O’ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O’RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

A. AXMEDOV, D. SHAMSIYEV, R. SHAMSIYEV, SH. PIRMATOV

OLIY MATEMATIKA

I QISM

Oliy texnika o’quv yurtlari talabalari uchun darslik

Toshkent 2017

A.B.Axmedov, D.N.Shamsiyev, R.N. Shamsiyev, Sh.T.Pirmatov Oliy mtematika. 1 qism darslik. T.:2017.-416 b.

Ushbu darslik oily ta'lim muassasalarining texnika yo'nalishlari bakalavrlari uchun "Oliy matematika" fani dasturi asosida yozilgan bo'lib fanning chiziqli algebra, vektorlar algebrasi, analitik geometriya, matematik analizga kirish, bir o'zgaruvchili funksiyaning differensial hisobi, hosilaning tadbiqi, ko'p o'zgaruvchili funksiyalar, aniqmas integral, aniq integral, integralning tadbiqlari mavzulari bayon qilingan. Paragraflarning har birida mavzuga oid asosiy tushunchalar keltirilgan, tegishli teoremalar isboti bilan va unga doir namunaviy misollar yechimlari biln berilgan. Mavzuga oid mustaqil yechish uchun misollar ham berilgan.

Taqrizchilar:

Sh. Qosimov	O'zMU, Differensial tenglamalar va matematik fizika kafedrasi professori,fizika-matematika fanlari doktori;
B. Xudoyorov	TIMI**,** Oliy matematika kafedrasi mudiri**,** texnika fanlari doktori;
G. Shodmonov	ToshDTU**,** Oliy matematika kafedrasi dotsenti**,** fizika-matematika fanlari nomzodi;
A.Abdukarimov	ToshDTU**,** Oliy matematika kafedrasi dotsenti**,** fizika-matematika fanlari nomzodi;

Mazkur darslik Islom Karimov nomidagi Toshkent davlat texnika universitet kengashi tomonidan nashrga tavsiy etilgan.

Annotatsiya

Darslikda Oliy matematika kursiga kirgan asosiy material: chiziqli va vektor algebra, to'g'ri chiziq va tekislik, ikkinchi tartibli chiziqlar va sirtlar, funksiya, limit, uzluksizlik, hosila va differensial va ularning bir o'zgaruvchili funksiyani tekshirishga tadbiqi, ko'p o'zgaruvchili funksiya tushunchasi va ularning differensial hisobi, aniqmas va aniq integral, aniq integralning fizik tadbiqi, xosmas integrallar bayon qilingan.

Darslik mualliflar tomonidan Islom Karimov nomidagi Toshkent Davlat texnika Universitetida o'qigan ma'ruzalari bazasida yaratilgan.

Texnika oily o'quv yurtlari talabalariga mo'ljallangan. O'qituvchi va aspirantlarga ham foydali bo'lishi mumkin.

Аннотация

В учебнике излагается основной материал, входящий в курс Высшей математики: линейная алгебра, векторная алгебра, прямые и плоскости, линии и поверхности второго порядка, понятие функции, предел, непрерывность, производная и дифференциал с их использованием при исследовании функций одного переменного, понятие функции нескольких переменных и их дифференциальное исчисление, неопределенный и определенный интеграл, физические приложения определенного интеграла, несобственные интегралы. Приведены примеры и задачи физического, механического и технического содержания.

Учебник написан на базе курса лекций, прочитанных авторами в Ташкентском Государственном техническом Университете имени Ислама Каримова.

Для студентов технических вузов. Может быть, полезно преподавателям и аспирантам.

Summary

In the textbook the main material entering course of the Higher mathematics is explained: the linear algebra, a vector algebra, straight lines and the planes, lines and surfaces of the second order, a concept of function, a limit, continuity, a derivative and differential with their use in case of a research of functions of one variable, a concept of function of several variables and their differential calculus, indefinite and definite integral, physical applications of definite integral, the improper integrals. Examples and tasks physical, mechanical and maintenance are given.

The textbook is written on the basis of a course of lectures, read by authors at the Tashkent State technical University of Islam Karimov.

For students of the technical universities. Perhaps, it is useful for teachers and graduate students.

KIRISH

Respublikamizda olib borilayotgan demokratik islohotlar, iqtisodiyotning turli sohalariga bozor munosabatlarining jadal kirib kelishi, jahon bozorida raqobatlardan mahsulotlarni ishlab chiqarish strategiyasi va “Kadrlar tayyorlash milliy dasturi” asosida ta’lim sohasida ustivor yo‘nalishlarni belgilash,chuqur bilimga ega barkamol avlodni tarbiyalash, yoshlarni o‘z ustida mustaqil ishlashga o‘rgatish va tashabbusinioshirish –eng muhim ahamiyatga ega bo‘lgan vazifalardan biri sifatida qaralmoqda.

SHu dolzarb masalaga oz bo‘lsa ham o‘z hissalarini qo‘yish maqsadida Islom Karimov nomidagi Toshkent Davlat texnika universiteti “Oliy matematika” kafedrasi professori A.B.Axmedov, dotsentlari R.N.Shamsiev, D.N.Shamsiev va SH.T. Pirmatovlar bir qancha yillar davomida Toshkent Davlat texnika universiteti talabalariga o‘qigan ma’ruzalari va olib borilgan amaliy mashg‘ulotlari asosida to‘plangan tajribalridan foydalanib oliy matematika kursidan darslik yozishga jazm etishdi.

Kitobxon e’tiboriga havola etilayotgan mazkur “Oliy matematika” darsligi oliy texnika o‘quv yurtlari talabalari uchun mo‘ljallangan. Unda keltirilgan mavzular oliy texnika o‘quv yurtlarining barcha texnik yo‘nalishlari uchun oliy texnika o‘quv yurtlari uchun tasdiqlangan namunaviy o‘quv dasturiga to‘la mos keladi.

Darslikda keltirilgan barcha mavzular mumkin qadar qat’iy matematik tilda va tushunarli bo‘lishiga harakat qilindi, hamda har bir mavzu ko‘plab misol va masalalar bilan ta’minlandi.

Darslik oliy texnika o‘quv yurtlari talabalari uchun yozilayotganligi e’tiborga olinib ayrim teoremalar isbotsiz keltirildi. Bunday teoremalar isboti bilan qiziqqan kitobxon uni adabiyotlar ro‘yxatidagi asosiy adabiyotlardan topish mumkin.

Darslikning 1,2-boblari A.B.Axmedov, 3,4,5,6-boblari R.N.Shamsiyev, SH.T.Pirmatov, 7,8,9,10-boblari D.N.SHamsiyev tomonidan yozilgan .

Darslikning qo‘l yozma matnini sinchkovlik bilan o‘qib chiqib o‘zlarining qimmatbaho maslahatlarini ayamagan taqrizchilar fizika-matematika fanlari nomzodi, dotsent G‘. SHodmonov va fizika-matematika fanlari nomzodi, dotsent A. Abdikarimovlarga mualliflar o‘zlarining alohida minnatdorchiliklarini bildiradi.

Darslikda quyidagi belgilashlardan foydalanilgan:

◄, ►- teorema isbotining boshlanishi va oxiri;

►,◄- misol yoki masala yechimining boshlanishi va oxiri.

I – BOB. CHIZIQLI VAVEKTOR ALGEBRASI

1.1. Matritsa va ular ustida chiziqli amallar

Kundalik hayotimizning turli jabhalarida, hususan fan, texnika va iqtisodiyotning xilma-xil sohalarida elementlari haqiqiy, kompleks, mantiqiy va simvollardan iborat bo’lib, o’zi hech qanday qiymatga ega bo’lmagan jadvallar bilan ish ko’rishga tog’ri keladi. Masalan, chiziqli tenglamalar sistemasini ba’zi usullar yordamida yechishda qulaylik uchun faqat noma’lumlar koeffitsiyentlaridan tuzilgan jadvallardan foydalaniladi.

1.1-Misol. Hafta davomida talabalar uchta fan bo‘yicha necha soat shug‘ullanishini quyidagi jadval ko‘rinishida beramiz:

Fanlar nomi	Dushanba	Seshanba	Chorshanba	Payshfnba	Juma	Shanba	Yakshanba
Matematika	4	3	2	2	1	5	4
Fizika	2	1	1	4	6	2	1
Ingliz	1	4	3	5	2	1	1

Satr va ustun izoxlarni yo‘qotsak, 3 ta qator va 7 ta ustunli jadval hosil bo‘ladi.

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 2 & 1 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 4 & 6 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 5 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.1-Ta’rif. Biror a_{ij} $(i=\overline{1,m},\quad j=\overline{1,m})$ qiymatlar to’plamining mxn ta elementlari-dan tuzilgan to’g’ri burchakli jadval ***matritsa*** deb ataladi va quyidagicha yoziladi

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \ldots\ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \ldots\ldots\ldots a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & a_{m4} \ldots\ldots\ a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{yoki } A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad (1.1)$$

Birinch i indeksi satr, j – ustun raqamini belgilaydi. Ularning kesishish nuqtasida esa matritsaning a_{ij} elementi turadi. Matritsalar odatda lotin alifbosining katta harflari bilan belgilanadi. $A, B, C,\ldots$. Agar matritsa m ta satr va n ta ustundan iborat bo'lsa, ta'rifga asosan uning o'lchami mxn bo'ladi. Zarur hollarda u A_{mxn} kabi belgilanadi. Agar matritsaning a_{ij} elementlari sonlardan iborat bo'lsa, matritsa sonli matritsa deyiladi. Agar matritsaning a_{ij} elementlari funksiyalardan iborat bo'lsa, funksional matritsa, vektorlardan iborat bo'lsa, vektor matritsa deyiladi va hakozo.

Agar matritsaning ustunlari va satrlari soni teng, ya'ni $m=n$ bo'lsa, kvadrat matritsa deyiladi. Agar $i=1$ bo'lsa, satr matritsa, $j=1$ bo'lsa, ustun matritsaga ega bo'lamiz. Ularni mos ravishda vektor-satr va vektor-ustun deb ham ataymiz.

1.2-Ta'rif. Barcha elementlari noldan iborat matritsaga ***nol matritsa*** deyiladi.

Masalan.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (0\ 0\ 0), \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

1.3-Ta'rif. Agar A kvadrat matritsaning $i > j \ \ (i < j)$ munosabatni qanoatlantiruvchi barcha a_{ij} elementlari 0 ga teng bo'lsa, u holda A matritsaga ***yuqori (quyi) uchburchak matritsa*** deyiladi.

Demak, 1.3-ta'rifga asosan:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \textbf{-yuqori}\ B = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \textbf{-quyi}$$

uchburchakli matritsalardir.

Agar A matritsada $i \neq j$ uchin, $a_{ij} = 0$ bo'lsa, ***diagonal*** matritsa hosil bo'ladi.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

1.4-Ta'rif. Bosh diagonali elementlari birga, qolgan elementlari nolga teng kvadrat matritsa ***birlik matritsa*** deb ataladi va E harfi bilan belgilanadi.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

Matritsalar ustida amallar. Matritsalarni fan va texnika sohalarida qo‘llash uchun ular ustida qo‘shish, ayirish va ko‘paytirish kabi amallarni kiritish talab qilinadi.

1.5-Ta’rif.(*Teng matritsalar*)Agar ikkita *A* va *B* matritsalar o‘lchamlari teng bo‘lib, elementlari uchun $a_{ij}=b_{ij}$ shart bajarilsa, ular teng deyiladi.

Matritsalar tengligini quyidagi misol orqali tushuntiramiz:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & x \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}, \quad C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 7 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

Agar *A* matritsadagi *x* element 6 ga teng bo‘lsa *A* va *B* matritsalar teng bo‘ladi. Qolgan hollarda esa ular teng emas. *x* element qanday bo‘lmasin baribir *A* matritsa *C* matritsalarning o‘lchamlari har xil bo’lganligi uchin ular teng bo‘la olmaydi.

1.6-Ta’rif. Bir hil *mxn* o‘lchamli *A* va *B* matritsalarning yig‘indisi (ayirmasi) huddi elementi *A* va *B* matritsalarning mos elementlarining yig‘indisidan (ayirmasidan) iborat *mxn* matritsani hosil qiladi.

$$(A\pm B)_{ij}=(A)_{ij}\pm(B)_{ij}=a_{ij}\pm b_{ij} \tag{1.4}$$

1.2-Misol. $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 8 & 3 & -2 \\ 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad F=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 7 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ mumkin bo‘lgan matritsalarni qo‘shing va ayiring.

► $A+B=\begin{pmatrix} 2 & 6 & 9 \\ 10 & 4 & 2 \\ 8 & 10 & 5 \end{pmatrix}, \quad A-B=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 6 & 2 & -6 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$ Turli o’lchamli *F* bilan *A* va B matritsalar o‘lchamlari har xil trfnligidan ularni qo‘shish yoki ayirish mumkin emas.

1.7-Ta’rif. *A* matritsani ixtiyoriy *c* soniga ko‘paytirish natijasida *B=cA* matritsa elementlari *A* matritsaning elementlarini *c* soniga ko‘paytirishdan hosil bo‘ladi.

$$cA = \begin{pmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \dots & ca_{1j} & \dots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \dots & ca_{2j} & \dots & ca_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ ca_{i1} & ca_{i2} & \dots & ca_{ij} & \dots & ca_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ ca_{m1} & ca_{m2} & \dots & ca_{mj} & \dots & ca_{mn} \end{pmatrix}$$

$$B=cA=c(A)_{ij}=ca_{ij} \tag{1.5}$$

Masalan, $\lambda=-2$, $A=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 7 & -1 \end{bmatrix}$ berilgan bo’lsin. U holda

$$\lambda A=-2\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 7 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -6 & 0 \\ -14 & 2 \end{bmatrix}.$$

Bir xil o‘lchamli $A_1,A_2,\dots,A_n$ matritsalar va $c_1,c_2,..,c_n$ haqiqiy sonlar uchin

$$c_1A_1+c_2A_2+\dots+c_nA_n=\sum_{j=1}^{n} c_jA_j \tag{1.6}$$

ifodaga berilgan matritsalarning ***chiziqli kombinatsiyasi*** deyiladi.

1.3-misol. $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -3 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ bo‘lsa, $5A-2B$ matritsani toping.

► $5A=\begin{pmatrix} 10 & -15 & 5 \\ -5 & 0 & -10 \end{pmatrix}$, $2B=\begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 \\ -6 & 2 & -8 \end{pmatrix}$, $5A-2B=\begin{pmatrix} 10-8 & -15-6 & 5-4 \\ -5+6 & 0-2 & -10+8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -21 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

Shunday qilib, $5A-2B=\begin{pmatrix} 2 & -21 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.◄

1.8-Ta’rif. O‘lchami $m\times p$ bo‘lgan A matritsa va o‘lchami $p\times n$ bo‘lgan B matritsalarning ko‘paytmasi o‘lchami $m\times n$ bo‘lgani:

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj},\ i=1,\dots.,m,\ j=1,\dots,n. \tag{1.7}$$

cc

C matritsaga teng bo’ladi.

Demak, c_{ij} element A matritsaning i - satrini B matritsaning j - ustuniga ko‘paytmasining yig‘indisidan iboratdir.

Matritsalarni ko‘paytirish amali umumiy holda kommutativ emas, ya’ni $AB\neq BA$. Haqiqatdan ham, AB ko‘paytma mavjud bo‘lsa, o‘lchamlari to‘g‘ri kelmasligi sababli BA ko‘paytma umuman mavjud bo‘lmasligi mumkin. Agar AB va BA lar mavjud bo‘lsa ham, ularning o‘lchamlari har hil bo‘lishi mumkin.

Bir xil o‘lchamli kvadrat matritsalar uchun *AB* va *BA* ko‘paytmalar mavjud va o‘lchami bir xil bo‘ladi, ammo umumiy holda mos elementlari teng emas.

Agar *A* *m*x*n* o‘lchamli matritsa bo‘lsa, u holda quyidagi tenglik o‘rinli:

$$A\cdot E = A \text{ va } EA = A.$$

1.4-Misol. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ matritsa berilgan. Yuqoridagi tenglikni isbotlang.

$$\blacktriangleright\ AE = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix},\ EA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \blacktriangleleft$$

1.9-Ta’rif. *A* ning ***transponirlangan matritsa****si* deb, mos satrlari ustunlari bilan almashtirilgan $A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ matritsaga aytiladi.

Masalan

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ uchin } \quad A^T = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Elementlari bosh diagonalga nisbatan ***simmetrik*** *A* kvadrat matritsa uchin $A=A^T$ munosabat o‘rinli bo‘ladi. Masalan

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 3 & 8 & 2 \\ -4 & 2 & 7 \end{pmatrix} = A^T$$

Agar *A* kvadrat matritsada $A=-A^T$ bo‘lsa, ya’ni $a_{ij} = -a_{ji}$ (bundan $i = j$ lar uchun $a_{ii} = -a_{ii} = 0$) bajarilsa, bunday matritsaga ***asimmetrik matritsa*** deb ataladi. Masalan:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

1.5-misol. Agar

$$A=\begin{pmatrix}4 & -5 & 8\\ 1 & 3 & -1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}-1 & 5\\ -2 & -3\\ 3 & 4\end{pmatrix}$$ bo’lsa, *AB* va *BA* ni toping.

► $AB=C_{2x2}=\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{pmatrix}\cdot$ Bu yerda

$$c_{11}=4(-1)+(-5)(-2)+8\cdot3=30;\ c_{12}=4\cdot5+(-5)(-3)+8\cdot4=67;$$

$$c_{21}=1(-1)+3(-2)+(-1)3=-10;\ c_{22}=1\cdot5+3(-3)+(-1)4=-8.$$

Natijada $AB=\begin{pmatrix}30 & 67\\ -10 & -8\end{pmatrix}$. $BA=C_{3x3}=\begin{pmatrix}\tilde{c}_{11} & \tilde{c}_{12} & \tilde{c}_{13}\\ \tilde{c}_{21} & \tilde{c}_{22} & \tilde{c}_{23}\\ \tilde{c}_{31} & \tilde{c}_{32} & \tilde{c}_{33}\end{pmatrix}\cdot$ Bu yerda

$$\tilde{c}_{11}=(-1)4+5\cdot1=1;\qquad \tilde{c}_{12}=(-1)(-5)+5\cdot3=20;\qquad \tilde{c}_{13}=(-1)8+5(-1)=-13;$$

$$\tilde{c}_{21}=(-2)4+(-3)1=-11;\quad \tilde{c}_{22}=(-2)(-5)+(-3)3=1;\quad \tilde{c}_{23}=(-2)8+(-3)(-1)=-13;$$

$$\tilde{c}_{31}=3\cdot4+4\cdot1=16;\qquad \tilde{c}_{32}=3(-5)+4\cdot3=-3;\qquad \tilde{c}_{33}=3\cdot8+4(-1)=20;$$

va quyidagiga ega bo’lamiz. $BA=\begin{pmatrix}1 & 20 & -13\\ -11 & 1 & -13\\ 16 & -3 & 20\end{pmatrix}$. Shunday qilib, AB $\neq$ BA.◄

1.6-misol. $A=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -5\\ -1 & 2\end{pmatrix}$ matritsalar berilgan. *AB* va *BA* larni toping.

►$AB=\begin{pmatrix}3\cdot1+5(-1) & 3(-5)+5\cdot2\\ 1\cdot1+2(-1) & 1(-5)\ +2\cdot2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -5\\ -1 & -5\end{pmatrix}$. $BA=\begin{pmatrix}1\cdot3+(-5)\cdot1 & 1\cdot5+(\ 5)\cdot2\\ (-1)\cdot3+2\cdot1 & (-1)\cdot5+2\cdot2\end{pmatrix}=$ $\begin{pmatrix}-2 & -5\\ -1 & -5\end{pmatrix}$.Bundan $AB=BA$.◄

1.7-misol. A=$\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & 1\\ 2 & 5\end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix}2 & -6 & 1\\ 1 & 3 & -1\end{pmatrix}$, C=$\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 4\end{pmatrix}$, bo’lsa, *(AB)C* va *A(BC)* ni toping.

►$AB=\begin{pmatrix}5 & 3 & -2\\ -1 & 9 & -2\\ 9 & 3 & -3\end{pmatrix}$, $(AB)C=\begin{pmatrix}-7\\ 11\\ -15\end{pmatrix}$, $BC=\begin{pmatrix}-10\\ 1\end{pmatrix}$. $A(BC)=\begin{pmatrix}-7\\ 11\\ -15\end{pmatrix}$ ya’ni (AB)C=A(BC)◄

Matritsa ustida amallarning asosiy xossalari:

1. *A+B = B+A*
2. *A+(B+C)=(A+B)+C*
3. *A·(B·C) =(A·B)·C*
4. *A· (B+C)=A·B+A·C*
5. *(B+C)·A=B·A+C·A*
6. *A·(B-C)=A·B-A·C*
7. *(B-C)·A=B·A-C·A*
8. *a(B+C)=aB+aC*
9. *a(B-C)= aB-aC*
10. *(a+b)·C=aC+bC*
11. *(a-b)·C=aC+bC*
12. *a(bC)=(ab)C*
13. *a(BC)= (aB)C= B (a C)*

1.2. Determinantlar va ularning xossalari. n-tartibli determinant haqida tushuncha

1.10-Ta'rif. ***n-tartibli determinant*** deb kvadrat jadval ko'rinishida yoziluvchi va determinantning elementlari deb ataluvchi, berilgan $a_{ij}\ (i,j=\overline{1,n})$ sonlar orqali (ular hammasi n^2) hisoblanuvchi Δ_n songa aytiladi:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \ldots\ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \ldots\ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (1.8)$$

bu yerda *i* indeks (1.9) kvadrat jadvalning satr raqamini, *j*-esa ustun raqamini ko'rsatadi. Ularning kesishgan joyida a_{ij} element joylashadi.

Determinantning asosiy diagonali $a_{11},\ a_{22},\ldots,\ a_{nn}$ elementlardan iborat.

Δ_n determinantning a_{ij} elementlari funksiyalardan iborat bo'lsa, umumiy holda determinant funksiya bo'ladi (husuan, son bo'lishi ham mumkin).

Masalan:

$$\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x; \quad \begin{vmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1; \quad \begin{vmatrix} tgx & 2 \\ \frac{1}{2} & ctgx \end{vmatrix} = 0.$$

Δ_3 determinantni hisoblashda ***uchburchaklar qoidasi*** (Sarryus qoidasi) :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Masalan: $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 6 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot 6\cdot 1 + 2\cdot 5\cdot 2 + 4\cdot(-1)\cdot(-3) - ((-3)\cdot 6\cdot 2 + 2\cdot 4\cdot 1 + 5\cdot(-1)\cdot 1) = 71$

Determinantlarning asosiy xossalari:

1. Determinantning satr elementlarini mos ustun elementlari bilan almashtirsak determinant miqdori o‘zgarmaydi, ya’ni

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

2. Determinantning satr (yoki ustun) elementlari biror k songa ko‘paytirilsa, determinantning qiymatini shu songa ko‘paytirishga teng kuchlidir, ya’ni

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

3. Nolli satr (yoki ustun)ga ega bo‘lgan determinant nolga teng:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

4. Ikkita bir hil satr (yoki ustun)ga ega bo‘lgan determinant nolga teng:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

5. Ikkita satr (yoki ustun) elementlari o‘zaro proporsional bo‘lgan determinant nolga teng:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

6. Determinantda ikkita satr (yoki ustun) elementlari o‘zaro almashtirilsa, uning qiymati faqat ishorasini almashtiradi

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

7. Determinantning biror satr (yoki ustun) elementlari ikkita qo‘shiluvchining yigindisidan iborat bo‘lsa, u holda bu determinant ikki determinant yigindisidan iborat bo‘ladi, ya’ni

$$\begin{vmatrix} b_1+c_1 & b_2+c_2 & b_3+c_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

8. Determinantning biror satr (yoki ustun) elementlarini biror songa ko‘paytirib, ikkinchi satr (yoki ustun)ning mos elementlariga qo‘shilsa, determinantning qiymati o‘zgarmaydi, ya’ni

$$\begin{vmatrix} a_{11}+ka_{21} & a_{12}+ka_{22} & a_{13}+ka_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Ushbu hossalarning o’rinli ekanligini ***Sarryus qoidasi***dan foydalanib isbotlashni o’quvchining o’ziga havola qilamiz.

Minorlar va algebraik to‘ldiruvchilar

1.11-Ta’rif. Agar *A* kvadrat matritsa bo‘lsa, u holda uning minori M_{ij} ko‘rinishida belgilanadi va u *A* matritsaning *i* – satri, *j* – ustunini o‘chirishdan hosil bo‘ladi. $A_{lk}=(-1)^{1+k}M_{1k}$ soni matritsaning algebraik to‘ldiruvchisi deyiladi va n –tartibli determinant uchun

$$\Delta_n = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik}\ , \tag{1.9}$$

o’rinlidir. Bu yerda M_{1k} minorlar Δ_n determinantdan *l* – satr va *k*-ustunni o’chirishdan hosil bo’lgan (*n–1*) –tartibli determinantdir.

n=*2* uchun $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12}.\quad A_{11}=a_{22},\ \ A_{12}=-a_{21}.$

n=*3* uchun $$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot A_{11} + a_{12}\cdot A_{12} + a_{13}\cdot A_{13}\ , \tag{1.10}$$

$$A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix};\ A_{12}=(-1)^{1+1}M_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix};$$

$$A_{13}=(-1)^{1+1}M_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix};$$

1.8 – Misol.

► $\Delta_2=\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}=3\cdot 5-(-2)\cdot 1=17;$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} 4 & 7 & -2 \\ 3 & -1 & 5 \\ 5 & 0 & 7 \end{vmatrix}=4\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 7 \end{vmatrix}-7\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}-2\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}=4(-7)-7(21-25)-2\cdot 5=-10;$$

$$\Delta_4=\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}=-1\begin{vmatrix} 4 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}-1\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 4 \end{vmatrix}+2\begin{vmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 1 & -3 & 0 \\ 5 & 0 & 4 \end{vmatrix}-0\begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \\ 5 & 0 & 0 \end{vmatrix}=$$

$$=-(4\cdot(-4)+3\cdot 4-2\cdot 0)-(0\cdot(-4)-4-2\cdot 5)+(0\cdot(-12)-4\cdot 4-2\cdot 15)=-74.$$ ◄

Uchinci tartibli determinant ucun (1.10) formula o'rinli ekanligini ko'rsatamiz:

$$\det(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}=$$

$$=a_{11}\left(a_{22}a_{33}-a_{32}a_{23}\right)-a_{12}\left(a_{21}a_{33}-a_{31}a_{23}\right)+a_{13}\left(a_{21}a_{32}-a_{31}a_{22}\right)=$$
$$=-a_{13}a_{22}a_{31}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}+a_{11}a_{22}a_{33}.$$

(1.9) formula ixtiyoriy satr yoki ustun elementlari va ulargagina mos bo'lgan algebraik to‘ldiruvchilar ko'paytmasining yig'ndisiga teng bo'ladi, ya'ni:

$$\begin{aligned}&\det(A)=\\&a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=\\&a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+a_{31}A_{31}=\\&a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{32}A_{32}=\ldots..\end{aligned}.$$

1.9 –Misol. Berilgan Δ determinant uchun a_{12}, a_{32} elementlarning minorlari va algebraik to'ldiruvchilarni toping. Δ determinantni: ***a)*** birinchi satr elementlari bo'yicha yoyib; ***b)*** ikkinchi ustun elementlari bo'yicha yoyib; ***c)*** birinchi satr elementlarini nolga aylantirib, hisoblang.

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}.$$

►Quyidagilarni topamiz:

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -8-16+6+12+4-16=-18,\ M_{32} = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -12+12-12-8=-20$$

a_{12}, a_{32} elementlarning algebraik to'ldiruvchilari mos ravishda quyidagilarga teng: $A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=-(-18)=18,\ A_{32}=(-1)^{3+2}M_{32}=-(-20)=20$

a) Δ determinantni birinchi satr elementlari bo'yicha yoyib hisoblaymiz:

$$\Delta_4 = a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}+a_{14}A_{14} = -3\begin{vmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} -2\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} +1\begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 4 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$=-3(8+2+4-4)-2(-8-16+6+12+4-16)+(16-12-4+32)=38;$$

b) Δ determinantni ikkinchi ustun elementlari bo'yicha yoyib hisoblaymiz:

$$\Delta_4 = -2\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} -2\begin{vmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} +1\begin{vmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$=-2(-8+6-16+12+4-16)-2(12+6-6-16)+(-6+16-12-4)=38;$$

c) Δ determinantni birinchi satr elementlarini nolga aylantirib, hisoblaymiz. Determinantning uchinchi ustunini 3 ga ko'paytiramiz va birinchi ustunga qo'shamiz, so'ngra uchinchi ustunini -2 ga ko'paytiramiz va ikkinchi ustunga qo'shamiz. U holda birinchi satrning bitta elementidan boshqa barcha elementlari nollardan iborat bo'ladi Hosil bo'lgan determinantni birinchi satr elementlari bo'yicha yoyib hisoblaymiz:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -14 & -6 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -(-56+18)=38$$ ◄

1.10-Misol. Determinantni hisoblang:

$$\Delta_4=\begin{vmatrix} 30 & -10 & 120 & 80 \\ -5 & 3 & -34 & -23 \\ 1 & 1 & 3 & -7 \\ -9 & 2 & 8 & -15 \end{vmatrix}$$

►Determinantlarning 2-xossasiga asosan birinchi satrdan ko'paytuvchi 10 ni chiqaramiz, hosil bo'lgan satrni ketma-ket 3,1 va 2 sonlariga ko'paytirib, mos ravishda ikkinchi, uchinchi va to'rtinchi satrlarga qo'shamiz. U holda quyidagiga ega bo'lamiz

$$\Delta_4= 10\begin{vmatrix} 3 & -1 & 12 & 8 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 15 & 1 \\ -3 & 0 & 32 & 1 \end{vmatrix}$$

Determinantlarni ikkinchi ustun elementlari bo'yicha yoyish mumkin. U holda

$$\Delta_4= 10\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 4 & 15 & 1 \\ -3 & 32 & 1 \end{vmatrix}$$

Sarryus qoidasi bo'yicha hisoblash mumkin bo'lgan uchinchi tartibli determinantni hosil qildik yoki buni ham yuqoridagi usul bilan bitta ikkinchi tartibli determinantni hisoblashga olib kelish mumkin.

Haqiqatan ham, hosil qilingan determinantning ikkinchi va uchinchi satrlaridan birinchi satrni ayirsak, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\Delta_4= 10\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 13 & 0 \\ -7 & 30 & 0 \end{vmatrix} = 10\begin{vmatrix} 0 & 13 \\ -7 & 30 \end{vmatrix} = 10\cdot 7\cdot 13 = 910 \blacktriangleleft$$

Determinantni uchburchak ko'rinishiga keltirish.

Asosiy diagonalning pastki yoki ustki qismida joylashgan barcha elementlari nollardan iborat bo'lsa, ***uchburchakli determinant*** hosil bo'ladi. Ma'lumki, ushbu determinantning qiymati asosiy diagonal elementlarining ko'paytmasidan iboratdir. Har qanday Δ_n determinantni har doim uchburchak ko'rinishiga olib kelish mumkin

1.11-Misol. Determinantni hisoblang

$$\Delta_5=\begin{vmatrix} 5 & 8 & 7 & 4 & -2 \\ -1 & 4 & 2 & 3 & 1 \\ 9 & 27 & 6 & 10 & -9 \\ 3 & 9 & 6 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 2 & 8 & -1 \end{vmatrix}$$

►Quyidagi amallarni bajaramiz Determinantning beshinchi ustunini birinchi ustunga qo'shamiz Ushbu ustunni 3 ga ko'paytirib ikkinchi ustunga, 2 ga ko'paytirib uchunchi ustunga, 8 ga ko'paytirib to'rtinchi ustunga qo'shamiz Natijada berilgan determinantga teng kuchli bo'lgan, quyidagi uchburchak ko'rinishidagi determinantga ega bo'lamiz

$$\Delta_5=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 & -12 & -2 \\ 0 & 7 & 4 & 11 & 1 \\ 0 & 0 & -12 & -62 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & -22 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -3\cdot 7\cdot 12\cdot 22 = -5544 \quad ◄$$

Berilgan determinantini ixtiyoriy satr yoki ustun elementlarini mos algebraik to'ldiruvchisiga ko'paytmalarini yeig'ib hisoblanadi. Agar ixtiyoriy satr elementlarini mos bo'lmagan algebraik to'ldiruvchilarga ko'paytirib qo'shib chiqsak, natija 0 ga teng bo'ladi. Bu fikr ustunlar uchun ham o'rinli.

1.12-Misol. (*nxn*) o'lchovli *A*

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

matritsaning bitta satrini boshqa satri algebraik to'ldiruvchiga ko'paytmasini toping?

►Avval (3*x3*) o'lchovli *A* matritsa uchun algebraik to'ldiruvchilar funksiyasi yordamida algebraik to'ldiruvchilar matritsasini tuzib olamiz

$$\begin{pmatrix} a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32} & a_{23}a_{31}-a_{21}a_{33} & a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31} \\ a_{13}a_{32}-a_{12}a_{33} & a_{11}a_{33}-a_{13}a_{31} & a_{12}a_{31}-a_{11}a_{32} \\ a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22} & a_{13}a_{21}-a_{11}a_{23} & a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \end{pmatrix}$$

Agar biz dastlabki matritsaning 1-satrini hosil bo‘lgan matritsa 1-satriga ko‘paytirsak quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$a_{13}\left(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}\right)+a_{11}\left(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}\right)+a_{12}\left(a_{23}a_{31}-a_{21}a_{33}\right)$$

Agar biz hosil bo‘lgan matritsaning satrini o‘zgartirsak quyidagi natijalarga ega bo‘lamiz:

$$a_{13}\left(a_{12}a_{31}-a_{11}a_{32}\right)+a_{11}\left(a_{13}a_{32}-a_{12}a_{33}\right)+a_{12}\left(a_{11}a_{31}-a_{13}a_{31}\right)=0$$

$$a_{13}\left(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\right)+a_{11}\left(a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22}\right)+a_{12}\left(a_{13}a_{21}-a_{11}a_{23}\right)=0 \blacktriangleleft$$

Bu esa algebraik to‘ldiruvchining bir qiymatli aniqlanishini bildiradi. Bu natijadan biz teskari matritsani topishda foydalanamiz.

1.12-Ta’rif. *A* (*nxn*) o‘lchovli matritsa bo‘lsin, u holda

$$A^{T}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

A matritsaning algebraik to‘ldiruvchilaridan tuzilgan transponirlangan matritsa deyiladi.

1.3. Teskari matritsa

1.13-Ta’rif. Agar $A\ A^{-1}=E$ o’rinli bo’lsa, A^{-1} A matritsaga ***teskari matritsa*** deyiladi

1.1-Teorema. Agar A matritsaga teskari matritsa mavjud bo‘lsa, u quyidagiga teng:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}A^{T} \tag{1.11}$$

◄*det(A)* skalyar miqdor bo‘lgani uchun (1.11) dan quyidagi ega bo‘lamiz:

$$det(A)\ A^{-1}=A^{T}.$$

Bu tenglikning ikkala tomonini chap tomondan A matritsaga ko‘paytiramiz:

$$det(A)\ AA^{-1}=AA^{T} \tag{1.12}$$

Teorema shartiga ko’ra $AA^{-1}=E$, demak

$$det(A)\ E=AA^{T} \tag{1.13}$$

Endi tenglikning o‘ng tomonini ko‘paytiramiz

$$AA^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots A_{j1} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots A_{j2} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots A_{jn} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

AA^T ko'paytmaga mos matritsaning i-satri va j-ustuni elementlari quyidagicha aniqlanadi:

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn}$$

Agar $i=j$ bo‘lsa, u holda bu yoyilma *det(A)* ga teng. Agar $i \neq j$ bo‘lsa, matritsaning elementlari va algebraik to‘ldiruvchilari turli satrlarga tegishli bo‘ladi va yoyilma 0 ga teng (1.12–Misolga qarang). Shunday qilib

$$AA^T = \begin{pmatrix} \det(A) & 0 & ..... & 0 \\ 0 & \det(A) & ..... & 0 \\ ..... & ..... & ..... & ..... \\ 0 & 0 & & \det(A) \end{pmatrix} = \det(A)E$$

Demak (1.13) tenglik ayniyatga aylandi, (1.12) ni *det(A)* *A* ga bo'lsak (1.11) hosil bo'ladi. *T*eorema isbot bo'ldi.►

Xulosa. *A* matritsaning teskarisi mavjud bo'lishi uchun $det(A) \neq 0$ bajarilishi zarur. Bunday matritsalar ***xosmas matritsa***lar deb ataladi.

1.13 – Misol. Ikkita A va B matritsalar berilgan

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Quyidagilarni toping: *a*) AB ; b) BA ; c) A^{-1} ; d) $A A^{-1}$; e) $A^{-1}A$

►*a)* *A* matritsaning ustunlar soni *B* matritsaning satrlar soniga teng, shuning uchun *AB* ko'paytma ma'noga ega bo'ladi. Elementlari

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$$

formula bilan aniqlanuvchi $C = AB$ matritsani topamiz

$$C=AB=\begin{bmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} -4+0-2 & -8+0+1 & 12+0+3 \\ 2-2-6 & 4+0+3 & -6-1+9 \\ 3+4-4 & 6+0+2 & -9+2+6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -6 & -7 & 15 \\ -6 & 7 & 2 \\ 3 & 8 & -1 \end{bmatrix};$$

b) BA matritsani hisoblaymiz:

$$BA=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -4+4-9 & 0-2-6 & 1+6-6 \\ -8+0+3 & 0+0+2 & 2+0+2 \\ 8+2+9 & 0-1+6 & -2+3+6 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} -9 & -8 & 1 \\ -5 & 2 & 4 \\ 19 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

Demak, $AB \neq BA;$

c) A matritsaga teskari matritsa A^{-1} quyidagi formula bilan aniqlanadi

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix},$$

bu yerda $\det A=\begin{vmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}$ = 8 + 4 + 3 + 24 = 39 $\neq 0$.

Bundan ko’rinadiki, A *xosmas matritsa*, demak unga teskari matritsa A^{-1} mavjud, quyidagilarni topamiz:

$$A_{11}=\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=-8,\qquad A_{21}=-\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=2,\qquad A_{31}=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}=1,$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=5,\qquad A_{22}=\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=-11,\qquad A_{32}=-\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=14,$$

$$A_{13}=\begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{Vmatrix}=7,\qquad A_{23}=-\begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=8,\qquad A_{33}=\begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=4.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{39}\begin{bmatrix} -8 & 2 & 1 \\ 5 & -11 & 14 \\ 7 & 8 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{8}{39} & -\frac{2}{39} & \frac{1}{39} \\ -\frac{5}{39} & -\frac{11}{39} & \frac{14}{39} \\ \frac{7}{39} & \frac{8}{39} & \frac{4}{39} \end{bmatrix};$$

d) U holda:

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{8}{39} & -\frac{2}{39} & \frac{1}{39} \\ -\frac{5}{39} & -\frac{11}{39} & \frac{14}{39} \\ \frac{7}{39} & \frac{8}{39} & \frac{4}{39} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E;$$

e) yoki:

$$A^{-1}A = \frac{1}{39}\begin{bmatrix} -8 & 2 & 1 \\ 5 & -11 & 14 \\ 7 & 8 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Demak, teskari matritsa to’g’ri topilgan◄

1.4. Chiziqli tenglamalar sistemasi. Chiziqli tenglamalar sistemasini matritsa usulida yecish

Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi (*ChATS*) deb $x_1, x_2, \dots, x_n$, *n* noma’lumga nisbatan quyidagi *m-ta* tenglamalar sistemasigi aytiladi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1.14)$$

ChATS (1.14) da tenglamalar sistemasida a_{ij}, $i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$ – *koefitsiyentlar*, b_i, $i = \overline{1,m}$ – *ozod hadlar* deb ataladi. Agar da *n*=*m* bo’sa *kvadrat*, aks holda *to’ri burchakli ChATS* deb ataladi va bu yerda nom’lumlarning faqat *birinchi darajalari* qatnashadi. Agar *ChATS* da *n*>*m* (*n*<*m*)bo’sa, noma’lmlar soni tenglamalar sonidan *ko’p* (*kam*) bo’ladi.

Agar b_i=0 bo’lsa, (1.1) *bir jinsli* tenglamalar sistemasi deyiladi. (1.14) tenglamalar sistemani ayniyatga keltiruvchi $x_1 = k_1, x_2 = k_2, \dots, x_n = k_n$ tartiblangan qiymatlar, *ChATS* ning *yechimi* deb ataladi. Har qanday bir jinsli ChATS hech bo'lmaganda bitta $x_1=0, x_2=0,..., x_n=0$ – *trivial* yechimga ega bo'ladi.

Agar *ChATS* hech bo'lmaganda bitta yechimga ega bo'lsa, u *birgalikda*, aks holda *birgalikda bo'lmagan ChATS* deb ataladi.

ChATS koefisientlaridan tuzilgan quyidagi kvadrat matritsa $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ va $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$ – ustun matritsalarni muomilaga kiritsak, u holda matritsalarni ko'paytirish qoidasiga ko'ra, (1.14) uchun quyidagi qulay formulani hosil qilamiz:

$$AX=B \tag{1.15}$$

Bu matritsaviy tenglamada A xosmas (*det(A)≠0*) matritsa bo'lsa, ya'ni *ChATS* yagona yechimga ega bo'lsa (1.15) ni chapdan A^{-1} ga ko'paytirib, $A^{-1}AX=A^{-1}B$, $A^{-1}A=E$ ekanligidan, $EX=X$ yoki $X=A^{-1}B$ yechimni hosil qilamiz. Shunday qilib, X matritsaviy yechim A^{-1} va B larning ko'paytmasi yordamida oson topiladi.

1.14– Misol. $\left.\begin{matrix} 2x-4y+z=3 \\ x-5y+3z=-1 \\ x-\ y+\ z=1 \end{matrix}\right\}$ tenglamalar sistemasini matritsa usuli bilan yeching.

►Quyidagiga egamiz:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix},\ X=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},\ \tilde{B}=\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \det A=-8$$

Teskari matritsa quyidagiga teng bo'ladi: $A^{-1}=-\frac{1}{8}\begin{bmatrix} -2 & 3 & -7 \\ 2 & 1 & -5 \\ 4 & -2 & -6 \end{bmatrix}$

Noma'lumlarni topamiz

$$X=-\frac{1}{8}\begin{bmatrix} -2 & 3 & -7 \\ 2 & 1 & -5 \\ 4 & -2 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}=-\frac{1}{8}\begin{bmatrix} -2\cdot 3+3(-1)-7\cdot 1 \\ 2\cdot 3+1(-1)-5\cdot 1 \\ 4\cdot 3-2(-1)-6\cdot 1 \end{bmatrix}=-\frac{1}{8}\begin{bmatrix} -16 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$

ya'ni berilgan sistemaning yechimi $x=2,\ y=0,\ z=-1$ ◄

Umumiy holda *ChATS* da tenglamalar soni noma'lumlar soniga teng bo'lmasligi mumkin. Ushbu holatlarda *ChATS* ni yechish ucun matritsaning rangini aniqlash zarur bo'ladi

1.5. Matritsaning rangi. Kroneker – Kapelli teoremasi

Matritsaning ***rangi*** tushunchasini kiritamiz. *A* matritsada *k* – satr va *k* – ustunni ajratamiz, bu yerda *k* – *m* va *n* larining kichigiga teng yoki undan kichik sondir. *A* matritsaning *k* ta satr va *k* ta ustun elementlarining kesishishidan hosil bo'lgan elementlardan tuzilgan *k* - tartibli determinant *A* matritsaning *minori* deyiladi. Masalan.

$\begin{bmatrix} 7 & -1 & 4 & 5 \\ 1 & 8 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 0 & -6 \end{bmatrix}$ matritsa uchun *k* =2 dagi ikkinchi tartibli determinantlar

$\begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 1 & 8 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -6 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -2 & -6 \end{vmatrix}$ berilgan matritsaning *minorlari* bo'ladi.

A matritsaning ***rangi*** ushbu matritsaning, noldan farqli minorlarining eng yuqori tartibiga aytiladi. Agar *k* -chi tartibli barcha minorlar nolga teng bo'lsa, u holda *A* matritsaning rangi *k* dan kichik bo'ladi.

Agar (mxn) o'lchamli matritsada:

1) *ixtiyoriy ikkita parallel satr yoki ustunlarning o'rnini almashtirilsa*;

2) *satr yoki ustunlarning har bir hadini noldan farqli biror λ≠0 ko'paytuvchiga ko'paytirilsa;*

3) *satr yoki ustunlarning hadlariga unga parallel bo'lgan biror noldan farqli ko'paytuvchiga ega boshqa qatorning mos elementlarini qo'shilsa, matritsaning rangi o'zgarmaydi.*

1-3 almashtirishlar ***elementar*** almashtirishlar deb ataladi. Agar biror matritsa, ikkinchisidan elementar almashtirishlar yordamida hosil qilinsa, bu matritsalar ***ekvivalent matritsa***lar deb ataladi. *Ekvivalent* matritsalar A ~B kabi belgilanadi.

Tartibi berilgan matritsaning rangiga teng bo'lgan noldan farqli har qanday minor ***matritsaning bazis minori*** deb ataladi

Matritsaning ***rangini*** topishning asosiy *usullarini* ko'rib chiqamiz

1. *Birlar va nollar usuli*. Elementar almashtirishlar yordamida ihtiyoriy matritsani har bir *satr yoki ustunlari* faqat nollardan yoki bitta bir va qolganlari nollardan iborat bo'lgan matritsa ko'rinishga keltirish mumkin.

Hosil qilingan matritsa ekvivalent bo'lgani uchun undagi birlar soni berilgan matritsaning rangiga teng bo'ladi.

1.15–Misol. Matritsaning rangini toping

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -4 & -5 \\ -1 & -1 & 0 & -3 & -2 \\ 6 & 3 & 4 & 8 & -3 \end{bmatrix}$$

► *A* matritsaning 3-chi ustunini ½ ga ko'paytiramiz. So'ngra hosil bo'lgan birinchi satrni 2 ga ko'paytiramiz va uni 4-chi satrdan ayiramiz. Endi uchinchi ustun uchta nol va bitta birdan iborat bo'lib qoladi. Birinchi satrda birinchi, ikkinchi, to'rtinchi va beshinchi elementlarni osongina nolga aylantiramiz va quyidagiga ega bo'lamiz

$$A\sim\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -4 & -5 \\ -1 & -1 & 0 & -3 & -2 \\ 4 & 1 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Oxirgi matritsada to'rtinchi satrni 2-chi va 3-chi satrga qo'shsak, ikkinchi ustunda yana ikkita nollar hosil qilamiz, so'ngra to'rtinchi satrda to'rtinchi satr va ikkinchi ustun kesishgan joydagi birdan boshqa hammasini nol qilamiz Natijada quyidagiga ega bo'lamiz.

$$A\sim\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & -2 & -6 \\ 3 & 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Uchta birni hosil qildik Demak, *rangA*=3

Bazis minor sifatida, masalan birinchi, uchinchi, to'rtinchi satrlar va ikkinchi, uchinchi va to'rtinchi ustunlar kesishishidagi (oxirgi matritsada satrlar va ustunlar kesishishida birlar turibdi) uchinchi tartibli determinantni olish mumkin

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 3 & 4 & 8 \end{vmatrix} \neq 0 \blacktriangleleft$$

2. ***O'rab oluvchi minorlar usuli***. k-tartibli M_k minorni o'z ichiga oluvchi $(k+1)$ tartibli M_{k+1} minor, M_k ni *o'rab oluvchi* minor deb ataladi. Agar A matritsada $M_k \neq 0$ mavjud bo'lib, uni o'rab oluvchi barcha minorlar $M_{k+1}=0$ bo'lsa, u holda $rangA=k$ bo'ladi.

1.16–Misol. Matritsaning rangini toping $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 & 4 \\ 2 & -6 & 4 & 3 \\ 3 & -9 & 3 & 2 \end{bmatrix}$.

►Quyidagiga egamiz: $M_2 = \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} \neq 0;$ M_2 minorni o'rab oluvchi minorlar ikkita bo'lib, ularning har biri nolga tengdir

$$M_3 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & -6 & 4 \\ 3 & -9 & 3 \end{vmatrix}, \quad M_3^* = \begin{vmatrix} -3 & 5 & 4 \\ -6 & 4 & 3 \\ -9 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

Shuning uchun $rangA=2$ M_2 minorni bazis minor sifatida qabul qilish mumkin.◄

1.2–Kroneker-Kapelli teoremasi. (1.14) *ChATS* birgalikda (yechimga ega) bo'lishi uchun *ChATS* ning asosiy

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1.16}$$

va kengaytirilgan matritsa

$$B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_n \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} & b_1 \\ A & b_2 \\ & \ldots \\ & b_n \end{array}\right) \tag{1.17}$$

sining rangi teng bo'lishi zarur va yetarlidir, ya'ni ***rangA= rangB=r.***

◄ *ChATS* birgalikda $x_1 = k_1, x_2 = k_2, ..., x_n = k_n$ va yechimga ega bo'lsin, u holda quyidagi tengliklar o'rinli bo'ladi

$$\begin{cases} a_{11}k_1 + a_{12}k_2 + ... + a_{1n}k_n = b_1 \\ a_{21}k_1 + a_{22}k_2 + ... + a_{2n}k_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}k_1 + a_{m2}k_2 + ... + a_{mn}k_n = b_m \end{cases} \tag{1.18}$$

Berilgan (1.17) - *B* matritsaning 1 – ustunini k_1 ga, 2- ustunini k_2 ga va hokoza *n*- ustunini k_n ga ko'paytirib yig'amiz, so'ngra oxirgi ustundan ayiramiz va (1.18) ni hisobga olsak, *B* ga ekvivalent matritsa hosil qilamiz

$$\text{B} \sim \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & . & a_{mn} & 0 \end{pmatrix}$$

Ushbu matritsaning oxirgi ustunini o'chirish bilan *A* hosil bo'ladi. Usbu amallar elementar almashtirishligidan: *rangA=rangB.*►

Agar ***rangA= rangB*** va ***r=n*** bo'lsa, (1.16) sistema yagona yechimga ega;

agar ***rang*A= *rangB*** va ***r<n*** bo'lsa, u holda (1.16) sistema ixtiyoriy *n-r* parametrga bog'liq cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladi.

Bir jinsli tenglamalar sistemasi uchun hamma vaqt *rang*A= *rangB,* va ular har doim birgalikda bo'ladi

1.17–Misol. Tenglamalar sistemasi birgalikda yoki birgalikda emasligini ko'rsating

$$\left.\begin{aligned} 4x_1+3x_2-3x_3-x_4&=4\\ 3x_1+x_2-3x_3-2x_4&=1\\ 3x_1+x_2-x_4&=0\\ 5x_1+4x_2-2x_3-x_4&=3 \end{aligned}\right\}$$

►Tenglamalar sistemasining kengaytirilgan matritsasini yozamiz, hamda asosiy va kengaytirilgan matritsalarning rangini aniqlaymiz. Asosiy va kengaytirilgan matritsalarning rangini birdaniga topish uchun ozod had turgan ustunni matritsaning boshqa ustunlari bilan almashtirmaymiz

$$B\sim\left[\begin{array}{cccc|c} 4 & 3 & -3 & -1 & 4\\ 3 & -1 & 3 & -2 & 1\\ 3 & 1 & 0 & -1 & 0\\ 5 & 4 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

B matritsaning ikkinchi ustunini 3 ga ko'paytiramiz va birinchi ustundan ayiramiz, hamda ikkinchi ustunni to'rtinchi ustunga qo'shamiz. Natijada uchinchi satrda ikkinchi ustundan boshqa barchasida nollarni hosil qilamiz. U holda ikkinchi usutunning qolgan barcha elementlarini nolga aylantirish oson.

Quyidagiga ega bo'lamiz

$$B\sim\left[\begin{array}{cccc|c} -5 & 0 & -3 & 2 & 4\\ 6 & 0 & 3 & -3 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ -7 & 0 & -2 & 5 & 3 \end{array}\right]$$

Endi ikkinchi satrni birinchi va to'rtinchiga qo'shamiz, so'ngra hosil bo'lgan matritsada birinchi ustunni to'rtinchi bilan qo'shamiz:

$$B\sim\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 5\\ 6 & 0 & 3 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

Bu matritsaning uchinchi ustunini unga teng bo'lgan to'rtinchi ustundan ayiramiz va birinchi ustunga qo'shamiz Hosil qilingan birinchi ustunni 5 ga ko'paytiramiz va beshinchi ustundan ayiramiz:

$$B\sim\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 9 & 0 & 3 & 0 & -44\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

rangA=3, *rangB=4* ekanligini hosil qildik, bundan *rangA≠ rangB*, ya'ni berilgan tenglamalar sistemasi birgalikda emas. ◄

1.6. Chiziqli algebraik tenglamalarni yechishning Kramer qoidasi

Agar *ChATS* uchun *m=n* va *detA≠0* bo'lsa, u holda x_i *(i=1,..., n)* noma'lumlarni hisoblash uchun quyidagi Kramer formulalari o'rinlidir

$$x_i = \frac{\Delta_n^{(i)}}{\Delta_n} \tag{1.19}$$

Bu yerda $\Delta_n = \det A$, $\Delta_n^{(i)}$ esa Δ_n-da *i*-chi ustunni berilgan matritsaning ozod hadlardan iborat ustunga almashtirishdan hosil bo'lgan *n*-chi tartibli determinantdir.

