\vec{R} = -3F\vec{i} + 3F\vec{j}$$

Teng ta'sir etuvchining moduli quyidagiga teng :

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2} = 4.24F.$$

3) Berilgan kuchlar sistemasining O nuqtaga nisbatan bosh momentini hisoblaymiz:

$$M_0 = \sum M_0(\vec{F}_i) = F_1 * 2a - F_2 * 3a + Y_3 * 5a + X_4 * 4a - Y_4 * 3a = 16Fa.$$

Shunday qilib, berilgan kuchlar sistemasi moduli $R=4.24F$ bo'lgan kuch va momenti berilgan kuchlarni koordinata boshi O nuqtaga nisbatan bosh momenti $M_0 = 16Fa$ bo'lgan juft kuchga keltirilgan ekan:

$$R = 4.24F,$$

$$M_0 = 16Fa.$$

3-masala.

Stropilaning ABC simmetrik fermasining bir uchi qo'zg'almas A nuqtaga sharnir vositasida birlashtirilgan, boshqa B uchi esa g'altaklar bilan gorizontal silliq tekislikka tayanib turadi. Ferma og'irligi 100 kN . AC tomonga shamol bosimining kuchi ta'sir qiladi. Shamol bosimi kuchi AC tomonga tik va tekis tarqalgan bo'lib, teng ta'sir etuvchisi 8 kN . AB uzunligi $6m$, burchak $CAB=30^\circ$. Tayanchlardagi reaksiyalar topilsin. (5.8a-rasm).

Yechish.

Stropilaning muvozanatini o'rganamiz. Stropilaga og'irlik kuchi \vec{G} va shamol bosimi kuchi Q ta'sir etadi. A qo'zg'almas va B qo'zg'aluvchan sharnirlar stropila uchun bog'lanishlar hisoblanadi.

Bog'lanishlardan bo'shatish prinsipiga ko'ra, ularning stropilaga ta'sirini, bog'lanishlar reaksiya kuchlari bilan almashtiramiz. B qo'zg'aluvchan sharnir reaksiyasi \vec{R}_B sharnir harakatlanadigan tekislikka perpendikulyar yo'naladi. Qo'zg'almas A sharnir reaksiyasini koordinata o'qlarining musbat yo'nalishi bo'ylab yo'nalgan \vec{X}_A, \vec{Y}_A tashkil etuvchilarga ajratamiz.

Natijada stropilaga ta'sir etuvchi tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasiga ega bo'lamiz (5.8b-rasm).

Hosil bo'lgan tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasining muvozanat tenglamalarini tuzamiz.

$$\sum X_i = 0 \quad X_A + Q \sin 30^\circ = 0, \quad (1)$$

$$\sum Y_i = 0 \quad Y_A - Q \cos 30^\circ + R_B - G = 0, \quad (2)$$

$$\sum M_A(\vec{F}_i) = 0 \quad -Q \cdot \frac{AC}{2} - G \cdot 3 + R_B \cdot AB = 0. \quad (3)$$

Chizmadan $\frac{AC}{2} \cos 30^\circ = \frac{AB}{4}$.

Bundan: $\frac{AC}{2} = \frac{AB}{4 \cdot \cos 30^\circ} = \frac{6}{4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{3}{\sqrt{3}}$.

Tenglamalarni yechib, noma'lumlarni aniqlaymiz.

(1) tenglamadan:

$$X_A = -Q \cdot \sin 30^\circ = -4 \text{ kN}.$$

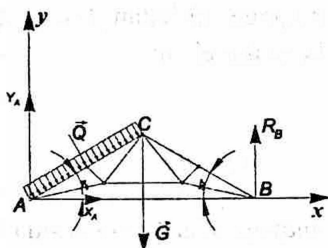
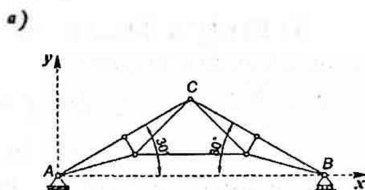
(3) tenglamadan:

$$R_B = \frac{Q \cdot \frac{AC}{2} + G \cdot 3}{6} = \frac{8 \cdot \frac{3}{\sqrt{3}} + 100 \cdot 3}{6} = 52,3 \text{ kN}.$$

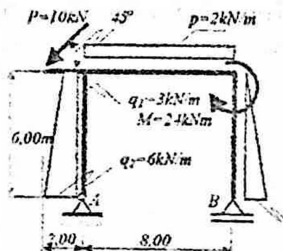
(2) tenglamadan:

$$Y_A = Q \cdot \cos 30^\circ - R_B + G = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 52,3 + 100 = 54,6 \text{ kN}.$$

4-masala. 5.9-rasmda ko'rsatilgan konstruksiyaning tayanch reaksiyalarini aniqlang.



5.8a,b-rasm.



5.9-rasm.

Masalaning yechimi:

1. Masala statik aniqlangan ekanligini tekshiramiz. Rasmda konstruksiyaga qo'yilgan tashqi kuchlar ko'rsatilgan.

Konstruksiyani unga qo'yilgan bog'lanishlardan ozod etib, bog'lanishlarning konstruksiyaga ta'sirini bog'lanishlar reaksiya kuchlari bilan almashtiramiz.

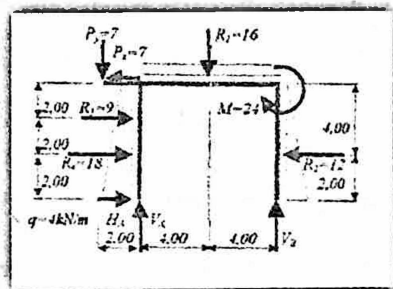
Konstruksiyamiz A nuqtada qo'zg'almas sharnirga, B nuqtada esa qo'zg'aluvchan sharnirga tayanadi. Bog'lanishlar reaksiya kuchlari ham rasmda ko'rsatilgan: H_A , V_A , V_B .

Hosil bo'lgan kuchlar sistemasi tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasini tashkil etadi. Bunday kuchlar sistemasining muvozanatini ifodalovchi muvozanat tenglamalari soni 3 ta. Shuning uchun berilgan masala statik aniqlangan masala hisoblanadi.

2. Konstruksiyaga qo'yilgan P kuchni tashkil etuvchilarga ajratamiz: (5.10a-rasm)

$$P_x = P \cos \alpha = 10 \cos 45^\circ = 7 \text{ kN}$$

$$P_y = P \sin \alpha = 10 \sin 45^\circ = 7 \text{ kN}.$$

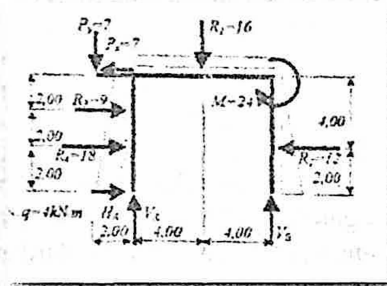


5.10a-rasm.

3. Konstruksiya qismlariga qo'yilgan taqsimlangan kuchlarni ularning teng ta'sir etuvchilari bilan almashtiramiz: (5.11b-rasm)

$$R_1 = 2 \cdot 8 = 16 \text{ kN}$$

$$R_2 = \frac{4 \cdot 6}{2} = 12 \text{ kN}.$$



5.11b-rasm.

Trapetsiya yuzasi bo'ylab taqsimlangan kuchlarning teng ta'sir etuvchisini aniqlaymiz. Buning uchun trapetsiya 2 uchburchakka bo'linadi va har bir uchburchak yuzasi bo'ylab taqsimlangan kuchlarning teng ta'sir etuvchisini aniqlaymiz. Ular taqsimlangan kuchlar qo'yilgan konstruksiya qismi boshi va oxiridan uchdan bir masofa uzoqlikka qo'yiladi. Bu kuchlarning miqdorlari quyidagilarga teng bo'ladi:

$$R_3 = \frac{3 \cdot 6}{2} = 9 \text{ kN}; \quad R_4 = \frac{6 \cdot 6}{2} = 18 \text{ kN}$$

4. Hosil bo'lgan tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasining muvozanatini o'rganamiz.

Muvozanat tenglamalarini tuzamiz:

$$\sum X_i = 0; \quad H_A + 18 + 9 - 7 - 12 = 0$$

$$\sum M_A(\vec{F}_i) = 0; \quad -18.2 - 9.4 + 7.6 + 7.2 - 16.4 - 24 + 12.2 + V_B \cdot 8 = 0$$

$$\sum M_B(\vec{F}_i) = 0; \quad -V_A \cdot 8 - 18.2 - 9.4 + 7.6 + 7.1 + 16.4 - 24 + 12.2 = 0$$

5. Tenglamalarni yechib, noma'lum reaksiya kuchlarini aniqlaymiz:

$$H_A = -8 \text{ kN}; \quad V_A = 13 \text{ kN}; \quad V_B = 10 \text{ kN}.$$

H_A – ning manfiy ishorasi, \vec{H}_A reaksiya kuchi rasmdagidek x o‘qini musbat yo‘nalishi bo‘ylab emas, balkim unga qarama-qarshi holda yo‘nalgan bo‘lishini ifodalaydi.

5-masala.

Zichligi (intensivligi) $q=3\text{kN/m}$ bo‘lgan tekis taqsimlangan kuch, $P=4\text{ kN}$ bo‘lgan kuch va momentlari $M_1=+2\text{kNm}$, $M_2=-3\text{kNm}$ bo‘lgan juft kuchlar ta’siridagi konsol balkaning qistirib mahkamlangan uchidagi reaksiya kuchlari aniqlansin. (5.12a-rasm).

Yechish.

Konsol balkaning muvozanatini o‘rganamiz. Konsol balkaga ta’sir etuvchi tekis taqsimlangan kuch, \vec{P} kuch va momentlari M_1 , M_2 bo‘lgan juft kuchlarni ko‘rsatamiz. Tekis taqsimlangan kuchning teng ta’sir etuvchisi Q bilan belgilanadi:

$$Q = q \cdot 3\text{ kN}.$$

Bu kuch tekis taqsimlangan kuch ta’sir etuvchi konsol balka qismining o‘rtasiga qo‘yiladi.

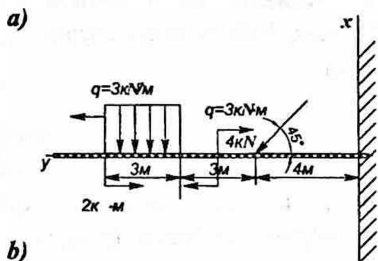
Konsol balkaning uchi qistirib mahkamlangan devor balka uchun bog‘lanish hisoblanadi. Bog‘lanishlardan bo‘shatish prinsipiga ko‘ra bog‘lanish-devorning konsol balkaga ta’sirini bog‘lanish reaksiya kuchlari \vec{X}_A, \vec{Y}_A va reaktiv moment M_A bilan almashtiramiz. Natijada konsol balkaga ta’sir etuvchi tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasiga ega bo‘lamiz (5.12b-rasm).

Hosil bo‘lgan kuchlar sistemasining muvozanat tenglamalari quyidagicha yoziladi:

$$\sum X_i = 0 \quad X_A - P \sin 45^\circ - Q = 0, \quad (1)$$

$$\sum Y_i = 0 \quad Y_A + P \cos 45^\circ = 0, \quad (2)$$

$$\sum M_A(\vec{F}_i) = 0 \quad M_A + P \sin 45^\circ \cdot 4 + Q \cdot 8,5 - M_2 + M_1 = 0. \quad (3)$$



Tenglamalarni yechib noma'lumlarni aniqlaymiz.

(1) tenglamadan:

(2)

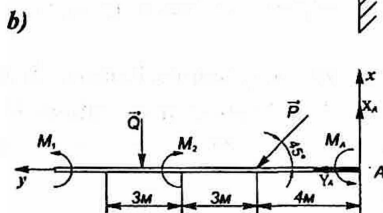
$$X_A = P \cdot \sin 45^\circ + Q = 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 3 \cdot 3 = 11,8 \text{ kN.}$$

(3) tenglamadan:

$$Y_A = -P \cdot \cos 45^\circ = -4 \cdot 0,71 = -2,8 \text{ kN.}$$

(4) tenglamadan:

$$M_A = M_2 - M_1 - P \sin 45^\circ \cdot 4 = -3 - 2 - 4 \cdot 0,71 \cdot 4 - 9 \cdot 8,5 = -86,8 \text{ kNm.}$$



5.12a,b-rasm.

6-masala. Uzunligi 10 m bo'lgan AB balka ustiga yuk ko'taradigan kran uchun yo'l solingan. Kranning og'irligi $G_k = 50 \text{ kN}$ bo'lib, uning og'irlik markazi CD o'qda yotadi. P yukning og'irligi 10 kN; AB balkaning og'irligi $G = 30 \text{ kN}$; kranning KL qulochi uzunligi 4 m, $AC = 3 \text{ m}$. Kranning DL strelkasi balka bilan bir vertikal tekislikda bo'lgan hol uchun A va B nuqtalardagi tayanchlar reaksiyalari topilsin. (5.13a-rasm).

Yechish.

AB balkaning muvozanatini o'rganamiz. Balkaga kran og'irligi \bar{G}_k , balka og'irligi \bar{G} , yuk og'irligi \bar{P} ta'sir etadi. A va B nuqtalardagi tayanchlar balka uchun bog'lanishlar hisoblanadi. Bog'lanishlardan bo'shatish prinsipiga ko'ra tayanchlarning balkaga ta'sirini tayanchlar reaksiya kuchlari bilan almashtiramiz. Tayanchlar reaksiya kuchlari A va B nuqtalarga quyilgan bo'lib, AB balkaga perpendikulyar holda yo'naladi.

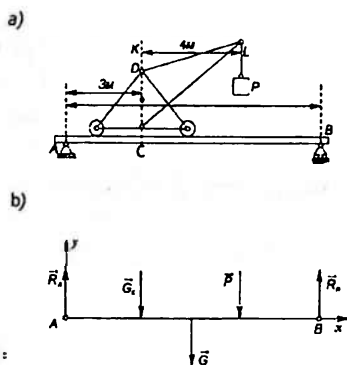
Natijada balkaga ta'sir etuvchi parallel ($\bar{G}_k, \bar{G}, \bar{P}, \bar{R}_A, \bar{R}_B$) kuchlar sistemasiga ega bo'lamiz (5.13b-rasm).

Hosil bo'lgan kuchlar sistema-sining muvozanat tenglamalarini tuza-miz. Buning uchun koordinata boshi sifatida A nuqtani tanlab, Ax o'qini balka bo'ylab, Ay o'qini unga perpen-dikulyar holda vertikal yuqoriga yo'-naltiramiz.

Bunday holda:

$$\sum Y_i = 0 \quad R_A - G_K - G - P + R_B = 0,$$

$$\sum M_{A_i}(\vec{F}_i) = 0 \quad -G_K \cdot 3 - G \cdot 5 - P \cdot 7 + R_B \cdot 10 =$$



5.13a,b-rasm

Muvozanat tenglamalarni yechib, noma'lum kattaliklarni aniqlaymiz.

(2) tenglamadan:

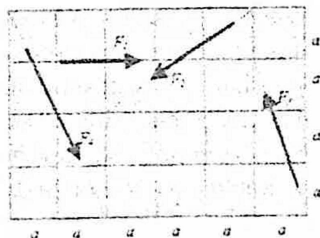
$$R_B = \frac{G_K \cdot 3 + G \cdot 5 + P \cdot 7}{10} = 37 \text{ kN}.$$

(1) tenglamadan:

$$R_A = G_K + G + P - R_B = 53 \text{ kN}.$$

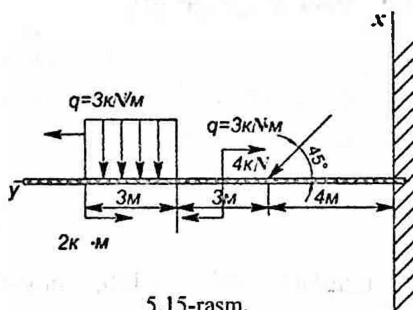
31-§. Mustaqil o'rganish uchun talabalarga tavsiya etiladigan muammolar

Muammo -1. 5.14-rasmda ko'rsatilgan tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasini sodda ko'rinishga keltiring.



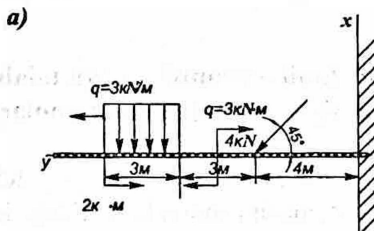
5.14-rasm.

Muammo -2. Zichligi (intensivligi) $q=3\text{kN/m}$ bo'lgan tekislik taqsimlangan kuch, $P=4\text{ kN}$ bo'lgan kuch va momentlari $M_1=+2\text{kNm}$, $M_2=-3\text{kNm}$ bo'lgan juft kuchlar ta'siridagi konsol balkaning qistirib mahkamlangan uchidagi reaksiya kuchlari aniqlansin. (5.15-rasm)



5.15-rasm.

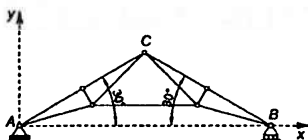
Muammo -3. Zichligi (intensivligi) $q=3\text{kN/m}$ bo'lgan tekislik taqsimlangan kuch, $P=4\text{ kN}$ bo'lgan kuch va momentlari $M_1=+2\text{kNm}$, $M_2=-3\text{kNm}$ bo'lgan juft kuchlar ta'siridagi konsol balkaning qistirib mahkamlangan uchidagi reaksiya kuchlari aniqlansin. (5.16-rasm).



5.16-rasm.

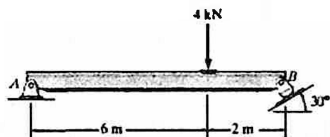
Muammo -4. Stropilaning ABC simmetrik fermasining bir uchi qo'zg'almas A nuqtaga sharnir vositasida birlashtirilgan, boshqa B uchi esa g'altaklar bilan gorizontaal silliq tekislikka tayanib turadi. Ferma og'irligi 100 kN . AC tomonga shamol bosimining kuchi ta'sir qiladi. Shamol bosimi kuchi AC tomonga tik va tekis tarqalgan bo'lib, teng ta'sir etuvchisi 8 kN . AB uzunligi 6m , burchak $CAB=30^\circ$. Tayanchlardagi reaksiyalar topilsin. (5.17-rasm).

a)



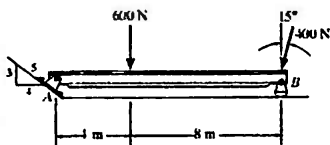
5.17-rasm.

Muammo-5. Balkaning tayanch reaksiyalari aniqlansin. Qo'yilgan kuchlar va o'lchamlar rasmda ko'rsatilgan.



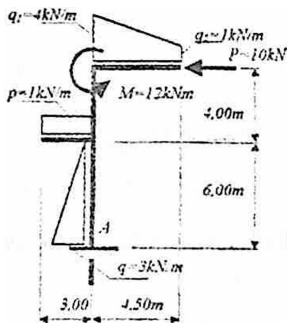
5.18-rasm.

Muammo-6. Balkaning tayanch reaksiyalari aniqlansin. Balkaga qo'yilgan kuchlar va uning o'lchamlari rasmda ko'rsatilgan.



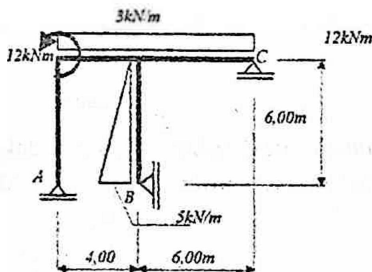
5.19-rasm.

Muammo -7. Qistirib maxkamlangan balkaning ta'sir reaksiyalarini aniqlang.



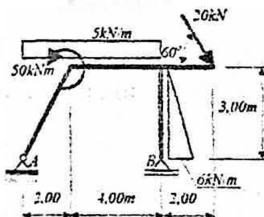
5.20-rasm.

Muammo-8. Berilgan konstruksiyaning tayanch reaksiyalarini aniqlang.



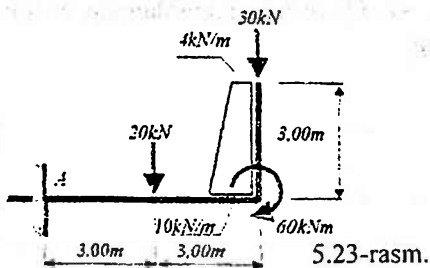
5.21-rasm.

Muammo-9. Berilgan konstruksiyaning tayanch reaksiyalarini aniqlang.



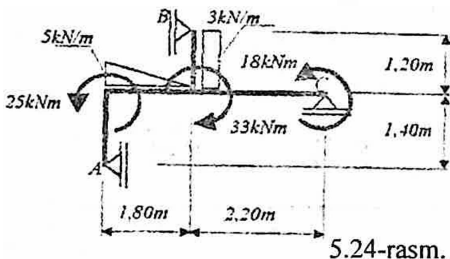
5.22-rasm.

Muammo-10. Devorga qistirib maxkamlangan konstruksiyaning tayanch reaksiyalarini aniqlang.



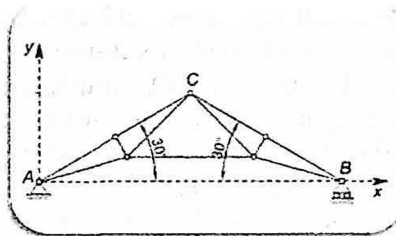
5.23-rasm.

Muammo-11. Berilgan konstruksiyaning tayanch reaksiyalarini aniqlang.



5.24-rasm.

Muammo -12. Stropilaning ABC simmetrik fermasining bir uchi qo'zg'almas A nuqtaga sharnir vositasida biriktirilgan, boshqa B uchi esa g'altaklar bilan gorizontallik tekislikka tayanib turadi. Ferma og'irligi 100 kN . AC tomonga shamol bosimining kuchi ta'sir qiladi. Shamol bosimi kuchi AC tomonga tik va tekis tarqalgan bo'lib, teng ta'sir etuvchisi 8 kN . AB uzunligi 6 m , burchak $CAB=30^\circ$. Tayanchlardagi reaksiyalar topilsin.

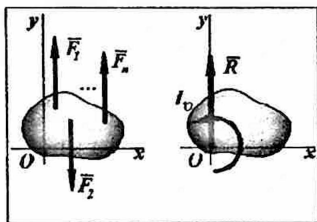


5.25-rasm.

32-§. Tekislikdagi parallel kuchlar sistemasining muvozanat shartlari

Tekislikdagi parallel kuchlar tizimi deb ta'sir chiziqlari parallel bo'lgan va bir tekislikda yotgan kuchlar sistemasiga aytiladi.

Tekislikdagi parallel kuchlar tizimi ham bir markazga keltirishda kuchlar tizimining bosh vektoriga teng bo'lgan \vec{R} kuch va momenti, kuchlar tizimining keltirish markaziga nisbatan bosh momentiga teng bo'lgan juft kuchga keltiriladi (5.26-rasm).



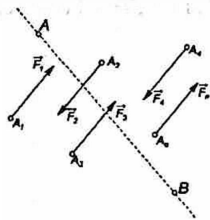
5.26-rasm.

Tekislikda joylashgan parallel kuchlar tizimi \vec{R} kuchlar sistemasi bo'lganligi uchun ularning bosh vektori va bosh momenti analitik usulda quyidagicha aniqlanadi:

$$R = \sum Y_k$$

$$m = M_0 = \sum M_0(\vec{F}_k)$$

Oy o'qini kuchlarning ta'sir chizig'iga parallel ravishda yo'naltiramiz (5.26-rasm). Bunday holda har bir kuchning Ox o'qidagi proeksiyasi nolga teng bo'ladi. Shuning uchun, (5.13) ning birinchi tenglamasi ayniyatga aylanadi. Natijada, tekislikdagi parallel kuchlarning muvozanat shartlari quyidagicha yoziladi:

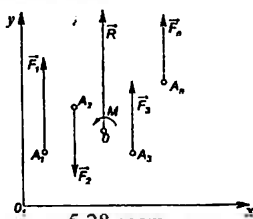


5.27-rasm.

$$\sum Y_i = 0, \quad \sum M_0(\vec{F}_i) = 0 \quad (5.14)$$

Demak, tekislikdagi parallel kuchlar sistemasi muvozanatda bo'lishi uchun, tashkil etuvchi kuchlarning algebraik yig'indisi va shu tekislikdagi ixtiyoriy nuqtaga nisbatan hisoblangan momentlarining algebraik yig'indisi alohida - alohida bir vaqtda nolga teng bo'lishi zarur va yetarlidir.

Tekislikdagi parallel kuchlar sistemasi muvozanatining (5.13) dan kelib chiqadigan quyidagi shartlari ham mavjud:



5.28-rasm.

$$\sum M_A(\vec{F}_i) = 0, \quad \sum M_B(\vec{F}_i) = 0 \quad (5.15)$$

Bunda A va B nuqtalar kuchlar ta'sir chiziqlariga parallel bo'lgan to'g'ri chiziqda yotmasligi kerak (5.28-rasm).

33-§. Taqsimlangan kuchlar

Texnikada turli inshootlarning muvozanatini o'rganishda ularning ayrim nuqtalariga qo'yilgan kuchlar bilan bir qatorda xajm, sirt yoki chiziq kesmalari bo'yicha ma'lum qonun asosida taqsimlangan kuchlarni ham hisobga olish zarur bo'ladi. Taqsimlangan kuchlar hajm, sirt yoki chiziq birligiga to'g'ri keluvchi taqsimlangan kuchlarning intensivligi bilan xarakterlanadi. Taqsimlangan kuchlarning intensivligi N/m da o'lchanadi.

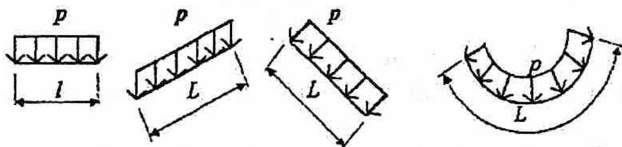
Taqsimlangan kuchlarning ayrim turlari bilan tanishib chiqamiz.

1. To'g'ri chiziq kesmasi bo'yicha tekis taqsimlangan kuchlar (5.29 a, b-rasmlar).

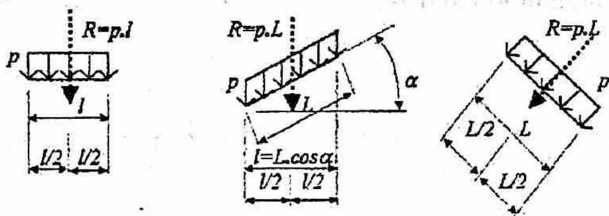
Bunday kuchlarning intensivligi q o'zgarmas kattalik bo'ladi. Ularning teng ta'sir etuvchisi:

$$R = P \cdot l \quad (8.3)$$

ga teng bo'lib, to'g'ri chiziq kesmasining o'rtasiga qo'yiladi.



5.29 a-rasm



5.29 b-rasm

2. To'g'ri chiziq kesmasi bo'yicha chizikli qonun asosida taqsimlangan kuchlar [4] (5.30-rasm).

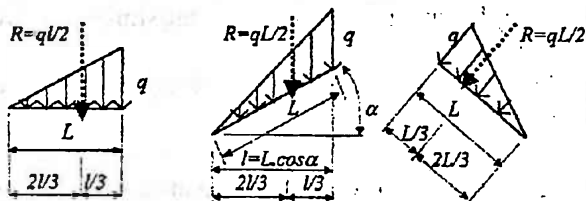
Bunday kuchlarga suv omborlarida suv bosim kuchining to'g'on balandligi bo'yicha taqsimlanishini misol tariqasida ko'rsatish mumkin.

Bunday kuchlarning intensivligi q o'zgaruvchan bo'lib, noldan maksimal qiymati q_{max} gacha o'zgaradi. Ularning teng ta'sir etuvchisi:

$$Q = \frac{q_{max} \cdot a}{2} \quad \text{yoki} \quad (5.16)$$

$$R = q \cdot \frac{L}{2}$$

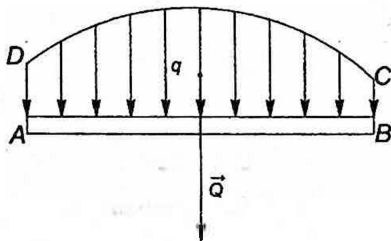
ga teng bo'ladi va ABC uchburchakning BC tomonidan $a/3$ masofa uzoqlidagi nuqtasiga qo'yiladi.



5.30 -rasm

Bunday kuchlarga tunellar va boshqa yer osti inshootlariga tuproqning bosim kuchini ham misol tariqasida ko'rsatish mumkin.

3. To'g'ri chiziq kesmasi bo'yicha ixtiyoriy qonun asosida taqsimlangan kuchlar [4] (5.31-rasm).



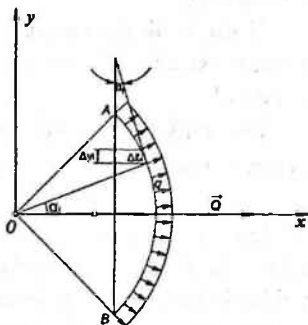
5.31-rasm.

Bunday holda kuchlarning teng ta'sir etuvchisi Q miqdor jihatdan mos masshtabda o'lchangan ABCD taqsimlangan kuchlar yuzasiga teng bo'lib, yuzaning og'irlik markaziga qo'yiladi.

4. Aylana yoyi bo'yicha tekis taqsimlangan radial kuchlar (5.32-rasm).

Radial kuchlarga silindrik idish yon devorlariga gidrostatik bosim kuchlarining ta'sirini misol tariqasida ko'rsatish mumkin.

Ox o'qini aylana yoyi AB ning simmetriya o'qi bo'ylab yo'naltirsak, radial kuchlarning Oy o'qidagi proeksiyalarining yig'indisi nolga teng bo'ladi.



5.32-rasm.

Shuning uchun bunday kuchlarning teng ta'sir etuvchisi Q Ox o'qi bo'ylab yo'naladi va uning miqdori mazkur kuchlarning Ox o'qidagi proeksiyalarining algebraik yig'indisiga teng bo'ladi:

$$Q = |Q_x| = \sum q \Delta L_i \cos \alpha_i. \quad (5.17)$$

Bunda, $q \Delta L_i$ – uzunligi ΔL_i ga teng yoy bo'lakchasiga ta'sir etuvchi kuch, α_i – kuch bilan Ox o'q orasidagi burchak.

5.32-rasmdan

$$\Delta L_i \cos \alpha_i = \Delta Y_i.$$

Shuning uchun:

$$Q = \sum q \cdot \Delta Y_i = q \cdot AB. \quad (5.18)$$

Bunda, AB bilan AB yoyni tortib turuvchi vatar uzunligi belgilangan.

Demak, aylana yoyi bo'yicha tekis taqsimlangan radial kuchlarning teng ta'sir etuvchisi Q AB yoyni tortib turuvchi AB vatar uzunligini tekis taqsimlangan kuchlar intensivligi q ga ko'paytmasiga teng bo'lar ekan.

5. Devorga qistirib mahkamlangan balkaga ta'sir etuvchi taqsimlangan kuchlar (5.33-rasm).

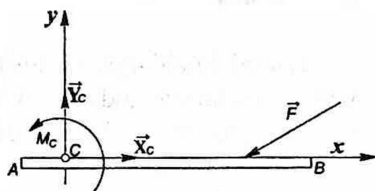
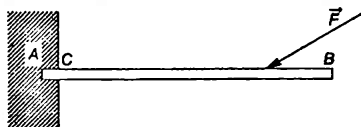
Bino balkonlarining asosi devorga xuddi shunday mahkamlanadi.

AB balkaning AC qismi devorga qistirib mahkamlangan bo'lsin. AC qismni bog'lanishdan bo'shatsak, devorning unga ta'sirini taqsimlangan kuchlar bilan almashtirish zarur.

Bu kuchlarni C nuqtaga keltirish natijasida, taqsimlangan kuchlarning bosh

vektoriga teng bo'lgan \vec{R}_C kuchga va momenti taqsimlangan kuchlarning bosh momenti M_C ga teng bo'lgan juftga ega bo'lamiz. M_C reaksiya juftining momenti deyiladi. \vec{R}_C ning yo'nalishi aniq bo'lmagani uchun, uni qo'zg'almas sharnir reaksiyasi kabi, x va y o'qlarining musbat yo'nalishlari bo'yicha yo'nalgan tashkil etuvchilardan iborat deb qaraymiz. Natijada, devorga qistirib mahkamlangan balkaning devorga qisilgan qismidagi reaksiya kuchi balkaning C nuqtasiga qo'yilgan, yo'nalishi noma'lum \vec{R}_C reaksiya kuchining koordinata o'qlaridagi tashkil etuvchilari \vec{X}_C , \vec{Y}_C va momenti noma'lum reaksiya juftining momenti M_C ga teng bo'lgan juftga ekvivalent bo'lishi aniqlanadi.

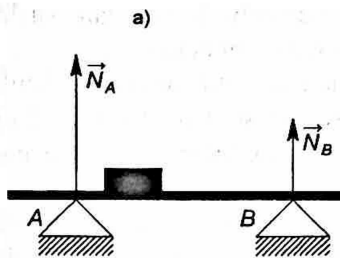
X_c , Y_c , M_c - lar balkaning muvozanat tenglamalaridan aniqlanadi.



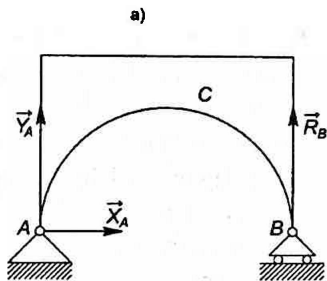
5.33-rasm.

34-§. Statik aniq va aniqmas masalalar

Berilgan masalada noma'lumlar soni muvozanat tenglamalari soniga teng bo'lsa, bunday masala statik aniq masala deyiladi (5.34a, 5.35a-rasmlar).

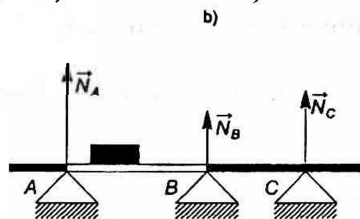


5.34 a-rasm.

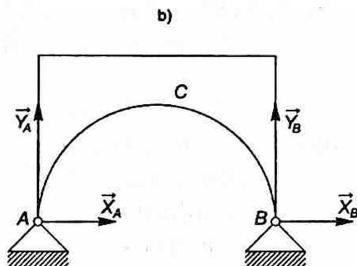


5.34b-rasm.

Agar masalada noma'lumlar soni muvozanat tenglamalari sonidan ortiq bo'lsa, bunday masala statik aniqmas masala deyiladi (5.34b, 5.35b – rasmlar).



5.35 a-rasm.



5.35 b-rasm.

Haqiqatan ham, 5.34a-rasmda ko'rsatilgan AB balka, A va B tayanchlarga qo'yilgan. Tayanchlarning reaksiyalari N_A va N_B – lar balkaga ta'sir etuvchi parallel kuchlar sistemasining ikkita muvozanat tenglamalarida noma'lum kattaliklar sifatida qatnashadi. Ularning qiymatlari shu tenglamalardan aniqlanadi. Shuning uchun ko'rilgan masala statik aniq masala hisoblanadi.

5.34b-rasmda AB balka A , C , B nuqtalarda tayanchlarga qo'yilgan. Ularning reaksiyalari N_A , N_B , N_C lar soni uchta. Lekin, hosil bo'lgan parallel kuchlar sistemasi uchun ikkita muvozanat tenglamalari tuziladi. Shuning uchun, bu masalada noma'lumlar soni muvozanat tenglamalari sonidan ortiq va y statik aniqmas masala hisoblanadi.

Huddi shunday mulohazalar asosida, 5.35a, 5.35b-rasmlarda ko'rsatilgan arkaning muvozanatini o'rganishda, 5.35a-rasmida ko'rsatilgan masala statik aniq (bog'lanishlar reaksiyalari soni uchta:

X_A, Y_A, R_B . Tuziladigan tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasining muvozanat tenglamalari soni ham uchta).

5.36b-rasmda ko'rsatilgan masala esa statik aniqmas ekanligi ma'lum bo'ladi (bog'lanishlar reaksiyalari soni to'rtta X_A, Y_A, X_B, Y_B . Tuziladigan tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasining muvozanat tenglamalari soni uchta).

Nazariy mexanikada statik aniq masalalar yechiladi. Statik noaniq masalalarni yechish usullari materiallar qarshiligi va qurilish mexanikasi fanlarida o'rganiladi.

35-§. Tekislikdagi parallel kuchlar sistemasining muvozanatiga oid masalalarni yechish uchun uslubiy ko'rsatmalar

Tekislikdagi kuchlar tizimining muvozanatiga doir masalalarni quyidagi tartibda yechish tavsiya etiladi.

- 1) Muvozanati o'rganilayotgan jism (yoki nuqta) aniqlanadi;
- 2) Koordinatalar sistemasi tanlab olinadi;
- 3) Jismga ta'sir etayotgan, berilgan kuchlar ko'rsatiladi;
- 4) Jismni bog'lanishlardan bo'shatib, ularning ta'sirlari bog'lanish reaksiya kuchlari bilan almashtiriladi;
- 5) Muvozanati o'rganilayotgan jism berilgan kuchlar va bog'lanishlar reaksiya kuchlari ta'siridagi erkin jism deb qaraladi;
- 6) Berilgan masala statik aniq masala ekanligi tekshiriladi, ya'ni masaladagi algebraik noma'lum kattaliklar soni uchtadan oshmasligi aniqlanadi.
- 7) Koordinata o'qlarining boshi, yo'nalishi va moment hisoblanadigan nuqta (yoki nuqtalar) tanlanadi.
- 8) Qattiq jismga qo'yilgan tekislikdagi parallel kuchlar sistemasi uchun muvozanat tenglamalari tuziladi.
- 9) Tuzilgan muvozanat tenglamalari yechiladi va noma'lum kattaliklar aniqlanadi.

Muvozanat tenglamalarini tuzishda har bir tenglamada faqat bittadan noma'lum kattalik qatnashishiga e'tibor berish lozim. Chunki bunda har bir noma'lum kattalik bevosita shu noma'lum kattalik qatnashgan tenglamani yechish orqali aniqlanadi. Bunday hol masalani yechishni soddalashtiradi.

Buning uchun koordinata o'qlarini shunday o'tkazish lozimki, bunda ba'zi noma'lum kuchlar o'qqa perpendikulyar holda yo'nalgan bo'lsin. Bunday holda ularning mazkur o'qdagi proeksiyalari nolga teng bo'ladi.

Moment hisoblanadigan nuqta sifatida odatda ikki noma'lum kuchning ta'sir chiziqlari kesishadigan nuqtani olish maqsadga muvofiq bo'ladi. Bu hol tuziladigan momentlar tenglamasidan bevosita uchinchi noma'lum kuchni aniqlashga imkon beradi.

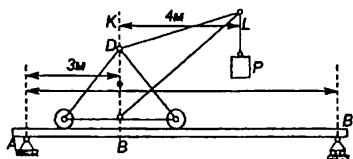
Agar masalada bog'lanish reaksiyasining yo'nalishi aniq bo'lmasa, uni koordinata o'qlarining musbat yo'nalish bo'ylab yo'nalgan tashkil etuvchilarga ajratish maqsadga muvofiq bo'ladi. Hisoblash natijasida kuchning miqdori manfiy ishorali chiqsa, bu hol mazkur kuchning yo'nalishi dastlab chizmada ko'rsatilgan yo'nalishiga teskari ekanligidan darak beradi.

36-§. Tekislikdagi kuchlar sistemasining muvozanatiga oid masalalar

1-masala. Uzunligi 10 m bo'lgan AB balka ustiga yuk ko'taradigan kran uchun yo'l solingan. Kranning og'irligi $G_k=50\text{ kN}$ bo'lib, uning og'irlik markazi CD o'qda yotadi. R yukning og'irligi 10 kN ; AB balkaning og'irligi $G=30\text{ kN}$; kranning KL qulochi uzunligi 4 m , $AC=3\text{ m}$. Kranning DL strelkasi balka bilan bir vertikal tekislikda bo'lgan hol uchun A va B nuqtalardagi tayanchlar reaksiyalari topilsin. (5.37a- rasm.).

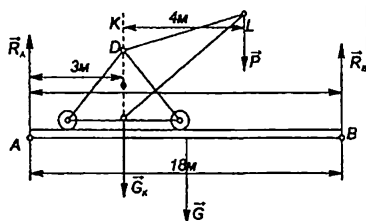
Yechish. AB balkaning muvozanatini o'rganamiz. Balkaga kran og'irligi \bar{G}_k , balka og'irligi \bar{G} , yuk og'irligi \bar{P} ta'sir etadi. A va B nuqtalardagi tayanchlar balka uchun bog'lanishlar hisoblanadi. Bog'lanishlardan bo'shatish prinsipiga ko'ra tayanchlarning balkaga ta'sirini tayanchlar reaksiya kuchlari bilan almashtiramiz. Tayanchlar reaksiya kuchlari A va B nuqtalarga quyilgan bo'lib, AB balkaga perpendikulyar holda yo'naladi.

a)



Natijada balkaga ta'sir etuvchi parallel ($\vec{G}_k, \vec{G}, \vec{P}, \vec{R}_A, \vec{R}_B$) kuchlar sistemasiga ega bo'lamiz (5.37b-rasm).

b)



Hosil bo'lgan kuchlar sistemasining muvozanat tenglamalarini tuzamiz. Buning uchun koordinata boshi sifatida A nuqtani tanlab, Ax o'qini balka bo'ylab, Ay o'qini unga perpendikulyar holda vertikal yuqoriga yo'naltiramiz.

5.37a,b-rasm.

Bunday holda:

$$\sum Y_i = 0 \quad R_A - G_k - G - P + R_B = 0, \quad (1)$$

$$\sum M_A(\vec{F}_i) = 0 \quad -G_k \cdot 3 - G \cdot 5 - P \cdot 7 + R_B \cdot 10 = 0. \quad (2)$$

Muvozanat tenglamalarni yechib, noma'lum kattaliklarni aniqlaymiz.

(2) tenglamadan:

$$R_B = \frac{G_k \cdot 3 + G \cdot 5 + P \cdot 7}{10} = 37 \text{ kN}.$$

(2) tenglamadan:

$$R_A = G_k + G + P - R_B = 33 \text{ kN}.$$

2-masala. AC gorizontaal balka B va C tayanchlar oralig'iga q N/m intensivlikdagi yuk tekis taqsimlangan; AB uchastkada yukning intensivligi chiziqli qonun bilan nolgacha kamayadi. Balkaning og'irligini hisobga olmay, B va C tayanchlar reaksiyalari aniqlansin. (5.38a-rasm).

Yechish. AC balkaning muvozanatini o'rganamiz. Balkaning BC qismiga ta'sir etuvchi tekis taqsimlangan yukning teng ta'sir etuvchisini aniqlaymiz:

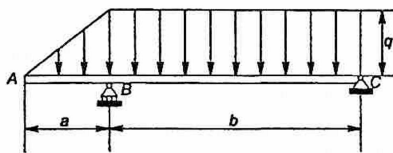
$$Q_1 = q \cdot b.$$

Balkaning AB qismiga ta'sir etuvchi taqsimlangan yukning teng ta'sir etuvchisi quyidagicha aniqlanadi:

$$Q_2 = \frac{q \cdot a}{2}$$

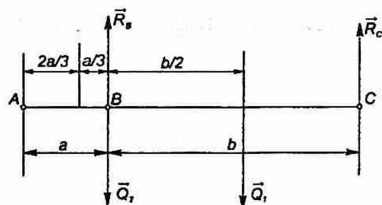
\bar{Q}_1 kuch BC qismning o'rtasiga, \bar{Q}_2 kuch esa B nuqtadan A nuqta tomon $\frac{a}{3}$ masofa uzoqlikda yotuvchi D nuqtaga quyiladi. B va C tayanchlar balka uchun bog'lanishlar hisoblanadi. Bog'lanishlardan bo'shatish prinsipiga ko'ra ularning balkaga ta'sirini bog'lanishlar – tayanchlar reaksiya kuchlari bilan almashtiramiz.

a)



Tayanchlarning reaksiya kuchlari \bar{R}_B, \bar{R}_C balkaning B va C nuqtalariga quyiladi va balkaga perpendikulyar holda yo'naladi. Natijada balkaga ta'sir etuvchi parallel ($\bar{Q}_1, \bar{Q}_2, \bar{R}_B, \bar{R}_C$) kuchlar sistemasiga ega bo'lamiz. (5.38b – rasm). Hosil bo'lgan kuchlar sistemasi uchun muvozanat tenglamalarini tuzamiz. Buning uchun koordinata boshi sifatida A nuqtani tanlab, A_x o'qini AC balka bo'ylab gorizontal, A_y o'qini unga perpendikulyar holda yo'naltiramiz.

b)



5.38a,b–rasm.

Bunday holda:

$$\sum Y_i = 0 \quad -Q_2 + R_B - Q_1 + R_C = 0 \quad (1)$$

$$\sum M_B(\bar{F}_i) = 0 \quad Q_2 \cdot \frac{a}{3} - Q_1 \cdot \frac{b}{2} + R_C \cdot b = 0 \quad (2)$$

Tenglamalarni yechib, noma'lum kattaliklarni aniqlaymiz.

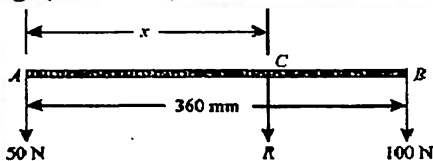
(3)tenglamadan:

$$R_C = \frac{Q_1 \cdot \frac{b}{2} - Q_2 \cdot \frac{a}{3}}{b} = \frac{a}{6} \left(3b - \frac{a^2}{6} \right) N.$$

(1)tenglamadan:

$$R_B = Q_2 + Q_1 - R_C = \frac{q \cdot a}{2} + qb - \frac{q}{6} \left(3b - \frac{a^2}{6} \right) = \frac{q}{6} \left(3a + 3b + \frac{a^2}{6} \right) N.$$

3-masala. Uzunligi 360 mm bo'lgan sterjenning A va B nuqtalariga miqdori 50 N va 100 N bo'lgan parallel kuchlar qo'yilgan. Kuchlarning teng ta'sir etuvchisini va uning qo'yilgan nuqtasini aniqlang. (5.39-rasm)



5.39-rasm.