1.18- Misol. Tenglamalar sistemasini Kramer formulalari yordamida yeching

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - 3x_3 &= 3 \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 &= -8 \\ 2x_1 + 7x_3 &= 17 \end{aligned}\right\}$$

►Δ_3 ni hisoblaymiz

$$\Delta_3 = \det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 3 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 56 - 18 + 20 + 21 = 79$$

Δ_3 da birinchi, ikkinchi va uchinchi ustunlarni ketma-ket ozod hadlar ustuni bilan almashtirib, quyidagilarni hosil qilamiz

$$\Delta_3^{(1)} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -3 \\ -8 & 4 & -5 \\ 17 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 395, \quad x_1 = \frac{\Delta_3^{(1)}}{\Delta_3} = \frac{395}{79} = 5,$$

$$\Delta_3^{(2)} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 3 & -8 & -5 \\ 0 & 17 & 7 \end{vmatrix} = -158, \quad x_2 = \frac{\Delta_3^{(2)}}{\Delta_3} = -\frac{158}{79} = -2,$$

$$\Delta_3^{(3)} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & -8 \\ 0 & 2 & 17 \end{vmatrix} = 237, \quad x_3 = \frac{\Delta_3^{(3)}}{\Delta_3} = \frac{237}{79} = 3 \blacktriangleleft$$

1.7. Noma'lumlarni ketma-ket yo'qotishning Jordan-Gauss usuli.

Agar *ChATS* ning asosiy matritsasi A $r \le n$ rangga ega bo'lsa, u holda bu sistemaning kengaytirilgan matritsasi B ni har doim elementar almashtirishlar yordamida satrlari va ustunlarini o'rinlashtirib, quyidagi ko'rinishga keltirishimiz mumkin:

$$\left[\begin{array}{cccccccc|c} 1 & \tilde{a} & \cdots & \tilde{a}_{1r} & \tilde{a}_{1r+1} & \cdots & \tilde{a}_{1n} & & \tilde{b}_1 \\ 0 & 1 & \cdots & \tilde{a}_{2r} & \tilde{a}_{2r+1} & \cdots & \tilde{a}_{2n} & & \tilde{b}_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \tilde{a}_{rr+1} & \cdots & \tilde{a}_{rn} & & \tilde{b}_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & & \tilde{b}_{r+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & & \tilde{b}_m \end{array}\right] \tag{1.20}$$

(1.20) matritsa berilgan sistemaga ekvivalent bo'lgan sistemaning kengaytirilgan matritsasi bo'ladi (ya'ni berilgan sistema bilan bir xil yechimga ega bo'ladi:

$$\left.\begin{array}{r} x_1 + \tilde{a}_{12} x_2 + \cdots + \tilde{a}_{1r} x_r + \tilde{a}_{1r+1} x_{r+1} + \cdots + \tilde{a}_{1n} x_n = \tilde{b}_1 \\ x_2 + \cdots + \tilde{a}_{2r} x_r + \tilde{a}_{2r+1} x_{r+1} + \cdots + \tilde{a}_{2n} x_n = \tilde{b}_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r + \tilde{a}_{rr+1} x_{r+1} + \cdots + \tilde{a}_{rn} x_n = \tilde{b}_r \\ 0 = \tilde{b}_{r+1} \\ \cdots\cdots\cdots \\ 0 = \tilde{b}_m \end{array}\right\} \tag{1.21}$$

Agar $b_{r+1},....,b_m$ sonlaridan hech bo'lmaganda bittasi noldan farqli bo'lsa, u holda (1.21) va (1.14) lar birgalikda bo'lmaydi va aksincha $b_{r+1} = ... = b_m = 0$ bo'lsa, sistema birgalikda bo'ladi, (1.21) sistemadan $x_r,, x_{r-1}, ..., x_2, x_1$ bazis noma'lumlarni $x_{r+1}, ..., x_n$, ozod noma'lumlar orqali ketma-ket ifodalash mumkin. Agar $r=n$ bo'lsa, bu sistemaning yechimi yagona bo'ladi.

1.19-Misol. Jordan-Gaussning ketma-ket yo'qotish usuli yordamida berilgan sistemaning birgalikda ekanligini tekshiring, birgalikda bo'lgan holda yeching

$$\left.\begin{array}{r} 2x_1+3x_2+11x_3+5x_4=2 \\ x_1+x_2+5x_3+2x_4=1 \\ 3x_1+3x_2+9x_3+5x_4=-2 \\ 2x_1+x_2+3x_3+2x_4=-3 \\ x_1+x_2+3x_3+4x_4=-3 \end{array}\right\}$$

► Kengaytirilgan B matritsani tuzamiz va satrlar ustida zarur elementar almashtirishlarni bajaramiz

$$B=\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 11 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 9 & 5 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & -3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & -3 \\ 2 & 3 & 11 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & -3 \\ 3 & 3 & 9 & 5 & -2 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim -\frac{1}{2}\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -7 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & -6 & -1 & -5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 7 \\ 0 & 0 & -6 & -1 & -5 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Oxirgi matritsa yordamida berilgan sistemaga mos keluvchi yangi algebraik tenglamalar sistemasi hosil bo'ladi

$$\left.\begin{array}{r} x_1+x_2+5x_3+2x_4=1 \\ x_2+x_3+x_4=0 \\ x_3+x_4=2 \\ x_4=-1 \end{array}\right\}$$

Bundan, pastdan yuqoriga harakatlanib, ketma-ket topamiz

$$x_4=-1,\quad x_3=2+x_4=2-1=1,\ x_2=-x_3-x_4=-1+1=0,$$
$$x_1=1-x_2-5x_3-2x_4=1-5+2=-2.$$

Shunday qilib, berilgan sistema birgalikda va uning yechimi yagona ekanligi kelib chiqadi (r=n=4).Tekshirish yordamida topilgan yechimning to'g'riligiga ishonch hosil qilish mumkin ◄

1.20–Misol. Jordan-Gauss usuli yordamida berilgan sistema ikki parametrga bog'liq cheksiz ko'p echimga ega ekanligini ko'rsating va bu yechimlarni toping

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 5 \\ x_2 + x_3 + x_4 &= 3 \\ x_1 + x_2 \qquad\qquad &= 2 \end{aligned}\right\}$$

►Kengaytirilgan B matritsani tuzamiz va satrlarning elementar almashtirishlari yordamida *rang*A va *rangB* larni topamiz*:*

$$B = \left[\, A \,\middle|\, \tilde{B} \,\right] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Ko'rinib turibdiki, *rang*A = *rangB*=2<*n*=4. Shuning uchun sistema birgalikda va ikkita parametrga bog'liq *(n-r =4-2=2*) cheksiz ko'p yechimga ega.

Berilgan B matritsaga ekvivalent bo'lgan oxirgi matritsaga, berilgan sistemaga ekvivalent

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 5 \\ x_2 + x_3 + x_4 &= 3 \end{aligned}\right\}$$

sistema mos keladi $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ bo'lganligi sababli bazis noma'lumlar sifatida x_1 va x_2 ni olamiz, x_3 va x_4 larni ozod noma'lumlar (parametrlar) deb qabul qilamiz. U holda oxirgi sistemaning ikkinchi tenglamasidan quyidagini hosil qilamiz: $x_2 = 3 - x_3 - x_4$ Bu ifodani birinchi tenglamaga qo'yib x_1 ni topamiz $x_1 = 5 - 2(3 - x_3 - x_4) - x_3 - x_4 = -1 + x_3 + x_4$ ◄

I z o h. Bazis noma'lumlar sifatida x_1, x_3, yoki x_1, x_4, yoki x_2, x_3, yoki x_2, x_4 larni qabul qilishimiz mumkin edi, ammo x_3, x_4 larni qabul qila olmaymiz, chunki ularning oldilaridagi koeffitsiyntlardan tuzilgan determinant nolga teng $\left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0\right)$, shuning uchun x_3 va x_4 larni x_1 va x_2 orqali ifodalab bo'lmaydi.

1.8. Xos sonlar va bazis yechimlar

Ba'zi hollarda chiziqli algebraik tenglamalar sistemasining o'ng tamoni noma'lumlarga bog'liq bo'lishi mumkin, ya'ni masalan $B = \lambda X$. U holda (1.15) o'rniga

$$AX = \lambda X \text{ yoki } (A - \lambda E)X = 0 \tag{1.22}$$

bir jinsli tenglamalar sistemasi hosil bo'lib, xosmas matritsa ($det(A-\lambda E) \neq 0$) uchun yagona nol yechimga ega. Bu yerda (1.22) ning mazmuniga e'tibor qilsak, A matritsa λE diagonal matritsaga almashayotganligi ma'lum bo'ladi. Ikkinchi tomondan λ aniqlanishi zarur bo'lgan noma'lum miqdor. (1.22) noldan farqli yechimga ega bo'lishi uchun,

$$det(A - \lambda E) = 0 \tag{1.23}$$

sharti bajarilishi zarur. (1.23) shartdan n noma'lumli tenglamalar sistemasi ucun, quyidagi n tartibli xarakteristik tenglama hosil bo'ladi:

$$\lambda^n + I_1\lambda^{n-1} + I_2\lambda^{n-2} + \cdots + I_{n-1}\lambda + I_n = 0 \tag{1.24}$$

bu yerda $I_1, I_2, \ldots, I_n$ xarakteristik tenglamaning koefitsientlari,

$$\begin{cases} I_1 = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ I_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots\ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots\ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{cases} \tag{1.25}$$

Xarakteristik tenglamaning yechimlari $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ matritsaning xoslik shartidan aniqlanganligi ucun, xos sonlar deb ataladi. Xos sonlar aniqlanqandan so'ng, ularga mos keluvchi X ustun – matritsa xos yoki basis noma'lumlar aniqlanadi.

1.21-Misol. Berilgan $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ matritsaning xos sonlari va xos funksiyalari aniqlansin. ►Ushbu matritsaning xoslik sharti (1.23)

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix}=0.$$

Orqali xos sonlarini aniqlash ucun quyidagi xarakteristik tenglamadan

$$-\lambda^3+5\lambda^2-6\lambda=0, \quad \lambda(\lambda-3)(\lambda-2)=0.$$

$\lambda_1=0$, $\lambda_2=3$, $\lambda_3=2$ yechimlarni hosil qilamiz. Bu yerda $\lambda_1=0$ ligidan A xos matritsa (det(A)=0) ekanligi kelib chiqadi. Ushbu xos sonlarga mos xos noma'lumlarni topamiz:

$\lambda_1=3$ xos son uchin $\alpha=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ vektorning koordinatalari

$\begin{cases} -2\alpha_1+\alpha_2+3\alpha_3=0, \\ \alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3=0, \\ 3\alpha_1+\alpha_2-2\alpha_3=0. \end{cases}$ tenglamalar sistemaning yecimlari $\alpha=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ga ega bo'lamiz.

$\lambda_2=6$ xos son uchin β vektorning koordinatalari

$\begin{cases} -5\beta_1+\beta_2+3\beta_3=0, \\ \beta_1-\beta_2+\beta_3=0, \\ 3\beta_1+\beta_2-5\beta_3=0. \end{cases}$ tenglamalar sistemaning yecimlari $\beta=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ga ega bo'lamiz.

$\lambda_3=-2$ xos son uchin γ vektorning koordinatalari

$\begin{cases} 3\gamma_1+\gamma_2+3\gamma_3=0, \\ \gamma_1+7\gamma_2+\gamma_3=0, \\ 3\gamma_1+\gamma_2+3\gamma_3=0. \end{cases}$ tenglamalar sistemaning yecimlari $\gamma=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ga ega bo'lamiz. ◄

1.9. Ko'phadlarni ko'paytuvchilarga ajratish

Yuqorida λ – xos sonlarni aniqlash uchin λ ga nisbatan ko'phad ko'rinishidagi (1.24) xarakteristik tenglamani hosil qilib, hususiy hollarda yechimlarni aniqlagagan edik. Lekin hamma vaqt ham xarakteristik tenglama haqiqiy yechimga ega bo'lmasligi mumkin. Masalan $\lambda^2+1=0$ tenglama $\lambda_{1,2}=\pm i$ ($i=\sqrt{-1}$ – mavhum son) kompleks yechimga ega bo'ladi.Kompleks son umumiy holda $c=a+bi$ korinishida yoziladi. Bu yerda a kompleks sonning haqiqiy, b– mavhum qismidir.

Umumiy holda x ga nisbatan n tartibli ko'phad

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0 \qquad (1.25)$$

berilqan bo'lsin. Bu yerda a_n–ko'phad koefitsientlari, n – ko'phad darajasi.

1799 yilda birinchi marta buyk nemis olimi Gauss tomonidan isbotlangan A***lgebraning asosiy teoremasi***:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \qquad (1.26)$$

tenglama hech bo'lmaganda bitta haqiqiy yoki komleks yechimga ega bo'ladi.

Bezu teoremasi:

$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$ ko'phad *x-c* ga bo'linganda qoldiq berilgan ko'phadning $P_n(c)$ qiymatiga teng:

$$P_n(x) = (x-c)\, Q_{n-1}(x) + P_n(c),$$

bu yerda $Q_{n-1}(x)$ – bo'linma *n-1* darajali ko'phad. Agar c (1,25) ning yechimi bo'lsa, u holda ko'phad ko'paytuvchilarga ajraladi: $P_n(x) = (x-c)\, Q_{n-1}(x)$.

Kvadrat uch hadni ko'paytuvchilarga ajratamiz:

$$\boldsymbol{ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2)},$$

bu yerda x_1, x_2–kvadrat tenglama yechimlari.

1.22-Misol. Kvadrat uch hadni ko'paytuvchilarga ajrating:

▶

a) $P_2(x) = 4x^2 - 5x + 1$, kvadrat tenglamlarnia yechimi $x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{4}$ demak

$4x^2 - 5x + 1 = 4(x-1)(x-\frac{1}{4})$

b) $P_2(x) = x^2 + x + 1$, kvadrat tenglamlarnia yechimi

$x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i, x_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i,$

demak $x^2 + x + 1 = (x + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i)(x + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i)$◄

Yuqori tartibli ko'phadlarni ko'paytuvchilarga ajratish uchin Bezu teoremasidan foydalanib tartibini pasaytiramiz. Ko'phadning koefistentlari butin sonlardan iborat bo'lsa, ozod had bo'luvchilari ichidan yechimni izlash usulidan foydalanishimiz mumkin.

1.23-Misol. $P_4(x) = x^4 + 3x^3 - x^2 - 9x - 18$ ko'phadni ko'paytuvchilarga ajrating:

►Ozod had 18 ning bo'luvchilari ±1, ±2, ±3, ±6, ±9, ±18 ichidan *x* ning o'rniga qo'yib ko'rish natijasida $x_1 = 2, x_2 = -3$ ko'phadni nolga aylantiruvchi yechimlarni aniqlaymiz. Berilgan ko'phadni guruhlash natijasida

$$P_4(x) = x^4 + 3x^3 - x^2 - 9x - 18 = (x-2)(x^3 + 5x^2 + 9x + 9)$$
$$= (x-2)(x+3)(x^2 + 2x + 3) ◄$$

Ko'phadning bosh koefitsienti 1 dan farqli bolgan bo'lgan hollarda o'zgaruvchilarni almashtirish usuli yordamida ushbu koefitsientni 1 keltirish mumkin.

1.24-Misol. $P_3(x) = 2x^3 + 19x^2 + 41x + 15$ ko'phadni ko'paytuvchilarga ajrating:

►Ko'phadni 4 ga ko'paytirib y=2x belgilash kiritsak

$$4P_3(x) = (2x)^3 + 19(2x)^2 + 82\,2x + 60 = y^3 + 19y^2 + 82\,y + 60 = Q_3(y)$$

Agar hosil bo'lgan ko'phad butin yechimga ega bo'lsa, ozod handing bo'luvchilari ±1, ±2, ±3, ±4, ±5, ±6, ±10, ±12, ±15, ±20, ±30, ±60 dan biri, ya'ni y=-5 yoki $x = -\frac{5}{2}$ yechim bo'ladi. Berilgan ko'phadni $x + \frac{5}{2}$ ikkihadga bo'lamiz.

$$\begin{array}{l|l}
2x^3 + 19x^2 + 41x + 15 & x + \frac{5}{2} \\
\underline{-2x^3 + 5x^2} & \overline{2x^2 + 14x + 6} \\
\quad 14x^2 + 41x + 15 & \\
\quad \underline{-14x^2 + 35x} & \\
\qquad 6x + 15 & \\
\qquad \underline{-6x + 15} & \\
\qquad 0 &
\end{array}$$

$$2x^3+19x^2+41x+15=\left(x+\frac{5}{2}\right)(2x^2+14x+6)=(2x+5)(x^2+7x+3)$$

Kvadrat uch handing ildizlarini aniqlab quyidagi ifodani hosil qilamiz

$$2x^3+19x^2+41x+15=\left(x+\frac{5}{2}\right)(2x^2+14x+6)=$$

$$(2x+5)\left(x+\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{37}}{2}\right)\left(x+\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{37}}{2}\right)$$

Mashqlar.

1. Agar

$a)\ A=\begin{bmatrix}3&1&-5\\1&2&4\\3&2&-1\end{bmatrix};\quad b)\ A=\begin{bmatrix}0&0&1&1\\0&3&1&-7\\2&7&6&1\\1&2&2&1\end{bmatrix}$ bo'lsa, berilgan A matritsaga teskari matritsa A^{-1} ni toping.

3. Asosiy matritsa A va kengaytirilgan matritsa B ni bilgan holda ularga mos keluvchi chiziqli tenglamalar sistemasini yozing va uning birgalikda emasligini Kroneker-Kapelli teoremasi yordamida ko'rsating

a) $A=\begin{bmatrix}1&-1&1&-2\\1&-1&2&-1\\5&-5&8&-7\end{bmatrix},\quad B=\left[\begin{array}{c|c}A&\begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix}\end{array}\right];$ b) $A=\begin{bmatrix}3&-1&1\\1&-5&1\\2&4&0\\2&1&3\\5&0&4\end{bmatrix},\quad B=\left[\begin{array}{c|c}A&\begin{matrix}6\\12\\-6\\3\\9\end{matrix}\end{array}\right].$

4. Kroneker- Kapelli teoremasi yordamida sistemaning birgalikda ekanligini ko'rsating, sistemani matritsa ko'rinishida yozing va uni matritsa usulida eching:

a) $\begin{cases}2x_1-x_2=-1\\x_1+2x_2-x_3=-2\\x_2+x_3=-2\end{cases}$; b) $\begin{cases}4x_1+2x_2-x_3=0\\x_1+2x_2+x_3=1\\x_2-x_3=-3\end{cases}$

5. Tenglamalar sistemasini Jordan-Gauss usulida eching:

a) $\begin{cases}3x_1-2x_2+x_3-x_4=0,\\3x_1-2x_2-x_3+x_4=0,\\x_1-x_2+2x_3+5x_4=0;\end{cases}$ *b)* $\begin{cases}4x_1+2x_2-3x_3+2x_4=3,\\2x_1+3x_2-2x_3+3x_4=2,\\3x_1+2x_2-3x_3+4x_4=1.\end{cases}$

6. 1) $A=\begin{bmatrix}3 & 5 & -2\\ 1 & -3 & 2\\ 6 & 7 & -3\end{bmatrix}$ matritsaga teskari matritsa A^{-1} ni toping.

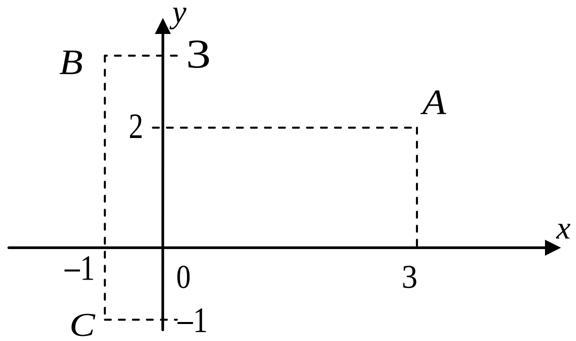
2) $A=\begin{bmatrix}3 & 1 & 2\\ 7 & 3 & 5\\ 15 & 7 & 11\\ 11 & 5 & 8\end{bmatrix}$ bo’lsa, elementar almashtirishlar yordamida *A* matritsaning rangini toping va biror bazisli minorini ko’rsating.

1.10. Dekart koordinatalari sistemasi

Tekislikda o‘zaro perpendikulyar bo‘lgan ikkita to‘g‘ri chiziqni: *Ox* – gorizontal va *Oy* – vertikal o‘qni belgilaymiz. Bu o‘qlar uchun masshtab birligi (uzunligi 1 ga teng kesma) ni tanlab olamiz. Natijada *Ox, Oy* koordinata o‘qlariidan iborat Dekart koordinatalar sistemasi hosil bo‘ladi. Koordinata o’qlarining kesishgan *O* nuqta koordinata boshini belgilaydi.

Dekart koordinata tekisligidagi ixtiyoriy *M* nuqtaning joylashish holatini aniqlash uchun ushbu nuqtadan absissa va ordinata o‘qlariga perpendikulyar tushiramiz. Bu perpendikulyarlar koordinata o‘qlaridan mos ravishda ikkita kesma ajratadi. Agar kesmalar *Ox* o‘qining o‘ng, *Oy* o‘qining yuqori qismlarida joylashsa kesmalarning oxirlari "+", aks holda "–" ishora qabul qiladi va ular mos ravishda *x* va *y* orqali belgilanadi. Odatda, x, M nuqtaning absissasi, *y* esa ordinatasi, x va *y* birgalikda M nuqtaning koordinatalarini aniqlaydi. M nuqta koordinatalar orqali $M(x,y)$ kabi yoziladi.Masalan, $A(3,2)$, $B(-1,3)$, $C(-1,-1)$nuqtalarning tekislikdagi tasvirlari 3–rasmda ko‘rsatilgan

Eslatma *Absissa o‘qida joylashgan barcha nuqtalarning ordinatalari, ordinata o‘qida joylashgan barcha nuqtalarning absissalari nol bo‘ladi*



1.1-rasm.

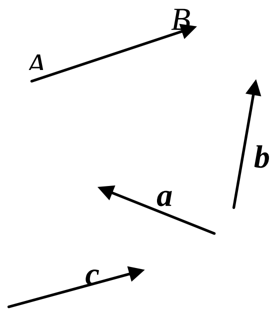
1.11. Vektorlar va ular ustida algebraik amallar

Ko'pchilik fizik kattaliklar, masalan uzunlik, shakl yuzasi, xajm, jism massasi bitta qiymat bilan to'la aniqlanadi. Bunday kattaliklar ***skalyarlar*** deb ataladi. Boshqa fizik kattaliklar, masalan kuch, tezlik, tezlanish uchun qiymatining o'zi etarli emas, ular uchun yo'nalishni ham e'tiborga olishga to'g'ri keladi. Ya'ni ular kattalik va yo'nalish orqali beriladi.Tabiatda shamol yo'nalish va tezlikka ega bo'ladi. Masalan, shimoliy-sharq yo'nalishida 20 km/soat tezlik bilan shamol esadi. Bunday kattaliklar ***vektorlar*** deb ataladi.

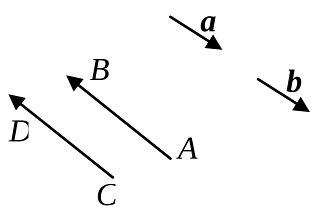
Bu paragrafda 2 va 3 o'lchovli vektorlar, ular ustida arifmetik amallar, ularning geometrik talqini, asosiy xossalari o'rganiladi.

1.14- Ta'rif. Yo'naltirilgan kesma *vektor* deb ataladi.

Agar vektorning boshi A nuqtada bo'lib, uchi (oxiri) B nuqtada bo'lsa, uni $\overrightarrow{AB}$ kabi belgilanadi. Vektorning boshi va uchi (oxiri) ko'rsatilmasdan, uzinligi orqali ham uni ifodalash mumkin, ya'ni lotin alfavitining kichik harflari $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ lar bilan belgilanadi. Chizmada vektorning yo'nalishi strelka orqali tasvirlanadi (1.2-rasm).



1.2-rasm.



1.3-rasm.

Bitta to'g'ri chiziqda yo'ki parallel to'g'ri chiziqlarda yo'tuvchi vektorlar ***kollinear*** vektorlar deb ataladi.

Bir xil uzunlik va bir xil yo'nalishga ega bo'lgan vektorlar ***ekvivalent*** yo'ki ***teng vektorlar*** deb ataladi.(1.3-rasm)

Bir tekislikda joylashgan ixtiyoriy uchta vektorlar ***komplanar*** vektorlar deyiladi.

Biror $\overrightarrow{AB}$ vektorga qarama-qarshi yo’nalgan vektorni $\overrightarrow{BA}$ kabi belgilanadi. Agar vektorning boshi va oxiri ustma-ust tushadigan $\overrightarrow{AA}$ bo’lsa, uni nol-vektor deb atalib, $\vec{0}$ kabi belgilanadi. Mazkur vektorning yo’nalishi noaniq bo’lib, unga ixtiyoriy yo’nalishni berish mumkin.

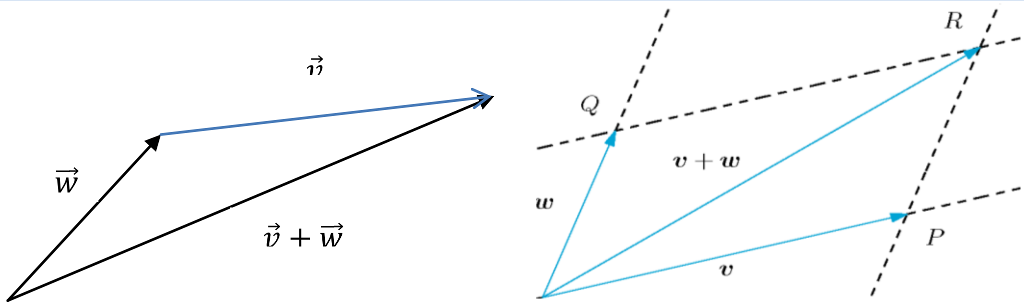
Vektorning moduli yoki uzunligi uniga mos kesmaning uzunligiga teng. $\overrightarrow{AB}$ va $\vec{a}$ vektorlarning modullarini mos ravishda $|\overrightarrow{AB}|$ va $|\vec{a}|$ kabi belgilanadi.

1.3-rasmda o’zaro teng vektorlar juftligi $\overrightarrow{AB}\ va\ \overrightarrow{CD},\ \ \vec{a}\,va\,\vec{b}$ tasvirlangan $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}\ \ va\ \ \vec{a}=\vec{b}.$ Vektorlarning tengligi ta’rifidan, ularning uzinliklarini o’zgartirmasdan parallel qilib ko’chirish mumkinligi kelib chiqadi. Vektorlarning ustida ularni songa *ko’paytirish* hamda ularni *qo’shish* kabi chiziqli amallari aniqlangan. Biror $\vec{a}$ vektorning α≠0 songa ko’paytmasi deb, $\vec{b}=\alpha\vec{a}$ kabi vektorga aytiladi va uning moduli $|\alpha|\cdot|\vec{a}|$ bo’ladi, agar α>0 bo’lsa, uning yo’nalishi bilan bir xil, agar α<0 bo’ladigan bo’lsa, $\vec{a}$ vektorga qarama-qarshi yo’nalishda bo’ladi.

Vektorlarni ikki xil usulda qo’shish mumkin:

Uchburchak qoidasiga ko’ra $\vec{v}$ va $\vec{w}$ vektorlarni parallel ko’chirib $\vec{w}$ vektorning oxiriga $\vec{v}$ vektorning boshi mos keltiriladi. $\vec{w}$ vektorning boshidan $\vec{v}$ vektorning oxiriga qarab $\vec{v}+\vec{w}$ mos qo’yiladi.

Parallelogram qoidasiga ko’ra $\vec{v}$ va $\vec{w}$ vektorlarni parallel ko’chirib, boshlari bir nuqtaga keltiriladi va ularning oxirlaridan ushbu vektorlarga o’tkazilgan parallel chiziqlar yordamida parallelogram yasaladi. $\vec{v}$ va $\vec{w}$ vektorlarning boshidan chiqqan dioganal $\vec{v}+\vec{w}$ vektorlarning yig’indisini aniqlaydi(1.4-rasm).



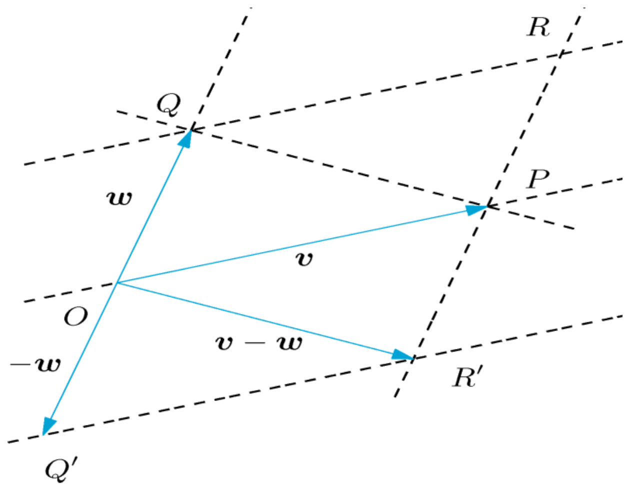
1.4-rasm.

1.5-rasmda $\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}$ ayirma tasvirlangan $\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}=\boldsymbol{v}+(-\boldsymbol{w})$ vektor $\boldsymbol{v}$, $-\boldsymbol{w}$ vektorlardan tuzilgan parallelogramning diagonalidan iborat.

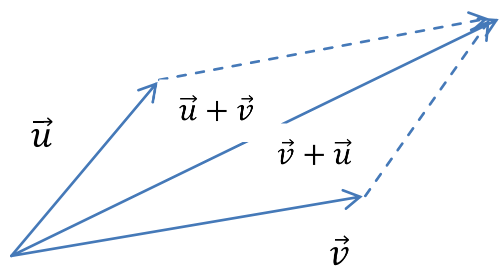
Vektorlar arifmetikasi va moduli

Quyida ikki va uch o‘lchovli vektorlarning asosiy xossalarini keltiramiz

1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (Kommutativlik xossasi). 2. $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$



1.5-rasm.



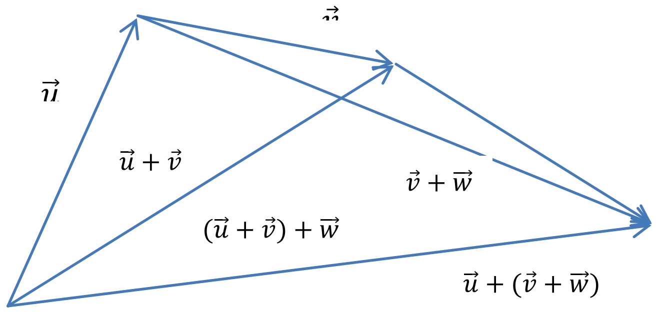
1.6-rasm.

3. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{b}+(\vec{a}+\vec{c})$ (Assosiativlik xossasi). 4. $\vec{a}+(-\vec{a})=0$

Vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi

Chekli sondagi $\vec{a}_i$ ($i=\overline{1,n}$) vektorlarning *yig’indisi:* $\vec{a}=\sum_{i=1}^{n} a_i=\vec{a}_1+\vec{a}_2+\quad+\vec{a}_n$.

λ_i ixtiyoriy sonlar uchin $\vec{a}=\sum_i^n \lambda_i \vec{a}_i$ kabi ifodani $\vec{a}_i$ ***vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi*** deb yuritiladi. $\vec{a}_i=(x_i;\ y_i;\ z_i)$ uchun: $\vec{a}=(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i;\ \sum_{i=1}^{n}\lambda_i y_i;\ \sum_{i=1}^{n}\lambda_i z_i)$.



1.7-rasm.

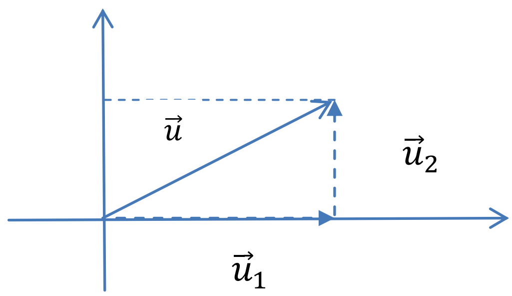
Agar n dona $\vec{a}_i$ vektorlar uchun $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\vec{a}_i=0$ tenglik faqat $\lambda_i=0$ bo'lganda o'rinli bo'lsa, u holda $\vec{a}_i$ vektorlar ***chiziqli bog'lanmagan*** bo'ladi.

λ_i sonlardan hech bo'lmaganda biri noldan farqli bo'lgan holda $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\vec{a}_i=0$ kabi tenglik o'rinli bo'lsa, u holda $\vec{a}_i$ vektorlar ***chiziqli bog'langan*** bo'ladi. Masalan, ixtiyoriy kollinear vektorlar, uchta komplanar vektorlar hamda uch o'lchovli fazodagi to'rtta va undan ko'proq vektorlar chiziqli bog'langan vektorlardir.

Chziqli bog'langan $\vec{u}=\vec{u}_1+\vec{u}_2+\vec{u}_3$ vektorning kombinasiyasini tashkil etuvchi vektorlar *Oxyz* Dekart koordinatasi o'qlariga mos ravishda kolleniar bo'lsin. U holda $\vec{u}$ vektorning uzunligi yoki moduli Pifagor teoremasidan

$$|\vec{u}|=\sqrt{|\vec{u}_1|^2+|\vec{u}_2|^2+|\vec{u}_3|^2}$$

ga tengligi kelib chiqadi. Moduli birga teng vektor ***birlik vektor*** deb ataladi.



1.8-rasm.

Agar *Oxyz* koordinata sistemasida $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ va $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ nuqtalar berilgan bo'lsa, u holda $\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1;\ y_2-y_1;\ z_2-z_1)$, yoki

$$\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

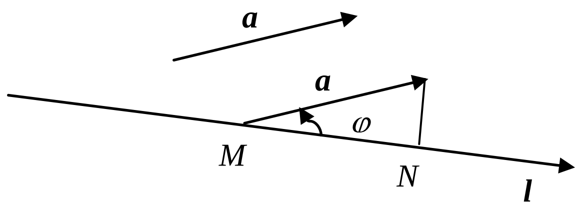
1.15-Ta'rif. Fazodagi uchta tartiblangan va o'zaro chiziqli bog'lanmagan $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ va $\vec{e}_3$ kabi vektorlarni ***bazis*** vektorlar deyiladi.

Fazoda har qanday $\vec{a}$ vektorni $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ bazis vektorlar bo'yicha yoyib bazis vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi shaklida ifodalash mumkin:

$$\vec{a}=a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2+a_3\vec{e}_3$$

Bu yerdagi a_1, a_2 va a_3 lar $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, bazislardagi $\vec{a}$ vektorning koordinatalaridir. Agar bazis vektorlar o'zaro perpendikulyar hamda birlik vektorlar bo'lsa, ularni ***ortonormallashgan*** bazis vektorlar deb ataladi. U xildagi bazis vektorlarni $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ va $\vec{k}$ deb belgilanadi va qisqacha ***ortlar*** deyladi.

Musbat yo'nalishi berilgan biror l to'g'ri chiziqni *l o'qi* deb yuritiladi



1.9-rasm.

Biror $\vec{a}$ vektorning l o'qdagi ***proeksiyasi (izi)*** deb, $|\vec{a}|$ bilan $\vec{a}$ vektorning l o'qning musbat yo'nalishi bilan tashkil etgan burchagi φ ning kosinusiga bo'lgan ko'paytmasiga aytiladi, hamda $np_l\vec{a}$ kabi belgilanadi. Demak, ta'rifga binoan, $np_l\vec{a} =|\vec{a}|\cdot\cos\varphi$ (1.9-rasm)

Chizmadan ko'rinib turibdiki, $\vec{a}$ vektorning l o'qdagi proeksiyasi geometrik jihatdan *MN* kesmaning uzunligi bilan xarakterlanadi. Bu yerda, $0 \leq \varphi \leq \pi$. Xususan, agar $\varphi=\frac{\pi}{2}$ bo'lsa, *MN* kesma nuqtaga aylanadi va $np_l\vec{a} = 0$ bo'ladi.

1.25-Misol. $\vec{a}$, $\vec{b}$, va $\vec{c}$ vektorlar berilgan (1.10 *a*-rasm). Ularning chiziqli kombinatsiyalari $-2\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + 4\vec{c}$ ni chizmada tasvirlansin.

► Tekislikda *0* nuqtani ixtiyoriy tanlab, undan $-2\vec{a}$ ni olamiz (1.10 b-rasm) Uning uchiga $\frac{1}{3}\vec{b}$ vektorni qo'yamiz va $\frac{1}{3}\vec{b}$ vektorning uchiga $4\vec{c}$ vektorni qo'yamiz Agar *0* nuqta bilan $4\vec{c}$ vektorni birlashtirsak, natijada qaralayotgan vektorlarning chiziqli kombinatsiyalari hosil bo'ladi◄

a **1.10-rasm.** *б*

1.12. Vektorlarning skalyar ko‘paytmasi

Biror moddiy jism kattaligi va yo’nalishi o’zgarmas bo’lgan tashqi $\vec{F}$ kuch ta’sirida biror *P* nuqtadan *Q* nuqtaga ko’chsin. Fizika kursidan ma’lumki, bu eyrda bajarilgan ish *A*, $|\vec{F}|$ kuch miqdorini ko’chish yuo’nalishi masofasi *PQ*, hamda ular orasidagi burchakni kosinusi ko’paytmasiga teng

$$A = |\vec{F}||\overrightarrow{PQ}|\cos(\vec{F};\overrightarrow{PQ})$$

Ushbu qoida asosida aniqlanuvchi skalyar kattaliklar texnikaning turli soxalarida uchraganligi sababli, vektorlarning ***skalyar ko’paytmasi*** tushuncha kiritilgan.

1.16-Ta’rif. Berilgan *ikkita* $\vec{a}$ va $\vec{b}$ *vektorlarning skalyar ko’paytmasi*

$$\vec{a}\,\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cdot\cos(\vec{a}\wedge\vec{b}),$$

ko’rinishida aniqlanadi, bu erda $(\vec{a}\wedge\vec{b})$ burchak, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar yo’nalishidagi kichik burchak bo’lib, u har doim $0 \le (\vec{a}\wedge\vec{b}) \le \pi$ kabi bo’ladi.

Skalyar ko’paytmaning asosiy xossalari:

1) $\vec{a}\,\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$;

2) $(\lambda\vec{a})\,\vec{b} = \lambda\,(\vec{a}\cdot\vec{b}) = \vec{a}\,(\lambda\vec{b})$;

3) $\vec{a}\,(\vec{b}+\vec{s}) = \vec{a}\,\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{s}$;

4) $\vec{a}\,\vec{b} = |\vec{a}|\cdot pr_{\vec{a}}\,\vec{b} = |\vec{b}|\,pr_{\vec{b}}\,\vec{a}$;

5) $\vec{a}\,\vec{a} = |\vec{a}|^2$;

6) $\vec{a}\,\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$

Yuqoridagi xossalardan foydalanib o’zaro ortogonal $\vec{\imath} \perp \vec{\jmath} \perp \vec{k}$ va birlik vektorlar uchun $\vec{\imath}\ \vec{\imath} = \vec{\jmath}\ \vec{\jmath} = \vec{k}\ \vec{k} = 1$, $\vec{\imath}\ \vec{\jmath} = \vec{\jmath}\ \vec{k} = \vec{k}\ \vec{\imath} = 0$ natijalarni hosil qilamiz. U holda, agar

$$\vec{a} = a_1\vec{\imath} + a_2\vec{\jmath} + a_3\vec{k} = (a_1;a_2;a_3)\ ,\ \vec{b} = b_1\vec{\imath} + b_2\vec{\jmath} + b_3\vec{k} = (b_1;b_2;b_3) \qquad (1.27)$$

bo'lsa,

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3, \qquad (1.28)$$

Hamda $|\overrightarrow{a}|=\sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2}$, $|\overrightarrow{b}|=\sqrt{b_1{}^2 + b_2{}^2 + b_3{}^2}$ kelib chiqadi.

Agar $\alpha = (\vec{a}\wedge Ox)$, $\beta = (\vec{a}\wedge Oy)$, $\gamma = (\vec{a}\wedge Oz)$ va $\overrightarrow{a} = (x_1; y_1; z_1) = x_1\vec{\imath} + y_1\vec{\jmath} + z_1\vec{k}$, ortonormallashgan vektorlar hossasiga ko'ra quyidagi formulalar o'rinli bo'ladi:

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{a}\cdot\vec{\imath}}{|\overrightarrow{a}|} = \frac{x_1}{\sqrt{x_1{}^2+y_1{}^2+z_1{}^2}},\ \cos\beta = \frac{\overrightarrow{a}\cdot\vec{\jmath}}{|\overrightarrow{a}|} = \frac{y_1}{\sqrt{x_1{}^2+y_1{}^2+z_1{}^2}},\ \cos\gamma = \frac{\overrightarrow{a}\cdot\vec{k}}{|\overrightarrow{a}|} = \frac{z_1}{\sqrt{x_1{}^2+y_1{}^2+z_1{}^2}},$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

bu yerda $\cos\alpha$, $\cos\beta$ va $\cos\gamma$ lar $\overrightarrow{a}$ vektorning ***yo'naltiruvchi kosinuslari*** deb yuritiladi. Agar kosinuslar teoremasini qo'llasak

$$\left|\vec{a} - \vec{b}\right|^2 = |\vec{a}|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 - 2|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|cos\theta$$

skalyar ko'paytma uchun qo'shimcha quydagi natijaga kelishimiz mumkin:

$$|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|cos\theta = \frac{1}{2}\left(|\vec{a}|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 - \left|\vec{a} - \vec{b}\right|^2\right) \text{ yoki } \vec{a}\cdot\vec{b} = \frac{1}{2}\left(|\vec{a}|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 - \left|\vec{a} - \vec{b}\right|^2\right)$$

$$|\vec{a}|^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \quad \left|\vec{b}\right|^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2$$

$$\left|\vec{a} - \vec{b}\right|^2 = (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2$$

O'rniga olib borib qo'ysak, $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ kelib chiqadi.

Skalyar ko'paytmaning ta'rifidan ikki vektor orasidagi burchak kosinusining formulasi kelib chiqadi $\cos\left(\overrightarrow{a}\wedge\overrightarrow{b}\right) = \frac{\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}|\,|\overrightarrow{b}|}$,

1.26-Misol. Agar moddiy jism $\vec{F}_1$=(3; -4; 5), $\vec{F}_2$=(2; 1; -4) va $\vec{F}_3$=(-1; 6; 2) kuchlar ta'siri ostida *M₁(4;2;-3)* nuqtadan *M₂(7; 4; 1)* nuqtaga to'g'ri chiziqli harakatida teng ta'sir qiluvchi $\overrightarrow{F}$ kuchning bajargan ishi hisoblansin

► $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F}_1 + \overrightarrow{F}_2 + \overrightarrow{F}_3$ = *(4;3;3)* hamda $\overline{M_1M_2} = \overrightarrow{S}$ = *(3;2;4)* bo'lganligi uchun A = $\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{S}$ = = *4·3 + 3·2 + 3·4 = 30* ◄

1.13. Vektorlarning vektor ko'paytmasi

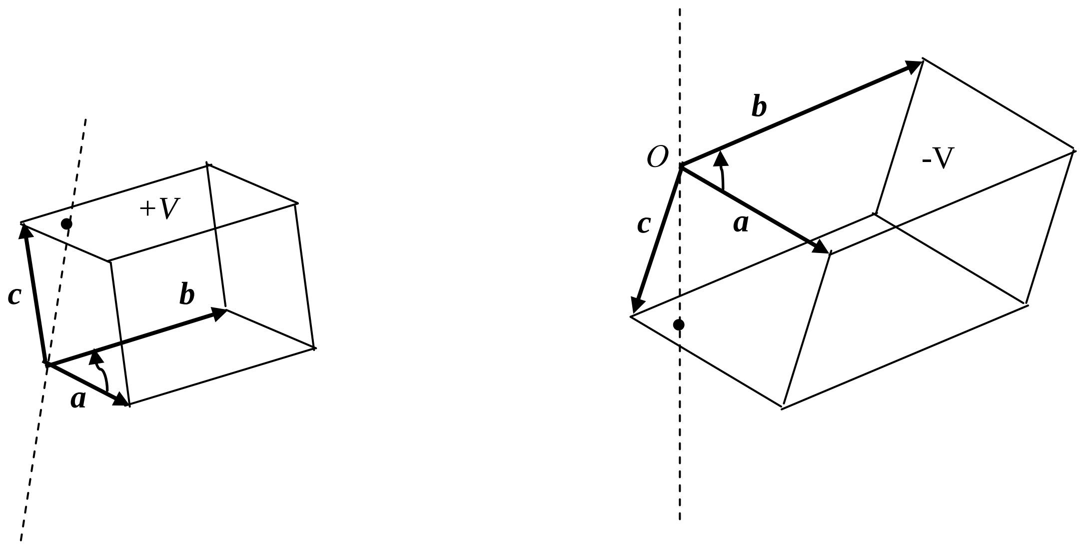
Agar uchta $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ kabi tartibdagi nokomplanar vektorlar bitta O nuqtaga qo'yilib, $\overrightarrow{c}$ vektorning uchidan qaralganda $\overrightarrow{a}$ vektordan $\overrightarrow{b}$ vektorgacha bo'lgan eng qisqa burilish soat strelkasiga teskari yo'nalishda bo'ladigan bo'lsa, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektorlar *o'ng* sistema tashkil etadigan vektorlar, aks holda *chap* sistema tashkil etadigan vektorlar deb ataladi (1.11 *a* va *b* rasmlar)

Agar $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$, $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$ lar uchin vektor ko'paytmasini ifodalaydigan vektorning koordinatalari quyidagicha aniqlanadi:

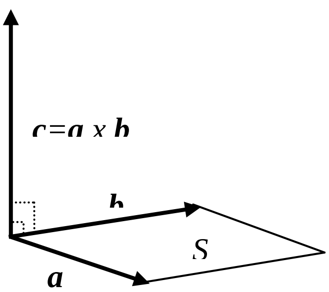
$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}=\left(\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right) \qquad (1.29)$$

Vektor ko'paytma yordamida, biror A *nuqtada biriktirilgan jismning ixtiyoriy* B *nuqtasiga qo'yilgan* $\vec{F}$ *kuchning aylanma momenti* $\vec{M}$ ni hisoblash mumkin, ya'ni: $\vec{M}=\overrightarrow{AB}\times\vec{F}$ (1.13 – rasm).

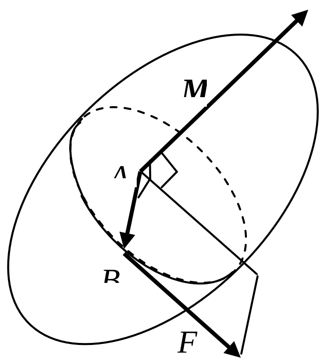
a *b*



1.11-rasm.



1.12-rasm.



1.13–rasm.

Ortlar uchun vektor ko‘paytmalarni ko‘rib chiqamiz:

$$\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\ \vec{k}=0,\ \ \vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\ \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},\ \ \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$$

$$\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k},\ \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i},\ \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}.$$

1.27–Misol. Berilgan *A(-1, 2, 4)* nuqtaga qo’yilgan $\vec{F}$ *=(3, 2, 1)* kuchning koordinata boshi 0 ga nisbatan aylanma momenti $\vec{M}$ ning koordinatalari topilsin:

► $\vec{M}=\overrightarrow{OA}\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 2 & 4\\ 3 & 2 & 1\end{vmatrix}$ = (-6, 13, -8) ◄

*Vektor ko’paytmaning asosiy xossalari*ni sanab o’tamiz:

1) $\vec{a}\times\vec{b}=-(\vec{b}\times\vec{a})$; 2) $(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{a}\times(\lambda\vec{b})$;

3) $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$; 4) $\vec{a}\times\vec{b}=0\Leftrightarrow\vec{a}\parallel\vec{b}$;

5) Vektor ko’paytmaning moduli $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarga qurilgan parallelogrammning yuziga teng, ya’ni: $|\vec{a}\times\vec{b}|=S$ (1.12 – rasmga qaralsin.)

1.14. Vektorlarning aralash ko‘paytmasi

Uchta $\vec{a}$, $\vec{b}$ *va* $\vec{c}$ *vektorlarning aralash ko’paytmasi*, $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ kabi skalyar miqdorga aytiladi.

1.18-Ta’rif. Fazoda berilgan uch o‘lchovli $\vec{a}$, $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlar uchun $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ ko‘paytma uch vektorning ***aralash ko‘paytmasi*** deb ataladi va uch vektor komponentalaridan tuzilgan matritsaning determinantiga teng:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix} \qquad (1.30)$$

(1.30) formulani o’rinli ekanligi (1.27)-(1.29) formulalardan kelib chiqadi.

1.28–Misol. $\vec{a}$ = (1, 3, 1), $\vec{b}$ = (-2, 4, -1) va $\vec{c}$ = (2, 4, -6) vektorlar berilgan. Ushbu vektorlarning komplanar yoki nokomplanar ekanliklari aniqlanib, agar nokomplanar vektorlar bo'lsa, ularning o'ng sistema yoki chap sistema tashkil etishlari ko'rsatilsin hamda ularga qurilgan parallelopipedning hajmi hisoblansin.

►$\vec{a}\ \vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & -1 \\ 2 & 4 & -6 \end{vmatrix}$ = - 78 ekanligidan ko'rinib turibdiki, vektorlar nokomplanar bo'lib, chap sistema tashkil etadi hamda V=78 ga teng.◄

Ko'p hollarda vektorlarni geometriya, fizika va texnikada qo'llashda berilgan ikki vektorga pependikulyar bo'lgan vektorni topish masalasi uchraydi Bu bo'limda biz shu vektorlarni qanday topish mumkinligini ko'rsatamiz.

Aralash ko'paytma quyidagi xossalarga ega:

1) $(\vec{a}\vec{b}\ )\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$.

Shuning uchun aralash ko'paytmani $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ kabi belgilash mumkin.

2) $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \vec{b}\,\vec{c}\,\vec{a} = \vec{c}\,\vec{a}\,\vec{b} = -\vec{b}\,\vec{a}\,\vec{c} = -\vec{c}\,\vec{b}\,\vec{a} = -\vec{a}\,\vec{c}\,\vec{b}$;

3) Aralash ko'paytma, geometrik jihatdan shu vektorlarga qurilgan parallelopipedning hajmiga teng, ya'ni: $\vec{a}\,\vec{b}\ \vec{c} = \pm$ V. Bu erda, agar $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlar o'ng sistema tashkil etsalar "+" ishora olinib, agar chap sistemaga bo'ysunsalar "-" ishora olinadi (1.23 – rasmga qaralsin).

4) $\vec{a}\cdot\vec{b}\,\vec{c} = 0 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ lar komplanar vektorlar;

Skalyar va vektor ko'paytma orasidagi bog'lanishlar.

Bizga fazoda uch o'lchovli $\vec{u}, \vec{v}$ va $\vec{w}$ vektorlar berilgan bo'lsin.

1) $\vec{u}\cdot(\vec{u}\times\vec{v}) = 0$ $\quad\vec{u}\times\vec{v}$ vektor bilan $\vec{u}$ ortogonal.

2) $\vec{v}\cdot(\vec{u}\times\vec{v}) = 0$ $\quad\vec{u}\times\vec{v}$ vektor bilan $\vec{v}$ ortogonal.

3) $|\vec{u}\times\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2 - (\vec{u}\cdot\vec{v})^2$ Lagranj tengligi.

◄1) va 2) formulalar ckalyar va vektor ko'paytmalarning xossalaridan o'rinli ekanligi kelib chiqadi. Lagranj tengligi: $|\vec{u}\times\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2 - (\vec{u}\cdot\vec{v})^2 = |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2 - |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2cos^2\theta = |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2(1 - cos^2\theta) = |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2sin^2\theta)$.►

1.29-Misol. Berilgan *A(-1, 2, 4)* nuqtaga qo'yilgan $\vec{F}$ *=(3,2,1)* kuchning koordinata boshi 0 ga nisbatan aylanma momenti $\vec{M}$ ning koordinatalari topilsin:

► $\vec{M}=\overrightarrow{OA}\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 2 & 4\\ 3 & 2 & 1\end{vmatrix}$ = (-6, 13, -8). ◄

1.30-Misol. $\vec{a}$=(2;-1; 8), $\vec{e}_1$=(1; 2; 3), $\vec{e}_2$=(1; -1; -2) va $\vec{e}_3$=(1; -6; 0) kabi vektorlar $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ ortonormallashgan bazis vektorlarda berilgan. Ulardan keyingi uchtasi bazis vektorlar ekanligi isbotlanib, $\vec{a}$ vektorning shu bazisdagi koordinatalari aniqlansin.

► Agar $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ va $\vec{e}_3$ vektorlarning koordinatalaridan tuzilgan determinant nolga teng bo'lmasa, $\vec{e}_1$,$\vec{e}_2$,$\vec{e}_3$ vektorlar chiziqli bog'lanmagan bo'lib, ular bazis vektorlardir, ya'ni:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & -1 & -2\\ 1 & -6 & 0\end{vmatrix}= -19\neq 0.$$

Demak, qaralayotgan $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ va $\vec{e}_3$ vektorlar bazis vektorlardir.