Yechish: Sterjenga qo'yilgan kuchlarning teng ta'sir etuvchisi ularning arifmetik yig'indisiga teng bo'ladi:

$$R = 50 + 100 = 150 \text{ N}$$

Agar teng ta'sir etuvchi kuchning qo'yilgan nuqtasini sterjenning A uchidan x mm masofa orqali aniqlanishini e'tiborga olsak, sterjenga qo'yilgan kuchlarning muvozanat shartini ifodalovchi tenglamadan teng ta'sir etuvchi kuchning qo'yilgan nuqtasi quyidagicha aniqlanadi:

$$\sum M_c(F_i) = 0$$

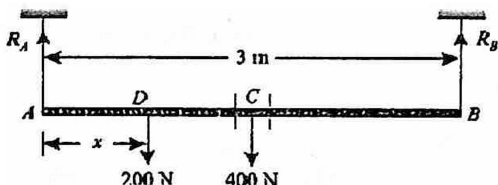
$$50 \cdot x - 100(360 - x) = 0$$

$$150x = 36000$$

$$x = \frac{3600}{150} = 240 \text{ mm}$$

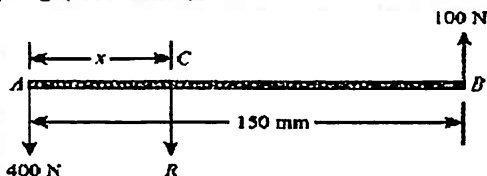
37-§. Mustaqil o'rganish uchun talabalarga tavsiya etiladigan muammolar

Muammo-1. Og'irligi 400 N va uzunligi 3 m bo'lgan balka garizantal xolatda 2 arqon yordamida ushlab turiladi. Arqonlarning biri uzunligi uchun og'irligi $D=200$ N bo'lgan jism balkaning qaysi nuqtasiga qo'yilishi kerak. Arqonlarda yuzaga kelishi mumkin bo'lgan maksimal taranglik kuchi 350 N ga teng (5.40-rasm).



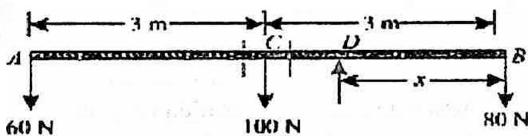
5.40-rasm.

Muammo-2. Jismning A va B nuqtalariga qo'yilgan o'zaro parallel va qarama-qarshi qo'yilgan kuchlar mos ravishda 400 N va 100 N ga teng. Kuchlarning teng ta'sir etuvchisi va uning qo'yilgan nuqtasini aniqlang (5.41-rasm).



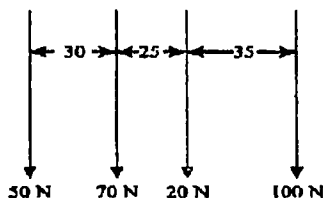
5.41-rasm.

Muammo-3. Uzunligi 6 m va, og'irligi 100 N bo'lgan bir jinsli balkaning A va B nuqtaqlariga 60 N va 80 N kuchlar qo'yilgan. Balkaning C nuqtasiga 100 N kuch qo'yilgan. Balka gorizontol holatda bo'lishi uchun D nuqtaga qo'yiladigan tayanch o'rni aniqlansin (5.42-rasm).



5.42-rasm

Muammo-4. 5.43-rasmda ko'rsatilgan parallel kuchlar Sistema-sining teng ta'sir etuvchisi va uning qo'yilish nuqtasini grafik usulda aniqlang.



5.43-rasm

Muammo-5. Uzunligi 200 mm bo‘lgan sterjenning uchlariga kattaligi 10 N va 30 N bo‘lgan kuchlar ta‘sir etadi. Teng ta‘sir etuvchi kuchning miqdori va qo‘yilish nuqtasi aniqlansin.

Muammo -6. Teng ta‘sir etuvchisi 200 N bo‘lgan 2 ta parallel va miqdori bir xil bo‘lgan kuchlardan biri teng ta‘sir etuvchi kuchdan 60 mm masofa uzoqlikka qo‘yilgan. Kuchlar qo‘yilgan nuqtalar orasidagi masofa 240 mm. parallel kuchlar miqdori aniqlansin.

38-§. Bir tekislikda yotuvchi bir necha jismdan tashkil topgan sistemaning muvozanatiga oid masalalarni yechish uchun uslubiy ko‘rsatmalar

Bir tekislikda yotuvchi, bir - birlari bilan bog‘langan, bir necha jismdan tashkil topgan sistemaning muvozanatini o‘rganamiz. Buning uchun sistemaga ta‘sir etuvchi kuchlarni tashqi va ichki kuchlarga ajratamiz: sistemaga kirmagan jismlarning unga ko‘rsatadigan ta‘siri tashqi kuchlar, sistemani tashkil qilgan jismlarning bir-birlariga ko‘rsatadigan ta‘sir kuchlari ichki kuchlar deyiladi. Ichki kuchlar, Nyutonning uchinchi qonuniga ko‘ra, juft-juft ravishda miqdor jihatdan teng, yo‘nalishi jihatdan qarama-qarshi bo‘ladi.

Bir tekislikda yotuvchi, bir necha jismdan tashkil topgan sistemaning muvozanatini quyidagi ikki usulda o‘rganish mumkin:

1) Bir tekislikda yotuvchi n – ta jismdan tashkil topgan sistema uchun tekislikdagi kuchlar sistemasining uchta muvozanat tenglamalari tuziladi. Bu tenglamalarda ichki kuchlar qatnashmaydi. Sistemadagi barcha noma‘lumlarni aniqlash uchun bu shartlar yetishmaydi. Shuning uchun, $n-1$ ta jism alohida ajratib olinadi va ularning har biri uchun uchtdan muvozanat tenglamalari tuziladi. Natijada tuzilgan muvozanat tenglamalari soni $3+3(n-1)=3n$ ta bo‘ladi.

Bunda, sistemadan ajratib olingan biror jismning muvozanati o'rganilayotganda, bu jismga sistemani tashkil etuvchi boshqa jismlarning ta'siri kuchlar bilan almashtiriladi. Sistema uchun bu kuchlar ichki kuchlar hisoblanadi, lekin ajratib olingan jism uchun tashqi kuchlar qatoriga kiradi. Tuzilgan muvozanat tenglamalarini yechib, barcha noma'lumlar aniqlanadi.

2) Bir tekislikda yotuvchi n ta jismdan tashkil topgan sistemaning muvozanatini o'rganish maqsadida, har bir jism alohida ajratib olinadi va ular uchun uchtdan muvozanat tenglamalari tuziladi. Natijada, $3n$ ta muvozanat tenglamalari hosil bo'ladi. Tenglamalarni yechib, barcha noma'lumlar aniqlanadi. Tuzilgan tenglamalarda ichki kuchlar qatnashadi, lekin ular ajratib olingan jismlar uchun tashqi kuchlar qatoriga kiradi.

39-§. Bir tekislikda yotuvchi bir necha jismdan tashkil topgan sistemaning muvozanatiga oid masalalar

1-masala.

Bir xil uzunlikdagi ikkita bir jinsli brus o'zaro C sharnir bilan, shuningdek A va B nuqtada ham sharnir vositasida tayanchlarga birlashtirilgan, har qaysi brusning og'irligi P ga teng. C nuqtada Q yuk osilgan. Masofa $AB = d$. C nuqtadan AB gorizontal to'g'ri chiziqchaga bo'lgan masofa b ga teng. A , B va C sharnirlarning reaksiyalari aniqlansin (5.44a-rasm).

Yechish.

Bir xil uzunlikdagi ikki jismdan iborat butun sistemaning muvozanatini o'rganamiz. Sistemaga har qaysi brusning og'irligi \vec{P} kuchlar va C nuqtaga quyilgan \vec{Q} kuch ta'sir etadi. Har qaysi brusning og'irlik kuchi brus markaziga quyiladi. A va B sharnirli tayanchlar sistema uchun bog'lanishlar hisoblanadi. Ularning sistemaga ta'sirini bog'lanishlar reaksiya kuchlari bilan almashtiramiz. A va B sharnirli tayanchlar reaksiyalarining yo'nalishi oldindan ma'lum bo'lmaganligi uchun ularni koordinata o'qlarining musbat yo'nalishi bo'ylab yo'nalgan $X_A Y_A$, $X_B Y_B$ tashkil etuvchilarga ajratamiz.

Natijada sistemaga ta'sir etuvchi bir tekislikda ixtiyoriy joylashgan (P, Q, X_A, Y_A, X_B, Y_B) kuchlar sistemasiga ega bo'lamiz (5.44b-rasm).

Hosil bo'lgan kuchlar sistemasining muvozanat tenglamalarini tuzamiz. Buning uchun koordinata boshi sifatida A nuqtani tanlab, A_x o'qni gorizontal, A_y o'qni vertikal yo'naltiramiz. Momentlar tenglamasini tuzish uchun momentlar markazi sifatida A nuqtani olamiz. Bunday holda:

$$\sum X_i = 0 \quad X_A + X_B = 0, \quad (1)$$

$$\sum Y_i = 0 \quad Y_A + Y_B - P - P - Q = 0, \quad (2)$$

$$\sum M_A(F_i) = 0 \quad Y_B \cdot d - P \cdot \frac{d}{4} - P \cdot \frac{3}{4}d - Q \frac{d}{2} = 0. \quad (3)$$

Aniqlanishi lozim bo'lgan, tuzilgan muvozanat tenglamalarida qatnashayotgan noma'lumlar soni to'rtta. Masalani yechish uchun to'rtinchi muvozanat tenglamasi ham kerak. Bu tenglamani tuzish uchun sistema qismlaridan birining (AC qismning) muvozanatini o'rganamiz. Bunda C ichki sharnir reaksiya kuchlari X_C va Y_C ni ajratib olingan qism uchun tashqi kuchlar qatoriga kiritamiz. (5.44v-rasm).

To'rtinchi muvozanat tenglamasini tuzish uchun C nuqtaga nisbatan momentlar tenglamasini tuzamiz. (tenglamada X_C, Y_C kuchlar momentlari qatnashmaydi, masala shartida C sharnir reaksiyasini topish talab qilinmagan.):

$$\sum M_C(F_i) = 0 \quad -Y_A \cdot \frac{d}{2} - X_A \cdot b + P \frac{d}{4} = 0. \quad (4)$$

Tenglamalarni yechib, noma'lum kattaliklarni aniqlaymiz.

(1) tenglamadan:

$$X_A = -X_B \text{ yoki } X_B = -X_A.$$

(3) tenglamadan:

$$Y_B = \frac{P \cdot \frac{d}{4} + \frac{3}{4} \cdot P \cdot d + \frac{Qd}{2}}{d} = P + \frac{Q}{2}.$$

(2) tenglamadan:

$$Y_A = -Y_B + 2P + Q = -P - \frac{Q}{2} + 2P + Q = P + \frac{Q}{2}.$$

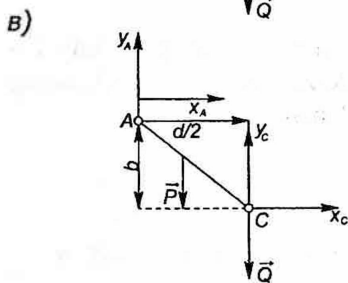
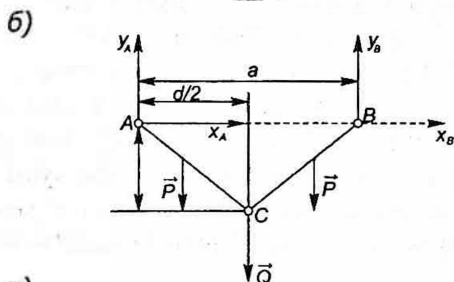
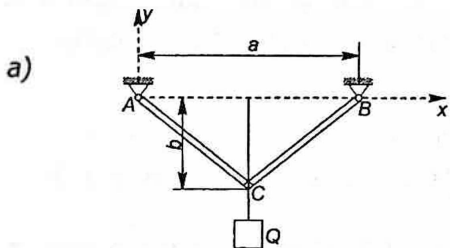
(4) tenglamadan:

$$X_A = \frac{-Y_A \cdot \frac{d}{2} + P \cdot \frac{d}{4}}{b} = \frac{(P + \frac{Q}{2}) \frac{d}{2} + P \cdot \frac{d}{4}}{b} = -\frac{d(P + Q)}{4b}.$$

$$X_B = \frac{d(P+Q)}{4b}$$

2-masala. Ikki qismdan iborat konstruksiyaning tayanch reaksiyalari aniqlansin. (5.45a-rasm).

Berilgan: $P_1 = 10 \text{ kN}$, $P_2 = 8 \text{ kN}$, $M = 25 \text{ kN} \cdot \text{m}$, $q = 1,8 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$.



5.44a,b,v-rasmlar.

Yechish. Konstruksiya har bir qismining muvozanatini o'rganamiz. Konstruksiyaning AC qismiga intensivligi q bo'lgan tekis taqsimlangan kuch va P_1 kuch ta'sir etadi. Konstruksiyaning A uchi qistirib mahkamlangan, C nuqtada ichki sharnirga tayanadi. Bog'lanishlardan bo'shatish prinsipiga ko'ra, devorning unga

qistirib mahkamlangan balkaning A uchiga ta'siri bog'lanishlar reaksiyalari bilan almashtiriladi: X_A, Y_A reaksiya kuchlari va momenti M_A bo'lgan reaktiv moment. C ichki sharnir reaksiya kuchlari X_C, Y_C kuchlar orqali ifodalanadi (5.45v-rasm).

Koordinata boshi sifatida A nuqtani tanlab A_x o'qini gorizontal, A_y o'qini vertikal yuqoriga yo'naltiramiz. Konstruksiyaning mazkur qismi uchun muvozanat tenglamalarini tuzamiz:

$$\sum X_i = 0 \quad X_A + X_C - P_1 \cos 45^\circ = 0, \quad (1)$$

$$\sum Y_i = 0 \quad Y_A - Q - P_1 \cos 45^\circ + Y_C = 0, \quad (2)$$

$$\sum M_A(F_i) = 0 \quad M_A + Q \cdot 1 + P_1 \cdot \cos 45^\circ \cdot 2 + Y_C \cdot 2 - X_C \cdot 3 = 0 \quad (3)$$

Konstruksiya CB qismining muvozanatini o'rganamiz. Konstruksiyaning bu qismiga P_2 kuch va momenti M bo'lgan juft kuch ta'sir etadi. U A nuqtada qo'zg'aluvchan sharnirga, C nuqtada ichki sharnirga tayanadi. Bog'lanishlardan bo'shatish prinsipiga ko'ra, bog'lanishlarning jismga ta'siri bog'lanishlar reaksiya kuchlari bilan almashtiriladi: A qo'zg'aluvchan sharnir reaksiyasi R_A sharnir xarakterlanadigan tekislikka perpendikulyar holda yo'naladi, C ichki sharnir reaksiyasi X_C, Y_C tashkil etuvchi kuchlar orqali ifodalanadi (5.45g-rasm).

Koordinata boshi sifatida C nuqtani olib, koordinata o'qlarini 5.45-rasmdagidek o'tkazamiz. Konstruksiyaning mazkur qismi uchun muvozanat tenglamalarini tuzamiz:

$$\sum X_i = 0 \quad -X'_C - R_B \cos 45^\circ = 0, \quad (4)$$

$$\sum Y_i = 0 \quad -Y'_C + R_B \sin 45^\circ - P_2 = 0, \quad (5)$$

$$\sum M_C(F_i) = 0 \quad -M - P_2 \cdot 1 + R_B \sin 45^\circ \cdot 3 = 0. \quad (6)$$

Tenglamalarni yechib, noma'lum kattaliklarni aniqlaymiz.

(6) tenglamadan:

$$R_B = \frac{M + P_2 \cdot 1}{3 \cdot \sin 45^\circ} = \frac{25 + 8 \cdot 1}{3 \cdot 0,71} = 15,5 \text{ kN}.$$

(5) tenglamadan:

$$Y'_C = R_B \cdot \sin 45^\circ - P_2 = 11 - 8 = 3 \text{ kN}.$$

(4) tenglamadan:

$$X'_C = -R_B \cdot \cos 45^\circ = -15,5 \cdot 0,71 = -11 \text{ kN}.$$

(1) tenglamadan:

$$X'_A = -X'_C + P \cdot \cos 45^\circ = 11 + 10 \cdot 0,71 = 18,1 \text{ kN}.$$

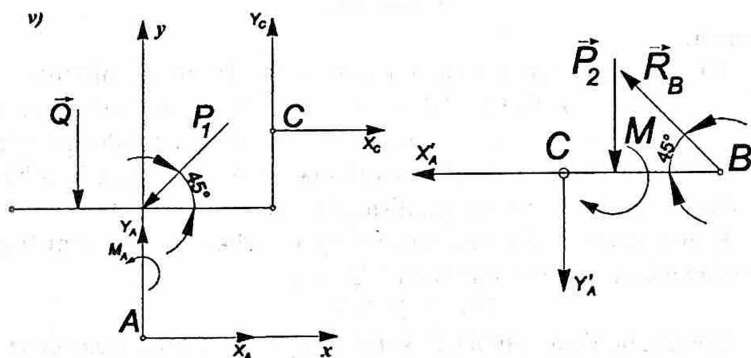
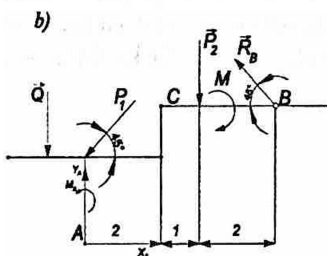
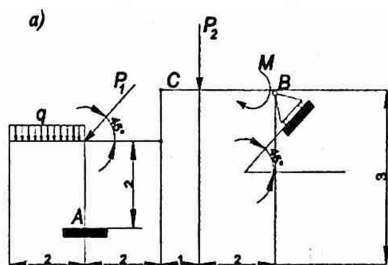
(2) tenglamadan:

$$Y'_A = Q + P_1 \cdot \cos 45^\circ - Y'_C = 3,6 + 10 \cdot 0,71 - 3 = 7,7 \text{ kN}.$$

(3) tenglamadan:

$$M_A = -Q \cdot 1 - P_1 \cdot \cos 45^\circ \cdot 2 - Y'_C \cdot 2 + X'_C \cdot 3 = -3,6 - 10 \cdot 0,71 \cdot 2 - 6 - 33 = -56,8 \text{ kN}.$$

Bajarilgan hisoblashlarning to'g'rigiliga ishonch hosil qilish uchun konstruksiyani bir butun deb qarab, muvozanat tenglamalarini tuzamiz (5.45.b-rasm). Noma'lumlarni aniqlangan qiymatlari tuziladigan tenglamalarni qanoatlantirishi lozim.



5.45a,b,v,g-rasm.

$$\sum X_i = 0 \quad X_A - P_1 \cos 45^\circ - R_B \cos 45^\circ = 0$$

$$18,1 - 10 \cdot 0,71 - 15,5 \cdot 0,71 = 0$$

$$18,1 - 18,1 = 0$$

$$\sum Y_i = 0 \quad Y_A - Q - P_1 \cos 45^\circ - P_2 + R_B \cos 45^\circ = 0$$

$$7,7 - 3,6 - 10 \cdot 0,71 - 8 + 15,5 \cdot 0,71 = 0$$

$$18,7 - 18,7 = 0$$

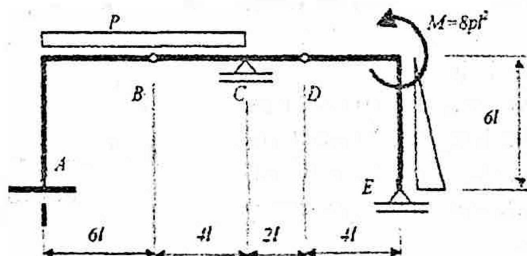
$$\sum M_A(F_i) = 0 \quad Q \cdot 1 + P_1 \cos 45^\circ \cdot 2 - P_2 \cdot 3 + R_B \cos 45^\circ \cdot 5 + R_B \cos 45^\circ \cdot 3 + M_A - M = 0$$

$$3,6 + 14,2 - 24 + 55 + 33 - 56,8 - 25 = 0$$

$$105,8 - 105,8 = 0$$

Hisoblashlar tayanch reaksiyalarini to'g'ri aniqlanganidan darak beradi.

3-masala. Rasmda ko'rsatilgan murakkab konstruksiyaning tayanch reaksiyalarini va uni tashkil qiluvchi jismlarning bir-birlariga ko'rsatadigan ta'sir kuchlari – ichki kuchlar aniqlansin.



5.46-rasm.

Yechish.

1. Konstruksiyaning statik aniqlangan ekanligini tekshiramiz.

Konstruksiya AB, BD va DE qismlardan iborat. Konstruksiya A nuqtada yerga qistirib mahkamlangan. C va E nuqtalarda qo'zg'aluvchan sharnirlarga tayanadi. B va D sharnirlar ichki sharnirlar bo'lib, ular vositasida konstruksiya qismlari o'zaro ta'sir etadi.

Konstruksiyadagi noma'lum tashqi va ichki kuchlar soni 9 ta, muvozanat tenglamalari soni ham $3 \cdot 3 = 9$ ta.

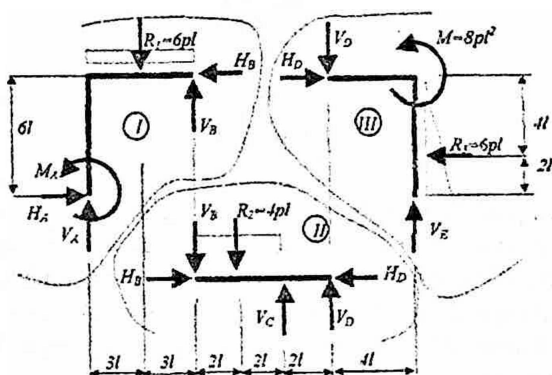
$$3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 = 3 \cdot 3$$

Demak, berilgan murakkab konstruksiya statik aniqlangan ekan.

2. Konstruksiyaga qo'yilgan tashqi kuchlarni ko'rsatamiz.

Konstruksiyani bog'lanishlardan ozod etib, ularning ta'sirlarini bog'lanishlar reaksiya kuchlari bilan almashtiramiz.

Konstruksiyani B va D nuqtalarda qismlarga ajratamiz. Ichki sharnirlar reaksiya kuchlari juft juft holda miqdor jihatdan teng bo'lib, bir to'g'ri chiziq bo'ylab qarama qarshi tomonga yo'nalgan bo'ladi. Konstruksiyaga qo'yilgan tashqi kuchlar, bog'lanishlar reaksiya kuchlari va ichki sharnirlar reaksiya kuchlari rasmda ko'rsatilgan.



5.47-rasm.

3. Konstruksiya har bir qismining muvozanatini o'rganamiz.

Konstruksiya AB qismi uchun muvozanat tenglamalari quyidagicha yoziladi:

$$\begin{aligned} \sum X_i = 0 & \quad H_A - H_B = 0 \\ \sum Y_i = 0 & \quad V_A - 6pl + V_B = 0 \\ \sum M_{A_i} = 0 & \quad M_A - 6pl \cdot 3l - V_B \cdot 6l + H_B \cdot 6l = 0 \end{aligned}$$

Konstruksiyaning BD qismi uchun muvozanat tenglamalari quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\begin{aligned} \sum X_i = 0 & \quad H_B - H_D = 0 \\ \sum M_{B_i} = 0 & \quad -4pl \cdot 2l + V_C \cdot 4l + V_D \cdot 6l = 0 \\ \sum M_{C_i} = 0 & \quad V_B \cdot 4l + 4pl \cdot 2l + V_D \cdot 2l = 0 \end{aligned}$$

Konstruksiyaning DE qismi uchun muvozanat tenglamalari quyidagicha yoziladi:

$$\begin{aligned} \sum X_i = 0 & \quad H_D - 6 \cdot p = 0 \\ \sum M_{D_i} = 0 & \quad 8pl^2 - 6pl \cdot 4l + V_B \cdot 4l = 0 \\ \sum M_{E_i} = 0 & \quad V_D \cdot 4l + H_D \cdot 6l + 8pl^2 + 6pl \cdot 2l = 0 \end{aligned}$$

4. Muvozanat tenglamalarini yechib, barcha noma'lum kuchlarni aniqlaymiz:

$$H_D = 6pl$$

$$V_E = 4pl$$

$$V_D = 4pl$$

$$H_B = 6pl$$

$$V_A = -4pl$$

$$V_B = -4pl$$

$$H_A = 6pl$$

$$V_A = 10pl$$

$$M_A = 6pl^2$$

Bajarilgan hisoblashlarning tog'riligiga ishonch hosil qilish uchun konstruksiyaning har bir qismi uchun, uni muvozanatini o'rganishda foydalanmagan muvozanat tenglamalarini tuzamiz. Tenglamada qatnashayotgan kuchlar qiymatlari tenglamani qanoatlantirishi lozim. Shunda tenglamada qatnashayotgan kuchlarning qiymatlari to'g'ri aniqlangan bo'ladi.

Masalan konstruksiyaning AB qismi uchun:

$$\sum M_{B1} = 0 \quad M_A + H_A * 6l - V_A * 6l + 6pl * 3l = 0$$

Konstruksiyaning BD qismi uchun:

$$\sum Y_i = 0 \quad -V_B - 4pl + V_C + V_D = 0$$

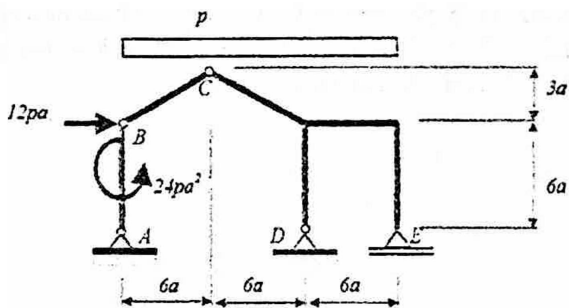
Konstruksiyaning DE qismi uchun:

$$\sum Y_i = 0 \quad -V_D + V_E = 0$$

Hisoblashlar, tenglamalarda qatnashayotgan noma'lum kuchlar qiymatlari to'g'ri topilganligini ko'rsatadi.

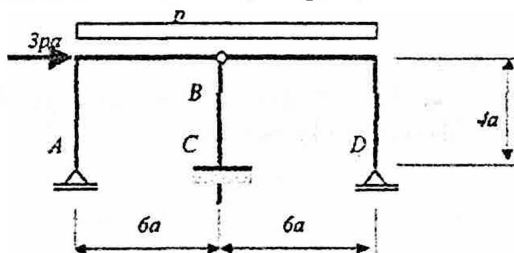
40-§. Mustaqil yechish uchun talabalarga tavsiya etiladigan muammolar

Muammo-1. Rasmda ko'rsatilgan konstruksiyaning tayanch reaksiyalarini aniqlang. Konstruksiyaga ta'sir etuvchi kuchlar va masofalar rasmda ko'rsatilgan.



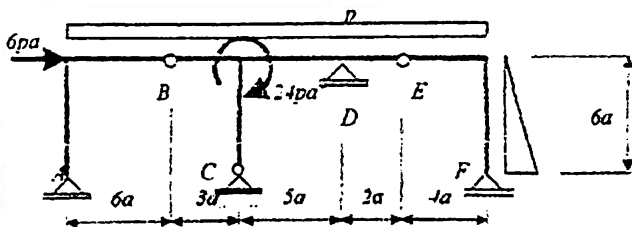
5.48-rasm.

Muammo-2. Rasmda ko'rsatilgan qo'shma konstruksiyaning tayanch reaksiya kuchini aniqlang. Konstruksiyaga ta'sir etuvchi kuchlar va masofalar rasmda ko'rsatilgan.



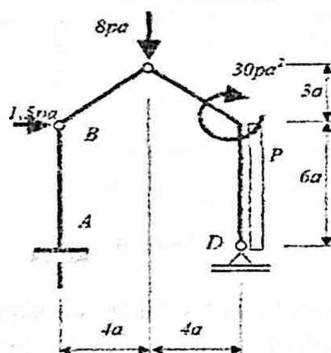
5.49-rasm.

Muammo-3. Rasmda ko'rsatilgan qo'shma konstruksiyaning tayanch reaksiya kuchini aniqlang. Konstruksiyaga ta'sir etuvchi kuchlar va masofalar rasmda ko'rsatilgan.



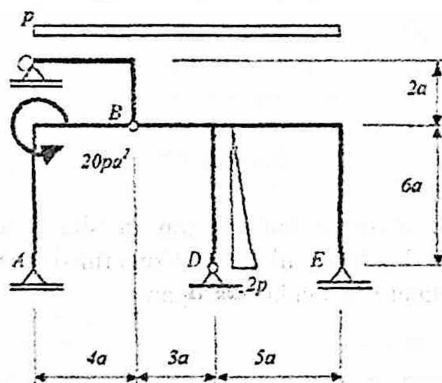
5.50-rasm.

Muammo-4. 5.51-rasmda ko'rsatilgan qo'shma konstruksiyaning tayanch reaksiya kuchini aniqlang. Konstruksiyaga ta'sir etuvchi kuchlar va masofalar rasmda ko'rsatilgan.



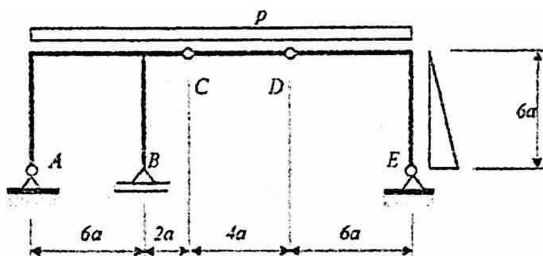
5.51-rasm.

Muammo-5. Rasmda ko'rsatilgan qo'shma konstruksiyaning tayanch reaksiya kuchini aniqlang. Konstruksiyaga ta'sir etuvchi kuchlar va masofalar rasmda ko'rsatilgan.



5.52-rasm.

Muammo-6. Rasmda ko'rsatilgan qo'shma konstruksiyaning tayanch reaksiya kuchini aniqlang. Konstruksiyaga ta'sir etuvchi kuchlar va masofalar rasmda ko'rsatilgan.



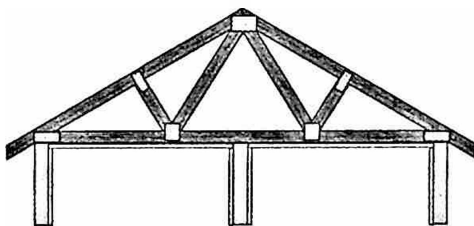
5.53-rasm.

41-§. Ferma haqida tushuncha

Sharnirlar vositasida geometrik o'zgarmas qilib tutashtirilgan sterjenlardan tashkil topgan qurilma ferma deb ataladi. Fermada sterjenlarning uchlari tutashgan nuqtalar tugunlar, tayanchlarga o'rnatilgan nuqtalar esa tayanch tugunlari deyiladi.

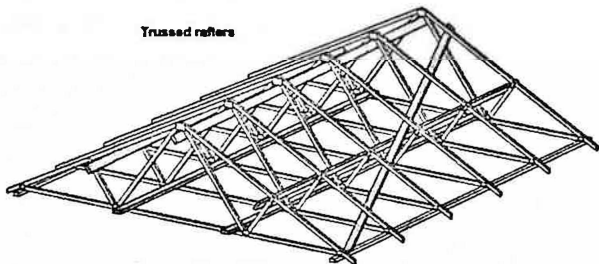
Barcha sterjenlari bir tekislikda yotuvchi ferma yassi ferma hisoblanadi.

Fermalar qanday inshootlarda qo'llanilishiga qarab turlicha nomlanishi mumkin: ko'priklar [1] (5.54-rasm), inshootlarning tomini ushlab turuvchi stropila fermalari [1] (5.55a,b-rasmlar), ko'tarish qurilmalarida foydalanadigan kran fermalari [1] (5.56a,b-rasmlar) va h.k.

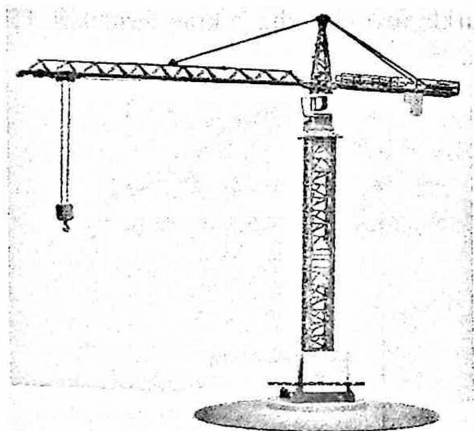
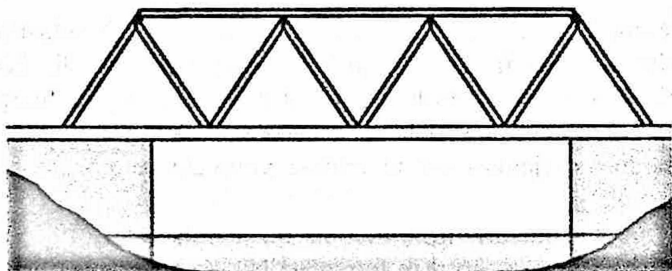


5.54-rasm

Trussed rafters

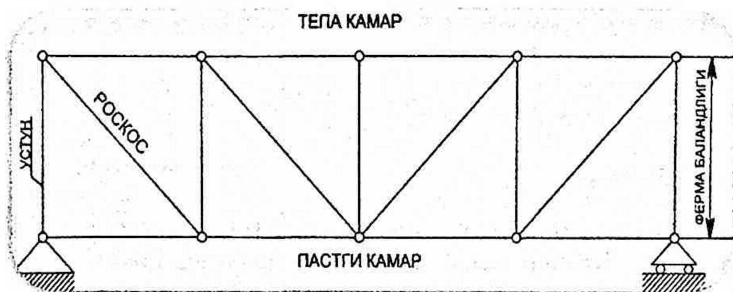


5.55-rasm.



5.56-rasm.

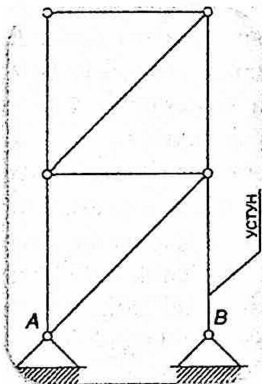
Yassi fermaning tepa konturi bo‘ylab joylashgan sterjenlar tepa, pastki konturi bo‘ylab joylashgan sterjenlar esa pastki kamarlarni tashkil etadi (5.57-rasm).



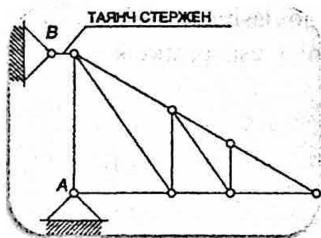
5.57 – rasm.

Fermaning vertikal sterjenlari ustunlar, og‘ma sterjenlari raskoslar deyiladi (5.56, 5.57-rasmlar).

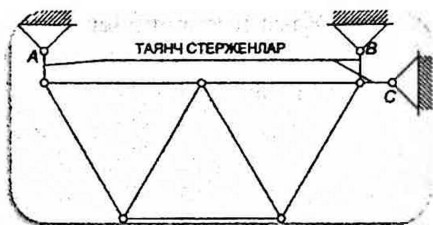
Agar ferma tayanchlarga sterjenlar yordamida tayansa, bunday sterjenlar tayanch sterjenlari deyiladi (5.58a,b-rasmlar).



5.57-rasm.



5.58a-rasm.



5.58b-rasm.

Fermalarga qo'yilgan kuchlar ta'sirida ularning tayanch sterjenlari va fermani tashkil qiluvchi sterjenlarida hosil bo'ladigan ichki kuchlar zo'riqishlar deyiladi. Zo'riqishlar sterjenlar o'qlari bo'ylab yo'naladi.

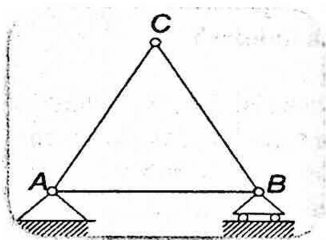
Yassi fermalarni hisoblash uning tayanch reaksiyalari va sterjenlaridagi zo'riqishlarni aniqlashdan iborat. Ferma sterjenlaridagi zo'riqishlarni aniqlashda:

1. Ferma sterjenlari absolyut kattiq, to'g'ri chiziqli deb qaraladi va ularning og'irligi e'tiborga olinmaydi.
2. Ferma sharnirlaridagi ishqalanish kuchlari hisobga olinmaydi.
3. Yassi fermaga ta'sir etuvchi kuchlar faqat uning tugunlariga qo'yiladi va ferma tekisligida yotadi deb faraz qilinadi.

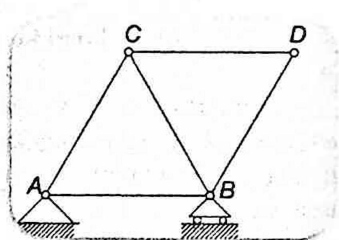
Bunday holda ferma sterjenlariga faqat bo'ylama (cho'zuvchi yoki siquvchi) kuchlar ta'sir yetadi.

Real fermalarda sterjenlar sharnirlar yordamida emas, balki payvandlash yoki parchin mixlar vositasida birlashtiriladi. Shu sababli, ferma sterjenlariga bo'ylama kuchlardan tashqari, eguvchi kuchlar ham ta'sir etadi. Lekin, akademik E.O. Paton olib borgan tadqiqotlarga ko'ra, egilishda hosil bo'ladigan zo'riqish uncha katta bo'lmaydi va fermalarni hisoblashda uni e'tiborga olmaslik mumkin bo'ladi.

n ta tugundan tashkil topgan fermaning geometrik o'zgarmas bo'lishi sharti bilan tanishib chiqamiz. Birinchi uchta A, B va C tugunlarni geometrik o'zgarmas qilib tutashtirash uchun uchta sterjen kerak bo'ladi (5.59a-rasm). Bunday fermaga yana bitta D tugun qo'shilishi uchun, D tugunni A, B, C fermaga kamida ikkita sterjen vositasida birlashtirish lozim (5.59b-rasm).



5.59a-rasm.



5.59b-rasm.

Shu tarzda, ABC uchburchakli fermaga qolgan $n-3$ tugunlarning har birini ikkitadan sterjenlar vositasida biriktirish natijasida, n ta tugundan tashkil topadigan ferma geometrik o'zgarmas bo'lishi uchun zarur bo'ladigan sterjenlar soni quyidagicha aniqlanadi:

$$N = 2(n - 3) + 3 = 2n - 3 \quad (5.19)$$

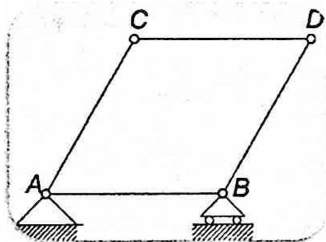
Bunday ferma ortiqcha sterjenga ega bo'lmagan yassi ferma deyiladi (4.14-rasm).

Agar fermada

$$N > 2n - 3 \quad (5.20)$$

bo'lsa, bunday ferma ortiqcha sterjenga ega bo'lgan yassi ferma deyiladi.

Agar $N < 2n - 3$ bo'lsa, bunday qurilma geometrik o'zgaruvchan bo'ladi va fermani ifodalamaydi (5.60-rasm).

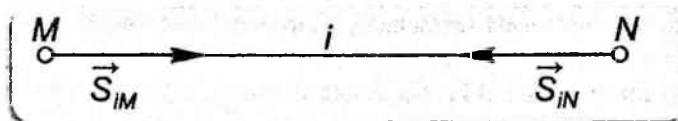


Ferma sterjenlaridagi zo'riqishlarni aniqlashdan oldin ferma ning tayanch reaksiyalarini aniqlash maqsadga muvofiq bo'ladi. Buning uchun fermani bog'lanishlardan bo'shatib, hosil bo'ladigan bir tekislikda yotuvchi kuchlar sistemasi uchun uchta muvozanat tenglamalari tuziladi. Bu tenglamalardan tayanch nuqtalaridagi uchta nomal'um reaksiya kuchlari aniqlanadi.

42-§. Ferma sterjenlaridagi zo'riqishlarni tugunlarni kesish usuli bilan aniqlash

Tugunlarni kesish usulida ferma tugunlarini bog'lanishlardan bo'shatib, fikran ketma-ket kesa beramiz va tugunlarga ta'sir etuvchi kuchlar muvozanatini o'rganamiz. Tugunlarga ta'sir etuvchi kuchlarga sterjenlarning reaksiya kuchlari, tugunlarga qo'yilgan tashqi kuchlar va tayanch reaksiya kuchlari kiradi. Bu kuchlar bir tekislikda yotuvchi kesishuvchi kuchlar sistemasini tashkil etadi. Tugunlarning har biri uchun ikkitadan muvozanat tenglamalarini tuzamiz va bu tenglamalardan tugunlardagi noma'lum reaksiya kuchlari aniqlanadi. Tugunlarni shunday ketma-ketlikda kesish lozimki, bunda tugunlardagi aniqlanishi lozim bo'lgan noma'lum reaksiya kuchlari ikkitadan oshmasligi kerak. Chunki, bir tekislikda yotuvchi kesishuvchi kuchlar sistemasining muvozanat shartlaridan faqat ikkita noma'lum kattalikni aniqlash mumkin bo'ladi.

Ferma tugunlari uchun muvozanat tenglamalarini tuzishda i nomerli sterjendagi kuchni \vec{s}_i bilan, sterjenning M tugunga qo'yiladigan reaksiyasini s_{im} bilan belgilaymiz. M va N tugunlarni birlashtiruvchi sterjen uchun (5.61-rasm):



5.61-rasm.

$$\vec{s}_{im} = -\vec{s}_{in} \quad s_{im} = s_{in} = s_i$$

Barcha sterjenlarning reaksiyalari sterjenlar cho'ziladi, deb faraz qilib, tugunlardan sterjenlar bo'ylab, ularning ichiga qarab yo'naltiriladi. Hisoblash natijasida sterjenning reaksiyasi manfiy ishora bilan chiqsa, bu sterjenni tugunga qo'yilgan kuchlar ta'sirida cho'zilmasdan, siqilgan ekanligidan darak beradi.

Bajarilgan hisoblashlarning to'g'riligini tekshirish uchun har bir tugunga tanlangan masshatba tegishli kuchlar ko'pburchagini chizish maqsadga muvofiq bo'ladi.

Fermalarni hisoblashda quyidagi xususiy hollar bo'lishi mumkin

1. Agar fermaning ikki sterjenli tuguniga kuch ta'sir etmasa (5.62-rasm), har ikki sterjenlardagi zo'riqishlar nolga teng bo'ladi.

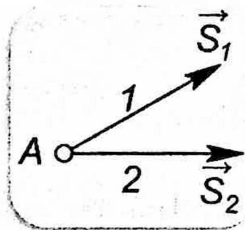
2. Agar fermaning ikki sterjenli tuguniga ikki sterjenlardan birining o'qi bo'ylab yo'nalgan \vec{F} kuch ta'sir etsa (5.63-rasm), bu sterjenning reaksiya kuchi miqdor jihatdan ta'sir etuvchi kuchga teng bo'lib, unga qarama-qarshi yo'nalgan bo'ladi:

$$\vec{S}_1 = -\vec{F} \quad S_2 = 0$$

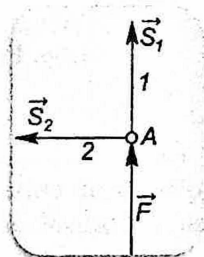
3. Agar fermaning ikki sterjenli tuguniga sterjen o'qlari bo'ylab yo'nalgan \vec{F}_1, \vec{F}_2 kuchlar ta'sir etsa (5.64-rasm), har bir sterjenning reaksiya kuchi miqdor jihatdan mos ravishda shu kuchga teng, yo'nalishi unga qarama - qarshi bo'ladi:

$$\vec{S}_1 = -\vec{F}_1 \quad \vec{S}_2 = -\vec{F}_2$$

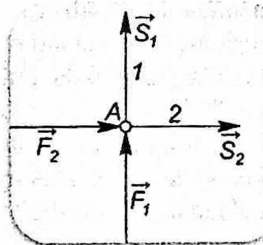
4. Agar fermaning uch sterjenli tugunida ikki sterjenning o'qi bir to'g'ri chiziqda yotsa va tugunga uchinchi sterjenning o'qi boylab kuch ta'sir etsa (5.65-rasm), uchinchi sterjen reaksiya



5.62-rasm



5.63-rasm.

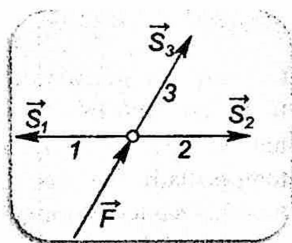


9.12-rasm

kuchi miqdor jihatdan ta'sir etuvchi kuchga teng bo'lib, yo'nalishi unga qarama-qarshi bo'ladi.

$$\vec{S}_2 = -\vec{F}$$

5.64-rasm.



Qolgan ikki sterjenning reaksiya kuchi miqdofidan teng bo'ladi (nolga teng bo'lishi ham mumkin).

43-§. Ferma sterjenlaridagi zo'riqishlarni Ritter usulida aniqlash

Fermani hisoblashda uning ayrim sterjenlaridagi zo'riqishlarni aniqlash talab etilsa, Ritter tomonidan kashf etilgan va uning nomi bilan ataladigan analitik usuldan foydalanish qulay bo'ladi. Bu usulda ham dastlab fermaning tayanch reaksiyalari aniqlanadi.

Ritter usulida ferma biror $\alpha - \alpha$ kontur bilan fikran kesilib, ikki qismga ajratiladi va masala shartiga qarab, ajratilgan qismlardan birining muvozanati o'rganiladi. Fermaning qismlariga ta'sir etuvchi kuchlar tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasini tashkil etadi. Ularning muvozanat tenglamalaridan uchta noma'lum kattalikni aniqlash mumkin. Shuning uchun fermani shunday kesim bilan kesish kerakki, reaksiya kuchlari noma'lum bo'lgan sterjenlar soni uchtdan oshmasligi va bir nuqtada kesishadigan sterjenlar soni ikkitadan oshmasligi lozim. Fermaning qismlaridan birining muvozanatini o'rganishda tashlab yuborilgan qismining ta'siri, sterjenlar bo'ylab tashlab yuborilgan tomonga yo'nalgan kuchlar bilan almashtiriladi, ya'ni barcha kesilgan sterjenlar cho'zilgan deb faraz qilinadi. Hisoblash natijasida sterjenning reaksiya kuchi manfiy ishorali chiqsa, uning yo'nalishi qabul qilingan yo'nalishga qarama-qarshi ekanligi, binobarin, mazkur sterjen aslida siqilgan ekanligi ma'lum bo'ladi. Muvozanat tenglamalarida, imkoni bo'lsa, noma'lumlar soni bittadan oshmasligi lozim. Shu nuqtai nazardan

qaraganda quyidagi ko'rinishdagi muvozanat tenglamalaridan foydalanish maqsadga muvofiq bo'ladi (5.22).

$$\Sigma M_A(\vec{F}_i) = 0, \quad \Sigma M_B(\vec{F}_i) = 0, \quad \Sigma U_i = 0. \quad (5.21)$$

$$\Sigma M_A(\vec{F}_i) = 0, \quad \Sigma M_B(\vec{F}_i) = 0, \quad \Sigma M_C(\vec{F}_i) = 0. \quad (5.22)$$

Tenglamalarni tuzishda, moment markazi sifatida ikkita noma'lum reaksiya kuchlarining ta'sir chiziqlari kesishadigan nuqtani olish qulay bo'ladi. Bunday nuqtalar Ritter nuqtalari deyiladi.