$\vec{a}$ vektorning $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ bazislardagi koordinatalarini x, y, z deb belgilaymiz U holda: $\vec{a}$ = $(x; y; z) = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$ Masalaning shartiga binoan, $\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}+8\vec{k}$, $\vec{e}_1=\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$, $\vec{e}_2=\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}$, $\vec{e}_3=\vec{i}-6\vec{j}$ bo'lgangi uchun, vektorlarning tenglik shartidan foydalanib, $2\vec{i}-\vec{j}+8\vec{k}=(x+y+z)\,\vec{i}+(2x-y-6z)\,\vec{j}+(3x-2y)\,\vec{k}$ ni yozamiz Bu tenglikdan esa

$$\begin{cases} x+y+z=2\\ 2x-y-6z=-1\\ 3x-2y=8\end{cases}$$

kabi sistema hosil bo'ladi Uning yechimi: $x = 2; y = -1; z = 1$

Demak: $\vec{a}=2\vec{e}_1-\vec{e}_2+\vec{e}_3$=(2; -1; 1).◄

Nazorat savollari

1. Determinant tushunchasi va ularning xossalari.

2. Yuqori tartibli determinantlar, ularni hisoblash qoidalari.

3. Matritsa va ular usitida amallar. Minor va algebraik to'ldiruvchi.

4. Chiziqli tenlamalar sistemasini yechishning Kramer, Gauss va teskari matritsa usuli.

5. Vektorlar va ular ustida amallar.

6. Vektorlarning skalyar ko'paytmasi va uning xossalari.

7. Vektorlarning vektor ko'paytmasi va uning xossalari.

8. Vektorlarning aralash ko'paytmasi va uning xossalari.

Mashqlar.

1. Uchburchakli *SABC* piramidada $\overrightarrow{SA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{SB} = \vec{b}$ va $\overrightarrow{SC} = \vec{c}$ bo'lib, agar *ABC* uchburchak massasining markazi *0* nuqtada bo'lsa, u holda $\overrightarrow{SO}$ vektor aniqlansin.

2. Biror vektorlar bazisida $\vec{a}$=(1,1,2), $\vec{e}_1$ =(2, 2, -1), $\vec{e}_2$ = (0, 4, 8), $\vec{e}_3$ = (-1, -1, 3) kabi vektorlar berilgan bo'lsa, $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ va $\vec{e}_3$ vektorlar, vektorlar bazisini tashkil etishliklarini tekshirib, bu bazisdagi $\vec{a}$ vektorning koordinatalari aniqlansin.

3. Agar $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$ va $\overrightarrow{CA} = \vec{b}$ vektorlar ABC uchburchakning tomonlarini tashkil etsalar, uchburchakning medianalari bilan ustma-ust tushadigan $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BN}$ va $\overrightarrow{CR}$ vektorlarni $\vec{a}$, $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlar orqali ifodalansin.

4. Asoslarining uzunliklari *AD* = 4 va *BC* = 2 bo'lgan *ABCD* to'g'ri burchakli trapetsiyada $\angle D = 45°$ bo'lsa, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ va $\overrightarrow{AC}$ vektorlarning $\overrightarrow{CD}$ vektor bilan berilgan l o'qdagi proektsiyalari topilsin.

5. *ABCD* parallelogramning ikkita uchi *A(2,-3,-5)* va *B(-1,3,2)* nuqtalarda bo'lib, uning diagonallarining kesishish nuqtasi *E(4, -1, 7)* nuqtada bo'lsa, uning qolgan ikki uchining koordinitalari topilsin .

6. Agar $\varphi = (\vec{a}\wedge\vec{b}) = \frac{2\pi}{3}$ bo'lib, $|\vec{a}|$=3, $|\vec{b}|$=4 bo'lsa, quyidagilar hisoblansin: $\vec{a}^2$, $\vec{b}^2$, $(\vec{a}+\vec{b})^2$, $(\vec{a}-\vec{b})^2$, $(3\vec{a}-2\vec{b})$ $(\vec{a}+2\vec{b})$.

7. Jismga ta'sir etayotgan kuch $F, |F| = 15$, uni o'z yo'nalishiga$\varphi = 60^0$ burchak ostida *4 m* masofaga siljitsa, natijada bajarilgan ish miqdori aniqlansin.

8. Moddiy jism, $\vec{F}$= (5,4,3) kuch ta'sirida $\vec{C} = (2,1,-2)$ vektorning boshidan uchiga tomon ko'chgan bo'lsa, u kuchning bajargan ishi A ni hamda $\vec{F}$ kuchning yo'nalishi bilan siljish yo'nalishlari orasidagi φ burchak aniqlansin.

9. $\overrightarrow{a}$ = α$\vec{\imath}$ - 3$\vec{\jmath}$ + 2$\vec{k}$ bilan $\overrightarrow{b}$ = $\vec{\imath}$ + 2$\vec{\jmath}$ - $\alpha\vec{k}$ vektorlar α ning qanday qiymatida o'zaro perpendikulyar bo'ladi?

10. Agar $\overrightarrow{a}$ vektor *Ox* va *Oy* koordinata o'qlari bilan mos ravishda α=60° va β=120° burchaklar tashkil etadigan bo'lib, |$\overrightarrow{a}$|=2 bo'lsa, $\overrightarrow{a}$ vektorning koordinatalari hisoblansin (Javob: $\vec{a} = \left(1, -1, \sqrt{2}\right)$ yoki $\vec{a} = \left(1, -1, -\sqrt{2}\right)$).

II BOB. ANALITIK GEOMETRIYA KURSI

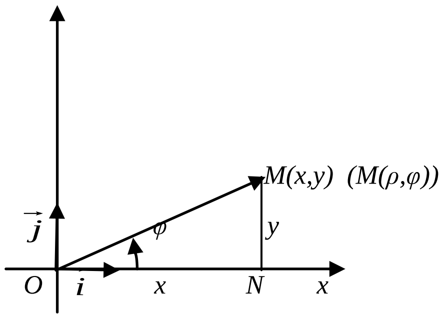
2.1. Qutb koordinatalari

Ma'lumki, tekislikdagi Oxy Dekart koordinatalari sistemasidagi har qanday M nuqta x va y sonlar orqali aniqlandi, ya'ni, $M(x,y)$ (2.1-rasm). Ushbu nuqtani masalan, $\rho = \left|\overrightarrow{OM}\right|$ masofa hamda *qutb o'qi* deb deb ataluvchi Ox o'qining $\overrightarrow{OM}$ radius vektorning soat strelkasiga teskari yo'nalishda hosil qilgan φ burchagi orqali ham aniqlash mumkin. Bu holda $M(\rho,\varphi)$ yozuvidan foydalanamiz. Bu yerda, ρ masofani *qutb radiusi*, φ ni *qutb burchagi*, *O* nuqtani esa, qutb deb qabul qilingan. 2.1- rasmga ko'ra *M* nuqtaning *x* va y Dekart koordinatalari bilan ρ va φ qutb koordinatalari orasidagi bog'lanish quyidagicha ifodalanadi:

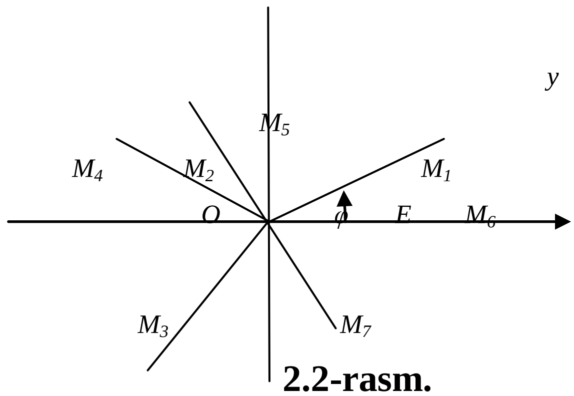
$$\left.\begin{array}{ll} x = \rho\cos\varphi, & \rho \ge 0 \\ y = \rho\sin\varphi, & 0 \le \varphi < 2\pi \end{array}\right\} \qquad (2.1)$$

yoki mazkur formuladan:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}. \qquad (2.2)$$



2.1-rasm.



2.2-rasm.

2.1-Misol. Qutb koordinatalari bilan berilgan quyidagi nuqtalarning o'rinlari topilsin: $M_1(2,\pi/6)$, $M_2(1{,}3\pi/4)$, $M_3(3{,}5\pi/4)$, $M_4(2{,}5\pi/6)$, $M_5(3/2,\pi/2)$, $M_6(4{,}0)$, $M_7(3,\pi/4)$.

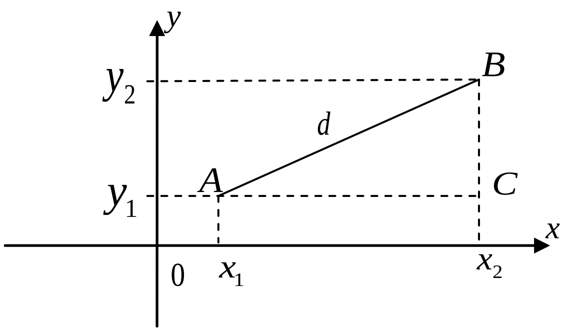
► (2.1) formuladan Dekart koordinatalari sistemasida berilgan nuqtalar quyidagi koordinatalarga ega bo'ladi:

$M_1(\sqrt{3},1)$, $M_2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $M_3-\left(\frac{3\sqrt{2}}{2},-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$, $M_4(-\sqrt{3},1)$ $M_5\left(0,\frac{3}{2}\right)$, $M_6(4,0)$ va

$M_7\left(\frac{3\sqrt{2}}{2},-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ larni topamiz (2.2–rasm). ◄

2.2. Ikki nuqta orasidagi masofa

Tekislikda ikki $A(x_1,y_1)$ va $B(x_2,y_2)$nuqtalar berilgan bo‘lsin. Bu nuqtalarni tutashtirishdan hosil bo‘lgan AB kesmaning uzunligi d ni topamiz (2.3-rasm)



2.3-rasm.

Keltirilgan rasmdan ko‘rinadiki, ΔABC-to‘g‘ri burchakli uchburchak bo‘lib,

$AC=x_2-x_1,\quad CB=y_2-y_1,\quad AB=d$

bo‘ladi. Pifagor teoremasiga ko‘ra

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \tag{2.3}$$

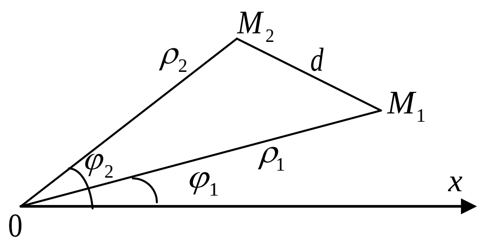
Bu ikki nuqta orasidagi masofani ifodalovchi formuladir. Xususan, koordinatalar boshi $O(0,0)$bilan $A(x,y)$nuqta orasidagi masofa $OA=\sqrt{x^2+y^2}$ bo‘ladi.

Masalan, tekislikda $A(1,2)$va $B(4,6)$nuqtalar berilgan bo‘lsin. Ushbu nuqtalar orasidagi masofani topamiz:

$$d=\sqrt{(4-1)^2+(6-2)^2}=\sqrt{9+16}=5.$$

2.2–Misol. Qutb koordinatalarda berilgan $M_1(\rho_1,\varphi_1)$ va $M_2(\rho_2,\varphi_2)$nuqtalar orasidagi masofa topilsin.

►Faraz qilamiz, bu nuqtalar tekislikda 2.4–rasmda ko‘rsatilgandek tasvirlansin:



2.4-rasm.

Keltirilgan rasmdan

$M_1M_2 = d,\ OM_1 = \rho_1,\ OM_2 = \rho_2,$

$\angle POM_1 = \varphi_1, \quad \angle POM_2 = \varphi_2 \,,$

$\angle M_1OM_2 = \varphi_2 - \varphi_1$

bo‘lishini aniqlaymiz.

Endi M_1OM_2 uchburchakni qaraylik kosinuslar teoremasiga ko‘ra

$$d^2 = \rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

ya’ni

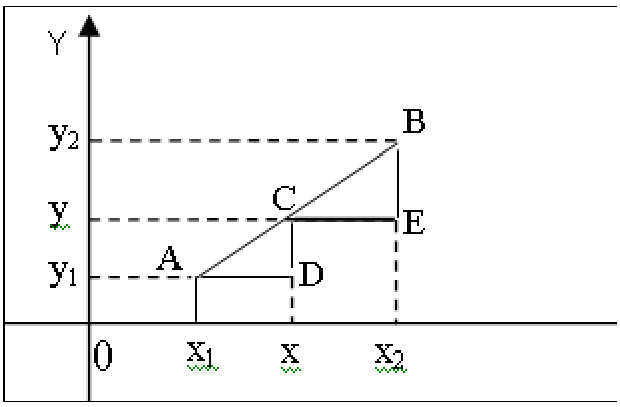
$$d = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

(2.4)

bo‘ladi. ◄

2.3. Kesmani berilgan nisbatda bo‘lish

Tekislikda ikkita $A(x_1, y_1)$ va $B(x_2, y_2)$ nuqtalar berilgan bo‘lib, ularni to‘g‘ri chiziq bilan birlashtirish natijasida AB kesma hosil qilingan va $\lambda > 0$ son ham berilgan AB kesmada $\frac{AC}{BC} = \lambda$ shartni qanotlantiruvchi C nuqtani aniqlash qaralayotgan kesmani berilgan nisbatda bo‘lish deyiladi. Izlanayotgan C nuqtaning koordinatalarini x va y deylik: $C(x, y)$ (2.5-rasm).



2.5-rasm.

Ravshanki,

$AD = x - x_1, \quad CE = x_2 - x$ hamda,

ΔACD va ΔCBE lar o‘xshash.

Binobarin $\frac{AD}{CE} = \frac{AC}{CB}$ bo‘ladi

Demak, $\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \lambda$.

Keyingi tenglikda $x - x_1 = \lambda x_2 - \lambda x$ bo‘lib, undan $x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}$ kelib chiqadi. Xuddi shunga o‘xshash $y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}$ bo‘lishi topiladi.

Shunday qilib, berilgan $A(x_1, y_1)$ va $B(x_2, y_2)$ nuqtalarni birlashtirishdan hosil bo‘lgan kesmani berilgan λ son nisbatda bo‘luvchi $C(x, y)$ nuqtaning koordinatalari

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} \tag{2.5}$$

bo‘ladi. Xususan, *C(x,y)* nuqta *AB* kesmani teng ikkiga bo‘luvchi nuqta bo‘lsa, $\dfrac{AC}{CB} = \lambda = 1$, va *C(x,y)* uchin $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$ ko’rinishida aniqlanadi. Masalan, *A*(2,9) va *B*(-4,3) nuqtalarni birlashtiruvchi AB kesmani $\lambda = \dfrac{7}{5}$ nisbatda bo‘luvchi *C(x,y)* nuqtaning koordinatalari

$$x = \frac{2 + \frac{7}{5}\cdot(-4)}{1 + \frac{7}{5}} = \frac{2\cdot 5 + 7\cdot(-4)}{12} = -\frac{3}{2}, \qquad y = \frac{9 + \frac{7}{5}\cdot 3}{1+\frac{7}{5}} = \frac{9\cdot 5 + 3\cdot 7}{12} = \frac{11}{2}$$

bo‘ladi.

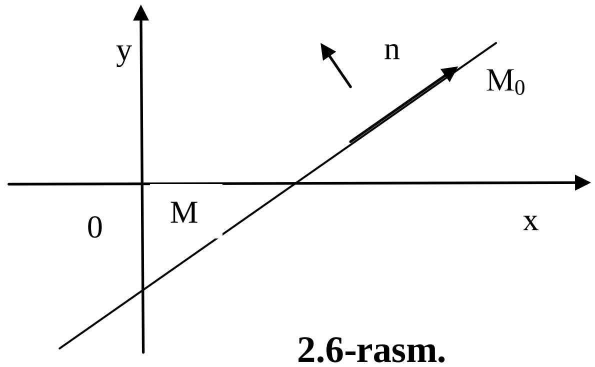
2.4. Tekislikdagi to‘g‘ri chiziq tenglamalari

2.1-Teorema. Tekislikda *Oxy* Dekart koordinatalari sistemasida har qanday to’g’ri chiziq, x va y noma’lumlarga nisbatan birinchi darajali

$$Ax + By + C = 0 \tag{2.6}$$

algebrik tenglama bilan beriladi va aksincha har qanday (2.6) tenglama to’g’ri chiziqni ifodalaydi (bu yerda: $A^2 + B^2 > 0$, A, B, C lar haqiqiy sonlardir).

◄To’g’ri chiziqda $M_0(x_0, y_0)$ nuqta va ciziqqa perpendikulyar bo’lgan $\vec{n} = (A, B)$ ***to’g’ri chiziqning normal vektori*** berilgan bo’ lsa,to’g’ri chiziqda yotuvchi $M(x, y)$ nuqta uchun $\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0\}$ $\vec{n}$ vektorgqa perpendikulyar bo’ladi. Perpendikulyarlik sharti $\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_0M} = 0$ yoki $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$



2.6-rasm.

Qavislarni ochib va $C = -Ax_0 - By_0$ belgilash kiritsak, yuqordagi tenglamani (2.6) ko’rinishiga keltirishimiz mumkin.►

Agar (2.6) tenglamada B $\neq$ 0 bo’lsa, uni

$$y = kx + b(k = tg\alpha) \tag{2.7}$$

ko’rinishiga keltirish mumkin va u ***to’g’ri chiziqning k burchak koeffitsientli tenglamasi*** deyiladi. Bu yerda, α - to’g’ri chiziqning Ox o’qining musbat yo’nalishi bilan tashkil etgan hamda soat strelkasiga qarshi yo’nalishga ega burchak bo’lib, to’g’ri chiziqning og’ish burchagi deb yuritiladi, b esa, to’g’ri chiziqning *Oy* o’qidan kesib o’tgan kesmasining qiymatini belgilaydigan sondir.

Tekislikdagi to’g’ri chiziqning boshqa xildagi tenglamalari ham mavjuddir.

To‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasi (2.6) uchin uch holni ko‘ramiz:

1) $C = 0$, bunda tenglama $Ax + By = 0$ ko‘rinishni oladi, bu tenglama koordinatalar boshidan o‘tgan to‘g‘ri chiziqni ifodalaydi. Haqiqatdan, $x = 0, y = 0$ koordinatalar bu tenglamani qanoatlantiradi.

2) $A = 0, B \neq 0$, bunda (2.6) $By + C = 0$ ko‘rinishga keladi, bu tenglama x o‘qiga parallel o‘tadigan to‘g‘ri chiziqni ifodalaydi. Hususan, agar $C = 0$ bo‘lsa, $y = 0$ hosil bo‘ladi, bu Ox o‘qining tenglamasidir.

3) $\mathrm{A} \neq 0, \mathrm{B} = 0$, bunda (2.6) $\mathrm{Ax} + \mathrm{C} = 0$ ko‘rinishga keladi, bu tenglama Oy o‘qiga parallel to‘g‘ri chiziqdir. Agar $C = 0$ bo‘lsa, bu Oy o‘qining tenglamasidir.

$A \neq 0, B \neq 0, C \neq 0$ bo‘lsin U holda (2.6) ning ozod hadi C ni tenglikning o‘ng tomoniga o‘tkazsak va $-C$ ga bo‘lib yuborsak:

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1.$$

Quyidagi belgilashlarni kiritsak: $a=-\frac{C}{A}, b=-\frac{C}{B}$ tenglama

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \tag{2.8}$$

ko‘rinishga keladi (2.8) ni to‘g‘ri chiziqning **kesmalardagi tenglamasi** deb ataladi, chunki bu to‘g‘ri chiziq har bir koordinata o‘qlaridan mos ravishda *a* va *b* ga teng kesma ajratadi.

Agar $M_0(x_0, y_0)$ to‘g‘ri chiziqning berilgan nuqtasi va $\vec{a}=\{m,n\}$ uning yo’naltiruvchi vektori bo’lsa, ushbu chiziqning tenglamasini hosil qilish mumkin. Agar $M(x,y)$ to‘g‘ri chiziqning ixtiyoriy nuqtasi bo’lsa, $\vec{a}$ ва $\overrightarrow{M_0M}$ vektorlar o’zaro parallel bo’ladi. Vektorlarning kollinearlik shartidan

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n} \tag{2.9}$$

Usbu tenglama to‘g‘ri chiziqning kanonik tenglamasi deb ataladi.

Agar (2.9) da kasrlarni t ga tenglasak,

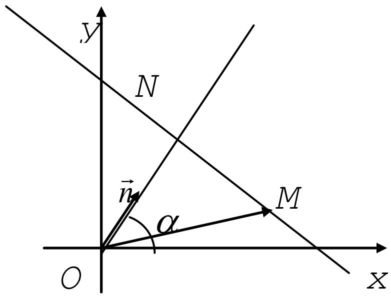
$$\begin{cases} x=x_0+mt, \\ y=y_0+nt, \end{cases} \tag{2.10}$$

to‘g‘ri chiziqning parametrik tenglamalari deb ataluvchi tenglama hosil bo’ladi.

Agar to‘g‘ri chiziqning ikkita $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2)$ nuqtalari berilgan bo’lsa, holda $\vec{a}=\overrightarrow{M_1M_2}$ yo’naltiruvchi vektori bo’ladi, demak qaralayotgan to‘g‘ri chiziqning tenglamasi (2.9) ga asosan

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \tag{2.11}$$

Ushbu tenglama ***ikki nuqtadan o’tuvchi to‘g‘ri chiziqning tenglamasi*** deyladi.



2.7-rasm.

ℓ to‘g‘ri chiziq va uning normali $\vec{n}$ berilgan bo’lsin. Agar α, $\vec{n}$ vektorning Ox o’qiga og’ish burchagi bo’lsa, u holda $\vec{n}$ vektorning orti $\vec{n}_0 = \{Cos\alpha, Sin\alpha\}$ bo'ladi va $|\vec{n}_0| = 1$. $M(x,y)$ to‘g‘ri chiziqning nuqtasi va $ON = p$ bo’lsin. U holda

$$p = np_{\vec{n}}\overrightarrow{OM} = |\vec{n}| \cdot np_{\vec{n}}\overrightarrow{OM} = \vec{n} \circ \overrightarrow{OM} = xCos\alpha + y\,Sin\alpha.$$

Bundan

$$xCos\alpha + y\,Sin\alpha - p = 0 \tag{2.12}$$

kelib chiqadi. (2.12) to‘g‘ri chiziqning **normal tenglamasi** deb ataladi.

To’g’ri chiziqning umumiy tenglamasini normal ko’rinishga keltirish uchun, to‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasi (2.6) ni $\pm\sqrt{A^2+B^2}$ ifodaga bo’lish kerak:

$$\pm\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}x \pm \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}y \mp \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} = 0$$

va (2.12) tenglamada ozod had manfiy bo’lganligi sababli, oxirgi tenglamada ham ozod handing ishorasini manfiy qilib tanlab olinadi. $\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$ ifoda normallovchi ko’paytuvchi deb ataladi.

2.5. Ikki to’ri chiziq orasidagi burchak

Tekislikda $\ell_1 : y = k_1x + b_1$ ва $\ell_2 : y = k_2x + b_2$ to‘g‘ri chiziqlar berilgan bo’lsin. Bizga ma’lumki, $k_1 = tg\alpha_1, k_2 = tg\alpha_2$ va α_1, α_2 mos ravishda ℓ_1, ℓ_2 to‘g‘ri chiziqlarning Ox o’qiga og’ish burchaklari. Ushbu burchaklar musbat yo’nalishga mos va $\alpha_2 > \alpha_1$ bo’lsa, ℓ_1, ℓ_2 to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchak $\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$ bo’lib

$$tg\alpha = tg(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_1 \cdot tg\alpha_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} \tag{2.13}$$

kelib chiqadi. Agar $k_1 = k_2$ bo'lsa, $\alpha = 0, \pi$, ya'ni ℓ_1, ℓ_2 tog'ri chiziqlar **parallel** bo'ladi. Agar ℓ_1, ℓ_2 to'g'ri chiziqlar perpendikulyar, ya'ni $\alpha = \frac{\pi}{2}$ bo'lsa, u holda (2.13) dan $1 + k_1 \cdot k_2 = 0$ kelib chiqadi. Ushbu tenglik to'g'ri chiziqlarning **perpendikulyarlik sharti** deyiladi.

1. Ikki to'g'ri chiziq tenglamasini birgalikda tekshirish. Ikki ℓ_1, ℓ_2 to'g'ri chiziqlariga mos keluvchi tenglamalaridan tuzilgan

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 = 0, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 = 0 \end{cases} \tag{2.14}$$

sistema berilgan bo'lsin. Ushbu sistema yagona yechimga ega bo'lishi uchun $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$ shart bajarilishi zarur va yetarlidir. Ushbu shart $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$ tengsizlikka olib keladi. (2.14) ning yagona yechimi ℓ_1, ℓ_2 to'g'ri chiziqlarini har birini qanoatlantiruvchi nuqtaning koordinatasini, ya'ni ℓ_1, ℓ_2 **to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasini** aniqlaydi.

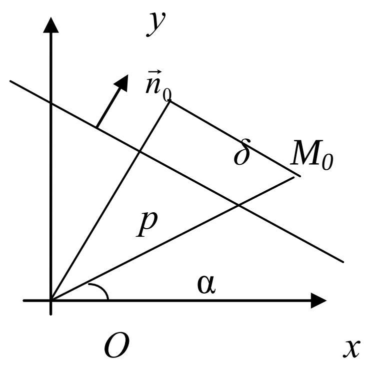
Agar $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0$ bajarilsa, $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$, bunda ikki hol yuz berishi mumkin:

1) $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ shartlar bayarilqanda (2.14) cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladi, ya'ni ℓ_1, ℓ_2 **to'g'ri chiziqlar ustma-ust tushadi**;

2) $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$ shartlar bayarilqanda (1.34) yechimga ega emas, ya'ni ℓ_1, ℓ_2 **to'g'ri chiziqlar parallel** bo'ladi.

2.6. Nuqtadan berilgan to'g'ri chiziqgacha bo'lgan masofa

$M_0(x_0, y_0)$ nuqtadan ℓ to'g'ri chiziqgacha bo'lgan d masofani aniqlash uchun, to'g'ri chiziqning $\vec{n}_0$ normalini joylashtiramiz. Agar M_0 nuqta ℓ ga nisbatan, $\vec{n}_0$ normalning musbat yunalishi tomonida joylashgan bo'lsa masofa $+d$, aks holda $-d$ bo'ladi, ya'ni M_0 nuqtani ℓ to'g'ri chiziqdan chetlanishi δ deb belgilaymiz.



2.8 –rasm.

Chizmadan ko'rinmoqdaki $p+\delta = np_{\vec{n}_0}\overrightarrow{OM_0} = x_0 CoS\alpha + y_0 Sin\alpha$, yoki

$$\delta = x_0 CoS\alpha + y_0 Sin\alpha - p \text{ yoki } d = |x_0 CoS\alpha + y_0 Sin\alpha - p| \qquad (2.15)$$

2.3-Misol. $3x-5y+15=0$ to'g'ri chiziqning kesmadagi tenglamasini tuzing

►Ozod had 15 ni tenglikning o'ng tomoniga o'tkazib -15 ga bo'lamiz, u holda $\frac{x}{-5}+\frac{y}{3}=1$. Demak, berilgan to'g'ri chiziq x va y o'qlaridan mos ravishda $a=-5$, $b=3$ kesmalarni ajratar ekan.◄

2.4-Misol. ABC uchburchakning uchlari $A(4;3)$; $B(-3;-3)$ va $C(2;7)$ nuqtalarda bo'lsa, **a)** AB tomon tenglamasi; **b)** CN balandlik tenglamasi; **c)** AM mediana tenglamasi; **d)** AM mediana bilan CN balandlikning tenglamasi kesishish nuqtasi; **e)** C uchidan o'tib AB tomonga parallel bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasi; **f)** C nuqtadan AB tomongacha bo'lgan masofa aniqlansin.

►**a)** AB tomon tenglamasini (2.11) formuludan foydalanib tuzamiz:

$$\frac{x-4}{-3-4} = \frac{y-3}{-3-3}, \quad \text{yoki } 6x-7y-3=0;$$

b) AB tomon tenglamasini y ga nisbatan yechib, AB to'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyenti $k_1 = \frac{6}{7}$ ni topamiz AB bilan CH to'g'ri chiziqlarning perpendikulyarlik shartidan foydalanib (2.13 formulaga qaralsin), CH balandlikning burchak koeffitsiyenti $k_2 = -\frac{7}{6}$ ekanligini aniqlaymiz. U holda, (2.13) tenglamadan foydalanib, CA balandlikning tenglamasini yozamiz:

$$y-7 = -\frac{7}{6}(x-2), \text{ yoki } 7x+6y-56=0;$$

c) BC tomon o'rtasi bo'lgan $M(x,y)$ nuqtaning koordinatalari,

$x = \frac{-3+2}{2} = -\frac{1}{2}$ va $y = \frac{-3+7}{2} = 2$ larni topib, A va M nuqtalardan o'tuvchi mediana tenglamasini tuzamiz:

$$\frac{x-4}{-\frac{1}{2}-4} = \frac{y-3}{2-3} => 2x - 9y + 19 = 0;$$

d) BC bilan CN balandliklarning tenglamalarini birgalikda yechib, ularning kesishish nuqtasi bilan N ning koordinatalarini aniqlaymiz,

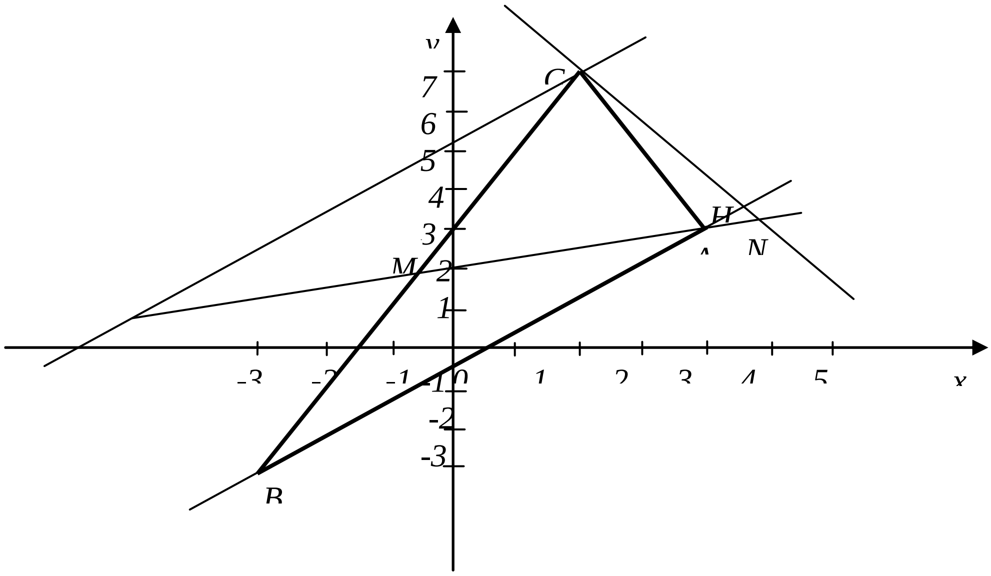
$\begin{cases} 7x + 6y - 56 = 0 \\ 2x - 9y + 19 = 0 \end{cases}$ sistemani yechib $N(\frac{26}{5}, \frac{49}{15})$ ni topamiz;

e) C uchdan o'tib AB tomonga parallel bo'lgan to'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyentini ham $k_1 = 6/7$ bo'ladi. U holda, (2.13) tenglamaga ko'ra hamda C nuqtaning koordinatalariga binoan, CD to'g'ri chiziq tenglamasini tuzamiz:

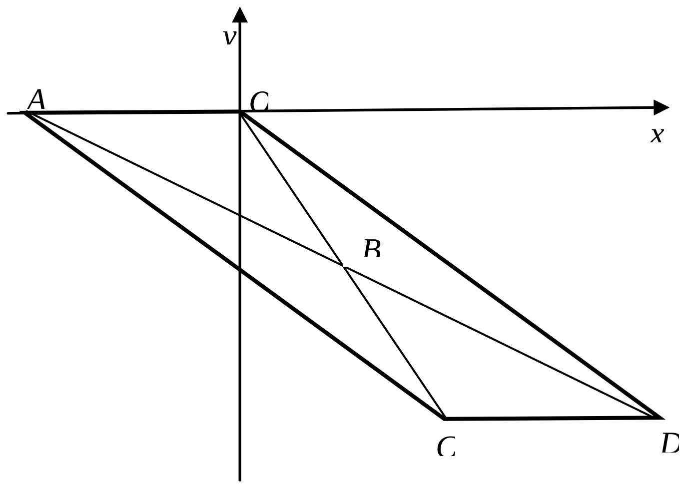
$$y - 7 = \frac{6}{7}(x - 2), \qquad \text{yoki} \quad 6x - 7y + 37 = 0;$$

f) C nuqtadan AB tomongacha bo'lgan d masofani (2.15) formuladan foydalanib aniqlaymiz: $d = |DH| = \frac{|6 \cdot 2 - 7 \cdot 7 - 3|}{\sqrt{6^2 + (-7)^2}} = \frac{40}{\sqrt{85}} \approx 4{,}4$

Ushbu masalaning yechimi 2.9-rasmda aks ettirilgan. ◄



2.9-rasm.



2.10-rasm.

2.5-Misol. 2.10-rasm $OACD$ parallelogrammning ikkita uchi $O(0,0)$ va $A(-2,0)$ nuqtalarda bo'lib, diagonallarining kesishishi nuqtasi $B(2,-2)$ bo'lsa, parallelogramm tomonlarining tenglamalari yozilsin

► OA tomon tenglamasining $y = 0$ ekanligi ma'lum $B(2,-2)$ nuqta AD (28-rasm) diagonalning o'rtasi bo'lganligidan, $D(x, y)$ uchining koordinatalarini kesmani teng ikkiga bo'lishi formulasidan foydalanib topamiz:

$$2 = \frac{-2+x}{2}, \quad -2 = \frac{0+y}{2}, \qquad \text{yoki } \ x = 6, y = -4$$

Demak, $B(6,-4)$ endi, OA va CD tomonlar parallel bo'lganliklari uchun CD tomon tenglamasi $u = -4$ ekanligini topamiz OD tomon tenglamasi: $\frac{x-0}{6-0} = \frac{y-0}{-4-0}$, yoki $2x + 3y = 0$ AC tomonning tenglamasini tuzish uchun uning $A(-2,0)$ nuqtadan o'tib, OD tomonga parallel ekanligidan foydalanamiz (2.13 tenglamaga qaralsin), $y - 0 = -\frac{2}{3}(x + 2)$ yoki $2x + 3y + 4 = 0.$◄

Mashqlar

1. $x - 7y = 1 \; va \; x + y = -7$ to'g'ri chiziqlar tashkil qilgan burchak ichidagi *A(1,1)* nuqtadan o'tuvchi burchak bissektrisasining tenglamasi yozilsin.
2. Agar $ABCD$ parallelogramning $AB, BC, CD \; va \; DA$ tomonlari mos ravishda $P(3,0), Q(6,6), R(5,9)$va $S(-5,4)$ nuqtalardan o'tib, diagonallari $M(1,6)$ nuqtada kesishadigan bo'lsa, uning tomonlarini tenglamalari tuzilsin.

3. Radiusu $R = 5$ bo'lgan aylanaga $3x + 4y - 30 = 0$ va $3x - 4y + 12 = 0$ to'g'ri chiziqlar urilib o'tadilar ushbu urinma to'g'ri chiziqlar hamda urinish nuqtalariga o'tkazilgan aylana radiuslari hosil qilgan to'rtburchakning yuzasi hisoblansin.

4. OxKvadrat shaklidagi yer maydonining chegarasini saqlanib qolgan ustunlar yordamida tiklash lozim bo'lsin: ulardan biri, maydonning o'rtasida joylashgan, qolgan ikkitasi chegaraning qarama-qarshi tomonlarida joylashgan. Shuningdek, markazidagi ustun $M_1(1,6)$ nuqtada bo'lib, qolgan ikkitasi esa, $A(5,9)$, va $B(3,0)$ nuqtalardadir. Maydonning chegarasini ifodalaydigan to'g'ri chiziqlarning tenglamalari tuzilsin.

2.7. Ikkinchi tartibli egri chiziqlar. Aylananing umumiy tenglamasi

O'zgaruvchilarning 2 darajasi qatnashgan tenglamalar ikkinchi tartibli egri chiziqni bildiradi. Umumiy holda uning tenglamasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi.

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + M = 0, \tag{2.16}$$

bu yerda, A, B, C, D, E, M lar o'zgarmas koeffisientlar bo'lib, bulardan A, B, C koeffisientlarning kamida bittasi 0 ga teng bo'lmasligi kerak. (2.16) tenglama koeffisientlarining qiymatiga qarab qanday egri chiziqni tasvirlashini ko'ramiz.

2.1-Ta'rif. Markaz deb ataluvchi $C(a,b)$ nuqtadan bir hil R masofada joylashgan nuqtalarning geometrik o'rni **aylana** deb ataladi.

Ikki nuqta orasidagi masofa formulasiga asosan

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \tag{2.17}$$

kelib chiqadi.

Qavslarni ochib bu tenglamani quyidagicha yozish mumkin:

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = R^2,$$

bu tenglamani (2.16) tenglama bilan solishtirib, xy oldidagi koeffisientni yo'qligini va x^2 va y^2 oldidagi koeffisientlar o'zaro teng ekanligini ko'ramiz. Shunday qilib,

x,y ga nisbatan ikkinchi tartibli umumiy tenglama aylana tenglamasi bo‘lishi uchun undagi x^2 va y^2 qatnashgan hadlar oldidagi koeffisientlar teng va xy ko‘paytma oldidagi koeffisientlar 0 ga teng bo‘lishi zarur va etarlidir. (2.17) tenglamaga aylananing **umumiy tenglamasi** deb ataladi.

Xususan aylananing markazi koordinatalar boshida joylashgan bo‘lsa, tenglama $x^2 + y^2 = R^2$ ko‘rinishga keladi.

2.8. Ellips

2.2-Ta’rif. ***Ellips*** deb, fokuslar deb ataluvchi nuqtalargacha bo‘lgan masofalarining yig‘indisi o‘zgarmas *2a* bo‘lgan tekislik nuqtalarining geometrik o‘rniga aytiladi.

Fokuslarni F_1, F_2 deb belgilaymiz, ular orasidagi masofa $2c$ teng bo‘lsin Ellipsning ta’rifiga asosan,

$$F_1M + F_2M = 2a \tag{2.18}$$

Bizga ma’lumki *2a>2c* Dekart koordinatalar sistemasini olamiz. Tanlab olgan koordinatalar sistemasida chap fokus $F_1(-c,0)$ va o‘ng fokus $F_2(c,0)$, *M(x,y)* ixtiyoriy nuqta ellips tenglamasini keltirib chiqaramiz

$$MF_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \qquad MF_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

(2.18) ga asosan

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \tag{2.19}$$

Tenglamani soddalashtirish uchun yuqoridagi ifodani quyidagicha yozamiz: $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$ tenglamani ikkala tomonini kvadratga oshirib

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 + (x-c)^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

va soddalashtirib $a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx$, yana kvadratga ko‘tarib soddalashtirsak

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

$(a^2 - c^2)$ musbat son, shuning uchun $(a^2 - c^2) = b^2$ deb olsak yuqoridagi tenglama quyidagicha ko‘rinishga keladi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{2.20}$$

Oxirgi tenglama ellipsning ***kanonik tenglamasi*** deyiladi. Endi ellipsning kanonik tenglamasidan foydalanib uning shaklini tekshiramiz. (2.20) tenglamaga ellipsning x va y ning kvadratlari qatnashadi, shu sababli *(x,y)* nuqta ellipsning nuqtasi bo‘lsa, $(\pm x, \pm y)$ nuqtalar ham ellipsga tegishli bo’ladi. Demak, ellips koordinata o‘qlariga nisbatan simmetrik joylashgan, bundan ellips birinchi chorakda tekshirilishi yetarli ekanligi kelib chiqadi.

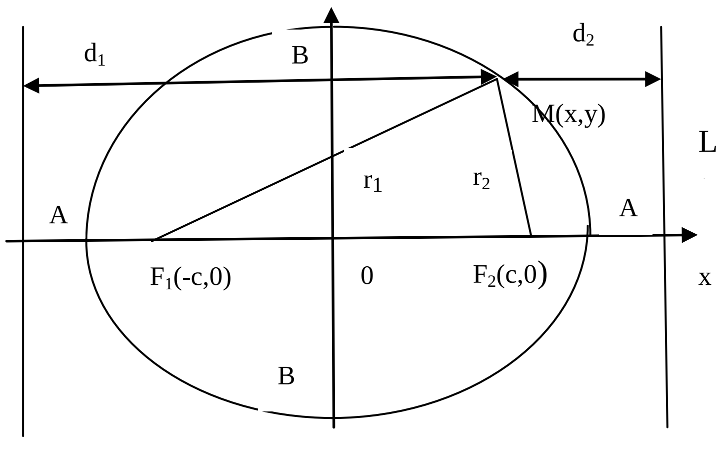
$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

y haqiqiy son bo‘lishi uchun $a^2 - x^2 \geq 0$ yoki $|x| \leq a$ bo‘lishi kerak.

Koordinata o‘qlari ellipsning simmetriya o‘qlari deyiladi, fokuslar yotgan simmetriya o‘q ellipsning fokal o‘qi deyiladi. Simmetriya o‘qlarining kesishgan nuqtasi ellipsning markazi bo’ladi. Ellipsning simmetriya o‘qlari bilan kesishgan nuqtalari uning uchlari deyiladi. 1.35-rasmda $A(a,0), A_1(-a,0), B(0,b), B_1(0,-b)$ nuqtalar ellipsning uchlari $AA_1 = 2a$ ellipsning katta o‘qi $BB_1 = 2b$ ellipsning kichik o‘qi deyiladi (a>b bo‘lishi shart).

Ellipsning ekssentrisiteti. Ellipsning fokuslari orasidagi masofaning uning katta yarim o‘qi uzunligiga nisbati ellipsning ***ekssentrisiteti*** deyiladi va $\varepsilon = \frac{c}{a}$ deb belgilanadi $0 \leq \varepsilon < 1.$

Bizga ma’lumki, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ bu yerdan $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}.$



2.11-rasm.

Agarda a=b bo‘lsa ellips aylana bo‘lib qoladi va $\varepsilon = 0$ bo‘ladi. Agar b ning qiymati a dan 0 gacha kamaysa, ε, 0 dan 1 gacha o‘sib boradi. Shunday qilib, ellipsning ε ekssentrisiteti 0 ga qancha yaqin bo‘lsa ellipsning shakli aylanaga shuncha yaqin va ekssentrisiteti 1 ga qancha yaqin bo‘lsa u shuncha ingichkalashadi.

Ellipsning fokal radiuslari. Ellipsning ixtiyoriy nuqtasidan fokuslargacha bo‘lgan masofalari ellips nuqtasining ***fokal radiuslari*** deyiladi F_1M va F_2M ellipsdagi M nuqtaning fokal radiuslaridir, bularni r_1 va r_2 deb belgilaymiz:

$$r_1 = F_1M = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \qquad r_2 = F_2M = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

fokal radiuslarni kvadratga oshirib, natijalarni ikkinchisidan birinchisini ayiramiz:

$$r_1^2 - r_2^2 = 4cx$$

Agar $r_1 + r_2 = 2a$ ekanligini e’tiborga olsak $r_2 - r_1 = 2\frac{c}{a}x$ tenglik hosil bo‘ladi, ularni hadlab qo’shsak,

$$\begin{cases} r_1 = a + \varepsilon x \\ r_2 = a - \varepsilon x \end{cases} \qquad (2.21)$$

fokal radiuslar uchin tegishli formulalar hosil bo’ladi.

Ellipsning direktrisalari. Ellipsning ***direktrisalari*** deb, uning katta o‘qiga perpendikulyar bo‘lgan va markazidan $\left| \pm \frac{a}{b} \right|$ masofa uzunligida o‘tadigan ikkita to‘g‘ri chiziqqa aytiladi. Ellips direktrisalarining tenglamalari $x = +\frac{a}{\varepsilon}$ $x = -\frac{a}{\varepsilon}$ bo‘ladi Direktrisalari ellipsning a va -a uchlaridan tashqarida joylashgan bo‘ladi, chunki ε <1, $\frac{a}{\varepsilon} > a$, $-\frac{a}{\varepsilon}$<-a . Direktrisalar quyidagi xossaga bo‘ysunadi:

2.2-Teorema. Ellipsning ixtiyoriy $M(x,y)$ nuqtalaridan fokuslarigacha va direktrisalarigacha bo‘lgan masofaga nisbati ε (o‘zgarmas songa) teng

◀ $d_1 = ML_1 \quad d_2 = ML_2$ sonlar M nuqtadan direktrisalargacha bo‘lgan masofa, r_1 va r_1 fokal radiuslar, 2.11-rasmdan $d_1 = ML = OD - ON = \frac{a}{\varepsilon} - x = \frac{a - \varepsilon x}{\varepsilon}$.

Demak

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{a - \varepsilon x}{\frac{a - \varepsilon x}{\varepsilon}} = \varepsilon, \quad \frac{r_2}{d} = \frac{a + \varepsilon x}{\frac{a + \varepsilon x}{\varepsilon}} = \varepsilon$$ ▶

2.9. Giperbola

2.3-Ta’rif. ***Giperbola*** deb har bir nuqtasidan berilgan ikki nuqtagacha (fokuslargacha) masofalarning ayirmasi o‘zgarmas songa teng bo‘lgan tekislik nuqtalarining geometrik o‘rniga aytiladi (2.12-rasm).

Fokuslar orasidagi masofani $2c$ deb belgilaymiz. Giperbola ta’rifiga asosan,

$$MF_1 - MF_2 = \pm 2a \quad (a \rangle 0)$$

Giperbolaning berilgan koordinata sistemasida tenglamasini keltirib chiqaramiz. Uning uchun F_1 va F_2 nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqni absissa o‘qi deb, F_1F_2 kesmaning o‘rtasidan o‘tuvchi va bu o‘qga perpendikulyar to‘g‘ri chiziqni ordinata o‘qi deb olamiz $M(x, y)$ nuqta giperbolaning ixtiyoriy nuqtasi. Bizga ma’lumki,

$$MF_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\ , \ MF_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\ ,$$

demak

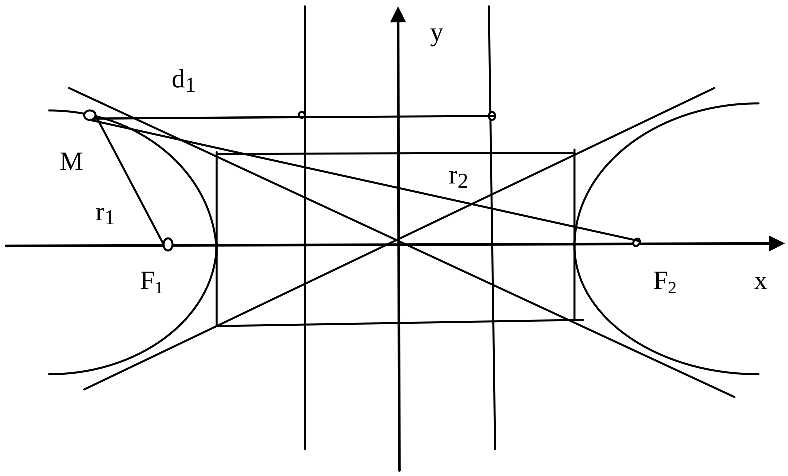
$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

yoki

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \pm 2a\,.$$

Bu tenglikning ikkala tomonini kvadratga ko‘tarib, ixchamlashtirgandan so‘ng, yana bir marta kvadratga ko‘tarib, $c^2 - a^2 = b^2$ deb belgilasak, giperbolaning kanonik tenglamasini hosil qilamiz

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (2.22)$$



2.12-rasm.

Hosil bo'lgan tenglamani giperbola tegishli nuqtalarining koordinatalarini qanoatlantiradi. Quyida giperbola qanday egri chiziq bo'lishini o'rganamiz. Tenglamada noma'lum koordinatalarining juft darajasi qatnashadi. Shunga asosan giperbolaning ikki simmetriya o'qi mavjud. Bu *Ox* va *Oy* o'qlaridir, simmetriya o'qlari giperbolaning o'qlari deyiladi.

Giperbolaning koordinata o'qlari bilan kesishish nuqtalarini topish uchun $y=0$ desak, $x=\pm a$ bo'ladi. $x=0$ bersak, $y=\pm\sqrt{-b^2}$ bo'ladi. Demak, giperbola y o'qi bilan kesishmaydi. Giperbolaning fokuslari joylashgan *Ox* o'qi, uning haqiqiy o'qi *Oy* esa mavxum o'qi deyiladi.

Giperbolaning asipmtotalari. Giperbolaning tenglamasini y ga nisbatan yechib, quydagini topamiz:

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2(1-\frac{a^2}{x^2})} = \pm\frac{b}{a}x\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}$$

bu yerdan x yetarli darajada katta bo'lganda, ya'ni cheksizga intilganda $\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}$ birga yaqin bo'ladi. Demak, giperbola tenglamasidan yetarli katta x lar uchun $y = \pm\frac{b}{a}x$ to'g'ri chiziqlar ko'rinishidagi giperbola ***asimptotalari*** tenglamalari hosil bo'ladi.

Giperbolaning ekssentrisiteti. Fokuslar orasidagi masofa 2c ning 2a ga nisbati $\varepsilon = \frac{c}{a}$ giperbolaning ***ekssentrisiteti*** deyiladi. Bizga ma'lumki, $c \rangle a$, bundan $\varepsilon > 1$ ekssentrisiteti giperbolani formasini ifodalaydi $c^2 = a^2 + b^2$ dan $\left(\frac{b}{a}\right)^2 = \left(\frac{c}{a}\right)^2 - 1 = \varepsilon^2 - 1$. Demak ekssentrisiteti kichik bo‘lgan sari giperbolaning tarmoqlari shuncha siqilgan bo‘ladi ε qancha katta bo‘lsa, giperbola tarmoqlari shuncha yoyiq bo‘ladi.

Giperbolaning direktrisalari. Giperbolaning ***direktrisalari*** deb uning markazidan $\pm\frac{a}{\varepsilon}$ masofada fokal o‘qiga perpendikulyar bo‘lgan ikkita to‘g‘ri chiziqqa aytiladi. Demak, direktrisa tenglamalari quyidagicha ko‘rinishda bo‘ladi.

$$x = +\frac{a}{\varepsilon} \qquad x = -\frac{a}{\varepsilon}$$

Giperbolada $\varepsilon > 1$ bo‘lgani sababli $\frac{a}{\varepsilon} < a$ bo‘ladi. Giperbolaning direktrisalari mavxum o‘qga parallel bo‘lib, bu o‘q bilan giperbola uchlari orasida joylashgan.

Giperbola direktrisalari quyidagi xossaga ega: Giperbolaning ixtiyoriy nuqtasidan fokusgacha bo‘lgan masofani, mos direktrisagacha bo‘lgan masofaga nisbati ε ga (o‘zgarmas songa) teng.

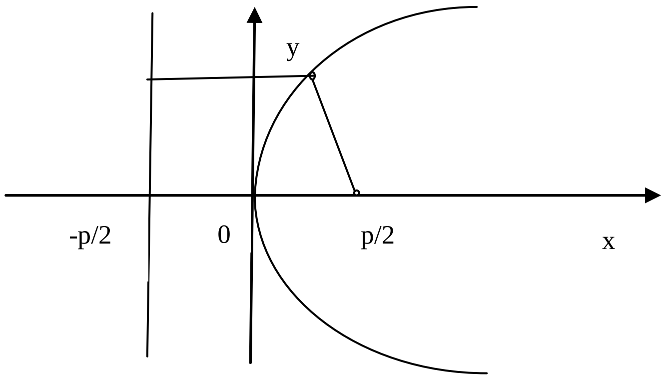
Agar nuqta giperbolaning chap tarmog‘ida bo‘lsa, u holda bu nuqtadan direktrisagacha bo‘lgan masofa $d_1 = \frac{a}{\varepsilon} - x$ bo‘ladi. Agar nuqta giperbolaning o‘ng tarmog‘ida bo‘lsa, u holda direktrisagacha bo‘lgan masofa $d_1 = x - \frac{a}{\varepsilon}$ ga teng. Endi $\frac{r_1}{d_1}$ nisbatni ko‘ramiz *M* nuqta o‘ng tarmoqda bo‘lgan holda $\frac{r_1}{d_1} = \frac{-a + \varepsilon x}{x - \frac{a}{\varepsilon}} = \frac{\varepsilon(-a + \varepsilon x)}{\varepsilon x - a} = \varepsilon$ *M* nuqta chap tarmoqda bo‘lganda $\frac{r_1}{d_1} = \varepsilon$. Demak, ikkala holda ham ε ga teng bo‘ladi.

2.10. Parabola

2.4-Ta'rif. ***Parabola*** deb har bir nuqtasidan berilgan nuqtagacha (fokusgacha) va berilgan to‘g‘ri chiziqqacha (direktrisagacha) bo‘lgan masofalari o‘zaro teng bo‘lgan tekislik nuqtalarining geometrik o‘rniga aytiladi.

Direktrisasidan fokusgacha bo‘lgan masofa *p* parabola parametri deyiladi.

Parabola tenglamasini keltirib chiqarish uchun tekislikdagi koordinata sistemasini quyidagicha olamiz. Berilgan nuqtadan o‘tuvchi va berilgan to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar to‘g‘ri chiziqni absissa o‘qi deb, nuqtadan to‘g‘ri chiziqqa tushirilgan perpendikulyarning o‘rtasidan o‘tuvchi va absissa o‘qiga perpendikulyar o‘qni ordinata o‘qi deb olamiz.



2.13-rasm.

Tanlab olingan koordinatalar sistemasida fokus koordinatalari $F(\frac{p}{2},0)$, direktrisaning tenglamasi $x=-\frac{p}{2}$ va bu to‘g‘ri chiziq *Oy* o‘qiga parallel. $M(x,y)$ parabolaning ixtiyoriy nuqtasi bo‘lsin. Parabolaning ta'rifiga asosan

$$x+\frac{p}{2}=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}$$

Ikkala tomonini kvadratga ko‘tarib ixchamlashtirsak parabolaning kanonik tenglamasi hosil bo‘ladi:

$$y^2=2px \tag{2.23}$$

p masofa ekanligidan, $x\in[0;\infty)$ va $y\in(-\infty;\infty)$ kelib chiqadi.

Parabolaning ekssentrisiteti va direktrisasi Parabolaning ixtiyoriy nuqtasidan uning fokusgacha bo‘lgan masofani *p* bilan direktrisasigacha bo‘lgan masofani d bilan belgilab, parabola ta'rifidan $p = d$ bundan $\frac{p}{d} = 1$ shuning uchun parabola ***ekssentrisiteti*** $\varepsilon = 1$, ***direktrisa*** tenglamasi $x = -\frac{p}{2}$.

2.6-Misol. $A(1,0)$ nuqta hamda tenglamasi $x=2$ bo'lgan chiziq Dekart koordinatalari sistemasida berilgan. Shunday egri chiziq tenglamasi tuzilsinki, uning har bir $M(x, y)$ nuqtasi: a) berilgan to'g'ri chiziqqa nisbatan A nuqtaga ikki marta yaqin bo'lsin; b) berilgan to'g'ri chiziqqa nisbatan A nuqtadan ikki marta uzoqda bo'lsin; v) ham to'g'ri chiziqqacha, ham A nuqtagacha bir xil masofalarda joylashgan bo'lsin.

► a) shart bo'yicha $2MA = MN$, hamda $N(2, y)$ bo'lganligidan, quyidagilarni hosil qilamiz:

$$2\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \sqrt{(x-2)^2}, \quad 4\left(x^2 - 2x + 1 + y^2\right) = x^2 - 4x + 4, \quad 3x^2 + 4y^2 - 4x = 0,$$

$$3\left(x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}\right) + 4y^2 = \frac{4}{3}, \quad 3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + 4y^2 = \frac{4}{3}, \quad \frac{\left(x - \frac{2}{3}\right)^2}{\frac{4}{9}} + \frac{y^2}{\frac{1}{3}} = 1.$$

Shunday qilib, ellipsning tenglamasi hosil qilindi. Bu erda $A(1,0)$ nuqta, o'ng fokus nuqta bilan ustma –ust tushadi, x=2 esa, o'ng direktrisadir.

b) Shartga binoan, $MA = 2MN$. Demak,

$$\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = 2\sqrt{(x-2)^2} \quad x^2 - 2x + 1 + y^2 = 4x^2 - 16x + 16,$$

$$3x^2 - y^2 - 14x + 15 = 0, \quad 3\left(x^2 \frac{14}{3}x + \frac{49}{9}\right) - y^2 = \frac{49}{3} - 15 = \frac{4}{3}, \quad \frac{\left(x - \frac{7}{3}\right)^2}{\frac{4}{9}} - \frac{y^2}{\frac{4}{3}} = 1.$$

Bu giperbolaning tenglamasidir $A(1;0)$ nuqta chap fokus bilan ustma-ust tushadi, x=2 esa, chap direktrisadir.

v) Shartga binoan, $MA = MN$. Demak: $\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \sqrt{(x-2)^2}$,

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 = x^2 - 4x + 4, \quad y^2 = -2x + 3 \text{ yoki } y^2 = -2\left(x - \frac{3}{2}\right).$$

Bu esa, parabolaning tenglamasi bo’lib $A(1;0)$ nuqta fokus bilan ustma-ust tushadi , x=2 direktrisadir.◄

Agar (2.16) umumiy tenglama, ellips yoki giperbola yoki parabolaning tenglamasini ifodalagan bo’lsa, u holda koordinata o’qlarini koordinata boshi atrofida $tg2\alpha = 2a_{12}/(a_{11}-a_{22})$ tenglama orqali aniqlanadigan α burchakka burish hamda bu o’qlarni parallel ko’chirish yordamida har doim yangi koordinatalar sistemasida ularning kanonik tenglamalarini hosil qilish mumkin bo’ladi.

Agar (2.16) tenglamada $a_{12}=0$ bo’lsa, uni kanonik shaklga keltirish yanada osonlashadi Bu holda, to’la kvadrat ajratish usulidan foydalaniladi.

2.7-Misol. $4x^2+9y^2+32x-54y+109=0$ tenglama bilan berilgan egri chiziq tenglamasini kanonik shaklga keltirilib, uni chizmada tasvirlansin.

► x va y lar qatnashgan hadlarni to’la kvadratgacha to’ldiramiz :

$$4(x^2+8x+16)+9(y^2-6y+9)=64+81-109=36,$$

$$4(x+4)^2+9(y-3)^2=36 \text{ yoki } \frac{(x+4)^2}{9}+\frac{(y-3)^2}{4}=1$$

Bu esa, markazi $C(-4;3)$ nuqtada bo’lib, katta va kichik yarim o’qlari mos ravishda $a=3$ va $b=2$ bo’lgan ellipsning kanonik tenglamasidir.◄

2.8-Misol

a) ellipsning katta yarim o’qi 3 ga teng bo’lib fokus nuqtasi $F(\sqrt{5},0)$bo’lsa;

b) giperbolada mavhum yarim o’q 2 ga teng va $F(-\sqrt{13},0)$ bo’lsa;

c) parabolaning direktrisasi $x=-3$ bo’lsa, mos ravishda ularning kanonik tenglamalari tuzilsin.

►***a)*** Shartga ko’ra, $a=3$ va $c=\sqrt{5}$ bo’lganligi hamda $b^2=a^2-c^2$ dan, $b^2=9-5=4$ Demak, $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1;$

b) Shartga ko’ra, $b=2$ va $c=\sqrt{13}$ bo’lib, $b^2=c^2-a^2$ekanligidan, $a^2=9.$ Demak,

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1;$$

c) Parabolaning tenglamasi $y^2 = 2px$ hamda uning direktrisasi $\frac{p}{2} = -x$ ekanligidan va shartga ko'ra $x = -3$ yoki $p = 6$ dan, $y^2 = 12x$ kelib chiqadi.

2.9 – Misol. Markazi $x^2 + 4y^2 = 4$ ellipsning yuqori uchida bo'lib, ushbu ellipsning fokus nuqtalaridan o'tuvchi aylananing tenglamasi tuzilsin.

► Ellipsning kanonik tenglamasi $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$ bo'lganligidan, $a = 2$ va $b = 1$, uning yuqori uchi $A(0,1)$ nuqtadadir $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$ bo'lganligi uchun fokus nuqtalari $F_1\left(-\sqrt{3},0\right)$ va $F_2\left(\sqrt{3},0\right)$ kabidir. Aylananing radiusini ikki nuqta orasidagi masofani topish formulasidan foydalanib aniqlaymiz:

$$R = |AF_1| = |AF_2| = \sqrt{\left(\pm\sqrt{3} - 0\right)^2 + (0-1)^2} = 2$$

U holda masala shartiga ko'ra, $(x-0)^2 + (y-1)^2 = 2^2$ yoki $x^2 + (y-1)^2 = 4$ Bu esa tenglamasi tuzilishi lozim bo'lgan aylananing tenglamasidir.◄

2.10 - Misol

$$\left.\begin{aligned} x &= 1 + 3\cos t, \\ y &= 2 - 2\sin t \end{aligned}\right\} \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

parametrik tenglamalar bilan berilgan egri chiziq chizilsin.

► Egri chziqni aniqlash uchun tenglamalar sistemasidan ***t*** parametrni yo'qotamiz, $\frac{x-1}{3} = \cos t,\ \frac{y-2}{-2} = \sin t.$ Bundan, $\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$ hosil bo'ladi.◄

Umuman olganda egri chiziqlar faqat (2.16) ko'rinishidagi ikkinchi tartibli tenglamalar bilan ifodalanishi shart emas, balki irratsional tenglamalar ham bo'lishi mumkin. Ushbu turdagi tgru chiziqlarni oson tasvirlash uchun qutb koordinatalari sistemasidan foydalanish maqsadga muvofiqligini quyidagi misollarda ko'rib chiqamiz.

2.11-Misol. $\left(x^2 + y^2\right)^{3/2} = 4\left(x^2 - 3y^2\right)$ tenglama bilan berilgan chiziqning qutb koordinatalardagi tenglamasi yozilsin.

► (2.1) formulaga binoan,

$$\rho^3 = 4\left(\rho^2 \cos^2\phi - 3\rho^2 \sin^2\phi\right)$$

$\rho \neq 0$ deb hisoblab, $\rho = 4\left(cos^2\varphi - \sin^2\varphi - 2\sin^2\varphi\right) = 4(\cos 2\varphi - 1 + \cos 2\varphi)$ yoki $\rho = 4(2\cos 2\varphi - 1)$ ni hosil qilamiz.◄

2.12-Misol. $\rho^2 = 8\sin^2 2\varphi$ tenglama bilan berilgan egri chiziqning Dekart koordinatalariga nisbatan tenglama yozilsin.

► $\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi$ ekanligidan, $\rho^2 = 32\sin^2\varphi\cos^2\varphi$ da $\sin\varphi$ bilan $\cos\varphi$ larni (2.2) formuladagi qiymatlari bilan almashtiramiz:

$$\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 = 32\cdot\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2$$

Bundan esa, $\left(x^2+y^2\right)^2 = 32x^2y^2$ ni aniqlaymiz.◄

Mashqlar

1. Qutb koordinatalarida berilgan chiziqlarni tasvirlab, ularning Dekart koordinatalaridagi tenglamalari yozilsin:

1) $\rho = \dfrac{4}{1-\cos\varphi}$ *(parabola)*

2) $\rho = a(1-\cos\varphi)$, (*кардоида*)

3) $\rho = 3/\varphi$ (*giperbolik spiral*)

4) $\rho = 2\varphi$, $\rho = (1/2)^{\varphi}$ (*logarifimik spiral*)

5) $\rho = a\sin 3\varphi$ (*uch yaproqli atirgul*);

6) $\rho = a\sin^2 2\varphi$ (*to'rt yaproqli atirgul*).

2. Quyidagi tenglamalar bilan berilgan chiziqlarning qutb koordinatalariga nisbatan tenglamalari yozilib, keyin ularning chizmalari chizilsin:

1) $x^2 + y^2 = 5\left(\sqrt{x \;\; + y^2} - x\right)$;

2) $x^4 - y^4 = \left(x^2+y^2\right)^3$; 3) $\left(x^2+y^2\right)^2 = y^2$;

3) $3x^2 - y^2 = \left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}$; 5) $\left(x^2+y^2\right)^3 = 4x^2y^2$.

2.11. Tekislikning umumiy tenglamasi

2.5-Ta’rif. Fazoda Dekart koordinatalari sistemasida $P=P(a_1,b_1,c_1)$, $Q=Q(a_2,b_2,c_2)$ nuqtalardan bir hil masofada joylashgan nuqtalar to‘plami (nuqtalarining geometrik o‘rni) tekislik deb ataladi.

Fazoda ixtiyoriy $M=M(x,y,z)$ nuqtani olamiz. Bu nuqta bilan berilgan $P(a_1,b_1,c_1)$ hamda $Q(a_2,b_2,c_2)$ nuqtalar orasidagi masofani quyidagi formuladan foydalanib topamiz:

$$|MP|=\sqrt{(x-a_1)^2+(y-b_1)^2+(z-c_1)^2}$$
$$|MQ|=\sqrt{(x-a_2)^2+(y-b_2)^2+(z-c_2)^2}$$

SHartga ko‘ra $|MP|=|MQ|$ ya’ni

$$\sqrt{(x-a_1)^2+(y-b_1)^2+(z-c_1)^2}=\sqrt{(x-a_2)^2+(y-b_2)^2+(z-c_2)^2}.$$

Keyingi tenglikning ikki tomonini kvadratga ko‘tarib, so‘ng qisqa ko‘paytirish formulasidan foydalanib topamiz:

$$x^2-2a_1x+a_1^2+y^2-2b_1y+b_1^2+z^2-2c_1z+c_1^2=$$
$$=x^2-2a_2x+a_2^2+y^2-2b_2y+b_2^2+z^2-2c_2z+c_2^2,$$
$$2(a_2-a_1)x+2(b_2-b_1)y+2(c_2-c_1)z+a_1^2+b_1^2+c_1^2-a_2^2-b_2^2-c_2^2=0$$

Agar

$$A=2(a_2-a_1),B=2(b_2-b_1),C=2(c_2-c_1),D=a_1^2+b_1^2+c_1^2-a_2^2-b_2^2-c_2^2$$

belgilansa

$$Ax+By+Cz+D=0 \qquad (2.24)$$

kelib chiqadi.

Tekislikning tenglamasi A,B,C,D sonlarga (koeffitsientlarga) bog‘liq bo‘lib, ular yordamida tekislikning fazodagi vaziyati aniqlanadi.

Tekislik tenglamasi (2.24) ning xususiy hollarini qaraymiz.

1) (2.24) tenglamada $A\neq 0,\ B\neq 0,\ C\neq 0,\ D=0$ bo‘lsin. U holda tenglama ushbu

$$Ax+By+Cz=0$$

ko‘rinishga keladi va u koordinatalar boshi *O(0,0,0)* nuqtadan o‘tuvchi tekislik tenglamasi bo‘ladi.

2) Umumiy tenglamada $A \neq 0,\ B \neq 0,\ C = 0,\ D \neq 0$ bo‘lsin. U holda *Oxy* tekislikdagi $Ax + By + D = 0$ to‘g‘ri chiziqdan o‘tib, *Oz* o‘qiga parallel bo‘lgan tekislik tenglamasi hosil bo‘ladi.

3) Umumiy tenglamada $A = 0,\ B = 0,\ C \neq 0,\ D \neq 0$ bo‘lsin. U holda *Oz* o‘qining $-\frac{D}{C}$ nuqtasidan o‘tib, *Oxy* tekislikka parallel bo‘lgan

$$Cz + D = 0$$

tekislik tenglamasi bo‘ladi.

4) (2.24) tenglamada $A \neq 0,\ B = 0,\ C = 0,\ D = 0$ bo‘lsin. U holda

$$Ax=0 \qquad \text{ya'ni} \qquad x=0$$

Oyz koordinatalar tekisligining tenglamasi bo‘ladi.

Tekislikning kesmalar bo‘yicha tenglamasi. (2.24) tenglamada $A \neq 0,\ B \neq 0,\ C \neq 0,\ D \neq 0$ bo‘lsin. Demak, tekislik koordinatalar boshidan o‘tmaydi va koordinata o‘qlari va koordinatalar tekisliklariga parallel bo‘lmaydi. (2.24) tenglamada ozod had *D* ni tenglikning o‘ng tomoniga o‘tkazib tenglamani ikki tomonini - *D* ga bo‘lamiz. Natijada

$$\frac{Ax}{-D} + \frac{By}{-D} + \frac{Cz}{-D} = 1$$

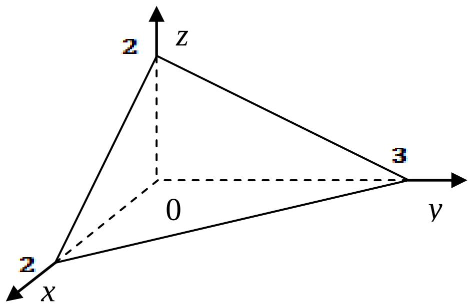
Agar $a = -\frac{D}{A}, \quad b = -\frac{D}{B}, \quad c = -\frac{D}{C}$ belgilash kiritilsa, unda ushbu

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \qquad (2.25)$$

tenglama hosil bo‘ladi. Tenglamadagi a, b, c sonlar sodda geometrik ma’noga ega. Ular tekislikning koordinatalar o‘qlaridan ajratgan kesmalarning miqdorini bildiradi. Shu sababdan (2.25) tekislikning kesmalar bo‘yicha tenglamasi deyiladi.

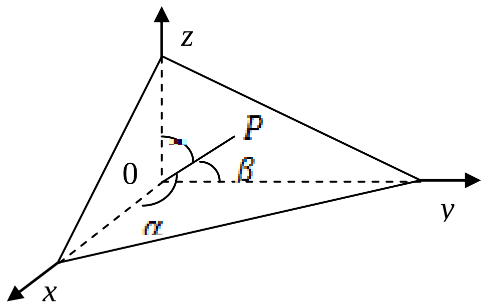
Masalan, koordinata o‘qlaridan ajratgan kesmalari $a=2$, $b=3$, $c=2$ bo‘lgan tekislik tenglamasi $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{2}=1$,

ya'ni $3x+2y+3z-6=0$ bo‘ladi.



2.14-rasm

Tekislikning normal tenglamasi. Koordinata boshidan tekislikka perpendikulyar o‘tkazamiz. Ushbu perpendikulyar tekislikni P nuqtada kesib o’tadi. OP to‘g‘ri chiziqning uzunligini p ga teng bo’lib, ushbu chiziqning *Ox,Oy,Oz* o’qlarini musbat yo‘nalishlari bilan tashkil etgan burchaklarni mos ravishda α,β,γ tengdir. (2.15-rasm)



2.15-rasm.

Tekislikdagi to’ri chiziq singari tekislikning normal tenglamasi

$$x\cdot\cos\alpha+y\cdot\cos\beta+z\cdot\cos\gamma-p=0 \qquad (2.26)$$

ko’rinishda hosil qilinishi mumkin.

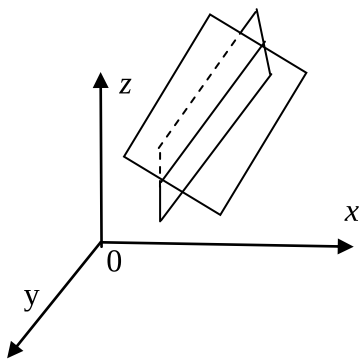
Uchta nuqta bo’yicha tekislik tenglamasi. Agar tekislik bitta to’g’ri chiziqda yotmaydigan $M_i(x_i;y_i;z_i)$ $(i=\overline{1,3})$ nuqtalaridan o’tadigan bo’lsa, u holda ularni ixtiyoriy *M(x,y,z)* nuqta olib, uchta komlanar $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$, vektorlarni hosil qilamiz. Komplanar vektorlar uchun:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0\ . \qquad (2.27)$$

munosabat o’rinlidir.

2.12. Fazoda to‘g‘ri chiziq

Fazodagi to‘g‘ri chiziqni ikki tekislikning kesishish nuqtalarning geometrik o‘rni sifatida qarash mumkin.Fazoda dekart koordinatalar sistemasi o‘rnatilgan bo‘lsin. Bu sistemada ikki o’zaro kesishuvchi tekisliklarni qaraymiz (2.16-rasm)



2.16-rasm.

Fazodagi to‘g‘ri chiziq yuqoridagi tekisliklarning kesishish nuqtalaridan iborat ekan, ravshanki bunday nuqtalar ushbu

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \tag{2.28}$$

tenglamalar sistemasining cheksiz ko’p yechimlaridan iborat bo‘ladi

(2.28) sistemaning yechimi quyidagicha topiladi. Noma’lumlardan birini, masalan z ni biror z=z_0 qiymatini uchin, ushbu

$$\begin{cases} A_1x + B_1y = -D_1 - C_1z_0 \\ A_2x + B_2y = -D_2 - C_2z_0 \end{cases} \tag{2.29}$$

sistemani $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$ yechimning yagonalik sharti asosida yechib olish mumkin.

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} -D_1 - C_1z_0 & B_1 \\ -D_2 - C_2z_0 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}, \qquad y_0 = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & -D_1 - C_1z_0 \\ A_2 & -D_2 - C_2z_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}$$

va (x_0, y_0, z_0) (2.29) sistemaning yechimi bo‘ladi. To‘g‘ri chiziqda ihtiyoriy $M = M(x, y, z)$nuqtani olamiz.usbu, $M = M(x, y, z)$, $M_0 = M(x_0, y_0, z_0)$ nuqtalar to‘g‘ri chiziqda yotgani uchun ularning koordinatalari (2.29) sistemani qanoatlantiradi:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1 = 0 \\ A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2 = 0 \end{cases}.$$

Sistemalardagi mos tenglamalarini ayirib:

$$\begin{cases} A_1\left(x-x_0\right)+B_1(y-y_0)+C_1\left(z-z_0\right)=0 \\ A_2\left(x-x_0\right)+B_2(y-y_0)+C_2\left(z-z_0\right)=0 \end{cases}$$

quyidagi munosabatlarni hosil qilamiz:

$$x-x_0=\frac{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}\cdot\left(z-z_0\right),\qquad y-y_0=\frac{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}\cdot\left(z-z_0\right),$$

yoki

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}}=\frac{y-y_0}{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}}=\frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} \tag{2.30}$$

kelib chiqadi. Agar

$$\ell=\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix},\qquad m=\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix},\qquad n=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$$

belgilash kiritilsa

$$\frac{x-x_0}{\ell}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n} \tag{2.31}$$

fazodagi to‘g‘ri chiziqning kanonik tenglamasi deb ataluvchi tenglama hosil bo’ladi.

Bu yerda $\overrightarrow{M_0M}$=*(x-x₀,y-y₀,z-z₀)*, $\vec{a}$*=(l,m,n)* vektorlar (1.52)o’zaro collinear ekanlbklari kelib chiqadi, demak, $\vec{a}$*=(l,m,n)* fazodagi to’g’ri chiziqning yunaltiruvchi vektori bo’ladi.

2.13-Misol. Ushbu

$$\begin{cases} 3x+2y+4z-11=0 \\ 2x+y-3z-1=0 \end{cases}$$

sistemasi bilan aniqlanadigan to‘g‘ri chiziqning kanonik tenglamasi topilsin.

►Avvalo izlanayotgan to‘g‘ri chiziqning biror $M=M\left(x_0,y_0,z_0\right)$nuqtasini topamiz Aytaylik, $z_0=1$ bo‘lsin. U holda berilgan sistema quyidagi

$$\begin{cases} 3x+2y=7 \\ 2x+y=4 \end{cases}$$

sistemaga keladi. Bu sistemani yechib, $x=1, y=2$ bo‘lishini topamiz.

Demak, $x_0=1,\ y_0=2,\ z_0=1$ bo‘lib, $M_0=M_0(1,2,1)$ nuqta to‘g‘ri chiziqqa tegishli bo‘ladi.Berilgan sistemadan

$$A_1=3,\ B_1=2,\ C_1=4,$$
$$A_2=2,\ B_2=1,\ C_2=-3$$

bo‘lishini aniqlaymiz Unda

$$\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=-10,\quad \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}=17,\quad \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-1$$

bo‘ladi (2.31) formuladan foydalanib, izlanayotgan to‘g‘ri chiziqning kanonik tenglamasi

$$\frac{x-1}{-10}=\frac{y-2}{17}=\frac{z-1}{-1}$$

ni topamiz. ◄

Fazodagi to‘g‘ri chiziqning kanonik tenglamasida, tenglikdagi har bir nisbatni t bilan belgilasak, ushbu

$$\begin{cases} x=x_0+\ell t, \\ y=y_0+mt, \\ z=z_0+nt \end{cases} \qquad (2.32)$$

ifodalar kelib chiqadi. (2.32) ***fazodagi to‘g‘ri chiziqning parametrik tenglamasi***, t parametr deyiladi.

To‘g‘ri chiziqning parametrik tenglamasidan ko‘p foydalaniladi. Jumladan, to‘g‘ri chiziqning tekislik bilan kesishish nuqtasini topishda undan foydalaniladi

2.14-Misol. Ushbu

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-4}{2}$$

to‘g‘ri chiziq hamda $2x+y+z-6=0$ tekislik berilgan.Ularning kesishish nuqtasi topilsin.

►To‘g‘ri chiziqning tekislik bilan kesishish nuqtasi (x,y,z) bo‘lsin. To‘g‘ri chiziq va tekislik tenglamalaridan foydalanib, kesishish nuqtasining (x,y,z)

koordinatalarini topish lozim bo‘ladi. To‘g‘ri iziqning parametrik tenglamasini yozamiz:

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-4}{2}=t$$

Unda

$$\begin{cases} x=2+t \\ y=3+t \\ z=4+2t \end{cases}$$

bo‘lib bu qiymatlarini tekislik tenglamasidagi *x,y,z* larning o‘rniga qo‘yamiz:

$$2(2+t)+(3+t)+(4+2t)-6=0$$

Ushbu tenglamani yechimi *t=-1* ekanini topamiz. Undan *x=1, y=2, z=2* bo‘lib, kesishish nuqtasi $(1,\ 2,\ 2)$ bo‘ladi.◄

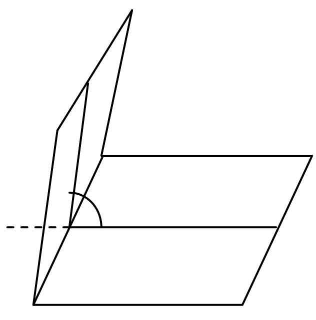
2.13. Fazodagi tekislik hamda to‘g‘ri chiziqlarning o’zaro joylashishi

Ikki tekislik orasidagi burchak. Ikki tekislik berilgan bo‘lib, ularning tenglamalari

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases}$$

bo‘lsin. Bu tekisliklar hosil qilgan qo‘shni ikki yoqli burchaklarda biri(qo‘shni burchaklar yig‘indisi π ga teng bo‘ladi) ikki tekislik orasidagi burchak deyiladi (2.17-rasm). Bu burchak quyidagi formula bilan topiladi:

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$



2.17-rasm

2.15-Misol. Ushbu

$$\begin{cases} x+y=0, \\ y-z=0 \end{cases}$$

tekisliklar orasidagi burchak topilsin.

►Berilgan tekisliklar uchun $A_1=1, B_1=1, C_1=0,\ A_2=0, B_2=1, C_2=-1,$ bo‘ladi U holda

$$\cos\varphi = \frac{1\cdot 0+1\cdot 1+0\cdot(-1)}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}\sqrt{0^2+1^2+(-1)^2}} = \frac{1}{2}$$

bo‘lib, undan $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$ bo‘lishi kelib chiqadi.◄

Ikki tekislikning parallellik hamda perpendikulyarlik shartlari. Agar ikkita

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$

tekisliklar uchun $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$ shart bajarilsa, u holda tekisliklar o‘zaro parallel bo‘ladi. Agar bu tekisliklar uchun

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$$

shart bajarilsa, u holda tekisliklar o‘zaro perpendikulyar bo‘ladi.

Nuqtadan tekislikkacha bo‘lgan masofa. Fazoda biror

$$Ax+By+Cz+D=0$$

tekislik va bu tekislikda yotmagan $M_0=M_0(x_0,y_0,z_0)$ nuqta berilgan bo‘lsin Bu nuqtadan tekislikka o‘tkazilgan perpendikulyarning uzunligi berilgan nuqtadan berilgan tekislikkacha masofa deyiladi. U quyidagi formula

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

yordamida topiladi. Masalan, $M_0=M_0(3,0,1)$ nuqtadan $x-2y+z-1=0$ tekislikkacha masofa

$$d=\frac{\left|1\cdot 3+(-2)\cdot 0+1\cdot 1-1\right|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}}=\frac{3}{\sqrt{6}}=\frac{1}{2}\sqrt{6}$$

teng bo‘ladi.

Fazodagi ikki nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi. Aytaylik, fazoda ikkita $M_1=M_1(x_1,y_1,z_1)$ $M_2=M_2(x_2,y_2,z_2)$ nuqtalar berilgan bo‘lsin, bu nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi quyidagicha

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

bo‘ladi.

Fazodagi ikki to‘g‘ri chiziqning parallellik hamda perpendikulyalik shartlari yunaltiruvchi vektorlar orqali tekislikdagi kabi aniqlanadi.

Fazodagi ikki to‘g‘ri chiziq orasidagi burchak. Ikkita

$$\frac{x-x_1}{\ell_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1},\qquad \frac{x-x_2}{\ell_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$$

to‘g‘ri chiziqlar berilgan bo‘lsin. Fazoda biror nuqta olib, undan berilgan to‘g‘ri chiziqlarga parallel bo‘lgan to‘g‘ri chiziqlarni o‘tkazamiz. Ular orasidagi φ burchak berilgan to‘g‘ri chiziqlar orasida burchak deyiladi. U ushbu

$$\cos\varphi=\frac{\ell_1\cdot\ell_2+m_1\cdot m_2+n_1\cdot n_2}{\sqrt{\ell_1^2+m_1^2+n_1^2}\cdot\sqrt{\ell_2^2+m_2^2+n_2^2}} \tag{2.33}$$

formula bilan topiladi.

Fazodagi to‘g‘ri chiziq va tekislikning parallellik hamda perpendiklyarlik shartlari. Aytaylik, fazoda

$$\frac{x-x_0}{\ell}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$$

to‘g‘ri chiziq hamda

$$Ax+By+Cz+D=0$$

tekislik berilgan bo‘lsin. Agar bu to‘g‘ri chiziq va tekislik uchun

$$\frac{A}{\ell}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n}$$

shart bajarilsa, to‘g‘ri chiziq tekislikka parallel bo‘ladi. Agar berilgan to‘g‘ri chiziq va tekislik uchun

$$A\ell + Bm + Cn = 0$$

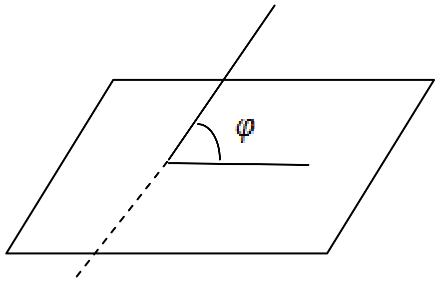
shart bajarilsa, to‘g‘ri chiziq tekislikka perpendikulyar bo‘ladi.

To‘g‘ri chiziq va tekislik orasidagi burchak.

Fazoda to‘g‘ri chiziq

$$\frac{x-x_0}{\ell} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$$

hamda $Ax + By + Cz + D = 0$ tekislik berilgan bo‘lsin (2.18-rasm). Bu to‘g‘ri chiziq hamda tekislik orasidagi burchak quyidagi



2.18-rasm

$$\sin\varphi = \frac{A\ell + Bm + Cn}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{\ell^2 + m^2 + n^2}} \tag{2.34}$$

formula yordamida topiladi.

2.16-Misol. Fazoda $M = M(2,3,4)$ nuqtadan

$$\frac{x}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-7}{0}$$

to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofa d topilsin.

►Ma’lumki, $M(2,3,4)$ nuqtadan o‘tuvchi tekislik tenglamasi

$$A(x-2) + B(y-3) + C(z-4) = 0$$

ko’rinishda bo‘ladi. Bu tekislik bilan qaralayotgan to‘g‘ri chiziqning perpendikulyar bo‘lishi shartidan foydalanib topamiz:

$$1\cdot(x-2) + 3\cdot(y-3) + 0(z-4) = 0 \Rightarrow x + 3y = 11$$

To‘g‘ri chiziqning berilgan tenglamasidan parametrik ko’rinishini topamiz:

$$\frac{x}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-7}{0} = 0, \quad x = t, \quad y = 2 + 3t, \quad z = 7.$$

Natijada $x+3y=11$ tenglama $t+3(2+3t)=0$ ko‘rinishga kelib, undan $t=\dfrac{1}{2}$ bo‘lishi kelib chiqadi Demak, $M(2,3,4)$ nuqtadan tekislikka tushirilgan perpendikulyarning asosini ifodalovchi N nuqtaning koordinatalari

$$x=t=\frac{1}{2},\qquad y=2+3t=3\frac{1}{2},\qquad z=7 \text{ .bo‘ladi: } N=N\left(\frac{1}{2},\ 3\frac{1}{2},\ 7\right)$$

Ikki nuqta orasidagi masofani topish formulasiga ko‘ra

$$d=|MN|=\sqrt{\left(2-\frac{1}{2}\right)^2+\left(3-3\frac{1}{2}\right)^2+(4-7)^2}=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{1}{4}+9}=\frac{\sqrt{46}}{2}$$

bo‘ladi.◄

2.17-Misol. To’rtta $A_1(4,7,8)$, $A_2(-1,13,0)$, $A_3(2,4,9)$, va $A_4(1,8,9)$ nuqtalar berilgan **a)** $A_1A_2A_3$ tekislikning; **b)** A_1A_2 to’g’ri chiziqning; **c)** $A_1A_2A_3$ tekislikka perpendikulyar bo’lgan A_4M to’g’ri chiziqning; **d)** A_1A_2 to’g’ri chiziqqa parallel bo’lgan A_4N to’g’ri chiziqning tenglamalari tuzilsin **e)** A_1A_4 to’g’ri chiziq bilan $A_1A_2A_3$ tekislik orasidagi burchakning sinusi; **f)** Oxy koordinata tekisligi bilan $A_1A_2A_3$ tekislik orasidagi burchakning kosinusi hisoblansin.

►**a)** $A_1A_2A_3$ tekislik tenglamasi (2.27) formula orqali aniqlaymiz:

$$\begin{vmatrix} x-4 & y-7 & z-8 \\ -5 & 6 & -8 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix}=0, \text{ yoki } 6x-7y-9z+97=0 \text{ ni hosil}$$

qilamiz;

b) A_1A_2 to’g’ri chiziqning tenglamasini yozish uchun berilgan ikki nuqtadan o’tuvchi to’g’ri chiziq tenglamasi ((2.11) formulaga qaralsin) dan foydalanamiz:

$$\frac{x-4}{5}=\frac{y-7}{-6}=\frac{z-8}{8};$$

c) A_4M to’g’ri chiziq $A_1A_2A_3$ tekislikka perpendikulyar bo’lganligi shartiga binoan, to’g’ri chiziqning yo’naltiruvchi vektori $\vec{S}$ uchun $A_1A_2A_3$ tekislik normal vektori $\vec{n}=(6,-7,-9)$ ni olish mumkin u holda A_4M to’g’ri chiziq tenglamasini (28) ni hisobga olgan holda quyidagicha yozamiz:

$$\frac{x-1}{6}=\frac{y-8}{-7}=\frac{z-9}{-9};$$

d) A_4N to'g'ri chiziq A_1A_2 to'g'ri chiziqqa parallel bo'lganligi bois ularning yo'naltiruvchi vektorlari $\overrightarrow{s_1}$ va $\overrightarrow{s_2}$ ni, $\overrightarrow{s_1}=\overrightarrow{s_2}=(5,-6{,}8)$ deb yozish mumkin Natijada, A_4N to'g'ri chiziq tenglamasi quyidagicha bo'ladi:

$$\frac{x-1}{5}=\frac{y-8}{-6}=\frac{z-9}{8};$$

e) Yuqorida keltirilgan (2.34) formulaga binoan:

$$sin\varphi=\frac{|16\cdot 5+(-7)\cdot(-6)+(-9)\cdot 8|}{\sqrt{6^2+(-7)^2+(-9)^2}\sqrt{5^2+(-6)^2+8^2}}=\frac{34}{\sqrt{11}\sqrt{166}}\approx 0{,}8;$$

f) (2.33) formulaga binoan:

$$cos\varphi=\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|}=\frac{0\cdot 6+0\cdot(-7)+1\cdot(-9)}{\sqrt{1}\cdot\sqrt{6^2+(-7)^2+(-9)^2}}=-\frac{9}{\sqrt{166}}\approx -0{,}7 \blacktriangleleft$$

2.18-Misol. Berilgan $M(4{,}3{,}1)$va $N(-2{,}0,-1)$ nuqtalardan o'tuvchi, hamda $A(1{,}1,-1)\ va\ B(-3{,}1{,}0)$ nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan tekislik tenglamasi tuzilsin.

► AB to'g'ri chiziq tenglamasi $\frac{x-1}{-4}=\frac{y-1}{0}=\frac{z+1}{1}$ kabi yoziladi. Tekislik $M(4{,}3{,}1)$ nuqtadan o'tganligi uchun uning tenglamasi $A(x-4)+B(y-3)+C(z-1)=0$ kabi bo'ladi. Mazkur tekislik, $N(-2{,}0,-1)$ nuqtadan o'tgani uchun $A(-2-4)+B(0-3)+C(-1-1)=0$ yoki $6A+3B+2C=0$ shart o'rinli bo'ladi. Shuningdek, tekislik AB to'g'ri chiziqqa parallel bo'lganligidan, $-4A+0B+1C=0$ yoki $4A-C=0$ shart bajariladi $\begin{cases}6A+3B+2C=0\\ 4A-C=0\end{cases}$ sistemani yechib, $C=4A$, $B=-\frac{14}{3}A$ ni topamiz. U holda: $A(x-4)-\frac{14}{3}A(y-3)+4A(z-1)=0$ va bu yerda $A\neq 0$ ekanligini nazarda tutib, $3(x-4)-14(y-3)+12(z-1)=0$ yoki $3x-14y+12z+18=0$ ni topamiz.◄

2.19-Misol. $M_1(6,-4,-2)$ nuqtaning $x+y+z-3=0$ tekislikka nisbatan simmetrik bo'lgan $M_2(x_2,y_2,z_2)$ nuqtasining koordinatalari topilsin.

► $M_1\ va\ M_2$ nuqtalardan o'tib, berilgan tekislikka perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziqning parametrik tenglamalarini yozib olamiz: $x=6+t$; $y=-4+$ $+t$; $t=-2+t$. Bu to'g'ri chiziq bilan berilgan tekislikning tenglamalarini birgalikda yechib, $t=1$ va u orqali, M_1M_2 to'g'ri chiziqning berilgan tekislikning kesishish nuqtasi $M(7,-3,-1)$ ni aniqlaymiz. Ushbu aniqlangan nuqta, M_1M_2 kesmaning o'rtasidagi nuqta bo'lganligi sababli, $7=\frac{6+x_2}{2}$; $-3=\frac{-4+y_2}{2}$ va $-1=\frac{-2+z_2}{2}$ ni yozish mumkin (2.5 – formulaga qarang) va undan esa, M_2 nuqtaning koordinatalari $x_2=8$; $y_2=-2$ va $z_2=0$ larni aniqlaymiz.◄

Mashqlar

1. $\frac{x+3}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+1}{1}$ va $\begin{cases} x=3z-4 \\ y=z+2 \end{cases}$ to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasi A topilsin.

2. Berilgan $P(7,9,7)$ nuqtadan $\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{3}=\frac{z}{2}$ to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa topilsin .

3. Uchlari $A(4,1,-2), B(2,0,0)\ va\ C(-2,3,-5)$ nuqtalardagi uchburchakning B uchidan qarama-qarshi tomonga tushirilgan balandlik tenglamasi tuzilsin .

4. Qirrasining uzunligi 1 bo'lgan kubning uchidan, shu uchidan o'tmaydigan diagonaligacha bo'lgan masofa aniqlansin. .

5. $x=x_0+lt,\ y=y_0+mt,\ z=z_0+nt$ to'g'ri chiziq orqali o'tib, $Ax+By+Cz+D=0$ tekislikka perpendikulyar bo'lgan tekislikning tenglamasi quyidagicha bo'lishi isbotlansin : $\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ l & m & n \\ A & B & C \end{vmatrix}=0$

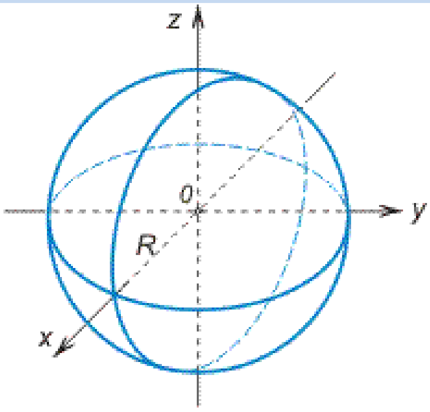
2.14. Ikkinchi tartibli sirt tushunchasi. Sfera.

Fazodagi Dekart koordinatalar sistemasida x,y,z larga nisbatan biror

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{23}yz+2a_{31}xz+2a_1x+2a_2y+2a_3z+a_0=0 \qquad (2.35)$$

tenglamani qanoatlantiradigan nuqtalar to'plami ikkinchi tartibli sirt deyiladi Bu tenglamadagi $a_{11},a_{22},a_{33},a_{12},a_{23},a_{31}$ koeffitsientlardan hech bo'lmasa bittasi noldan farqli bo'lganda sfera, ellipsoid, giperboloid, silindrik sirt, konus sirt yoki bir qancha aylanma sirtlarni ifodalash mumkin, shuningdek bu tenglama yordamida ikki tengsizliklar oilasi, nuqta, to‘g‘ri chiziq va hatto bo‘sh to‘plamlarni ham aniqlash mumkin Biz bu bobda eng sodda (aylanma sirtlar) sferalar, konuslar, silindrlar, ellipsoidlar, giperboloidlar, paraboloidlar va giperbolik paraboloidlar bilan tanishamiz.

2.6-Ta’rif. Fazoda berilgan nuqtadan teng masofada yotgan nuqtalarning geometrik o‘rnidan tashkil topgan sirt **sfera** deyiladi



2.19-rasm.

Sfera tenglamasini tuzish uchun fazoda $O_1(x_1, y_1, z_1)$ nuqta olaylik, undan teng masofada yotgan nuqtalar umumiy holda $M(x, y, z)$ va masofa R bo‘lsin U holda ta’rifga ko‘ra, 2.19-rasmdan: $|OM| = R$ yoki $\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2} = R$

$$(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2 = R^2 \tag{2.36}$$

sferaning (kanonik) tenglamasi deyiladi.

Agar sfera markazi koordinatalar markazi bilan ustma-ust tushsa uning tenglamasi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi $(x_1 = y_1 = z_1 = 0)$

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \ . \tag{2.37}$$

2.15. Ikkinchi tartibli sirtlarning kanonik tenglamalari

Sferaning *Oxyz* koordinata sistemasining bosi $O(0,0,0)$ va $O_1(x_1,y_1,z_1)$ nuqtalardagi tenglamalari *(2.36)* va *(2.37)* solistirish natijasida $X=x-x_1$, $Y=y-y_1$, $Z=z-z_1$ almashtirish natijasida tenglamalar ustma ust tushishini aniqlaymiz. Bundan koordinata sistemasi parallel ko’chirish va koordinata o’qlarini biror qo’zg’almas nuqta atrofida burish yordamida ikkincyi tartibli umumiy tenglamasi (2.35) ni sirtlarning kanonik tenglamalaridan biriga kelnirish mumkinligi kelib chiqadi.

Yangi $Ox'y'z'$ koordinata sistemasiga koordinata o'qlarini koordinata boshiga nisbatan ma'lum burchaklarga burib o'tamiz:

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha_1 + y'\cos\beta_1 + z'\cos\gamma_1, \\ y = x'\cos\alpha_2 + y'\cos\beta_2 + z'\cos\gamma_2, \\ z = x'\cos\alpha_3 + y'\cos\beta_3 + z'\cos\gamma_3. \end{cases} \tag{2.38}$$

Hosil bo'lgan (2.38) ifodalarni (2.35) $x'y'$, $x'z'$, $y'z'$ ko'paytmalar oldida qatnashgan koefisiyentlar nolga tenglab olib qo'ysak, quyidagi tenglamani hosil qilamiz:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + 2a_1' x' + 2a_2' y' + 2a_1' z' + a_0 = 0 \ , \tag{2.39}$$

bu yerda λ_1, λ_2, λ_3 quydagi xarakteristik tenglamadan aniqlanadi:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \ . \tag{2.40}$$

Xos sonlarga mos kelivchi mos keluvchi burchaklar esa, quydagi sistemaning yechimi tarzida aniqlanadi.

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda_i)\cos\alpha_i + a_{12}\cos\beta_i + a_{13}\cos\gamma_i = 0, \\ a_{12}\cos\alpha_i + (a_{22}-\lambda_i)\cos\beta_i + a_{23}\cos\gamma_i = 0, \\ a_{13}\cos\alpha_i + a_{23}\cos\beta_i + (a_{33}-\lambda_i)\cos\gamma_i = 0, \ i \in [1,3]. \end{cases} \tag{2.41}$$

U holda (2.39) xarakteristik tenglamani quydagi ko'rinishga keltirish mumkin

$$\lambda_1\left(x' + \frac{a_1'}{\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2\left(y' + \frac{a_2'}{\lambda_2}\right)^2 + \lambda_3\left(z' + \frac{a_3'}{\lambda_3}\right)^2 = D,$$

Bu yerda $D = -a_0 + \frac{a_1'^2}{\lambda_1} + \frac{a_2'^2}{\lambda_2} + \frac{a_3'^2}{\lambda_3}$. Yangi $O'XYZ$ koordinata sistemasini

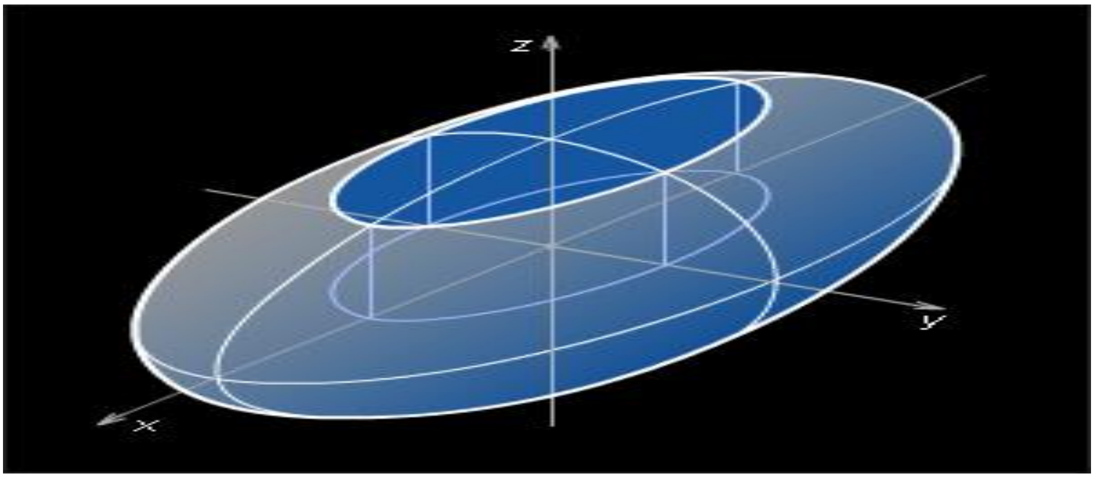
$X = x' + \frac{a_1'}{\lambda_1}$, $Y = y' + \frac{a_2'}{\lambda_2}$, $Z = z' + \frac{a_3'}{\lambda_3}$ belgilashlar asosida kiritsak

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \lambda_3 Z^2 = D \qquad (2.42)$$

tenglamani hosil qilamiz.

I. $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_3 \neq 0$ bo'lgan holni ko'rib chiqamiz. Bu yerda quydagi holatlar bo'lishi mumkin:

1) Agar λ_1, λ_2, λ_3, D bir xil ishoraga ega bo'lsa va $a^2 = \frac{D}{\lambda_1}$, $b^2 = \frac{D}{\lambda_2}$, $c^2 = \frac{D}{\lambda_2}$, belgilash kiritsak, (2.35) tenglamaga mos keluvchi sirt $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ellipisoid deyiladi (2.20-rasm);



2.20 – rasm.

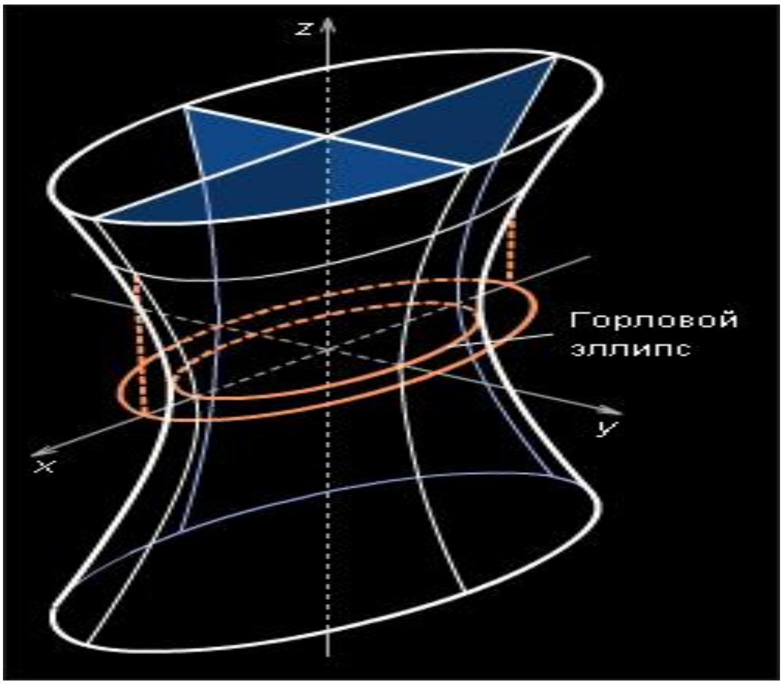
2) Agar λ_1, λ_2, λ_3 bir xil ishoraga ega bo'lib, D teskari ishoraga ega bo'lsa, (2.35) tenglamaga mos keluvchi sirt bo'sh to'plam $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$ (mavxum ellipisoid) deyiladi;

3) Agar λ_1, λ_2, D bir xil ishoraga ega bo'lib, λ_3 teskari ishoraga ega bo'lsa, (2.35) tenglamaga mos keluvchi sirt $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ bir pallali giperboloid deyiladi (2.21 - rasm);

2.20-Misol. $x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 6xz + +2yz - 2x + 6y + 2z = 0$ sirt kanonik ko'rinishga keltirilsin chizmasi yasalsin.

►Berilgan sirtning $x^2+5y^2+z^2+2xy+6xz+2yz$ kvadratik formasiga mos keluvchi matritsani hosil qilamiz

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 1 & 5 & 1\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$



2.21–rasm.

Ushbu matritsaning xos sonlarini aniqlash ucun xarakteristik tenglamadan

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & 1 & 3\\ 1 & 5-\lambda & 1\\ 3 & 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=0.$$

$\lambda_1=3,\ \lambda_2=6,\ \lambda_3=-2$ yechimlarni hosil qilamiz.

Ushbu xos sonlarga mos xos vektorlarni topamiz:

$\lambda_1=3$ xos son uchin α vektorning koordinatalari

$\begin{cases}-2\alpha_1+\alpha_2+3\alpha_3=0,\\ \alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3=0,\\ 3\alpha_1+\alpha_2-2\alpha_3=0.\end{cases}$ tenglamalar sistemaning yechimlari $\alpha=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$ ega bo'lamiz.

$\lambda_2=6$ xos son uchin β vektorning koordinatalari

$$\begin{cases} -5\beta_1+\beta_2+3\beta_3=0, \\ \beta_1-\beta_2+\beta_3=0, \\ 3\beta_1+\beta_2-5\beta_3=0. \end{cases}$$ tenglamalar sistemaning yechimlari $\beta=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ ega bo’lamiz.

$\lambda_3=-2$ xos son uchin α vektorning koordinatalari

$$\begin{cases} 3\gamma_1+\gamma_2+3\gamma_3=0, \\ \gamma_1+7\gamma_2+\gamma_3=0, \\ 3\gamma_1+\gamma_2+3\gamma_3=0. \end{cases}$$ tenglamalar sistemaning yechimlari $\gamma=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ ega bo’lamiz.

Bu yerda $(\alpha,\beta)=1\cdot1-1\cdot2+1\cdot1=0$, $(\alpha,\gamma)=-1\cdot1-1\cdot0+1\cdot1=0$, $(\beta,\gamma)=-1\cdot1-2\cdot0+1\cdot1=0$ ekanligidan, xos vektorlar o’zaro ortogonal ekanligi kelib chiqadi. α, β, γ vektorlarni uzinliklarini aniqlaymiz:

$$|\alpha|=\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{3}, \qquad |\beta|=\sqrt{1^2 \qquad\qquad} \quad \sqrt{2},$$

$$|\gamma|=\sqrt{(-1)^2+0^2+1^2}=\sqrt{2}.$$

Demak, ortnormallashgan bazislar vektorlarini

$$\vec{i}'=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix},\ \vec{j}'=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix},\ \vec{k}'=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}.$$

ko’rinishda aniqlanadi va $Ox'y'z'$ sistemasiga o’tish matritsasi

$$S=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}.$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Demak, $x=\frac{1}{\sqrt{3}}x'+\frac{1}{\sqrt{6}}y'-\frac{1}{\sqrt{2}}z'$, $y=-\frac{1}{\sqrt{3}}x'+\frac{2}{\sqrt{6}}y'$, $z=\frac{1}{\sqrt{3}}x'+\frac{1}{\sqrt{6}}y'+\frac{1}{\sqrt{2}}z'$. Hosil bo'lgan ifodalarni boshlang'ich tenglamaga qo'yib va ixchamlashtiramiz

$$3x'^2+6y'^2-2z'^2-\frac{6}{\sqrt{3}}x'+\frac{12}{\sqrt{6}}y'+\frac{4}{\sqrt{2}}z'=0.$$

va to'la kvadratlarni ajratib olamiz.

$$3\left(x'^2-\frac{2}{\sqrt{3}}x'+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\right)-1+6\left(y'^2+\frac{2}{\sqrt{6}}y'+\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2\right)-1-$$

$$-2\left(z'^2-\frac{2}{\sqrt{2}}z'+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)+1=0,$$

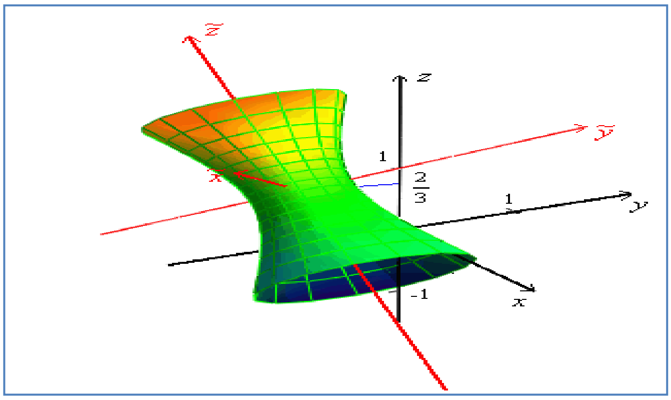
yoki

$$3\left(x'-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+6\left(y'+\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2-2\left(z'-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=1.$$

Parallel ko'chirish natijasida $\tilde{x}=x'-\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\tilde{y}=y'+\frac{1}{\sqrt{6}}$, $\tilde{z}=z'-\frac{1}{\sqrt{2}}$ yangi koordinatalar sistemasida

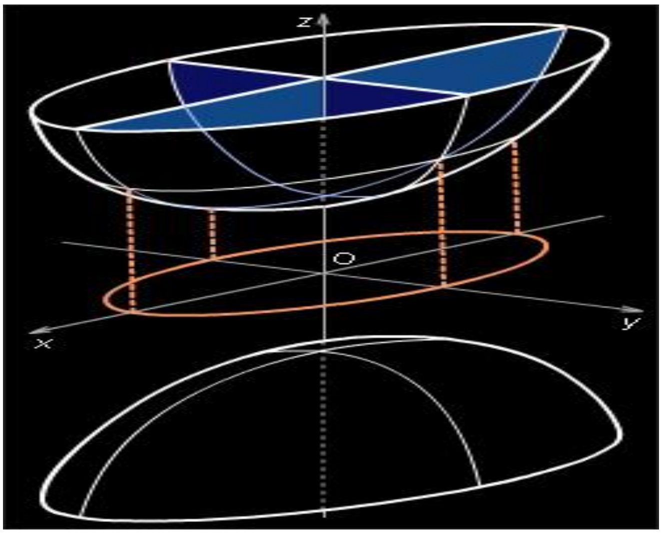
$$\frac{\tilde{x}^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}+\frac{\tilde{y}^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2}-\frac{\tilde{z}^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=1.$$

bir pallali giperbaloidning tenglamasi hosil bo'ladi. Sirtning chizmasi quyida keltirilgan. (2.22-rasm)



2.22-rasm.