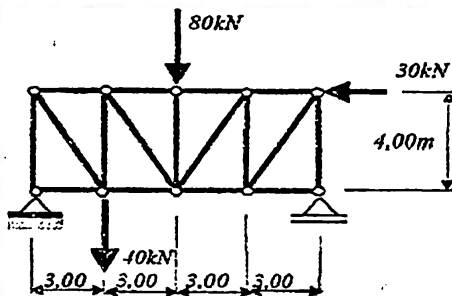
Agar fermaning muvozanati o'rganilayotgan qismida reaksiya kuchlari noma'lum bo'lgan sterjenlardan ikkitasi o'zaro parallel bo'lsa, (5.21) tenglamalardan foydalanish maqsadga muvofiq bo'ladi. Bunda moment markazlari uchun Ritter nuqtalari, kuchlar proeksiyalanadigan X o'qi sifatida, sterjenlarga perpendikulyar bo'lgan o'q olinadi.

Takrorlash uchun savollar

1. Tekis ferma deb nimaga aytiladi?
2. Ferma sterjenlaridagi zo'riqishlarni tugunlarni kesish usuli bilan aniqlash tartibini aytib bering.
3. Ferma sterjenlaridagi zo'riqishlarni Ritter usulida aniqlash tartibini aytib bering.
4. Fermaning tepa kamari deb nimaga aytiladi?
5. Fermaning pastki kamari deb nimaga aytiladi?
6. Ferma sterjeni deb nimaga aytiladi?
7. "Tugun" deganda nimani tushunasiz?
8. Statik aniq ferma qanday ferma?
9. Statik aniqmas ferma qanday ferma?

44-§. Tekis fermani hisoblashga oid masalalar

1-masala. Tekis ferma sterjenlaridagi zo'riqishlarni aniqlang (5.66-rasm).



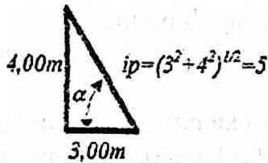
5.66-rasm.

Yechish.

1. Fermaning statik aniqlangan ekanligini tekshiramiz.

Fermada tugunlar soni $n=10$ ta. Sterjenlar soni ferma statik aniqlangan bo'lgani uchun $N=2n-3=17$ ta bo'lishi lozim. Berilgan fermada sterjenlar soni haqiqtdan ham 17 ta. Demak ferma statik aniqlangan ferma ekan.

2. Ferma sterjenlarining og'ish burchagini aniqlaymiz. (5.67-rasm)



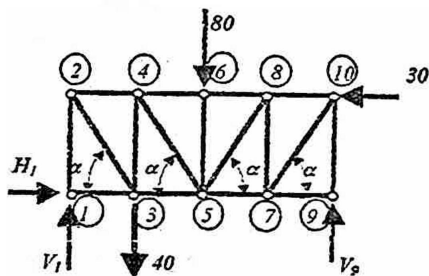
5.67-rasm.

$$\cos x = \frac{3}{5} = 0.6 \quad \sin x = \frac{4}{5} = 0.8$$

3. Fermaning tayanch reaksiyalarini aniqlaymiz.

Ferma tugunlariga miqdorlari 30 kN, 40 kN, 80 kN bo'lgan kuchlar ta'sir etadi.

Ferma A nuqtada qo'zg'almas, B nuqtada qo'zg'aluvchan sharnirga tayangan. Ularning fermaga ta'sirini bog'lanishlar reaksiyalarini bilan almashtiramiz. (5.68-rasm)



5.68-rasm.

Fermaga ta'sir etuvchi muvozanat tenglamalarini tuzamiz.

*Momentlar tenglamasini tuzishda kuch jismni nuqta atrofida soat mili bo'yicha aylantirishga intilsa kuch momenti ishorasini musbat deb qabul qiling.

$$\sum x_i = 0 \quad H_1 - 30 = 0; \quad H_1 = 30 \text{ kN}$$

$$\sum M_{11} = 0 \quad -40 \cdot 3 - 80 \cdot 6 + 30 \cdot 4 + V_9 \cdot 12 = 0; \quad V_9 = 40 \text{ kN}$$

$$\sum M_{99} = 0 \quad -V_1 \cdot 12 + 40 \cdot 9 + 80 \cdot 6 + 30 \cdot 4 = 0; \quad V_1 = 80 \text{ kN}$$

Bajarilgan hisoblashlarning to'g'riligini tekshiramiz.

$$\sum y_i = 0 \quad V_1 - 40 - 80 + V_9 = 0$$

Demak, hisoblashlar to'g'ri bajarilgan.

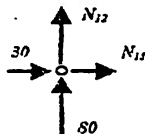
4. Ferma tugunlaridagi zo'riqishlarni aniqlaymiz. Barcha sterjenlarni cho'zilgan deb faraz qilamiz.

1-tugun.

muvozanat tenglamalarini tuzamiz.

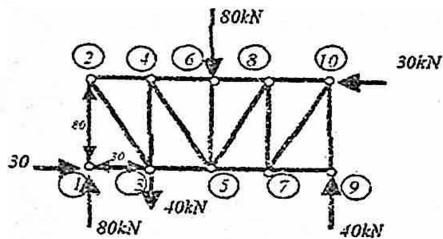
$$\sum x_i = 0 \quad 30 + N_{13} = 0 \quad N_{13} = -30 \text{ kN}$$

$$\sum y_i = 0 \quad 80 + N_{12} = 0 \quad N_{12} = -80 \text{ kN}$$



5.69-rasm.

Zo'riqishlar ishoralarining manfiyligi 12, 13 sterjenlarni siqilgan sterjenlar ekanligidan darak beradi. (5.70-rasm)



5.70-rasm.

2-tugun.

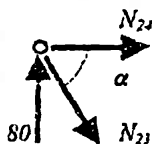
Tugunga qo'yilgan kuchlar uchun muvozanat tenglamalarini tuzamiz.

$$\sum x_i = 0$$

$$\sum y_i = 0$$

$$N_{24} + N_{23} \cos \alpha = 0$$

$$80 - N_{23} \sin \alpha = 0$$



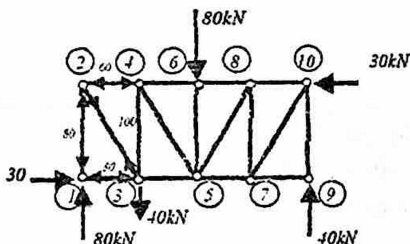
5.71-rasm.

Tenglamalarni yechib N_{23} va N_{24} larning qiymatlarini aniqlaymiz.

$$N_{23} = 100 \text{ kN}$$

$$N_{24} = -60 \text{ kN}$$

N_{24} qiymatining manfiy ishorasi mazkur sterjenning tugunga qo'yilgan kuchlar ta'sirida cho'zilmasdan siqilgan ekanligidan darak beradi. (5.72-rasm)



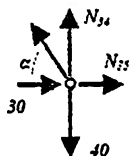
5.72-rasm.

3-tugun.

Tugunga qo'yilgan kuchlar uchun muvozanat tenglamalarini tuzamiz.

$$\sum x_i = 0 \quad 30 - 100 \cos \alpha + N_{35} = 0$$

$$\sum y_i = 0 \quad N_{34} - 40 + 100 \sin \alpha = 0$$



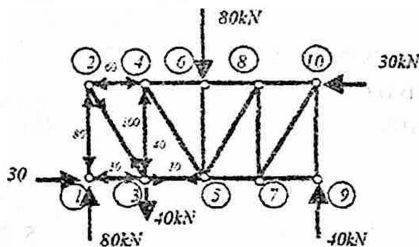
5.73-rasm.

Tenglamalarni yechib noma'lum zo'riqlarni aniqlaymiz.

$$N_{35} = 30 \text{ kN}$$

$$N_{34} = -40 \text{ kN}$$

Demak, 34 sterjen tugunga qo'yilgan kuchlar ta'sirida cho'zilmasdan siqilgan ekan. (5.74-rasm)



5.74-rasm.

4-tugun.

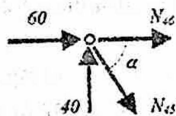
Tugunga qo'yilgan kuchlar uchun muvozanat tenglamalarini tuzamiz.

$$\sum x_i = 0$$

$$\sum y_i = 0$$

$$60 + N_{46} + N_{45} \cos \alpha = 0$$

$$40 - N_{45} \sin \alpha = 0$$



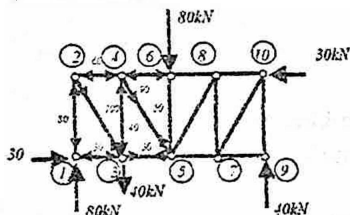
5.75-rasm.

Tenglamalarni yechib noma'lum zo'riqishlarni aniqlaymiz.

$$N_{45} = 50 \text{ kN}$$

$$N_{46} = -90 \text{ kN}$$

Demak, 46 sterjen tugunga qo'yilgan kuchlar ta'sirida cho'zilmasdan siqilgan ekan. (5.76-rasm)



5.76-rasm.

6-tugun.

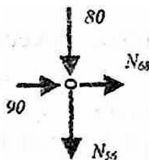
Tugunga qo'yilgan kuchlar uchun muvozanat tenglamalarini tuzamiz.

$$\sum x_i = 0$$

$$\sum y_i = 0$$

$$90 + N_{68} = 0$$

$$-80 - N_{66} = 0$$

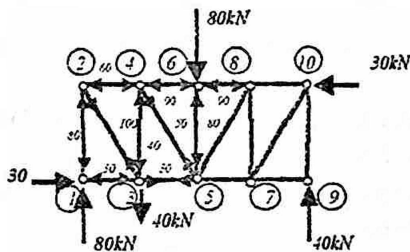


5.77-rasm.

Tenglamalarni yechib N_{68} va N_{36} larning qiymatlarini aniqlaymiz.

$$N_{68} = -90 \text{ kN} \quad N_{36} = -80 \text{ kN}$$

Hisoblashlar 68 va 36 sterjenlarni qo'yilgan kuchlar ta'sirida cho'zilmasdan, siqilgan ekanligidan darak beradi. (5.78-rasm)



5.78-rasm.

5-tugun.

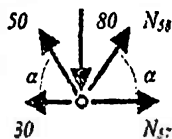
Tugunga qo'yilgan kuchlar uchun muvozanat tenglamalarini tuzamiz.

$$\sum x_i = 0$$

$$\sum y_i = 0$$

$$30 - 50 \cos \alpha + N_{57} + N_{58} \cos \alpha = 0$$

$$50 \sin \alpha - 80 + N_{58} \sin \alpha = 0$$

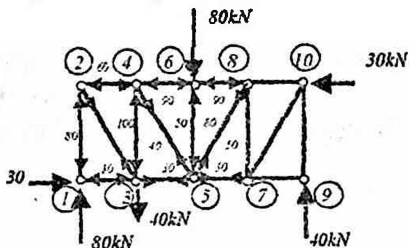


5.79-rasm.

Tenglamalarni yechib noma'lum zo'riqlishlarni aniqlaymiz.

$$N_{58} = 50 \text{ kN} \quad N_{57} = 30 \text{ kN}$$

Hisoblashlar mazkur sterjenlarni qo'yilgan kuchlar ta'sirida haqiqatdan ham cho'zilgan ekanligidan darak beradi. (5.80-rasm)



5.80-rasm.

8-tugun.

Tugunga qo'yilgan kuchlar uchun muvozanat tenglamalarini tuzamiz.

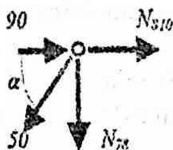
$$\sum x_i = 0 \quad 90 - 50 \cos \alpha + N_{s10} = 0$$

$$\sum y_i = 0 \quad -50 \sin \alpha - N_{78} = 0$$

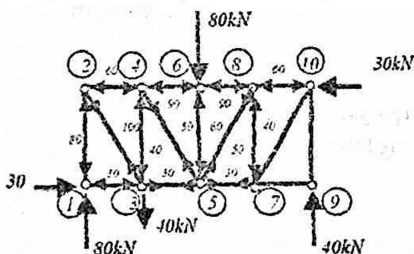
Tenglamalarni yechib noma'lum zo'riqishlarni aniqlaymiz.

$$N_{78} = -40 \text{ kN} \quad N_{s10} = -60 \text{ kN}$$

Demak, qo'yilgan kuchlar ta'siridamazkur sterjenlar siqilgan ekan. (5.82-rasm)



5.81-rasm



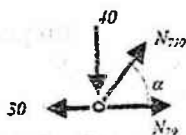
5.82-rasm.

7-tugun.

Tugunga qo'yilgan kuchlar uchun muvozanat tenglamalarini tuzamiz.

$$\sum x_i = 0 \quad -30 + N_{710} \cos \alpha + N_{79} = 0$$

$$\sum y_i = 0 \quad -40 + N_{710} \sin \alpha = 0$$

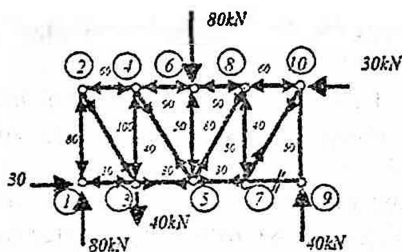


5.83-rasm.

Tenglamalarni yechib noma'lum zo'riqishlarni aniqlaymiz.

$$N_{710} = 50 \text{ kN} \quad N_{79} = 0$$

Demak, 79 sterjen siqilmagan ekan, 710 sterjen esa cho'zilgan (5.84-rasm)



5.84-rasm.

9-tugun.

Tugunga qo'yilgan kuchlar uchun muvozanat tenglamalarini tuzamiz.

$$\begin{aligned} \sum x_i &= 0 & 0 &= 0 \\ \sum y_i &= 0 & 40 + N_{910} &= 0 \end{aligned}$$

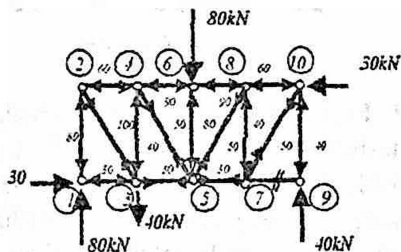


5.85-rasm.

Tenglamalarni yechib noma'lum zo'riqlashlarni aniqlaymiz.

$$N_{910} = -40 \text{ kN}$$

Demak, 910 sterjen tugunga qo'yilgan kuch ta'sirida siqilar ekan. (5.86-rasm)

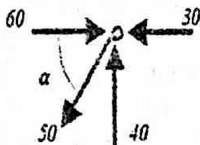


5.86-rasm.

10-tugun.

Tugunga qo'yilgan kuchlar uchun muvozanat tenglamalarini tuzamiz.

$$\begin{aligned} \sum x_i &= 0 & 60 - 50 \cos \alpha - 30 &= 0 \\ \sum y_i &= 0 & -50 \sin \alpha + 40 &= 0 \end{aligned}$$



5.87-rasm.

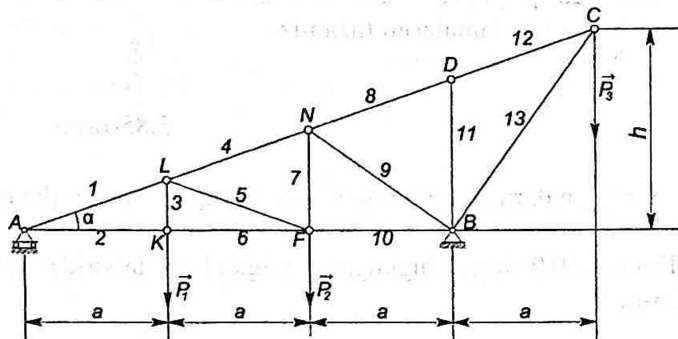
Tenglamalar 60, 30, 50, 40 sterjenlardagi zo‘roqishlarni to‘g‘ri ekanligidan darak beradi.

2-masala. Fermaning berilgan yuklanishidagi tayanch reaksiyalari hamda uning barcha sterjenlaridagi zo‘riqishlar tugunlarni kesish usuli bilan aniqlansin.

Qo‘shimcha ravishda fermaning xuddi shu yuklanishida uning uchta sterjenidagi (4,7,8) zo‘riqishlar Ritter usuli bilan aniqlansin. (5.88a-rasm).

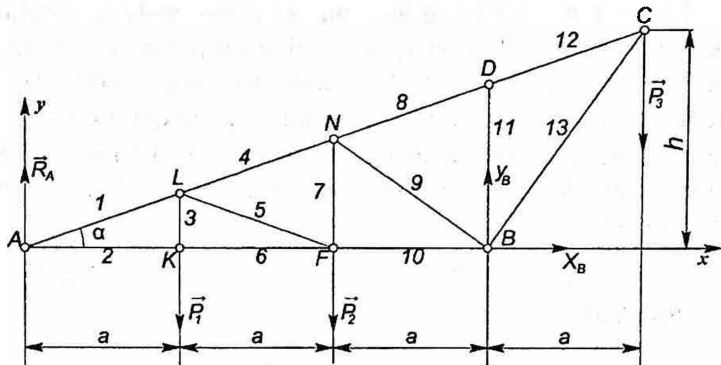
Berilgan:

$$P_1 = 4 \text{ kN}, P_2 = 4 \text{ kN}, P_3 = 10 \text{ kN}, a = 4 \text{ m}, h = 6 \text{ m}.$$



5.88a-rasm.

Yechish. 1. Fermaning tayanch reaksiyalarini aniqlash. Fermaga $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3$ tashqi kuchlar ta‘sir etadi. A va B tayanchlar ferma uchun bog‘lanishlar hisoblanadi. Bog‘lanishlardan bo‘shatish prinsipi asosan, ularning fermaga ta‘siri bog‘lanishlar reaksiya kuchlari bilan almashtiriladi. A tayanch qo‘zg‘aluvchan sharnir, uning reaksiyasi sharnir xarakterlanadigan tekislikka perpendikulyar yo‘naladi. B tayanch--qo‘zg‘almas silindrik sharnir reaksiyasining yo‘nalishi oldindan noma‘lum. Shuning uchun uning reaksiyasini koordinata o‘qlarining musbat yo‘nalishi bo‘yicha yo‘nalgan X_B, Y_B tashkil etuvchilarga ajratamiz. Natijada ferma ta‘sir etuvchi tekislikda ixtiyoriy joylashgan $(\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3, \vec{R}_A, \vec{X}_B, \vec{Y}_B)$ kuchlar sistemasiga ega bo‘lamiz. (5.88b-rasm). Hosil bo‘lgan kuchlar sistemasining muvozanat tenglamalarini tuzamiz.



5.88b-rasm.

$$\sum X_i = 0 \quad X_B = 0, \quad (1)$$

$$\sum Y_i = 0 \quad R_A + Y_B - P_1 - P_2 - P_3 = 0, \quad (2)$$

$$\sum M_B(\vec{F}_i) = 0 \quad P_1 \cdot 2a + P_2 \cdot a - R_A \cdot 3a - P_3 \cdot a = 0. \quad (3)$$

Tenglamalarni yechib, feraning tanyach reaksiyalarini aniqlaymiz.

(3) tenglamadan:

$$R_A = \frac{P_1 \cdot 2 + P_2 - P_3}{3} = \frac{4 \cdot 2 + 4 - 10}{3} = 0,666 \text{ kN}.$$

(2) tenglamadan:

$$Y_B = P_1 + P_2 + P_3 - R_A = 4 + 4 + 10 - 0,666 = 17,334 \text{ kN}.$$

(1) tenglamadan:

$$X_B = 0$$

B sharnir reaksiya kuchining moduli:

$$R_B = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2} = 17,334 \text{ kH}$$

Feraning 4, 7, 8 sterjenlaridagi zo'riqishlarni Ritter usulida aniqlash

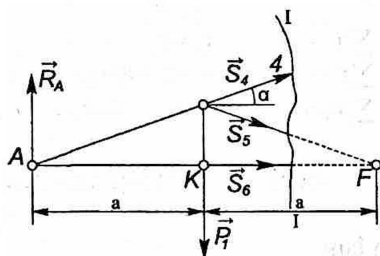
To'rtinchi sterjendagi zo'riqishni aniqlash uchun fermanni I-I kesim bilan ikki qismga bo'lib, chap qismining muvozanatini o'rganamiz. Olib tashlangan o'ng qismning chap qismga ta'sirini $\bar{S}_4, \bar{S}_5, \bar{S}_6$ kuchlar orqali ifodalaymiz.

Ritter usuliga binoan har bir zo'riqish alohida tenglamadan topilishi va u boshqa sterjenlardagi zo'riqishlar orqali ifodalanmasligi lozim. Avvalgidek, bu usulda ham shartli ravishda, barcha sterjenlar cho'ziladi, deb faraz qilinadi. S_4 ni aniqlash uchun \bar{S}_5 va \bar{S}_6 kuchlarning ta'sir chiziqlari kesishgan F nuqtani Ritter nuqtasi deb qabul qilib, shu nuqtaga nisbatan momentlar tenglamasini tuzamiz (5.89a-rasm):

$$\sum M_{F'}(\bar{Q}_i) = 0 \quad P_1 \cdot a - R_A \cdot 2a - S_4 \cdot \sin \alpha \cdot a - S_4 \cdot \cos \alpha \cdot \frac{h}{4} = 0.$$

Bundan:

$$S_4 = \frac{-R_A \cdot 2a + P_1 \cdot a}{a \sin \alpha + \frac{h}{4} \cos \alpha} = 3,8 \text{ kN}.$$



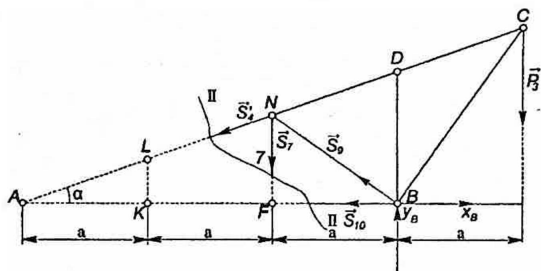
5.89a-rasm.

S_7 ni aniqlash uchun fermanni II-II kesim bilan ikki qismga bo'lib, o'ng qismining muvozanatini o'rganamiz. Qolgan chap qismning o'ng qismga ta'sirini \bar{S}_4 , \bar{S}_5 , \bar{S}_{10} kuchlar orqali ifodalaymiz. S_7 zo'riqishni aniqlash uchun Ritter nuqtasi sifatida A nuqta olinadi va unga nisbatan momentlar tenglamasi tuziladi (5.90a-rasm).

$$\sum M_{A'}(\bar{F}_i) = 0 \quad -P_3 \cdot 4a + Y_B \cdot 3a - S_7 \cdot 2a = 0,$$

Bundan:

$$S_7 = \frac{-P_3 \cdot 4a + Y_B \cdot 3a}{2a} \approx 6 \text{ kN}.$$



5.90a-rasm.

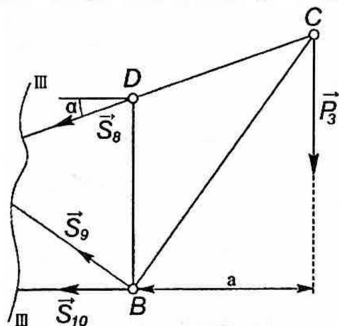
S_8 ni aniqlash uchun fermani III-III kesim bilan ikki qismga bo'lib, o'ng qismining muvozanatini o'rganamiz. Qolgan chap qismning o'ng qismga ta'siri $\vec{S}_8, \vec{S}_9, \vec{S}_{10}$ kuchlar orqali ifodalanadi. S_8 ni aniqlash uchun Ritter nuqtasi sifatida B nuqtani tanlab, unga nisbatan momentlar tenglamasini tuzamiz (5.91a-rasm):

$$\sum M_{B}(\vec{S}_i) = 0 \quad -P_3 \cdot a + S'_8 \cdot \cos \alpha \cdot \frac{3}{4}h = 0.$$

Bundan:

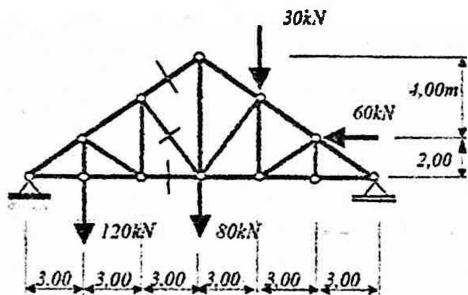
$$S'_8 = \frac{P_3 \cdot a}{\cos \alpha \cdot \frac{3}{4}h} = \frac{10 \cdot 4}{0,93 \cdot 18} = \frac{40}{16,74} \approx 9,59 \text{ kN}.$$

4, 7, 8 sterjenlardagi zo'riqishlarning Ritter usulida topilgan qiymatlari tugunlarni kesish usuli orqali aniqlangan qiymatlariga teng. Bu hol ferma sterjenlaridagi zo'riqishlarni to'g'ri aniqlanganligidan darak beradi.



5.91a-rasm

3-masala. Chizmada ko'rsatilgan sterjenlardagi zo'riqishlarni fermani qismlarga ajratish (Ritter) usuli bilan aniqlang. Fermaga ta'sir etuvchi kuchlar va masofalar rasmda ko'rsatilgan.



5.92-rasm.

Yechimi.

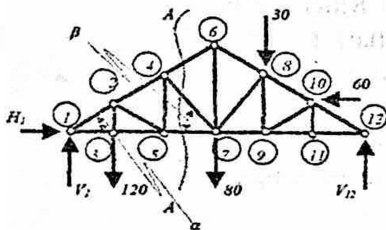
1. Berilgan ferma 12 ta tugun va 21 ta sterjendan iborat. Ferma statik aniqlangan.

$$N = 2n - 3;$$

$$21 = 2 \cdot 12 - 3;$$

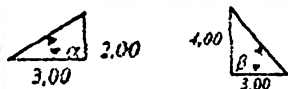
$$21 = 21;$$

2. Fermaning tayanch reaksiyalarini aniqlaymiz. Buning uchun fermaga qo'yilgan kuchlarni ko'rsatamiz. Ferma uchun qo'zg'almas shamir va qo'zg'aluvchan shamirlar bog'lanishlar hisoblanadi. Ularning ta'sirlarini bog'lanishlar reaksiya kuchlari bilan almashtiramiz.



5.93-rasm.

3. Berilgan ferma simmetriya ferma. Sterjenlarning og'ish burchaklari α va β burchaklar orqali aniqlanadi.



5.94-rasm.

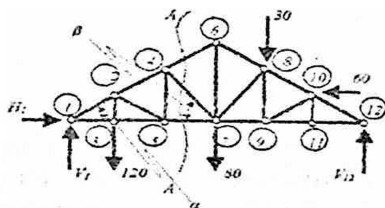
$$\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{13}} = 0,832$$

$$\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{13}} = 0,554$$

$$\cos \beta = \frac{3}{5} = 0,6$$

$$\sin \beta = \frac{4}{5} = 0,8$$

4. Fermaning tayanch reaksiyalarini aniqlaymiz. Fermaga ta'sir etuvchi kuchlar tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasini tashkil etadi. Fermaga ta'sir etuvchi kuchlarning muvozanat tenglamalarini tuzamiz.



5.95-rasm.

$$\sum X_i = 0; \quad H_1 - 60 = 0 \quad H_1 = 60 \text{ kN}$$

$$\sum M_{1l} = 0; \quad 120 \cdot 3 + 80 \cdot 9 + 30 \cdot 12 - 60 \cdot 2 - V_{12} \cdot 18 = 0$$

$$V_{12} = 73,33 \text{ kN}$$

$$\sum M_{12l} = 0; \quad V_1 \cdot 18 - 120 \cdot 15 - 80 \cdot 9 - 30 \cdot 6 - 60 \cdot 2 = 0$$

$$V_1 = 156,66 \text{ kN}$$

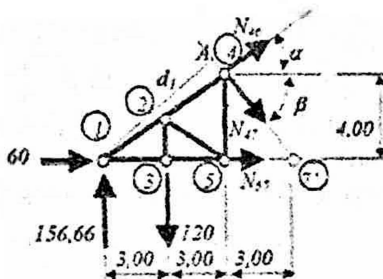
Momentlar tenglamasini tuzishda kuch moment nuqtasi atrofida soat harakati yo'nalishida aylantirishga intilsa kuch momenti ishorasi musbat deb qabul qilingan.

Hisoblashlarning to'g'riligiga ishonch hosil qilish uchun quyidagi tekshirishlarni o'tkazamiz.

$$\sum Y_i = 0; \quad V_1 - 120 - 80 - 30 + V_{12} = 0$$

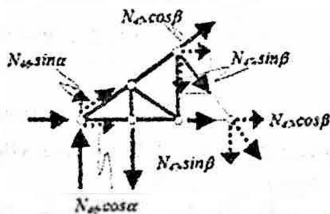
V_1 va V_{12} larning qiymatlari tenglamani qanoatlantirdi. Demak, V_1 va V_{12} lar to'g'ri hisoblangan.

5. Ritter usulidan foydalanib, N_{46} , N_{47} , N_{57} zo'riqishlarning qiymatlarini aniqlaymiz. Buning uchun berilgan tekis fermani AA kesma orqali ikki qismga ajratamiz:



5.96-rasm.

Fermani AA kesim orqali kesishdan hosil bo'lgan qismlaridan biri chap tomondagi qismining muvozanatini o'rganamiz. 46, 47, 48 – sterjenlarni quyidagi kuchlar ta'sirida cho'zilgan deb faraz qilib, zo'riqlashlarni N_{46} , N_{47} , N_{57} orqali belgilaymiz. Dastlab N_{57} ning qiymatini aniqlaymiz. Buning uchun Ritter nuqtasi sifatida 4-tugunni tanlab, shu tugun nuqtasiga nisbatan ferma chap tomoniga qo'yilgan kuchlarning momentlarini hisoblaymiz:



5.97-rasm.

$$\sum M_{4t} = 0; \quad 156,66 \cdot 6 - 60 \cdot 4 - 120 \cdot 3 - N_{57} \cdot 4 = 0$$

Tenglamadan:

$$N_{57} = 85 \text{ kN}$$

N_{47} ning qiymatini aniqlash uchun Ritter nuqtasi sifatida 1-tugunni tanlaymiz va ferma chap qismiga ta'sir etuvchi kuchlarning shu tugun-nuqtaga nisbatan momentlarini hisoblaymiz.

Tugun muvozanatda bo'lgani uchun:

$$\sum M_{1t} = 0;$$

Shuning uchun:

$$\sum M_{1t} = 0; \quad 120 \cdot 3 + N_{47} \cdot d_1 = 0$$

6-rasmdan:

$$d_1 = 9 \cdot \sin \beta = 72$$

Natijada:

$$N_{47} = -50 \text{ kN}$$

Shuni ta'kidlash lozimki N_{47} ning qiymatini Varin'on teoremasidan foydalangan holda ham aniqlash mumkin bo'ladi. Bunday holda 1-tugunning muvozanat tenglamasi quyidagicha yoziladi:

$$\sum M_{1i} = 0; \quad 120 \cdot 3 + N_{47} \cdot \cos \beta \cdot 4 + N_{47} \cdot \sin \beta \cdot 6 = 0$$

Bu tenglamaning yechimi N_{47} ning qiymatini to'g'ri ekanligini bildiradi. Fermaning 46-sterjenidagi zo'riqishni aniqlaymiz (6-rasm).

Ritter nuqtasi sifatida 7-tugunni tanlaymiz. Tugun muvozanatda bo'lganligi uchun:

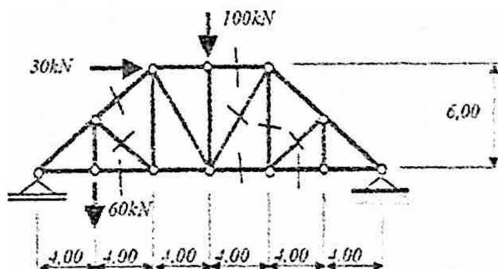
$$\sum M_{7i} = 0; \quad 156,66 \cdot 9 + N_{46} \cdot \sin \alpha \cdot 9 - 120 \cdot 6 = 0$$

Tenglamadan:

$$N_{46} = -138,37 \text{ kN}$$

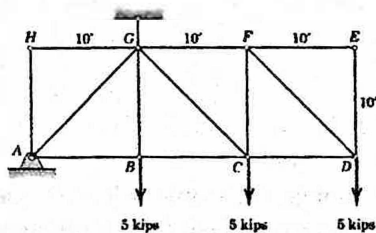
45-§. Mustaqil o'rganish uchun talabalarga tavsiya etiladigan muammolar

1-muammo. Rasmda ko'rsatilgan sterjenlardagi zo'riqishlarni Ritter usulida aniqlang.



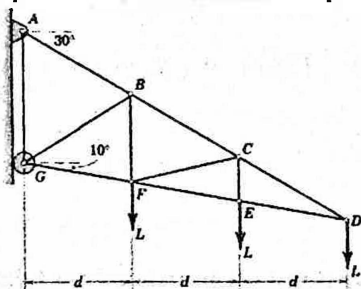
5.98-rasm.

2-muammo. Fermaning CG sterjenidagi zo'riqishni Ritter usulida aniqlang.



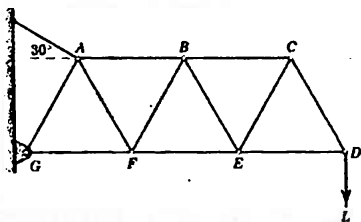
5.99-rasm.

3-muammo. Rasmda ko'rsatilgan feraning BC,CF va EF sterjenlaridagi zo'riqishlarni Ritter usulida aniqlang.



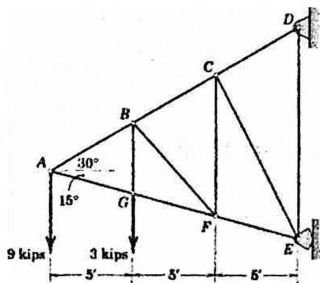
5.60-rasm.

4-muammo. Rasmda ko'rsatilgan feraning BC,BE va BF sterjenlaridagi zo'riqishlarni Ritter usulida aniqlang.



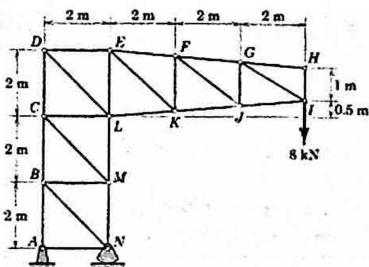
5.61-rasm.

5-muammo. Fermaning BF sterjenidagi zo'riqishni aniqlang.



5.62-rasm.

6-muammo. Fermaning DE va DL sterjenlaridagi zo'riqishlarni Ritter usulida aniqlang.



5.63-rasm.

46-§. Talabalar tomonidan mustaqil bajariladigan hisob chizma ishlari variantlari

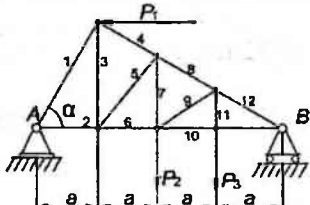
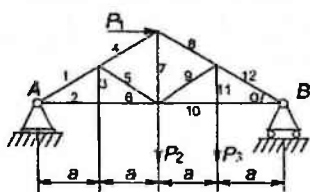
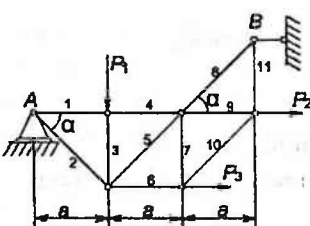
Tekis fermaning tayanch reaksiyalarini va sterjenlaridagi zo'riqishlarni aniqlash.

Fermaning berilgan yuklanishidagi tayanch reaksiyalari hamda uning barcha sterjenlaridagi zo'riqishlar tugunlarni kesish usuli bilan aniqlansin.

Fermaning sxemalari va hisoblash uchun zarur bo'lgan ma'lumotlar I-jadvalda keltirilgan, qo'shimcha ravishda xuddi shu

yuklanishida uning uchta sterjenlaridagi zo'riqishlar Ritter usuli bilan aniqlansin. Sterjenlarning raqamlari ham 5.1-jadvalda ko'rsatilgan.

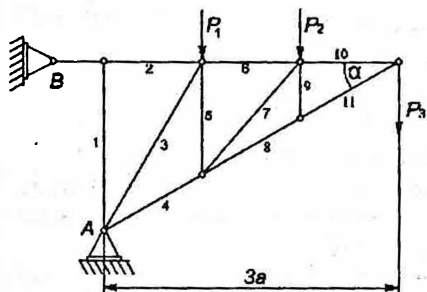
5.1-jadval

Variant raqamlari	Ferma sxemasi	Hisoblash uchun zarur bo'lgan ma'lumotlar
1	2	3
1.		$P_1 = 4 \text{ kN}$ $P_2 = 6 \text{ kN}$ $P_3 = 5 \text{ kN}$ $a = 3 \text{ m}$ $\alpha = 60^\circ$ Ritter: 5, 6, 8
2.		$P_1 = 10 \text{ kN}$ $P_2 = 12 \text{ kN}$ $P_3 = 4 \text{ kN}$ $a = 4 \text{ m}$ $\alpha = 30^\circ$ Ritter: 4, 5, 9
3.		$P_1 = 10 \text{ kN}$ $P_2 = 14 \text{ kN}$ $P_3 = 6 \text{ kN}$ $a = 4 \text{ m}$ $\alpha = 45^\circ$ Ritter: 4, 5, 10

4.		$P_1 = 6 \text{ kN}$ $P_2 = 10 \text{ kN}$ $P_3 = 4 \text{ kN}$ $a = 2 \text{ m}$ $\alpha = 30^\circ$ Ritter: 3, 8, 9
5.		$P_1 = 20 \text{ kN}$ $P_2 = 10 \text{ kN}$ $P_3 = 15 \text{ kN}$ $\alpha = 45^\circ$ Ritter: 1, 2, 3
6.		$P_1 = 20 \text{ kN}$ $P_2 = 30 \text{ kN}$ $P_3 = 40 \text{ kN}$ $\alpha = 45^\circ$ Ritter: 1, 2, 3
7.		$P_1 = 20 \text{ kN}$ $P_2 = 30 \text{ kN}$ $P_3 = 30 \text{ kN}$ $\alpha = 45^\circ$ $a = 3 \text{ m}$ $b = 5 \text{ m}$ Ritter: 1, 2, 3

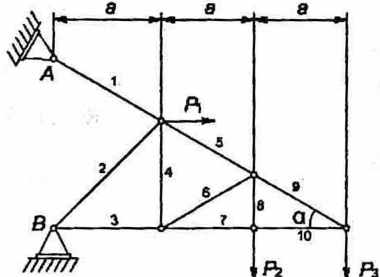
8.		$P_1 = 30 \text{ kN}$ $P_2 = 30 \text{ kN}$ $P_3 = 20 \text{ kN}$ Ritter: 1, 2, 3
9.		$P_1 = 4 \text{ kN}$ $P_2 = 6 \text{ kN}$ $P_3 = 4 \text{ kN}$ $h = 2 \text{ m}$ $\alpha = 60^\circ$ Ritter: 4, 5, 10.
10.		$P_1 = 30 \text{ kN}$ $P_2 = 30 \text{ kN}$ $P_3 = 20 \text{ kN}$ Ritter: 1, 2, 3 $a = 2,5 \text{ m}$ $h = 3 \text{ m}$
11.		$P_1 = 6 \text{ kN}$ $P_2 = 8 \text{ kN}$ $P_3 = 6 \text{ kN}$ $a = 4 \text{ m}$ $h = 3 \text{ m}$ Ritter: 8, 9, 11.

12.



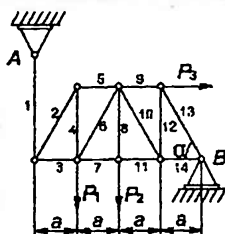
$P_1 = 10 \text{ kN}$
 $P_2 = 20 \text{ kN}$
 $P_3 = 30 \text{ kN}$
 $a = 2 \text{ m}$
 $\alpha = 30^\circ$
 Ritter: 1, 2, 3

13.



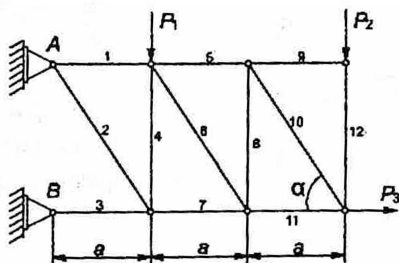
$P_1 = 10 \text{ kN}$
 $P_2 = 5 \text{ kN}$
 $P_3 = 5 \text{ kN}$
 $a = 5 \text{ m}$
 $\alpha = 30^\circ$
 Ritter: 3, 5, 6

14.



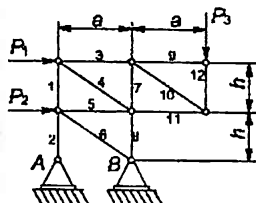
$P_1 = 12 \text{ kN}$
 $P_2 = 14 \text{ kN}$
 $P_3 = 6 \text{ kN}$
 $a = 4 \text{ m}$
 $\alpha = 60^\circ$
 Ritter: 5, 6, 11

15.



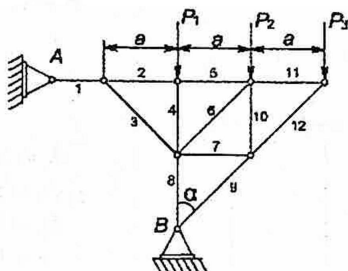
$P_1 = 10 \text{ kN}$
 $P_2 = 6 \text{ kN}$
 $P_3 = 8 \text{ kN}$
 $a = 2,5 \text{ m}$
 $\alpha = 60^\circ$
 Ritter: 2, 5, 7

16.



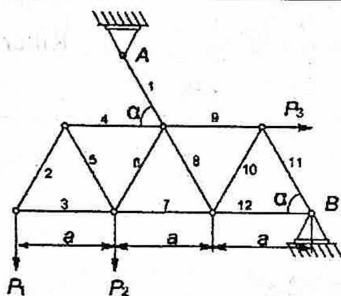
$P_1 = 3 \text{ kN}$
 $P_2 = 4 \text{ kN}$
 $P_3 = 5 \text{ kN}$
 $a = 4 \text{ m}$
 $h = 3 \text{ m}$
 Ritter: 3, 5, 7

17.



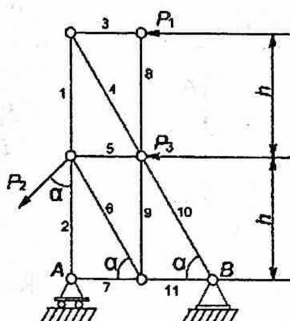
$P_1 = 5 \text{ kN}$
 $P_2 = 7 \text{ kN}$
 $P_3 = 7 \text{ kN}$
 $a = 4 \text{ m}$
 $\alpha = 45^\circ$
 Ritter: 3, 4, 5

18.



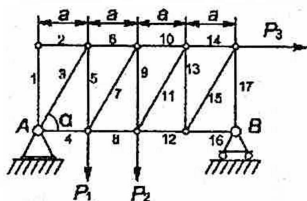
$P_1 = 4 \text{ kN}$
 $P_2 = 8 \text{ kN}$
 $P_3 = 4 \text{ kN}$
 $a = 4 \text{ m}$
 $\alpha = 60^\circ$
 Ritter: 4, 6, 12

19.



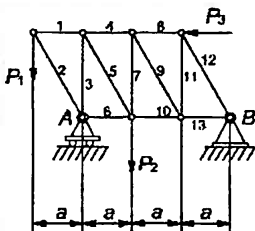
$P_1 = 6 \text{ kN}$
 $P_2 = 3 \text{ kN}$
 $P_3 = 8 \text{ kN}$
 $h = 5 \text{ m}$
 $\alpha = 60^\circ$
 Ritter: 1, 4, 8

20.



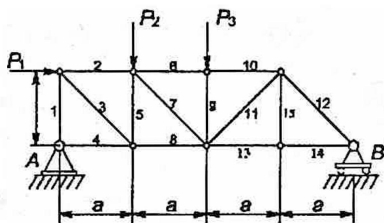
$$\begin{aligned}
 P_1 &= 10 \text{ kN} \\
 P_2 &= 10 \text{ kN} \\
 P_3 &= 4 \text{ kN} \\
 a &= 4 \text{ m} \\
 \alpha &= 60^\circ \\
 \text{Ritter: } &6, 7, 10
 \end{aligned}$$

21.



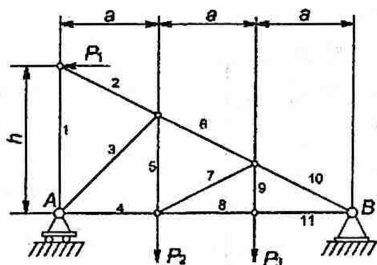
$$\begin{aligned}
 P_1 &= 6 \text{ kN} \\
 P_2 &= 8 \text{ kN} \\
 P_3 &= 4 \text{ kN} \\
 a &= 6 \text{ m} \\
 \alpha &= 60^\circ \\
 \text{Ritter: } &4, 5, 10
 \end{aligned}$$

22.



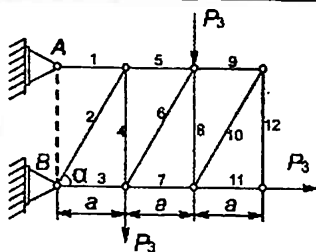
$$\begin{aligned}
 P_1 &= 4 \text{ kN} \\
 P_2 &= 6 \text{ kN} \\
 P_3 &= 8 \text{ kN} \\
 a &= 3 \text{ m} \\
 h &= 4 \text{ m} \\
 \text{Ritter: } &2, 7, 8
 \end{aligned}$$

23.



$$\begin{aligned}
 P_1 &= 4 \text{ kN} \\
 P_2 &= 3 \text{ kN} \\
 P_3 &= 6 \text{ kN} \\
 a &= 4 \text{ m} \\
 h &= 6 \text{ m} \\
 \text{Ritter: } &5, 6, 8
 \end{aligned}$$

24.



$$P_1 = 8 \text{ kN}$$

$$P_2 = 6 \text{ kN}$$

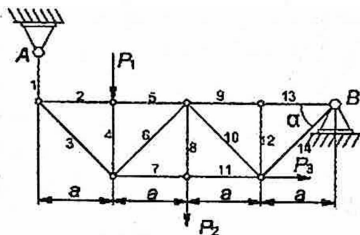
$$P_3 = 2 \text{ kN}$$

$$a = 6 \text{ m}$$

$$\alpha = 60^\circ$$

Ritter: 3, 5, 6

25.



$$P_1 = 10 \text{ kN}$$

$$P_2 = 8 \text{ kN}$$

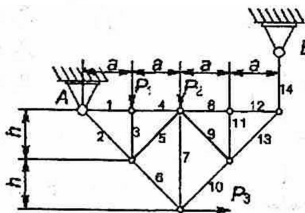
$$P_3 = 4 \text{ kN}$$

$$a = 6 \text{ m}$$

$$\alpha = 45^\circ$$

Ritter: 5, 6, 11

26.



$$P_1 = 6 \text{ kN}$$

$$P_2 = 8 \text{ kN}$$

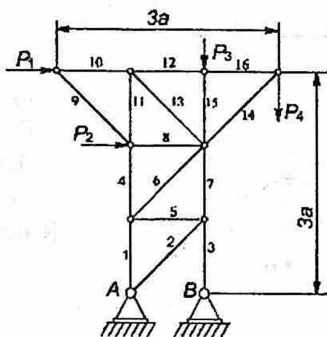
$$P_3 = 4 \text{ kN}$$

$$a = 6 \text{ m}$$

$$h = 4 \text{ m}$$

Ritter: 4, 5, 10

27.



$$P_1 = 20 \text{ kN}$$

$$P_2 = 30 \text{ kN}$$

$$P_3 = 30 \text{ kN}$$

$$P_4 = 30 \text{ kN}$$

Ritter: 1, 2, 3

28.		$P_1 = 20 \text{ kN}$ $P_2 = 20 \text{ kN}$ $P_3 = 20 \text{ kN}$ $P_4 = 20 \text{ kN}$ Ritter: 1, 2, 5 P_5 kerak emas
29.		$P_1 = 20 \text{ kN}$ $P_2 = 20 \text{ kN}$ $P_3 = 20 \text{ kN}$ $P_4 = 10 \text{ kN}$ $a = 2 \text{ m}$ $\alpha = 45^\circ$ Ritter: 2, 3, 5
30.		$P_1 = 4 \text{ kN}$ $P_2 = 3 \text{ kN}$ $P_3 = 8 \text{ kN}$ $a = 4 \text{ m}$ $\alpha = 45^\circ$ Ritter: 4, 8, 9

Qo'shma konstruksiyani tayanch reaksiyalarini aniqlash (ikkita jismdan iborat sistema).

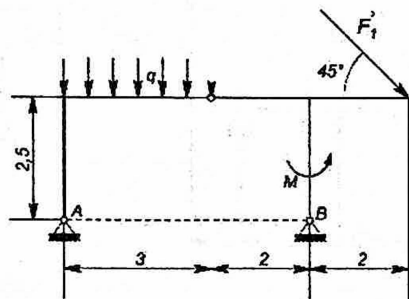
C nuqtada birlashtirilgan ikkita jismdan iborat qo'shma konstruksiyani tayanch reaksiyalari aniqlansin.

Qo'shma konstruksiyani sxemalari va hisoblash uchun zarur kattaliklar 5.2-jadvalda ko'rsatilgan.

Variant raqamlari	Konstruksiyaning sxemalari	Hisoblash uchun kerakli ma'lumotlar
1	2	3
1.		$F_1 = 6 \text{ kN}$ $F_2 = 8 \text{ kN}$ $M = 12 \text{ kNm}$ $q = 4,2 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$
2.		$F_1 = 6 \text{ kN}$ $F_2 = 10 \text{ kN}$ $M = 20 \text{ kNm}$ $q = 4 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$
3.		$F_1 = 15 \text{ kN}$ $M = 30 \text{ kNm}$ $q = 2 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$

4.		$F_1 = 20 \text{ kN}$ $F_2 = 16 \text{ kN}$ $M = 15 \text{ kNm}$ $q = 4 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$
5.		$F_1 = 15 \text{ kN}$ $F_2 = 18 \text{ kN}$ $M = 20 \text{ kNm}$ $q = 5 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$
6.		$F_1 = 15 \text{ kN}$ $F_2 = 20 \text{ kN}$ $M = 30 \text{ kNm}$ $q = 2 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$
7.		$F_1 = 18 \text{ kN}$ $M = 26 \text{ kNm}$ $q = 9 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$

8.

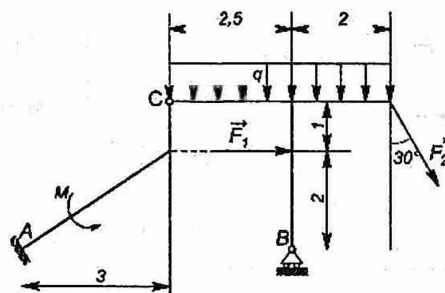


$$F_1 = 14 \text{ kN}$$

$$M = 25 \text{ kNm}$$

$$q = 4 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

9.



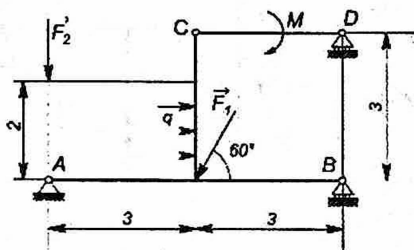
$$F_1 = 12 \text{ kN}$$

$$F_2 = 16 \text{ kN}$$

$$M = 20 \text{ kNm}$$

$$q = 1 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

10.



$$F_1 = 15 \text{ kN}$$

$$F_2 = 18 \text{ kN}$$

$$M = 18 \text{ kNm}$$

$$q = 4 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

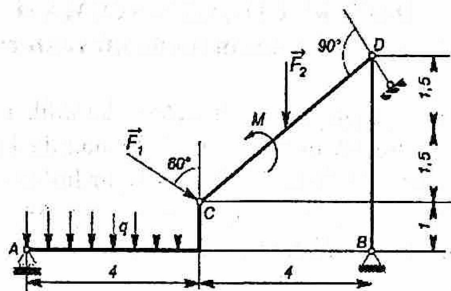
11.		$F_1 = 14 \text{ kN}$ $F_2 = 12 \text{ kN}$ $M = 25 \text{ kNm}$ $q = 2 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$
12.		$F_2 = 20 \text{ kN}$ $M = 20 \text{ kNm}$ $q = 2 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$
13.		$F_1 = 20 \text{ kN}$ $M = 25 \text{ kNm}$ $q = 3 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$
14.		$F_1 = 18 \text{ kN}$ $F_2 = 20 \text{ kN}$ $M = 30 \text{ kNm}$ $q = 4 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$

15.		$F_1 = 15 \text{ kN}$ $F_2 = 18 \text{ kN}$ $M = 20 \text{ kNm}$ $q = 2 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$
16.		$F_1 = 10 \text{ kN}$ $M = 25 \text{ kNm}$ $q = 2 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$
17.		$P_1 = 20 \text{ kN}$ $P_2 = 10 \text{ kN}$ $M = 29 \text{ kNm}$ $q = 1,5 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$
18.		$F_1 = 15 \text{ kN}$ $F_2 = 15 \text{ kN}$ $M = 35 \text{ kNm}$ $q = 1,3 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$

19.		$F_1 = 16 \text{ kN}$ $F_2 = 20 \text{ kN}$ $M = 30 \text{ kNm}$ $q = 1,1 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$
20.		$F_1 = 18 \text{ kN}$ $F_2 = 15 \text{ kN}$ $M = 36 \text{ kNm}$ $q = 1,5 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$
21.		$F_1 = 20 \text{ kN}$ $F_2 = 15 \text{ kN}$ $M = 18 \text{ kNm}$ $q = 1,4 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$
22.		$F_1 = 10 \text{ kN}$ $F_2 = 18 \text{ kN}$ $M = 33 \text{ kNm}$ $q = 1 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$

23.		$F_1 = 20 \text{ kN}$ $F_2 = 14 \text{ kN}$ $M = 28 \text{ kNm}$ $q = 1,3 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$
24.		$F_1 = 16 \text{ kN}$ $F_2 = 22 \text{ kN}$ $M = 36 \text{ kNm}$ $q = 1,2 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$
25.		$F_1 = 18 \text{ kN}$ $F_2 = 15 \text{ kN}$ $M = 34 \text{ kNm}$ $q = 1,6 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$
26.		$F_1 = 12 \text{ kN}$ $F_2 = 16 \text{ kN}$ $M = 30 \text{ kNm}$ $q = 1,2 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$

27.



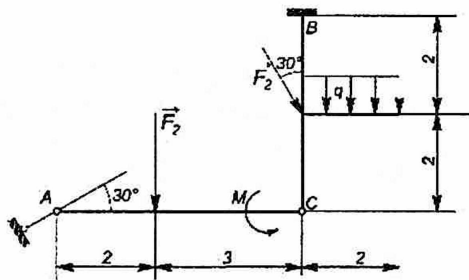
$$F_1 = 15 \text{ kN}$$

$$F_2 = 20 \text{ kN}$$

$$M = 32 \text{ kNm}$$

$$q = 0,8 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

28.



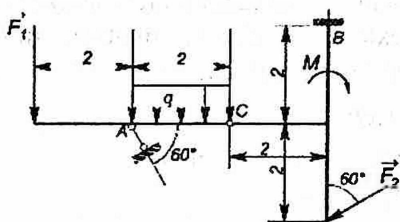
$$F_1 = 10 \text{ kN}$$

$$F_2 = 20 \text{ kN}$$

$$M = 35 \text{ kNm}$$

$$q = 1,4 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

29.



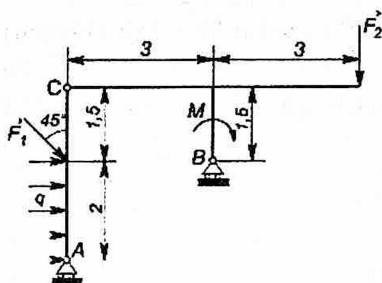
$$F_1 = 20 \text{ kN}$$

$$F_2 = 18 \text{ kN}$$

$$M = 27 \text{ kNm}$$

$$q = 0,8 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

30.



$$F_1 = 18 \text{ kN}$$

$$F_2 = 15 \text{ kN}$$

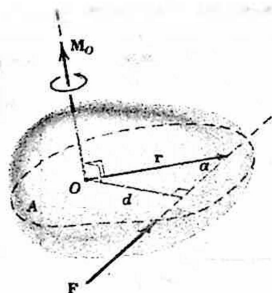
$$M = 26 \text{ kNm}$$

$$q = 1,1 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

VI-BOB. FAZODAGI KUCHLAR SISTEMASI

47-§. Kuchning nuqtaga nisbatan momenti vektori

Kuchning nuqtaga nisbatan momenti vektor kattalik bo'lib, u moment markaziga qo'yiladi va moment markazi hamda kuchning ta'sir chizig'i orqali o'tgan tekislikka perpendikulyar holda shunday yo'naladiki, uning uchidan qaraganda, kuch jismni soat mili harakat yo'nalishiga qarama qarshi yo'nalishda aylantiradi [2] (6.1a-rasm).



6.1a-rasm.

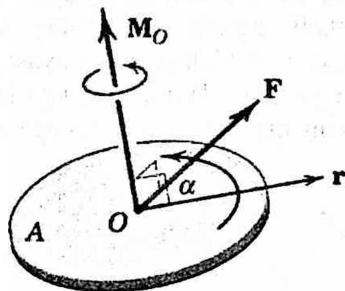
Agar, kuch qo'yilgan A nuqtaga, moment markazi O nuqtadan o'tkazilgan radius vektorni \vec{r} desak, nuqtaga nisbatan kuch momentining vektori quyidagicha ifodalanadi:

$$\vec{M}_0(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}. \quad (6.1)$$

Chunki, bu vektor ko'paytmaning moduli:

$$|\vec{r} \times \vec{F}| = rF \sin(\vec{r} \wedge \vec{F}) = rh \quad (6.2)$$

ga teng bo'lib, yo'nalishi, vektorlar algebrasidan, \vec{r} va \vec{F} vektorlar yotgan tekislikka perpendikulyar bo'lib [2] (6.1b-rasm), uning uchidan qaraganda \vec{r} ni \vec{F} vektor ustiga, kichik burchak orqali tushirish uchun, soat milining aylanishiga teskari yo'nalishda burish kerak.



6.1b-rasm.

Demak, $r \times F$ ko'paytmaning moduli nuqtaga nisbatan kuchning momentiga teng bo'lib, yo'nalishi $\vec{M}_O(\vec{F})$ yo'nalishi bilan ustma-ust tushadi. Binobarin, kuchning nuqtaga nisbatan momenti vektor, moment markaziga nisbatan kuch qo'yilgan nuqta radius vektorini kuch vektoriga vektorli ko'paytmasiga teng bo'lar ekan.

48-§. Kuchning o'qqa nisbatan momenti

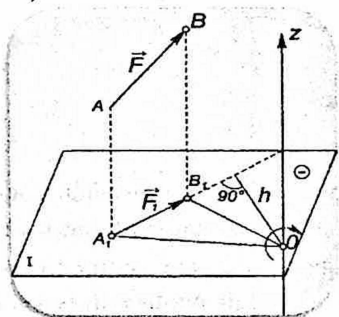
\vec{F} kuchning z o'qqa nisbatan momentini hisoblaymiz. Buning uchun z o'qqa perpendikulyar tekislik o'tkazamiz va bu tekislikka \vec{F} kuchni proeksiyalaymiz. \vec{F} kuchning mazkur tekislikdagi proeksiyasi \vec{F}_1 bilan belgilanadi (6.2a-rasm).

O'q va tekislikni kesishish nuqtasini aniqlab, kuchning tekislikdagi proeksiyasidan aniqlangan nuqtaga nisbatan moment hisoblaymiz. Hisoblangan moment \vec{F} kuchning z o'qqa nisbatan momentini ifodalaydi. Agar, \vec{F} kuchning z o'qiga nisbatan momentini $M_z(\vec{F})$ bilan belgilasak, u quyidagicha ifodalanadi:

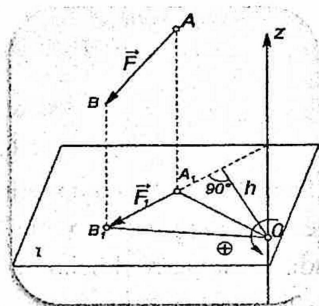
$$M_z(\vec{F}) = M_1(\vec{F}_1) = \pm F_1 h \quad (6.3)$$

Demak, kuchning biror o'qqa nisbatan momenti deb, kuchning shu o'qqa perpendikulyar tekislikdagi proeksiyasining o'q bilan tekislik kesishgan nuqtaga nisbatan hisoblangan momentiga aytilar ekan.

O'qqa nisbatan kuch momenti skalyar miqdordir. U musbat ishoraga ega bo'ladi, agarda z o'qining musbat yo'nalishidan qaraganda, kuchning tekislikdagi proeksiyasi jismni soat milining aylanishiga teskari yo'nalishda aylantirishga intilsa aks holda, o'qqa nisbatan kuch momenti manfiy ishoraga ega bo'ladi (6.2a,b-rasmlar).



6.2a-rasm.



6.2b-rasm.

Kuchning o'qqa nisbatan momenti quyidagi hollarda nolga teng bo'ladi:

- 1) $F_1 = 0$ bo'lsa, ya'ni kuch o'qqa parallel bo'lsa.
- 2) $h = 0$ bo'lsa, ya'ni kuchning ta'sir chizig'i o'qni kesib o'tsa - yelka nolga teng bo'lsa.

6.2a-rasmdan

$$M_z(\vec{F}) = 2 S_{\Delta O A_1 B_1} \quad (6.4)$$

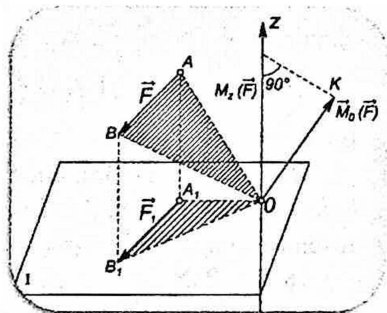
ekanligi ma'lum bo'ladi.

49-§. Kuchning o'qqa nisbatan momenti bilan shu o'qdagi nuqtaga nisbatan momenti orasidagi bog'lanish.

Jismning A nuqtasiga qo'yilgan F kuchning biror Oz o'qqa va shu o'qda yotuvchi nuqtaga nisbatan momentlarini hisoblaymiz. 6.3-rasmdan, (6.4) va (6.2)ga asosan:

$$M_z(\vec{F}) = 2S_{\Delta OA_1B_1} \quad (6.5)$$

$$M_O(\vec{F}) = 2S_{\Delta OAB} \quad (6.6)$$



6.3-rasm.

OA_1B_1 va OAB uchburchaklar orasidagi burchak, ularning tekisliklariga o'tkazilgan perpendikulyar chiziqlar orasidagi burchakka teng ekanligini e'tiborga olsak,

$$M_z(\vec{F}) = 2S_{\Delta OAB} \cos \gamma = M_0(\vec{F}) \cos \gamma \quad (6.7)$$

yoki

$$M_z(\vec{F}) = [\vec{M}_0(\vec{F})]_z$$

ifodalarga ega bo'lamiz.

Demak, kuchning biror o'qqa nisbatan momenti uning shu o'qda olingan ixtiyoriy nuqtaga nisbatan momenti vektorining mazkur o'qdagi proeksiyasiga teng bo'lar ekan.

Agar, O nuqtadan x, y, z o'qlarini o'tqazsak, (6.6) ga ko'ra, \vec{F} kuchning bu o'qlarga nisbatan momentlari quyidagicha hisoblanadi:

$$\begin{cases} M_x(\vec{F}) = M_0(\vec{F}) \cos \alpha \\ M_y(\vec{F}) = M_0(\vec{F}) \cos \beta \\ M_z(\vec{F}) = M_0(\vec{F}) \cos \gamma \end{cases} \quad (6.8)$$

Bu formulalarda α, β, γ lar $\vec{M}_O(\vec{F})$ vektorning koordinata o'qlari bilan tashkil qilgan burchaklarini ifodalaydi.

(7) tengliklarni kvadratga oshirib, qo'shib,

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

ekanligini e'tiborga olsak;

$$M_o(\vec{F}) = \sqrt{[M_x(\vec{F})]^2 + [M_y(\vec{F})]^2 + [M_z(\vec{F})]^2} \quad (6.9)$$

bo'ladi.

(6.9) formula yordamida \vec{F} kuchning koordinata o'qlariga nisbatan momentlarini bilgan holda, uning koordinata boshi O nuqtaga nisbatan momentining modulini aniqlash mumkin bo'ladi.

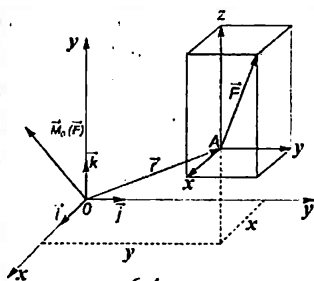
(8.8) dan \vec{F} kuchning nuqtaga nisbatan momentining yo'naltiruvchi kosinuslari uchun quyidagi ifodalarga ega bo'lamiz:

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos\alpha = \frac{M_x(\vec{F})}{M_o(\vec{F})} \\ \cos\beta = \frac{M_y(\vec{F})}{M_o(\vec{F})} \\ \cos\gamma = \frac{M_z(\vec{F})}{M_o(\vec{F})} \end{array} \right. \quad (6.10)$$

50-§. Kuchning koordinata o'qlariga nisbatan momentlarini analitik usulda aniqlash.

Jismning A nuqtasiga \vec{F} kuch qo'yilgan bo'lsin. Koordinatalar boshini O nuqtada olib, OX, OY, OZ o'qlarining birlik vektorlarini $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ lar orqali belgilaymiz (6.4-rasm). \vec{F} kuchning koordinata o'qlaridagi proeksiyalarini X, Y, Z orqali, A nuqta radius vektori \vec{r} ning koordinata o'qlaridagi proeksiyalarini x, y, z bilan belgilasak, (6.1) ga asosan:

$$M_o(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \quad (6.11)$$



6.4-rasm.

$\vec{M}_O(\vec{F})$ vektorning koordinata o'qlaridagi tashkil etuvchilari orqali ifodasi

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = M_x(\vec{F})\vec{i} + M_y(\vec{F})\vec{j} + M_z(\vec{F})\vec{k} \quad (6.12)$$

ko'rinishda bo'ladi.

(6.11) e'tiborga olib, (6.10) determinantni birinchi yo'lga nisbatan yoyib yozsak, quyidagi ifodaga ega bo'lamiz:

$$\begin{aligned} M_x(\vec{F})\vec{i} + M_y(\vec{F})\vec{j} + M_z(\vec{F})\vec{k} = \\ = (yZ - zY)\vec{i} + (zX - xZ)\vec{j} + (xY - yX)\vec{k} \end{aligned} \quad (6.13)$$

(6.11) va (6.12) dagi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ lar oldidagi mos koeffitsientlarni tenglashtirsak, \vec{F} kuchning koordinata o'qlariga nisbatan momentlarining analitik ifodalari quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$\begin{aligned} M_x(\vec{F}) &= (yZ - zY) \\ M_y(\vec{F}) &= (zX - xZ) \\ M_z(\vec{F}) &= (xY - yX) \end{aligned} \quad (6.14)$$

51-§. Juft kuch momentining vektori

Juft kuchning jismga ta'siri:

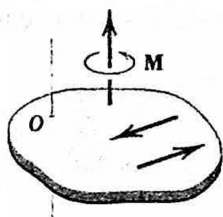
- juft kuch momentining moduli,
- juft kuchning ta'sir tekisligi,
- juft kuchning shu tekislikda aylanish yo'nalishi bilan xarakterlanadi.

Fazoda joylashgan juft kuchlarning jismga ta'sirini aniqlash uchun mazkur uchta omilning har birini bilish zarur. Buning uchun juft kuch momentini vektor tarzda ifodalash kerak.

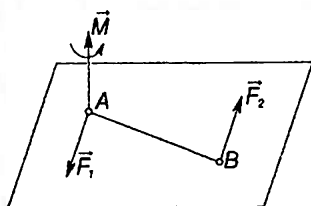
Juft kuch momentining vektori \vec{M} orqali belgilanadi.

Juft kuch momentining vektori \vec{M} kuchning ta'sir tekisligiga perpendikulyar

holda yo'nalgan bo'lib, uning uchidan qaralganda, juft kuch jismni soat milining aylanishiga teskari yo'nalishda aylantirishga intiladi.



6.5a-rasm.



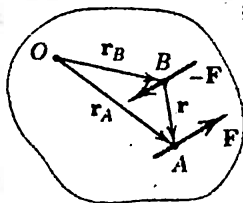
6.5b-rasm.

Mazkur vektorning moduli juft kuchni tashkil etuvchi kuchlardan birining juft yelkasi uzunligiga ko'paytmasiga teng bo'ladi [2] (6.5a-rasm):

$$m = M_B(\vec{F}_1) = M_A(\vec{F}_2) \quad (6.15)$$

Agar Juft kuchni tuzuvchi kuchlarning ixtiyoriy O nuqtaga nisbatan radius vektorlarini \vec{z}_A va \vec{z}_B orqali belgilasak, juft kuch momentining vektori kuchiga ifodalanishi mumkin:

$$\vec{z}_A \times \vec{F} + \vec{z}_B \times (-\vec{F}) = (\vec{z}_A - \vec{z}_B) \times \vec{F} \quad (6.16)$$



6.5v-rasm.

Juft kuchni o'zining ta'sir tekisligida yoki unga parallel tekislikda ixtiyoriy joyga ko'chirishdan jismga ta'siri o'zgarmasligi ma'lum. Shuning uchun juft kuch momentining vektori jismning ixtiyoriy nuqtasiga qo'yilishi mumkin. Binobarin, juft kuch momentining vektori erkin vektor hisoblanadi. Agar, juft kuch momentining vektori ma'lum bo'lsa, juft kuchning jismga ta'sirini aniqlash mumkin:

a) \vec{M} ga perpendikulyar o'tkazib, juft kuchning ta'sir tekisligi aniqlanadi;

b) \vec{M} ning yo'nalishiga qarab, juft kuchning aylanish yo'nalishi belgilanadi;

c) \vec{M} ning moduli juft kuch momentini ifodalaydi.

52-§. Juft kuchni parallel tekislikka ko'chirish haqida teorema

Berilgan juft kuch o'zining ta'sir tekisligiga parallel bo'lgan tekislikka ko'chirilsa, uning jismga ta'siri o'zgarmaydi.

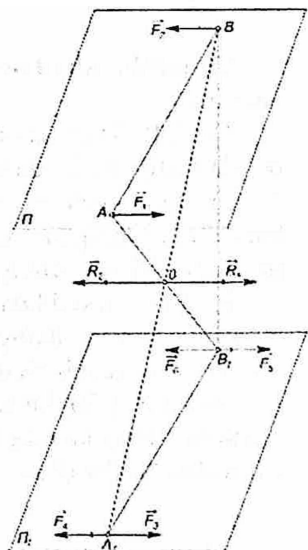
Isboti. Jismga Π tekislikda yotuvchi yelkasi $d=AB$ bo'lgan (\vec{F}_1, \vec{F}_2) juft kuch ta'sir etsin (6.6-rasm).

Π tekislikka parallel bo'lgan Π_1 tekislikda $A_1B_1 \neq AB$ kesmani olib, uning A_1 va A_2 nuqtalariga, $(\vec{F}_3, \vec{F}_4) \in 0$ va $(\vec{F}_5, \vec{F}_6) \in 0$ kuchlar sistemasini joylashtiramiz.

Bunda: $F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = F_5 = F_6$. (6.17) deb olinadi va nollik sistemani tashkil qiluvchi kuchlarning ta'sir chiziqlari \vec{F}_1 va \vec{F}_2 kuchlarning ta'sir chiziqlariga parallel holda yo'naltiriladi. U holda:

$(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \in (\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4, \vec{F}_5, \vec{F}_6)$ (6.18)

bo'ladi. AB va A_1B_1 kesmalarga parallelogram qurib, AB_1 va A, B diagonallarini o'tkazamiz, ular O nuqtada kesishadi.



6.6-rasm.

\vec{F}_1 va \vec{F}_5 parallel kuchlarni qo‘shib, ularning O nuqtaga qo‘yilgan R_1 teng ta‘sir etuvchisini aniqlaymiz:

$$R_1 = F_1 + F_5 = 2F_1. \quad (6.19)$$

Xuddi shunday holda, \vec{F}_2 va \vec{F}_4 parallel kuchlarni qo‘shib, ularning ham O nuqtaga qo‘yilgan R_2 teng ta‘sir etuvchisini aniqlaymiz:

$$R_2 = F_2 + F_4 = 2F_2. \quad (6.20)$$

Hosil bo‘lgan \vec{R}_1 va \vec{R}_2 kuchlardan iborat sistema miqdor jihatdan teng va bir to‘g‘ri chiziq bo‘ylab qarama – qarshi tomonlarga yo‘nalgan bo‘lganligi uchun:

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_4, \vec{F}_5) \infty (\vec{R}_1, \vec{R}_2) \infty 0. \quad (6.21)$$

Binobarin:

$$(\vec{F}_3, \vec{F}_6) \infty (\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4, \vec{F}_5, \vec{F}_6). \quad (6.22)$$

(6.18) va (6.22) munosabatlarni solishtirsak:

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \infty (\vec{F}_3, \vec{F}_6). \quad (6.23)$$

munosabat o‘rinli bo‘ladi. Shunday qilib, juft kuch o‘zining ta‘sir tekisligiga parallel tekislikka ko‘chirilsa, uning jismga ta‘siri o‘zgarmas ekan.

Yuqorida isbotlangan teoremadan quyidagi natijalar kelib chiqadi:

1) Juft kuch momentini o‘zgartirmay, o‘z ta‘sir tekisligi bo‘ylab ixtiyoriy joyga ko‘chirilsa, uning jismga ta‘siri o‘zgarmaydi;

2) Juft kuch momentini o‘zgartirmay, uni tashkil etuvchi kuchlarning miqdori va juft yelkasi o‘zgartirilsa, juft kuchning jismga ta‘siri o‘zgarmaydi;

3) Bir tekislikda yoki parallel tekisliklarda yotuvchi momentlarining kattaligi va ishorasi bir xil bo‘lgan ikki juft kuch o‘zaro ekvivalent bo‘ladi.

Shunday qilib, bir tekislikda yoki parallel tekisliklarda yotuvchi, momentlarning kattaligi va ishorasi bir hil bo‘lgan ikki juft o‘zaro ekvivalent bo‘lar ekan.

53-§. Fazodagi juft kuchlarni qo'shish va kuchlarning muvozanat sharti

Teorema. Kesishuvchi tekisliklarda yotuvchi ikkita juft kuch momenti berilgan juftlar momentlarining geometrik yig'indisiga teng bo'lgan bitta juftga ekvivalentdir.

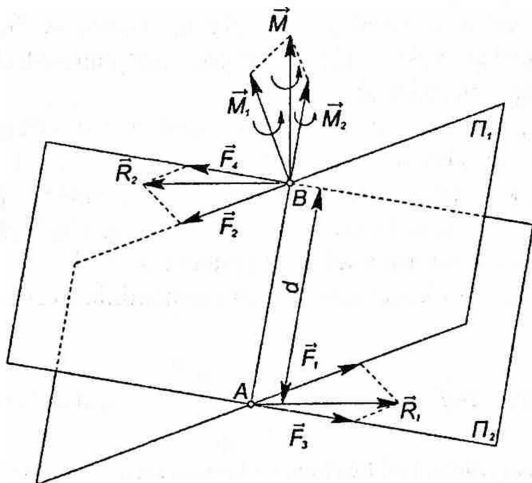
Isbot. Kesishuvchi Π_1 va Π_2 tekisliklarining kesishgan chizig'ida $AB = d$ kesmani olib, berilgan juft kuchlarni o'z tekisligida umumiy d yelkaga keltiramiz. Natijada Π_1 tekislikda mometning moduli M_1 bo'lgan (\vec{F}_1, \vec{F}_2) va Π_2 tekislikda mometning moduli M_2 bo'lgan (\vec{F}_3, \vec{F}_4) juft kuchlarga ega bo'lamiz. A nuqtaga qo'yilgan \vec{F}_1, \vec{F}_3 va B nuqtaga qo'yilgan \vec{F}_2, \vec{F}_4 kuchlarni geometrik qo'shib, ularning teng ta'sir etuvchilari \vec{R}_1 va \vec{R}_2 larni aniqlaymiz (6.7-rasm):

$$\vec{R}_1 = \vec{F}_1 + \vec{F}_3,$$

$$\vec{R}_2 = \vec{F}_2 + \vec{F}_4.$$

Natijada, (\vec{F}_1, \vec{F}_2) , (\vec{F}_3, \vec{F}_4) juft kuchlar o'rniga, ularga ekvivalent bo'lgan (\vec{R}_1, \vec{R}_2) juft kuchga ega bo'lamiz. Bu juft kuch momentining vektori \vec{M} (10.15) ga asosan quyidagicha aniqlanadi:

$$\begin{aligned} \vec{M} &= \vec{M}_A(\vec{R}_2) = \vec{AB} \times (\vec{F}_2 + \vec{F}_4) = \vec{AB} \times \vec{F}_2 + \vec{AB} \times \vec{F}_4 = \\ &= \vec{M}_A(\vec{F}_2) + \vec{M}_A(\vec{F}_4) = \vec{M}_1 + \vec{M}_2. \end{aligned}$$



6.7-rasm.

Shunday qilib,

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2.$$

Bunda, \vec{M}_1, \vec{M}_2 vektorlariga qurilgan parallelogrammning B nuqtasidan o'tuvchi diagonali miqdor va yo'nalish jihatdan (\vec{F}_1, \vec{F}_2) va (\vec{F}_3, \vec{F}_4) juft kuchlarni qo'shish natijasida olingan (\vec{R}_1, \vec{R}_2) juft kuchning momentini ifodalaydi.

\vec{M}_1, \vec{M}_2 vektorlariga qurilgan parallelogramm momentlar parallelogrammi deyiladi. Momentlar parallelogrammining diagonali (\vec{R}_1, \vec{R}_2) teng ta'sir etuvchi juft kuch tekisligiga perpendikulyar yo'naladi, uning moduli

$$M = R \cdot d$$

ga teng bo'ladi.

Isbotlangan teorema asoslanib, fazoda parallel bo'lmagan tekisliklarda yotuvchi, momentlarining vektorlari $\vec{M}_1, \vec{M}_2, \dots, \vec{M}_n$, bo'lgan juft kuchlarni ketma-ket qo'shib, bitta teng ta'sir etuvchi juft kuchga ega bo'lamiz. Bu juft kuchning momenti berilgan juft kuchlar momentlarining geometrik yig'indisiga teng bo'ladi:

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \dots + \vec{M}_n = \sum \vec{M}_i. \quad (6.24)$$

Teng ta'sir etuvchi juft kuchning momenti berilgan juftlar momentlarning vektorlariga qurilgan ko'pburchakning yopuvchi tomoni orqali ifodalanadi.

Agar juft kuchlar parallel tekisliklarda yotsa, juft kuchni parallel tekislikka ko'chirish haqidagi teorema asosan, ularni bitta tekislikka ko'chirish mumkin. Hosil bo'lgan juft kuchlar sistemasi, momenti berilgan juft kuchlar momentlarining algebraik yig'indisiga teng bo'lgan, bitta juft kuchga ekvivalent bo'ladi.

Fazodagi juft kuchlar sistemasi momentining vektori

$$\vec{M} = \sum \vec{M}_i$$

bo'lgan bitta teng ta'sir etuvchi juftga ekvivalent bo'lganligi uchun,

$$\vec{M} = \sum \vec{M}_i = 0$$

shart bajarilganda, juft kuchlar sistemasi muvozanatda bo'ladi.

Binobarin, fazodagi juft kuchlar momentlari vektorlarining geometrik yig'indisi nolga teng bo'lsa, juft kuchlar sistemasi muvozanatda bo'ladi. Bu shart fazodagi juft kuchlar sistemasi muvozanatining geometrik shartini ifodalaydi.

Agar,

$$M = \sqrt{(\sum M_{ix})^2 + (\sum M_{iy})^2 + (\sum M_{iz})^2}$$

ekanligini e'tiborga olsak, juft kuchlar sistemasi muvozanatning analitik shartlari quyidagicha yoziladi:

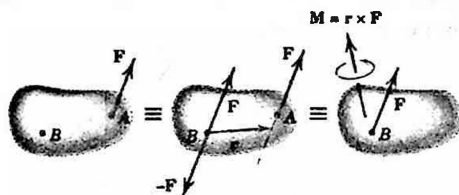
$$\sum M_{ix} = 0; \sum M_{iy} = 0; \sum M_{iz} = 0.$$

Shunday qilib, jismga ta'sir etuvchi juft kuchlar momentlari vektorlarining har bir koordinata o'qlaridagi proeksiyalarining yig'indisi alohida – alohida nolga teng bo'lsa, bunday juft kuchlar sistemasi muvozanatda bo'lar ekan. Bu shart juft kuchlar muvozanatning analitik shartini ifodalaydi.

54-§. Fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasini bir markazga keltirish

Fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasini bir nuqtaga keltirish uchun kuchni jismga ta'sirini o'zgartirmay uni o'ziga parallel ravishda bir nuqtadan ikkinchi nuqtaga ko'chirish haqidagi **Puanso** lemmasidan foydalanishimiz zarur.

Lemma. Jismning biror A nuqtasiga qo'yilgan \vec{F} kuch jismda olingan ixtiyoriy keltirish markazi B nuqtaga qo'yilgan xuddi shunday kuchga va moment berilgan kuchning keltirish markaziga nisbatan momentiga teng juft kuchga ekvivalent bo'ladi.



6.8a-rasm.

Jismning A_1, A_2, \dots, A_n nuqtalariga qo'yilgan fazoda ixtiyoriy joylashgan $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ kuchlarni L.Puanso usulidan foydalanib, ixtiyoriy tanlab olingan keltirish markazi O nuqtaga keltiramiz (6.8b-rasm). [2]

Keltirish natijasida, O nuqtada qo'yilgan:

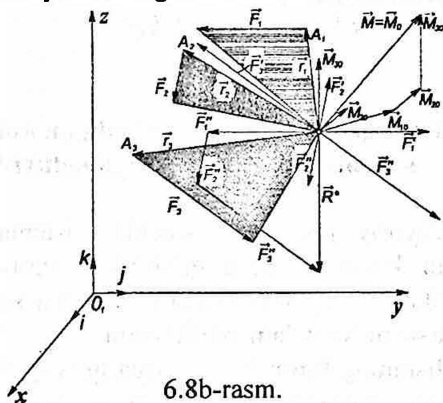
$$\vec{F}_1'' = \vec{F}_1, \vec{F}_2'' = \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n'' = \vec{F}_n \quad (6.25)$$

kuchlarga va momentlarining vektorlari

$$\vec{M}_1 = \vec{M}_0(\vec{F}_1), \vec{M}_2 = \vec{M}_0(\vec{F}_2), \dots, \vec{M}_n = \vec{M}_0(\vec{F}_n) \quad (6.26)$$

bo'lgan qo'shilgan juft kuchlarga ega bo'lamiz.

$\vec{M}_0(\vec{F}_1), \vec{M}_0(\vec{F}_2), \dots, \vec{M}_0(\vec{F}_n)$ vektorlar mos ravishda $(\vec{F}_1, \vec{F}_1'), (\vec{F}_2, \vec{F}_2'), \dots, (\vec{F}_n, \vec{F}_n')$ qo'shilgan juftlar tekisliklariga perpendikulyar holda shunday yo'naladiki, ularning uchidan qaraganda, qo'shilgan juft kuchlar jismni soat milining aylanish yo'nalishiga teskari yo'nalishda aylantirishga intiladi.



6.8b-rasm.

Qo'shilgan juft kuchlar momentlarining vektorlari ham keltirish markazi O nuqtaga qo'yiladi.

O markazga qo'yilgan $\vec{F}_1'', \vec{F}_2'', \dots, \vec{F}_n''$ kuchlarni geometrik qo'shib, bitta \vec{R}^* kuchga ega bo'lamiz:

$$\vec{R}^* = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i''$$

yoki:

$$\vec{R}^* = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \quad (6.27)$$

\vec{R} kuch fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasining bosh vektori deyiladi va u mazkur kuchlarning geometrik yig'indisiga teng bo'ladi.

Momentlarining vektorlari :

$$\vec{M}_1 = \vec{M}_O(\vec{F}_1), \quad \vec{M}_2 = \vec{M}_O(\vec{F}_2), \dots, \quad \vec{M}_n = \vec{M}_O(\vec{F}_n)$$

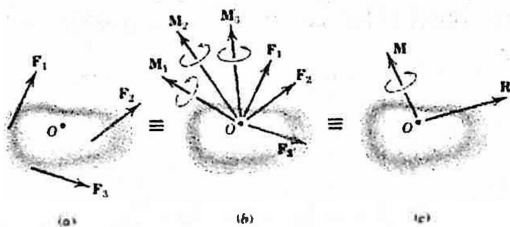
bo'lgan fazoviy qo'shilgan juft kuchlarni qo'shib, momenti $\vec{M} = \vec{M}_O$ ga teng bo'lgan bitta juft kuchga ega bo'lamiz. Bu juft kuchning momenti mazkur juft kuchlar momentlarining geometrik yig'indisiga teng bo'ladi:

$$\vec{M} = \vec{M}_O = \sum_{i=1}^n \vec{M}_O(\vec{F}_i). \quad (6.28)$$

\vec{M}_O kuchlar sistemasining keltirish markazi O nuqtaga nisbatan bosh momenti deyiladi. Binobarin, fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasining biror markazga nisbatan bosh momenti tashkil etuvchi kuchlarning shu markazga nisbatan momentlarining geometrik yig'indisiga teng bo'lar ekan.

Shunday qilib, fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasini biror O markazga keltirish natijasida, mazkur kuchlar sistemi, keltirish markaziga qo'yilgan kuchlar sistemasining bosh vektori \vec{R} ga teng bo'lgan bitta kuch va momenti kuchlar sistemasining bosh momenti \vec{M}_O ga teng bo'lgan bitta juftga ekvivalent bo'lar ekan. Bunda, bosh vektorning moduli va yo'nalishi keltirish markazining tanlanishiga bog'liq bo'lmaydi, lekin bosh moment moduli va yo'nalishi keltirish markazining tanlanishiga bog'liq bo'ladi. Ko'rib o'tilgan usul bilan kuchlar sistemasini bir markazga keltirish, kuchlar sistemasini sodda holga keltirish deyiladi.

Yuqorida bayon etilgan mulohazalarni sodda ko'rinishga 6.8v-rasmda ko'rsatish mumkin.[2]

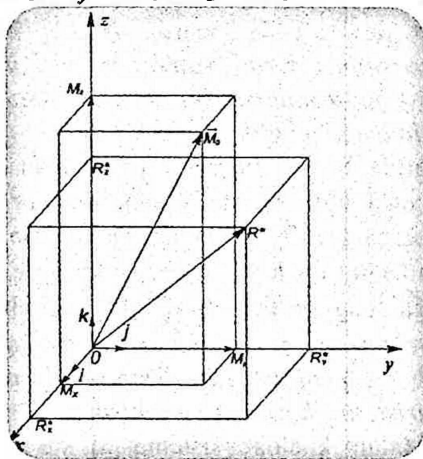


6.8v-rasm.

55-§. Fazodagi kuchlar sistemasini bosh vektori va bosh momenti

Fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasini bosh vektori va bosh momentining miqdor va yo'nalishini analitik usulda aniqlash uchun koordinatalar boshini keltirish markazi O nuqtada olamiz (6.9-rasm). \vec{F}_i kuchning koordinata o'qlaridagi proeksiyalarini X_i, Y_i, Z_i orqali belgilasak, (6.27) ni koordinata o'qlariga proeksiyalab, bosh vektor \vec{R}^* ning Ox, Oy, Oz o'qlardagi proeksiyalari uchun quyidagi ifodalarga ega bo'lamiz:

$$R_x^* = \sum X_i, \quad R_y^* = \sum Y_i, \quad R_z^* = \sum Z_i. \quad (6.29)$$



6.9-rasm.

Bular orqali bosh vektorning moduli va koordinata o'qlari bilan hosil qilgan burchaklar kosinuslarini quyidagi formulalar asosida aniqlaymiz:

$$R^* = \sqrt{(\sum X_i)^2 + (\sum Y_i)^2 + (\sum Z_i)^2}; \quad (6.30)$$

$$\left. \begin{aligned} \cos(\vec{R}^* \wedge \vec{x}) &= \frac{R_x^*}{R^*}, \\ \cos(\vec{R}^* \wedge \vec{y}) &= \frac{R_y^*}{R^*}, \\ \cos(\vec{R}^* \wedge \vec{z}) &= \frac{R_z^*}{R^*}. \end{aligned} \right\} \quad (6.31)$$

Bosh moment \vec{M}_0 ning koordinata o'qlaridagi proeksiyalarini M_x, M_y, M_z bilan belgilasak, vektorlar yig'indisining o'qdagi proeksiyasi haqidagi teorema asosan:

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \sum (\vec{r}_i \vec{F}_i)_x \\ M_y &= \sum (\vec{r}_i \vec{F}_i)_y \\ M_z &= \sum (\vec{r}_i \vec{F}_i)_z \end{aligned} \right\} \text{yoki} \quad \left. \begin{aligned} M_x &= \sum M_x (\vec{F}_i) \\ M_y &= \sum M_y (\vec{F}_i) \\ M_z &= \sum M_z (\vec{F}_i) \end{aligned} \right\} \quad (6.32)$$

Bular orqali, bosh momentning miqdori va yo'nalishi quyidagi formulalar asosida aniqlanadi:

$$M_0 = \sqrt{[\sum M_x (\vec{F}_i)]^2 + [\sum M_y (\vec{F}_i)]^2 + [\sum M_z (\vec{F}_i)]^2}, \quad (6.33)$$

$$\left. \begin{aligned} \cos(\vec{M}_0 \wedge \vec{x}) &= \frac{M_x}{M_0}, \\ \cos(\vec{M}_0 \wedge \vec{y}) &= \frac{M_y}{M_0}, \\ \cos(\vec{M}_0 \wedge \vec{z}) &= \frac{M_z}{M_0}. \end{aligned} \right\} \quad (6.34)$$

Bosh moment \vec{M}_0 ning koordinata o'qlaridagi proeksiyalarini (6.38) dan foydalanib, quyidagicha aniqlash ham mumkin:

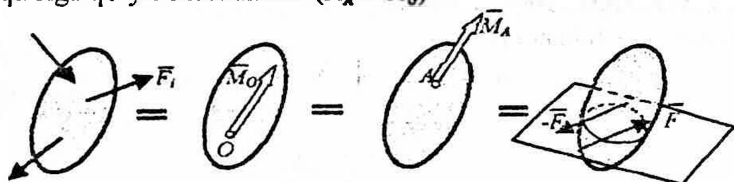
$$\left. \begin{aligned} M_x &= \sum (y_i Z_i - z_i Y_i), \\ M_y &= \sum (z_i X_i - x_i Z_i), \\ M_z &= \sum (x_i Y_i - y_i X_i). \end{aligned} \right\} \quad (6.35)$$

56-§. Fazodagi kuchlar sistemasini juft yoki teng ta'sir etuvchi kuchga keltirish

Fazoda ixtiyoriy joylashgan $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ kuchlar sistemasini bir markazga keltirishda, bu kuchlar sistemasi, bosh vektor \vec{R}^* ga teng bitta kuch bilan, momenti bosh moment \vec{M}_0 ga teng bo'lgan bitta juftga ekvivalent bo'lishi yuqorida ko'rib o'tildi. Fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi muvozanatda bo'lmasa, ularni qanday sodd holga keltirish mumkinligini aniqlaylik.

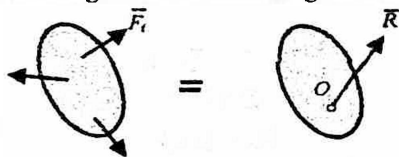
Natija kuchlar sistemasining bosh vektori \vec{R}^* va bosh momenti \vec{M}_O larning qiymatlariga bog'liq bo'ladi.

1. Agar, berilgan fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi uchun $\vec{R}^* = 0$, lekin $\vec{M}_O \neq 0$ bo'lsa, bunday kuchlar sistemasi momenti kuchlar sistemasining bosh momentiga teng bo'lgan teng ta'sir etuvchi juftga keltiriladi. Bunday holda, \vec{M}_O ning qiymati moment markazining tanlanishiga bog'liq bo'lmaydi va u jismning ixtiyoriy nuqtasiga qo'yilishi mumkin. ($\vec{M}_A = \vec{M}_O$)



6.10-rasm.

2. Agar, berilgan fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi uchun $\vec{R}^* \neq 0$, lekin $\vec{M}_O = 0$ bo'lsa, bunday kuchlar sistemasi berilgan kuchlarning bosh vektoriga teng va keltirish markaziga qo'yilgan bitta kuchga, ya'ni teng ta'sir etuvchi \vec{R}^* ga keltiriladi: (6.11-rasm)



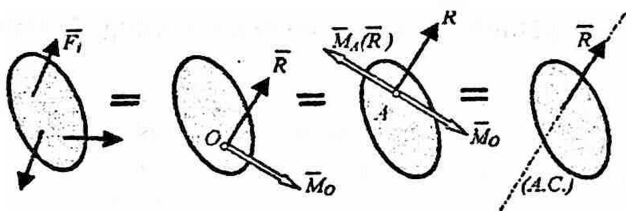
6.11-rasm.