4) Agar λ_1, λ_2, bir xil ishoraga ega bo'lib, λ_3, D teskari ishoraga ega bo'lsa, (2.35) tenglamaga mos keluvchi sirt $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ ikki pallali giperboloid deyiladi(2.23-rasm);

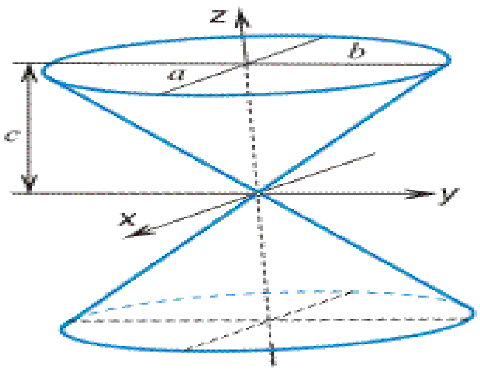


2.23–rasm.

5) Agar λ_1, λ_2, λ_3 bir xil ishoraga ega bo'lib, $D=0$ bo'lsa, (2.39) $O(0;0;0)$ koordinata boshini aniqlaydi;

6) Fazoda yo‘naltiruvchi deb atalgan L- chiziqni kesib o‘tuvchi va berilgan P-nuqtadan o‘tuvchi barcha ℓ to‘g‘ri chiziqlardan hosil bo‘lgan sirt **konus sirt** deb ataladi (2.24-rasm)

Agar λ_1, λ_2, bir xil ishoraga ega bo'lib, λ_3,teskari ishoraga ega bo'lib, D =0 bo'lsa, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ konus sirt hosil bo'ladi;



2.24-rasm.

Faras qilamiz $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_3 = 0$. U holda

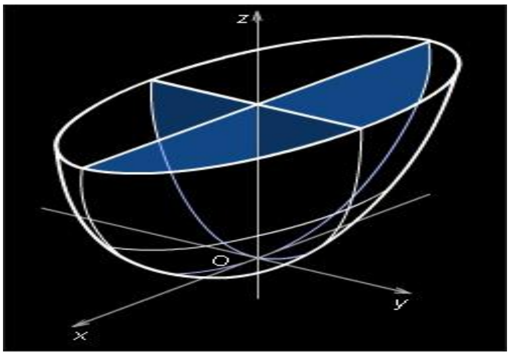
$$\lambda_1\left(x'+\frac{a_1'}{\lambda_1}\right)^2+\lambda_2\left(y'+\frac{a_2'}{\lambda_2}\right)^2=-2a_3'\left(z'-\frac{D}{2a_3'}\right), \tag{2.43}$$

Bu yerda $D=-a_0+\frac{a_1'^2}{\lambda_1}+\frac{a_2'^2}{\lambda_2}$.Yangi $O'XYZ$ koordinata sistemasini $X=x'+\frac{a_1'}{\lambda_1},\ Y=y'+\frac{a_2'}{\lambda_2},\ Z=z'-\frac{D}{2a_3'}$ belgilashlar asosida kiritsak

$$\lambda_1 X^2+\lambda_2 Y^2=2a_3' Z \tag{2.44}$$

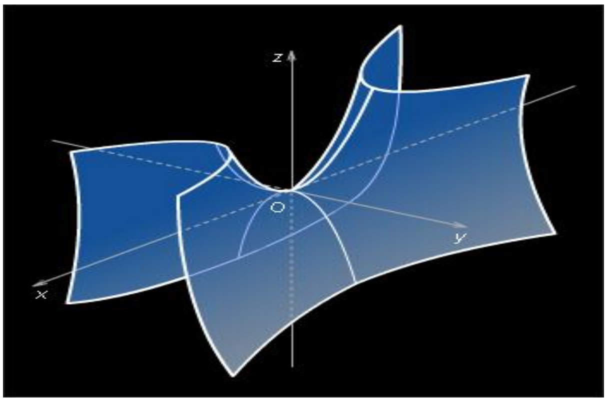
tenglamani hosil qilamiz.Quydagi holatlar bo'lishi mumkin:

1) Agar $\lambda_1,\ \lambda_2,\ -2a_3'$ bir xil ishoraga ega bo'lsa, (2.35) tenglamaga mos keluvchi sirt $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2pz$ elliptic paraboloid deyiladi(2.25-rasm);



2.25-rasm.

2) Agar $\lambda_1,\ -2a_3'$ bir xil ishoraga ega bo'lib, λ_2 teskari ishoraga ega bo'lsa, (2.35) tenglamaga mos keluvchi sirt $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2pz$ giperbolik paraboloid deyiladi(2.26-rasm);



2.26-rasm.

Silindrik sirttlar. Faras qilamiz $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_3 = 0$, $a'_3 = 0$. U holda

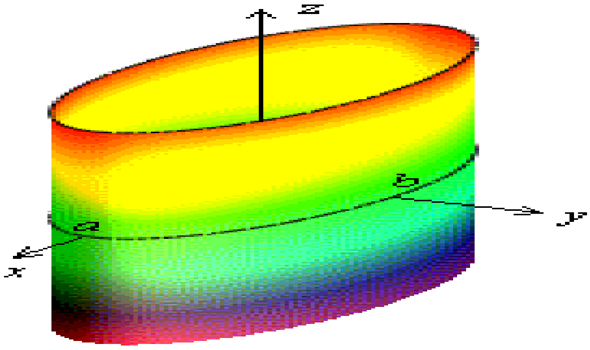
$$\lambda_1\left(x' + \frac{a'_1}{\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2\left(y' + \frac{a'_2}{\lambda_2}\right)^2 = D \ . \qquad (2.45)$$

Bu yerda $D = -a_0 + \frac{a_1'^2}{\lambda_1} + \frac{a_2'^2}{\lambda_2}$.Yangi $O'XYZ$ koordinata sistemasini $X = x' + \frac{a'_1}{\lambda_1}$, $Y = y' + \frac{a'_2}{\lambda_2}$, belgilashlar asosida kiritsak

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 = D \qquad (2.46)$$

tenglamani hosil qilamiz.

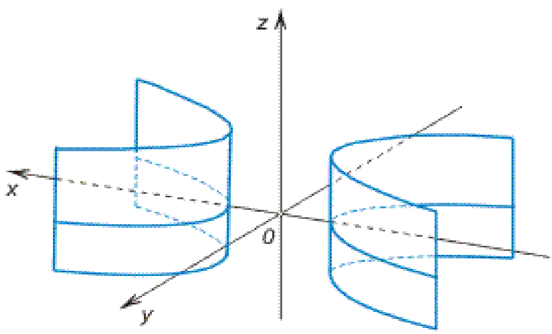
Quydagi holatlar bo'lishi mumkin:



2.27-rasm.

1) Agar λ_1, λ_2, D bir xil ishoraga ega bo'lsa, (2.35) tenglama $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ elliptik silindirni aniqlaydi(2.27-rasm);

Agar λ_1, D, bir xil ishoraga ega bo'lib, λ_2 teskari ishoraga ega bo'lsa, (2.35) tenglama $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ giperbolik silindirni aniqlaydi (2.28-rasm);



2.28-rasm.

2) Agar λ_1, λ_2, bir xil ishoraga ega bo’lib, D teskari ishoraga ega bo’lsa, (2.35) tenglama mavxum elliptik silindirni;

3) Agar λ_1, λ_2, bir xil ishoraga ega bo’lib, D =0 bo’lsa, (2.35) Oz o’qini aniqlaydi;

4) Agar λ_1 bir xil ishoraga ega bo’lib, λ_2,teskari ishoraga ega bo’lib, D =0 bo’lsa, (2.35) ikkita kesishuvchi tekisliklarni aniqlaydi;

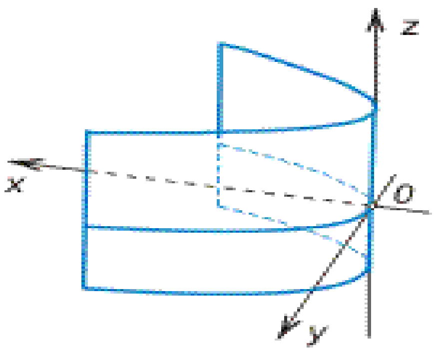
2 Agar $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$, $a_3' = 0$ bo’lsa u holda (2.43) qyedagi ko’rinishga keladi:

$$\lambda_1\left(x' + \frac{a_1'}{\lambda_1}\right)^2 = -2a_2'\left(y' - \frac{D}{2a_2'}\right) \tag{2.47}$$

bu yerda $D = -a_0 + \dfrac{a_1'^2}{\lambda_1}$.Yangi $O'XYZ$ koordinata sistemasini $X = x' + \dfrac{a_1'}{\lambda_1}$, $Y = y' - \dfrac{D}{2a_2'}$, $Z = z'$, , belgilashlar asosida kiritsak

$$\lambda_1 X^2 = -2a_2' Y \tag{2.48}$$

$x^2 = 2py$, $p = -\dfrac{a_2'}{\lambda_1}$ parabolik silindr tenglamasi tenglamasi hosil bo’ladi (2.29-rasm).



2.29-rasm

3 Agar $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$, $a_3' = 0$, $a_2' = 0$ bo’lsa u holda (2.43) qyidagi ko’rinishga keladi

$$\lambda_1\left(x' + \frac{a_1'}{\lambda_1}\right)^2 = D \tag{2.49}$$

bu yerda $D = -a_0 + \frac{a_1'^2}{\lambda_1}$. Yangi $O'XYZ$ koordinata sistemasini $X = x' + \frac{a_1'}{\lambda_1}$, $Y = y'$, $Z = z'$, belgilashlar asosida kiritsak

$$\lambda_1 X^2 = D \tag{2.50}$$

Quydagi holatlar bo'lishi mumkin:

1) Agar $\frac{D}{\lambda_1} > 0$ bo'lsa, (2.35) parallel tekisliklar jufti bo'ladi;

2) Agar $\frac{D}{\lambda_1} < 0$ bo'lsa, (2.35) mavxum parallel tekisliklar jufti bo'ladi;

3) Agar $D = 0$ bo'lsa, (2.35) Oyz koordinata tekisligini aniqlaydi.

2.16. Silindrik va sferik koordinatalar

$P \in R^3$ nuqtaning (x, y, z) koordinatalrini tasvirlshni davom ettirib, silindrik koordinatalarni muomilaga kiritamiz.

Buning uchun P nuqtaning xy tekislikdagi P' ortoganal proeksiyasining (x, y) koordinatalarini uning (r, θ) qutb koordinatalri bilan almashtiramiz z koordinataning o'zini olamiz P nuqtaning silindrik koordinatalrini (r, θ, t) orqali belgilasak, u holda

$$x = r\cos\theta,\ \ y = r\sin\theta,\ z = t$$

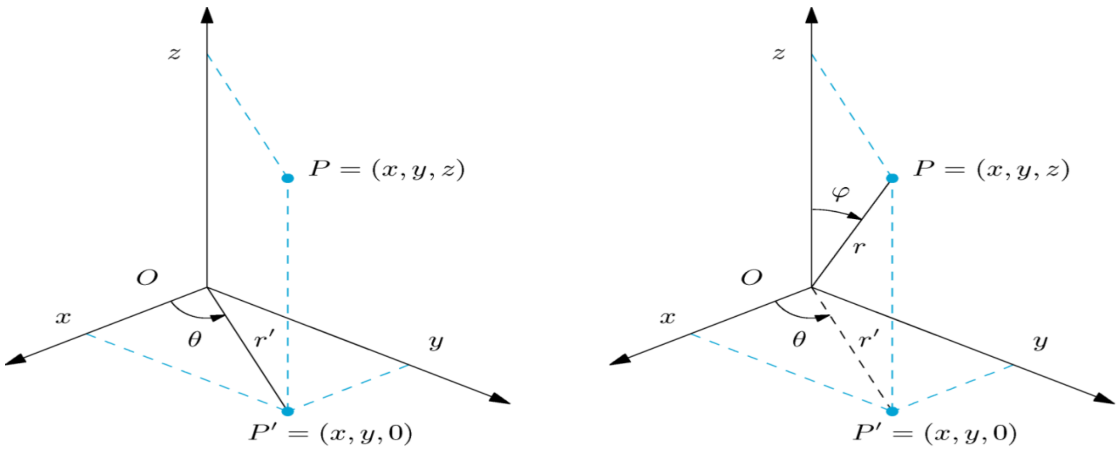
silindrik koordinatalardan Dekart koordinatalariga o'tish formulasini hosil qildik Bu holda θ burchak 2π aniqlikgacha olinadi va $(-\pi, \pi]$ oraliqdan olinadi Dekart koordinatalaridan silindrik koordinatalariga o'tish qutb koordinatalari singari bo'lib, faqat $t = z$ qo'shiladi (2.30-rasm, chap).

(r, φ, θ) sferik koordinatalar quyidagicha aniqlanadi $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ koordinata P nuqtadan koordinatalar boshigacha bo'lgan masofa, Oz o'qning musbat yo'nalishi bilan O va P nuqtalardan o'tuvchi nur orasidagi burchakni φ orqali belgilaymiz, Ox o'qning musbat yo'nalishi bilan P nuqtaning Oxy tekislikdagi proyeksiyasi bo'lgan P' nuqta hamda koordinatalar boshidan o'tuvchi nur orasidagi burchakni θ orqali belgilaymiz. Ushbu munosabatlar 2.30-Rasm (o'ng)da yorqin tasvirlangan. Geografiyadagi terminlarga ko'ra sferada θ***-uzoqlik***, φ***-kenglik***ni aniqlaydi.

Shuning uchun P nuqtaning Dekart koordinatalriga (r, φ, θ) sferik koordinatalardan

$$\begin{cases} x = r \cdot \sin\varphi \cdot \cos\theta, \\ y = r \cdot \sin\varphi \cdot \sin\theta, \\ z = r \cdot \cos\varphi \end{cases}$$

tengliklar orqali o'tiladi.



2.30-rasm.

Teskari almashtirish burchaklarga chegara qo'yib osongina o'tiladi. φ burchakni π uzunlikdagi intervalda, masalan $[0, \pi]$ intervalda o'zgarsa, θ burchak 2π uzunlikdagi, masalan ikki o'lchovlidagi singari $\theta \in (-\pi, \pi]$ intervalda o'zgaradi.

2.20-misol. $x^2 - 2y^2 + 4z^2 + 2x - 12y - 8z - 3 = 0$ tenglamani kanonik ko'rinishga keltirib, mazkur tenglama bilan berilgan sirtning turi, xossalari hamda uning $Oxyz$ koordinatalar sistemasiga nisbatan joylashganligi aniqlansin.

► Tenglama tarkibidagi x, y, z larga nisbatan hadlarda to'la kvadratlar ajratib, quyidagini hosil qilamiz:

$$\left(x^2 + 2x + 1 - 1\right) + 2\left(y^2 + 6y + 9 - 9\right) + 4\left(z^2 - 2z + 1 - 1\right) - 3 = 0,$$

$$(x+1)^2 - 2(y+3)^2 + 4(z-1)^2 = 3 + 1 - 18 + 4 = -10,$$

$$\frac{(x+1)^2}{10}-\frac{(y+3)^2}{5}+\frac{(z-1)^2}{\frac{5}{2}}=1.$$

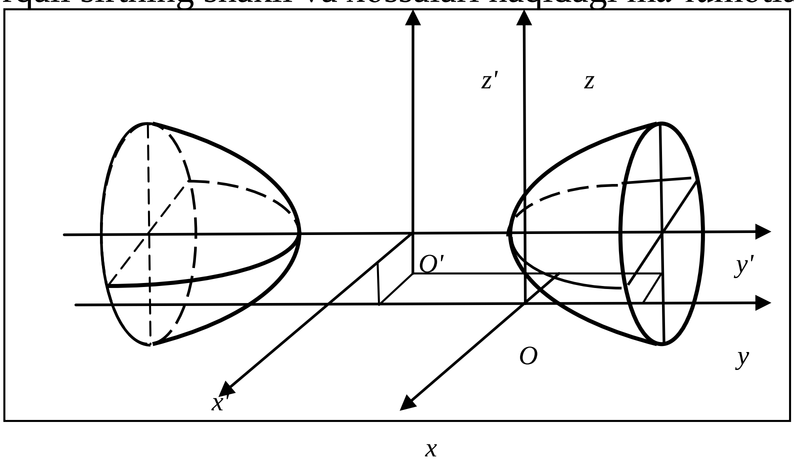
Agar $x'=x+1,\ \ y'=y+3$ va $z'=z-1$ formulalar orqali koordinata o'qlarini parallel ko'chiriladigan bo'lsa, yangi sistemaning koordinata boshi $O'(-1;-3;1)$ nuqtada bo'lib, sirtning kanonik tenglamasi

$$\frac{x'^2}{10}-\frac{y'^2}{5}+\frac{z'^2}{\frac{5}{2}}=-1$$

ko'rinishda yoziladi Mazkur tenglamadan ko'rinmoqdaki, qaralayotgan sirt ikki

pallali giperboloid bo'lib, u yangi $O'y'$ o'q bo'yicha cho'zinchoq hamda uning markazi $O'(-1;-3;1)$ nuqtada bo'lar ekan $\left(a=\sqrt{10},\ b=\sqrt{5},\ \ c=\sqrt{5/2}\ \right)$(2.31-rasm).◄

Yuqorida sanab o'tilgan barcha sirtlarning shakllari va xossalarini *parallel kesimlar usuli* yordamida aniqlash mumkin bo'ladi. Mazkur usulda sirtlarni koordinata tekisliklariga parallel tekisliklar bilan kesiladi, so'ngra, kesimlardagi chiziqlar orqali sirtning shakli va xossalari haqidagi ma'lumotlar hosil qilinadi.



2.31-rasm.

2.21-Misol. Bir pallali giperboloid $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{9}=1$ ning shakli va xossalari aniqlanib, uning chizmasi chizilsin.

► Sirtni, tenglamasi $z=h$ bo'lgan gorizontal tekisliklar bilan kesamiz

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1+\dfrac{h^2}{9} \\ z=h \end{cases}$$

tenglamalar sistemasidan ko'rish mumkinki, bu xildagi har qanday kesimda yarim o'qlari $a=4\sqrt{1+h^2/9}$ va $b=2\sqrt{1+h^2/9}$ lardan iborat ellips hosil bo'lar ekan.

Tenglamalari, $x=h$ va $y=h$ lar bilan berilgan tekisliklar orqali kesilganda, kesimlarda mos ravishda quyidagi giperbolalar hosil bo'ladi:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{16}-\dfrac{z^2}{9}=1-\dfrac{h^2}{4}, \\ x=h \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{y^2}{16}-\dfrac{z^2}{9}=1-\dfrac{h^2}{4}, \\ y=h \end{cases}$$

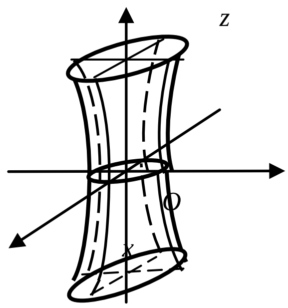
Xususan, agar $h=0$ bo'lganda biz bir pallali giperboloidning $z=0$ yoki $x=0$ yoki $y=0$ koordinata tekisliklar bilan kesilgandagi kesimlarni hosil qilamiz. Ularni odatda *bosh kesimlar* deb ataladi. Bosh kesimlarning o'lchamlari quyidagichadir: $z=0$ tekislikda ellipsning yarim o'qlari $a=4$ va $b=2$; $x=0$ tekislikda giperbolaning haqiqiy yarim o'qi $b=2$, mavhum yarim o'qi esa, $c=3$; $y=0$ teislikda, giperbolaning haqiqiy yarim o'qi $a=4$ bo'lib, mavhum yarim o'qi $c=3$ dir Koordinata tekisliklari, simmetriya tekisliklari bo'ladi ◄

Muhandislik masalalarida ko'pincha, turli xildagi ***aylanma sirtlar*** deb ataluvchi sirtlar uchraydi. Ushbu sirtlar biror egri chiziq bilan bir tekislikda yotuvchi va sirtning ***aylanish o'qi*** deb ataladigan to'g'ri chiziq atrofida aylanishidan hosil bo'ladi.

Agar egri chiziq Oyz tekislikda yotib, uning tenglamasi $F(y,z)=0$, $x=0$ bo'ladigan bo'lsa, uni Oz o'q atrofida aylantirishdan hosil bo'ladigan aylanma sirtning tenglamasi $F\left(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z\right)=0$ kabi ko'rinishda bo'ladi; agar aylantirish Oy o'qi atrofida bajarsak, aylanma sirt tenglamasining ko'rinishi $F\left(y, \sqrt{x^2+z^2}\right)=0$ kabi yoziladi.

2.22-Misol. Kanonik tenglamasi $\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{b^2}=1$ bo'lgan giperbolaning Oz o'qi atrofida hosil bo'lgan aylanma sirtlarning tenglamasi yozilsin.

►Yuqorida keltirilgan qoidalarga muvofiq, giperbola tenglamasidagi y ni $\pm\sqrt{x^2+y^2}$ bilan almashtiramiz: $\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=1$ Mazkur tenglama, o'z navbatida bir pallali aylanma giperboloidning tenglamasidir. Uning gorizontal kesimlarida ellipslarning o'rnida aylanalar yotadi(2.32 – rasm). ◄

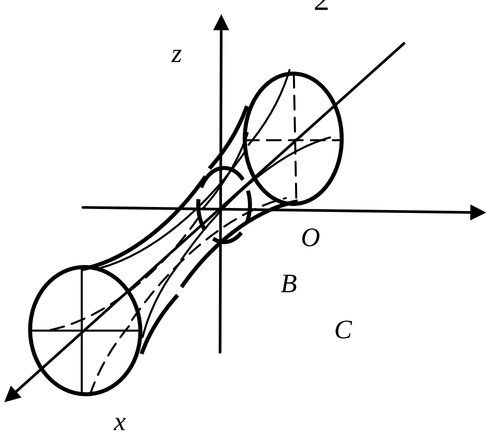


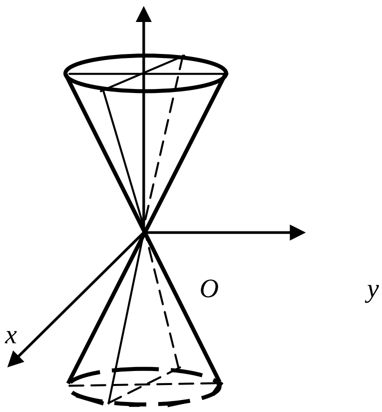
2.32-rasm.

2.23-Misol. Quyida berilgan tenglamalarga binoan, ularning har biri qanday sirt ekanligi (nomi) aniqlanib, ular chizilsin

$$\textbf{\textit{a)}}\quad -\frac{x^2}{6}+4y^2+\frac{1}{2}z^2-2=0 \qquad \textbf{\textit{b)}}\quad 3x^2+\frac{y^2}{2}-\frac{z^2}{4}=0.$$

► ***a)*** Tenglamani kanonik ko'rinishga keltiramiz: $-\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{1/2}-\frac{z^2}{4}=1.$ Bu esa, shakli 2.33-rasmda keltirilgan giperboloidning tenglamasi bo'lib, undagi ellipsning yarim o'qlari $OB=\frac{\sqrt{2}}{2}$ va $OC=2$ lardir;

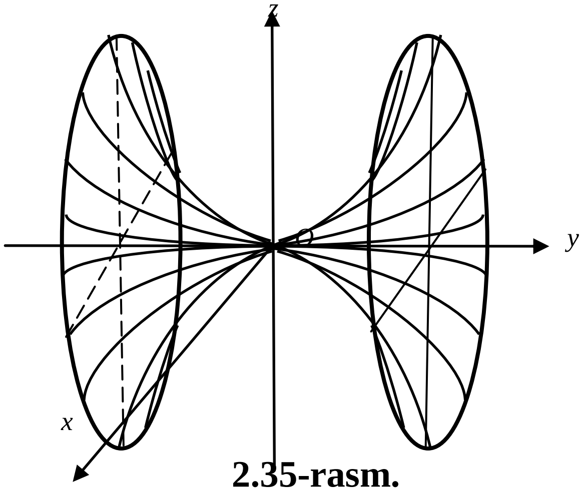




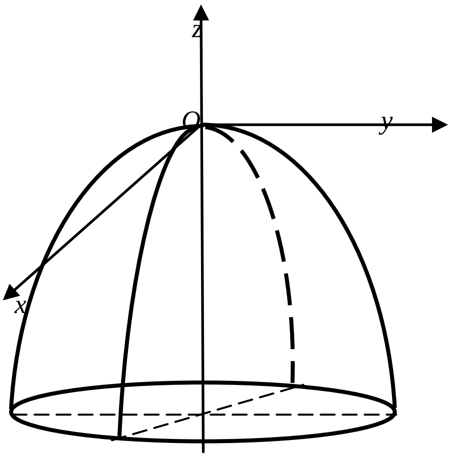
2.33-rasm. **2.34-rasm.**

b) Tenglamaning kanonik shaklini yozsak, $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{6}-\frac{z^2}{12}=0$ hosil bo'ladi.

Bu esa, ikkinchi tartibli konus tenglamasidir Uning shakli 2.34-rasmda tasvirlangan Uning $z=const$ tekislik bilan kesilgandagi kesimlari ellipslardir.◄



2.35-rasm.



2.36-rasm.

2.24-Misol. **1)** $z=\frac{1}{2}y^2$ parabolaning a) *Oy* o'qi atrofida hamda, b) *Oz* o'q atrofida aylantirishdan hosil bo'lgan sirtlarning tenglamalari yozilsin;

2) $\frac{y^2}{64}+\frac{z^2}{4}=1$ ellipsning a) *Oz* va b) *Oy* o'qlar atrofida aylanishidan hosil bo'lgan sirtlarning tenglamalari yozilsin.

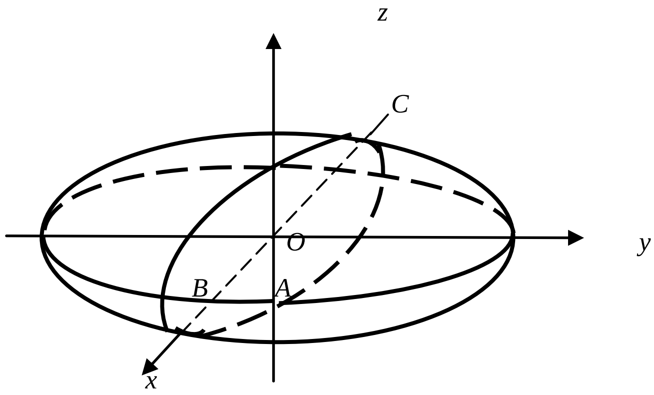
►**1)** Aylanma sirtlarning tenglamalarini hosil qilishning umumiy qoidasiga binoan, yozamiz:

a) $\pm\sqrt{x^2+z^2}=-\frac{1}{2}y^2, 4x^2-y^4+4z^2=0.$ Bu esa, 4-tartibli algebraik sirtdir (2.35-rasm).

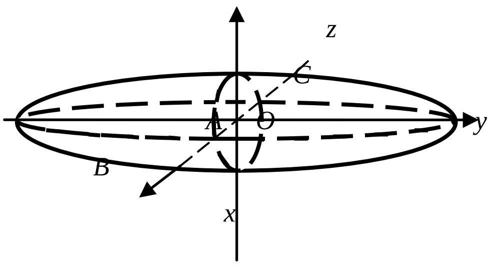
b) $z=-\frac{1}{2}\left(\pm\sqrt{x^2+y^2}\right)^2,\ z=-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right).$ Bu esa, aylanma paraboloiddir (2.36-rasm).

2) a) Aylanma sirtni hosil qilish qoidasiga ko'ra $\frac{\left(\pm\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}{64}+\frac{z^2}{4}=1$ yoki $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{64}+\frac{z^2}{4}=1.$ Bu esa, *Oz* o'qi bo'ylab "siqilgan" aylanma ellipsoid (sferoid) bo'lib, uning bosh kesimining yarim o'qlari *OA*=*OC*=*2* va *OB*=8 (2.37-rasm) lardir;

b) Yuqoridagi kabi $\frac{y^2}{64}+\frac{\left(\pm\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}{4}=1.$ yoki $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{64}+\frac{z^2}{4}=1.$ Bu esa, *Oy* o'qi bo'ylab chizilgan aylanma ellipsoid bo'lib, bu erda *OA*=*OC*=2, *OB*=8 (2.38-rasm).◄



2.37-rasm.



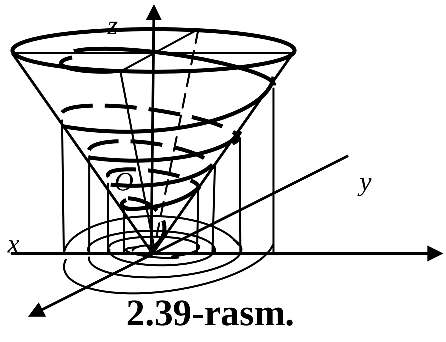
2.38-rasm.

2.17. Fazodagi egri chiziqning parametrik tenglamalari

Yuqorida egri chiziq va sirtlarning umumiy tenglamalari taxlil qilinib, hususiy hollari o'rganib chiqildi. Endi fazodagi egri chiziqlarni parametric tenglamalari ustida to'xtalib o'tamiz. Quyidagi tenglamalar sistemasi

$$\left.\begin{aligned} x &= f_1(t), \\ y &= f_2(t), \\ z &= f_3(t), \end{aligned}\right\} t_1 \le t \le t_2 \qquad (2.51)$$

ni fazodagi chiziqning ***parametrik tenglamalari*** deb yuritiladi. Bu yerdagi $f_1(t)$ $f_2(t)$ va $f_3(t)$ lar t o'zgaruvchi parametrga bog'liq bo'lgan funksiyalardir. Xususan, $f_3(t) \equiv 0$ bo'lganda, $z = 0$ tekislikdagi chiziqning parametrik tenglamalarini hosil qilamiz. Ta'kidlash lozimki, (2.51) tenglamalar, nafaqat chiziqlarning berilishini, balki $M(x, y, z)$ nuqtaning ushbu chiziqdagi *"harakat qonuni"*ni ham ifodalaydi.



2.39-rasm.

2.25 - Mmisol. Quyidagi parametrik tenglamalar, ya'ni:

$$\left.\begin{aligned} x &= at\cos t, \\ y &= at\sin t, \quad a > 0, b > 0, t \ge 0 \\ z &= bt, \end{aligned}\right\}$$

lar qanday chiziqni tasvirlaydi?

► Bu tenglamalar, $z=0$ tekislikdagi proeksiyasi *Arximed spirali* bo'lgan$\rho=a\varphi$ *vint spirali* deb ataluvchi egri chiziqni ifoda etadi (2.39-rasm).◄

Agar (2.51) parametrik tenglamalardan t parametr yo'qotilsa, chiziqning Dekart koordinatalardagi tenglamasi hosil bo'ladi.

2.26-Misol. Quyidagi parametrik tenglamalar

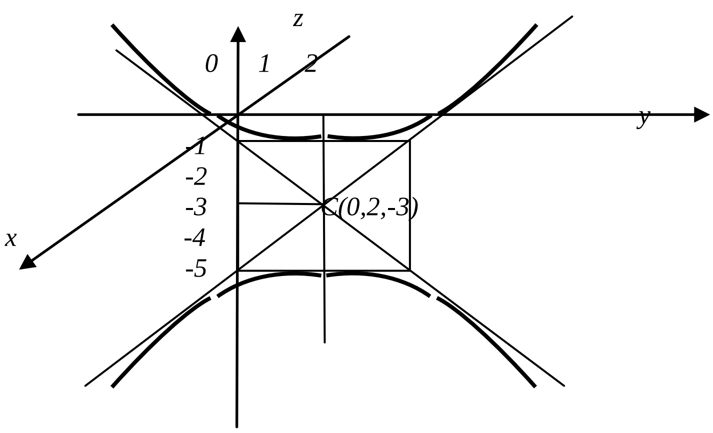
$$\left.\begin{aligned} &x=0 \\ &y=t-1/t+2, \\ &z=t+1/t-3, \end{aligned}\right\}$$

bilan berilgan chiziq chizilsin.

► Ushbu chiziq Oyz koordinata tekisligida yotadi. Parametr t ga turli xil qiymatlar berib, chiziqda yotuvchi yetarli miqdordagi nuqtalar hosil qilinadi va ularni birlashtirib egri chiziq hosil qilinadi. Mazkur chiziqni aniqroq o'rganish maqsadida parametrni yo'qotish usulidan foydalanamiz. Ikkinchi va uchinchi tenglamalardagi 2 bilan -3 ni tenglikning chap tomoniga o'tkazib, tengliklarni kvadratga oshiramiz, so'ngra, $(z+3)^2$ dan $(y-2)^2$ ni ayiramiz. U holda:

$$(z+3)^2-(y-2)^2=\left(t+\frac{1}{t}\right)^2-\left(t-\frac{1}{t}\right)^2=4, \quad \frac{(z+3)^2}{4}-\frac{(y-2)^2}{4}=1.$$

Natijada, $x=0$ koordinata tekisligida teng tomonli giperbola $(a=b=2)$ hosil bo'ldi. Uning markazi $C(0;2;-3)$ nuqtadir (2.40-rasm).◄



2.40-rasm.

Nazorat savollari.

1. Dekart va qutb koordinatalar sistemasi.

2. Tekislikda to'g'ri chiziq tenglamalari. To'g'ri chiziqlar orasidagi burchak, ularning parallellik va perpendikulyarlik shartlari.

3. Ikkinchi tartibli egri chiziqlar (aylana, ellips, giperbola, parabola).

4. Tekislikning turli tenglamalari. Tekisliklar orasidagi burchak, ularning parallellik va perpendikulyarlik shartlari.

5. Fazoda to'g'ri chiziq tenglamalari. To'g'ri chiziqlar orasidagi burchak, ularning parallellik va perpendikulyarlik shartlari.

6. Fazoda to'g'ri chiziq va tekislik orasidagi munosabatlar.

7. Ikkinchi tartibli sirtlar.

Mashqlar

1. Qutb koordinatalarida berilgan chiziqlarni tasvirlab, ularning Dekart koordinatalaridagi tenglamalari yozilsin:

1) $\rho = \dfrac{4}{1-\cos\varphi}$ (*parabola)*

2) $\rho = a(1-\cos\varphi)$, (*кардоида*)

3) $\rho = 3/\varphi$ (*giperbolik spiral*)

4) $\rho = 2\varphi,\ \ \rho = (1/2)^{\varphi}$ (*logarifimik spiral*)

5) $\rho = a\sin 3\varphi$ (*uch yaproqli atirgul*);

6) $\rho = a\sin^2 2\varphi$ (*to'rt yaproqli atirgul*);

2. Quyida keltirilgan sirtlar bilan chegaralgan jism chizilsin.

1) a) $z = x^2 + y^2,\ z = 0,\ x = 1,\ y = 2,\ y = 0;$ b) $x^2 + y^2 = 2x,\ z = 0,\ z = x$.

2) a) $x^2 + y^2 = z^2,\ z = 0,\ y = 2x,\ y = 4x,\ x = 3;\ (z > 0);$ b) $x^2 + y^2 = 4y,\ z = 0,\ y + z = 5$.

3) a) $y^2 + 3z^2 = 6,\ 3x^2 - 25y^2 = 75,\ z \ge 0;$ b) $x = 4,\ y = 2,\ x + 2y + 3z = 12,\ x = 0,\ y = 0,\ z \ge 0.$

4) a) $z = 5y,\ x^2 + y^2 = 16,\ z = 0;$ b) $x + y + z = 5,\ 3x + y = 5\ 2x + y = 5,\ y = 0,\ z = 0$.

5) a) $y = 3x\ y = 0,\ x = 2,\ z = xy,\ z = 0;$ b) $8(x^2 + y^2) = z^2,\ x^2 + y^2 = 1,\ 2x + y = 5,\ y \ge 0,\ z \ge 0.$

3. Quydagi masalalar yechilsin.

1) Qisqa intervalli tovush jo'natish manbai noma'lum *M* punktda. Tovush uchta kuzatish punktiga turli vaqtda etib bordi: *A* va S punktlarga *V* punktga nisbatan mos ravishda t_1 va t_2 muddatga kechikib keladi. Tovush tezligini 330 *m/s* deb hisoblab *M* punktning joylashgan o'rnini aniqlang. (Javob: *M* nuqta fokuslari *A* va *V* nuqtada bo'lgan $|AM|-|BM|=330t_1$ giperbolaning o'ng shoxida va fokuslari *V* va *S* nuqtada bo'lgan $|BM|-|CM|=-330t_2$ giperbolaning chap shoxida joylashgan.)

2) Osma ko'prikning zanjiri $y=px^2$ parabola shaklida bo'lib, ko'prikning uzunligi 50 metrga, zanjirning egilishi 5 metrga teng. Ko'prikning eng chetki nuqtasidagi egilish burchagi α ning qiymati aniqlansin.

3) Projektorning oynali sirti parabolaning o'z o'qi atrofida aylanishidan hosil bo'lgan. Oynaning diametri 80 *sm*, chuqurligi esa 20 *sm* ga teng. Nurlarni parallel dasta bilan qaytarish uchun, u parabola fokusida joylashishi lozim bo'lsa, yorug'lik manbaini parabola uchidan qanday masofada joylashtirish kerak.

4) $x^2+y^2+z^2=R^2$ sfera va $x^2+y^2-2x=0$ aylanma silindr kesishishidan hosil bo'lgan chiziq parametrik tenglamasini tuzing. Parametr sifatida chiziq ixtiyoriy *M* nuqtasi $\overrightarrow{OM}$ radius vektorining Oxy tekislikdagi proeksiyasi va Ox o'q musbat yo'nalishi bilan hosil qilgan φ burchak olinsin.

5) $x^2+2y^2=2z$ va $x+2y+z=1$ kabi sirtlarning kesishishidan hosil bo'lgan chiziqning *Oxy* koordinata tekisligidagi proeksiyasining tenglamasi tuzilsin.

6) $x^2+2y^2+4z^2=9$ ellipsoidni markazi *C(3,2,1)* nuqtada bo'lgan ellips bo'yicha kesadigan tekislikning tenglamasi tuzilsin.

7) Simmetriya tekisliklari koordinata tekisliklari bo'lib, *M*(3,1,1) nuqtani hamda $x^2+y^2-z^2=9$, $x-z=0$ aylanani o'z ichiga oladigan ellipsoid tenglamasi tuzilsin.

8) $x^2+2y^2=4z+10$ paraboloid bilan $x^2+y^2+z^2=6$ sferaning kesishish chizigi ikkita aylanadan iborat ekanligi isbotlanib, u aylanalarning kesishish nuqtalari hamda radiuslari aniqlansin.

III BOB. SONLI TO‘PLAMLAR. SONLI KETMA-KETLIKLAR.

3.1.To‘plamlar nazariyasi elementlari

To‘plam tushunchasi. Matematik to‘plam tushunchasi majmua, yig‘indi, birlashma, birikmalar kabi tushunchalardan sekin-asta shakllanib kelgan. G.Kantor to‘plamni “bizning ongimizda yoki intuitsiyalarimizda farqlanadigan ob’ektlarning bir butun bo‘lib yig‘ilgan yig‘indisi” deb ta’rif beradi.

N.Burbaki taxallusi bilan ijod qilishgan bir guruh fransuz matematiklari tomonidan yo‘zilgan “To‘plamlar nazariyasi” (1939) kitobining birinchi nashrida “To‘plam ayrim xossalarga ega va o‘zaro yoki boshqa to‘plamlar elementlari bilan ba’zi munosabatlarda bo‘ladigan elementlardan tashkil topadi” deb to‘plamga tushuncha berilgan. To‘plam tushunchasini aniqlashda qanday qiyinchiliklar tug‘ilishidan qat’iy nazar, bu tushunchaning o‘zi qaralayotgan ob’ektlarni o‘rganishda kuchli qurol hisoblanishini ta’kidlab o‘tish kerak.

Shunday qilib, to‘plam tushunchasi boshlang‘ich tushuncha bo‘lib: unga qat’iy ta’rif berilmaydi, ammo u misollarda izohlanishi mumkin. Masalan, guruhdagi talabalar to‘plami, kutubxonani tashkil qiluvchi kitoblar to‘plami, to‘g‘ri chiziqning barcha nuqtalari to‘plami, berilgan tenglamaning yechimlari to‘plami, barcha juft sonlar to‘plami haqida gapirish mumkin.

To‘plamlarni katta $A, B, \ldots, X, Y, Z$ harflar bilan belgilaymiz, ularning elementlarini esa kichik $a, b, \ldots, x, y, z$ harflar bilan belgilaymiz. Bu qoidaga har doim ham rioya qilib bo‘lmaydi, chunki ba’zan to‘plamning o‘zlari ham boshqa bir to‘plamning elementi bo‘lib kelishi mumkin. x element E to‘plamning elementi ekanligi $x \in E$ ko‘rinishda belgilanadi va x element E *to‘plamga tegishli* deb aytiladi. $x \notin E$ yozuv “x element E to‘plamga tegishli emas” degan ma’noni anglatadi. Agar E to‘plamga x, y, z elementlar tegishli bo‘lsa, $x \in E, y \in E, z \in E$ deb yozish o‘rniga $x, y, z \in E$ ko‘rinishda yoziladi.

Ikkita A va B to‘plamlar bir xil elementlardan tashkil topishgan bo‘lsa, ular *teng* $(A = B)$ deb ataladi. Agar biz to‘plamning elementlarini bilsak yoki topa olsak, bu to‘plam berilgan deb hisoblanadi. To‘plamni uning elementlarini ro‘yxat qilib ko‘rsatib ham aniqlash mumkin. To‘plam elementlarining ro‘yxati figurali qavs ichiga yoziladi. Masalan, elementlari faqat $1, 2, 3, 4$ sonlar bo‘lgan to‘plam $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ko‘rinishda yoziladi. Bitta a elementdan iborat to‘plam $\{a\}$ ko‘rinishda belgilanadi.

To‘plamni uning ixtiyoriy elementini tavsiflovchi xossani ko‘rsatish yordamida berish keng qo‘llaniladi. $q(x)$ xossaga ega elementlar to‘plami $\{x: q(z)\}$ ko‘rinishda belgilanadi. Masalan, A −O‘zbekistonning shaharlari to‘plami bo‘lsa, ya’ni

A={x: x - O‘zbekistondagi shahar},

ixtiyoriy x elementning tavsiflovchi $q(x)$ xossasi, x ning O‘zbekistonning shahri ekanligini anglatadi.

Ko‘rsatilgan tavsiflovchi $q(x)$ xossaga hech bir element ega bo‘lmasligi ham mumkin. Bunday holda bu xossa *bo‘sh to‘plamni* aniqlaydi va bu to‘plam $\emptyset$ ko‘rinishda belgilanadi. Agar to‘plam chekli sondagi elementlardan iborat bo‘lsa, u *chekli to‘plam*, aks holda *cheksiz to‘plam* deyiladi.

Qism to‘plam. Agar A to‘plamning har bir elementi B to‘plamga ham tegishli bo‘lsa, A to‘plam B to‘plamning *qism to‘plami* deb ataladi va bu munosabat $A \subset B$ ko‘rinishda yoziladi. B to‘plamning o‘zi va $\emptyset$ bosh to‘plam B to‘plamning qism to‘plami bo‘ladi. B to‘plamning barcha qism to‘plamalari to‘plami boshqa bir yangi to‘plam bo‘ladi va u $P(B)$ orqali belgilanadi.

3.1-Misol. Agar $E = \{a, b, c\}$ bo‘lsa, $P(E)$ to‘plamni tuzing.

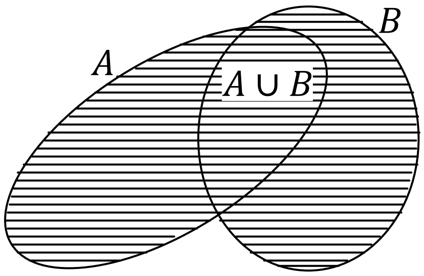
►$P(E) = \big\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\big\}$. ◄

Umuman olganda, agar E to‘plam n ta elementdan iborat bo‘lsa, u holda $P(E)$ to‘plam 2^n ta elementdan iborat bo‘ladi.

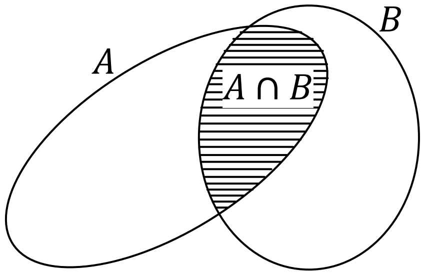
To‘plamlarning tengligini qism to‘plam tushunchasi bilan ham berish mumkin. Agar $A \subset B$ va $B \subset A$, ya’ni A to‘plamning har bir elementi B to‘plamning ham va aksincha bo‘lsa, A va B to‘plamlar teng deyiladi va $A = B$ ko‘rinishda yoziladi.

Agar $A \subset B$, ammo $A \neq B$ bo‘lsa, A to‘plam B to‘plamning *to‘g‘ri qismi* (B to‘plamning *chin qism to‘plami*) deb ataladi.

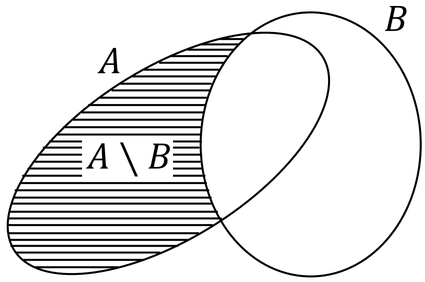
To‘plamlar ustida amallar. A va B to‘plamlar berilgan bo‘lsin. Bu to‘plamlarning *yig‘indisi* yoki *birlashmasi* deb, A va B to‘plamlarning hech bo‘lmaganda biriga tegishli bo‘lgan elementlardangina tashkil topgan $C = A \cup B$ to‘plamga aytiladi (3.1-rasm).



3.1-rasm



3.2-rasm



3.3-rasm

A va B to‘plamlarning *kesishmasi* deb, A to‘plamga ham, B to‘plamga ham tegishli bo‘lgan elementlardan tashkil topgan $C = A \cap B$ to‘plamgsa aytiladi (3.2-rasm).

A va B to‘plamlarning *ayirmasi* deb, A to‘plamning B to‘plamga kirmagan elementlaridan tashkil topgan $C = A \setminus B$ to‘plamga aytiladi (3.3-rasm).

Masalan, agar $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ va $B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$ bo‘lsa, u holda $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $A \cap B = \{4, 5\}$, $A \setminus B = \{1, 2, 3\}$, $B \setminus A = \{6, 7, 8\}$ bo‘ladi.

Ixtiyoriy sondagi to‘plamlarning birlashmasi va kesishmasi xuddi shu singari anialanadi.

Agar $A \cap B = \emptyset$ bo‘lsa, A va B to‘plamlar kesishmaydi deb aytiladi.

A va B to‘plamlar berilgan bo‘lsin. Agar A to‘plamning har bir elementiga B to‘plamning yagona elementi mos qoyilgan bo‘lib, bunda: 1) A to‘plamning har xil elementlariga B to‘plamning har xil elementlari mos qo‘yilgan va 2) B to‘plamning har bir elementi A to‘plamning qandaydir elementi mos qo‘yilgan bo‘lsa, A va B to‘plamlar o‘rtasida *o‘zaro bir qiymatli moslik* o‘rnatilgan deb aytiladi. Agar chekli A va B to‘plamlar o‘rtasida o‘zaro bir qiymatli moslik o‘rnatilgan bo‘lsa, ulardagi elementlar soni teng. Agar A va B to‘plamlar o‘rtasida o‘zaro bir qiymatli moslik o‘rnatish mumkin bo‘lsa, ular *ekvivalanet* to‘plamlar deb ataladi va $A \sim B$ ko‘rinishda belgilanadi.

Agar cheksiz A to‘plam bilan **N** natural sonlar to‘plami o‘rtasida o‘zaro bir qiymatli moslik o‘rnatish mumkin bo‘lsa, ya’ni $A \sim \mathbf{N}$ bo‘lsa, A to‘plam sanoqli to‘plam deb ataladi. Har qanday cheksiz to‘plam tarkibida sanoqli qism to‘plam mavjud.

3.2. Sonli to‘plamlar.

Haqiqiy sonlar.

3.1-Ta’rif. Koordinatalar boshi deb ataluvchi O nuqta, masshtab va yo‘nalish aniqlangan l to‘g‘ri chiziq son o‘qi deb ataladi.

Har bir r songa son o‘qining faqat bitta nuqtasi mos keladi va aksincha, ya’ni son o‘qining har bir nuqtasiga faqat bitta haqiqiqy son mos keladi. Boshqacha qilib aytganda haqiqiqy sonlar bilan son o‘qining nuqtalari o‘rtasida o‘zaro bir qiymatli moslik o‘rnatilgan.

Haqiqiy soanlar tartiblanganlik xususiyatiga ega: agar a va b haqiqiy sonlar bo‘lsa, u holda yoki $a = b$, yoki $a < b$, yoki $a > b$. Haqiqiy sonlar son o‘qida o‘sish tartibida tasvirlanadi. Haqiqiy sonlar to‘plami $\boldsymbol{R}$ orqali belgilanadi.

Agar $\boldsymbol{R}$ haqiqiy sonlar to‘plamini ikkita +∞ va $-\infty$ elementlar bilan to‘ldirilsa, u holda kengaytirilgan son o‘qi va kengaytirilgan $\overline{\boldsymbol{R}}$ haqiqiy sonlar to‘plamiga ega bo‘lamiz. Bunda ta’rifga ko‘ra quyidagi munosabatlar o‘rinli bo‘ladi:

1. $\forall x \in R$ uchun $-\infty < x < +\infty$, $x + \infty = +\infty$, $x - \infty = -\infty$;
2. $\forall x > 0$ uchun $x \cdot (+\infty) = +\infty$, $x \cdot (-\infty) = -\infty$;
3. $\forall x < 0$ uchun $x \cdot (+\infty) = -\infty$, $x \cdot (-\infty) = +\infty$;
4. $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$;
5. $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$;
6. $(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$;
7. $(+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$, $(-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$;
8. $(+\infty) + (-\infty)$ va $\frac{\pm\infty}{\infty}$ amallar aniqlanmagan.

Haqiqiy sonning moduli.

3.2-Ta’rif. x haqiqiy sonning moduli deb

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{agar } x \geq 0 \\ -x, & \text{agar } x < 0 \end{cases}$$

shart bilan aniqlanuvchi manfiy bo‘lmagan $|x|$ songa aytiladi.

Agar $\varepsilon > 0$ ixtiyoriy son bo‘lsa, u holda $|x| \le \varepsilon$ tengsizlikdan $-\varepsilon \le x \le \varepsilon$ yoki $x \in [-\varepsilon; \varepsilon]$ ekanligi kelib chiqadi.

Haqiqiy son modulining xossalari.

a va b ixtiyoriy haqiqiy sonlar bo‘lsin.U holda:

1. $|ab| = |a||b|$;
2. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}, (b \ne 0)$;
3. $|a + b| \le |a| + |b|$ (Koshi-Bunyakovskiy tengsizligi);
4. $|a - b| \ge |a| - |b|$;

Chegaralangan to‘plamlar. $D \subset \boldsymbol{R}$ sonli to‘plam berilgan bo‘lsin.

3.3-Ta’rif. Shunday b haqiqiy son topilib, ixtiyoriy $x \in D$ element uchun $x \le b$ tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, D to‘plam yuqoridan chegaralangan deyiladi.

3.4-Ta’rif. Shunday a haqiqiy son topilib, ixtiyoriy $x \in D$ element uchun $x \ge a$ tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, D to‘plam quyidan chegaralangan deyiladi.

3.5-Ta’rif. Agar D to‘plam yuqoridan va quyidan chegaralangan bo‘lsa, D to‘plam chegaralangan to‘plam deyiladi. Boshqacha qilib aytganda, agar D to‘plam chekli $[a; b]$ kesmada joylashgan bo‘lsa, u chegaralangan deyiladi.