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \in R^3. \quad (6.36)$$

3. Agar, berilgan fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi uchun $\vec{R}^* \neq 0$, $\vec{M}_O \neq 0$ hamda \vec{R}^* bosh vektor \vec{M}_O bosh momentga perpendikulyar yo'nalgan bo'lsa, bunday kuchlar sistemasi bosh vektor \vec{R}^* ga parallel yo'nalgan va keltirish markazi O nuqtadan:

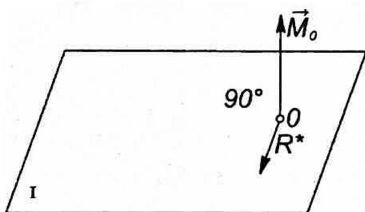
$$OA = d = \frac{M_0}{R^*}$$

masofa uzoqlikda joylashgan (\vec{M}_O yo'nalishiga mos ravishda) A nuqtaga qo'yilgan teng ta'sir etuvchi \vec{R}^* kuchga keltiriladi. [4]



6.12-rasm.

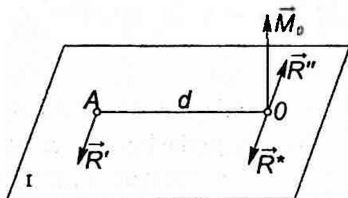
Bunday holni isbotlash uchun, bosh vektor \vec{R}^* orqali bosh momentga perpendikulyar I tekislikni o'tkazamiz (6.13-rasm). Bu tekislikda momenti bosh moment \vec{M}_o ga teng bo'lgan juft kuchni joylashtiramiz. Uning aylanish yo'nalishini \vec{M}_o vektorga moslab, tashkil etuvchilarini:



6.13-rasm.

$$|\vec{R}'| = |\vec{R}''| = |\vec{R}^*|$$

holda tanlaymiz. Juft kuchni tashkil etuvchilaridan biri \vec{R}'' ni keltirish markazi O nuqtaga, \vec{R}^* yo'nalishiga qarama-qarshi holda qo'yamiz (6.14-rasm).



6.14-rasm.

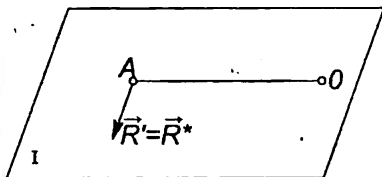
($\vec{R}'\vec{R}''$) juftning momenti

$$M_o = R' \cdot d = R^* \cdot d, \quad (6.37)$$

shuning uchun uning yelkasi:

$$d = \frac{M_o}{R^*}. \quad (6.38)$$

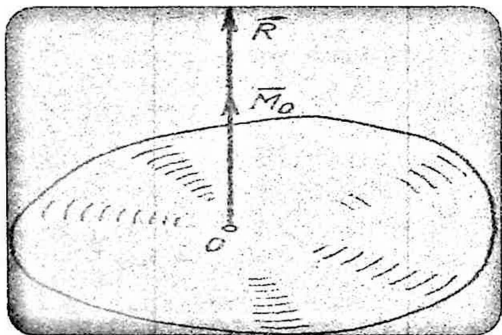
Bunda, O nuqtaga qo'yilgan \vec{R}^* va \vec{R}'' kuchlar muvozanatlashgan kuchlar sistemasini tashkil etadi. Shu sababli, berilgan kuchlar sistemasini O nuqtadan $d = \frac{M_o}{R^*}$ masofa uzoqlikda yotuvchi A nuqtaga qo'yilgan birgina $\vec{R}' = \vec{R}^*$ kuchga ekvivalent bo'ladi (6.15-rasm).



6.15-rasm.

57-§. Fazodagi kuchlar sistemasini dinamik vintga keltirish

Agar berilgan fazodagi ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasini uchun $\vec{R} \neq 0, \vec{M}_0 \neq 0$, bo'lib, bosh vektor \vec{R} bilan bosh moment \vec{M}_0 bir chiziq bo'ylab ($\alpha=0^\circ$) yo'nalgan bo'lsin (6.16-rasm).



6.16-rasm.

Bunday holda fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasini dinamik joylashgan kuchlar sistemasini dinamik vintga keltiriladi.

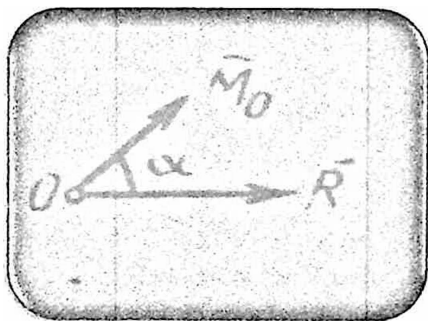
Bosh momentning bosh vektorga nisbatan *vint parametri* deyiladi.

Vint parametri p bilan belgilanadi.

$$p = \frac{M_0}{R}$$

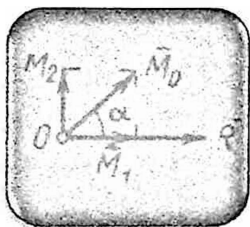
\vec{R} bilan \vec{M}_0 yo'nalgan chiziq *vint o'qi* deyiladi.

Berilgan kuchlar sistemasini O markazga keltirish natijasida \vec{R} bosh vektor bilan \vec{M}_0 bosh moment orasidagi burchak $\alpha \neq 90^\circ$ bo'ladigan holni tekshiramiz. Aniqlik uchun α burchakni o'tkir deb olamiz (6.17a-rasm).



6.17a-rasm.

Bu holda \vec{M}_0 bosh vektorini \vec{R} bosh vektor bo'ylab yo'nalgan \vec{M}_1 va unga perpendikulyar yo'nalgan \vec{M}_2 tashkil etuvchilarga ajratamiz (6.17b-rasm).



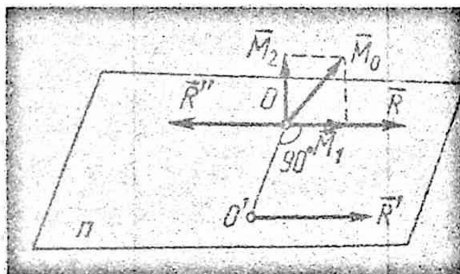
6.17b-rasm.

U holda:

$$M_1 = M_0 \cos \alpha = \frac{R M_0 \cos \alpha}{R} = \frac{(\vec{R} * \vec{M}_0)}{R}$$

$$M_2 = M_0 \sin \alpha \quad (6.39)$$

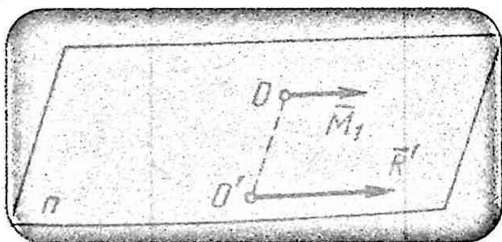
Momenti \vec{M}_2 ga teng juft kuch \vec{R} bosh vektorni ($\vec{M}_2 \perp \vec{R}$ bo'lgani tufayli) O nuqtadan \vec{M}_2 ga perpendikulyar o'tkazilgan Π tekislikdagi (6.17v-rasm)



6.17v-rasm.

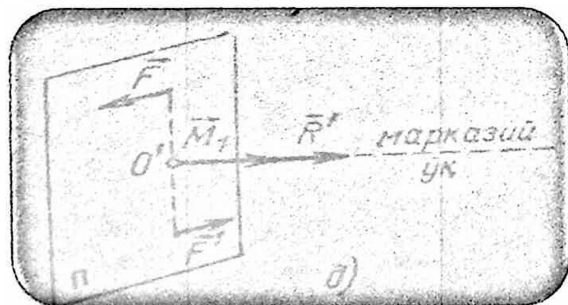
$$OO' = \frac{M^2}{R} = \frac{M_0 \sin \alpha}{R} = d \quad (6.40)$$

masofa O' nuqtaga qo'yilgan $\vec{R} = \vec{R}'$ kuch bilan almashtirish mumkin (6.17g-rasm).



6.17g-rasm.

\vec{M}_1 moment vektori erkin bo'lgani uchun uni o'ziga parallel ravishda O' nuqtaga keltiramiz.(6.18d-rasm).



(6.18d-rasm).

Natijada berilgan kuchlar sistemasi O nuqtaga qo'yilgan $\vec{R} = \vec{R}'$ kuchga va shu kuch bo'ylab yo'nalgan \vec{M}_1 momenti (\vec{F}, \vec{F}') juft kuchga keltiriladi. (\vec{F}, \vec{F}') juft kuch \vec{M}_1 vektorga perpendikulyar Π tekislikda yotadi.

Shunday qilib kuchlar sistemasi O keltirish markazidan $OO' = d$ masofadagi O' nuqtada parametr $p = \frac{M_1}{R} = \frac{M_0 \cos \alpha}{R}$ bo'lgan dinamik vintga keltiriladi.

58-§. Markaziy o'q tenglamasi

Fazoda shunday O' nuqtani tanlab olaylikki, berilgan kuchlar sistemasi shu nuqtada dinamik vintni tashkil etsin, ya'ni \vec{R} bosh vektor bilan $\vec{M}_{O'}$ bosh moment bir to'g'ri chiziq bo'ylab yo'nalsin. U holda \vec{R} bilan $\vec{M}_{O'}$ yo'nalgan chiziq *dinamik vint o'qi* yoki *markaziy o'q* deyiladi. Markaziy o'q tenglamasi aniqlash uchun $\vec{M}_{O'} \parallel \vec{R}$ shartdan foydalanamiz, ya'ni

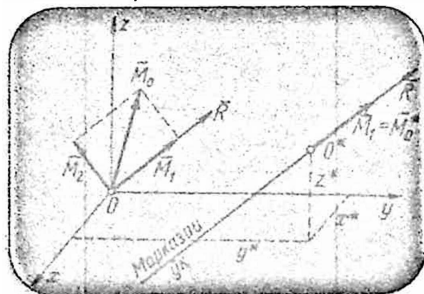
$$p = \frac{\vec{M}_{O'}}{R} = \frac{\vec{R} \cdot \vec{M}_{O'}}{R^2} = \frac{\vec{R} \vec{M}_0}{R^2}. \quad (6.41)$$

Bunda p o'zgarmas miqdor bo'lib, vint parametridir.

$$p = \frac{\vec{M}_0 - \vec{OO'} \times \vec{R}}{R}. \quad (6.42)$$

Bu tenglama vektorko'rinishidagi markaziy o'q tenglamasidir.

Markaziy o'qning analitik tenglamasini yozish uchun ixtiyoriy O nuqtada x, y, z koordinata o'qlarini o'tkazamiz. (6.19-rasm).



(6.20-rasm)

Bu nuqtaga kuchlarni keltirish natijasida bosh vektor \vec{R} va bosh moment \vec{M}_0 ga ega bo'laylik. Markaziy o'qdagi ixtiyoriy $O^*(x^*, y^*, z^*)$ nuqtani olamiz. Bu nuqtada $\vec{M}_{0*} = \vec{M}_1$ bo'lib, $\vec{R}(R_x, R_y, R_z)$ vektorning ta'sir chizig'i bo'ylab yo'naladi.

(6.42) tenglikni koordinata o'qlariga proyeksiyalab markaziy o'qning analitik tenglamasini hosil qilamiz:

$$\frac{M_x - (y^* R_z - z^* R_y)}{R_x} = \frac{M_y - (z^* R_x - x^* R_z)}{R_y} = \frac{M_z - (x^* R_y - y^* R_x)}{R_z} = p \quad (6.43)$$

Bunda M_x, M_y, M_z lar \vec{M}_0 bosh momentining koordinata o'qlaridagi proyeksiyalaridir.

59-§. Fazodagi kuchlar sistemasi teng ta'sir etuvchisining momenti haqida Varin'on teoremasi

Agar fazodagi kuchlar sistemasi teng ta'sir etuvchi kuchga keltirilsa, bu teng ta'sir etuvchi kuchning ixtiyoriy nuqtaga nisbatan momenti, barcha kuchlarning mazkur nuqtaga nisbatan momentlarining geometrik yig'indisiga teng bo'ladi.

Faraz qilaylik, fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi ta'sir chizig'i A nuqtadan o'tadigan, \vec{R}' teng ta'sir etuvchiga keltirilgan bo'lsin. Teng ta'sir etuvchining ixtiyoriy O nuqtaga nisbatan momentini hisoblaymiz. Buning uchun, \vec{R}' kuch va O nuqtadan o'tuvchi I tekislikni o'tkazib (12.1a-rasm), \vec{R}' kuchni Puanso lemmasiga asosan O nuqtaga keltiramiz. Keltirish natijasida O nuqtada $\vec{R}' = \vec{R}^*$ kuchga va momenti \vec{R}' kuchning O nuqtaga nisbatan momenti $\vec{M}_0 = \vec{M}_0(\vec{R}')$ ga teng bo'lgan (\vec{R}', \vec{R}'') juftga ega bo'lamiz (12.1b-rasm).

(\vec{R}', \vec{R}'') juft kuchning momenti bosh moment \vec{M}_0 ga teng bo'ladi:

$$\vec{M}_0 = \vec{M}_0(\vec{R}') = \vec{M}_0(\vec{R}^*). \quad (6.44)$$

Lekin, $\vec{R}^* = \vec{R}' = \sum \vec{F}_i$ tenglikni e'tiborga olsak,

$$\vec{M}_0 = \sum \vec{M}_0(\vec{F}_i). \quad (6.45)$$

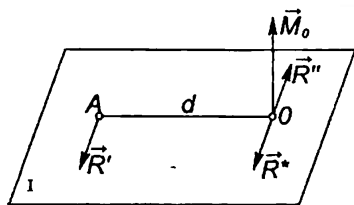
Shuning uchun:

$$\vec{M}_0(\vec{R}') = \sum \vec{M}_0(\vec{F}_i). \quad (6.46)$$

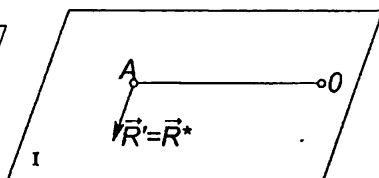
Demak, fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchisining shu tekislikdagi biror nuqtaga nisbatan momenti, barcha kuchlarning mazkur nuqtaga nisbatan momentlarining geometrik yig'indisiga teng bo'lar ekan.

(6.46) tenglikni θ nuqtadan o'tuvchi biror Oz o'qqa proektsiyalasak:

$$[\vec{M}_O(\vec{R}^*)]_z = \sum [\vec{M}_O(\vec{F}_i)]_z. \quad (6.47)$$



6.21a-rasm.



6.21b-rasm.

Bunday holda, quyidagi

$$M_z(\vec{F}) = [\vec{M}_O(\vec{F})]_z$$

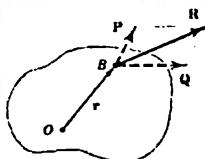
tenglikka asosan (12.4) quyidagicha yoziladi:

$$M_z(\vec{R}^*) = \sum M_z(\vec{F}_i). \quad (6.48)$$

Demak, teng ta'sir etuvchining biror o'qqa nisbatan momenti barcha kuchlarning mazkur o'qqa nisbatan momentlarining algebraik yig'indisiga teng bo'lar ekan.

Fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi teng ta'sir etuvchisining momenti haqida Varin'on teoremasini quyidagicha izohlash ham mumkin. [2]

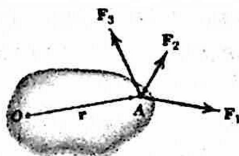
Bir tekislikda joylashgan kuchlar sistemasi uchun Varin'on teoremasi quyidagicha yoziladi



6.22-rasm

$$\vec{M}_O = \vec{r} \cdot \vec{R} = (\vec{r} \cdot \vec{P}) + (\vec{r} \cdot \vec{Q}) = \vec{r} \cdot (\vec{P} + \vec{Q})$$

Fazoda joylashgan kuchlar sistemasi uchun esa Varin'on teoremasi quyidagicha yoziladi.



6.23-rasm.

$$\begin{aligned} \vec{M}_O &= \vec{r} * \vec{R} = (\vec{r} * \vec{F}_1) + (\vec{r} * \vec{F}_2) + (\vec{r} * \vec{F}_3) + \dots = \\ &= \vec{r} * (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots) = \vec{r} * \sum \vec{F}_i \end{aligned}$$

Demak,

$$\vec{M}_O = \sum (\vec{r} * \vec{F}_i) = (\vec{r} * \vec{F})$$

60-§. Fazodagi kuchlar sistemasining muvozanat shartlari

Fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi muvozanatda bo'lishi uchun kuchlar sistemasining bosh vektori va ixtiyoriy olingan keltirish markaziga nisbatan bosh momenti bir vaqtda nolga teng bo'lishi zarur va yetarlidir:

$$\vec{R}^* = 0. \quad \vec{M}_O = \sum \vec{M}_O(\vec{F}_i) = 0. \quad (6.49)$$

(6.49) tengliklar fazodagi kuchlar sistemasi muvozanatining geometrik shartlarini ifodalaydi.

Bu shartlarning zarurligi shundaki, agar \vec{R}^* va \vec{M}_O noldan farqli bo'lsa, bunday kuchlar sistemasi muvozanatda bo'la olmaydi, chunki juft kuch bitta kuch bilan muvozanatlashmaydi. Agar, $\vec{R}^* = 0$, $\vec{M}_O \neq 0$ bo'lsa, kuchlar sistemasi bitta juft kuchga, $\vec{R}^* \neq 0$, $M_O = 0$ bo'lgan holda esa, kuchlar sistemasi keltirish markaziga qo'yilgan bitta teng ta'sir etuvchi kuchga ekvivalent bo'ladi. O'rganilgan xar ikkala holda ham kuchlar sistemasi muvozanatda bo'la olmaydi. Shuning uchun, fazoviy kuchlar sistemasi muvozanatda bo'lishi uchun $\vec{R}^* = 0$, $\vec{M}_O = 0$ bo'lishi zaruriy shart hisoblanadi.

(12.6) shartlar fazoviy kuchlar sistemasi muvozanatining etarli shartini ham ifodalaydi. Chunki, bu shartlar bajarilsa, keltirish

markaziga ko'chirilgan barcha kuchlar va qo'shilgan juft kuchlar sistemasi muvozanatda bo'ladi.

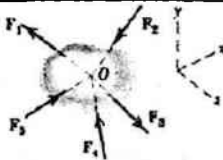
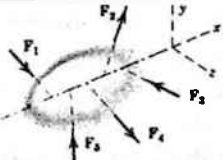
Agar fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasining bosh vektori va bosh momentining analitik ifodalari:

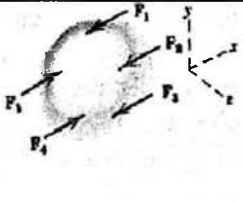
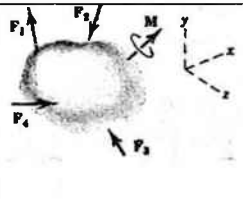
$R^* = \sqrt{(\sum X_i)^2 + (\sum Y_i)^2 + (\sum Z_i)^2}$ va $\cos(\vec{R} \wedge \vec{x}) = \frac{R_x^*}{R}$, $\cos(\vec{R} \wedge \vec{y}) = \frac{R_y^*}{R}$, $\cos(\vec{R} \wedge \vec{z}) = \frac{R_z^*}{R}$ larni e'tiborga olsak, fazodagi kuchlar sistemasi muvozanatining analitik shartlarini ifodalovchi quyidagi tenglamalar sistemasiga ega bo'lamiz:

$$\begin{aligned} \sum X_i &= 0; \quad \sum Y_i = 0; \quad \sum Z_i = 0; \\ \sum M_x(\vec{F}_i) &= 0; \quad \sum M_y(\vec{F}_i) = 0; \quad \sum M_z(\vec{F}_i) = 0. \end{aligned} \quad (6.50)$$

Demak, fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi muvozanatda bo'lishi uchun barcha kuchlarning uchta koordinata o'qlaridagi proeksiyalarining va koordinata o'qlarining har biriga nisbatan momentlarining algebraik yig'indilari alohida-alohida nolga teng bo'lishi zarur va yetarli ekan.

Fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi muvozanatining quyidagi ikki xususiy hollarini ko'rib chiqamiz: [2]

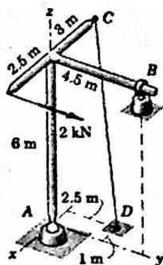
Kuchlar sistemasi	Ta'sir etuvchi kuchlar sistemasining ko'rinishi	Muvozanat tenglamalari
1. Bir nuqtaga qo'yilgan kuchlar sistemasi		$\sum F_x = 0$ $\sum F_y = 0$ $\sum F_z = 0$
2. Chiziqqa qo'yilgan kuchlar sistemasi		$\sum F_x = 0$ $\sum M_y = 0$ $\sum F_y = 0$ $\sum M_z = 0$ $\sum F_z = 0$

3. Parallel kuchlar sistemasi		$\Sigma F_x = 0$ $\Sigma M_y = 0$ $\Sigma M_z = 0$
4. Fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi		$\Sigma F_x = 0$ $\Sigma M_x = 0$ $\Sigma F_y = 0$ $\Sigma M_y = 0$ $\Sigma F_z = 0$ $\Sigma M_z = 0$

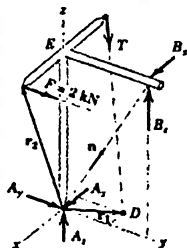
Natijada (6.49) dagi birinchi, ikkinchi va oltinchi tenglamalar ayniyatga aylanadi va fazodagi parallel kuchlar sistemasining muvozanat tenglamalari quyidagicha yoziladi:

$$\Sigma Z_i = 0, \quad \Sigma M_x(\vec{F}_i) = 0, \quad \Sigma M_y(\vec{F}_i) = 0. \quad (6.51)$$

Masala.



Trubadan payvandlash yo'li bilan yasalgan rama A nuqtada sferik sharnirga tayangan. $F=2\text{kN}$ kuch ramani Oz o'qi atrofida aylanma harakatga keltirishga intiladi. CD arqon bu harakatni yuzaga keltirishga imkon bermaydi va rama muvozanat holatida bo'ladi. Rama og'irligini hisobga olmay, uning tayanch reaksiyalarini va CD arqondagi taranglik kuchi aniqlansin.



Yechimi.

Ramaga qo'yilgan 2kN kuchni ko'rsatamiz.

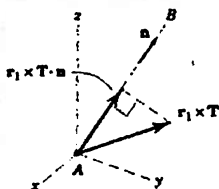
Ramani bog'lanishlardan ozod etib, ularning ta'sirlarini bog'lanishlar reaksiyalari bilan almashtiramiz. Ramaga A nuqtadagi sferik sharnir, B nuqtadagi silindrik sharnir va CD arqon bog'lanishlar hisoblanadi.

Sferik sharnir reaksiyalari : A_x, A_y, A_z .

Silindrik sharnir reaksiyalari : B_x, B_y .

CD arqon reaksiyasi: T.

Ramaga qo'yilgan 2kN kuch va bog'lanishlar reaksiyalarini chizmada ko'rsatamiz



Koordinata boshi sifatida A nuqtani tanlab, koordinata o'qlarini chizmadagidek o'tkazamiz. AB yo'nalishi \vec{n} birlik vektor yo'nashi orqali aniqlanadi:

$$\vec{n} = \frac{4.5\vec{j} + 6\vec{k}}{\sqrt{6.5^2 + 4.5^2}} = \frac{1}{5}(3\vec{j} + 4\vec{k})$$

\vec{T} kuchning A nuqtaga nisbatan momenti vektori:

$$\vec{M}_A(\vec{T}) = \vec{r}_1 * T\vec{n}$$

\vec{F} kuchni A nuqtaga nisbatan momentinivktori:

$$\vec{M}_A(\vec{F}) = \vec{r}_1 * F\vec{n}$$

Agar $CD = \sqrt{46.2}m$ ekanligini e'tiborga olsak, \vec{T} , \vec{F} , \vec{r}_1 , \vec{r}_2 vektorlar quyidagicha ifodalanadi:

$$\vec{T} = \frac{T}{\sqrt{46.2}}(2\vec{i} + 2.5\vec{j} - 6\vec{k})$$

$$\vec{F} = 2j \text{ kN}$$

$$\vec{r}_1 = -\vec{i} + 2.5\vec{j} \quad (\text{m})$$

$$\vec{r}_2 = 2.5\vec{i} + 6\vec{k} \quad (\text{m})$$

\vec{T} va \vec{F} kuchlarning momentlarini AB o'qqa nisbatan hisoblaymiz:

$$\sum M_{AB} = 0$$

$$(-\vec{i} + 2.5\vec{j}) * \frac{T}{\sqrt{46.2}}(2\vec{i} - 2.5\vec{j} - 6\vec{k}) * \frac{1}{5}(3\vec{j} - 4\vec{k}) + (2.5\vec{i} + 6\vec{k}) * (2\vec{j}) * \frac{1}{5}(3\vec{j} + 4\vec{k}) = 0$$

Yozilganlarni e'tiborga olsak, quyidagi ifodaga ega bo'lamiz:

$$\frac{-48T}{\sqrt{46.2}} + 20 = 0.$$

Bu tenglamadan:

$$T = 2.83 \text{ kN.}$$

CD arqondagi taranglik kuchini koordinata o'qlari bo'ylab yo'nalgan tashkil etuvchilari quyidagilarga teng bo'ladi:

$$T_x = 0.833 \text{ kN}, \quad T_y = 1.042 \text{ kN}, \quad T_z = -2.5 \text{ kN.}$$

Qolgan barcha noma'lum reaksiya kuchlari quyidagi muvozanat tenglamalaridan aniqlanadi:

$$\sum M_x = 0 \quad 2 * (2.5) - 4.5B_x - 1.042 * (3) = 0 \quad B_x = 0.417 \text{ kN,}$$

$$\sum M_x = 0 \quad 4.5B_x - 2 * (6) - 1.042(6) = 0 \quad B_x = 4.06 \text{ kN,}$$

$$\sum F_x = 0 \quad A_x + 0.417 - 0.833 = 0 \quad A_x = -1.250 \text{ kN,}$$

$$\sum F_y = 0 \quad A_y + 2 - 1.042 = 0 \quad A_y = -3.04 \text{ kN,}$$

$$\sum F_z = 0 \quad A_z + 4.06 - 2.5 = 0 \quad A_z = -1.556 \text{ kN.}$$

Takrorlash uchun savollar

1. Fazoviy kuchlar sistemasi uchun Varin'on teoremasini ta'riflang.
2. Fazoviy kuchlar sistemasining bosh vektori qanday anilanadi.
3. Fazoviy uchar sistemasining bosh momenti qanday aniqlanadi.
4. Fazoviy kuchlar sistemasining muvozanat sharti nimadan iborat.
5. Fazoviy kuchlar sistemasining muvozanat tenglamalari anday tuziladi.
6. Fazoviy kesishuvchi kuchlar sistemasining muvozanat shartini yozing.
7. Fazoviy parallel kuchlar sistemasining muvoznat shartini yozing.

61-§. Fazoda bir nuqtada kesishadigan kuchlar sistemasining muvozanatiga doir masalalarni yechish uchun uslubiy ko'rsatmalar

Fazoda bir nuqtada kesishuvchi kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchisi kuchlarning, ta'sir chiziqlari kesishadigan nuqtaga qo'yiladi va kuchlardan qurilgan fazoviy ko'pburchakning yopuvchi tomoni orqali ifodalaniladi.

$$\vec{R} = \sum \vec{F}_k.$$

Teng tasir etuvchi kuchning o'qlardagi proeksiyalari qo'shiluvchi kuchlarning mazkur o'qdagi proeksiyalarining algebraiy yig'indisiga teng bo'ladi.

$$\vec{R}_x = \sum \vec{F}_{kx}.$$

$$\vec{R}_y = \sum \vec{F}_{ky}.$$

$$\vec{R}_z = \sum \vec{F}_{kz}.$$

Fazoda bir nuqtada kesuvchi kuchlar teng ta'sir etuvchisining miqdori va yo'nalishi quyagi formulalar asosida aniqlanadi:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$$

$$\cos(\vec{R} \wedge \vec{i}) = \frac{R_x}{R}; \quad \cos(\vec{R} \wedge \vec{j}) = \frac{R_y}{R}; \quad \cos(\vec{R} \wedge \vec{k}) = \frac{R_z}{R};$$

Fazoda bir nuqtada kesishuvchi kuchlar sistemasi muvozanatda bo'lishi uchun ulardan bilan ko'rishgan kuchlar ko'pburchagi yopiq bo'lishi lozim. Fazoda bir nuqtada kesishuvchi kuchlar sistemasining muvozanatda teng tomonlar quyidagi kuchlarga bo'ladi:

$$\sum F_{kx} = 0; \quad \sum F_{ky} = 0;$$

$$\sum F_{kz} = 0;$$

Fazoda bir nuqtada kesishuvchi kuchlar sistemasining muvozanatiga doir masalalar statika aniqlangan bo'lishi uchun masalasidagi noma'lum kattaliklar (kuchlar) soni muvozzant tenglamalari sonidan oshmasligi lozim.

Fazoda bir nuqtada kesishadigan kuchlar sistemasining muvozanatiga doir masalalar quyidagi tartibda yoziladi:

1) Muvozzanatda o'rganilayotgan jisimning, kuchlari ta'sir chiziqlari kesishadigan nuqtasi aniqlab olinadi.

- 2) Qo'yilgan tashqi kuchlar ko'rsatiladi.
- 3) Jisimga bog'lanishlar qo'shilgan bo'lsa, ularning jismga ta'siri bog'lanishlar reaksiya kuchlari aniqlanadi.
- 4) Jisimning qo'shilgan tashqi kuchlar va bog'lanishlar reaksiya kuchlari ta'siridagi muvozanati o'rnatiladi.
- 5) Masala statik aniqlangan ekanligi tekshiriladi.
- 6) Koordinata o'qlari o'tkaziladi.
- 7) Jisimning ta'sir etuvchi kuchlarining muvozanat tenglamalari tuziladi.
- 8) Tuzilgan muozanat tenglamalari yozib, noma'lumkattalikl (kuchlar) aniqlanadi.

62-§. Fazoda bir nuqtada kesishadigan kuchlar sistemasining muvozanatiga doir masalalar

1 – masala.

A nuqtaga $F=100H$ kuch qo'yiladigan. F kuchning ta'sir chizig'i koordinat A o'qlari x,y,z kesishadigan O nuqtadan o'tadi. Kuch qo'yilgan A nuqtaning koordinatalari $x=3, y=4, z=5$, quydagibitiklar aniqlansin:

- a) \vec{F} Kuching koordinata o'qlaridagi proeksiyalari.
- b) F kuching O_{xy} tekislikdagi proeksiyalari.
- c) F kuching O_B o'qidagi proeksiyalari.

Masalaning yechimi:

a) Agar OA yo'nalishining birlik vektorini \vec{N}_{OA} Orqali belgilasak, \vec{F} kuchining koordinata o'qlaridagi tashkil etuvchilari orqali quydagicha yoziladi.

$$\vec{F} = F \vec{n}_{AO} = F \frac{\vec{OA}}{OA} = 100 \left[\frac{3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2}} \right] = 100[0.424\vec{i} + 0.566\vec{j} + 0.707\vec{k}]$$

$$= 42.4\vec{i} + 56.6\vec{j} + 70.7\vec{k} (H)$$

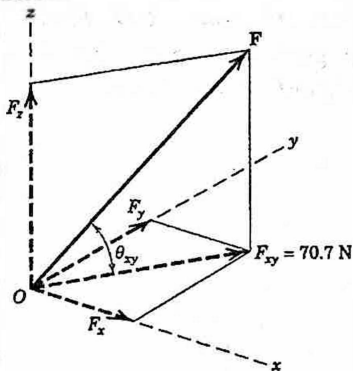
Demak f kuchning kardinati o'qlaridagi proeksalari quyidagilarga teng bo'lar ekan.

$$F_x = 42.4 H, F_y = 56.6 H, F_z = 70.7 H,$$

b) F kuch va o tekisligi o'rtasidagi burchakni aniqlaymiz.

$$\cos n_{xy} = \frac{\sqrt{3^2 + 4^2}}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2}} = 0.707$$

Buni e'tiborga olsak f kuchining o' tekislikdagi proeksasi quyidagiga teng boladi (6.24 – ras)



6.24- rasm.

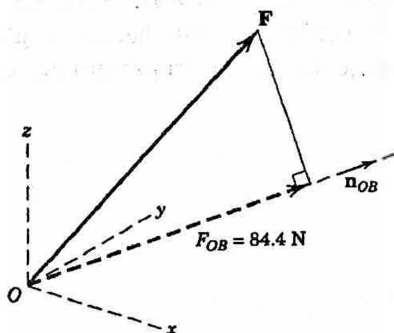
$$F_{xy} = F \cos n_{xy} = 100 * (0.707) = 70.7$$

v) OB yo'nalishining birining vektorining \vec{n}_{OB} orqali belgilasak y quyidagicha aniqlanadi

$$\vec{n}_{OB} = \frac{\vec{OB}}{OB} = \frac{6\vec{i} + 6\vec{j} + 2\vec{k}}{\sqrt{6^2 + 6^2 + 6^2}} = 0.688\vec{i} + 0.688\vec{j} + 0.229\vec{k}$$

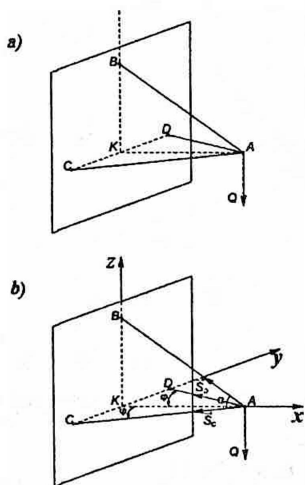
\vec{F} kuchning OB o'qidagi proeksasi quyidagiga teng bo'ladi

$$\begin{aligned} \vec{F}_{OB} &= F * \vec{n}_{OB} = [0.424\vec{i} + 0.566\vec{j} + 0.707\vec{k}] * [0.688\vec{i} + 0.688\vec{j} + 0.229\vec{k}] \\ &= (42.4) * (0.688) + (56.6) * (0.688) + (70.7) * (0.299) \\ &= 84.4 \text{ H} \end{aligned}$$



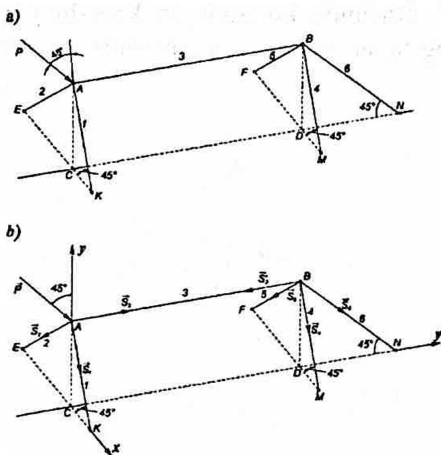
6.25 – rasm.

2 – masala. Og'irligi 180 N . bo'lgan Q yukni ushlab turuvchi AB trosdagi hamda AC va AD sterjenlardagi zo'riqishlar aniqlansin; $AB=170\text{ sm.}$, $AC=AD=100\text{ sm.}$ $CD=120\text{sm}$, $KC=KD$ va CDA uchburchak tekisligi gorizontal. Sterjenlar A , C va D nuqtalarda sharnir bilan biriktirilgan(6.26a,b – rasm).



6.26a,b - rasm.

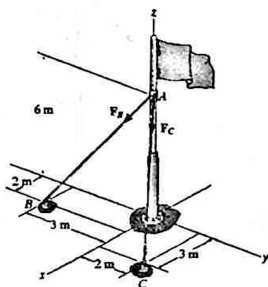
3– masala. Fazoviy ferma 1,2,3,4,5,6 sterjenlardan tuzilgan. P kuch $ABCD$ to'g'ri to'rtburchak tekisligidagi A tugunga ta'sir qiladi; bunda uning ta'sir chizig'i CA vertikal bilan 45° burchak tashkil qiladi. $\triangle EAK = \triangle FBM$. Teng yonli EAK , FBM va NDB uchburchaklarning A, B va D uchlaridagi burchaklar to'g'ri burchak. Agar $P=1\text{ kN}$ bo'lsa, sterjenlardagi zo'riqishlarning qiymatlari topilsin (6.27 – rasm).



6.28 – rasm.

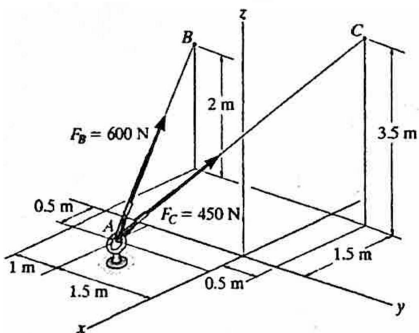
63-§. Mustaqil o‘rganish uchun talabalarga tavsiya etiladigan muammolar

Muammo-1. Flakshtukning muvozanat ta‘minlovchi kanatlardagi zo‘riqishlkar. Teng ta‘sir etuvchi kuchlarning miqdori va unung yonalishi aniqlansin (6.29 –rasm).



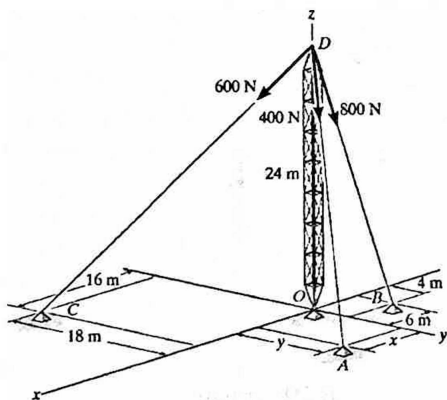
6.29 – rasm.

Muammo-2. Rasimda ko'rsatilgan kransteynga ta'sir etuvchi kuchlarning teng ta'sir etuvchanligi miqdori va yonalishi aniqlansin (6.30 – rasm).



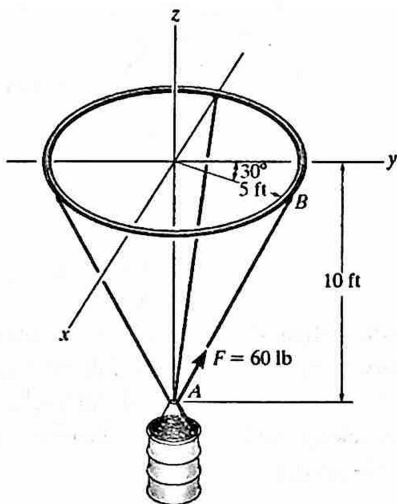
6.30- rasm.

Muammo-3. Bashnya 3 kanat yordamida muvozanatlaridagi ushlab turadi agar kanatlardagi ta'sirchanlik kuchlardagi miqdori berilgan bolsa (rasimga qarang) teng ta'sir etuvchi kuchning miqdori va yo'nalishi aniqlansin (6.31 – rasm).



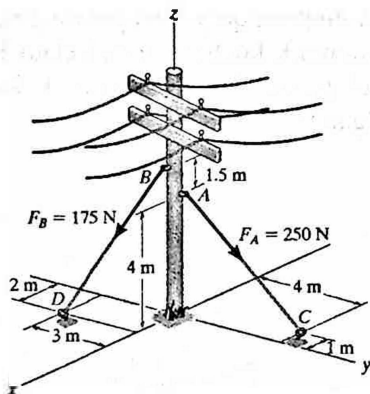
6.31- rasm.

Muammo -4. A nuqtaga qo'yilgan yukning og'irligi ta'sirida AB arqonda 60 funt taranglik kuchi yuzaga keladi F kuchining Dekart ardinata o'qlaridagi proeksalai aniqlansin. F kuch A nuqtadan B nuqta tomon yonalgan (6.32- rasm).



6.32 – rasm.

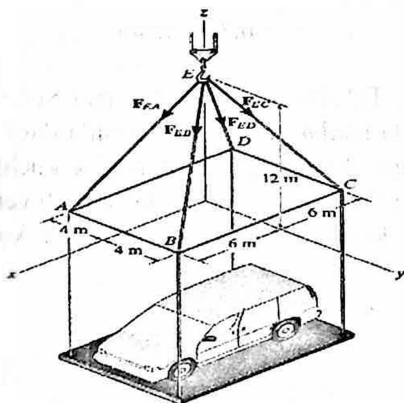
Muammo-5. Telefon stolbi muvozanat xolatida AS va BD arqonlar yordamida ushlab tushiladi. Arqonlardagi ta'sirchanlik kuchlari rasida oratilga. Arqondagi ta'sirchanlik kuchlarining teng ta'sir etuvchanligining Dekart o'qlaridagi tashkil etuvchilari aniqlansin. B va C nuqtalari koordinatalari ham rasimda ko'rsatilgan (6.33 – rasm).



6.33 – rasm

6.34

Muammo-6. Rasmda ko'rsatilgan mexanizm to'rt arqon yordamida muvozanat holatida ushlab turiladi. Har bir arqondagi taranglik kuchi 28 kN. Arqondagi taranglik kuchlarining Dekart o'qlaridagi proeksiyalari hamda ularning teng ta'sir etuvchisi aniqlansin (6.34- rasm).



6.34 -rasm.

64-§. Fazodagi kuchlar sistemasini sodda ko‘rinishga keltirishga oid masalalarni yechish uchun uslubiy ko‘rsatmalar

Fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasini sodda ko‘rinishga keltirishga doir masalalarni quyidagi tartibda yechish tavsiya etiladi:

1. Dekart koordinata o‘qlari o‘tkaziladi.
2. Keltirish markazi sifatida koordinata o‘qlari boshi sifatida tanlangan nuqta olinadi.
3. Quyidagi formulalar asosida kuchlar sistemasini bosh vektorining o‘qlardagi proyeksiyalari aniqlanadi:

$$R_x = \sum F_{kx}; \quad R_y = \sum F_{ky}; \quad R_z = \sum F_{kz}$$

4. Quyidagi formulalar asosida kuchlar sistemasini bosh vektorining moduli va uning yo‘nalishi aniqlanadi:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2};$$

$$\cos(\vec{R} \wedge \vec{i}) = \frac{R_x}{R}, \quad \cos(\vec{R} \wedge \vec{j}) = \frac{R_y}{R}, \quad \cos(\vec{R} \wedge \vec{k}) = \frac{R_z}{R},$$

$$\text{bunda} \quad \vec{R} = R_x \cdot \vec{i} + R_y \cdot \vec{j} + R_z \cdot \vec{k}.$$

5. Quyidagi formulalar asosida kuchlar sistemasini bosh momentining o‘qlardagi proyeksiyalari aniqlanadi:

$$M_x = \sum M_x(\vec{F}_k) \quad M_y = \sum M_y(\vec{F}_k) \quad M_z = \sum M_z(\vec{F}_k) \quad \text{yoki}$$

$$M_x = \sum (Y_k \cdot F_{kz} - Z_k \cdot F_{ky}), \quad M_y = \sum (Z_k \cdot F_{kx} - X_k \cdot F_{kz})$$

6. Fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasini bosh momentining moduli va yo‘nalishi quyidagi formulalar asosida aniqlanadi:

$$|\vec{M}_0| = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}$$

$$\cos(\vec{M}_0 \cdot \vec{i}) = \frac{M_x}{M_0}; \quad \cos(\vec{M}_0 \cdot \vec{j}) = \frac{M_y}{M_0}; \quad \cos(\vec{M}_0 \cdot \vec{k}) = \frac{M_z}{M_0}$$

7. Fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasini qanday sodda ko‘rinishga kelishi mumkinligi aniqlab olinadi:

a) Agar $\vec{R} = 0$, $\vec{M}_0 = 0$ bo‘lsa, fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar ta’siridagi jism muvozanat holatda bo‘ladi.

b) Agar $\vec{R} = 0$ bo‘lib, $\vec{M}_0 \neq 0$ bo‘lsa, fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasini momenti \vec{M}_0 bo‘lgan juft kuchga keltiriladi.

d) Agar $R \neq 0$ bo‘lib, $M_0 = 0$ bo‘lsa, fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasini $\vec{R} = \sum \vec{F}_k$ teng ta’sir etuvchi kuchga

keltiriladi. Teng ta'sir etuvchi kuchning ta'sir chizig'ining tenglamasi quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$\frac{x}{R_x} = \frac{y}{R_y} = \frac{z}{R_z}$$

bu ifodada R_x, R_y, R_z lar teng ta'sir etuvchi kuchlar koordinata o'qlaridagi proyeksiyalarga, x, y, z - teng ta'sir etuvchi kuch ta'sir chizig'ining koordinatalari.

e) Agar $R \neq 0$, $\vec{M}_0 \neq 0$ bo'lib, bosh vektor \vec{R} va bosh moment \vec{M}_0 o'zaro perpendikulyar vektorlar bo'lsa, ularning skalyar ko'paytmalari 0 ga teng bo'ladi:

$$R_x M_x + R_y M_y + R_z M_z = 0$$

Agar yuqoridagi shart bajarilsa, fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi \vec{R} teng ta'sir etuvchi kuchga keltiriladi.

Bunday holda teng ta'sir etuvchi kuchning - chizig'ining tenglamasi quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$\frac{M_x - yR_z + zR_y}{R_x} = \frac{M_y - zR_x + xR_z}{R_y} = \frac{M_z - xR_y - yR_x}{R_z}$$

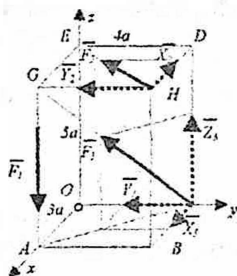
Agar

$$R_x M_x + R_y M_y + R_z M_z = 0$$

shart bajarilmasa kuchlar sistemasining bosh vektori \vec{R} va bosh momenti \vec{M}_0 o'zaro perpendikulyar bo'lmaydi va fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi kuch vinti dipollarga keltiriladi. Bunday holda ham markaziy o'q tenglamasi yuqoridagi ko'rinishda yoziladi.

65-§. Fazodagi kuchlar sistemasini sodda ko'rinishga keltirishga oid masalalar

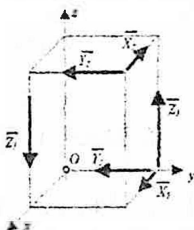
1-masala. Rasmda ko'rsatilgan parallelopipedga ta'sir ko'rsatuvchi fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasining O nuqtaga nisbatan hisoblangan bosh momenti aniqlansin.



6.35-rasm.

Berilgan: $F_1 = 9F$, $F_2 = 5F$, $F_3 = 10\sqrt{2}F$

Yechimi: 1. \vec{F}_2 kuchni parallelipedning ikki qirralari, \vec{F}_3 kuchni esa uch qirralari bo'yicha yo'nalgan tashkil etuvchilarga ajratamiz.