3.4-rasm

Chekli sondagi nuqtalardan iborat to‘plam chegaralangan bo‘ladi.

3.2-Misollar.

1. Natural sonlar to‘plami $a \le 1$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy a son bilan quyidan chegaralangan.
2. Manfiy sonlar to‘plami ixtiyoriy $b \ge 0$ son bilan yuqoridan chegaralangan.

3.6-Ta’rif. Yuqoridan yoki quyidan chegaralanmagan to‘plam, chegaralanmagan to‘plam deb ataladi.

3.1-Teorema. Agar ixtiyoriy $M > 0$ son uchun shunday $x \in D$ element topilib, ular uchun $|x| > M$ tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, D to‘plam chegaralanmagan bo‘ladi.

►Teskarisidan faraz qilamiz, ya'ni D to'plam chegaralangan bo'lsin, ya'ni D to'plam quyidan a son bilan yuqoridan b son bilan chegaralangan bo'lsin. U holda D to'plamning ixtiyoriy x elementi uchun $a \leq x \leq b$, tengsizlik o'rinli bo'ladi, ya'ni D to'plamning barcha elementlari $[a; b]$ kesmada yotadi. Ammo teorema shartiga ko'ra $M = \max\{|a|, |b|\}$ son uchun shunday $x \in D$ element topilib, ular uchun $|x| > M$ tengsizlik o'rinli bo'ladi, ya'ni D to'plamning $[a; b]$ kesmaga tushmaydigan x elementi mavjud ekan. Qarama-qarshilikka duch keldik. Ana shu qarama-qarshilik qilingan farazning noto'g'riligini anglatadi. ◄

3.3-Misol.

1. Z butun sonlar to'plami chegaralanmagan.
2. $(-\infty; +\infty)$,$(-\infty; b)$, $(a; +\infty)$ intervallar chegaralanmagan.

To'plamning quyi va yuqori chegaralari. Agar D to'plam yuqoridan b son bilan chegaralangan bo'lsa, b soni D to'plamning yuqori chegarasi deyiladi. b sondan katta har qanday son ham D to'plamning yuqori chegarasi bo'ladi.

3.7-Ta'rif. Agar

1) ixtiyoriy $x \in D$ son uchun $x \leq M$;
2) ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $x^* \in D$ topilib, ular uchun $M - \varepsilon < x^* \leq M$ tengsizliklar o'rinli bo'lsa, M soni D to'plamning aniq yuqori chegarasi deyiladi.

Boshqacha qilib aytganda D to'plam yuqori chegaralarining eng kichigi uning aniq yuqori chegarasi deyiladi.

D to'plamning aniq yuqori chegarasi

$$M = \sup D \text{ yoki } M = \sup_{x \in D}\{x\}$$

ko'rinishda belgilanadi (lotincha *supremum* –eng katta ma'noni anglatadi).

Yuqoridan chegaralanmagan D to'plam uchun uning aniq yuqori chegarasini $(+\infty)$ deb qabul qilamiz va

$$\sup D = +\infty$$

ko'rinishda yozamiz.

Agar D to‘plam quyidan a soni bilan chegaralangan bo‘lsa, bu a sonini D to‘plamning quyi chegarasi deb ataymiz. a sondan kichik har qanday son ham D to‘plamning quyi chegarasi bo‘lishi ravshan.

3.8-Ta’rif. Agar

1) ixtiyoriy $x \in D$ son uchun $x \geq m$;
2) ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $x^* \in D$ topilib, ular uchun $m \leq x^* < m + \varepsilon$ tengsizliklar o‘rinli bo‘lsa, m soni D to‘plamning aniq quyi chegarasi deyiladi.

Shunday qilib, D to‘plam quyi chegaralarining eng kattasi bu to‘plamning aniq quyi chegarasi bular ekan.

D to‘plamning aniq quyi chegarasi

$$m = \inf D \text{ yoki } m = \inf_{x \in D}\{x\}$$

ko‘rinishda belgilanadi (lotincha *infinum*-eng kichik ma’noni anglatadi). Quyidan chegaralanmagan D to‘plam uchun

$$\inf D = -\infty$$

deb hisoblaymiz.

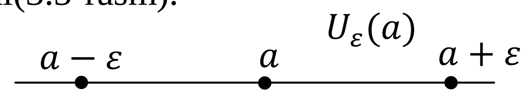
Masalan. $\sup\,[a;b] = b$, $\inf[a,b] = a$, $\sup\,[a;+\infty) = +\infty$, $\inf\,(-\infty;b] = -\infty$, $\sup Z = +\infty$, $\inf\, Z = -\infty$.

Nuqtaning atrofi. x_1 va x_2 orasidagi masofa deb $\rho(x_1, x_2) = |x_1 - x_2|$ songa aytiladi.

3.9-Ta’rif. $a \in R$ nuqtaning ε atrofi deb

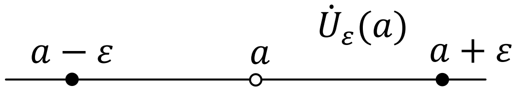
$$U_\varepsilon(a) = \{x: a - \varepsilon < x < a + \varepsilon\}$$

to‘plamga aytiladi(3.5-rasm).



3.5-rasm

3.10-Ta’rif. a nuqtaning $U_\varepsilon(a)$ atrofidan a nuqtani olib tashlanishidan hosil bo‘lgan $\dot{U}_\varepsilon(a) = U_\varepsilon(a)\backslash\{a\}$ to‘plamga a nuqtaning o‘zi kirmagan atrofi deb ataladi (3.6-rasm).



3.6-rasm

Agar a nuqtaning atrofini olishda $\varepsilon > o$ qiymatini ko‘rsatish shart bo‘lmasa biz umumiylashtirib a nuqtaning biror atrofi deb aytamiz va uni $U(a)$ (nuqtaning o‘zi kirmagan atrof uchun esa $\dot{U}(a)$) orqali belgilaymiz.

3.3. Sonli ketma-ketlik va uning limiti.

3.11-Ta’rif. Agar har bir n natural son uchun biror $x_n \in \boldsymbol{R}$ haqiqiy son mos qo‘yilgan bo‘lsa,

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$$

ketma-ketlik berilgan deyiladi, u $\{x_n\}$ orqali belgilanadi. x_n-ketma-ketlikning umumiy hadi deb ataladi.

Ketma-ketliklarga misollar.

$$\left\{\frac{1}{n}\right\} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots.$$

$$\{2^n\} = 2,4,8, \dots.., 2^n, \dots.$$

$$\{1\} = 1,1,1, \dots\dots, 1, \dots..$$

$$\{\sin n\} = sin1, sin2, sin3, \dots.., \sin n, \dots..$$

Ketma-ketlikning limiti. $\{x_n\}$ ketma-ketlik va a soni berilgan bo‘lsin.

3.12-Ta’rif. Agar ixtiyoriy yetarlicha kichik $\varepsilon > 0$ son uchun shunday musbat butun $N = N(\varepsilon)$ son topilib, $n \geq N$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha n natural sonlarda $|x_n - a| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, a soni $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti deb ataladi va

$$a = \lim_{n\to\infty} x_n$$

ko‘rinishda belgilanadi.

3.4-misol. $\{x_n\} = \left\{\frac{2n-5}{4n+2}\right\}$ ketma-ketlik $a = \frac{1}{2}$ limitga ega ekanligini isbotlang.

$$\blacktriangleright\ |x_n - a| = \left|\frac{2n-5}{4n+2} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{-12}{2(4n+2)}\right| = \frac{3}{2n+1} < \varepsilon$$

Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun $|x_n - a| < \varepsilon$ tengsizlik o‘rinli bo‘ladigan N musbat butun sonni topamiz. Buning uchun $\frac{3}{2n+1} < \varepsilon$ tengsizlikni yechamiz: $n > \frac{3-\varepsilon}{2\varepsilon} = \frac{3}{2\varepsilon} - \frac{1}{2}$. U holda N sifatida $N = \left[\frac{3}{2\varepsilon}\right]$ deb olamiz, bu yerda $[c]$ orqali c sonining butun qismi belgilangan. Agar $\varepsilon = 0{,}01$ bo‘lsa, $N = \left[\frac{3}{2\cdot 0{,}01}\right] = 150$. $n > 150$ uchun

$$|x_n - a| = \frac{3}{2n+1} < \frac{3}{2\cdot 150+1} < \frac{3}{300} = \frac{1}{100} = 0{,}01,$$

ya'ni $a = \frac{1}{2}$ soni berilgan ketma-ketlikning limiti bo'lar ekan. ◄

3.13-Ta'rif. Ixtiyoriy $M > 0$ son uchun shunday N natural son topilib, barcha $n > N$ uchun $|x_n| > M$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik cheksiz katta deb ataladi va u $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ ko'rinishda yoziladi.

Agar ixtiyoriy $M > 0$ son uchun shunday N natural son topilib, barcha $n > N$ uchun $x_n > M$ (mos ravishda $x_n < -M$) tengsizlik o'rinli bo'lsa, bu holda ham ketma-ketlik cheksiz katta deb ataladi va u $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ (mos ravishda $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$) ko'rinishda yoziladi.

Agar ketma-ketlik (chekli) limitga ega bo'lsa, uni biz *yaqinlashuvchi,* limitga ega bo'lmasa, *uzoqlashuvchi* ketma-ketlik deb ataymiz.

Quyida muhim ahamiyatga ega bo'lgan tasdiqni isbotsiz keltiramiz.

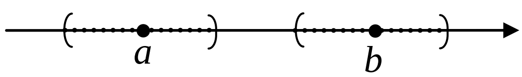
3.1-Lemma. (Kantor) $\sigma_n = [a_n; b_n]$ $\quad n = 1,2,3,\dots$ kesmalar to'plami bir-birining ichiga joylasgtirilgan, ya'ni $\sigma_{n+1} \subset \sigma_n (n = 1,2,3 \dots.)$ bo'lsin va $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0.$ U holda barcha σ_n kesmalarga tegishli bo'lgan yagona nuqta mavjud.

Bu lemma haqiqiy sonlar to'plamining uzluksizlik xossasini yoki son o'qining to'lalik xossasini ifodalaydi.

Yaqinlashuvchi ketma-ketliklarning xossalari.

3.2-Teorema (ketma-ketlik limitining yagonaligi). Yaqinlashuvchi ketma-ketlik yagona limitga ega.

► $\{x_n\}$ ketma-ketlik a limitga ega bo'lsin. Har qanday $b \neq a$ son $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti bo'la olmasligini isbotlaymiz. Buning uchun $\varepsilon > 0$ sonni a va b nuqtalarning $U_\varepsilon(a)$, $U_\varepsilon(b)$ atroflari kesishmaydigan qilib tanlaymiz, masalan $\varepsilon = \frac{|b-a|}{3}$ deb olamiz (3.7-rasm).



3.7-rasm

Shartga ko'ra $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ u holda $(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$ intervaldan tashqarida, xususan $(b-\varepsilon; b+\varepsilon)$ intervalda $\{x_n\}$ ketma-ketlikning chekli sondagi hadlari yotishi mumkin. Shuning uchun b soni $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti bo'la olmaydi.◄

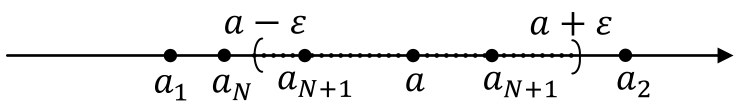
3.14-Ta'rif. Agar ixtiyoriy $M > 0$ son uchun shunday musbat butun N son topilib, barcha $n \geq N$ uchun $x_n > M$ (yoki $x_n < -M$) tengsizlik o'rinli bo'lsa, bu holda ham $\{x_n\}$ ketma-ketlik cheksiz katta deb ataladi.

3.15-Ta'rif. Agar ketma-ketlik qiymatlari to'plami yuqoridan (quyidan) chegaralangan bo'lsa, u holda bu ketma-ketlik yuqoridan (quyidan) chegaralangan deyiladi.

3.16-Ta'rif. Agar ketma-ketlik yuqoridan ham, quyidan ham chegaralangan bo'lsa, u chegaralangan ketma-ketlik deb ataladi.

3.3-Teorema. (Yaqinlashvchi ketma-ketlikning chegaralanganligi) Har qanday yaqinlashuvchi ketma – ketlik chegaralangan, ya'ni ketma – ketlikning hamma hadlari uchun $m \leq x_n \leq M$ tengsizlik o'rinli bo'ladigan m va M sonlari mavjud.

► $\{x_n\}$ ketma – ketlik a limitga ega bo'lsin. Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ sonni olamiz. U holda shunday N natural son topiladiki, $n > N$ bo'ladigan barcha n larda $\{x_n\}$ ketma – ketlikning hadlari $U_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ oraliqga tushadi. Bu oraliqdan tashqarida esa faqat a_1; a_2; ......; a_N hadlar yotadi (3.8-rasm). Ularning soni chekli.



3.8-rasm

Shuning uchun ularning eng chapdagisi a_- va eng o'ngdagisi a^+ mavjud. a_- va $a - \varepsilon$ sonlarning eng kichigini m orqali belgilaymiz.

$$m = min(a_-; a - \varepsilon)$$

M orqali esa a_+ va $a + \varepsilon$ sonlarning kattasini belgilaymiz.

$$M = max(a_+; a + \varepsilon)$$

U holda $[m\,; M]$ kesmada a_1; a_2; ......; a_N nuqtalar, hamda $n \geq N + 1$ tartib raqamli $\{a_n\}$ nuqtalar yotuvchi $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ interval yotadi. Shuning uchun $[m\,; M]$ kesmada $\{x_n\}$ ketma – ketlikning barcha hadlari yotadi. Bu esa uning chegaralanganligini anglatadi. ◄

3.4-Teorema. Agar $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \neq 0$ bo'lsa, biror N tartib raqamidan boshlab ketma – ketlik hadlari ishorasi a limit ishorasi bilan bir xil bo'ladi.

► Umumiylikni buzmasdan $a > 0$ deb faraz qilamiz. $\varepsilon > 0$ sonni $\varepsilon < a$ bo‘ladigan qilib tanlaymiz. $\lim_{n\to\infty} x_n = a \neq 0$ bo‘lganligi uchun biror N tartib raqamidan boshlab $\{x_n\}$ ketma – ketlikning qolgan barcha hadlari $(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$ intervalga tushadi, ya’ni $0 < a-\varepsilon < x_n < a+\varepsilon$ Bu tengsizliklar esa $\{x_n\}$ ketma – ketlikning N dan keyingi hadalari musbat, ya’ni a lmitning ishorasi bilan bir xil ekanligini anglatadi.◄

Natija. Agar $\lim_{n\to\infty} x_n = a, \lim_{n\to\infty} y_n = b$ va $a < b$ bo‘lsa, u holda biror N tartib raqamidan boshlab $x_n < y_n$ tengsizlik o‘rinli bo‘ladi.

3.5-Teorema. Agar $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma – ketliklar yaqinlashuvchi va $\lim_{n\to\infty} x_n = a,$ $\lim_{n\to\infty} y_n = b$ bo‘lsa, $\{x_n + y_n\}$ ketma – ketlik ham yaqinlashuvchi bo‘ladi va

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n = a + b \qquad (3.1)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

► $\lim_{n\to\infty} x_n = a, \lim_{n\to\infty} y_n = b$ bo‘lsin. U holda ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday N_1 tartib raqam tanlanadiki, bunda $n > N_1$ bo‘lganda

$$|x_n - a| < \varepsilon/2 \qquad (3.2)$$

bo‘ladi. Xuddi shu singari shunday N_2 tartib raqam tanlanadiki bunda $n > N_2$ bo‘lganda

$$|y_n - b| < \varepsilon/2 \qquad (3.3)$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. $N = \max\{N_1; N_2\}$ deb olamiz. U holda $n > N$ bo‘lganida (2.2), (2.3) tengsizliklar o‘rinli bo‘ladi. Shuning uchun $n > N$ bo‘lganida

$$|(x_n + y_n) - (a + b)| = |(x_n - a) + (y_n - b)| \leq$$
$$\leq |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

bundan esa limitning ta’rifiga ko‘ra (2.1) tenglikning o‘rinli ekanligini anglatadi.◄
Xuddi shu singari mulohaza yuritib quyidagi tasdiqlarni isbotlash mumkin.

3.6-Teorema. Agar $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma – ketliklar yaqinlashuvchi bo‘lsa, $\{x_n - yn$ ketma – ketlik ham yaqinlashuvchi va lim$n\to\infty(xn-yn)=$lim$n\to\infty xn-$lim $n\to\infty yn$ tenglik o‘rinli bo‘ladi.

3.7-Teorema. Agar $\{x_n\}$ ketma – ketlik yaqinlashuvchi bo‘lsa, $\{c\cdot x_n\}$ ketma – ketlik ham yaqinlashuvchi hamda $\lim\limits_{n\to\infty} c\cdot x_n = c\cdot \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ tenglik o‘rinli bo‘ladi.

3.8-Teorema. Agar $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma – ketliklar yaqinlashuvchi bo‘lsa, $(x_n\cdot y_n)$ ketma – ketlik ham yaqinlashuvchiva $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n\cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n$ tenglik o‘rinli bo‘ladi.

3.9-Teorema. Agar $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma – ketliklar yaqinlashuvchi, hamda ixtiyoriy n uchun $y_n\neq 0$ va $\lim\limits_{n\to\infty} y_n\neq 0$ bo‘lsa, u holda $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ ketma – ketlik ham yaqinlashuvchi va $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right)=\frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$ tenglik o‘rinli bo‘ladi.

► $\{y_n\}$ ketma – ketlik yaqinlashuvchi bo‘lganligi uchun u chegaralangan ham bo‘ladi. Shuning uchun shunday N_0 tartib raqami mavjudki, $n>N_0$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha n natural sonlarda ketma-ketlikning hadlari uchun $m\leq |y_n|\leq M$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi m, M sonlar mavjud bo‘ladi. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b, b\neq 0$ bo‘lsin. U holda ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son uchun shunday N_1 tartib raqam tanlanadiki, bunda $n>N_1$ bo‘lganda

$$|x_n-a|<m\varepsilon/2 \tag{3.4}$$

bo‘ladi. Xuddi shu singari shunday N_2 tartib raqam tanlanadiki bunda $n>N_2$ bo‘lganda

$$|y_n-b|<\varepsilon/2{:}\,(|a|/|b|m) \tag{3.5}$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. $N=\max\{N_0;\ N_1;N_2\}$ deb olamiz. U holda $n>N$ bo‘lganida (3.4), (3.5) tengsizliklar o‘rinli bo‘ladi. Shuning uchun $n>N$ bo‘lganida

$$\left|\frac{x_n}{y_n}-\frac{a}{b}\right| = \left|\frac{bx_n-ay_n}{by_n}\right| = \left|\frac{bx_n-ab+ab-ay_n}{by_n}\right| = \left|\frac{b(x_n-a)+a(b-y_n)}{by_n}\right| \leq$$

$$\leq \frac{|x_n-a|}{|y_n|}+\frac{|a|}{|by_n|}|y_n-b| \leq \frac{|x_n-a|}{m}+\frac{|a|}{|b|m}|y_n-b| \leq$$

$$\leq \frac{m\varepsilon}{2}\frac{1}{m}+\frac{|a|}{|b|m}\frac{\varepsilon}{2}:\frac{|a|}{|b|m} = \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Limitning ta’rifiga ko‘ra bu hosil qilingan tengsizlik $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right)=\frac{\lim_{n\to\infty}x_n}{\lim_{n\to\infty}y_n}$ tenglining o‘rinli ekanligini anglatadi.◄

Qismiy ketma-ketliklar. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik berilgan va uning ayrim x_{n_k} hadlaridan tartib raqamlari o‘sib borish tartibida ($k>k'$ ekanligidan $n_k>n_{k'}$ kelib chiqadi va aksincha) tuzilgan yangi $\{x_{n_k}\}$ ketma-ketlik $\{x_n\}$ ketma-ketlikning qismiy ketma-ketligi deb ataladi.

$\{x_{n_k}\}$ qismiy ketma-ketlikda k bu ketma-ketlik hadining tartib raqami bo‘ladi, n_k esa uning dastlabki ketma-ketlikdagi tartib raqami bo‘ladi. Barcha $k=1,2,...$ natural sonlarda $n_k>k$ ekanligi ravshan, shuning uchun $\lim_{k\to\infty}n_k=+\infty$ bo‘ladi.

Yuqorida agar ketma-ketlik chegaralangan bo‘lsa, u yaqinlashuvchi ekanligini ko‘rsatgan edik. Aksincha albatta o‘rinli emas. Masalan, $x_n=(-1)^n, n=1,2,...$, ketma-ketlik chegaralangan, ammo u limitga ega emas. Shuning bilan birga chegaralangan ketma-ketliklarning shunday muhim bir xossasi borki, u quyidagi teoremada keltirilgan.

3.10-Teorema (Bolsano-Veyyershtrass). Har qanady chegaralangan ketma-ketlikdan yaqinlashuvchi qismiy ketma-ketlik tuzish mumkin.

► $\{x_n\}$ ketma-ketlik chegaralangan bo‘lsin, ya’ni $m\le x_n\le M, n=1,2,...$, tengsizlikni qanoatlantiradigan m,M sonlar topiladi.

$[m,M]$ kesmani $(m+M)/2$ nuqta yordamida ikkita har xil kesmaga ajratamiz. U holda bu kesmalardan kamida bittasida $\{x_n\}$ ketma-ketlikning cheksiz ko‘p hadlari yotadi va biz uni $[m_1,M_1]$ orqali belgilaymiz. Ketma-ketlikning $[m_1,M_1]$ kesmada yotgan ixtiyoriy bitta hadini tanlaymiz. Uning tartib raqami n_1 bo‘lsin:

$$x_{n_1}\in[m_1,M_1],\quad M_1-m_1=(M-m)/2 \tag{3.6}$$

Yuqoridagi singari $[m_1,M_1]$ kesmani ham ikkita har xil kesmaga ajratamiz, ulardan kamida bittasida ketma-ketlikning cheksiz ko‘p hadlari yotadi va biz uni $[m_2,M_2]$ orqali belgilaymiz. $[m_2,M_2]$ kesmada ketma-ketlikning cheksiz ko‘p hadlari yotganligi uchun, ular orasida tartb raqami n_1 natural sondan katta bo‘lganlari ham bor. Ulardan birini tanlaymiz. Agar uning tartib raqami n_2 bo‘lsa, u holda

$$x_{n_2} \in [m_2, M_2] \subset [m_1, M_1],\ n_2 > n_1 \tag{3.7}$$

$$M_2 - m_2 = \frac{M_1 - m_1}{2} = (M - m)/2^2 \tag{3.8}$$

Bu jarayonni davom ettirib, $\{x_n\}$ ketma-ketlikning shunday $\{x_{n_k}\}$ qismiy ketma-ketligini hosil qilamizki, uning uchun

$$m_k \leq x_k \leq M_k \tag{3.9}$$

$$[m_k, M_k] \subset [m_{k-1}, M_{k-1}] \tag{3.10}$$

$$M_k - m_k = (M - m)/2^k,\ k = 1,2, \ldots, \tag{3.11}$$

$$\lim_{k\to\infty}(M_k - m_k) = \lim_{k\to\infty}\frac{M - m}{2^k} = 0$$

shartlar o‘rinli bo‘ladi. Biz uzunliklari nolga intiluvchi biri-birining ichiga joylashgan $[m_k, M_k], k = 1,2, \ldots,$ kesmalar ketma-ketligini hosil qildik. Kantor lemmasiga ko‘ra bu kesmalar ketma-ketligining barchasiga tegishli bo‘lgan yagona ξ nuqta mavjud bo‘ladi va $\lim\limits_{k\to\infty} m_k = \lim\limits_{k\to\infty} M_k = \xi$ munosabat o‘rinli bo‘ladi. (3.9) tengsizlikga ko‘ra

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \xi.$$

Bu esa $\{x_{n_k}\}$ qismiy ketma-ketlikning yaqinlashuvchi ekanligidan dalolat beradi.◄

3.17-Ta’rif. Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday N tartib raqami topilib, $n > N, m > N$ tengsizliklarni qanoatlantiruvchi barcha n, m tartib raqamlari uchun

$$|x_n - x_m| < \varepsilon \tag{3.12}$$

tengsizlik o‘runli bo‘lsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik fundamental ketma-ketlik deb ataladi.

Bu shart Koshi sharti deb ataladi.

3.2-Lemma. Agar fundamental ketma-ketlikning biror qismiy ketma-ketligi yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda uning limiti asosiy ketma-ketlikning ham limiti bo‘ladi.

► $\{x_n\}$ ketma-ketlik fundamental, $\{x_{n_k}\}$ esa uning qismiy ketma-ketligi va

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = a \tag{3.13}$$

bo‘lsin. Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ sonni olamiz. Koshi shartiga ko‘ra shunsay bir N tartib raqami topiladdiki, $n, m > N$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha n, m natural sonlarda

$$|x_n - x_m| < \varepsilon/2 \tag{3.14}$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. k_0 tartib raqamini barcha $k > k_0$ uchun

$$n_k > N$$

bo‘ladigan qilib tanalymiz ($\lim_{k\to\infty} n_k = +\infty$ bo‘lganligi uchun bunday k_0 tartib raqamini tanlash mumkin). U holda barcha $n > N$ va $k > k_0$ uchun

$$|x_n - x_{n_k}| < \varepsilon/2$$

tengsizlik orinli bo‘ladi. Bu yerda $k \to \infty$ deb limitga o‘tamiz, (3.13) tenglikni inobatga olsak, barcha $n > N$ uchun

$$|x_n - a| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. Bu esa $\lim_{k\to\infty} x_n = a$ degan ma’noni anglatadi.◄

Quyidagi teorema ketma-ketlik limitining mavjudligi uchun zaririy va yetarli shartni beradi.

3.11-Teorema (Koshi kriteriyasi). $\{x_n\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo‘lishligi uchun u Koshi shartini qanoatlantirishi zarur va yetarli.

► **Zarurligi.** $\{x_n\}$ ketma-ketlik chekli a limitga ega bo‘lsin. U holda limitning ta’rifiga ko‘ra ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday N tartib raqami topiladiki, $n > N, m > N$ tengsizliklarni qanoatlantiruvchi barcha n, m tartib raqamlari uchun

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

tengsizliklar o‘rinli bo‘ladi. U holda

$$|x_n - x_m| = |(x_n - a) + (a - x_m)| \leq |x_n - a| + |x_m - a| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Bu esa shartning zarurligini ko‘rsaradi.

Yetarliligi. Dastlab agar ketma-ketlik Koshi shartini qanoatlantirsa, ya’ni u fundamental bo‘lsa, uning chegaralangan ekanligini ko‘rsatamiz. Koshi shartiga ko‘ra shunday N tartib raqami topiladiki, barcha $n, m > N$ uchun

$$|x_n - x_m| < 1 \qquad (3.15)$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi ($\varepsilon = 1$ deb olindi). Bu yerda $m = N + 1$ deb olsak, (3.15) tengsizlik $|x_n - x_{N+1}| < 1$ ko‘rinishni oladi. Bundan esa

$$x_{N+1} - 1 < x_n < x_{N+1} + 1, n = N + 1, N + 2, \ldots,$$

ya'ni $\{x_n\}$ ketma-ketlikning dastlabki N hadini tashlab yuborishdan hosil bo'lgan ketma-ketlik chegaralangan ekan. Shuning uchun $\{x_n\}$ ketma-ketlikning o'zi ham chegaralangan.

Shunday qilib $\{x_n\}$ chegaralangan ketma-ketlik ekan. Shuning uchun Bolsano-Veyyershtras teoremasiga ko'ra $\{x_n\}$ ketma-ketlikdan yaqinlashuvchi qismiy ketma-ketlik ajratib olish mumkin. U holda 3.2-Lemmaga ko'ra ajratib olingan qismiy ketma-ketlikning limitiga berilgan $\{x_n\}$ ketma-ketlik ham yaqinlashadi.◄

Monoton ketma – ketliklar. $\{x_n\}$ ketma – ketlik berilgan bo'lsin.

3.18-Ta'if. Agar $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \dots . \leq x_n \leq x_{n+1} \leq \cdots$ o'rinli bo'lsa. $\{x_n\}$ kamaymaydian ketma-ketlik deb ataladi. Agar $x_1 < x_2 < x_3 \dots . < x_n < x_{n+1} < \cdots$ o'rinli bo'lsa, $\{x_n\}$ qat'iy o'suvchi ketma-ketlik deb ataladi.

3.19-Ta'if. Agar $x_1 \geq x_2 \geq x_3 \dots . \geq x_n \geq x_{n+1} \geq \cdots$ o'rinli bo'lsa. $\{x_n\}$ o'smaydigan ketma-ketlik deb ataladi. Agar $x_1 > x_2 > x_3 \dots . > x_n > x_{n+1} > \cdots$ o'rinli bo'lsa, $\{x_n\}$ qat'iy kamayuvchi ketma-ketlik deb ataladi.

O'smaydigan va kamaymaydigan ketma – ketliklar monoton ketma ketliklar deb ataladi.

Monoton o'suvchi ketma- ketliklar o'zining birinchi hadi bilan quyidan chegaralangan, monoton kamayuvchi ketma ketliklar esa o'zining birinchi hadi bilan yuqoridan chegaralangan bo'ladi.

Agar kamayadigan ketma –ketlik yuqordan chegaralangan bo'lsa, ya'ni shunday M soni topilib, bunda ixtiyoriy n sonda $x_n < M$ bo'lsa, u holda $\{x_n\}$ chegaralangan bo'ladi.

Haqiqatan ham bu holda ketma-ketlik hadlari $[x_1, M]$ kesmada yotadi. Agar o'smaydigan ketma-ketlik quyidan chegaralangan bo'lsa, ya'ni shunday m soni topilib ketma-ketlikning barcha hadlari uchun $x_n \geq m$ bo'lsa, u holda $\{x_n\}$ ketma-ketlik chegaralangan bo'ladi.

3.12-Teorema. Har qanday monoton chegaralangan ketma-ketlik limitga ega.

► $\{x_n\}$ ketma-ketlik chegaralangan bo'lgani uchun uning hadlari to'plami aniq quyi va aniq yuqori chegaraga ega bo'ladi. M soni $\{x_n\}$ ketma-ketlik hadlari to'plamining aniq yuqori chegarasi bo‘lsin. Agar $\{x_n\}$ kamaymaydigan ketma-ketlik bo‘lsa, u holda $\lim_{n\to\infty} x_n = M$ ekanligini ko‘rsatamiz.

Aniq yuqori chegara ta’rifidan, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday x_n element topilib, bu element uchun $x_n > M - \varepsilon$ va $a_n < M$ tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. Bu ikki tengsizlikdan $0 \le M - X_n < \varepsilon$ quyi twngsizlik hosil bo‘ladi. $\{x_n\}$ kamaymaydigan ketma-ketlik bo‘lgani uchun ixtiyoriy $n \ge N$ uchun $0 \le M - X_n \le M - X_n$ o‘rinli bo‘ladi. Bundan esa $0 \le M - X_n < \varepsilon$ yoki ixtiyoriy $n > N$ uchun $|M - X_n| < \varepsilon$ tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. Bu esa M soni $\{x_n\}$ ketma-ketlik limiti ekanligidan dalolat beradi.

Agar $\{x_n\}$ o‘smaydigan chegaralangan ketma-ketlik va m ketma-ketlik elementlari to‘plamining aniq quyi chegarasi bo‘lsa, u holda $\lim_{n\to\infty} x_n = m$ ekanligi xuddi shu singari isbotlanadi.◄

Mulohaza. Monotonlik ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo‘lishligi uchun zaruriy shart emas. Masalan, monoton bo‘lmagan $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi: $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$

***e* soni.** Dastlab matematik induksiya metodoga asoslanib ixtiyoriy $n \in N$ va $n > -1$ uchun Bernulli nomi bilan yuritiluvchi

$$(1+h)^n \ge 1 + n \cdot h \tag{3.15}$$

tengsizlikni isbotlaymiz.

Bu tengsizlik $n = 1$ uchun o‘rinli. Faraz qilaylik, tengsizlik biror $n = m > 1$ uchun isbotlangan ya’ni $(1+h)^m \ge 1 + m \cdot h$ tengsizlik o‘rinli bo‘lsin va u $n = m + 1$ uchun ham o‘rinli ekanligini ko‘rsatamiz. So‘nggi tengsizlikning ikkala tomonini $1 + h > 0$ songa ko‘paytiramiz.

$$(1+h)^{m+1} \ge (1+mh)(1+h) = 1 + (m+1)h + mh^2$$

O‘ng tomondagi ifodada manfiy bo‘lmagan mh^2 hadni tashlab yuborsak, $(1+h)^{m+1} \ge 1 + (m+1)h$ tengsizlikka ega bo‘lamiz, ya’ni tengsizlik $n = m + 1$ uchun ham o‘rinli ekan. Shunning uchun matematik induksiya prinsipiga asosan (3.15) tengsizlik ixtiyoriy natural n soni uchun o‘rinli.

Endi $\{x_n\} = \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ ketma – ketlikni qaraymiz. Bernulli tengsizligiga asosan $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 1 + n\cdot\frac{1}{n} = 2.$ Berilgan $\{x_n\}$ ketma-ketlikdan boshqa $y_n = x_n\left(1+\frac{1}{n}\right) > 2$ ketma – ketlikni tuzamiz. U holda y_n ketma – ketlik uchun

$y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ va bundan $\frac{y_n}{y_{n+1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} : \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2} = \frac{(n+1)^{2n+3}}{n^{n+1}\cdot(n+2)^{n+2}} =$

$\frac{n}{n+1}\left[\frac{(n+1)^2}{(n+1)^2-1}\right]^{n+2} = \frac{n}{n+1}\left[1+\frac{1}{(n+1)^2-1}\right]^{n+2}$

O‘ng tomondan ikkinchi ko‘paytuvchiga Bernulli tengsizligini qo‘llaymiz

$$\left[1+\frac{1}{(n+1)^2-1}\right]^{n+2} \geq 1+\frac{n+2}{(n+1)^2-1} = 1+\frac{n+2}{(n)^2+2n} = 1+\frac{1}{n}$$

U holda $\frac{y_n}{y_{n+1}} \geq \frac{n}{n+1}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{n}{n+1}\cdot\frac{n+1}{n} = 1$ ya’ni $y_n \geq y_{n+1}$.

Shunday qilib y_n o‘smaydigan ketma- ketlik va u quyidan 2 bilan chegaralandan shuning uchun u limitga ega. U holda $\{x_n\}$ ketma-ketlik ham lmitga ega va $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{y_n}{1+\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Bu limitni biz e orqli belgilaymiz va uning qiymati

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2{,}7182818459\ ....$$

ko‘rinishida bo‘ladi.

3.4. Kompleks sonlar va ular ustida amallar.

Kompleks son tushunchasi. Kompleks sonning algebraik shakli.

3.20-Ta’rif. Kompleks son deb,

$$z = x + iy \tag{3.16}$$

ko‘rinishdagi ifodaga aytamiz, bu yerda x va y haqiqiy sonlar bo‘lib, ular z kompleks sonning mos ravishda haqiqiy va mavhum qismi deb ataladi va ular

$$x = \mathrm{Re}x,\ \ y = \mathrm{Im}z$$

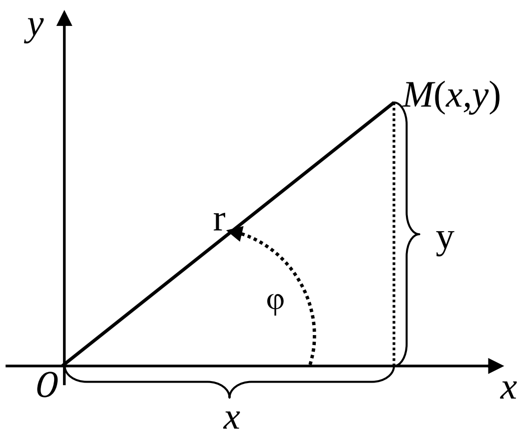
ko‘rinishda belgilanadi, i esa $i^2 = -1$ xossaga ega bo‘lgan mavhum bir deb ataladi. $z = x + i0$ ko‘rinishdagi kompleks sonni x haqiqiy son bilan bir deb hisoblanadi.

Kompleks sonning algebraik, trigonomentrik va ko‘rsatkichli shakllari mavjud. (3.16) tenglik bilan ifodalangan shakl, kompleks sonning algebraik shakli deb yuritiladi.

Dekart koordinatalar sistemasida $z = x + iy$ kompleks sonni geometrik jihatdan $M(x, y)$ nuqta sifatida, yoki $O(0,0)$ koordinatalar boshini $M(x, y)$ nuqta bilan tutashtiruvchi vektor sifatida, yoki proyeksiyalari (x, y) bo‘lgan $\bar{r}$ radius vektor sifatida talqin qilish mumkin (3.9-rasm).

Kompleks son tasvirlanadigan tekislik (Z) kompleks tekislik deb ataladi.

Agar kompleks son $z = x + i0$ ko‘rinishda, ya’ni u haqiqiy sondan iborat bo‘lsa, u holda unga mos keluvchi nuqta Ox o‘qda yotadi, shuning uchun abssissalar o‘qi haqiqiy o‘q deb ataladi. Sof mavhum $z = iy$ kompleks son Oy o‘qda tasvirlanadi, shuning uchun ham ordinatalar o‘qi mavhum o‘q deb ataladi.



3.9-rasm

Algebraik shakldagi kompleks sonlar ustida amallar. Agar ikkita $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ kompleks sonlar uchun $x_1 = y_1, x_2 = y_2$ tengliklar o‘rinli bo‘lsa, ularni biz teng kompleks sonlar deb ataymiz: $z_1 = z_2$.

Ikkita $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$ kompleks sonlarning yig‘indisi, ayirmasi, ko‘paytmasdi va nisbati quyidagicha aniqlanadi:

1. $z_1 \pm z_2 = (x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$

2. $z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$

3. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + i(x_2y_1 - x_1y_2)}{{x_2}^2 + {y_2}^2} =$

$= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{{x_2}^2 + {y_2}^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{{x_2}^2 + {y_2}^2}.$

Kompleks sonlarni qo‘shish va ko‘paytirish amallari quyidagi xossalarga ega:

1. Kommutativlik

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1; \quad z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$$

2. Assotsiativlik

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3);$$

$$(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3);$$

3. Distributivlik

$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$$

i mavhum birni darajaga ko‘targanda, quyidagi qiymatlarni qo‘yish kerak: $i^2 = -1;\ i^3 = -i;\ i^4 = 1;\ i^5 = i;\ i^6 = -1;\ i^7 = -i$ va hokazo.

$\bar{z} = x - iy$ kompleks son $z = x + iy$ kompleks songa qo‘shma deb ataladi. Qo‘shma kompleks sonlar uchun ayrim xossalarini ko‘rsatib o‘taylik:

$z + \bar{z} = (x + iy) + (x - iy) = 2x;\ \ z \cdot \bar{z} = (x + iy) \cdot (x - iy) = x^2 + y^2$

$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2};\ \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2};$

$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

3.5- Misol. Ko‘rsatilgan amallarni bajaring:

$$1.\,(2 + 4i)(4 - i);\ \ 2.\,\frac{\sqrt{3} - i}{3 + i\sqrt{3}};\ \ 3.\,\left(2 - \sqrt{3}i\right)\left(\sqrt{3} + i\right) + \frac{2 - \sqrt{3}i}{3\sqrt{3} + i}.$$

► $1.\,(2 + 4i)(4 - i) = 6|7i - 3i^2 = 9 + 7i, (i^2 = -1).$

$$2.\,\frac{\sqrt{3} - i}{3 + i\sqrt{3}} = \frac{\left(\sqrt{3} - i\right)\left(3 - i\sqrt{3}\right)}{\left(3 + i\sqrt{3}\right)\left(3 - i\sqrt{3}\right)} = \frac{3\sqrt{3} - 6i + i^2\sqrt{3}}{9 + 3} = \frac{2\sqrt{3} - 6i}{12} = \frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{i}{2}.$$

$$3.\,\left(2 - \sqrt{3}i\right)\left(\sqrt{3} + i\right) + \frac{2 - \sqrt{3}i}{3\sqrt{3} + i} = 3\sqrt{3} - i + \frac{2 - \sqrt{3}i}{3\sqrt{3} + i}$$

$$= 3\sqrt{3} - i + \frac{\left(2 - \sqrt{3}i\right)\left(3\sqrt{3} - i\right)}{\left(3\sqrt{3} + i\right)\left(3\sqrt{3} - i\right)} =$$

$$= 3\sqrt{3} - i + \frac{6\sqrt{3} - 2i - 9i + \sqrt{3}i^2}{27 + 1} = 3\sqrt{3} - i + \frac{5\sqrt{3} - 11i}{28}$$

$$= \frac{84\sqrt{3} - 28i + 5\sqrt{3} - 11i}{28} = \frac{89\sqrt{3}}{28} - \frac{39}{28}i.$$

Kompleks sonning trigonometrik va ko‘rsatkichli shakli. z kompleks songa mos keluvchi $\bar{r}$ radius-vektor uzunligi kompleks sonning moduli deb ataladi va

$$\left|\overrightarrow{OM}\right| = r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{3.17}$$

formula bilan hisoblanadi. $\overrightarrow{OM}$ vektor va Oxo‘qning musbat yo‘nalishi orasidagi φ burchak z kompleks sonning argumenti deyiladi va Arg z ko‘rinishda belgilanadi, ya’ni $\varphi = \operatorname{Arg} z$. Bunda φ burchak soat strelkasi harakatiga qarama-qarshi yo‘nalishda hisoblansa musbat deb olinadi, aks holda, ya’ni soat strelkasi yo‘nalishida hisoblansa manfiy deb olinadi. Argyment bir qiymatli aniqlanmaydi, 2π ga karrali bo‘lgan qo‘shiluvchi aniqligida aniqlanadi:

$$\operatorname{Arg}z = \arg z + 2k\pi,$$

bu yerda $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ va argz bosh qiymat bo‘lib, u quyidagi shartlarda aniqlanadi:

$$-\pi < \arg z \le \pi \ \text{ yoki } 0 \le \arg z < 2\pi$$

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}(y/x), & x > 0, \\ \pi + \operatorname{arctg}(y/x), & x < 0, y \ge 0, \\ -\pi + \operatorname{arctg}(y/x), & x < 0, y < 0, \\ \pi/2, & x = 0, y > 0, \\ -\pi/2, & x = 0, y < 0. \end{cases} \tag{3.18}$$

3.6-rasmdan ko‘rinib turibdiki

$$x = r\cos\varphi\,; y = r\sin\varphi.$$

Shuning uchun $z = x + iy$ kompleks sonning trigonometrik shakli

$$z = r\cos\varphi + ir\sin\varphi \ \text{ yoki } \ z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \tag{3.19}$$

ko‘rinishni oladi, bu yerda r kompleks sonning moduli, φ esa argumentning bosh qiymati bo‘lib, u $\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$ tenglikni qanoatlantiradi.

Algebraik shakldan trigonometrik shaklga o‘tish

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \ \text{ va } \ \cos\varphi = x/r, \sin\varphi = y/r \tag{3.20}$$

formulalar orqali amalga oshiriladi.

3.6-Misol. Ushbu kompleks sonning moduli va argumentini toping

$$z = -\sin\frac{\pi}{8} - i\cos\frac{\pi}{8}.$$

► Haqiqiy va mavhum qismi uchun

$$x = -\sin\frac{\pi}{8} < 0, \qquad y = -\cos\frac{\pi}{8} < 0.$$

(3.18) formulaga ko‘ra argumentning bosh qiymati

$$\arg z = -\pi + \mathrm{arctg}\,\left(\mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{8}\right) = -\pi + \mathrm{arctg}\,\left[tg\,\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right)\right] = -\pi + \mathrm{arctg}\,\left(\mathrm{tg}\,\frac{3\pi}{8}\right)$$
$$= -\pi + \frac{3\pi}{8} = -\frac{5\pi}{8}$$

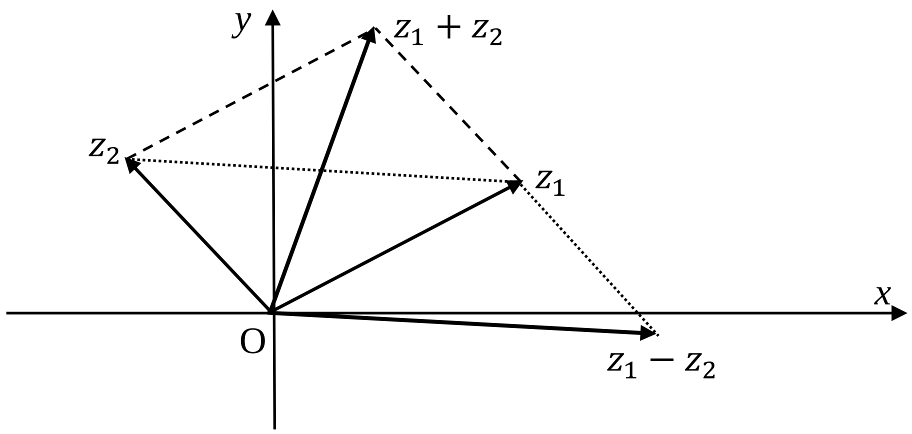
bo‘lganligi uchun

$$\mathrm{Arg}\, z = -\frac{5\pi}{8} + 2k\pi, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots;$$
$$|z| = \sqrt{\sin^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{\pi}{8}} = 1. \quad \blacktriangleleft$$

Yuqorida keltirilgan kompleks sonlar va vektorlar orasidagi moslik kompleks sonlarni qo‘shish va ayirish amallarini geometrik talqin qilish imkonini beradi (3.10-rasmda z_1 va z_2 kompleks sonlarning yig‘indisi va ayirmasi tasvirlangan).

Kompleks sonlar ustida qo‘shish va ayirish amallari uchun quyidagi tengsizliklar bajarilishini osongina ko‘rsatish mumkin:

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2| \\ |z_1 - z_2| \ge |z_1| - |z_2| \end{aligned} \tag{3.21}$$



3.10-rasm

Kompleks sonlar uchun muhim formulani keltiramiz:

$$\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi} \tag{3.22}$$

(3.22) formula Eyler formulasi deb yuritiladi. Bu formulaning ma’nosini va isbotini keyinroq beramiz. U holda (3.19) formulaga (3.22) formulani qo‘llasak

$$z = re^{i\varphi} \tag{3.23}$$

kompleks sonning ko‘rsatkichli shaklini hosil qildik.

Kompleks sonning trigonometrik va ko‘rsatkichli shakllari kompleks sonlar ustida ko‘paytirish va bo‘lish amallarini bajarishga juda qulay. Agar $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ va $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$ bo‘lsa, u holda

$$r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_2+\varphi_2)}. \tag{3.24}$$

(3.24) tenglikni osongina isbotlash mumkin:

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$
$$= r_1 r_2[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i\,(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_2\cos\varphi_1)] =$$
$$= r_1 r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)) = r_1 r_2 e^{i(\varphi_2+\varphi_2)}.$$

Shunday qilib kompleks sonlar ko‘paytirilganda ularning modullari ham ko‘paytiriladi, argumentlari esa qo‘shilar ekan:

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|,\ \arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2. \tag{3.25}$$

Agar $r_2 \neq 0$ bo‘lsa, xuddi shu singari kompleks sonlarning nisbati uchun

$$\frac{z_1}{z_1} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} \tag{3.26}$$

tenglikni hosil qilish mumkin. (3.26) tenglikdan ko‘rinib turibdiki

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},\qquad \arg\frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2 \tag{3.27}$$

z kompleks sonni n natural darajaga ko‘tarish amalini kiritamiz:

$$z^n = \underbrace{z \cdot \ldots \cdot z}_{n\ \text{marta}}.$$

(3.24) formulaga ko‘ra $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ kompleks sonni n darajaga ko‘tarish

$$z^n = \left(r\, e^{i\varphi}\right)^n = r^n e^{in\varphi} = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \tag{3.28}$$

qoidaga ko‘ra amalga oshiriladi. So‘ngi tenglikda $r = 1$ bo‘lsa

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi \qquad 3.29)$$

Muavr formulasini hosil qilamiz.

Kompleks sondan ildiz chiqarish amali quyidagicha amalga oshiriladi. Agar

$$w^n = z \tag{3.30}$$

tenglik o‘rinli bo‘lsa, w kompleks soni z kompleks sonnning n darajali ildizi deb ataladi va u $w = \sqrt[n]{z}$ ko‘rinishda belgilanadi.

Ixtiyoriy $z \neq 0$ uchun $\sqrt[n]{z}$ ildiz n turli qiymat qabul qilishini ko‘rsatamiz. (3.30) formulaga $z = r\, e^{i\varphi},\ w = \rho\, e^{i\theta}$ ifodalarni qoyib

$$\rho^n e^{in\theta} = r\, e^{i\varphi} \tag{3.31}$$

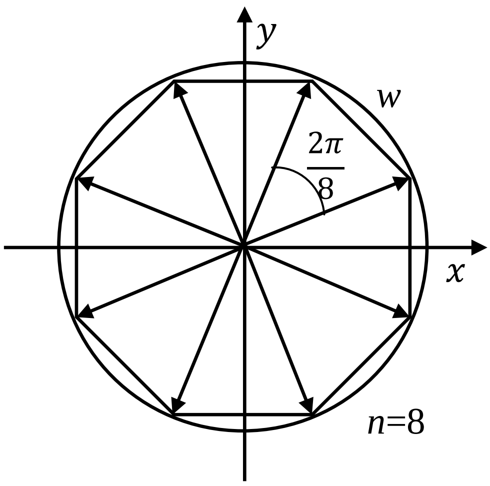
tenglikka ega bo‘lamiz. Ikkita kompleks sonning tengligidan, ular modullarining tengligi, argumentlari esa teng bo‘lishi yoki bir biridan 2π ga karrali bo‘lgan qo‘shiluvchi bilan farq qilishi kelib chiqadi. Shuning uchun (3.31) munosbatdan

$$\rho^n = r, \qquad n\theta = \varphi + 2k\pi$$

yoki

$$\rho = \sqrt[n]{r},\ \ \theta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \tag{3.32}$$

formulani hosil qildik. (3.32) formuladagi birinchi tenglikdan z kompleks sonnning n darajali ildizlarining barchasi bir xil modulga ega ekanligini, ikkinchi tenglikdan esa argumentlari bir-biridan $\frac{2\pi}{n}$ ga karrali bo‘lgan qo‘shiluvchi bilan farq qilishini ko‘rish mumkin. Bundan esa $z \neq 0$ kompleks sonning n darajali ildizlarining turli qiymatlariga mos keluvchi nuqtalar markazi $w = 0$ nuqtada va radiusi $\sqrt[n]{|z|}$ bo‘lgan aylanaga ichki chizilgan n burchak uchlarida yotishi kelib chiqadi (3.11-rasm).



3.11-rasm

(3.32) formulada k soniga $0,1,\dots,n-1$ qiymatlarni berib

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}(\cos(\varphi + 2k\pi)/n + i\sin(\varphi + 2k\pi)/n),\ \ k = 0,1,\dots,n-1, \tag{3.33}$$

yoki

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\varphi + 2k\pi}{n}},\ \ k = 0,1,\dots,n-1 \tag{3.34}$$

n turli kompleks sonlarni hosil qilamiz.

3.7-Misol. $\sqrt[3]{i}$ ildizning barcha qiymatlarini toping (3.12-rasm).

► $z = i$ kompleks sonni ko‘rsatkichli shaklda yozamiz

$$z = i = e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

(3.34) formulaga asosan

$w_k = e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi k}{3}\right)},\ k = 0,1,2.$

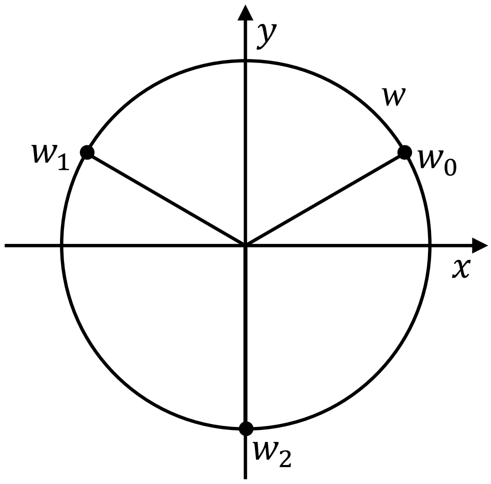
Bu yerdan

$$w_0 = e^{i\frac{\pi}{6}} = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+i}{2},$$

$$w_1 = e^{i\frac{5\pi}{6}} = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} =$$

$$= \frac{-\sqrt{3}+i}{2},$$

$$w_0 = e^{i\frac{3\pi}{2}} = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i \quad ◄$$



3.12-rasm

Kompleks sonlar ketma-ketligining limiti. $\{z_n\}$ kompleks sonlar ketma-ketligi berilgan bo‘lsin.

3.21-Ta’rif. Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $N = N(\varepsilon)$ tartib raqami topilib, $n \geq N$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha n natural sonlarda

$$|z_n - z| < \varepsilon$$

tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, z kompleks soni $\{z_n\}$ ketma-ketlikning limiti deyiladi va u

$$z = \lim_{n\to\infty} z_n \text{ yoki } \quad z_n \underset{n\to\infty}{\to} \infty \qquad (3.35)$$

ko‘rinishda yoziladi. z limitga ega bo‘lgan $\{z_n\}$ ketma-ketlik z soniga intiladi deb aytiladi.

$\{z_n\}$ ketma-ketlikning har bir $z_n = x_n + i\,y_n$ hadi bir juft x_n va y_n haqiqy sonlar bilan aniqlanadi. Shuning uchun $\{z_n\}$ kompleks sonlar ketma-ketligiga bu ketma-ketlik z_n hadlarining haqiqiy va mavhum qismlaridan tuzilgan ikkita $\{x_n\}, \{y_n\}$ haqiqiy sonlar ketma-ketligi mos keladi.

3.13-Teorema. $\{z_n\}$ kompleks sonlar ketma-ketligi yaqinlashuvchi bo‘lishligi uchun, $\{x_n\}, \{y_n\}$ haqiqiy sonlar ketma-ketligining ikkalasi ham bir vaqtda yaqinlashuvchi bo‘lishligi zarur va yetarli.

► **Zarurligi.** $\{z_n\}$ ketma-ketlik z soniga intilsin. U holda ta’rifga ko‘ra ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday N tartib raqami topiladiki, $n \geq N$ shartni qanoatlantiruvchi barcha n natural sonlarda $|z_n - z| < \varepsilon$ tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. Ma’lumki

$$|z_n - z| = |(x_n + i\,y_n) - i(x + i\,y)| = |(x_n - x) + i\,(y_n - y)| \geq |x_n - x|,$$

$$|z_n - z| = |(x_n + i\, y_n) - i(x + i\, y)| = |(x_n - x) + i\,(y_n - y)| \geq |y_n - y|.$$

Shuning uchun $n \geq N$ shartni qanoatlantiruvchi barcha n natural sonlarda

$$|x_n - x| \leq |z_n - z| < \varepsilon \text{ va } |y_n - y| \leq |z_n - z| < \varepsilon$$

tengsizliklar o‘rinli bo‘ladi, bundan esa

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x, \ \lim_{n\to\infty} y_n = y \tag{3.36}$$

ekanligi kelib chiqadi.

Yetarliligi. Agar (3.36) o‘rinli bo‘lsa, u holda haqiqiy sonlar ketma-ketligi limitining ta’rifiga ko‘ra, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ soni uchun shunday N_1 tartib raqami topiladiki, $n \geq N_1$ shartni qanoatlantiruvchi barcha n natural sonlarda

$$|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\,, \qquad |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. Shuning uchun

$$|z_n - z| = |(x_n + i\, y_n) - i(x + i\, y)| = \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2} < \varepsilon.$$

Bu esa

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = x + iy$$

ekanligidan dalolat beradi.◀

Isbotlangan tasdiq haqiqiy sonlar ketma-ketligi uchun olingan barcha natijalarni kompleks sonlar ketma-ketligiga ham o‘tkazish imkonini beradi.

Nazorat savollari

1. Qanday to‘plamlar chegaralangan to‘plam deyiladi?
2. To‘plamning aniq yuqori va aniq quyi chegarasiga ta’rif bering?
3. Nuqtaning atrofi deb qanday to‘plamga aytiladi?
4. Sonli ketma-ketlik deb nimaga aytiladi?
5. Qanday ketma-ketliklar yaqinlashuvchi deyiladi?
6. Qanday ketma-ketliklar cheksiz kichik va cheksiz katta bo‘ladi?
7. Chegaralangan ketma-ketlik har doim ham yaqinlashuvchi bo‘ladimi?
8. Kompleks sonning qanday ko‘rinishlari mavjud?
9. Qanday kompleks son sof mavhum deb ataladi?
10. Kompleks sonning moduli va argumenti deb nimaga aytiladi?

Mashqlar.

1. $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$ ketma-ketlikning limiti nol ekanligini isbotlang. Agar: a) ixtiyoriy $\varepsilon > 0$; b) $\varepsilon = 0{,}1$; v) $\varepsilon = 00{,}1$ bo‘lsa, n tartib raqamimning qanday qiymatlarida $\frac{1}{n^2} < \varepsilon$ tengsizlik o‘rinli bo‘ladi.

2. $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ ketma-ketlikning limiti bir ekanligini isbotlang.

Limitlarni toping:

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n-3)^2}{n^2}$.

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^4+3n^3-5n+7}{n^3+7n^2-8n-11}$.

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2-6n+8}{5n^2-8}$.

6. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^3-6n+8}}{9n-1}$.

7. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2-6+2}-2n}{\sqrt[3]{n^3-3n^2+8n+1}-\sqrt[4]{n^3+5n-4}}$.

8. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^4-6n+1}+\sqrt[5]{2n-1}}{\sqrt[4]{n^5-7n+1}-\sqrt[3]{4n^4-6}}$.

(**Ko‘rsatma.** n o‘zgaruvchi ko‘phadlari nisbatining limitini hisoblashda surat va maxrajni dastlab n^p ifodaga bo‘lib olgan maqsadga muvofiq bo‘ladi, bu yerda p maxrajdagi ko‘phadning eng katta darajasi. Bu usul irratsional ifodani saqlagan kasrlarning limitini topishda ham qo‘llaniladi.)

Limitlarni toping:

9. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!-n!}$.

10. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\dots+\frac{1}{3^n}\right)$.

11. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}(1+2+\dots+n)$.

12. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n\sin 5n}{n^2+2}$.

13. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{2n+3}-\sqrt{2n+1}\right)$.

14. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+3n-1}-n\right)$.

15. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\dots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}\right)$.

16. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n-1}{2^n+1}$

17. Kompleks sonning moduli va argumentning bosh qiymatini toping:

a) $\frac{7+i24}{5}$; b) $-2+2\sqrt{3}i$; v) $-\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}$; g) $\sin\frac{\pi}{3}+i\cos\frac{\pi}{3}$; d) $1-\sqrt{3}i$.

18. Kompleks sonni trigonometrik va ko‘rsatkichli shakldа yozing:

a) $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$; b) $\frac{1-i}{1+i}$; v) $-i$; g) $-\sqrt{2}+i\sqrt{2}$

19. Quyidagi tenglamalarning haqiqiy yechimlarini toping:

a) $(1+i)x+(-2+5i)y=-4+17i$; b) $(2-3i)x+(3+2i)y=4-19i$

20. Hisoblang:

a) $(1-2i)(2+i)^2$; b) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3$; v) $\left(\frac{i^5+2}{i^{19}+1}\right)^2$

21. Ildizlarning barcha qiymatlarini toping:

a) $\sqrt{i}$; b) $\sqrt[4]{-1}$; v) $\sqrt[9]{-9}$; g) $\sqrt[6]{1+i\sqrt{3}}$ d) $\sqrt[5]{(2-2i)^4}$.

22. Limitni hisoblang.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2-i+\frac{1}{n}(1+i)\right)$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n}{3n+2}\cdot\frac{in^2}{n^2+n-4i}$; v) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{i^n}{n}\right)$.

IV. BOB. BIR O‘ZGARUVCHIILI FUNKSIYANING LIMITI VA UZLUKSIZLIGI.

4.1. Funksiya tushunchasi. Funksiyalarning berilish usullari.

Funksiya tushunchasi. Birorta X, Y haqiqiy sonlar to‘plamlari berilgan bo‘lsin.

4.1-Ta’rif. Agar har bir $x \in X$ son uchun birorta qonun-qoida asosida aniq bir $y \in Y$ soni mos qo‘yilgan bo‘lsa, X to‘plamda funksiya aniqlangan deyiladi va

$$y = f(x) \text{ yoki } y = y(x), \quad x \in X \text{ yoku } f: X \to Y$$

ko‘rinishida yoziladi. Bunday funksiyalarni sonli funksiyalar deb ataymiz. X to‘plam funksiyaning aniqlanish sohasi, x erkli o‘zgaruvchi yoki argument deb ataladi. $y = f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasi $D(y)$ yoki $D(f)$ orqali belgilanadi. Y to‘plam esa funksiyaning qiymatlar sohasi deb ataladi va u $E(y)$ yoki $E(f)$ orqali belgilanadi.

Ba’zi funksiyalarni ko‘rsatishda $f(x)$ o‘rniga f belgi ham ishlatiladi.

Shunday qilib, agar:

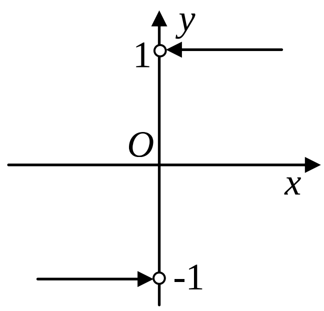
1. X aniqlanish sohasi;
2. Har bir $x \in X$ songa funksiyaning $y = f(x)$ qiymatini mos qo‘yuvchi f moslik berilgan bo‘lsa, funksiya aniqlangan bo‘ladi.

Agar f va g funksiyaning anqlanish sohasi ustma – ust tushsa va aniqlanish sohasidan olingan har bir x uchun $f(x) = g(x)$ o‘rinli bo‘lsa, ular teng funksiyalar deb ataladi. Ushbu $y = x^2$, $-\infty < x < \infty$ va $y = x^2$, $0 \le x \le 1$ funksiyalar teng emas; ular faqat $[0\,;1]$ kesmadagina teng.

Funksiyaga misollar.

1. $\{x_n\}$ ketma-ketlik natural sonlar to‘plamida aniqlangan butun argumentli funksiya bo‘ladi va $f(n) = x_n$, $(n = 1,2,3 \dots.)$

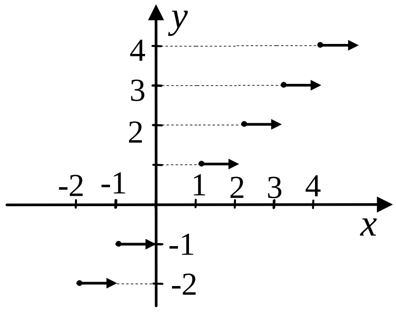
2. $y = signx = \begin{cases} 1, & \text{agar } x > 0 \\ 0, & \text{agar } x = 0 \\ -1, & \text{agar } x < 0 \end{cases}$



4.1-rasm

$sign$ belgisi lotincha $signum$ - ishora so‘zidan olingan. Bu funksiya $-\infty < x < \infty$ son o‘qining hamma joyida aniqlangan; qiymatlar to‘plami esa uchta $\{-1\,, 0\,, 1\}$ sonlardan iborat (4.1-rasm).

3. $y = [x]$ bu yerda $[x]$ sifatida x sonning butun qismi olingan, ya’ni $[x]$ qiymat x dan katta bo‘lmagan eng katta butun songa teng. $n < x < x + 1$ uchun $[x] = n,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ..$ bu funksiya son o‘qining hamma joyida aniqlangan, qiymatlari to‘plami esa butun sonlardan iborat (4.2-rasm).



4.2-rasm

Endi funksiyalar uchun muhim bo‘lgan ayrim tushunchalarni kiritamiz.

4.2-Ta’rif. Agar har bir $x \in D(f)$ nuqta uchun bitta $f(x) \in E(f)$ nuqta mos qo‘yilgan bo‘lsa, $y = f(x)$ bir qiymatli funksiya, aks holda ko‘p qiymatli deyiladi.

$E(f)$ to‘plamda birorta $y = y_0$ nuqtani olamiz; u holda $D(f)$ to‘plamda kamida bitta shunday x_0 nuqta topiladiki, uning uchun $y_0 = f(x_0)$ tenglik o‘rinli bo‘ladi. Bunday nuqtalar bir nechta, hattoki cheksiz ko‘p ham bo‘lishi mumkin. Shunday qilib, $E(f)$ to‘plamdan olingan har bir y nuqta uchun $D(f)$ to‘plamdan bitta yoki bir nechta x nuqta mos qo‘yildi. Natijada bir yoki ko‘p qiymatli $x = g(y)$ funksiyani hosil qildik. Bu funksiya $y = f(x)$ funksiyaga teskari funksiya deyiladi va u $x = f^{-1}(y)$ orqali belgilanadi. Agar f^{-1} funksiya ham bir qiymatli bo‘lsa, u holda $y = f(x)$ funksiya o‘zaro bir qiymatli deb ataladi.

Funksiayaning berilish usullari. Funksiya uch xil: analitik, grafik va jadval usul bilan beriladi.

Analitik usul. Agar $y = f(x)$ funksiya x o‘zagruvchining qiymati ustida qandaydir amallar bajarilishini ko‘rsatib turuvchi formula bilan aniqlansa, bu funksiyani biz analitik usul bilan berilgan deb ataymiz. Masalan ,

$$y = x^3 + 1\,, -\infty < x < \infty$$

funksiya analitik usul bilan berilgan.

Bu holda funksiyaning aniqlanish sohasi deganda (agar u alohida ko‘rsatilmagan bo‘lsa) x argumentning funksiyani aniqlovchi analitik ifoda haqiqiy va chekli qiymatni qabul qildiradigan barcha haqiqiy sonlar to‘plami tushuniladi. Bunday ma’noda funksiyaning aniqlanish sohasini yana mavjudlik sohasi deb ham yuritiladi.

$y = \sqrt{4 - x^2}$ funksiya aniqlanish sohasi $-2 \le x \le 2$ kesmadan iborat.

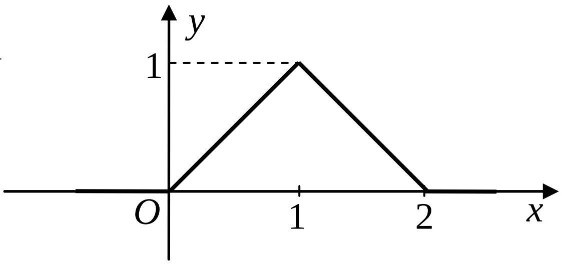
$y = x^2 + 5x + 7$ funksiyaning aniqlanish sohasi $-\infty < x < \infty$ son o‘qining barcha joyidan iborat.

Har qanday formula har doim ham funksiyani aniqlayvermaydi. Masalan,

$$y = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{x^2 - 4}$$

Formula hech qanday funksiyani aniqlamaydi, chunki yuqoridagi ikkala ildiz ham bir vaqtda haqiqiy sonni aniqlaydigan x argumentning haqiqiy qiymati mavjud emas.

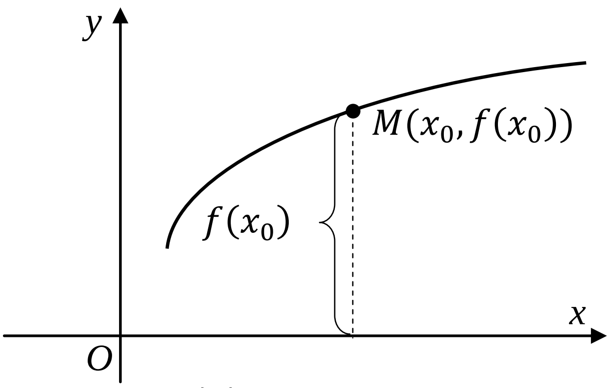
Funksiyaning analitik berilishi murakkab ko‘rinishda ham bo‘lishi mumkin. Xususiy holda, funksiya ozining aniqlanish sohasining turli qismlarida turli formulalar bilan aniqlanishi mumkin. Masalan funksiya quyidagi ko‘rinishda berilgan bo‘lishi mumkin (4.3-rasm)



4.3-rasm

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & 0 \le x \le 1 \\ 2 - x, & 1 < x \le 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases}$$

Grafik usul. Agar $y = f(x)$ funksiya grafigi berilgan bo‘lsa, u grafik usul bilan berilgan deyiladi. Bunda grafik $(x, f(x))$ nuqtalar to‘plami ko‘rinishida berilgan bo‘lib, uning absissasi funksiyaning aniqlanish sohasiga tegishli, ordinatasi esa funksiyaning mos qiymatiga teng bo‘ladi (4.4-rasm).



4.4-rasm

Har qanday funksiyaning grafigini ham chizmada tasvirlab bo‘lmaydi. Masalan , Dirixle funksiyasini

$$\mathrm{D}(x) = \begin{cases} 1, & \text{agar } x - \text{ratsional} \\ 0, & \text{agar } x - \text{irratsional} \end{cases}$$

chizmada tasvirlanmaydi. $\mathrm{D}(x)$ funksiya son o‘qining hamma joyida aniqlangan, qiymatlari esa ikkita 0 va 1 sondan iborat.

Jadval usul: Argumentning bir nechta qiymatiga mos keluvchi funksiyaning qiymatlari biror jadvalda keltirilgan bo‘lsa, funksiya jadval usulda berilgan deyiladi.

Funksiya jadval usulda berilganida uning aniqlanish sohasi jadvalda keltirilgan $x_1, x_2, x_3 \dots x_n$ qiymatlaran iborat bo‘ladi.

Murakkab funksiyalar. Ba’zan $y = f(u)$ funksiyaning u argumenti erkin o‘zgaruvchi bo‘lamsdan, u ham o‘z navbatida boshqa bir o‘zgaruvchiga, masalan x o‘zgaruvchiga $u = g(x)$ ko‘rinishda bog‘liq bo‘lgan holga duch kelamiz. Bunday holda y o‘zgaruvchining x o‘zgaruvchiga bog‘liqligini ifodalash uchun u oraliq o‘zgaruvchi o‘rniga $g(x)$ ifoda qo‘yiladi: $y = f(g(x)$. Bu qoida bo‘yicha ifodalangan funksiya murakkab funksiya yoki f va g funksiyalarning superpozitsiyasi deb ataladi. Ba’zan bu yozuv o‘rniga $y = f \circ g(x)$ ifoda yoziladi va u f va g funksiyalarning kompozitsiyasi deb ataladi.

Murakkab funksiyaning qiymatini hisoblashda dastlab x o‘zgaruvchining qiymati bo‘yicha oraliq u o‘zgaruvchining qiymati hisoblanadi. So‘ngra esa hisoblangan u qiymat bo‘yicha $y = f(u)$ qiymat hisoblanadi. $y = f(u)$ va $u = g(x)$ funksiyalar $y = f(g(x))$ superpozitsiya tashkil qilishlari uchun birinchisining aniqlanish sohasi bilan ikkinchisining qiymatlari sohasi bo‘sh bo‘lmahgan kesishmaga ega bo‘lishlari lozim, ya’ni $D(f) \cap E(g) \neq \emptyset$. Bunda murakkab funksiyaning $D(f \circ g)$ aniqlanish sohasi $g(x)$ funksiya aniqlanish sohasining $u = g(x)$ qiymatlar $f(u)$ funksiya aniqlanish sohasida chiqib ketmaydigan qismidan iborat bo‘ladi.

Ushbu misolni qaraymiz: $f(u) = \sqrt{u}$, $u = g(x) = x - 1$ bo‘lsin. U holda $D(f) = [0, +\infty)$, $D(g) = \mathbf{R}$ bo‘ladi. Demak $D(f \circ g) = [1, +\infty)$. Murakkab funksiyaning o‘zi esa $y = f\big(g(x)\big) = \sqrt{x-1}$ ko‘rinishda bo‘ladi.

Funksiyalarning ayrim xossalari.

Davriy funksiyalar.

4.3-Ta’rif. $X \subseteq \mathbf{R}$ to‘plamda aniqlangan $f(x)$ funksiyaning *davri* deb, shunday $T > 0$ songa aytiladiki, bunda ixtiyoriy $x \in X$ nuqta uchun $(x - T, x + T) \in X$ munosabat va

$$f(x+T) = f(x-T) = f(x) \tag{4.1}$$

tenglik orinli bo‘ladi.

$nT, n \in \mathbf{N}$ son ham funksiyaning davri bo‘ladi. Masalan, T berilgan $f(x)$ funksiyaning davri bo‘lsa $2T$ ham uning davri bo‘ishini ko‘rsatamiz. Haqiqatdan ham, ixtiyoriy $x \in X$ nuqta uchun, birinchidan $x \pm 2T = ((x \pm T) \pm T) \in X$ va ikkinchidan (4.1) tenglikka ko‘ra

$$f(x \pm 2T) = f(x \pm T \pm T) = f(x \pm T) = f(x).$$

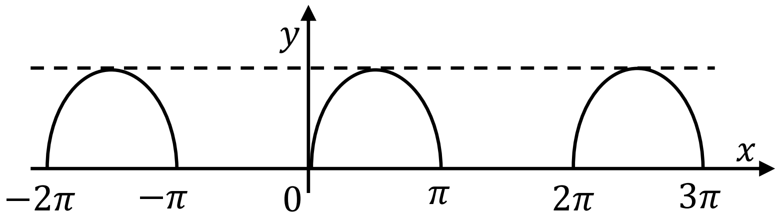
Bundan keyin funksiyaning davri deganda uning davrlarining eng kichigi tushuniladi.

Agar $f(x)$ funksiyaning davri T bo‘lsa, $g(x) = f(ax + b)$ funksiyaning davri T/a bo‘ladi, bu yerda $a > 0, b$ o‘zgarmas sonlar. Haqiqatdan ham, (1.1) tenglikka ko‘ra

$$g\left(x + \frac{T}{a}\right) = f\left(a\left(x + \frac{T}{a}\right) + b\right) = f(ax + b + T) = f(ax + b) = g(x).$$

Davrga ega bo‘lgan funksiyani *davriy funksiya* deb ataymiz.

Davri T bo‘lgan $X \subseteq \mathbf{R}$ to‘plamda aniqlangan $f(x)$ funksiyaning grafigini yasash uchun, uning grafigini ixtiyoriy $[a, a + T]$ kesmada yasash yetarli, bu yerda $a \in X$ −birorta son. So‘ngra Ox koordinata o‘qi bo‘ylab $\pm T, \pm 2T, \dots$, davrga suriladi. 4.5-rasmda davri $T = 2\pi$ bo‘lgan $y = 2\sqrt{\sin x}$ funksiyaning grafigi keltirilgan.



4.5-rasm

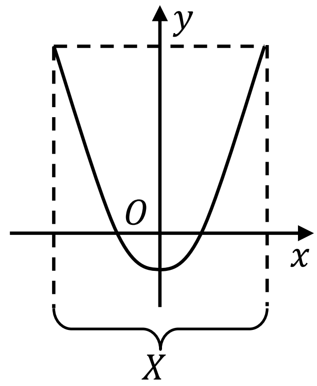
Monoton funksiayalar. $f(x)$ funksiya $X \subseteq \mathbf{R}$ to‘plamda aniqlangan va x_1, x_2 bu to‘plamning ixtiyoriy nuqtalari bo‘lib, ular uchun $x_1, < x_2$ tengsizlik o‘rinli bo‘lsin.

1) Agar $f(x_1) < f(x_2)$ bo‘lsa, $f(x)$ funksiya X to‘plamda *o‘suvchi*;
2) agar $f(x_1) \leq f(x_2)$ bo‘lsa, *kamaymaydigan*;
3) agar $f(x_1) > f(x_2)$ bo‘lsa, *kamayuvchi*;
4) agar $f(x_1) \geq f(x_2)$ bo‘lsa *o‘smaydigan* funksiya deb ataladi.

Barcha to‘rt holda funksiyani X to‘plamda monoton deb ataladi, 1) va 3) hollarda qat’iy monoton deb ataladi. Qat’iy monoton funksiyaning teskarisi mavjudligi va teskari funksiya ham qat’iy monotn bo‘lishi ravshan.

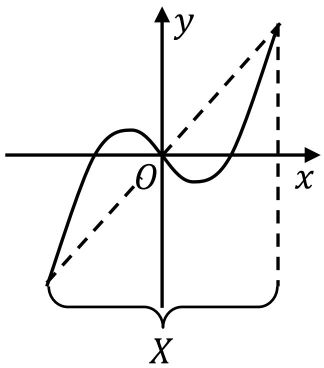
4.1-Misol. ►$y = x, y = x^3$ funksiyalar **R** son o‘qida o‘suvchi bo‘ladi, $y = x^2$ funksiya esa $(-\infty, 0)$ intervalda kamayuvchi va $(0, +\infty)$ intervalda o‘suvchi bo‘ladi, ammo $x = 0$ nuqtani o‘zida saqlovchi har qanday intervalda monoton bo‘lmaydi. $y = c = \text{const}$, funksiyani bir vaqtning o‘zida ham kamaymaydigan, ham o‘smaydigan funksiya deb hisoblash mumkin.◄

Juft va toq funksiyalar. $f(x)$ funksiyaning $D(f) = X \subseteq \mathbf{R}$ aniqlanish sohasi O koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik bo‘lsin (4.6-rasm), ya’ni agar $x \in X$ bo‘lsa, $-x \in X$ bo‘ladi.



4.6-rasm

4.4-Ta’rif. Agar ixtiyoriy $x \in X$ nuqta uchun $f(-x) = f(x)$ tenglik o‘rinli bo‘lsa, $X \subseteq \mathbf{R}$ to‘plamda aniqlangan $f(x)$ funksiyani *juft*, agar $f(-x) = -f(x)$ bo‘lsa *toq* funksiya deb ataymiz.



4.7-rasm

Juft funksiyaning grafigi Oy o‘qqa nisbatan simmetrik (4.6-rasm), toq funksiyaning grafigi esa koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik (4.7-rasm) bo‘ladi. $f(x)$ funksiyaning juft yoki toqligini aniqlash uchun $f(-x)$ funksiyani tahlil qilish kerak. Har doim ham bir qarashdan funksiyaning juft yoki toqligini aniqlab bo‘lmaydi. Bunday hollarda ayniy almashtirishlarni bajarish kerak.

4.2-Misol. Ushbu

$$f(x) = \log_a\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right), x \in \mathbf{R}$$

funksiya toq ekanligini ko‘rsatamiz.

► Haqiqatdan ham

$$f(-x) = \log_a\left(-x + \sqrt{x^2 + 1}\right) =$$

$$= \log_a \frac{\left(-x + \sqrt{x^2 + 1}\right)\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)}{x + \sqrt{x^2 + 1}} =$$

$$= \log_a \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = -\log_a\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) = -f(x). \quad ◄$$

4.1-Teorema. $[-a,a]$ kesmada aniqlangan har qanday funksiyani juft va toq funksiyaning yig'indisi shaklida ifodalash mumkin va bu tasvir yagona bo'ladi.

► $f(x)=\varphi(x)+\psi(x)$ yig'indini yozamiz, bu yerda $\varphi(x)$- juft funksiya, $\psi(x)$ esa toq. U holda $f(-x)=\varphi(-x)+\psi(-x)=\varphi(x)-\psi(x)$ tenglik hosil bo'ladi. $f(x)$ va $f(-x)$ uchun tuzilgan tengliklarni hadma-had qo'shib

$$\varphi(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}, \qquad \psi(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

izlanayotgan funksiyalarni topdik. Bu esa $f(x)$ funksiyani yagona usul bilan juft va toq funksiyalarning yig'indisi shaklida tasvirlash mumkinligini ko'rsatadi. ◄

Funksiya oldidagi ishoraning o'zgarishi funksiyaning juft yoki toqligiga ta'sir qilmaydi. Faqat juft yoki faqat toq funksiyalarni qo'shganda ularning yig'indisi yana juft yoki toq bolib qolaveradi. Ixtiyoriy sondagi juft funksiyalarning ko'paytmasi yana juft bo'ladi, toq funksiyalarning ko'paytmasi esa ko'paytuvchilar soniga bog'liq: ko'paytuvchilar soni juft bo'lsa ko'paytma juft, ko'paytuvchilar soni toq bo'lsa ko'paytma toq bo'ladi.

Juft ham toq ham bo'lmagan funksiyalarni umumiy ko'rinishdagi funksiyalar deb ataymiz.

Chegaralangan funksiyalar. $D\subseteq \mathbf{R}$ to'plamda aniqlangan $f(x)$ funksiya berilgan bo'lsin.

4.5-Ta'rif. Agar shunday M (mos ravishda m) o'zgarmas son topilib, barcha $x\in D$ nuqtalar uchun $f(x)\leq M$ (mos ravishda $f(x)\geq m$) tengsizlik o'rinli bo'lsa, $f(x)$ funksiya D to'plamda yuqoridan (mos ravishda quyidan) chegaralangan deyiladi.

4.6-Ta'rif. Agar shunday $C>0$ o'zgarmas son topilib, barcha $x\in D$ nuqtalar uchun $|f(x)|<C$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, $f(x)$ funksiya D to'plamda chegaralangan deyiladi.

Funksiya D to'plamda chegaralangan bo'lishligi uchun u quyidan ham, yuqoridan ham chegaralangan bo'lishi kerakligi ravshan. Agar D to'plam funksiyaning aniqlanish sohasi bilan ustma-ust tushsa va funksiya bu to'plamda chegaralangan bo'lsa, uni biz chegaralangan funksiya deb ataymiz. Aks holda funksiyani bu to‘plamda chegaralanmagan deb ataymiz. Bu esa, ixtiyoriy $C > 0$ son uchun $|f(a)| > C$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi $a \in D$ nuqta topiladi degan ma’noni anglatadi.

4.3-Misol. R son oqida aniqlangan

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

funksiya $D = \mathbf{R}$ to‘plamda chegaralangan, chunki ixtiyoriy $x \in \mathbf{R}$ uchun $0 < f(x) \leq 1$ tengsizlik o‘rinli.

4.4-Misol. $g(x) = 1/x$ funksiya $[1, +\infty)$ yarim intervalda chegaralangan, chunki ixtiyoriy $x \in [1, +\infty)$ uchun $0 < g(x) \leq 1$ tenngsizlik o‘rinli. Xuddi shu funksiya $(0, +\infty)$ intervalda chegaralanmagan.

Elementar funksiyalar. Quyidagi funksiyalarni asosiy elementar funksiyalar deb ataymiz:

1. $y = x^\alpha$ darajali funksiya, bunda $\alpha \in \boldsymbol{R}$. Umumiy holda uning aniqlanish sohasi $(0\,; +\infty)$ son o‘qining yarmidan iborat. Agar $\alpha = n \in \boldsymbol{N}$ bo‘lsa, x^α funksiya $(-\infty; +\infty)$ son o‘qining hamma joyida aniqlangan.
2. $y = a^x$ ko‘rsatgichli funksiya, bunda $a > 0$, $a \neq 1$. U son o‘qining hamma joyida aniqlangan.
3. $y = \log_a x$ logarifmik funksiya, bunda bunda $a > 0$, $a \neq 1$ Uning aniqlanish sohasi $(0\,; +\infty)$ intervaldan iborat.
4. $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ trigonometrik funksiyalar. $y = \sin x$, $y = \cos x$ funksiyalar son o‘qining hamma joyida aniqlangan. $y = \operatorname{tg} x$ funksiya $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ bo‘lganda aniqlangan. $y = \operatorname{ctg} x$ funksiya esa $x \neq k\pi$ bo‘lganda aniqlangan, bu yerda k ixtiyoriy butun son.
5. $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$ teskari trigonometrik funksiyalar. $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$ funksiyalarning aniqlanish sohasi $[-1; 1]$ kesmadan iborat. $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$ funksiyalar esa son o‘qining hamma joyida aniqlangan.

Bu elementar funksiyalarning grafigini chizish o‘quvchiga mustaqil bajarishga qoldirildi.

4.2. Funksiyaning limiti.

Funksiyaning nuqtadagi limiti. Funksiyaning limiti matematik tahlildagi markaziy tushuncha hisoblanadi.

$f(x)$ funksiya a nuqtaning biror $U(a)$ atrofida aniqlangan bo‘lsin (a nuqtaning o‘zida aniqlanmagan ham bo‘lishi mumkin).

4.7-Ta’rif (Koshi). Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son topilib,

$$|x - a| < \delta \tag{4.2}$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $x \in \dot{U}(a)$ uchun

$$|f(x) - A| < \varepsilon \tag{4.3}$$

tensizlik o‘rinli bo‘lsa, A soni $f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi limiti deyiladi va u $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ ko‘rinishda yoziladi.

4.5-Misol. $f(x) = c = \text{const}$ funksiya uchun $\lim\limits_{x\to a} f(x) = c$ ekanligini ko‘rsatamiz.

► Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son va x uchun $f(x) - c = c - c = 0 < \varepsilon$. Shuning uchun δ sifatida ixtiyoriy musbat sonni olish mumkin.◄

4.6-Misol. $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$ ekanligini isbotlang.

► Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ sonni olamiz va $|x - 0| = |x| < \varepsilon$ bo‘sin. $\delta = \varepsilon$ deb olsak ta’rifning shartlari bajariladi.◄

4.7-Misol. $\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4$ ekanligini isbotlang.

► Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ sonni olamiz va $|x^2 - 4| < \varepsilon$ bo‘sin.

$$|x^2 - 4| = |(x-2)(x+2)| = |x-2| \cdot |(x-2)+4| \leq$$
$$\leq |x-2|(|x-2|+4)$$

ekanligini inobatga olsak $|x-2|^2 + 4|x-2| < \varepsilon$ tengsizlikni qarash yetarli. Bu tengsizlik esa

$$|x-2| < -2 + \sqrt{4+\varepsilon}$$

tengsizlikka teng kuchli. Shu sababli $|x^2 - 4| < \varepsilon$ tengsizlikning bajarilishi uchun (4.2) munosabatda $\delta = -2 + \sqrt{4+\varepsilon}$ deb olish yetarli.◄

4.8-Misol. Tenglikni isbotlang: $\lim\limits_{x\to a} |x| = |a|$.

► Ixtiyoriy haqiqiy a, b sonlar uchun o‘rinli bo‘lgan $\big||a| - |b|\big| \le |a - b|$ tengsizlikdan foydalanamiz. U holda $\big||x| - |a|\big| \le |x - a|$ va (4.2) munosabatda $\delta = \varepsilon$ deb olish kifoya. Haqiqatan ham $|x - a| < \delta = \varepsilon$ bo‘lsa,

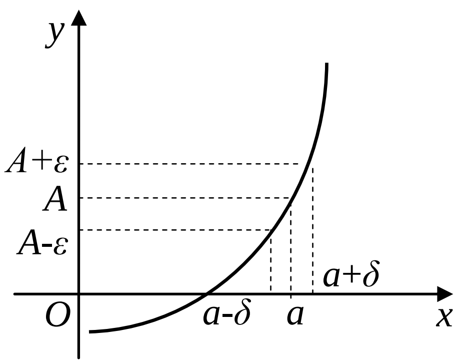
$$\big||x| - |a|\big| \le |x - a| < \delta = \varepsilon$$

bo‘ladi. ◄

Topshiriq. Quyidagi limitlarni tengsizliklar yordamida ($\varepsilon - \delta$ tilida) ifodalang

1) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 3$; 2) $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = 4$; 3) $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = -7$; 4) $\lim\limits_{x\to -6} f(x) = -8$.

$y = f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi limitining geometrik talqini 4.8-rasmda tasvirlangan. Tasvirga ko‘ra a nuqtaning δ atrofidan olingan barcha x nuqtalarga mos keluvchi $f(x)$ qiymatlar A nuqtaning ε atrofiga tushadi.



4.8-rasm

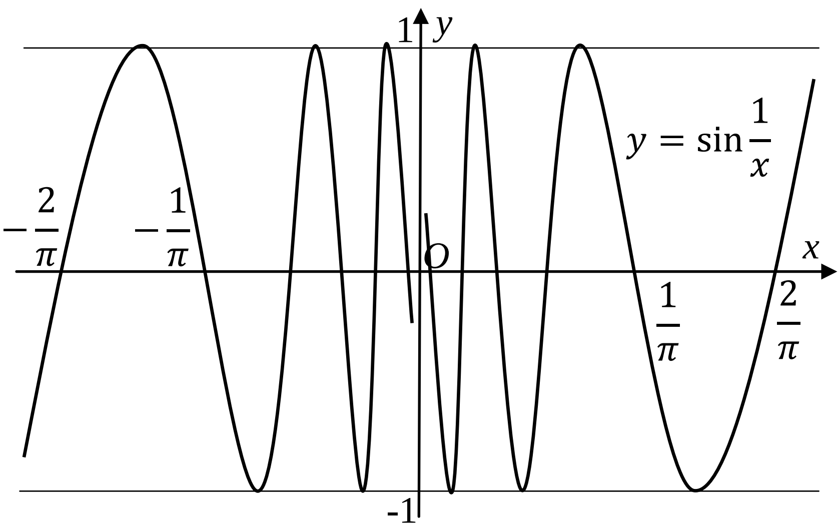
$y = f(x)$ funksiya a nuqtaning biror $U(a)$ atrofida aniqlangan bo‘lsin (a nuqtaning o‘zida aniqlanmagan ham bo‘lishi mumkin).

4.8-Ta’rif (Geyne). Agar x argument qiymatlarining a nuqtaga intiluvchi ixtiyoriy $\{x_n\}$ ketma-ketligiga mos keluvchi $\{f(x_n)\}$ ketma-ketlik A soniga intilsa, bu A soni $f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi limiti deyilaadi.

Keltirilgan ta’rifdan $f(x)$ funksiyaning a nuqtada limiti yo‘qligini ko‘rsatishda foydalanish qulay. Buning uchun limiti mavjud bo‘lmagan birorta $\{f(x_n)\}$ ketma-ketlikni topish yetarli, yoki turli limitlarga ega bo‘lgan ikkita $\{f(x_n)\}$ va $\{f(x_n'\}$ ketma-ketliklarni ko‘rsatish kerak.

Misol sifatida $x = 0$ nuqtada boshqa hamma joyda aniqlangan $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ funksiyaning $x = 0$ nuqtada limiti mavjud emasligini isbotlaymiz (4.9-rasm).

► $x = 0$ nuqtaga intiluvchi ikkita $\left\{\frac{1}{n\pi}\right\}$ va $\frac{1}{\frac{\pi}{2}+n\pi}$ ketma-ketliklarni qaraymiz. Funksiya qiymatlarining mos ketma-ketliklari turli limitlarga intiladi: $\{\sin n\pi\}$ ketma-ketlik nolga, $\left\{\sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)\right\}$ ketma-ketlik esa birga intiladi. Bu esa $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ funksiyaning $x = 0$ nuqtada limiti mavjud emasligini anglatadi. ◄



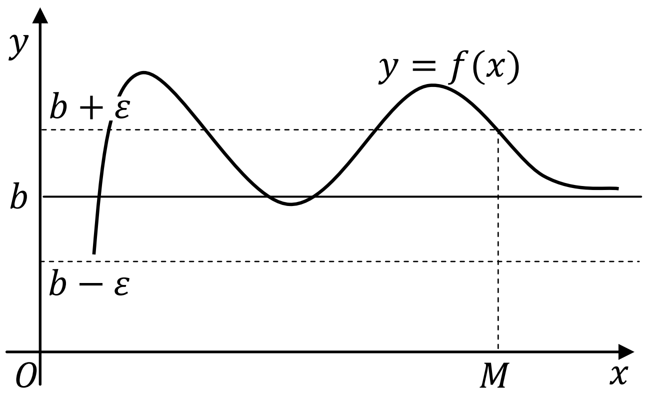
4.9-rasm

Mulohaza. Funksiyaning nuqtadagi limitining ikkala ta'rifi (Koshi ta'rifi, Geyne ta'rifi) teng kuchli.

Funksiyaning cheksizlikdagi limiti.

4.9-Ta'rif. Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $M > 0$ son topilib, barcha $x > M$ uchun $|f(x) - A| < \varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, A soni $f(x)$ funksiyaning x argumenti $+\infty$ ga intilgandagi limiti deyiladi va u $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$ ko'rinishda yoziladi.

Cheksizlikdagi limitning geometrik talqini 4.10-rasmda keltirilgan. Rasmda ε −ning berilgan qiymatiga ko'ra M nuqtani ta'rifning sharti bajariladigan qilib qanday tanlash kerakligi ko'rsatilgan. $x \to +\infty$ da funksiyaning grafigi $y = b$ gorizontal to'g'ri chiziqqa cheksiz yaqinlashib boradi.



4.10-rasm

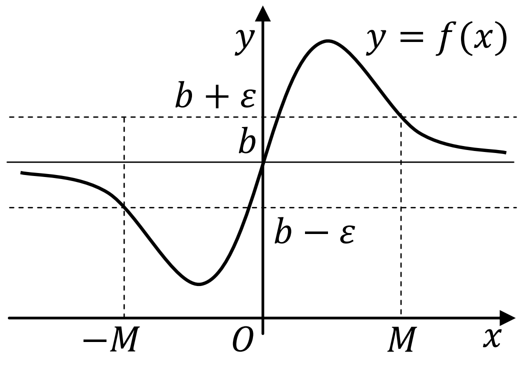
$x \to -\infty$ dagi limit ham xuddi shu singari kiritiladi. $x \to \infty$ dagi limitni beradigan bo'lsak: Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $M > 0$ son topilib, barcha $|x| > M$ uchun $|f(x) - A| < \varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, A soni $f(x)$ funksiyaning x argumenti ∞ ga intilgandagi limiti deyiladi va u $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$ ko'rinishda yoziladi.

Bu holda funksiya grafigi ikki tomonlama $y = b$ gorizontal asimptotaga ega bo'ladi (4.11-rasm).

4.9-Misol. $0 < a < 1$ uchun

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = 0$$

ekanligini ko‘rsatamiz.



4.11-rasm

► Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun $a^x < \varepsilon$ bajariladi deb faraz qilamiz. $0 < a < 1$ bo‘lganda $\log_a x$ funksiyaning xossalaridan foydalanib $a^x < \varepsilon$ tengsizlik o‘rniga $x > \log_a \varepsilon$ tengsizlikni olamiz. $M = \log_a \varepsilon$ deb olsak ta’rifning sharti bajariladi.◄

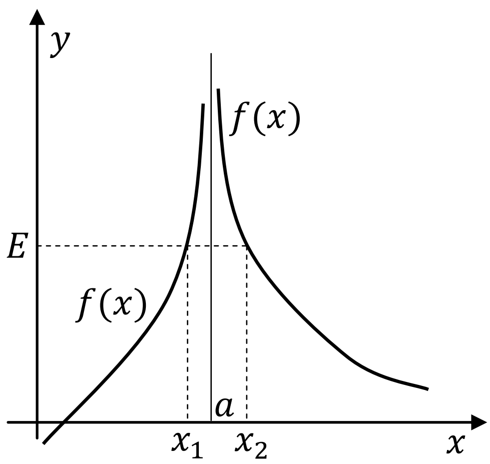
4.10-Misol. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ ekanligini isbotlaymiz.

► Dastlab ixtiyoriy ε musbat son uchun $\frac{1}{x^2} < \varepsilon$ bo‘lsin. U holda $x^2 > \frac{1}{\varepsilon}$, yoki $|x| > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. Agar ta’rifdagi M sifatida $M = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ sonni olsak $|x| > M$ uchun $\left|\frac{1}{x^2} - 0\right| < \varepsilon$ orinli bo‘ladi.◄

Funksiyaning cheksizlikka intilishi.

4.10-Ta’rif. $E > 0$ son qanday bo‘lishidan qat’iy nazar shunday $\delta > 0$ son topilib, a nuqtaning o‘zi kirmagan $\dot{U}_\delta(a)$ atrofidagi barcha x nuqtalar uchun $f(x) > E$ tengsizlik bajarilsa, $+\infty$ berilgan $f(x)$ funksiyaning $x = a$ nuqtadagi limiti deyiladi va u $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ ko‘rinishda yoziladi.

4.12-rasmda E ning qiymati bo‘yicha $\delta = \min\{a - x_1, x_2 - a\}$ qiymatini ta’rifning sharti bajariladigan qilib qanday tanlash ko‘rsatilgan. x argument a nuqtaga intilganda funksiyaning grafigi *vertikal asimptota* deb ataluvchi $x = a$ to‘g‘ri chiziqqa cheksiz yaqinlashadi.



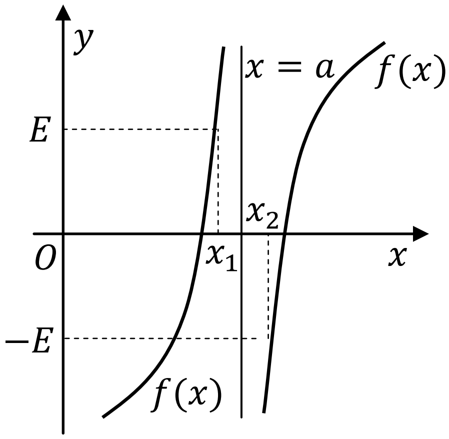
4.12-rasm

$-\infty$ funksiyaning biror nuqtadagi limiti bo‘lish ta’rifi ham xuddi shu singari kiritiladi. Buni o‘quvchiga mustaqil bajarishiga qoldiramiz.

4.11-Ta’rif. $E > 0$ son qanday bo‘lishidan qat’iy nazar shunday $\delta > 0$ son topilib, a nuqtaning o‘zi kirmagan $\dot{U}_\delta(a)$ atrofidagi barcha x nuqtalar uchun $|f(x)| > E$

tengsizlik bajarilsa, ∞ berilgan $f(x)$ funksiyaning $x = a$ nuqtadagi limiti deyiladi va u $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ ko‘rinishda yoziladi.

4.13-rasmda E ning qiymati bo‘yicha $\delta = \min\{a - x_1, x_2 - a\}$ qiymatini ta’rifning sharti bajariladigan qilib qanday tanlash ko‘rsatilgan. x argument a nuqtaga intilganda funksiyaning grafigi vertikal asimptota deb ataluvchi $x = a$ to‘g‘ri chiziqqa cheksiz yaqinlashadi.

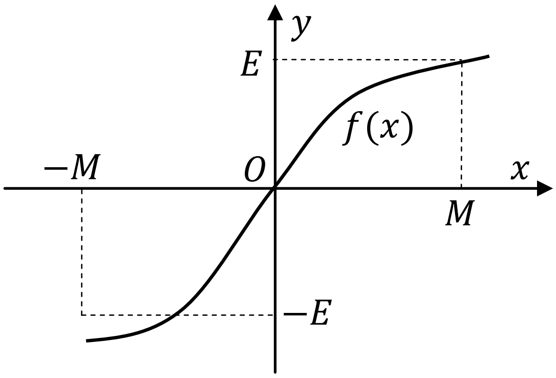


4.13-rasm

Endi x argument cheksizlikka intilganda $f(x)$ funksiya qiymati ham cheksizlikka intilish ta’rifini beramiz.

4.12-Ta’rif. $E > 0$ son qanday bo‘lishidan qat’iy nazar shunday $M > 0$ son topilib, barcha $|x| > M$ nuqtalar uchun $|f(x)| > E$ tengsizlik bajarilsa, ∞ berilgan $f(x)$ funksiyaning x argumenti cheksizlikka intilgandagi limiti deyiladi va u $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ ko‘rinishda yoziladi.

4.14-rasmda E qiymat bo‘yicha ta’rifdagi shartni qanoatlantiruvhci M sonini topish usuli ko‘rsatilgan.



4.14-rasm

4.11-Misol. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ ekanligini isbotlaymiz.

► Dastlab ixtiyoriy E musbat son uchun $\frac{1}{x^2} > E$ o‘rinli bo‘lsin. U holda $x^2 < \frac{1}{E}$, yoki $|x| < \frac{1}{\sqrt{E}}$. Agar ta’rifdagi δ sifatida $\delta = \frac{1}{\sqrt{E}}$ sonni olsak $|x| < \delta$ uchun $\left|\frac{1}{x^2}\right| = \frac{1}{x^2} > E$ orinli bo‘ladi. Bu esa ta’rifga ko‘ra $x \to 0$ da $\frac{1}{x^2} \to +\infty$ degan ma’noni anglatadi.◄

4.12-Misol. $\lim\limits_{x\to\infty} x^3 = \infty$ ekanligini tekshiramiz.

► Ixtiyoriy $E > 0$ soni uchun $|x^3| > E$ bo‘lsin. Bundan esa $|x| > \sqrt[3]{E}$ tengsizlikni hosil qilamiz. Ta’rifdagi M sifatida $M = \sqrt[3]{E}$ sonni olsak ta’rif sharti bajariladi.◄

Bir tomonlama limitlar. 4.2.1. bo‘limda $f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi limitining ta’rifini berishda x argument a nuqtaga uning biror o‘zi kirmagan $\dot{U}(a)$ atrofi doirasida qanday ko‘rinishda intilishiga hech qanday chegaralash qo‘yilmagan edi. Biroq a nuqta funksiyaning $D(f)$ aniqlanish sohasida o‘zi kirmagan atrofga ega bo‘lmasligi ham mumkin (masalan, $f(x) = \sqrt{x}$ funksiya uchun $D(f) = \{x \in R: x \geq 0$ sohada $x{=}0$ nuqtaning o‘zi kirmagan atrofi mavjud emas). Bunday holda x argumentning a nuqtaga intilishi a nuqtaning bir tomonlama bo‘lgan o‘zi kirmagan yarim atrofi doirasida ma’noga ega bo‘ladi. Ammo funksiya a nuqtaning o‘zi kirmagan atrofida aniqlangan taqdirda ham x argument a nuqtaga intilganda funksiyaning o‘zgarish xususiyatini o‘zi kirmagan yarim atrof doirasida amalga oshirilish maqsadga muvofiq bo‘ladi. Bunday chegaralash bir tomonlama limit tushunchasini kiritishga olib keladi.

a nuqtaning chap yarim δ atrofi deb

$$U_\delta^-(a) = \{x: x \leq a, a - x < \delta\}$$

to‘plamga, chap yarim o‘zi kirmagan δ atrof deb

$$\dot{U}_\delta^-(a) = U_\delta^-(a) \backslash \{a\}$$

to‘plamga aytiladi.

4.13-Ta’rif. Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son topilib, a nuqtaning chap yarim o‘zi kirmagan $\dot{U}_\delta^-(a)$ atrofidan olingan barcha $x \in \dot{U}_\delta^-(a)$ nuqtalar uchun

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

tengsizlik o‘rinli bo‘lsa A soni $f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi chap limiti deb ataladi va u $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = A$ ko‘rinishda yoziladi.

a nuqtaning o‘ng yarim atrofi $U_\delta^+(a) = \{x: x \geq a, x - a < \delta\}$ va o‘ng yarim o‘zi kirmagan atrofi esa $\dot{U}_\delta^-(a) = U_\delta^+(a) \backslash \{a\}$ ko‘rinishda aniqlanadi. Funksiyaning a nuqtadagi o‘ng limiti ham xuddi chap limit singari aniqlanadi.

Funksiyaning a nuqtadagi chap va o‘ng limitlarining qiymatlari uchun

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = f(a-0), \qquad \lim_{x\to a+0} f(x) = f(a+0)$$

belgilashlar ishlatiladi.

Funksiyaning nuqtadagi limitini bir tomonlama limitlardan farqlash uchun uni biz ikki tomonlama limit deb ataymiz. Funksiyaning nunqtadagi ikki tomonlama va bir tomonlama limitlarining mavjudligi orasidagi bog‘liqlik ushbu teoremada keltiriladi.

4.2-Teorema. A soni $f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi ikki tomonlama limiti bo‘lishligi uchun A soni bir vaqtning o‘zida ham chap, ham o‘ng limit bo‘lishi zarur va yetarli.

► **Zarurligi.** $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ bo‘lsin. Ta’rifga ko‘ra ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son topiladiki, $|x - a| < \delta$ tengsizlikni, shu jumladan $x < a, a - x < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x nuqtalat uchun $|f(x) - A| < \varepsilon$ tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. Bu esa bir tomonlama limitning ta’rifiga ko‘ra $f(a - 0)$ chap limitning mavjudligini va uning A soniga tengligini anglatadi. Xuddi shu singari $f(a + 0)$ o‘ng limitning mavjudligi va u A soniga tengligi ko‘rsatiladi.

Yetarliligi. $f(a - 0)$ va $f(a + 0)$ limitlar mavjud va ular A soniga teng bo‘lsin. Bir tomonlama limitlarning ta’rifiga ko‘ra ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta_1, \delta_2 > 0$ sonlar topiladiki, $x < a, a - x < \delta_1$ va $x > a, x - a < \delta_2$ tengsiliklarni qanoatlantiruvchi barcha x nuqtalar uchun $|f(x) - A| < \varepsilon$ tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ deb olsak $|a - x| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi x nuqtalar yoki $a - x < \delta_1$ yoki $x - a < \delta_2$ tengsizlikni qanoatlantiradi va ular uchun $|f(x) - A| < \varepsilon$ o‘rinli. Bu esa ikki tomonlama limitning ta’rifiga ko‘ra $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ ekanligini anglatadi. ◄

4.3. Limitlar haqida teoremalar.

4.3-Teorema (limitning yagonaligi). Agar $f(x)$ funksiya a nuqtada limitga ega bo‘lsa, bu limit yagonadir.

► $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ bo‘lsin. Har qanday $B \neq A$ soni $f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi limiti bo‘lmasligini isbotlaymiz. $|f(x) - B|$ ayirma modulini baholash uchun $\big||a| - |b|\big| \leq |a - b|$ tengsizlikdan foyfalanamiz:

$$|f(x) - B| = |(f(x) - A) - (B - A)| \geq \big||f(x) - A| - |B - A|\big| =$$
$$= \big||B - A| - |f(x) - A|\big|. \qquad (4.4)$$

$\varepsilon = \frac{|B-A|}{2} > 0$ deb olamiz. $\lim_{x\to a} f(x) = A$ bo‘lganligi uchun, olingan $\varepsilon > 0$ soni uchun shunday $\delta > 0$ son topiladiki, $|x-a| < \delta,\ x \neq a$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x nuqtalar uchun $|f(x) - A| < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi. U holda (4.4) munosabatdan $|f(x) - B| \geq \frac{|B-A|}{2} = \varepsilon$ tengsizlikka ega bo‘lamiz. Shunday qilib shunday $\varepsilon > 0$ son topildiki, $\delta > 0$ son qanday bo‘lishidan qat’iy nazar shunday $x \neq a$ nuqtalar topiladiki, $0 < |x-a| < \delta$ tengsizlik bilan bir qatorda $|f(x) - B| \geq \varepsilon$ tengsizlik ham bajariladi. Bu esa $B \neq \lim_{x\to a} f(x)$ ekanligini anglatadi.◄

4.14-Ta’rif. Agar shunday $M > 0$ va $\delta > 0$ sonlar topilib, a nuqtaning $U_\delta(a)$ atrofidan olingan barcha x nuqtalar uchun $|f(x)| \leq M$ tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, $f(x)$ funksiya a nuqtaning atrofida chegaralangan deyiladi.