6.36-rasm.

$$X_2 = F_2 \frac{HD}{HE} = 5F \frac{3a}{5a} = 3F;$$

$$Y_2 = F_2 \frac{HG}{HE} = 5F \cdot \frac{4a}{5a} = 4F;$$

$$X_3 = F_3 \frac{CB}{CG} = 10\sqrt{2} F \frac{3a}{5\sqrt{2} a} = 6F;$$

$$Y_3 = F_3 \frac{CO}{CG} = 10\sqrt{2} F \frac{4a}{5\sqrt{2} a} = 8F;$$

$$Z_3 = F_3 \frac{CD}{CG} = 10\sqrt{2} F \frac{5a}{5\sqrt{2} a} = 10F;$$

2. Xosil bo'lgan fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi bosh momentining koordinata o'qlaridagi tashkil etuvchilarini aniqlaymiz.

$$M_x = Y_2 \cdot l_z + Z_3 \cdot l_y = 4F \cdot 5a + 10F \cdot 4a = 60F_a$$

$$M_y = Z_1 \cdot l_x - X_2 \cdot l_z = 9F \cdot 3a \cdot 5a = -12F_a$$

$$M_z = X_3 \cdot l_y = -6F \cdot 4a = -24F_a$$

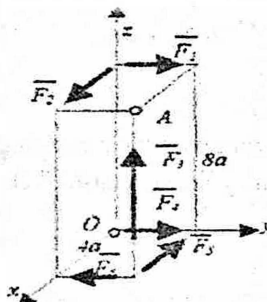
Bosh moment moduli va uning yo'nalishi quyidagicha aniqlanadi:

$$M_0 = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = 69.7F_a$$

$$\cos(\vec{M}_0 \cdot \vec{i}) = \frac{M_x}{M_0} = 0.87$$

$$\cos(\vec{M}_0 \cdot \vec{j}) = \frac{M_y}{M_0} = 0.17, \quad \cos(\vec{M}_0 \cdot \vec{k}) = \frac{M_z}{M_0} = 0.34$$

2-masala. Parallelopiped qirralariga qo'yilgan fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasini sodda ko'rishga keltiring.



6.34-rasm.

Berilgan: $F_1=3F$, $F_2=F$, $F_3=5F$, $F_4=3F$, $F_5=4F$, $F_6=2F$.

Yechimi: Teng ta'sir etuvchi kuchning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalarini aniqlaymiz:

$$R_x = \sum X_i = F_2 - F_5 = -3F$$

$$R_y = \sum Y_i = F_1 + F_4 - F_3 = 4F$$

$$R_z = \sum Z_i = F_3 = 5F$$

Berilgan kuchlar sistemasining O nuqtaga nisbatan bosh vektori (moduli) ham quyidagicha ifodalanadi:

$$R = F\sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} = 7.07F$$

Berilgan fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasining koordinata o'qlariga nisbatan momentlarining yig'indisini aniqlaymiz.

$$M_x = \sum M_{xi} = -F_1 \cdot 8a + F_2 \cdot 2a = -14F_a$$

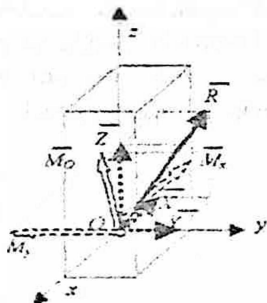
$$M_y = \sum M_{yi} = F_2 \cdot 8a - F_3 \cdot 4a = -12F_a$$

$$M_z = \sum M_{zi} = F_5 \cdot 2a - F_6 \cdot 4a = 0$$

Berilgan kuchlar sistemasining O nuqtaga nisbatan bosh momenti quyidagicha ifodalanadi:

$$\vec{M}_0 = -14F_a \cdot \vec{i} - 12F_a \cdot \vec{j}$$

Masala shartida berilgan fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasini O nuqtaga keltirganda quyidagi sodda ko‘rinishga keladi:

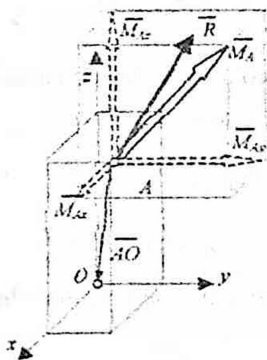


6.35-rasm.

Masala shartida berilgan kuchlar sistemasini A nuqtaga keltirganda kuchlar sistemasining bosh momenti quyidagi formulalar asosida aniqlanadi:

$$\vec{M}_A = \vec{M}_O + \vec{AO} \times \vec{R} = -14F_a \vec{i} - 12F_a \vec{j} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4_a & -2_a & -8_a \\ -3F & 4F & 5F \end{vmatrix} = 6F_a \vec{i} + 32F_a \vec{j} + 22F_a \vec{k}$$

Kuchlar sistemasini A nuqtaga keltirganda qanday sodda ko‘rinishga kelishi 6.36-rasmda ko‘rsatilgan.



6.36-rasm.

3-masala. Qirralarining uzunligi $a=5\text{sm}$ bo'lgan kubning uchlariga har qaysisi 2 N bo'lgan oltita o'zaro teng kuchlar rasmda ko'rsatilganidek qilib qo'yilgan. Shu sistema soddalashtirilsin (6.37a-rasm).

Yechish: Kuchlar sistemasini sodda ko'rinishga keltirish uchun koordinata o'qlarini rasmdagidek o'tkazib, bosh vektor \vec{R} va bosh moment \vec{M}_0 ning koordinata o'qlaridagi proeksiyalarini aniqlaymiz:

$$R_x = \sum F_{ix} = F_2 - F_5 = 0$$

$$R_y = \sum F_{iy} = F_3 - F_6 = 0$$

$$R_z = \sum F_{iz} = -F_1 + F_4 = 0$$

$$M_{0x} = \sum M_x(\vec{F}_i) = aF_4 + aF_6 = 20\text{ N}\cdot\text{sm}.$$

$$M_{0y} = \sum M_y(\vec{F}_i) = -aF_4 - aF_5 = -20\text{ N}\cdot\text{sm}.$$

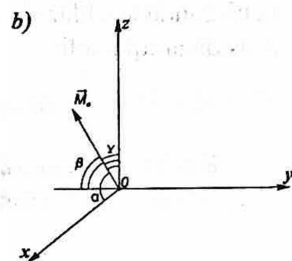
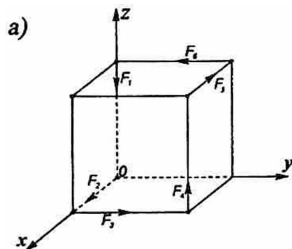
$$M_{0z} = \sum M_z(\vec{F}_i) = aF_3 + aF_5 = 20\text{ N}\cdot\text{sm}.$$

Bosh vektor va bosh moment modulini aniqlaymiz:

$$R = 0,$$

$$M_0 = \sqrt{M_{0x}^2 + M_{0y}^2 + M_{0z}^2} = 20\sqrt{3}\text{ N}\cdot\text{sm}.$$

Demak, berilgan kuchlar sistemasini momentining vektori \vec{M}_0 bo'lgan juft kuchga keltirilgan ekan. Juft kuch momentining vektori \vec{M}_0 koordinata o'qlari bilan α , β , γ burchaklarni hosil qiladi. (6.37b-rasm).



6.37a,b-rasm.

Burchaklarning kosinuslari quyidagicha aniqlanadi:

$$\cos \alpha = \frac{M_{0x}}{M_0} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

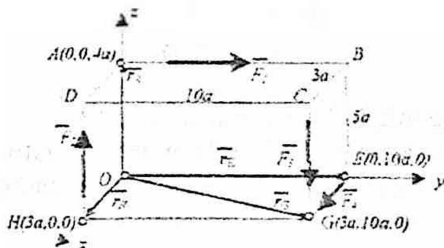
$$\cos \beta = \frac{M_{0y}}{M_0} = -\frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\cos \gamma = \frac{M_{0z}}{M_0} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Bu burchaklar orqali bosh moment yo'nalishi aniqlanadi.

66-§. Mustaqil o'rganish uchun talabalarga tavsifa etiladigan muammolar

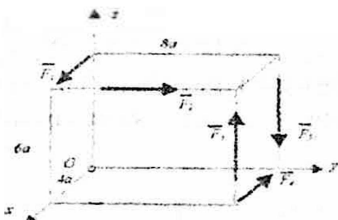
Muammo-1. Rasmda ko'rsatilgan fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasining O nuqtaga nisbatan bosh momenti hisoblansin (6.38 – rasm)



6.38-rasm.

$$F_1 = 2F, \quad F_2 = 4F, \quad F_3 = F, \quad F_4 = 3F$$

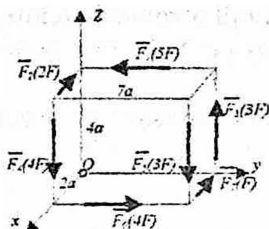
Muammo-2. Rasmda ko'rsatilgan fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasining koordinatalar sistemasining boshi O nuqtaga nisbatan bosh momenti aniqlansin (6.39 – rasm).



6.39- rasm.

$$F_1 = 5F; \quad F_2 = 3F; \quad F_3 = 6F; \quad F_4 = F; \quad F_5 = 2F$$

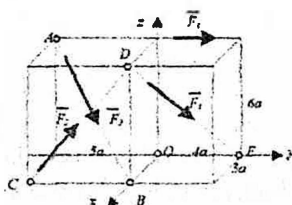
Muammo-3. Rasmda ko'rsatilgan fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasining koordinatalar sistemasining boshi O nuqtaga nisbatan bosh momenti aniqlansin (6.40 – rasm).



6.40-rasm.

Kuchlarning miqdorlari rasmda ko'rsatilgan.

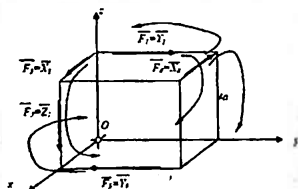
Muammo-4. Rasmda ko'rsatilgan fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasining O nuqtaga nisbatan bosh momenti hisoblansin (6.41- rasm).



6.41-rasm.

$$F_1 = 4F; F_2 = 2\sqrt{61}F; F_3 = 3\sqrt{70}F; F_4 = 3\sqrt{61}F.$$

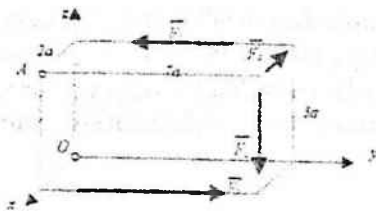
Muammo-5. Rasmda ko'rsatilgan fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasining O nuqtaga nisbatan bosh momenti hisoblansin (6.42- rasm).



6.42-rasm.

$$F_1 = 2F; F_2 = F; F_3 = 3F; F_4 = 2F; F_5 = 4F.$$

Muammo-6. Rasmda ko'rsatilgan fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasini O va A nuqtalarga kiriting (6.43 - rasm).



6.43 – rasm.

$$F_1 = 4F; F_2 = 3F; F_3 = 5F; F_4 = F.$$

67-§. Fazodagi kuchlar sistemasining muvozanatiga oid masalalarni yechish uchun uslubiy ko'rsatmalar

Fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasining muvozanatiga doir masalalarni quyidagi tartibda yechish tavsiya etiladi.

- 1) Muvozanati o'rganilayotgan jism (yoki nuqta) aniqlanadi;
- 2) Koordinatalar sistemasi tanlab olinadi;
- 3) Jismga ta'sir etayotgan, berilgan kuchlar ko'rsatiladi;
- 4) Jismni bog'lanishlardan bo'shatib, ularning ta'sirlari bog'lanish reaksiya kuchlari bilan almashtiriladi;
- 5) Muvozanati o'rganilayotgan jism berilgan kuchlar va bog'lanishlar reaksiya kuchlari ta'siridagi erkin jism deb qaraladi;
- 6) Berilgan masala statik aniq masala ekanligi tekshiriladi, ya'ni masaladagi algebraik noma'lum kattaliklar soni oltitadan oshmasligi lozim.

Izoh: agar qattiq jismga ta'sir etuvchi kuchlar fazoda kesishuvchi yoki fazodagi parallel kuchlar sistemasini tashkil etsa, masaladagi noma'lum algebraik kattaliklar soni uchtadan oshmasligi lozim.

7) Koordinata o'qlarining yo'nalishlari tanlab olinadi.

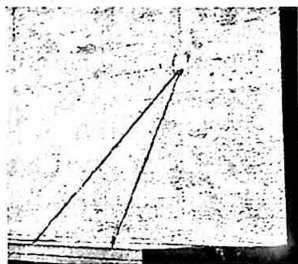
8) Qattiq jismga qo'yilgan fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi uchun oltita muvozanat tenglamalari tuziladi. Bunda tenglamalarning birinchi uchtasi proeksiyalar, oxirgi uchtasi momentlar tenglamalari deyiladi. Proeksiyalar tenglamalari kuchlar sistemasi bosh vektorining momentlar tenglamalari esa kuchlar sistemasi bosh momentning nolga teng bo'lishini ta'minlaydi.

Izoh: Agar qattiq jismga ta'sir etuvchi kuchlar fazoda kesishuvchi yoki fazodagi parallel kuchlar sistemasini tashkil etsa, ularning muvozanatini ifodalovchi uchtadan tenglamalar tuziladi.

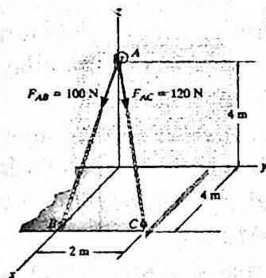
9) Tuzilgan muvozanat tenglamalarini yechib, noma'lum kattaliklar aniqlanadi.

68-§. Fazodagi kuchlar sistemasining muvozanatiga oid masalalar

1- masala. Imorat ayvonning tomi vertikal devorning A nuqtasiga mahkamlangan BA va CA arqonlar yordamida ushlab turiladi. Agar arqonlardagi taranglik kuchlari $F_{AB}=100\text{ N}$, $F_{AC}=120\text{ N}$ bo'lsa devorning A nuqtaga ta'sir etadigan teng ta'sir etuvchi kuch aniqlansin. (6.44-rasm)



6.44-rasm.



6.45-rasm.

Yechish. AB va AC arqonlardagi taranglik kuchlarining teng ta'sir etuvchisini Dekart o'qlaridagi tashkil etuvchilari orqali aniqlaymiz. 6.45-rasmdan A nuqtadan B nuqta tomon yurganda

$$\vec{r}_{AB} = [4\vec{i} - 4\vec{k}]m$$

$$r_{AB} = \sqrt{(4m)^2 + (-4m)^2} = 5.66m$$

Natijada \vec{F}_{AB} quyidagicha yoziladi:

$$\vec{F}_{AB} = F_{AB} \frac{\vec{r}_{AB}}{r_{AB}} = (100N) \left(\frac{4\vec{i}}{5.66} - \frac{4\vec{k}}{5.66} \right)$$

Bundan
$$\vec{F}_{AB} = [70.7\vec{i} - 70.7\vec{k}]N$$

Agar A nuqtadan C nuqta tomon yursak

$$\vec{r}_{AC} = \left[4\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k} \right]$$

$$r_{AC} = \sqrt{(4m)^2 + (2m)^2 + (-4m)^2} = 6m$$

Natijada

$$\vec{F}_{AC} = F_{AC} \left(\frac{\vec{r}_{AC}}{r_{AC}} \right) = (120N) \left(\frac{4}{6}\vec{i} + \frac{2}{6}\vec{j} - \frac{4}{6}\vec{k} \right) = \left[80\vec{i} + 40\vec{j} - 80\vec{k} \right] N$$

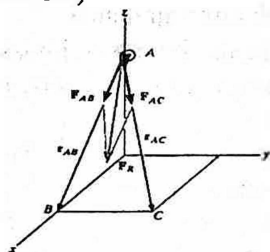
\vec{F}_{AC} va \vec{F}_{AB} larning qiymatlarini e'tiborga olsak, teng ta'sir etuvchi kuch quyidagicha aniqlanadi:

$$\vec{R} = \vec{F}_{AB} + \vec{F}_{AC} = \left[70.7\vec{i} - 70.7\vec{k} \right] N + \left[80\vec{i} + 40\vec{j} - 80\vec{k} \right] N = \left[151\vec{i} + 40\vec{j} - 151\vec{k} \right] N$$

Teng ta'sir etuvchining moduli esa quyidagiga teng bo'ladi:

$$R = \sqrt{(151N)^2 + (40N)^2 + (-151N)^2} = 217.2N$$

Teng ta'sir etuvchi kuch grafik usulida ham aniqlanishi mumkin. (6.46-rasm)



6.46-rasm.

$$\vec{R} = \vec{F}_{AB} + \vec{F}_{AC}$$

Teng ta'sir etuvchi kuch \vec{F}_{AC} va \vec{F}_{AB} lardan qurilgan parallelogramm diagonali orqali ifodalanadi.

2-masala. AB aylanish o'qi vertikal bo'lgan to'g'ri burchakli eshik $CAD=60^\circ$ burchakka ochilgan. Uni shu vaziyatda ikki arqon ushlab turadi: ulardan biri – CD arqon blokdan o'tkazilgan bo'lib, uni $P=320 N$ yuk tortib turadi, ikkinchisi EF arqon polning F nuqtasiga bog'langan. Eshikning og'irligi $640 N$; uning eni $AD=AC=1,8 m$; balandligi $AB=2,4 m$. Blokdagi ishqalanishni hisobga olmay, EF arqonning tortilish kuchi T hamda A nuqtadagi silindrik sharnirning va B nuqtadagi podpyatnikning reaksiyalari aniqlansin (6.47 a-rasm).

Yechish.

Eshikning muvozanatini o'rganamiz. Unga $P=320\text{ N}$, bo'lgan yuk hamda eshik og'irlik kuchi \bar{G} ta'sir etadi. Eshik uchun CD , EF arqonlar, A nuqtadagi silindrik sharnir va B nuqtadagi podpyatnik bog'lanishlar hisoblanadi. Bog'lanishlardan bo'shatish prinsipiga ko'ra, bog'lanishlarning eshikka ta'sirini bog'lanishlar reaksiya kuchlari bilan almashtiramiz:

- SD arqondagi taranglik kuchi $T_D = P$ bo'lib, u eshikning C nuqtasiga qo'yiladi va CD arqon bo'ylab yo'naladi;

- EF arqon taranglik kuchi \bar{T}_F eshik E nuqtasiga qo'yiladi va EF arqon bo'ylab yo'naladi;

- A silindrik sharnir reaksiyasining yo'nalishi oldindan noma'lum bo'lganligi uchun uni koordinata o'qlarining musbat yo'nalishi bo'ylab yo'nalgan \bar{X}_A , \bar{Y}_A tashkil etuvchilarga ajratamiz;

- B podpyatnik reaksiyasining yo'nalishi ham oldindan noma'lum bo'lganligi uchun uni koordinata o'qlarining musbat yo'nalishi bo'ylab yo'nalgan \bar{X}_B , \bar{Y}_B , \bar{Z}_B tashkil etuvchilarga ajratamiz.

Natijada eshikka ta'sir qiluvchi fazoda ixtiyoriy joylashgan (\bar{P} , \bar{G} , \bar{T}_F , \bar{X}_A , \bar{Y}_A , X_B , Y_B , Z_B) kuchlar sistemasiga ega bo'lamiz (4 b-rasm).

Koordinata o'qlarini rasmdagidek o'tkazib, hosil bo'lgan kuchlar sistemasining muvozanat tenglamalarini tuzamiz:

$$\sum X_i = 0 \quad X_A + X_B - P \cdot \cos 30^\circ = 0, \quad (1)$$

$$\sum Y_i = 0 \quad Y_A + Y_B - T_F + P \cdot \cos 60^\circ = 0, \quad (2)$$

$$\sum Z_i = 0 \quad Z_B - G = 0. \quad (3)$$

$$\sum M_x(\bar{F}_i) = 0 \quad -Y_A \cdot AB - P \cdot \cos 60^\circ \cdot AB - G \cdot BK = 0, \quad (4)$$

$$\sum M_y(\bar{F}_i) = 0 \quad X_A \cdot AB - P \cdot \cos 30^\circ \cdot AB + G \cdot KL = 0, \quad (5)$$

$$\sum M_z(\bar{F}_i) = 0 \quad -T_F \cdot BF + P \cdot AN = 0. \quad (6)$$

Tenglamalardagi noma'lum masofalarni aniqlaymiz:

$$\triangle BEF \text{ dan } BF = BE \cdot \sin 60^\circ =$$

$$= 1,8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1,8 \cdot 0,86 = 1,56 \text{ m.}$$

$$\triangle BKL \text{ dan } BK = BL \cdot \cos 60^\circ =$$

$$= 0,9 \cdot \frac{1}{2} = 0,45 \text{ m.}$$

$$KL = BL \cdot \sin 60^\circ = 0,9 \cdot 0,86 = 0,77 \text{ m.}$$

$$\Delta ADN \text{ dan } AN = AD \cdot \sin 60^\circ = 1,8 \cdot 0,86 = 1,56 \text{ m.}$$

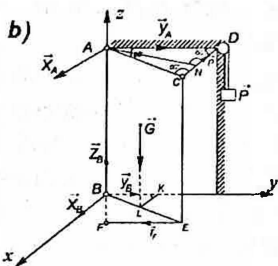
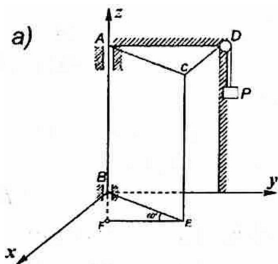
Topilgan noma'lum masofalardan foydalanib, tenglamalardagi noma'lum kattaliklarni aniqlaymiz:

(3) tenglamadan:

$$Z_B = G = 640 \text{ N}$$

(4) tenglamadan:

$$Y_A = \frac{-P \cdot \cos 60^\circ \cdot AB - G \cdot BK}{AB} = \frac{-320 \cdot 1,2 - 640 \cdot 0,45}{2,4} = -280 \text{ N}$$



6.47a,b-rasm.

(3) tenglamadan:

$$X_A = \frac{P \cdot \cos 30^\circ \cdot AB - G \cdot KL}{AB} = \frac{320 \cdot 0,86 \cdot 2,4 - 640 \cdot 0,77}{2,4} = 69,9 \text{ N.}$$

(1) tenglamadan:

$$X_B = P \cdot \cos 30^\circ - X_A = 320 \cdot 0,86 - 69 = 208 \text{ N.}$$

(4) tenglamadan:

$$T_F = \frac{P \cdot AN}{BF} = \frac{320 \cdot 1,56}{1,56} = 320 \text{ N.}$$

(2) tenglamadan:

$$Y_B = T_F - P \cdot \cos 60^\circ - Y_A = 320 - 320 \cdot \frac{1}{2} + 280 = 440 \text{ N.}$$

Javoblar

$$X_A = 69,9 \text{ N}; X_B = 208 \text{ N}; Y_A = -280 \text{ N}; Y_B = 440 \text{ N}; T_F = 320 \text{ N}; Z_B = 640 \text{ N.}$$

3- *masala*. Rasmda ko'rsatilgan konstruksiyaning tayanch reaksiyalari aniqlansin (6.48a-rasm).

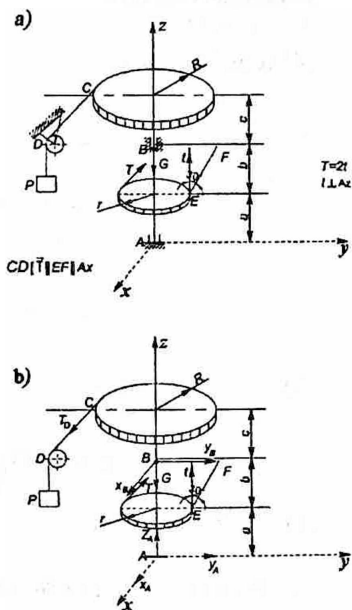
Berilgan:

$T = 2t$; $T = 4 \text{ kN}$; $G = 3 \text{ kN}$; $a = c = 0,1 \text{ m}$; $b = 0,2 \text{ m}$; $R = 0,15 \text{ m}$; $r = 0,1 \text{ m}$.

$CD \parallel \vec{T} \parallel EF \parallel AX$, $\vec{t} \perp Az$.

Yechish. Konstruksiyaning muvozanatini o'rganamiz. Konstruksiyaga \vec{G} og'irlik kuchi hamda \vec{t} , \vec{i} , \vec{p} kuchlar ta'sir etadi. Konstruksiya A nuqtada podpyatnikka (sferik shar-nirga) tayanadi, B nuqtada podshipnik yordamida ushlab turiladi. Podpyatnik va podshipnik konstruksiya uchun bog'lanishlar hisoblanadi. Ularning konstruksiyaga ta'sirini, bog'lanishlardan bo'shatish prinsipiga asosan, bog'lanishlar reaksiya kuchlari X_A, Y_A, Z_A, X_B, Y_B bilan almashtiramiz. \vec{p} kuch tufayli D blokdan o'tkazilgan ipdagi taranglik kuchini T_D bilan belgilaymiz.

Natijada, konstruksiyaga tasir etuvchi fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasiga ega bo'lamiz (6.48b-rasm).



6.48a,b-rasm.

Hosil bo'lgan kuchlar sistemasi uchun muvozanat tenglamalarini tuzamiz. Kuchlarning koordinata o'qlariga proeksiyalari tenglamalari:

$$\sum X_i = 0 \quad X_A + X_B + T_D - T - t \cdot \cos 30^\circ = 0; \quad (1)$$

$$\sum Y_i = 0 \quad Y_A + Y_B - t \cdot \sin 30^\circ = 0; \quad (2)$$

$$\sum Z_i = 0 \quad Z_A - G = 0. \quad (3)$$

Kuchlarning koordinata o'qlariga nisbatan momentlari tenglamalarini tuzamiz. Natijada, koordinata o'qlariga nisbatan momentlar tenglamalarini tuzishni osonlashtiradigan quyidagi 5 v, 5 g, 5 d rasmlarga ega bo'lamiz.

Kuchlarning koordinata o'qlariga nisbatan momentlari tenglamalari quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$\sum M_x(\vec{F}_i) = 0 \quad -Y_B(a+b) + t \cdot \sin 30^\circ \cdot a = 0; \quad (4)$$

$$\sum M_y(\vec{F}_i) = 0 \quad X_B(a+b) - t \cdot \cos 30^\circ \cdot a - T \cdot a + T_D(a+b+c) = 0; \quad (5)$$

$$\sum M_z(\vec{F}_i) = 0 \quad -T \cdot r + t \cdot \cos 30^\circ \cdot r + T_D \cdot R = 0. \quad (6)$$

Muvozanat tenglamalarini yechib, noma'lum kattaliklarni aniqlaymiz.

(6) tenglamadan:

$$T_D = \frac{T \cdot r - t \cdot r \cdot \cos 30^\circ}{R} = \frac{4 \cdot 0,1 - 2 \cdot 0,1 \cdot 0,866}{0,15} = 1,51 \text{ kN}.$$

(5) tenglamadan:

$$X_B = \frac{t \cos 30^\circ \cdot a + T \cdot a - T_D(a+b+c)}{a+b} = \frac{2 \cdot 0,86 \cdot 0,1 + 4 \cdot 0,1 - 1,51 \cdot 0,4}{0,3} = 0,8 \text{ kN}.$$

(4) tenglamadan:

$$Y_B = \frac{t \cdot \sin 30^\circ \cdot a}{a+b} = \frac{2 \cdot 0,5 \cdot 0,1}{0,3} = \frac{0,1}{0,3} = 0,33 \text{ kN}.$$

(3) tenglamadan:

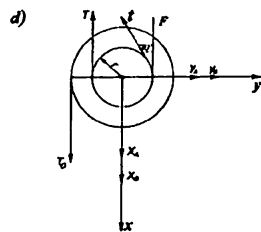
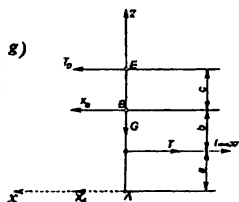
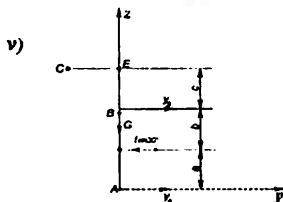
$$Z_A = G = 3 \text{ kN}.$$

(2) tenglamadan:

$$Y_A = t \cdot \sin 30^\circ - Y_B = 2 \cdot 0,5 - 0,33 = 0,67 \text{ kN}.$$

(1) tenglamadan:

$$X_A = T + t \cos 30^\circ - T_D - X_B = 4 + 2 \cdot 0,86 - 1,51 + 0,1 = 4,1 \text{ kN}.$$



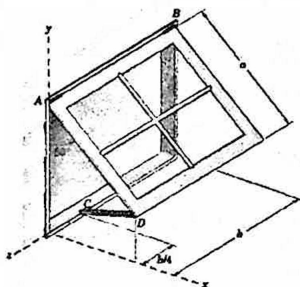
6.48 v, g, d-rasm.

Javoblar:

$$X_A = 4,1 \text{ kN}; X_B = -0,1 \text{ kN}; Y_A = 0,67 \text{ kN}; Y_B = 0,33 \text{ kN}; \\ Z_A = 3 \text{ kN}; T_D = 1,51 \text{ kN}.$$

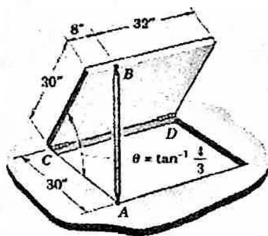
69-§. Mustaqil o'rganish uchun talabalarga tavsiya etiladigan muammolar

Muammo-1. A va B sharnirlarga o'rnatilgan rom rasmda ko'rsatilgan holatda CD tirgak prqali ushlab turiladi. Rom va devor orasidagi burchak 50° , rom og'irligi 50 kg bo'lib, u rom massa markaziga qo'yilgan. Agar $a=0.8 \text{ m}$, $b=1.2 \text{ m}$ tirgakdagi zo'riqish va A, B tayanchlar reaksiyalari aniqlansin. (6.49-rasm)



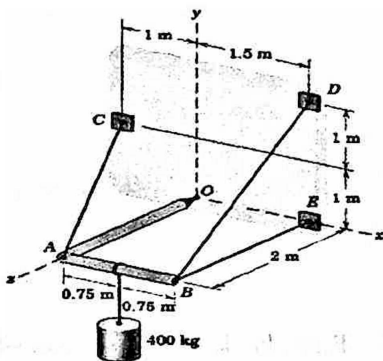
6.49-rasm.

Muammo-2. Rasmda ko'rsatilgan qurilmada AB tirgakdagi zo'riqish va D, C silindrik sharnirdagi reaksiya kuchlari aniqlansin. Qurilma qopqog'ining og'irligi 20 N (6.50-rasm)



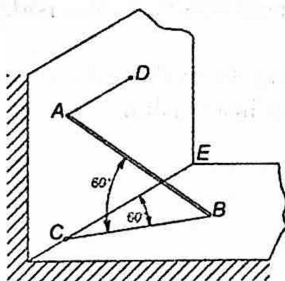
6.51-rasm.

Muammo -3. Rasmda ko'rsatilgan mehanizmda og'irligi 400 kg bo'lgan yuk AC, BD, BE trosslar yordamida muvozanat holatida turibdi. Trosslardagi zo'riqishlar va O nuqtadagi reaksiya kuchlari aniqlansin. O'lchamlar rasmda ko'rsatilgan (6.52-rasm).

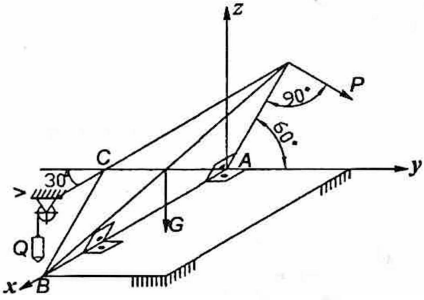
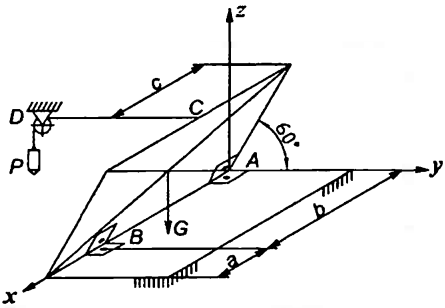


6.52-rasm.

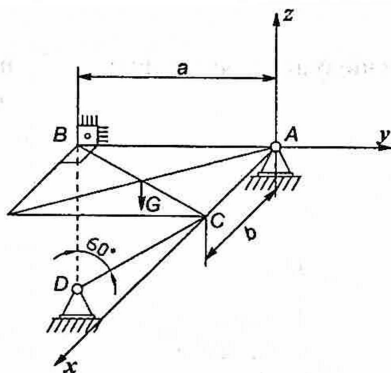
Muammo-4. AB sterjenni ikkita gorizontaal AD va BC arqonlar qiya holda ushlab turadi. Bunda sterjen A nuqtada vertikal devorga, B nuqtada esa gorizontaal polga tiralgan. D nuqta ham vertikal devorda yotadi. A va C nuqtalar bir vertikal chiziqda yotadi. Sterjenning og'irligi 8 N. A va B nuqtalardagi ishqalanish hisobga olinmasin. Sterjenning muvozanat holatda qolishi mumkinligi tekshirilsin va arqonlarning T_A va T_B tortilish kuchlari hamda tayanch tekisliklarning reaksiyalari aniqlansin; $\angle ABC = \angle BCE = 60^\circ$ (6.53-rasm)



6.53-rasm.

Variant raqamlari	Konstruksiyaning sxemalari	Hisoblash uchun kerakli ma'lumotlar
1	2	3
1.		$Q = 8 \text{ kN}$ $G = 4 \text{ kN}$ $CD \perp Ax$ $P \perp Ax$
2.		$G = 2 \text{ kN}$ $a = 10 \text{ sm}$ $b = 30 \text{ sm}$ $c = 20 \text{ sm}$ $CD \parallel Ax$

3.

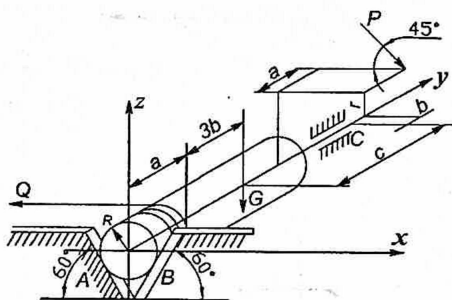


$$G = 20 \text{ kN}$$

$$a = 60 \text{ sm}$$

$$b = 30 \text{ sm}$$

4.



$$Q = 20 \text{ kN}$$

$$G = 10 \text{ kN}$$

$$a = 30 \text{ sm}$$

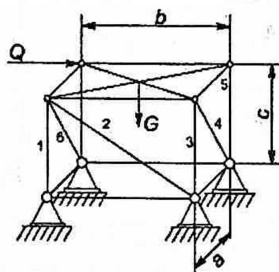
$$b = 10 \text{ sm}$$

$$c = 50 \text{ sm}$$

$$R = 10 \text{ sm}$$

$$r = 15 \text{ sm}$$

5.



$$Q = 40 \text{ kN}$$

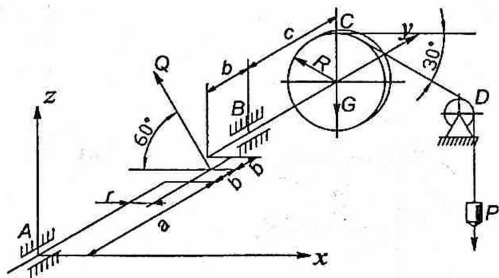
$$G = 36 \text{ kN}$$

$$a = 400 \text{ sm}$$

$$b = 400 \text{ sm}$$

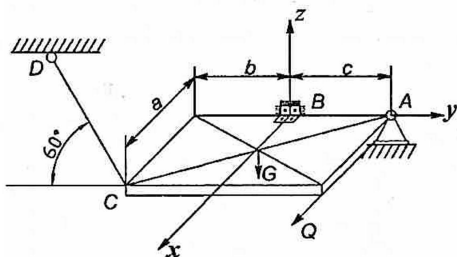
$$c = 450 \text{ sm}$$

6.



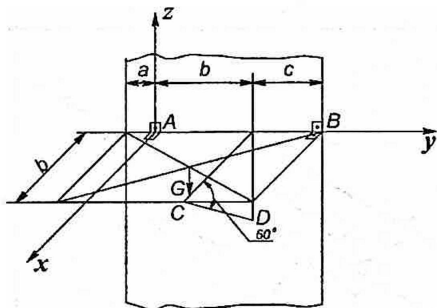
$Q = 6 \text{ kN}$
 $G = 4 \text{ kN}$
 $a = 30 \text{ sm}$
 $b = 10 \text{ sm}$
 $c = 20 \text{ sm}$
 $R = 10 \text{ sm}$
 $r = 5 \text{ sm}$
 $\vec{Q} \perp Ay$
 $CD \perp Ay$

7.



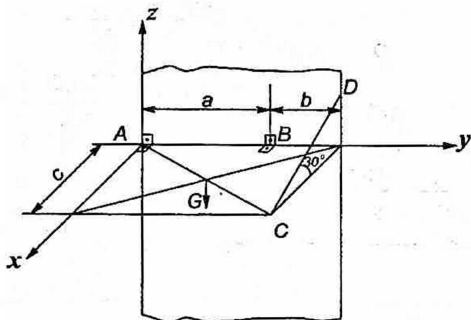
$Q = 10 \text{ kN}$
 $G = 4 \text{ kN}$
 $a = 60 \text{ sm}$
 $b = 40 \text{ sm}$
 $c = 60 \text{ sm}$
 $CD \perp Bx$
 $Q \parallel Bx$

8.



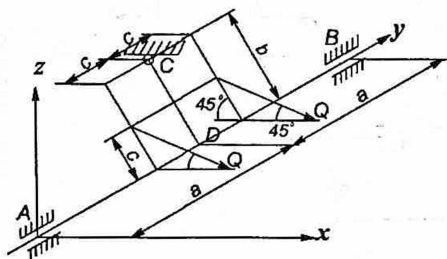
$G = 10 \text{ kN}$
 $a = 40 \text{ sm}$
 $b = 100 \text{ sm}$
 $c = 60 \text{ sm}$
 $CD \perp Ay$

9.



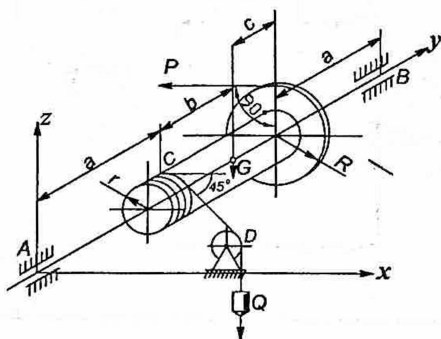
$G = 8 \text{ kN}$
 $a = 80 \text{ sm}$
 $b = 60 \text{ sm}$
 $c = 100 \text{ sm}$
 $CD \perp Ay$

10.



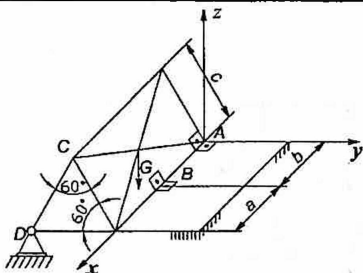
$G = 8 \text{ kN}$
 $a = 60 \text{ sm}$
 $b = 40 \text{ sm}$
 $c = 20 \text{ sm}$
 $\vec{Q} \perp Ay$
 $CD \perp Ay$

11.



$Q = 4 \text{ kN}$
 $G = 30 \text{ kN}$
 $a = 40 \text{ sm}$
 $b = 60 \text{ sm}$
 $c = 20 \text{ sm}$
 $R = 30 \text{ sm}$
 $r = 10 \text{ sm}$
 $\vec{P} \parallel Ay$
 $CD \perp Ay$

12.



$$G = 6 \text{ kN}$$

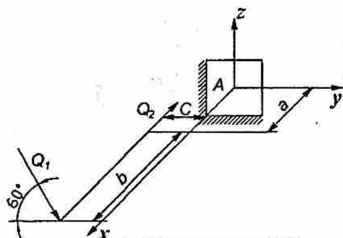
$$a = 50 \text{ sm}$$

$$b = 50 \text{ sm}$$

$$c = 60 \text{ sm}$$

$$CD \perp Ax$$

13.



$$Q = 20 \text{ kN}$$

$$a = 100 \text{ sm}$$

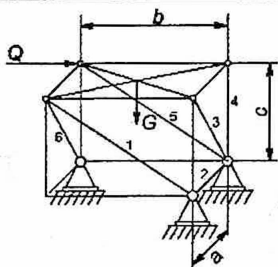
$$b = 60 \text{ sm}$$

$$c = 100 \text{ sm}$$

$$\vec{Q}_1 \perp Ax$$

$$Q_1 = Q_2 = Q$$

14.



$$Q = 70 \text{ kN}$$

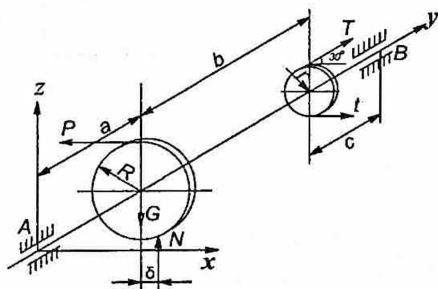
$$G = 64 \text{ kN}$$

$$a = 200 \text{ sm}$$

$$b = 100 \text{ sm}$$

$$c = 100 \text{ sm}$$

15.



$$T = 4 \text{ kN}$$

$$G = 2 \text{ kN}$$

$$a = 40 \text{ sm}$$

$$b = 60 \text{ sm}$$

$$c = 30 \text{ sm}$$

$$R = 30 \text{ sm}$$

$$r = 20 \text{ sm}$$

$$\varepsilon = 5 \cdot 10^{-3} R$$

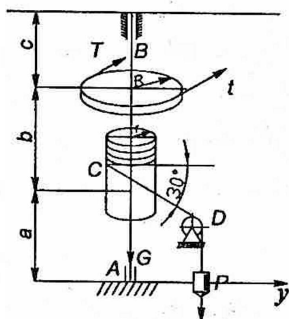
$$T = 2t, \vec{T} \perp Ay$$

$$\vec{P}, \vec{\varepsilon} \parallel Ax$$

$$\vec{N} \parallel Az,$$

$$N = 2G$$

16.



$$T = 4 \text{ kN}$$

$$G = 2 \text{ kN}$$

$$a = 30 \text{ sm}$$

$$b = 90 \text{ sm}$$

$$c = 20 \text{ sm}$$

$$R = 30 \text{ sm}$$

$$r = 10 \text{ sm}$$

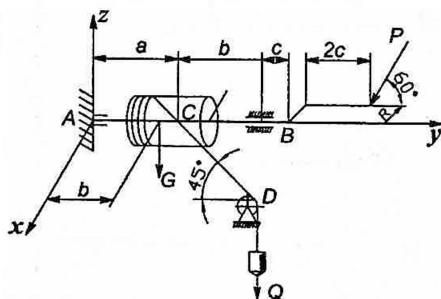
$$T = 2t$$

$$\vec{T} \parallel \vec{t}$$

$$CD \perp Az$$

$$\vec{T} \parallel Ax$$

17.



$$Q = 8 \text{ kN}$$

$$G = 2 \text{ kN}$$

$$a = 50 \text{ sm}$$

$$b = 40 \text{ sm}$$

$$c = 16 \text{ sm}$$

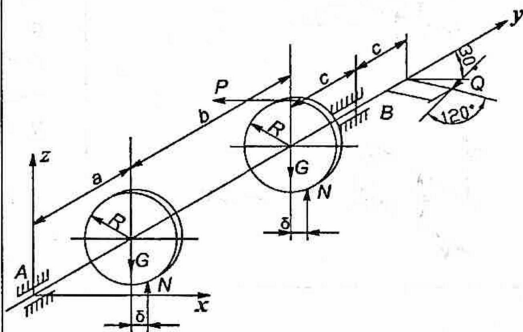
$$R = 30 \text{ sm}$$

$$r = 20 \text{ sm}$$

$$\vec{P} \perp Ax$$

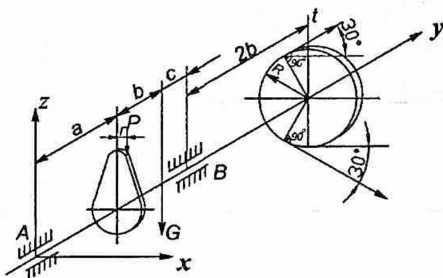
$$CD \perp Ax$$

18.



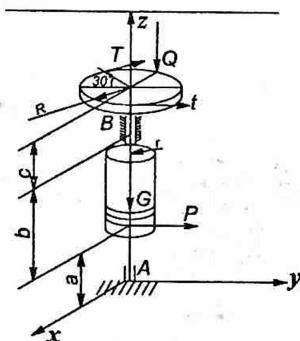
$$\begin{aligned}
 Q &= 10 \text{ kN} \\
 G &= 6 \text{ kN} \\
 a &= 60 \text{ sm} \\
 b &= 80 \text{ sm} \\
 c &= 40 \text{ sm} \\
 R &= 40 \text{ sm} \\
 r &= 30 \text{ sm} \\
 \delta &= 5 \cdot 10^{-3} R \\
 \vec{N} &\parallel Az \\
 \vec{P} &\parallel Ax \\
 \vec{Q} &\perp Ay
 \end{aligned}$$

19.



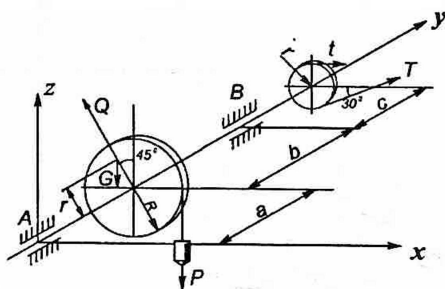
$$\begin{aligned}
 T &= 6 \text{ kN} \\
 G &= 2 \text{ kN} \\
 a &= 60 \text{ sm} \\
 b &= 20 \text{ sm} \\
 c &= 10 \text{ sm} \\
 R &= 36 \text{ sm} \\
 r &= 12 \text{ sm} \\
 T &= 2t \\
 \vec{P} &\parallel Az \\
 \vec{T}, \vec{t} &\perp Ay
 \end{aligned}$$

20.



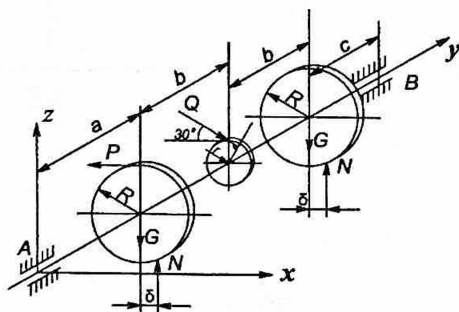
$$\begin{aligned}
 Q &= 8 \text{ kN} \\
 T &= 12 \text{ kN} \\
 G &= 6 \text{ kN} \\
 a &= 40 \text{ sm} \\
 b &= 80 \text{ sm} \\
 c &= 30 \text{ sm} \\
 R &= 40 \text{ sm} \\
 r &= 20 \text{ sm} \\
 T &= 2t \\
 \vec{t} &\parallel Ay, \vec{P} \parallel Ay \\
 \vec{T} &\perp Az
 \end{aligned}$$

21.



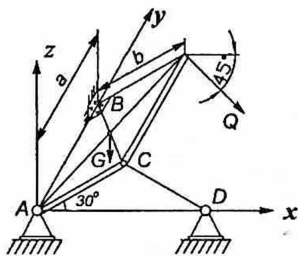
$$\begin{aligned}
 Q &= 2 \text{ kN} \\
 T &= 8 \text{ kN} \\
 G &= 4 \text{ kN} \\
 a &= 60 \text{ sm} \\
 b &= 80 \text{ sm} \\
 c &= 40 \text{ sm} \\
 R &= 40 \text{ sm} \\
 r &= 20 \text{ sm} \\
 T &= 2t \\
 \vec{T} &\perp Ay, \vec{t} \parallel Ax \\
 \vec{Q} &\perp Ay, \vec{P} \parallel Az
 \end{aligned}$$

22.



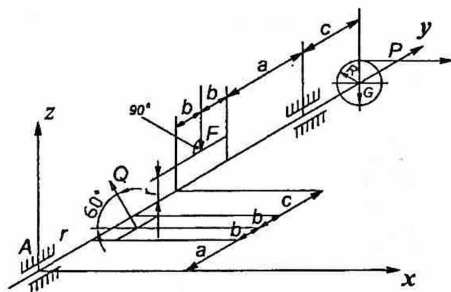
$$\begin{aligned}
 Q &= 20 \text{ kN} \\
 G &= 10 \text{ kN} \\
 a &= 80 \text{ sm} \\
 b &= 60 \text{ sm} \\
 c &= 40 \text{ sm} \\
 R &= 50 \text{ sm} \\
 r &= 30 \text{ sm} \\
 \delta &= 5 \cdot 10^{-3} R \\
 \vec{Q} &\perp Ay, \\
 N &= G. \\
 \vec{P} &\parallel Ax \\
 \vec{N} &\parallel Az
 \end{aligned}$$

23.



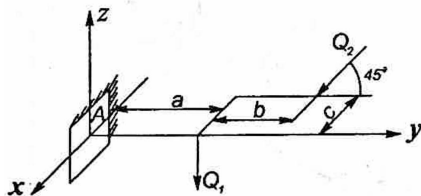
$Q = 8 \text{ kN}$
 $G = 4 \text{ kN}$
 $a = 100 \text{ sm}$
 $b = 60 \text{ sm}$
 $\vec{Q} \perp Ay,$
 $CD \perp Ay.$
 $Ac = CD$

24.



$Q = 4 \text{ kN}$
 $G = 2 \text{ kN}$
 $a = 30 \text{ sm}$
 $b = 20 \text{ sm}$
 $c = 40 \text{ sm}$
 $R = 40 \text{ sm}$
 $r = 10 \text{ sm}$
 $\vec{Q} \perp Ay,$
 $\vec{P} \parallel Az.$
 $\vec{F} \parallel Az,$
 $\vec{F} = 2Q.$

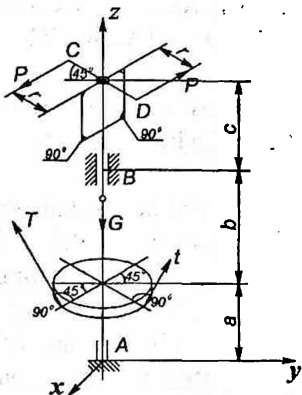
25.



$Q = 10 \text{ kN}$
 $a = 80 \text{ sm}$
 $b = 80 \text{ sm}$
 $c = 20 \text{ sm}$
 $\vec{Q}_1 = \vec{Q}_2$
 $\vec{Q}_2 \perp Ax.$

26.		$Q = 8 \text{ kN}$ $G = 4 \text{ kN}$ $a = 40 \text{ sm}$ $b = 20 \text{ sm}$ $c = 60 \text{ sm}$ $R = 20 \text{ sm}$ $r = 20 \text{ sm}$ $\vec{Q} \perp Ay;$ $CD \perp Ax.$ $\vec{P} \parallel Ax.$
27.		$Q = 10 \text{ kN}$ $G = 6 \text{ kN}$ $a = 40 \text{ sm}$ $b = 30 \text{ sm}$ $c = 20 \text{ sm}$ $R = 60 \text{ sm}$ $r = 80 \text{ sm}$ $\vec{Q} \perp Ay; \vec{P} \parallel Ax.$ $CD \perp Ax.$
28.		$Q = 6 \text{ kN}$ $G = 4 \text{ kN}$ $a = 60 \text{ sm}$ $b = 40 \text{ sm}$ $c = 80 \text{ sm}$ $R = 30 \text{ sm}$ $r = 20 \text{ sm}$ $\vec{P} \perp Ay; \vec{Q} \perp Ay.$

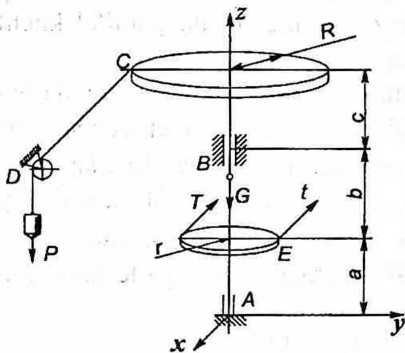
29.



$T = 16 \text{ kN}$
 $G = 4 \text{ kN}$
 $a = 40 \text{ sm}$
 $b = 60 \text{ sm}$
 $c = 80 \text{ sm}$
 $R = 40 \text{ sm}$
 $r = 30 \text{ sm}$
 $\vec{T}, \vec{t} \perp Az$
 $\vec{P} \parallel Ax, CD \perp Ax$

$$T = 2t.$$

30.



$T = 8 \text{ kN}$
 $G = 6 \text{ kN}$
 $a = 30 \text{ sm}$
 $b = 40 \text{ sm}$
 $c = 30 \text{ sm}$
 $R = 30 \text{ sm}$
 $r = 20 \text{ sm}$
 $T = 2t; \vec{t} \perp Az$
 $CD \parallel \vec{T}, Ax.$

VII-BOB. PARALLEL KUCHLAR MARKAZI VA OG'IRLIK MARKAZI

71-§. Parallel kuchlar markazi, uning radius vektori hamda koordinatalarini aniqlash

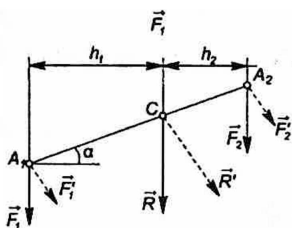
Parallel kuchlar markazi tushunchasidan mexanikada qattiq jismning og'irlik markazini aniqlashda foydalanishadi. Har qanday qattiq jism juda kichik zarrachalardan tashkil topgan bo'lib, ularga vertikal pastga yo'nalgan Yerga tortish kuchi ta'sir etadi.

Statika bo'limida o'rganiladigan jismlarning o'lchamlari yerning radiusiga nisbatan juda kichik bo'lgani uchun, jismning zarralariga ta'sir etadigan og'irlik kuchini parallel kuchlar deb qarash mumkin. Shuning uchun bu bobda bir tomonga yo'nalgan parallel kuchlar markazini aniqlaymiz. Buning uchun parallel kuchlarni ketma-ket qo'shish usulidan foydalanamiz.

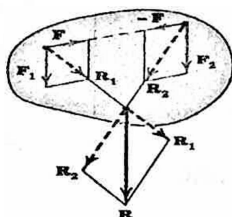
Dastavval, qattiq jismning A_1 va A_2 nuqtalariga qo'yilgan parallel \vec{F}_1 va \vec{F}_2 kuchlarning teng ta'sir etuvchisini aniqlaymiz. Ma'lumki, tekislikda joylashgan bunday kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchisi $R = F_1 + F_2$ ga teng bo'lib, kuchlar qo'yilgan nuqtalarni birlashtiruvchi A_1A_2 kesmaning C nuqtasiga qo'yilgan bo'ladi. S nuqta A_1A_2 kesmani kuchlar miqdoriga teskari mutanosib qismlarga ajratadi:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{A_2C}{A_1C}. \quad (7.1)$$

(7.1) ifodada kuchlar miqdorlari qatnashadi. Shuning uchun, agar \vec{F}_1 va \vec{F}_2 kuchlarni A_1 va A_2 nuqtalar atrofida, bir yo'nalishda biror α burchakka bursak, kuchlarning teng ta'sir etuvchisi ham mos ravishda α burchakka buriladi, kuch qo'yilgan nuqtaning holati esa o'zgarmaydi.



7.1-rasm.

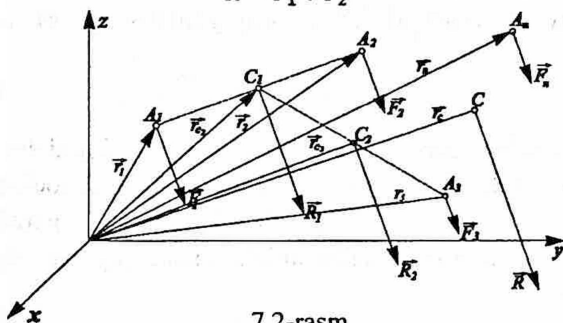


7.1a-rasm.

Bunday holda ham, (7.1) ifoda o'rinli bo'ladi (7.1-rasm) va C nuqta \vec{F}_1 va \vec{F}_2 kuchlarning markazi deyiladi. [2]

Parallel kuchlarni qo'shishning sodda ko'rinishi 13.1a-rasmda ko'rsatilgan. Bu usulda parallel kuchlarni qo'shish bir nuqtada kesishuvchi kuchlarni qo'shishga keltiriladi.

$$R = F_1 + F_2$$



7.2-rasm.

Endi qattiq jismning A_1, A_2, \dots, A_n nuqtalariga qo'yilgan, parallel va bir tomonga yo'nalgan $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ kuchlarning teng ta'sir etuvchisini aniqlaymiz (7.2-rasm). Bunday kuchlar sistemasi teng ta'sir etuvchisining moduli

$$R = \sum_{i=1}^n F_i \quad (7.2)$$

ga teng bo'lib, kuchlarga parallel yo'naladi. Uning qo'yilgan nuqtasi C ning koordinatalarini aniqlaymiz. Buning uchun, Oxyz koordinatalar sistemasida A_1, A_2, \dots, A_n nuqtalarning radius-vektorlarini $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$ bilan belgilaymiz. Dastavval \vec{F}_1 va \vec{F}_2 kuchlarni qo'shamiz:

$$R_1 = F_1 + F_2. \quad (7.3)$$

R_1 qo'yilgan C_1 nuqtaning radius vektori \vec{r}_{C_1} ni aniqlashda (7.1) dan foydalanamiz:

$$\frac{F_1}{C_1 A_2} = \frac{F_2}{C_1 A_1}. \quad (7.4)$$

Rasmdan:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A_1 C_1} &= \vec{r}_{C_1} - \vec{r}_1, \\ \overrightarrow{A_2 C_1} &= \vec{r}_2 - \vec{r}_{C_1}. \end{aligned} \quad (7.5)$$

(7.5) ni (7.4) ga qo'ysak, \vec{R}_1 kuch qo'yilgan C_1 nuqtaning radius-vektori quyidagicha aniqlanadi:

$$\vec{r}_{C_1} = \frac{F_1 \vec{r}_1 + F_2 \vec{r}_2}{F_1 + F_2}. \quad (7.6)$$

\vec{R}_1 kuch \vec{F}_1 va \vec{F}_2 kuchlarga parallel yo'naladi.

Shu usul bilan n ta parallel kuchlarni qo'shsak, ularning teng ta'sir etuvchisini qo'yilish nuqtasining radius vektori \vec{r}_c quyidagicha aniqlanadi:

$$\vec{r}_c = \frac{F_1 \vec{r}_1 + F_2 \vec{r}_2 + \dots + F_n \vec{r}_n}{F_1 + F_2 + \dots + F_n} = \frac{\sum F_l \vec{r}_l}{\sum F_l}. \quad (7.7)$$

C nuqta berilgan parallel kuchlar markazini ifodalaydi.

\vec{r}_c va \vec{r}_l vektorlarning koordinata o'qlaridagi proeksiyalarini mos ravishda $x_c, y_c, z_c, x_l, y_l, z_l$ orqali belgilasak, parallel kuchlar markazining koordinatalarini aniqlaydigan quyidagi ifodalarga ega bo'lamiz:

$$\begin{aligned} X_c &= \frac{\sum_{l=1}^n F_l x_l}{\sum_{l=1}^n F_l}, \\ Y_c &= \frac{\sum_{l=1}^n F_l y_l}{\sum_{l=1}^n F_l}, \\ Z_c &= \frac{\sum_{l=1}^n F_l z_l}{\sum_{l=1}^n F_l}. \end{aligned} \quad (7.8)$$

(7.7) va (7.8) ifodalardan ko‘rinib turibdiki, *parallel kuchlar teng ta’sir etuvchisi qo‘yilgan C nuqta - parallel kuchlar markazining holati kuchlarning yo‘nalishiga bog‘liq bo‘lmay, faqat ularning miqdoriga va qo‘yilgan nuqtalarining koordinatalariga bog‘liq bo‘lar ekan*. Agar kuchlar qo‘yilgan nuqtalarni o‘zgartirmay, kuchlar uchlarini biror α burchakka bursak, kuchlarning teng ta’sir etuvchisi ham shu burchakka burilib, uning qo‘yilish nuqtasining holati esa o‘zgarmas ekan.

72-§. Qattiq jismning og‘irlik markazi

Qattiq jismning har bir zarrachasiga ta’sir etuvchi Yerning markaziga yo‘nalgan tortish kuchini parallel kuchlar deb qarash mumkinligi tufayli, bu kuchlarning markazi – C nuqta jismning og‘irlik markazini ifodalaydi. Shuning uchun jismning og‘irlik markazining koordinatalarini aniqlashda (7.8) da F_i kuchlarning o‘rniga G_i kuchlarni qo‘yish lozim:

$$x_c = \frac{\sum G_i x_i}{\sum G_i}, \quad y_c = \frac{\sum G_i y_i}{\sum G_i}, \quad z_c = \frac{\sum G_i z_i}{\sum G_i}. \quad (7.9)$$

Bu formulada $G = \sum G_i$ jismning og‘irligini ifodalaydi.

Jism bir jinsli bo‘lsa, og‘irlik markazi uning qanday materialdan tashkil topganiga bog‘liq bo‘lmay, faqat geometrik shakliga bog‘liq bo‘ladi. Mazkur bobda bir jinsli jismlarning og‘irlik markazini aniqlash masalalari o‘rganiladi.

Jismning og‘irlik markazi geometrik aniq nuqtadan iborat bo‘lib, bu nuqta jisimga taalluqli bo‘lmasligi ham mumkin. Masalan, R_1 va R_2 radiusli aylanalar bilan chegaralangan sirt og‘irlik markazi aylanalar markazida yotadi va sirtga taalluqli bo‘lmaydi. (7.9) formuladan foydalanib, hajmga ega bo‘lgan bir jinsli jismning og‘irlik markazining koordinatalarini aniqlaymiz. Bunda og‘irligi G bo‘lgan jism V hajmga ega deb qaraladi. Og‘irligi ΔG_i bo‘lgan bo‘lakcha xajmi ΔV_i ga teng bo‘ladi. Agar jismning solishtirma (hajm birligiga to‘g‘ri keladigan) og‘irligini γ bilan belgilasak,

$$G_t = \gamma \Delta V_t \quad (7.10)$$

bo'ladi. Buni e'tiborga olsak, (13.9) ga asosan, *hajmga ega bo'lgan bir jinsli jism og'irlik markazining koordinatalari uchun quyidagi ifodalarga ega bo'lamiz:*

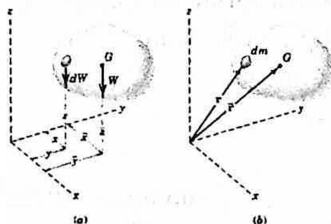
$$x_c = \frac{\sum \Delta V_t \cdot x_t}{V}, \quad y_c = \frac{\sum \Delta V_t \cdot y_t}{V}, \quad z_c = \frac{\sum \Delta V_t \cdot z_t}{V}. \quad (7.11)$$

(7.11)da n cheksizlikka intilsa, ΔV_t nolga intiladi. U holda yig'indilarning limiti hajm bo'yicha olingan aniq integralni ifodalaydi:

$$x_c = \frac{\int_{(V)} x dv}{V}, \quad y_c = \frac{\int_{(V)} y dv}{V}, \quad z_c = \frac{\int_{(V)} z dv}{V}. \quad (7.12)$$

Bu formulada $V = \sum_{i=1}^n \Delta V_i$ butun jism hajmini ifodalaydi.

7.3-rasmda hajmga ega bo'lgan bir jinsli jism og'irlik markazining koordinatalari ko'rsatilgan. Rasmda dw - jism elementar zarrachasining hajmi, w - jism hajmi.[2]



7.3-rasm.

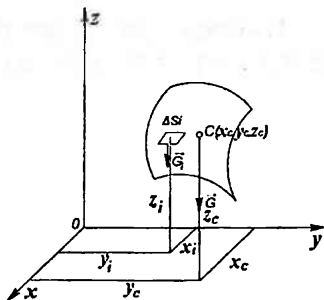
Sirt og'irlik markazining koordinatalari ham yuqoridagidek aniqlanadi:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta S_i \cdot x_i}{S}, \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta S_i \cdot y_i}{S}, \quad z_c = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta S_i \cdot z_i}{S} \quad (7.13)$$

yoki

$$x_c = \frac{\int_{(S)} x ds}{S}, \quad y_c = \frac{\int_{(S)} y ds}{S}, \quad z_c = \frac{\int_{(S)} z ds}{S}. \quad (7.14)$$

Bunda, $S = \sum \Delta S_i$ butun sirt yuzasini, ΔS_i sirt biror bo'lagining yuzasini, x_i, y_i, z_i lar esa, sirt bo'laklari og'irlik markazining koordinatalarini ifodalaydi (13.4-rasm). Chiziqning og'irlik markazi quyidagicha aniqlanadi:



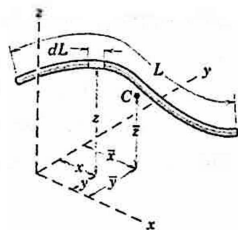
7.4-rasm.

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta S_i \cdot x_i}{L}, \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta S_i \cdot y_i}{L}, \quad z_c = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta S_i \cdot z_i}{L} \quad (7.15)$$

yoki

$$x_c = \frac{\int_{(L)} x \, dl}{L}, \quad y_c = \frac{\int_{(L)} y \, dl}{L}, \quad z_c = \frac{\int_{(L)} z \, dl}{L} \quad (7.16)$$

Bunda, $L = \sum \Delta l_i$ butun chiziqning uzunligini, Δl_i chiziq biror bo'lagining uzunligini, x_i, y_i, z_i lar esa, shu bo'lak og'irlik markazining koordinatalarini ifodalaydi (7.5-rasm). [2]



7.5-rasm.

73-§. Qattiq jismning og'irlik markazini aniqlash usullari

Qattiq jismning og'irlik markazini aniqlashning quyidagi usullari mavjud:

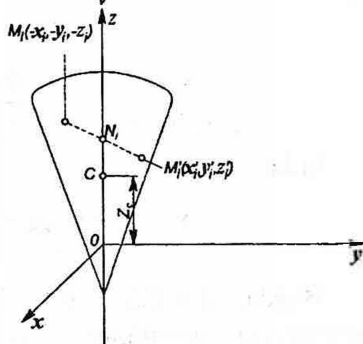
1. Simmetriya usuli.

Bu usul quyidagi teoremda o'z ifodasini topgan.

Teorema: Simmetriya o'qiga ega bo'lgan bir jinsli jismning og'irlik markazi simmetriya o'qida yotadi.

Isboti: Simmetriya o'qiga ega bo'lgan bir jinsli jism berilgan bo'lsin (7.6-rasm). Oz o'qini jismning simmetriya o'qi bilan ustma ust tushiramiz va jism og'irlik markazining koordinatalari x_c va y_c larni (13.11) formula yordamida aniqlaymiz:

$$x_c = \frac{\sum \Delta V_i \cdot x_i}{V}, \quad y_c = \frac{\sum \Delta V_i \cdot y_i}{V}.$$



Jismda simmetriya o'qi Oz ga nisbatan simmetrik joylashgan M_i va M'_i nuqtalarni tanlab, bu nuqtalar atrofida bir xil elementar ΔV_i hajmga ega bo'lgan bo'lakchalarni olamiz. M_i va M'_i nuqtalar simmetriya o'qiga perpendikulyar bo'lgan chiziqda simmetriya o'qidan bir xil masofada joylashadi (7.6-rasm):

$$M_i N_i = M'_i N_i. \quad (14.1)$$

Shuning uchun bu nuqtalarning x_i, y_i koordinatalari miqdor jihatdan teng bo'lib, qarama-qarshi ishoralarga ega bo'ladi.

Agar jismni o'zaro teng va simmetrik joylashgan bo'laklarga bo'lib, $\Delta V_i \cdot x_i$ ko'paytmani tuzsak, bir juft nuqtalarga taalluqli ko'paytmalarning yig'indisi, yuqorida keltirilgan xulosaga asosan, nolga teng bo'ladi:

$$\Delta V_i \cdot x_i + \Delta V'_i \cdot x'_i = 0 \quad (7.17)$$

yoki

$$\sum \Delta V_i \cdot x_i = 0.$$

Xuddi shunday mulohazalar asosida quyidagi ifodani ham yozish mumkin:

$$\Delta V_i \cdot y_i + \Delta V'_i \cdot y'_i = 0 \quad (7.18)$$

yoki

$$\sum \Delta V_i \cdot y_i = 0.$$

Hosil bo'lgan ifodalarni (7.11) ga qo'ysak,

$$x_c = \frac{\sum \Delta V_i \cdot x_i}{V} = 0, \quad y_c = \frac{\sum \Delta V_i \cdot y_i}{V} = 0. \quad (7.19)$$

ifodalar kelib chiqadi.

Modomiki, $x_c = 0$, $y_c = 0$ ekan, jismning og'irlik markazi simmetriya o'qi bo'lgan Oz o'qida yotar ekan va uning o'rni yagona

$$z_c = \frac{\sum \Delta V_i \cdot z_i}{V} \quad (7.20)$$

koordinata orqali aniqlanar ekan.

Binobarin, *simmetriya o'qiga ega bo'lgan bir jinsli jismning og'irlik markazi simmetriya o'qida yotadi.*

Bu teoremani simmetriya o'qiga ega bo'lgan bir jinsli yassi sirt yoki chiziqqa tatbiq etsak, ularning og'irlik markazi ham simmetriya o'qida yotishi isbotlanadi.

Isbotlangan teorema asosida quyidagi xulosalarni chiqarish mumkin:

a) To'g'ri chiziq kesmasining og'irlik markazi uning o'rtasida yotadi;

b) Aylana, doira yuzasi, shar sirti va hajmining og'irlik markazi uning simmetriya nuqtasi-geometrik markazi bilan ustma-ust tushadi;

c) Parallelogramm, romb, to'rtburchak, kvadrat perimetri va sirtining og'irlik markazi ularning diagonallarining kesishgan nuqtasida yotadi;

d) Teng tomonli ko'p burchak perimetri va sirtining og'irlik markazi ko'p burchak tashqarisi va yoki ichkarisida chizilgan aylananing markazida yotadi.

2. Bo'laklarga ajratish usuli.

Agar jismni og'irlik markazi aniq yoki uni oson aniqlash mumkin bo'lgan bir necha (chekli) bo'laklarga ajratish mumkin bo'lsa, bunday jismning og'irlik markazini aniqlashda, bo'laklarga ajratish usulidan foydalanish qulay bo'ladi. Bu usulda hajmga ega bo'lgan jism, yassi jism va chiziqning og'irlik markazi (13.11), (13.13), (13.15) formulalar asosida aniqlanadi.

Bunda formulalardagi qo‘shiluvchilar soni ajratilgan bo‘laklar soniga teng bo‘ladi.

3. Manfiy yuza usuli.

Bu usul bo‘laklarga ajratish usulining xususiy holi bo‘lib, jismning ma‘lum qismlari qirqib olinganda jismning og‘irlik markazini aniqlash usuli hisoblanadi. Bu usulda jismni qirqilmagan yaxlit jism va qirqib olingan jismlardan iborat deb qarash mumkin. Bunda qirqib olingan bo‘laklarning xajmi, yuzasi shartli ravishda manfiy deb olinadi, hamda og‘irlik markazini aniqlashda (7.11), (7.13) formulalardan foydalaniladi.

4. Tajriba usuli.

Agar og‘irlik markazini aniqlash lozim bo‘lgan jism bir jinsli bo‘lmasa, yoki murakkab shaklli bo‘lsa, jismning og‘irlik markazini aniqlashda quyidagi tajriba usullaridan foydalaniladi:

a) Ipga osish usuli.

Bu usulda jism turli nuqtalaridan ipga osiladi. Jism ipning reaksiyasi \vec{N} va og‘irlik kuchi \vec{G} ta‘sirida muvozanatda bo‘ladi. Og‘irlik kuchi \vec{G} vertikal pastga yo‘nalgani tufayli, ipning reaksiyasi vertikal yuqoriga yo‘naladi. Ipning yo‘nalishini davom ettirib, og‘irlik kuchining ta‘sir chizig‘i belgilab olinadi. Shu tarzda ketma-ket turli nuqtalaridan ipga osish yo‘li bilan aniqlab olingan og‘irlik kuchini ta‘sir chiziqlarining kesishgan nuqtasi C , berilgan jism og‘irlik markazini ifodalaydi.

b) Tarozi tartish usuli.

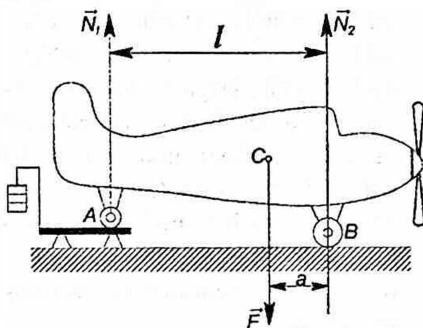
Bu usulda jism (samolet, parovoz) xayolan ikki qismga bo‘linadi va qismlaridan biridagi g‘ildiraklar tarozi platformasiga qo‘yiladi. Tortish yo‘li bilan g‘ildiraklarning tarozi platformasiga bosimi aniqlanadi. Aniqlangan bosim kuchi tarozi platformasining reaksiyasini ifodalaydi. Xuddi shu usul bilan ikkinchi qismdagi g‘ildiraklarning tarozi platformasiga bosimi – tarozi platformasining reaksiyasi aniqlanadi. Ma‘lumki, bu reaksiya kuchlarining yig‘indisi jism og‘irlikini ifodalaydi. Shuning uchun, jism og‘irligi aniq bo‘lgan hollarda, tarozi platformasida ikkinchi tortishga zaruriyat bo‘lmaydi. Jism og‘irlik markazini C nuqta orqali belgilab, barcha kuchlarning C nuqtaga nisbatan momentlarini nolga tenglashtiramiz.

Hosil bo'lgan muvozanat tenglamasidan jism og'irlik markazining koordinatalaridan biri aniqlanadi.

Misol. Samolet og'irlik markazining koordinatalaridan biri aniqlansin (7.7-rasm).

$$AB=l$$

Yechimi. Samolet A va B nuqtalarda g'ildiraklarga tayanadi. A g'ildirakni tarozi platformasiga qo'yib, tortish yo'li bilan, samolet orqa qismining tarozi platformasiga bosimini aniqlaymiz. Bu bosim kuchi tarozi platformasining A nuqtadagi reaksiya kuchi \vec{N}_1 ni ifodalaydi. Xuddi shu usul bilan samolet old qismining tarozi platformasiga bosim kuchi tarozi platformasining B nuqtadagi reaksiya kuchi \vec{N}_2 ham



7.7-rasm.

aniqlanadi. Samolet og'irlik markazini C nuqta orqali belgilab, kuchlarning C nuqtaga nisbatan momentlarining yig'indisini nolga tenglashtiramiz (muvozanat tenglamalaridan biri tuziladi)

$$-N_1 \cdot (l - a) + N_2 a = 0 .$$

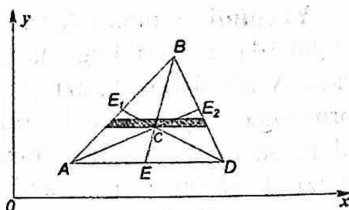
Bundan;

$$a = \frac{l N_1}{N_1 + N_2} .$$

74-§. Ba'zi bir jismlarning og'irlik markazi

1. Uchburchak yuzasining og'irlik markazi.

ABD uchburchak yuzasining og'irlik markazini aniqlash uchun AD tomoniga parallel bo'lgan kichik bo'laklarga ajratamiz (7.8-rasm). Bu bo'laklar har birining og'irlik markazi ularning o'rtasida yotadi. Bu nuqtalarning geometrik o'rni BE medianani tashkil etadi. Demak, bu bo'laklarning og'irlik markazi BE medianada yotadi.



7.8-rasm.

Shu tarzda uchburchak yuzasini AB va BD tomonga parallel bo'laklarga ajratsak, ularning og'irlik markazi DE_1 va AE_2 medianalarda yotishi aniqlanadi. Binobarin, *uchburchak yuzasining og'irlik markazi uning medianalari kesishgan C nuqtada yotadi.*

Uchburchak yotgan tekislikda xoy tekislikni o'tkazib, uchburchak uchlarning koordinatalarini (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) orqali belgilasak, C nuqtaning koordinatalari quyidagi formulalar asosida aniqlanadi:

$$\begin{aligned}x_C &= \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3), \\y_C &= \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3).\end{aligned}\quad (7.21)$$

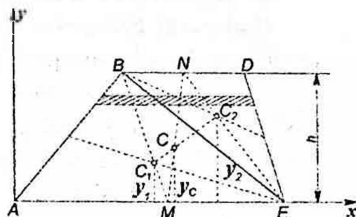
Geometriyadan ma'lumki, medianalarning kesishgan nuqtasi asosdan mediananing $\frac{1}{3}$ qismida yotadi:

Shuning uchun:

$$\begin{aligned}EC &= \frac{1}{3}EB, \\E_1C &= \frac{1}{3}E_1D, \\E_2C &= \frac{1}{3}E_2A.\end{aligned}$$

2. Trapetsiyaning og'irlik markazi.

Asoslari $AE = a$ va $BD = b$, balandligi h bo'lgan AB trapetsiyaning og'irlik markazini aniqlash uchun trapetsiyani AE asosga parallel bo'laklarga ajratamiz (7.9-rasm). Bu bo'laklarning og'irlik markazi AE va



7.9-rasm.

BD asoslarning o'rtalarini tutashtiruvchi MN chiziqda yotadi. Binobarin, trapetsiyaning og'irlik markazi ham shu chiziqda yotadi. Trapetsiyaning og'irlik markazining koordinatasi y_c ni aniqlash uchun trapetsiyani ABE va BED uchburchaklarga ajratamiz. Ularning yuzalarini S_1 va S_2 , og'irlik markazlarining AE asosdan masofalarini y_1 va y_2 orqali belgilasak, trapetsiya og'irlik markazining koordinatasi quyidagi formula asosida aniqlanadi:

$$y_c = \frac{S_1 y_1 + S_2 y_2}{S_1 + S_2}. \quad (7.22)$$

Bunda:

$$S_1 = \frac{ah}{2}, \quad S_2 = \frac{bh}{2}.$$

$$y_1 = \frac{h}{3}, \quad y_2 = \frac{2h}{3}.$$

Natijada:

$$y_c = \frac{\frac{ah^2}{6} + \frac{2bh^2}{6}}{\frac{ah}{2} + \frac{bh}{2}} = \frac{h(a+2b)}{3(a+b)}. \quad (7.23)$$

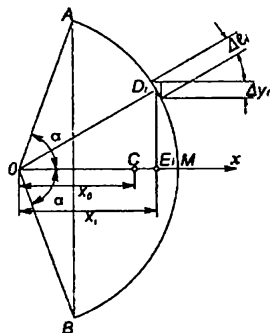
Shuni ta'kidlash lozimki, trapetsiyaning og'irlik markazini analitik usulda aniqlash uchun, C nuqtaning bitta koordinatasini, masalan y_c ni aniqlash yetarli bo'ladi.

3. Aylana yoyining og'irlik markazi.

Radiusi R bo'lgan aylana AB yoyining og'irlik markazini aniqlash talab etilsin.

Aylana yoyining markazidan o'tuvchi OM radius AB yoyning simmetriya o'qi hisoblanadi. Shuning uchun, AB yoyning og'irlik markazi shu radiusda yotadi. AB yoy markazidan og'irlik markazigacha bo'lgan OC masofani hisoblaymiz.

Buning uchun AB yoyini cheksiz ko'p elementar Δl_i bo'laklarga ajratamiz (7.10-rasm).



7.10-rasm.

Koordinata boshi sifatida AB yoy markazini tanlab, x o'qini OM radius bo'ylab yo'naltiramiz. Δl_i elementar bo'lakcha markazining absissasini x_i orqali belgilab, $x_c = OC$ masofa uchun quyidagi ifodaga ega bo'lamiz:

$$x_c = \frac{\sum x_i \Delta l_i}{L} \quad (7.24)$$

Bunda L – AB yoyning uzunligi.

(7.17) formula suratidagi ko'paytmani aniqlash uchun Δl_i elementar bo'lakchanning markazini D_i orqali va bu nuqtadan Ox o'qiga tushirilgan perpendikulyarning o'q bilan kesishgan nuqtasini E_i orqali belgilaymiz, bunda $OE_i = x_i$. Δl_i elementar bo'lakchanning boshi va oxiridan AB xordaga parallel va unga perpendikulyar bo'lgan ikki chiziq o'tkazamiz. Natijada, tomonlaridan biri Δl_i bo'lgan kichik uchburchak hosil bo'ladi (Δl_i uzunligi cheksiz kichik bo'lganligi uchun uni to'g'ri chizik bilan almashtiramiz).

Hosil bo'lgan uchburchak tomonlari o'zaro perpendikulyar bo'lganligi uchun $OD_i E_i$ uchburchakka o'xshash bo'ladi. Kichik uchburchakning AB xordaga parallel bo'lgan tomonini Δy_i orqali belgilasak, uchburchaklarning o'xshashligidan quyidagi ifoda kelib chiqadi:

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta l_i} = \frac{OE_i}{OD_i} = \frac{x_i}{R} \quad (7.25)$$

Bundan:

$$x_i \cdot \Delta l_i = R \cdot \Delta y_i \quad (7.26)$$

Kichik uchburchaklarni AB aylana yoyi bo'yicha chizib, (7.17) dan foydalansak, aylana yoyining og'irlik markazi quyidagi formula asosida aniqlanadi.

$$x_C = \frac{\sum R \cdot \Delta y_i}{L} = \frac{R}{L} \sum \Delta y_i. \quad (4.27)$$

Δy_i kesmalarning yig'indisi AB xordaning uzunligiga teng. Agar bu xordaning uzunligini S orqali belgilasak, aylana yoyi og'irlik markazining koordinatasi uchun quyidagi ifodaga ega bo'lamiz:

$$x_C = \frac{R}{L} S. \quad (7.28)$$

Agar rasmdagi $\angle AOB = 2\alpha$ desak,

$$L = 2R\alpha, \quad S = 2R \sin \alpha$$

bo'ladi.

Natijada:

$$x_C = \frac{R \sin \alpha}{\alpha}. \quad (7.29)$$

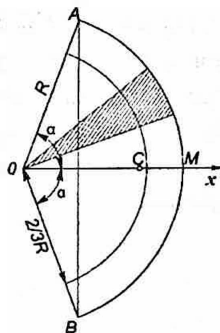
Agar bu formulani yarim aylana yoyiga tatbiq etsak, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ga teng bo'ladi. Shuning uchun yarim aylana og'irlik markazining koordinatasi uchun

$$x_C = \frac{R \sin \alpha}{\alpha} = \frac{2R}{\pi} \quad (7.30)$$

ifodaga ega bo'lamiz.

4. Doira sektorining og'irlik markazi.

Radiusi R ga, markaziy burchagi 2α ga teng doiraviy sektorning og'irlik markazini aniqlash talab etilsin (7.11-rasm). Buning uchun x o'qni sektor yuzining simmetriya o'qi buylab yo'naltiramiz va sektor yuzasini bir qancha elementar sektorlar yuzalaridan tashkil topgan deb qaraymiz.



7.11-rasm.

Agar har bir elementar sektorni balandligi R ga teng uchburchak deb qarasaq, uning og'irlik markazi O nuqtadan $\frac{2}{3}R$ masofada yotadi.

Binobarin, doira sektorining og'irlik markazi, radiusi $\frac{2}{3}R$ bo'lgan aylana yoyining og'irlik markazi bilan ustma-ust tushadi.

Shuning uchun:

$$x_c = \frac{2}{3}R \frac{\sin \alpha}{\alpha} \quad (7.31)$$

Bu natijani yarim doira uchun tatbiq etsak, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ga teng bo'ladi.

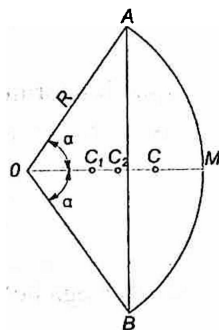
Yarim doira og'irlik markazining koordinatasi esa quyidagi formula asosida aniqlanadi:

$$x_c = \frac{2}{3}R \frac{\sin \alpha}{\alpha} = \frac{4R}{3\pi} \quad (7.32)$$

Doiraviy segment yuzasining og'irlik markazi

Radiusi R bo'lgan aylananing AMB yoyi va AB xorda bilan chegaralangan doiraviy segment yuzasining og'irlik markazini topish talab etilsin (7.12-rasm).

Aylana markazi O nuqtadan OA va OB radiuslarni o'tkazib, OAB doiraviy sektorni hosil qilamiz. AB xorda bu sektorni ikki qismga: yuzasining og'irlik markazini aniqlash lozim bo'lgan berilgan doiraviy segmentga va OAB uchburchakka ajratadi.



7.12-rasm.

Segment og'irlik markazi C , uchburchak og'irlik markazi C_1 va sektor og'irlik markazi C_2 nuqtalar AB xordaga perpendikulyar bo'lgan OM radiusda yotadi. Aylana markazidan bu nuqtalargacha bo'lgan masofalarni x, x_1, x_2 orqali belgilaymiz. U paytda sektor yuzasining og'irlik markazi (7.13) formulaga asosan quyidagicha aniqlanadi:

$$x_2 = \frac{S \cdot x + S_1 \cdot x_1}{S_2} \quad (7.33)$$

Bunda: S – segment yuzasi, S_1 – uchburchak yuzasi, S_2 – sektor yuzasi. Bu ifodadan berilgan doiraviy segment yuzasi og'irlik markazining koordinatasi x uchun quyidagi ifoda kelib chiqadi:

$$x = \frac{S_2 \cdot x_2 - S_1 \cdot x_1}{S} = \frac{S_2 \cdot x_2 - S_1 \cdot x_1}{S_2 - S_1} \quad (7.34)$$

Agar,

$$S_1 = R^2 \sin \alpha \cos \alpha, \quad x_1 = \frac{2}{3} R \cos \alpha,$$

$$S_2 = R^2 \alpha, \quad x_2 = \frac{2}{3} R \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

ekanligini e'tiborga olsak, doiraviy segment og'irlik markazining koordinatasi uchun quyidagi ifodaga ega bo'lamiz:

$$x = \frac{\frac{2}{3} R^2 \sin \alpha - \frac{2}{3} R^2 \sin \alpha \cos^2 \alpha}{R^2 \alpha - R^2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{2}{3} R \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha - \sin \alpha \cos \alpha} \quad (7.35)$$

75-§. Qattiq jismlarning og'irlik markazini aniqlash usullariga oid masalalarni yechish uchun uslubiy ko'rsatmalar

1. Bo'laklarga ajratish usuli.

Agar jismni og'irlik markazi aniq yoki uni oson aniqlash mumkin bo'lgan bir necha (chekli) bo'laklarga ajratish mumkin bo'lsa, bunday jismning og'irlik markazini aniqlashda, bo'laklarga ajratish usulidan foydalanish qulay bo'ladi.

Bu usulda hajmga ega bo'lgan jism, yassi jism va chiziqning og'irlik markazi quyidagi

$$x_c = \frac{\sum \Delta v_i \cdot x_i}{v}, \quad y_c = \frac{\sum \Delta v_i \cdot y_i}{v}, \quad z_c = \frac{\sum \Delta v_i \cdot z_i}{v} \quad (1)$$

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta S_i \cdot x_i}{S}, \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta S_i \cdot y_i}{S}, \quad z_c = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta S_i \cdot z_i}{S} \quad (2)$$

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta l_i \cdot x_i}{L}, \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta l_i \cdot y_i}{L}, \quad z_c = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta l_i \cdot z_i}{L} \quad (3)$$

formulalar asosida aniqlanadi. Bunda formulalardagi qo'shiluvchilar soni ajratilgan bo'laklar soniga teng bo'ladi.

2. Manfiy yuza usuli.

Bu usul bo'laklarga ajratish usulining xususiy holi bo'lib, jismning ma'lum qismlari qirqib olinganda jismning og'irlik markazini aniqlash usuli hisoblanadi. Bu usulda jismni qirqilmagan yaxlit jism va qirqib olingan jismlardan iborat deb qarash mumkin. Bunda qirqib olingan bo'laklarning xajmi, yuzasi shartli ravishda manfiy deb olinadi, hamda og'irlik markazini aniqlashda (1), (2) formulalardan foydalaniladi.

3. Tajriba usuli.

Agar og'irlik markazini aniqlash lozim bo'lgan jism bir jinsli bo'lmasa, yoki murakkab shaklli bo'lsa, jismning og'irlik markazini aniqlashda quyidagi tajriba usullaridan foydalaniladi:

a) Ipga osish usuli.

Bu usulda jism turli nuqtalaridan ipga osiladi. Jism ipning reaksiyasi \vec{N} va og'irlik kuchi \vec{G} ta'sirida muvozanatda bo'ladi. Og'irlik kuchi \vec{G} vertikal pastga yo'nalgani tufayli, ipning reaksiyasi vertikal yuqoriga yo'naladi. Ipning yo'nalishini davom ettirib, og'irlik kuchining ta'sir chizig'i belgilab olinadi. Shu tarzda ketma-ket turli nuqtalaridan ipga osish yo'li bilan aniqlab olingan og'irlik kuchini ta'sir chiziqlarining kesishgan nuqtasi C , berilgan jism og'irlik markazini ifodalaydi.

b) Tarozi tortish usuli.

Bu usulda jism (samolet, parovoz) xayolan ikki qismga bo'linadi va qismlaridan biridagi g'ildiraklar tarozi platformasiga qo'yiladi. Tortish yo'li bilan g'ildiraklarning tarozi platformasiga bosimi aniqlanadi. Aniqlangan bosim kuchi tarozi platformasining reaksiyasini ifodalaydi. Xuddi shu usul bilan ikkinchi qismdagi g'ildiraklarning tarozi platformasiga bosimi – tarozi platformasining reaksiyasi aniqlanadi. Ma'lumki, bu reaksiya kuchlarining yig'indisi jism og'irligini ifodalaydi. Shuning uchun, jism og'irligi aniq bo'lgan hollarda, tarozi platformasida ikkinchi tortishga zaruriyat bo'lmaydi. Jism og'irlik markazini C nuqta orqali belgilab, barcha kuchlarning C nuqtaga nisbatan momentlarini nolga tenglashtiramiz.

Hosil bo'lgan muvozanat tenglamasidan jism og'irlik markazining koordinatalaridan biri aniqlanadi.

Qattiq jismning og'irlik markazini aniqlashga doir masalalarni yechishda quyidagi sodda geometrik formaga ega bo'lgan qattiq jismlar og'irlik markazining koordinatalariga e'tibor berish lozim:

a) bir jinsli to'g'ri burchakli to'rtburchakning og'irlik markazi uning diogonallarining kesishish nuqtasida yotadi.

b) bir jinsli uchburchakning og'irlik markazi uning medianalarining kesishish nuqtasida yotadi.

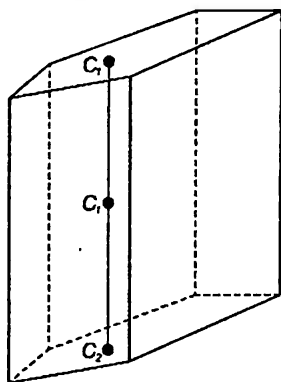
v) bir jinsli aylana yoyining og'irlik markazi uning simmetriya o'qida yotadi va quyidagi koordinatalarga ega bo'ladi (6.9-rasm):

$$x_c = R \frac{\sin \alpha}{\alpha}; y_c = 0.$$

g) bir jinsli doiraviy sektor og'irlik markazi uning simmetriya o'qida yotadi va quyidagi koordinatalarga ega bo'ladi (6.10- rasm):

$$x_c = \frac{2}{3} R \frac{\sin \alpha}{\alpha}; y_c = 0.$$

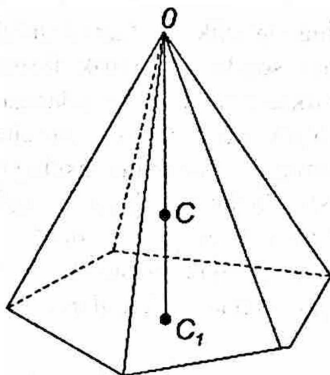
a) bir jinsli prizmaning og'irlik markazi pastki va ustki asoslari og'irlik markazini tutashtiruvchi to'g'ri chiziq o'rtasida yotadi (7.13-rasm.).



7.13-rasm.

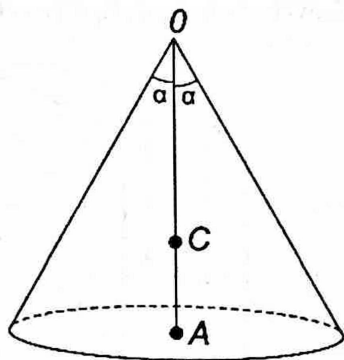
e) bir jinsli piramidaning og'irlik markazi piramida uchi va asosining og'irlik markazini birlashtiruvchi to'g'ri chiziq kesmasida,

piramida asosining og'irlik markazidan $C_1C = \frac{1}{4}C_1O$ masofa uzoqlikda yotadi (7.14-rasm).;



7.14-rasm.

j) bir jinsli doiraviy konus og'irlik markazi konus uchi va asosining og'irlik markazini birlashtiruvchi to'g'ri chiziq kesmasida, konus asosining og'irlik markazidan $AC = \frac{1}{4}AO$ masofa uzoqlikda yotadi (7.15-rasm).



7.15-rasm.

Qattiq jismning og'irlik markazini aniqlashga doir masalalarni yechishda koordinata o'qlarini to'g'ri o'tkazish muhim ahamiyatga ega bo'ladi. Agar jism simmetriya tekisligiga ega bo'lsa, koordinat

o'qlaridan birini, masalan z o'qini, mazkur tekislikka perpendikulyar holda o'tkazish maqsadga muvofiq bo'ladi. Chunki bunda $z_c=0$ bo'lib, faqat x_c va y_c larni aniqlash lozim bo'ladi.

Agar jism simmetriya o'qiga ega bo'lsa, koordinata o'qlaridan birini, masalan x o'qini, mazkur o'q bo'ylab yo'naltirish maqsadga muvofiq bo'ladi. Chunki bunda $y_c=0$ bo'lib, faqat x_c ni aniqlash lozim bo'ladi.

Mazkur qo'llanmada, qattiq jismning og'irlik markazini aniqlashda bo'laklarga ajratish va manfiy yuzani qo'shish usullaridan foydalanishga e'tibor berilgan.

76-§. Qattiq jismning og'irlik markazini aniqlashga doir masalalar

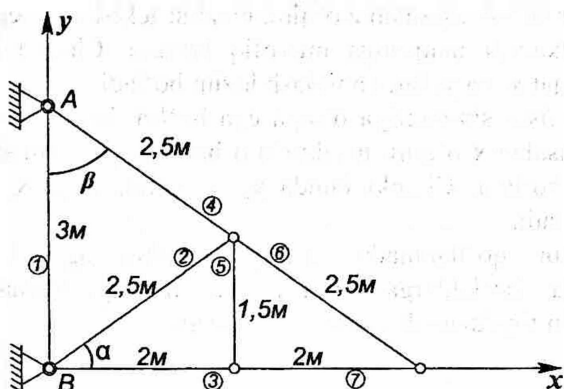
1-masala. Tekis ferma og'irlik markazining koordinatalari topilsin: ferma ettita sterjendan tuzilgan bo'lib, ularning uzunliklari rasmda ko'rsatilgan. Hamma sterjenlar har bir metrining og'irligi bir xil (7.16-rasm).

Yechish. Tekis ferma og'irlik markazining koordinatalari quyidagi formulalar asosida aniqlanadi:

$$x_c = \frac{\sum \ell_i \cdot x_i}{\sum \ell_i}; \quad (1)$$

$$y_c = \frac{\sum \ell_i \cdot y_i}{\sum \ell_i}; \quad (2)$$

bunda ℓ_i ferma i sterjenining uzunligi, x_i, y_i lar esa uning og'irlik markazining koordinatalari.



7.16-rasm.

Koordinata o'qlarini rasmdagidek o'tkazib, ferma sterjenlarining og'irlik markazining koordinatalarini aniqlaymiz va quyidagi jadvalni to'ldiramiz:

T.r.	Sterjenlar uzunligi ℓ_i (m)	x_i (m)	y_i (m)	$\ell_i x_i$	$\ell_i y_i$
1	3,0	0	1,5	0	4,5
2	2,5	$1,25 \cdot \cos \alpha = 1$	$1,25 \cdot \sin \alpha = 0,75$	2,5	18,8
3	2,0	1	0	2,0	0
4	2,5	$1,25 \cdot \sin \beta = 1$	$1,25 \cos \beta = 2,25$	2,5	5,63
5	1,5	2,0	0,75	3	1,13
6	2,5	$4 - 1,25 \cos \alpha = 3$	$1,25 \cdot \sin \alpha = 0,75$	7,5	1,88
7	2,0	3	0	6	0
	16			23,5	15,02

Jadvaldan foydalanib tekis ferma og'irlik markazining koordinatalarini aniqlaymiz:

$$x_c = \frac{\sum \ell_i \cdot x_i}{\sum \ell_i} = \frac{23,5}{16} = 1,47 \text{ m.}$$

$$y_c = \frac{\sum \ell_i \cdot y_i}{\sum \ell_i} = \frac{15,02}{16} = 0,94 \text{ m.}$$

2-masala. Rasmda tasvirlangan jism yuzasining og'irlik markazining koordinatalari topilsin (7.17-rasm).

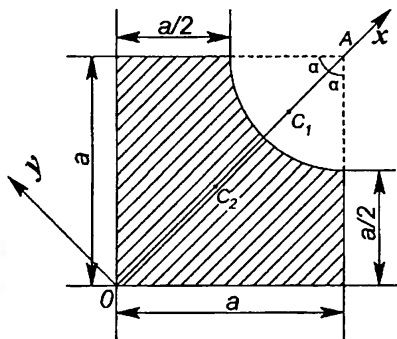
Yechish. Masalada jism yuzasining bir qismi qirqib tashlangan. Bunday jism yuzasining og'irlik markazi manfiy yuzani qo'shish usuli bilan aniqlanadi. Jismni qirqilmagan to'g'ri burchakli to'rtburchak va undan qirqib olingan doira sektoridan iborat deb qarash lozim. Bunda qirqilgan bo'lak yuzasi shartli ravishda manfiy ishora bilan olinadi.

Ox o'qini doira sektori yuzining simmetriya o'qi bo'ylab yo'naltirsak, doira sektorining og'irlik markazi shu o'qda yotadi va quyidagi formula asosida aniqlanadi:

$$x_{c_1} = \frac{2}{3} R \frac{\sin \alpha}{\alpha}.$$

Buni e'tiborga olsak

$$x_1 = OA - x_{c_1} = a\sqrt{2} - \frac{2}{3} R \frac{\sin \alpha}{\alpha} = a\sqrt{2} \left(1 - \frac{2}{3\pi}\right).$$



7.17-rasm.

Bu ifodada: R -doiraviy sektor radiusi, 2α -markaziy burchak, $\alpha = \pi/4 = 45^\circ$.

To'g'ri burchakli to'rtburchak og'irlik markazining koordinatasi quyidagiga teng bo'ladi:

$$x_{c_2} = \frac{OA}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2};$$

Ox o'qi doiraviy sektor va to'g'ri burchakli to'rtburchak simmetriya o'qi bo'lganligi uchun $y_1 = 0$, $y_2 = 0$.

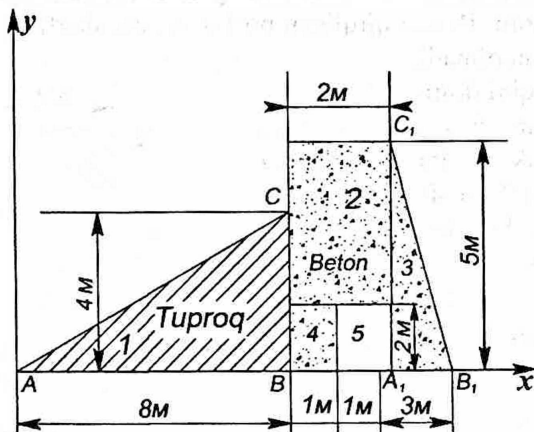
Shuning uchun jism yuzasi og'irlik markazining koordinatasi quyidagi formula asosida aniqlanadi.

$$x_2 = \frac{s_2 x_2 - s_1 x_1}{s_2 - s_1}.$$

Agar $S_2 = a^2$, $S_1 = \frac{\pi a^2}{16}$ ekanligini e'tiborga olsak,

$$x_c = \frac{a^3 \sqrt{2} - \pi a^3 \sqrt{2} \left(1 - \frac{2}{3\pi}\right) / 16}{-\pi a^2 / 16 + a^2} = 0,61a.$$

3-masala. Betonning solishtirma og'irligini $\rho_1 = 24 \text{ kN/m}^3$, tuproqnikini esa $\rho_2 = 16 \text{ kN/m}^3$ deb qabul qilib, rasmda ko'rsatilgan platina ko'ndalang kesim yuzasining og'irlik markazi topilsin (7.18-rasm).



7.18-rasm.

Yechish. Platina ko'ndalang kesim yuzasining og'irlik markazini aniqlash uchun manfiy yuzani qo'shish usulidan foydalanamiz. Platina ko'ndalang kesim yuzasini og'irlik markazi oson aniqlanadigan besh bo'lakka bo'lamiz, ularning yuzalari, og'irlik markazining kordinatalarini aniqlaymiz.

1. Uchburchak (tuproq):

$$S_1 = 8 \cdot 2 = 16 \text{ m}^2.$$

$$x_{c1} = 8 - \frac{8}{3} = 5,3 \text{ m}.$$

$$y_{c1} = \frac{4}{3} = 1,33 \text{ m}.$$

2. To'rtburchak (beton):

$$S_2 = 2 \cdot 3 = 6 \text{ m}^2$$

$$x_{c2} = 8 + 1 = 9 \text{ m}$$

$$y_{c2} = 2 + 1,5 = 3,5 \text{ m}$$

3. Uchburchak (beton):

$$S_3 = 3 \cdot 2,5 = 7,5 \text{ m}^2$$

$$x_{c3} = 10 + \frac{3}{3} = 11 \text{ m}$$

$$y_{c3} = \frac{5}{3} = 1,7 \text{ m}$$

4. To'rtburchak (beton):

$$S_4 = 1 \cdot 2 = 2 \text{ m}^2$$

$$x_{c4} = 8 + 0,5 = 8,5 \text{ m}$$

$$y_{c4} = \frac{2}{2} = 1 \text{ m}$$

5. To'rtburchak (beton):

$$S_5 = (1 \cdot 2) = -2 \text{ m}^2$$

$$x_{c5} = 9 + 0,5 = 9,5 \text{ m}$$

$$y_{c4} = \frac{2}{2} = 1 \text{ m}$$

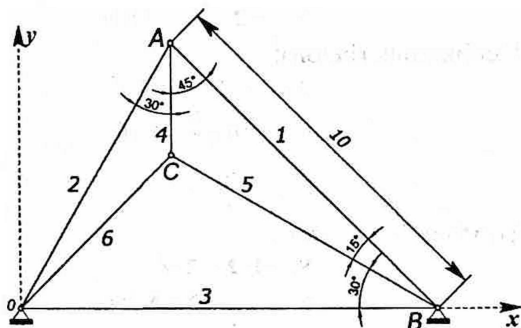
Platina qalinligi bir xil.

Shuning uchun platina ko'ndalang kesim yuzasining og'irlik markazini aniqlashda x_c va y_c ifodalarida qalinlik qisqaradi. Natijada plastina ko'ndalang kesim yuzasining og'irlik markazining kordinatalari uchun quyidagi fomulalarga ega bo'lamiz:

$$x_c = \frac{\rho_1 S_1 x_{c1} + \rho_2 \sum_{k=2}^4 S_k x_{ck} - \rho_2 S_5 x_{c5}}{\rho_1 S_1 + \rho_2 \sum_{k=2}^4 S_k - \rho_2 S_5} =$$
$$= \frac{16 \cdot 16 \cdot 5 \cdot 3 + 24 \cdot 6 \cdot 9 + 24 \cdot 7,5 \cdot 11 + 24 \cdot 2 \cdot 8,5 - 24 \cdot 2 \cdot 9,5}{16 \cdot 16 + 24 \cdot 6 + 24 \cdot 7,5 + 24 \cdot 2 - 24 \cdot 2} \cdot \frac{4593}{580} = 7,92 \text{ m}$$

$$y_c = \frac{\rho_1 S_1 y_{c1} + \rho_2 \sum_{k=2}^4 S_k y_{ck} - \rho_2 S_5 y_{c5}}{\rho_1 S_1 + \rho_2 \sum_{k=2}^4 S_k - \rho_2 S_5} =$$
$$= \frac{16 \cdot 16 \cdot 1,3 + 24 \cdot 6 \cdot 3,5 + 24 \cdot 7,5 \cdot 1,7 + 24 \cdot 2 \cdot 1 - 24 \cdot 2 \cdot 1}{16 \cdot 16 + 24 \cdot 6 + 24 \cdot 7,5 + 24 \cdot 2 - 24 \cdot 2} \cdot \frac{1142,8}{580} = 1,97 \text{ m}$$

4-masala. Tekis ferma og'irlik markazining koordinatalari topilsin. Ferma sterjenlarini har bir metrining og'irligi bir xil (7.19-rasm).



7.19-rasm.

Yechish. Tekis ferma og'irlik markazining koordinatalari quyidagi formulalar asosida aniqlanadi:

$$x_c = \frac{\sum \ell_i \cdot x_i}{\sum \ell_i};$$

$$y_c = \frac{\sum \ell_i \cdot y_i}{\sum \ell_i};$$

Bu formulalarda ℓ_i - sterjen uzunligi, $\sum \ell_i$ - ferma sterjenlarining umumiy uzunligi, x_i , y_i lar i -sterjen og'irlik markazining kordinatalari.

Ferma sterjenlari uzunligini aniqlash uchun ABO va ABC uchburchak burchaklarini aniqlaymiz:

$$\angle AOB = 180 - (30 + 45) - (15 + 30) = 60^\circ,$$

$$\angle ACB = 180 - (45 + 15) = 120^\circ.$$

Uchburchak ABO dan sinuslar teoremasiga ko'ra:

$$\frac{\sin 60^\circ}{AB} = \frac{\sin 45^\circ}{AO} = \frac{\sin 75^\circ}{BO}.$$

Uchburchak ABC dan sinuslar teoremasiga ko'ra:

$$\frac{\sin 120^\circ}{AB} = \frac{\sin 15^\circ}{AC} = \frac{\sin 45^\circ}{BC}$$

Yuqoridagi ifodalardan tekis ferma sterjenlarining uzuligini aniqlaymiz:

$$\ell_1 = AB = 10m$$

$$\ell_2 = AO = \ell_1 \frac{\sin 45^\circ}{\sin 60^\circ} = 10 \sqrt{\frac{2}{3}} = 8,165m.$$

$$\ell_3 = BO = \ell_1 \frac{\sin 75^\circ}{\sin 60^\circ} = 11,154m$$

$$\ell_4 = AC = \ell_1 \frac{\sin 15^\circ}{\sin 120^\circ} = 2,989m$$

$$\ell_5 = BC = \ell_1 \frac{\sin 45^\circ}{\sin 120^\circ} = 10 \sqrt{\frac{2}{3}} = 8,165m$$

ℓ_6 ni aniqlash uchun BCO uchburchakdan kosinuslar teoremasiga ko'ra:

$$\ell_6 = CO = \sqrt{(BO)^2 + (BC)^2 - 2 (BO) \cdot (BC) \cdot \cos 30^\circ} = \sqrt{\ell_3^2 + \ell_5^2 - 2 \ell_3 \ell_5 \cos 30^\circ} = 5,774m.$$

A, B, C, nuqtalarning koordinatalarini aniqlaymiz:

$$x_A = \ell_2 \cdot \cos 60^\circ = 8,165 \cdot 0,5 = 4,082m.$$

$$y_A = \ell_2 \cdot \sin 60^\circ = 8,165 \cdot \sqrt{3} \cdot 0,5 = 7,071m.$$

$$x_B = \ell_3 \approx 11,154m.$$

$$y_B = 0$$

$$x_C = \ell_4 - \ell_5 \cos 30^\circ = 11,154 - 8,165 \cdot 0,5\sqrt{3} = 4,082m.$$

$$y_C = \ell_5 \sin 30^\circ = 8,165 \cdot 0,5 = 4,082m.$$

Tekis ferma sterjenlari markazining (o'rtasining) koordinatalarini aniqlaymiz:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= 0,5(X_A + X_B) = 0,5(4,082 + 11,154) = 7,618 \text{ m.} \\
 y_1 &= 0,5(Y_A + Y_B) = 0,5(7,071 + 0) = 3,536 \text{ m.} \\
 x_2 &= 0,5(X_O + X_A) = 0,5(0 + 4,082) = 2,041 \text{ m.} \\
 y_2 &= 0,5(Y_O + Y_A) = 0,5(0 + 7,071) = 3,536 \text{ m.} \\
 x_3 &= 0,5(X_O + X_B) = 0,5(0 + 11,154) = 5,577 \text{ m.} \\
 y_3 &= 0,5(Y_O + Y_B) = 0,5(0 + 0) = 0 \text{ m.} \\
 x_4 &= 0,5(X_A + X_C) = 0,5(4,082 + 4,082) = 4,082 \text{ m.} \\
 y_4 &= 0,5(Y_A + Y_C) = 0,5(7,071 + 4,082) = 5,577 \text{ m.} \\
 x_5 &= 0,5(X_B + X_C) = 0,5(11,154 + 4,082) = 7,618 \text{ m.} \\
 y_5 &= 0,5(Y_B + Y_C) = 0,5(0 + 4,082) = 2,041 \text{ m.} \\
 x_6 &= 0,5(X_O + X_C) = 0,5(0 + 4,082) = 2,041 \text{ m.} \\
 y_6 &= 0,5(Y_O + Y_C) = 0,5(0 + 4,082) = 2,041 \text{ m.}
 \end{aligned}$$

Bajarilgan hisoblashlarni jadvalga kiritamiz.

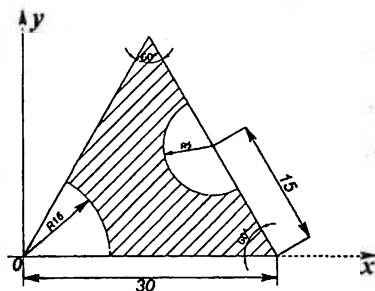
T.r	x_i (m^2)	y_i (m^2)	l_i (m^2)	$x_i l_i$ (m^2)	$y_i l_i$ (m^2)
1	7,618	3,536	10	76,180	35,355
2	2,041	3,536	8,165	16,667	28,868
3	5,577	0	11,154	62,201	0
4	4,082	5,577	2,989	12,201	16,667
5	7,618	2,041	8,165	62,201	16,667
6	2,041	2,041	5,774	11,78	11,785
Ja mi			$\sum \ell_i = 46,246$	$\sum x_i \ell_i = 241,234$	$\sum y_i \ell_i = 109,34$

Jadvaldan foydalanib, tekis ferma og'irlik markazining koordinatalarini topamiz:

$$x_c = \frac{\sum x_i \ell_i}{\sum \ell_i} = \frac{241,234}{46,246} = 5,216 \text{ m,}$$

$$y_c = \frac{\sum y_i \ell_i}{\sum \ell_i} = \frac{109,341}{46,246} = 2,364 \text{ m.}$$

5-masala. Chizmada ko'rsatilgan (7.20a-rasm) tekis shaklning og'irlik markazining koordinatalari topilsin. O'lchamlar santimetrlarda berilgan.



7.20a-rasm.

Yechish.

Berilgan tekis shaklning og'irlik markazining koordinatalari quyidagi formulalar asosida aniqlanadi.

$$x_c = \frac{\sum S_i x_i}{\sum S_i},$$

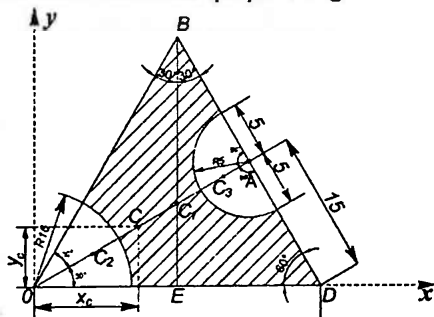
$$y_c = \frac{\sum S_i y_i}{\sum S_i}.$$

Bu formulalarda S_i tekis shakl bo'laklarining yuzalari (sathlari), $\sum S_i$ tekis shakl yuzasi (satxi), x_i , y_i -lar tekis shakl i bo'lagining og'irlik markazining koordinatalari.

Tekis shaklni bo'laklarga ajratamiz (7.20b-rasm):

1. OBD – uchburchak,
2. doiraviy sektor,
3. doira yarmi.

Doiraviy sektor va doira yarmining yuzalari manfiy ishora bilan olinadi, chunki ular tekis shakldan qirqib olingan.



7.20b-rasm.

Bo'laklar sathlari va og'irlik markazining koordinatalarini aniqlaymiz.

1. OBD uchburchak:

Uchburchakning yuzasi:

$$S_1 = \frac{OD \cdot BE}{2} = \frac{OD \cdot OD \cdot \sin 60^\circ}{2} = \frac{30 \cdot 30 \cdot 0,866}{2} = 389,7 \text{ sm}^2.$$

OBD uchburchakda

$$OC_1 = \frac{2}{3}OA = \frac{2}{3}OD \sin 60^\circ = \frac{2}{3} \cdot 30 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 17,32 \text{ sm}.$$

Shuning uchun

$$x_1 = OC_1 \cos 30^\circ = 17,32 \cdot 0,866 = 15 \text{ sm},$$

$$y_1 = OC_1 \sin 30^\circ = 17,32 \cdot 0,5 = 8,66 \text{ sm}.$$

2. Doiraviy sektor.

Doiraviy sektor yuzasi:

$$S_2 = -\alpha R^2 = -\frac{\pi}{6} 16^2 = -134,0 \text{ sm}^2.$$

Doiraviy sektorda:

$$OC_2 = \frac{2R \sin \alpha}{3\alpha} = \frac{2 \cdot 16 \cdot \sin 30^\circ}{3 \cdot \frac{\pi}{6}} = \frac{32}{\pi} = 10,186 \text{ sm}.$$

Shuning uchun:

$$x_2 = OC_2 \cos 30^\circ = 10,186 \cdot 0,866 = 8,82 \text{ sm},$$

$$y_2 = OC_2 \sin 30^\circ = 10,186 \cdot 0,5 = 5,09 \text{ sm}.$$

3. Doira yarmi.

Doira yarmining yuzasi:

$$S_3 = -\alpha R^2 = -\frac{\pi}{2} R^2 = -39,27 \text{ sm}^2.$$

Doira yarmida :

$$AC_2 = \frac{4R}{3\pi} = 2,12 \text{ sm},$$

$$OC_3 = OA - AC_3 = OD \sin 60^\circ - AC_3 = 30 \cdot 0,866 - 2,12 = 23,86 \text{ sm}.$$

Shuning uchun:

$$x_3 = OC_3 \cos 30^\circ = 23,86 \cdot 0,866 = 20,66 \text{ sm}$$

$$y_3 = OC_3 \sin 30^\circ = 23,86 \cdot 0,5 = 11,93 \text{ sm}$$

Bajarilgan hisoblashlarni jadvalga kiritamiz:

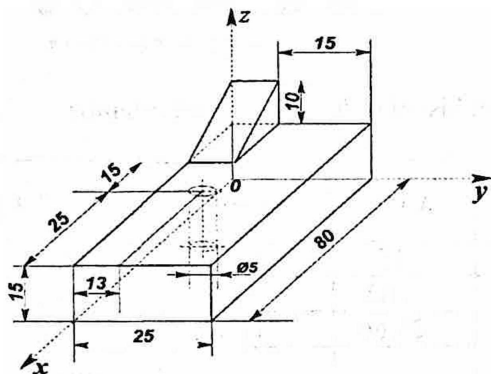
T.r	S_i (sm ²)	x_i (sm)	y_i (sm)	$x_i S_i$ (sm ³)	$y_i S_i$ (sm ³)
1	389,7	15	8,66	5845,5	3374,8
2	-134	8,82	5,09	-1181,9	-682,1
3	-39	20,66	11,93	-811,3	-468,5
Jami	216,4	-	-	3852,3	2224,3

Jadvaldan foydalanib, tekis shakl og'irlik markazining koordinatalarini topamiz:

$$x_c = \frac{\sum S_i x_i}{\sum S_i} = \frac{3852,3}{216,4} = 17,80 \text{ sm,}$$

$$y_c = \frac{\sum S_i y_i}{\sum S_i} = \frac{2224,3}{216,4} = 10,28 \text{ sm.}$$

6-masala. Chizmada ko'rsatilgan jism xajmining og'irlik markazining koordinatalari topilsin. O'lchamlar santimetrlarda berilgan (7.21-rasm).



7.21-rasm.

Yechish. Berilgan jism xajmning og'irlik markazining koordinatalari quyidagi formulalar asosida aniqlanadi:

$$x_c = \frac{\sum V_i x_i}{\sum V_i}, \quad y_c = \frac{\sum V_i y_i}{\sum V_i}, \quad z_c = \frac{\sum V_i z_i}{\sum V_i}.$$

Bu formulalarda V_i – berilgan jism i – bo'lagingining xajmi, $\sum V_i$ – berilgan jism xajmi, x_i, y_i, z_i lar jism bo'laklarining og'irlik markazining koordinatalari.

Berilgan jismni bo'laklarga ajratamiz:

- 1) To'g'ri burchakli paralleloiped,
- 2) Prizma,
- 3) Silindr.

Masalada silindr hajmi manfiy ishora bilan olinadi, chunki u jismdan qirqib olingan.

Bo'laklar xajmlari va og'irlik markazining koordinatalarini aniqlaymiz.

- 1) To'g'ri burchakli paralleloiped.

To'g'ri burchakli paralleloipedning hajmi:

$$V_1 = 80 \cdot 25 \cdot 15 = 30000 \text{ sm}^3.$$

To'g'ri burchakli parallelepiped og'irlik markazining koordinatalari:

$$x_1 = \frac{80}{2} = 40 \text{ sm},$$

$$y_1 = \frac{25}{2} = 12,5 \text{ sm},$$

$$z_1 = \frac{15}{2} = 7,5 \text{ sm}.$$

2. Prizma.

Prizmaning xajmi:

$$V_1 = \frac{40 \cdot 10 \cdot 10}{2} = 2000 \text{ sm}^3.$$

Prizma og'irlik markazining koordinatalari:

$$x_2 = \frac{1}{3}(40+0+0) = \frac{40}{3} = 13,3 \text{ sm},$$

$$y_2 = \frac{10}{2} = 5 \text{ sm},$$

$$z_2 = 15 + \frac{10}{3} = 18,3 \text{ sm}.$$

3. Silindr

Silindrning xajmi:

$$V_1 = -\pi \cdot R^2 \cdot h = -3,14 \cdot (2,5)^2 \cdot 15 = -294,4 \text{ sm}^3$$

Silindr og'irlik markazining koordinatalari:

$$x_3 = 55 \text{ sm},$$

$$y_3 = 13 \text{ sm},$$

$$z_3 = \frac{15}{2} = 7,5 \text{ sm}.$$

Bajarilgan hisoblashlarni quyidagi jadvalga kiritamiz:

T./r.	V_i (sm^3)	x_i (sm)	y_i (sm)	z_i (sm)	$V_i x_i$ (sm^4)	$V_i y_i$ (sm^4)	$V_i z_i$ (sm^4)
1	3000 0	40	12,5	7,5	1200000	375000	22500 0
2	2000	13,3	5	18,3	26600	10000	36600

3	294,4	55	13	7,5	-16192	-3827,2	-2208
Jami	3170 6				1210408	381172, 8	25939 2

Jadvaldan foydalanib, berilgan jism og'irlik markazining koordinatalarini aniqlaymiz.

$$x_c = \frac{\sum V_i x_i}{\sum V_i} = \frac{1080905}{29351} = 36,82 \text{ sm},$$

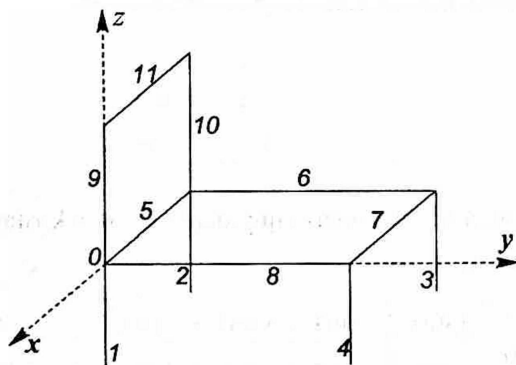
$$y_c = \frac{\sum V_i y_i}{\sum V_i} = \frac{336524}{29351} = 11,5 \text{ sm},$$

$$z_c = \frac{\sum V_i z_i}{\sum V_i} = \frac{241733}{29351} = 8,2 \text{ sm}.$$

77-§. Mustaqil o'rganish uchun talabalarga tavsiya etiladigan muammolar

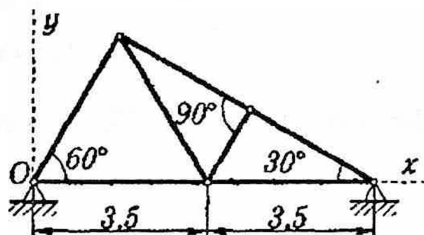
Muammo -1. Jismning og'irlik markazi koordinatalari aniqlansin

Stul ko'rinishidagi jism og'irlik markazining koordinatalari topilsin. Bu jism bir xil uzunlik va bir xil og'irlikdagi sterjenlardan tuzilgan. Sterjenlarning uzunligi 44 sm (7.22-rasm).



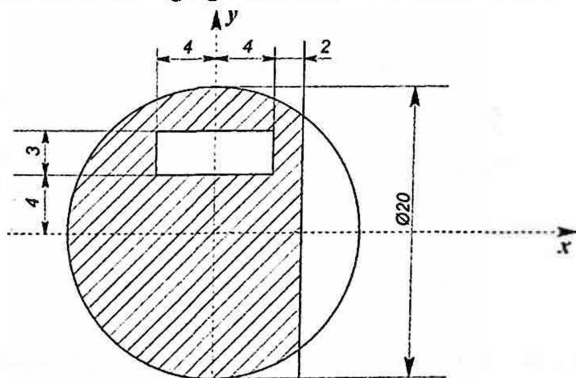
7.22-rasm.

Muammo -2. Jismning og'irlik markazi koordinatalari aniqlansin
 Tekis ferma og'irlik markazining koordinatalari topilsin:
 Hamma sterjenlar har bir metring og'irligi bir xil (7.23-rasm).



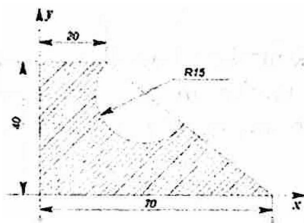
7.23-rasm

Muammo -3. Jismning og'irlik markazi koordinatalari aniqlansin



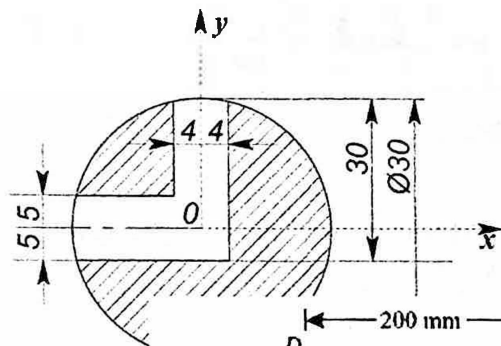
7.24-rasm

Muammo -4. Jismning og'irlik markazi koordinatalari aniqlansin

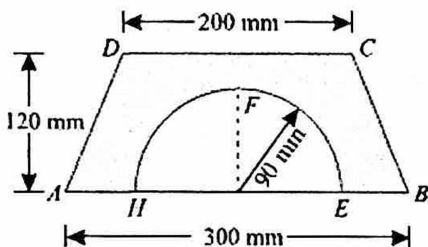


7.25-rasm

Muammo -5. Jismning og'irlik markazi koordinatalari aniqlansin



6. Rasmda figura

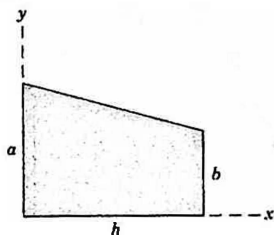


Muammo -
ko'rastilgan
og'irlik

markazining koordinatalari topilsin. Doira radiusi $R=90\text{mm}$.
Trapeziya o'lchamlari rasmda ko'rsatilgan.

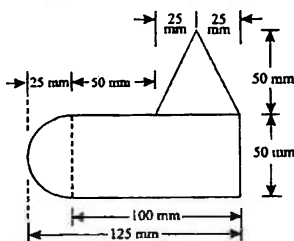
7.27-rasm

Muammo -7. Rasmda ko'rsatilgan shakl og'irlik markazining koordinatalari aniqlansin



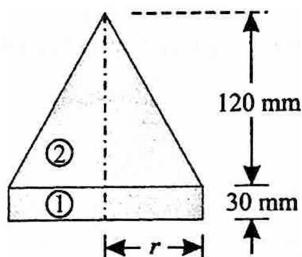
7.28-rasm

Muammo -8. Rasmda ko'rsatilgan shakl og'irlik markazining koordinatalari topilsin.



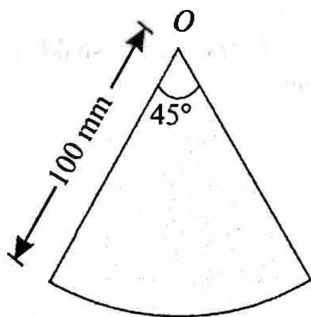
7.29-rasm

Muammo -9. Rasmda ko'rsatilgan shakl og'irlik markazining koordinatalari topilsin.



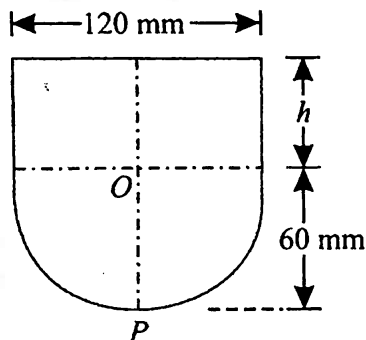
7.30 - ram

Muammo -10. Rasmda ko'rsatilgan shakl og'irlik markazining koordinatalari topilsin.



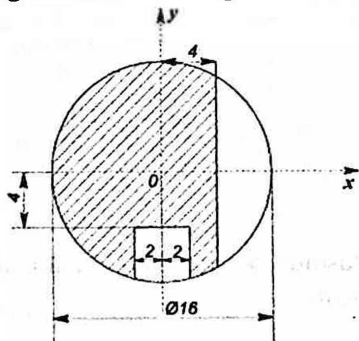
7.31- rasm

Muammo -11. Rasmda ko'rsatilgan shakl og'irlik markazining koordinatalari topilsin.



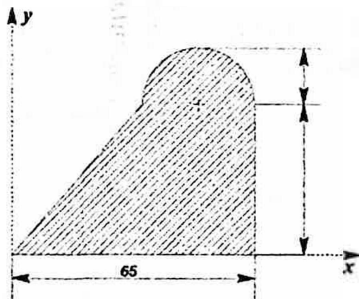
7.32- rasm

Muammo -12. Jism og'irlik markazining koordinatalari aniqlansin



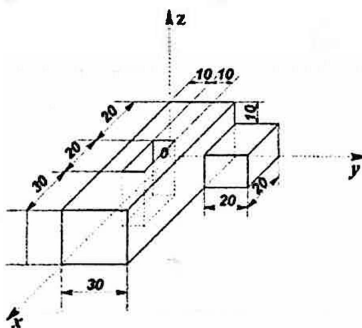
7.33- rasm

Muammo -13. Jism og'irlik markazining koordinatalari aniqlansin.



7.34- rasm

Muammo -14. Jism og'irlik markazining koordinatalari aniqlansin.



7.35- rasm

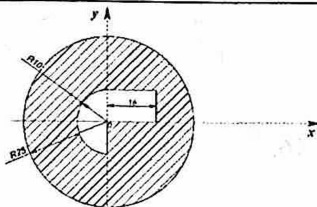
78-§. Talabalar tomonidan mustaqil bajariladigan hisob chizma ishlari variantlari

Jism og'irlik markazining koordinatalarini aniqlash.

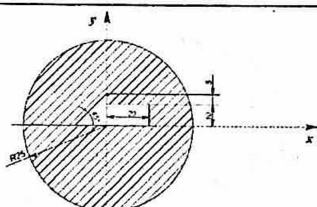
Chizmalarda ko'rsatilgan bir jinsli ingichka bir xil pogon og'irligidagi sterjenlardan tuzilgan tekis fermaning (1-6 variantlar), tekis shaklning (7-25 variantlar) yoki hajmning (26-30 variantlar) og'irlik markazining koordinatalari aniqlansin. O'lchamlar 1-6 variantlarda metrlarda, 7-30 variantlarda santimetrlarda berilgan. Jismlar 4-jadvalda ko'rsatilgan.

Variant raqamlari	Konstruksiyaning sxemalari	Variant raqamlari	Konstruksiyaning sxemalari
1.		2.	
3.		4.	
5.		6.	

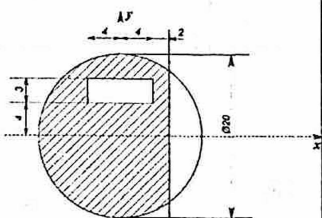
7.



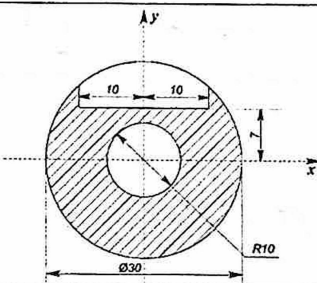
8.



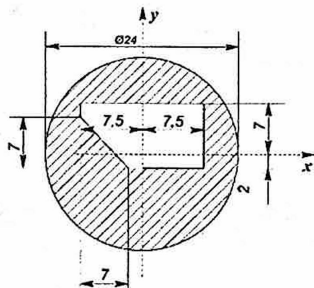
9.



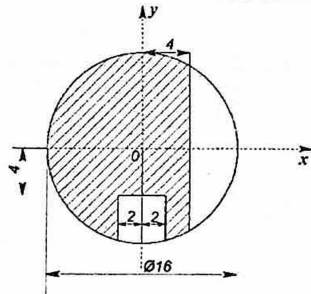
10.



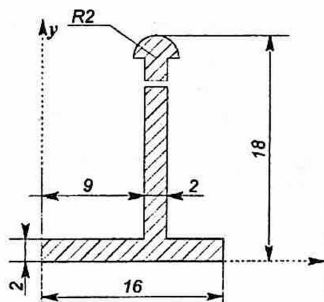
11.



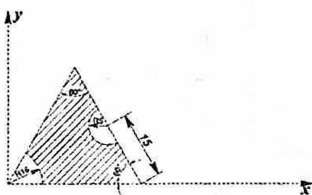
12.

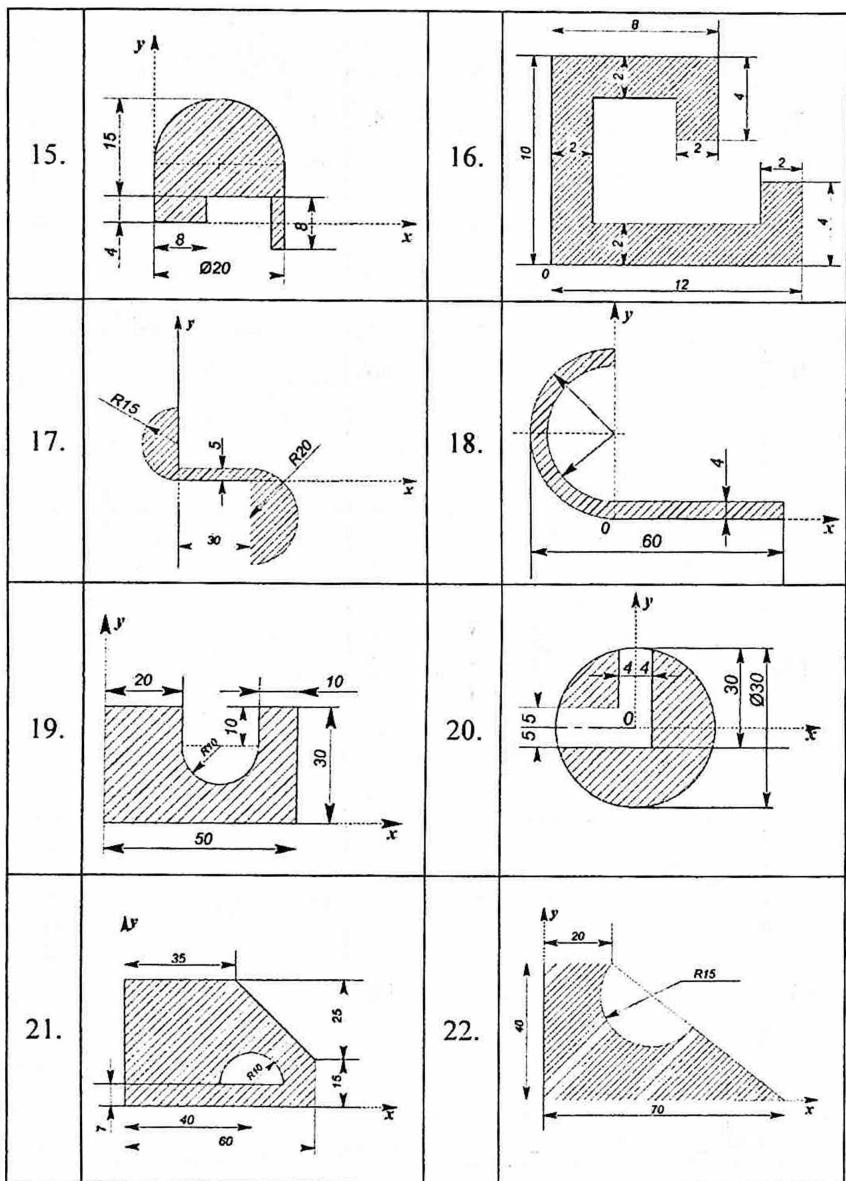


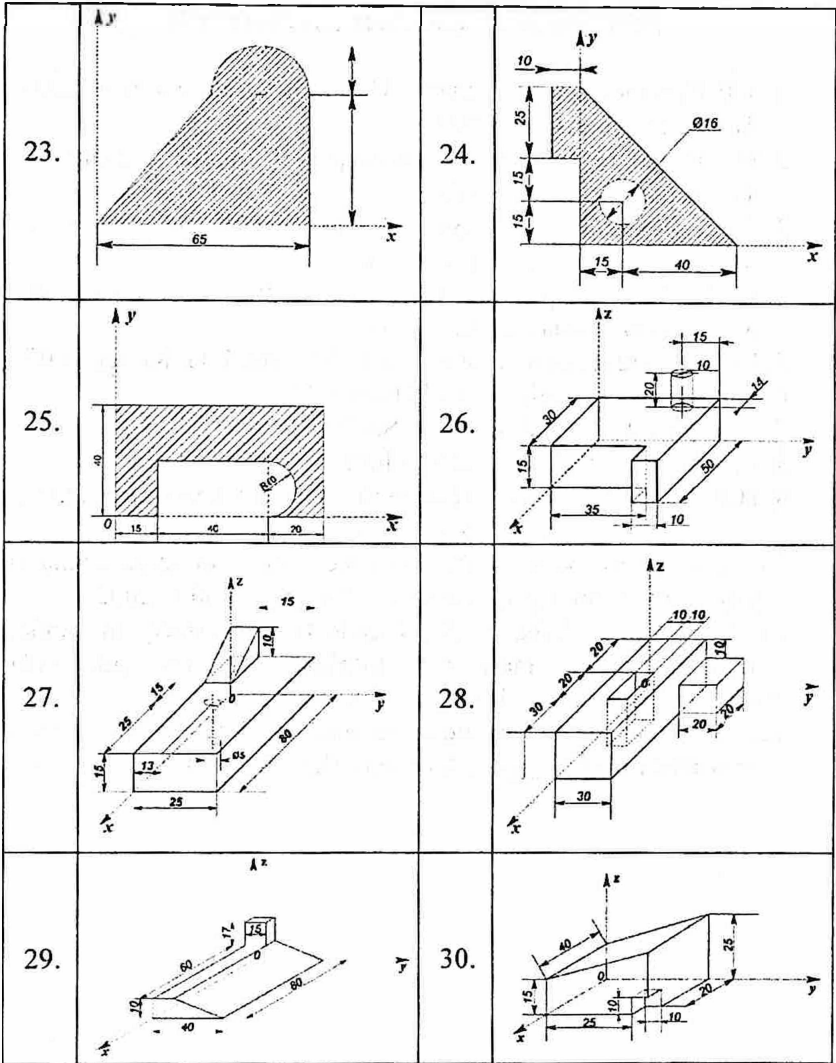
13.



14.







FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR.

1. Т.Р Рашидов ва бошқалар. «Назарий механика асослари». Тошкент «Ўқитувчи» 1990.
2. П. Шохайдарова ва бошқалар. «Назарий механика». Тошкент «Ўқитувчи» 1991.
3. А.А. Яблонский. « Курс теоретической механики». 1. Москва «Высшая школа», 1984.
4. С.М. Тарг «Краткий курс теоретической механики». Москва «Высшая школа», 1986.
5. Engineering mechanics statics. J.L. Meriam, L.G. Kraige 2007
6. Statics and Dynamics. R.C. Hibbeler 2013
7. Theoretical mechanics. Vasile Szolga 2010
8. Engineering mechanics. R.S. Khurmi 2011
9. И.В. Мещерский. «Назарий механикадан масалалар тўплами», Тошкент «Ўқитувчи», 1989.
10. А.А. Яблонский. « Назарий механикадан курс ишлари учун топшириқлар тўплами ». Т.: « Ўқитувчи », 2002.
11. Кере О.Ҳе., Вйба Ҳа.А., Грапис О.Р. “Nazariy mexanika fanidan qisqa masalalar to‘plami” (Lotin alifbosida chiqarilgan)Т. “Yangi asr avlodi” 2008
12. М.И. Бать, Г.Ю. Джанелидзе. «Теоретическая механика в примерах и задачах». I. Москва «Наука» 1990.

K.KENJAYEV

**NAZARIY MEXANIKA
MISOL VA MASALALARDA**

I-qism

STATIKA

Muharrir: – I.T. Nishanbayeva
Musahhih: – M.X. Mustafayeva
Rassom – U.Vaxidov
Kompyuterda
sahifalovchi: – I.T. Nishanbayeva

Noshirlik faoliyatini boshlagani haqida vakolatli
davlat organini xabardor qilgani to'g'risida

TASDIQNOMA

№ 3991

2020 yil 28 oktyabrda bosishga ruxsat etildi

Bichimi 60x84, 1/16. Times New Roman garniturasida.

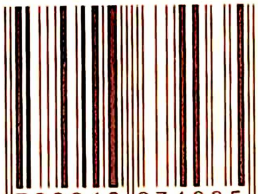
Ofset bosma. Shartli bosma tobog'i 16,5, nashr bosma tobog'i 16,5.

Adadi 100 nusxada. 17-sonli buyurtma

“Shafolat nur fayz” nashriyoti. Toshkent shahar,
Uchtepa tumani, Maxorat-71

“Shafolat nur fayz” MChJ bosmaxonasida chop etildi.
Toshkent shahar, Olmazor tumani, Nodira-19
Telefon +99899 993-83-36

ISBN 978-9943-6740-3-5



9 789943 674035