4.4-Teorema (limitga ega funksiyaning chegaralanganligi). Agar $f(x)$ funksiya a nuqtaning atrofida aniqlangan va a nuqtada limitga ega bo‘lsa, u holda $f(x)$ funksiya bu nuqtaning biror atrofida chegaralangan bo‘ladi.

► $\lim_{x\to a} f(x) = A$ bo‘lsin. U holda ixtiyoriy $\varepsilon > 0$, xususan, $\varepsilon = 1$ uchun shunday $\delta > 0$ son topiladiki, $|x-a| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $x \neq a$ nuqtalar uchun

$$|f(x) - A| < 1$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. Har doim

$$|f(x)| - |A| \leq |f(x) - A|$$

ekanligidan

$$|f(x)| < |A| + 1$$

tengsizlikka ega bo‘lamiz. $M = \max\{|A| + 1, |f(a)|\}$ deb olamiz. U holda a nuqtaning $U_\delta(a)$ atrofidan olingan har qanday x nuqtada

$$|f(x)| \leq M$$

tengsizlik bajariladi. Bu esa ta’rifga ko‘ra $f(x)$ funksiyaning a nuqta atrofida chegaralanganligini anglatadi. ◄

Aksincha, $f(x)$ funksiyaning a nuqta atrofida chegaralanganligidan $f(x)$ funksiyaning a nuqtada limiti mavjudligi kelib chiqmaydi. Masalan, $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ funksiya $x = 0$ nuqtaning atrofida chegaralangan: barcha $x \neq 0$ nuqtalarda

$$\left|\sin\frac{1}{x}\right| \leq 1,$$

ammo uning bu nuqtada limiti mavjud emasligini 4.2 da ko‘rgan edik.

4.5-Teorema. $f(x)$ funksiya a nuqtada A limitga ega bo‘lsin. Agar a nuqtaning biror $U_{\delta'}(a)$ atrofidagi barcha x nuqtalar uchun $f(x) \geq 0$ tengsizlik o‘rinli bo‘lsa (a nuqtaning o‘zida esa o‘rinli bo‘lmasligi mumkin), $A \geq 0$ bo‘ladi.

► Teskarisidan faraz qilaylik, ya’ni $A < 0$ bo‘lsin. U holda a nuqtaning yuqorida aytib o‘tilgan $U_{\delta'}(a)$ atrofida $f(x) - A \geq 0$ o‘rinli bo‘ladi. $f(x)$ funksyaning a nuqtadagi limiti A soniga teng bo‘lganligi uchun ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta'' > 0$ son topiladiki $|x - a| < \delta''$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x nuqtalarda $|f(x) - A| = f(x) - A < \varepsilon$ tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. Agar $\varepsilon = -A$ deb olsak oxirgi tengsizlik $f(x) - A < -A$ ko‘rinishni oladi. Bundan esa $f(x) < 0$ tengsizlikka ega bo‘lamiz. Agar $\delta = \min\{\delta', \delta''\}$ deb olsak barcha $x \in U_\delta(a)$ nuqtalarda $f(x) < 0$ tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. Bu esa teoremadagi $f(x) \geq 0$ shartga zid. Ana shu zidlikdan teoremaning isboti kelib chiqadi.◄

4.6-Teorema. $f(x)$ funksiya a nuqtada $A > 0$ ($A < 0$) limitga ega bo‘lsin. U holda a nuqtaning shunday $U_{\delta'}(a)$ atrofi topilib, bu atrofdan olingan barcha x nuqtalar uchun $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$) tengsizlik o‘rinli bo‘ladi (a nuqtaning o‘zida esa o‘rinli bo‘lmasligi mumkin).

► $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ bo‘lsin. U holda ixtiyoriy $\varepsilon > 0$, xususan, $0 < \varepsilon < A$ uchun shunday $\delta' > 0$ son topiladiki, $|x - a| < \delta'$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $x \neq a$ nuqtalar uchun

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. Bu tengsizlikni

$$A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$$

ko‘rinishda yozishimiz mumkin. $A-\varepsilon>0$ ekanligini inobatga olsak, so‘ngi tengsizlikdan $U_{\delta'}(a)$ atrofdan olingan barcha x nuqtalar uchun $f(x)>0$ tengsizlik bajarilishi kelib chiqadi.

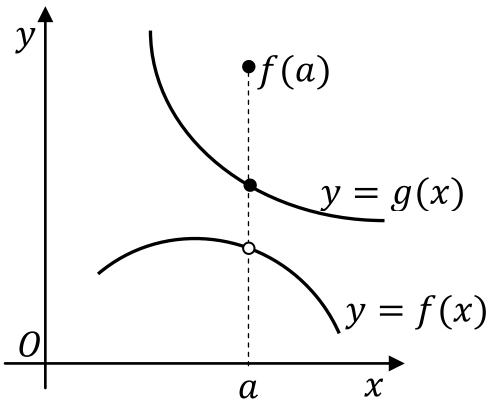
$A<0$ bo‘lgan hol ham xuddi shu singari isbotlanadi.◄

4.7-Teorema(tengsizlikda limitga o‘tish). Agar a nuqtaning biror atrofidagi barcha x nuqtalarda $f(x)\le g(x)$ tengsizlik o‘rinli (a nuqtaning o‘zida esa o‘rinli bo‘lmasligi mumkin) va bu $f(x), g(x)$ funksiyalar a nuqtada limitga ega bo‘lsa,

$$\lim_{x\to a} f(x)\le \lim_{x\to a} g(x)$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi (4.15-rasm).

► Teskarisidan faraz qilamiz, ya’ni $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=B$ va $A>B$ bo‘lsin. Teorema shartiga ko‘ra a nuqtaning biror $U_{\delta'}(a)$ atrofidagi barcha x nuqtalarda $\varphi(x)-f(x)\ge 0$. Bundan tashqari $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ va $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=B$ bo‘lganligi sababali ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son uchun shunday $\delta''>0$ son topilib, barcha $x\in U_{\delta''}(a)$ nuqtalarda $|f(x)-A|<\frac{\varepsilon}{2}$, $|\varphi(x)-B|<\frac{\varepsilon}{2}$ tengsizliklar o‘rinli bo‘ladi. $\delta=\min\{\delta',\delta''\}$ deb olsak, barcha $x\in U_\delta(a)$ nuqtalarda



4.15-rasm

$$g(x)-f(x)+A-B\ge 0$$

hamda

$$g(x)-f(x)+A-B=|g(x)-B+A-f(x)|\le$$

$$\le|g(x)-B|+|f(x)-A|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

o‘rinli bo‘ladi. $\varepsilon=A-B$ deb olsak

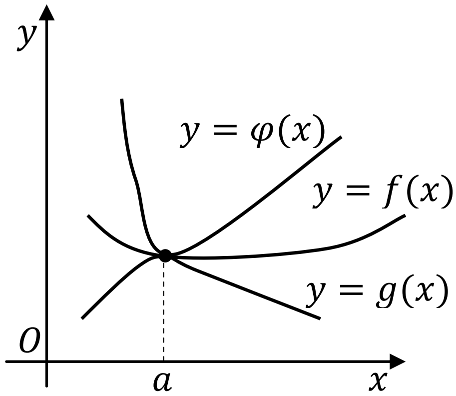
$$\varphi(x)-f(x)+A-B<A-B \quad \text{yoki} \quad \varphi(x)-f(x)<0$$

tengsizlik barcha $x\in U_\delta(a)$ nuqtalarda o‘rinli bo‘ladi. Bu esa teoremadagi shartga ziddir. Bu zidlikdan teoremaning isboti kelib chiqadi.◄

$f(x) < g(x)$ qat'iy tengsizlikdan ularning limitlari uchun ham qat'iy tengsizlik o'rinli bo'lishi kelib chiqmasligini aytib o'tish kerak. Bu limitlar mavjud bo'lsa, u holda ular uchun

$$\lim_{x\to a} f(x) \le \lim_{x\to a} g(x)$$

bo'lishinigina tasdiqlay olishimiz mumkin.



4.16-rasm

Masalan,

$$f(x) = x^2 \text{ va } g(x) = \begin{cases} 2x^2, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

funksiyalar uchun $f(x) < g(x)$ tengsilik o'rinli, ammo ularning limitlari teng:

$$\lim_{x\to 0} f(x) \le \lim_{x\to 0} g(x) = 0.$$

4.8-Teorema (oraliq funksiyaning limiti). Agar a nuqtaning biror atrofidagi barcha x nuqtalarda $g(x) \le f(x) \le \varphi(x)$ tengsizlik o'rinli bo'lsa (a nuqtaning o'zida esa o'rinli bo'lmasligi mumkin) va $g(x), \varphi(x)$ funksiyalar a nuqtada bitta A limitga ega bo'lishsa, u holda $f(x)$ funksiya ham a nuqtada A soniga teng bo'lgan limitga ega bo'ladi (4.16-rasm).

► a nuqtaning $U_{\delta'}(a)$ atrofidagi barcha x nuqtalarda $g(x) \le f(x) \le \varphi(x)$ tengsizlik o'rinli bo'lsin. $\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} \varphi(x) = A$ ekanligidan ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta'' > 0$ son topilib $|x - a| < \delta''$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x nuqtalarda $|\varphi(x) - A| < \frac{\varepsilon}{3}$, $|\psi(x) - B| < \frac{\varepsilon}{3}$ tengsizliklarning o'rinli bo'lishi kelib chiqadi. $\delta = \min\{\delta', \delta''\}$ deb olsak, barcha $x \in U_\delta(a)$ nuqtalar uchun

$$|f(x) - A| = |f(x) - g(x) + g(x) - A| \le |f(x) - g(x)| + |g(x) - A| =$$
$$f(x) - g(x) + |g(x) - A| \le \varphi(x) - g(x) + |g(x) - A| =$$
$$\varphi(x) - A + A - g(x) + |g(x) - A| \le |\varphi(x) - A| + |g(x) - A| + |g(x) - A| <$$
$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Bu esa limitning ta'rifiga ko'ra $\lim_{x\to a} f(x) = A$ ekanligini bildiradi.◄

4.9-Teorema (Koshi kriteriyasi). $f(x)$ funksiya a nuqtada limitga ega bo‘lishligi uchun ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son topilib, a nuqtaning $U_\delta(a)$ atrofidan olingan barcha $x_1, x_2 \in U_\delta(a)$ nuqtalarda

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon \tag{4.5}$$

tengsizlikning bajarilishi zarur va yetarli.

► **Zarurligi.** $f(x)$ funksiyaning a nuqtada A soniga teng limiti mavjud bo‘lsin. U holda limitning ta’rifiga ko‘ra ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son topilib, a nuqtaning $U_\delta(a)$ atrofidan olingan barcha $x_1, x_2 \in U_\delta(a)$ nuqtalarda

$$|f(x_1) - A| < \frac{\varepsilon}{2}, |f(x_2) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$$

tengsizliklar o‘rinli bo‘ladi. U holda

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |f(x_1) - A + A - f(x_2)| \leq |f(x_1) - A| + |A - f(x_2)| =$$
$$= |f(x_1) - A| + |f(x_2) - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Yetarliligi. Bu yerda biz funksiya limitining Geyne ta’rifidan foydalanamiz. a nuqtaga yaqinlashuvchi ixtiyoriy $\{x_n\}$ ketma-ketlikni olamiz: $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$. U holda shunday N tartib raqami topildiki, $(N+1)$- hadidan boshlab barcha hadlar a nuqtaning o‘zi kirmagan $\dot{U}_\delta(a)$ atrofiga tushadi va ular uchun (4.5) shart bajariladi. Bu esa ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday N tartib raqami topildiki, barcha $m, n > N$ uchun $|f(x_n) -$ *f(xm)<ε* tengsizlik o‘rinli bo‘ladi degan ma’noni anglatadi. Boshqacha qilib aytganda $\{f(x_n)\}$ ketma-ketlik fundamental ketma-ketlik bo‘ladi. Ketma-ketliklar uchun Koshi kriteiyasiga ko‘ra bu ketma-ketlik biror A soniga intiladi va ana shu A soni $f(x)$ funksiyaning ham a nuqtadagi limiti bo‘ladi.◄

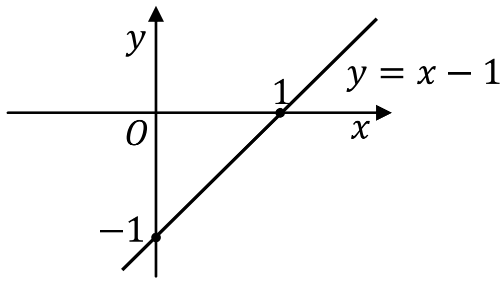
4.4. Cheksiz kichik va cheksiz katta funksyalar.

Cheksiz kichik funksyalar tushunchasi. $\alpha(x)$ funksya a nuqtaning biror atrofida aniqlangan bo‘lsin, a nuqtaning o‘zida esa aniqlanmagan ham bo‘lishi mumkin.

4.15-Ta’rif. Agar $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x) = 0$ bo‘lsa, $\alpha(x)$ funksya x o‘zgaruvchi a nuqtaga intilganda cheksiz kichik funksya yoki $x = a$ nuqtada cheksiz kichik funksiya deb ataladi.

Masalan, $\alpha(x) = x - 1$ funksya $x = 1$ nuqtadada cheksiz kichik funksiya bo‘ladi, chunki $\lim\limits_{x \to 1}(x - 1) = 0$.

Bu $y = x - 1$ funksyaning grafigi 4.17-rasmda tasvirlangan.



4.17-rasm

Umuman olganda, $\alpha(x) = x - a$ funksya $x = a$ nuqtada eng oddiy cheksiz kichik funksiya bo‘ladi. Endi limitning ta’rifidan foydalanib, cheksiz kichik funksyaga ta’rif beramiz.

4.16-Ta’rif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son topilib, $0 < |x - a| < \delta$ shartni qanoatlantiruvchi barcha x nuqtalarda

$$|\alpha(x)| < \varepsilon$$

tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, $\alpha(x)$ funksya $x = a$ nuqtada cheksiz kichik funksiya deb ataladi.

$x \to a$ da cheksiz kichik funksiya tushunchasi bilan bir qatorda $x \to \infty$, $x \to +\infty$ va $x \to -\infty$ da ham cheksiz kichik funksiya tushunchasini kiritish mumkin.

4.17-Ta’rif. Agar $\lim\limits_{x \to \infty} \alpha(x) = 0$ bo‘lsa, $\alpha(x)$ funksya $x \to \infty$ da cheksiz kichik funksiya deb ataladi.

Agar $\lim\limits_{x \to +\infty} \alpha(x) = 0$ yoki $\lim\limits_{x \to -\infty} \alpha(x) = 0$ bo‘lsa, $\alpha(x)$ funksya mos rafishda $x \to +\infty$ yoki $x \to -\infty$ da cheksiz kichik funksiya deb ataladi.

Masalan, $\alpha(x) = \frac{1}{x^2}, x \neq 0$ funksya $x \to \infty$ da cheksiz kichik bo‘ladi, chunki

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^2} = 0.$$

Ushbu $\alpha(x) = e^x$ funksya esa $x \to -\infty$ da cheksiz kichik bo‘ladi, chunki

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0.$$

Bundan keyin funksyaning limiti bilan bog‘liq barcha tushuncha va teoremalarni funksyaning faqat nuqtadagi limiti bo‘lgan hol uchun keltiramiz. $x \to \infty$, $x \to +\infty$ yoki $x \to -\infty$ hollar uchun mos tushuncha va teoremalarni ifodalash va isbot qilishni kitobxonning o‘ziga havola qilamiz.

Cheksiz kichik funksyalarning xossalari.

4.10-Teorema. Agar $\alpha(x)$ va $\beta(x)$ funksyalar $x = a$ nuqtada cheksiz kichik bo‘lsa, u holda ularning $\alpha(x) + \beta(x)$ yig‘indisi ham bu nuqtada cheksiz kichik funksiya bo‘ladi.

► Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ sonni olamiz. $\alpha(x)$ cheksiz kichik funksiya bo‘lganligi uchun shunday $\delta_1 > 0$ topiladiki $0 < |x - a| < \delta_1$ shartni qanoatlantiruvchi barcha x nuqtalarda

$$|\alpha(x)| < \varepsilon/2 \tag{4.6}$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. Xuddi shunday $\beta(x)$ cheksiz kichik funksiya bo‘lganligi uchun, shunday $\delta_2 > 0$ son topiladiki $0 < |x - a| < \delta_2$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x nuqtalarda

$$|\beta(x)| < \varepsilon/2 \tag{4.7}$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ deb olamiz. U holda $0 < |x - a| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x nuqtalarda (4.6),(4.7) tengsizliklar bir vaqtda o‘rinli bo‘ladi. Shuning uchun

$$|\alpha(x) + \beta(x)| \leq |\alpha(x)| + |\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

tengsizlik $0 < |x - a| < \delta$ tengsizlik qanoatlantiruvchi barcha x nuqtalarda o‘rinli bo‘ladi. Bu esa $\alpha(x) + \beta(x)$ yig‘indi $x = a$ nuqtada cheksiz kichik funksiya ekanligidan dalolat beradi.◄

Mulohaza. Teorema $x = a$ nuqtada ixtiyoriy chekli sondagi cheksiz kichik funksyalar uchun ham o‘rinli.

4.11-Teorema. Agar $\alpha(x)$ funksiya $x = a$ nuqtada cheksiz kichik, $f(x)$ esa bu nuqtaning atrofida chegaralangan bo‘lsa, u holda $\alpha(x) \cdot f(x)$ ham $x = a$ nuqtada cheksiz kichik funksiya bo‘ladi.

► Teorema shartiga ko‘ra $f(x)$ funksya a nuqtaning atrofida chegaralangan, ya’ni shunday $\delta_1 > 0$, $M > 0$ sonlar topiladiki, $|x - a| < \delta_1$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x nuqtalarda $|f(x)| \leq M$ o‘rinli bo‘ladi. Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ soni olamiz. $\alpha(x)$ cheksiz kichik funksiya bo‘lganligi uchun, shunday $\delta_2 > 0$ son topiladiki $|x - a| < \delta_2$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $x \neq a$ nuqtalarda

$$|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{M}$$

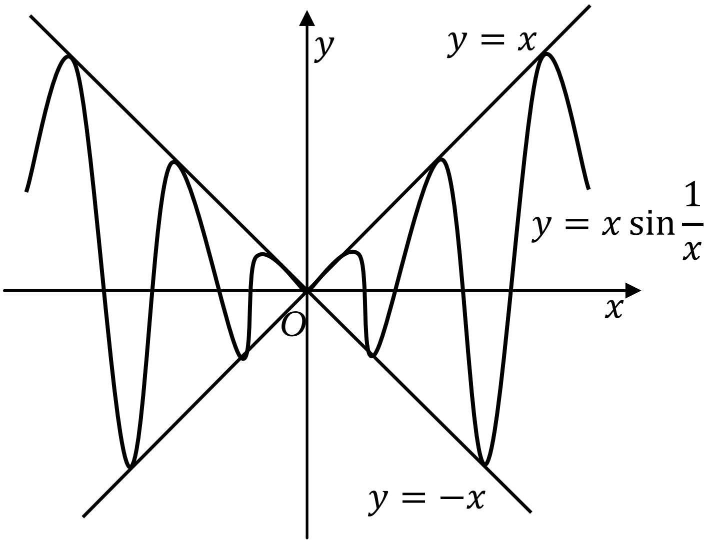
o‘rinli bo‘ladi. $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ deb olsak, u holda $0 < |x - a| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x nuqtalarda

$$|f(x)| < M, \text{va } |\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{M}$$

tengsizliklar o‘rinli. Shuning uchun yuqorida aytib o‘tilgan x nuqtalarda

$$|\alpha(x) \cdot f(x)| = |\alpha(x)||f(x)| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon$$

o‘rinli bo‘ladi, ya’ni $\alpha(x) \cdot f(x)$ ko‘paytma $x = a$ nuqtada cheksiz kichik funksiya bo‘ladi.◀



4.18-rasm

4.13-Misol. $y = x\sin\frac{1}{x}$ (4.18-rasm) funksyani $\alpha(x) = x$ va $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ funksyalarning ko‘paytmasi sifatida qarash mumkin. $x = 0$ nuqtada $\alpha(x)$ cheksiz kichik funksiya, $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ funksya esa $x = 0$ nuqtadan boshqa barcha nuqtalarda aniqlangan va bu nuqtaning ixtiyoriy atrofida ($x = 0$ nuqtaning o‘zi kirmaydi) chegaralangan. Shuning uchun 4.10-teoremaga ko‘ra $y = x\sin\frac{1}{x}$ funksya $x = 0$ nuqtada cheksiz kichik bo‘ladi, ya’ni $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$. ◀

Natija. Agar $\alpha(x)$ funksiya $x = a$ nuqtada cheksiz kichik, $f(x)$ funksya esa bu nuqtada chekli limitga ega bo‘lsa, u holda $\alpha(x) \cdot f(x)$ ko‘paytma ham $x = a$ nuqtada cheksiz kichik funksiya bo‘ladi.

► a nuqtada limitga ega bo‘lgan funksya a nuqtadan boshqa barcha nuqtalarda chegaralangan ekanligidan 4.10-teoremani qo‘llab $\alpha(x) \cdot f(x)$ ko‘paytmaning cheksiz kichik funksiya bo‘lishiga erishamiz.◄

4.1-Lemma. Agar $f(x)$ funksya a nuqtada noldan farqli limitga ega bo‘lsa, u holda $\frac{1}{f(x)}$ funksiya a nuqtaning o’zi kirmagan atrofida chegaralangan bo‘ladi.

► $\lim_{x\to a} f(x) = A \neq 0$ bo‘lsin. U holda ixtiyori $\varepsilon > 0$ son uchun, xususan $\varepsilon = \frac{|A|}{2}$ uchun, shunday $\delta > 0$ son topiladiki, $0 < |x - a| < \delta$ shartni qanoatlantiruvchi barcha x nuqtalarda

$$|A - f(x)| < \frac{|A|}{2}$$

o‘rinli bo‘ladi. $|A - f(x)| > |A| - |f(x)|$ tengsizlikka ko‘ra

$$|A| - |f(x)| < \frac{|A|}{2}$$

bundan esa $0 < |x - a| < \delta$ shartni qanoatlantiruvchi barcha x nuqtalar uchun

$$|f(x)| > \frac{|A|}{2}$$

tengsizlikka ega bo‘lamiz. Shunday qilib yuqorida ko‘rsatilgan x nuqtalarda $\frac{1}{f(x)}$ aniqlangan va uning uchun

$$\left|\frac{1}{f(x)}\right| = \frac{1}{|f(x)|} < \frac{2}{|A|}$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi, ya’ni $\frac{1}{f(x)}$ funksya a nuqtaning o’zi kirmagan atrofida chegaralangan bo‘ladi.

4.12-Teorema. Agar $\alpha(x)$ funksiya $x = a$ nuqtada cheksiz kichik, $f(x)$ funksya esa a nuqtada noldan farqli limitga ega bo‘lsa, u holda $\frac{\alpha(x)}{f(x)}$ nisbat ham $x = a$ nuqtada cheksiz kichik funksiya bo‘ladi.

► $\frac{\alpha(x)}{f(x)}$ nisbatni $\alpha(x) \cdot \frac{1}{f(x)}$ ko‘paytma shaklida yozamiz. Yuqorida keltirilgan 4.1-lemmaga ko‘ra $\frac{1}{f(x)}$ funksya a nuqtaning o’zi kirmagan atrofida chegaralangan.

Shuning uchun $\alpha(x)\cdot\frac{1}{f(x)}$ funksya cheksiz kichik funksiya bilan chegaralangan funksyaning ko‘paytmasi sifatida $x=a$ nuqtada cheksiz kichik funksiya bo‘ladi.◄

4.13-Teorema. $f(x)$ funksya a nuqtaning biror atrofida aniqlangan bo‘lsin (a nuqtaning o‘zida esa aniqlanmagan bo‘lishi ham mumkin). $f(x)$ funksya a nuqtada A limitga ega bo‘lishi uchun $f(x)$ funksyani

$$f(x)=A+\alpha(x)$$

yig‘indi ko‘rinishda tasvirlash mumkin bo‘lishi zarur va yetarli, bu yerda $\alpha(x)$ funksya $x=a$ nuqtada cheksiz kichik.

► **Zarurligi.** $f(x)$ funksya a nuqtada A soniga teng limitga ega bo‘lsin:

$$\lim_{x\to a} f(x)=A.$$

U holda

$$\alpha(x)=f(x)-A \tag{4.8}$$

deb belgilash kiritamiz va $\alpha(x)$ funksiya $x=a$ nuqtada cheksiz kichik bo‘lishini ko‘rsatamiz. Ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son olamiz. Limitning ta’rifiga ko‘ra tanlangan ε son uchun shunday $\delta>0$ son topiladiki $|x-a|<\delta$ shartni qanoatlantiruvchi barcha $x\neq a$ nuqtalar uchun $|f(x)-A|<\varepsilon$ tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. (4.8) tenglikga ko‘ra so‘ngi tengsizlikni $|\alpha(x)|<\varepsilon$ ko‘rinishda yozish mumkin. Bu esa $\alpha(x)$ funksyaning cheksiz kichik funksya ekanligidan dalolat beradi.

Yetarliligi. $f(x)$ funksya

$$f(x)=A+\alpha(x) \tag{4.9}$$

ko‘rinishda tasvirlangan bo‘lib, bunda A-o‘zgarmas son, $\alpha(x)$ esa $x=a$ nuqtada cheksiz kichik funksya bo‘lsin. $f(x)$ funksya a nuqtada A soniga teng limitga ega ekanligini ko‘rsatamiz. Ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son olamiz. Shartga ko‘ra $\alpha(x)$ funksiya $x=a$ nuqtada cheksiz kichik, u holda shunday $\delta>0$ son topiladiki $|x-a|<\delta$ shartni qanoatlantiruvchi barcha $x\neq a$ nuqtalarda $|\alpha(x)|<\varepsilon$ tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. U holda (4.9) tenglikka ko‘ra $\alpha(x)=f(x)-A$. Shuning uchun yuqorida aytilgan x nuqtalarda $|f(x)-A|<\varepsilon$ tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. Limitning ta’rifiga ko‘ra bu

$$A=\lim_{x\to a} f(x)$$

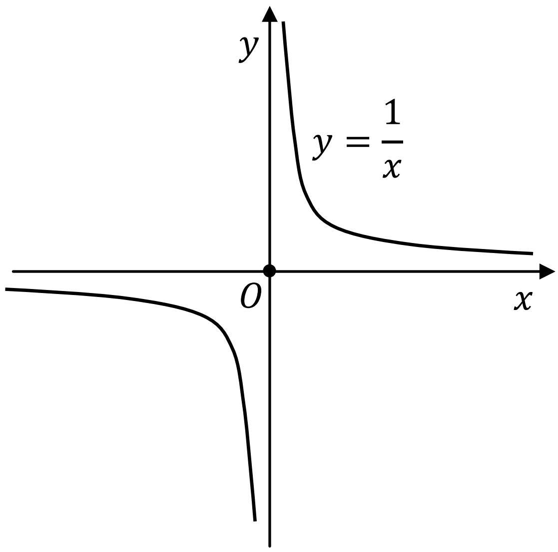
ekanligini bildiradi.◄

Cheksiz katta funksiyalar. Cheksiz kichik funksiyalar tushunchasi bilan bir qatorda cheksiz katta funksiya tushunchasi ham kiritiladi.

$f(x)$ funksya a nuqtaning biror atrofida aniqlangan bo‘lsin, a nuqtaning o‘zida esa aniqlanmagan bo‘lishi ham mumkin.

4.18-Ta’rif. Har qanday katta $M > 0$ soni uchun shunday $\delta > 0$ son topilib, $|x-a| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $x \neq a$ nuqtalarda $|f(x)| > M$ tengsizligi bajarilsa, $f(x)$ funksiya $x = a$ nuqtaga cheksiz katta funksiya deb ataladi va $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ ko‘rinishda yoziladi.

Ta’rifdagi $|f(x)| > M$ tengsizlikni $f(x) > M$ yoki $f(x) < -M$ tengsizliklar bilan almashtirib, mos ravishda musbat cheksiz katta $f(x)$ funksiyani: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ yoki manfiy cheksiz katta $f(x)$ funksiyani: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ hosil qilamiz.



4.19-rasm

4.14-Misol. Barcha $x \neq 0$ nuqtalarda aniqlangan $f(x) = \frac{1}{x}$ funksiya x argument nolga intilganda cheksiz katta funksiya bo‘ladi (4.19-rasm).

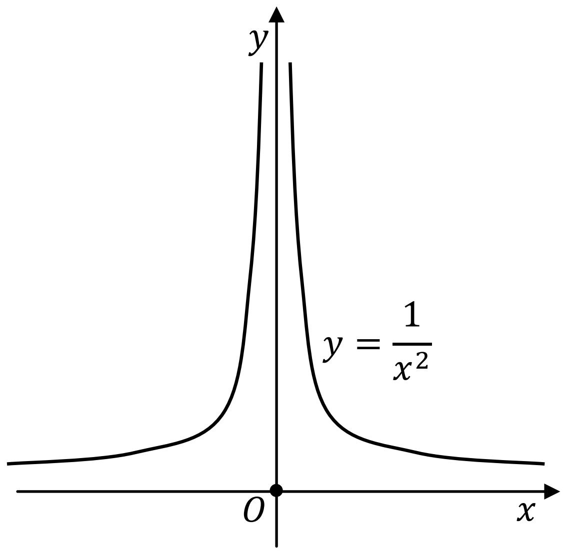
► Yetarlicha katta $M > 0$ sonini olamiz. $|f(x)| = \left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{|x|} > M$ tengsizlik $|x| = |x-0| < \frac{1}{M}$ tengsizlikka teng kuchli. Shuning uchun, agar $\delta = \frac{1}{M}$ deb olinsa, u holda $|x-0| = |x| < \frac{1}{M}$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $x \neq 0$ nuqtalar uchun $|f(x)| = \left|\frac{1}{x}\right| > M$ tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. Bu esa ta’rifga ko‘ra x argument nolga intilganda $f(x) = \frac{1}{x}$ cheksiz katta funksiya degan ma’noni anglatadi. ◄

Barcha $x \neq 0$ nuqtalarda aniqlangan $f(x) = \frac{1}{x^2}$ funksiya $x = 0$ nuqtada cheksiz katta funksiya bo‘ladi (4.20-rasm).

Cheksiz katta va cheksiz kichik funksiyalar o‘rtasidagi bog‘liqlik quyidagi teoremada ifodalangan.

4.14-Teorema. Agar $f(x)$ funksiya $x = a$ nuqtada cheksiz katta bo‘lsa, u holda $1/f(x)$ funksiya $x = a$ nuqtada cheksiz kichik funksiya bo‘ladi. Agar $\alpha(x)$ funksiya $x = a$ nuqtada cheksiz kichik va a nuqtaning biror atrofida noldan farqli bo‘lsa, u holda $1/\alpha(x)$ funksiya $x = a$ nuqtada cheksiz katta funksiya bo‘ladi.

► $f(x)$ funksiya $x = a$ nuqtada cheksiz katta funksiya bo‘lsin. Har qanday katta $M > 0$ soni uchun shunday $\delta > 0$ son topilib, $|x - a| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $x \neq a$ nuqtalar uchun $|f(x)| > M$ tengsizligi bajariladi. Xuddi shunday x nuqtalar uchun $\frac{1}{|f(x)|} < \frac{1}{M}$ tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. U holda ixtiyoriy $\varepsilon = \frac{1}{M}$ uchun yuqorida aytilgan x nuqtalarda



4.20-rasm

$\left|\frac{1}{f(x)}\right| = \frac{1}{|f(x)|} < \frac{1}{M}$ tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. Shuning uchun cheksiz kichik funksiyaning ta’rifiga ko‘ra $\frac{1}{f(x)}$ funksiya $x = a$ nuqtada cheksiz kichik bo‘ladi.

a nuqtaning biror atrofida noldan farqli $\alpha(x)$ funksiya $x = a$ nuqtada cheksiz kichik bo‘lsin. U holda ixtiyoriy $\varepsilon = \frac{1}{M}$>0 soni uchun shunday $\delta > 0$ son topiladiki, $|x - a| < \delta$ tengsizlini qanoatlantiruvchi barcha $x \neq a$ nuqtalarda $|\alpha(x)| < \varepsilon = 1/M$ tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. U holda ana shu x nuqtalar uchun $|1/\alpha(x)| > M$ o‘rinli bo‘ladi, ya’ni $1/\alpha(x)$ funksiya $x = a$ nuqtada cheksiz katta bo‘ladi. ◄

4.5. Limitga ega bo‘lgan funksiyalarning xossalari

Limitlar ustida arifmetik amallar. $f(x)$ va $g(x)$ funksyalar a nuqtaning biror atrofida aniqlangan bo‘lsin, a nuqtaning o‘zida esa aniqlanmagan bo‘lishi ham mumkin.

4.15-Teorema. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksyalar a nuqtada limitga ega bo‘lishsa, u holda ularning $f(x)+g(x)$ yig‘indisi ham, $f(x)-g(x)$ ayirmasi ham, $f(x)\cdot g(x)$ ko‘paytmasi ham, $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$ qo‘shimcha shartda $\frac{f(x)}{g(x)}$ nisbat ham bu nuqtada limitga ega bo‘ladi va

$$\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x); \tag{4.10}$$

$$\lim_{x\to a}[f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x); \tag{4.11}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}, \qquad \lim_{x\to a} g(x) \neq 0; \tag{4.12}$$

tengliklar o‘rinli bo‘ladi.

► $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A,\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = B$ bo‘lsin. 4.13-teoremaga ko‘ra

$$f(x) = A + \alpha(x), \qquad g(x) = B + \beta(x),$$

bu yerda $x \to a$ da $\alpha(x)$ va $\beta(x)$ funksyalar cheksiz kichik funksyalardir.

Bundan esa

1) $f(x) \pm g(x) = [A + \alpha(x)] \pm [B + \beta(x)] = [A \pm B] + [\alpha(x) \pm \beta(x)]$

$x \to a$ da $\alpha(x)$, $\beta(x)$ funksyalar cheksiz kichik bo‘lgani uchun, ularning yig‘indisi ham ayirmasi ham cheksiz kichik bo‘ladi.

Shunday qilib $f(x) \pm g(x)$ funksya $A \pm B$ o‘zgarmas son bilan $x \to a$ da cheksiz kichik bo‘lgan funksyaning yig‘indisi shaklida tasvirlandi. Shuning uchun 4.13-teoremaga ko‘ra $f(x) \pm g(x)$ funksya a nuqtada $A \pm B$ songa teng bo‘lgan limitga ega bo‘ladi:

$$\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = A \pm B = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x).$$

2) $f(x) \cdot g(x) = [A + \alpha(x)] \cdot [B + \beta(x)] = AB + A\beta(x) + B\alpha(x) + \alpha(x)\beta(x)$

Bu yerdagi $A\beta(x)$, $B\alpha(x)$, $\alpha(x)\beta(x)$ funksyalar $x \to a$ da cheksiz kichik funksyalar bo‘lganligi uchun cheksiz kichik funksya bilan chegaralangan funksyaning ko‘paytmasi sifatida ularning yig‘indisi ham $x \to a$ da cheksiz kichik bo‘ladi.

Shunday qilib $f(x)\cdot g(x)$ ko‘paytma funksya AB o‘zgarmas son bilan $x\to a$ da cheksiz kichik bo‘lgan funksyaning yig‘indisi shaklida tasvirlanadi. Shuning uchun 4.13-teoremaga asosan $f(x)\cdot g(x)$ funksya a nuqtada AB songa teng bo‘lgan limitga ega bo‘ladi:

$$\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)]=A\cdot B=\lim_{x\to a}f(x)\cdot\lim_{x\to a}g(x).$$

3) Qo‘shimcha $B\neq 0$ shartni inobatga olsak

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A+\alpha(x)}{B+\beta(x)}=\frac{\frac{1}{B}[B+\beta(x)][A+\alpha(x)]-\frac{A}{B}\beta(x)-\frac{1}{B}\beta(x)\alpha(x)}{B+\beta(x)}=$$

$$=\frac{1}{B}[A+\alpha(x)]-\frac{A}{B[B+\beta(x)]}\beta(x)-\beta(x)\frac{\alpha(x)}{B[B+\beta(x)]}=$$

$$=\frac{A}{B}+\alpha(x)\frac{1}{B}-\beta(x)\frac{A}{B[B+\beta(x)]}-\beta(x)\frac{\alpha(x)}{B[B+\beta(x)]}.$$

$x\to a$ da $(x)\frac{1}{B}$, $\beta(x)\frac{A}{B[B+\beta(x)]}$, $\beta(x)\frac{\alpha(x)}{B[B+\beta(x)]}$ hadlar cheksiz kichik funksyalar bo‘lganligi uchun (cheksiz kichik funksya bilan chegaralangan funksyaning ko‘paytmasi sifatida) ularning yig‘indisi ham cheksiz kichik bo‘ladi.

Shunday qilib $\frac{f(x)}{g(x)}$ nisbat $\frac{A}{B}$ o‘zgarmas bilan $x\to a$ da cheksiz kichik bo‘lgan funksyaning yig‘indisi shaklida tasvirlanadi. Shuning uchun 4.13-teoremaga asosan $\frac{f(x)}{g(x)}$ funksya a nuqtada $\frac{A}{B}$ nisbatga teng bo‘lgan limitga ega bo‘ladi:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}.$$

Natija. O‘zgarmas ko‘paytuvchini limit belgisidan tashqariga chiqarish mumkin.

4.1-Masala. $f(x)$ funksiya a nuqtada limitga ega, $g(x)$ funksiya esa limitga ega bo‘lmasa, $f(x)+g(x)$ funksiya bu nuqtada limitga ega bo‘lmasligini ko‘rsating.

► Teskarisidan faraz qilaylik, ya’ni $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]$ limit mavjud bo‘lsin. $f(x)+g(x)$ va $f(x)$ funksiyalar a nuqtada limitga ega bo‘lganligi uchun 4.15-teoremaga ko‘ra ularning ayirmasi ham a nuqtada limitga ega va

$$\lim_{x\to a}\big[\big(f(x)+g(x)\big)-f(x)\big]=\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)-f(x)]=\lim_{x\to a}g(x)$$

ya'ni $g(x)$ funksiya ham a nuqtada limitga ega ekan. Bu esa masala shartiga zid. Ana shu zidlik qilgan farazimizning noto‘riligini ko‘rsatadi.◄

4.2-Masala. Agar $\lim_{x\to a} f(x) \neq 0$ va $\lim_{x\to a} g(x)$ limit mavjud bo‘lmasa $\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)]$ limit mavjud bo‘lmasligini ko‘rsating.

► Teskarisidan faraz qilaylik, ya’ni $\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)]$ limit mavjud bo‘lsin. $\lim_{x\to a} f(x) \neq 0$ bo‘lganligi uchun $\frac{1}{f(x)}$ funksiya a nuqtada limitga ega. $f(x)\cdot g(x)$ va $\frac{1}{f(x)}$ funksiyalar a nuqtada limitga ega bo‘lganligi uchun 4.15-teoremaga ko‘ra ularning ko‘paytamasining ham limiti mavjud:

$$\lim_{x\to a}\left[(f(x)\cdot g(x))\cdot\frac{1}{f(x)}\right] = \lim_{x\to a}\left[f(x)\cdot g(x)\cdot\frac{1}{f(x)}\right] = \lim_{x\to a} g(x),$$

ya'ni $g(x)$ funksiya a nuqtada limitga ega ekan. Bu esa masala shartiga ziddir. Ana shu zidlik qilgan farazimizning noto‘g‘ri ekanligini anglatadi.◄

Murakkab funksiyaning limiti.

4.16-Teorema. Agar $y = f(x)$ funksiya a nuqtada A chekli limitga ega bo‘lsa va A qiymatni a nuqtaning o’zi kirmagan biror $\dot{U}(a)$ atrofida qabul qilmasa, $g(y)$ funksiya esa A nuqtada B limitga ega bo‘lsa, u holda $g(f(x))$ murakkab funksiya a nuqtada limitga ega va u B soniga teng.

► Geyne ta’rifiga ko‘ra $\lim_{x\to a} f(x) = A$ ekanligidan

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \tag{4.13}$$

munosbatni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $\{x_n\}$ ketma-ketlik

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A \tag{4.14}$$

tenglikni qanoatlantiradi. Aksincha ham o‘rinli, ya’ni (4.14) tenlikni qanoatlatiruvchi ixtiyoriy $\{x_n\}$ ketma-ketlik (4.13) tenglikni ham qanoatlantiradi.

Xuddi shu singari $\lim_{y\to A} g(y) = B$ ekanligidan

$$\lim_{n\to\infty} y_n = A \tag{4.15}$$

munosabatni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $\{y_n\}$ ketma-ketlik

$$\lim_{n\to\infty} g(y_n) = B \tag{4.16}$$

tenglikni qanoatlantiradi va aksincha, (4.16) tenglikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $\{y_n\}$ ketma-ketlik (4.15) tenglikni ham qanoatlantiradi.

$\{x_n\}$ berilgan a nuqtaga intiluvchi ixtiyoriy ketma-ketlik va barcha $n \in N$ uchun $x_n \neq a$ bo‘lsin. U holda $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$, ammo barcha $n \in N$ uchun $f(x_n) \neq 0$. Bu yerda $y_n = f(x_n)$ deb olamiz. $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = A$ va barcha $n \in N$ sonlarda $y_n \neq A$ bo‘lganligi uchun $\lim\limits_{n\to\infty} g(y_n) = B$ tenglik o‘rinli bo‘ladi. Shunday qilib, (5.4) munosabatni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $\{x_n\}$ ketma-ketlik $\lim\limits_{n\to\infty} g(f(x_n)) = B$ tenglikni ham qanoatlantirar ekan, bu esa Geyne ta’rifiga ko‘ra teoremani isbotlaydi.◄

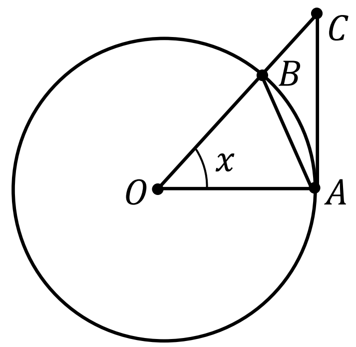
Bu teorema murakkab funksiyaning limitini hisoblashda o‘zgaruvchilarni almashtirishni

$$\lim_{x\to a} g(f(x)) = \lim_{y\to b} g(y) \qquad (4.17)$$

formula bo‘yicha amalga oshirish imkonini beradi.

Ikkita ajoyib limit. a nuqtada limitga ega bo‘lgan funksiyaning yuqorida qaralgan xossalari funksiyaning bu nuqta atrofida o‘zgarishini tahlil qilish imkonini beradi. Ammo ayrim hollarda bu xossalar va limitni hisoblash qoidalari yetarli bo‘lmay qoladi. Bunga $(\sin x)/x$ funksiyaning $a = 0$ nuqta atrofida o‘zgarishini misol sifatida keltirish mumkin.

$x -$ radiusi 1 bo‘lgan aylananing markaziy burchagi yoki yoyi uzunligi va $0 < x < \pi/2$ bo‘lsin (4.21-rasm). OAB uchburchakning S_1 yuzini, AOB sektorning S_2 yuzini va OAC uchburchakning S_3 yuzini taqqoslash natijasi $S_1 < S_2 < S_3$ tengsizlikni beradi. $|OA| = 1$ bo‘lganda



4.21-rasm

$S_1 = (\sin x)/2, S_2 = x/2, S_3 = (\operatorname{tg} x)/2$

ekanligidan ixtiyoriy $x \in (0,\ \pi/2)$ nuqtalarda

$$\frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\operatorname{tg} x}{2}$$

tengsizlik o‘rinli bo‘lishi kelib chiqadi.

Dastlab ixtiyoriy $x \in \mathbf{R}$ nuqtalar uchun

$$|\sin x| \leq |x| \qquad (4.18)$$

tengsizlikning o‘rinli ekanligini isbotalymiz. Haqiqatdan ham $x \in (0,\ \pi/2)$ bo‘lsa (4.18) tengsizlik yuqoridai qo‘sh tengsizlikdan kelib chiqadi. $x \geq \pi/2 > 1$ bo‘lsa (4.18) tengsizlik $|\sin x| \leq 1$ tengsizlik tufayli o‘rinli bo‘ladi. (4.18) tengsizlikda faqat juft funksiyalar qatnashgan, shuning uchun u $x < 0$ uchun ham o‘rinli. Nihoyat $x = 0$ bo‘lsa (4.18) tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Tengsizlikda limitga o‘tish haqidagi teoremani (4.18) tengsizlikka qo‘llab $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$ limitni topamiz. Xuddi shu teoramani $|\cos x - 1| = 2\sin^2(x/2) \leq x^2/2$ tengsizlikka qo‘llab $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$ limitni topamiz.

Endi yuqoridagi qo‘sh tengsizlikka qaytaylik. Uning chap qismidan $x \in (0,\ \pi/2)$ nuqtalar uchun $(\sin x)/x < 1$ ekanligi kelib chiqadi. $(\sin x)/x$ juft funksiya bo‘lganligi uchun bu tengsizlik $x \in (-\pi/2, 0)$ nuqtalar uchun ham o‘rinli bo‘ladi. Qo‘sh tengsizlikning ong qismidan$x \in (0,\ \pi/2)$ nuqtalar uchun $\cos x < (\sin x)/x$ ekanligi kelib chiqadi. Tengsizlikdagi funksiyalar juft bo‘lganligi uchun u $x \in (-\pi/2, 0)$ nuqtalar uchun ham o‘rinli bo‘ladi. Shunday qilib $x = 0$ nuqtanig $U_{\pi/2}(0)$ atrofidan olingan barcha x nuqtalar uchun

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

tengsizlik o‘rinli bo‘lar ekan, ya’ni $(\sin x)/x$ funksiya $x = 0$ nuqtada limitlari 1 bo‘lgan ikkita funksiyaning orasida yotar ekan. Oraliq funksiyaning limiti haqidagi teoremani qo‘llab, *birinchi ajoyib limit* deb ataluvchi

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad (4.19)$$

tenglikka ega bo‘lamiz.

(4.19) tenglikni geometrik jihatdan quyidagicha talqin qilish mumkin. x markaziy burchakning (4.21-rasmga qarang) kamayishi bilan yoy uzunligi uni tortib turuvchi vatar uzunligiga yaqinlashib boradi. (4.19) yordamida $0/0$ ko‘rinishdagi aniqmasliklarni ochish mumkin.

Endi ikkinchi ajoyib limit deb ataluvchi

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \tag{4.20}$$

tenglikni isbotlaymiz.

► $x > 1$ bo‘lsin. U holda

$$1 \le [x] \le x < [x]+1, \tag{4.21}$$

bu yerda $[x]$ orqali x sonning butun qismi belgilangan. Bu tengsizlikdan

$$\frac{1}{[x]+1} < \frac{1}{x} \le \frac{1}{[x]} \le 1$$

tengsizlikni hosil qilamiz. Tengsizlikning har bir qismiga birni qoshib uni

$$1+\frac{1}{[x]+1} < 1+\frac{1}{x} \le 1+\frac{1}{[x]}$$

ko‘rinishda yozamiz. So‘ngi tengsizlikning barcha qismi birdan katta. Shuning uchun ularni (4.21) tengsizlikning mos qismlariga teng musbat darajalarga ko‘tarsak

$$\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < \left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1} \tag{4.22}$$

3.2 da $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ tenglikni isbotlagan edik. U holda bu tenglikni hamda yaqinlashuvchi ketma-ketliklarning xossalarini qo‘llab

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = e\cdot 1 = e,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)} = \frac{e}{1} = e$$

tengliklarni yozamiz. Bu tengliklarni ketma-ketlikning limiti ta’rifi bo‘yicha yozsak, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ soni uchun shunday $N \in \boldsymbol{N}$ topilib, barcha $n > N$ uchun

$$\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - e\right| < \varepsilon, \qquad \left|\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n - e\right| < \varepsilon$$

tengsizliklar o‘rinli bo‘ladi. U holda (4.22) tengsizlikni inobatga olsak $x > N + 1$, $[x] = n > N$ uchun

$$e - \varepsilon < \left(1 + \frac{1}{[x] + 1}\right)^{[x]} < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} < \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1} < e + \varepsilon$$

o‘rinli bo‘ladi yoki

$$\left|\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} = e\right| < \varepsilon.$$

Bu esa argument $+\infty$ ga intilgandagi limit ta’rifiga ko‘ra

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} = e \tag{4.23}$$

ekanligini anglatadi.

Endi $x \to -\infty$ bo‘lsin. $x = -u$ deb olamiz, u holda $x \to -\infty, u \to +\infty$. Ayniy almashtirishlardan so‘ng

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} = \left(1 - \frac{1}{u}\right)^{-u} = \left(\frac{u}{u - 1}\right)^{u} = \left(1 + \frac{1}{u - 1}\right)^{u-1} \left(1 + \frac{1}{u - 1}\right)$$

tenglikni hosil qilamiz. (4.17) formulaga ko‘ra o‘zgaruvchilarni almashtiramiz va ko‘paytmaning limiti haqidagi teoremani va (4.23) tenglikni qo‘llab

$$\lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} = \lim_{u \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{u - 1}\right)^{u-1} \cdot \lim_{u \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{u - 1}\right) = e \cdot 1 = e$$

limitni topdik. Xulosa qilsak, x cheksizlikka har qanday intilganda ham (4.20) o‘rinli.

(4.20) tenglikda (4.17) formulaga ko‘ra $y = 1/x$ deb o‘zgaruvchini almashtiramiz va $x \to \infty$ da $y \neq 0$ degan shartni qo‘yamiz, u holda

$$\lim_{y \to 0} (1 + y)^{1/y} = e \tag{4.24}$$

natijani hosil qilamiz.

Birinchi qarashda (4.24) natija haqiqatga ziddek tuyuladi, chunki $y \to 0$ bo‘lsa, $1 + y \to 1$ bo‘ladi va birning har qanday darajasi bir bo‘ladi! Ammo bu tenglikni boshqacha izohlash mumkin. $y \to 0$ da daraja ko‘rsatkichi $1/y$ cheksiz katta funksiya, asos esa bir emas, balki $y \to 0$ da birdan cheksiz kichik miqdorga farq qiladi. Ushbu jadvalda $g(y) = (1 + y)^{1/y}$ funksiyaning y kamayib borishdagi qiymatlari keltirilgan:

y	1	1/2	1/3	1/4	0,1	0,01	0,001	0,0001
$g(y)$	2	2,250	2,370	2,441	2,594	2,7047	2,7169	2,7181

(4.20) va (4.24) formulalar 1^∞ ko‘rinishdagi aniqmaslikni ochish imkonini beradi Funksiyaning limitini hisoblashga bir necha misol keltiramiz.

4.15-Misol. Limitni hisoblang: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+3}{2x-5}$.

► Limit ostidagi funksiyani ikkita $f(x)=x^3+3$ va $g(x)=2x-5$ funksiyalarning nisbati sifatida qaraymiz. Bu funksiyalarning har biri $x=2$ nuqtada limitga ega:

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}(x^3+3)=2^3+3=11$$

$$\lim_{x\to 2} g(x)=\lim_{x\to 2}(2x-5)=-1$$

Maxrajdagi $g(x)$ funksiyaning limiti noldan farqli, shuning uchun bu yerda nisbatning limiti haqidagi teoremani qo‘llashimiz mumkin:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3+3}{2x-5}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(x^3+3)}{\lim\limits_{x\to 2}(2x-5)}=\frac{11}{-1}=-11.$$

4.16-Misol. Limitni hisoblang: $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-9}{x+3}$.

► $f(x)=x^2-9$ va $g(x)=x+3$ deb olamiz. Bu funksiyalar $\lim\limits_{x\to -3} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to -3} g(x)=0$ limitlarga ega. Shuning uchun $\frac{0}{0}$ ko‘rinishdagi aniqmaslikka ega bo‘lamiz. Limit ostidagi funksiya $x=-3$ nuqtada aniqlanmagan va bu nuqtaning o‘zida funksiyani qaramasdan, faqat limiti qaraladi. Suratdagi $f(x)$ funksiyani ko‘paytuvchilarga ajratamiz:

$$\frac{x^2-9}{x+3}=\frac{(x-3)(x+3)}{x+3}.$$

O‘ng tomondagi kasrni $x+3\neq 0$ ifodaga bo‘lamiz:

$$\frac{x^2-9}{x+3}=x-3,\qquad x\neq -3.$$

Shuning uchun

$$\lim_{x\to -3}\frac{x^2-9}{x+3}=\lim_{x\to -3}(x-3)=-6.\ \blacktriangleleft$$

4.17-Misol. Limitni hisoblang: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x^2}-2}{x^2}$

► Surat va maxrajdagi funksiyalarning $x=0$ nuqtadagi limitlari nolga teng, shuning uchun yana $\frac{0}{0}$ ko‘rinishdagi aniqmaslikka ega bo‘lamiz. Bu aniqmaslikni ochish uchun kasrning surat va maxrajini $\sqrt{4+x^2}+2$ ifodaga ko‘paytiramiz. $x\neq 0$ holda

$$\frac{\sqrt{4+x^2}-2}{x^2}=\frac{\left(\sqrt{4+x^2}-2\right)\left(\sqrt{4+x^2}+2\right)}{x^2\left(\sqrt{4+x^2}+2\right)}=\frac{4+x^2-4}{x^2\left(\sqrt{4+x^2}+2\right)}=\frac{1}{\sqrt{4+x^2}+2}.$$

Hosil qilingan funksiyaga nisbatning limiti haqidagi teoremani qo‘llash mumkin:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x^2}-2}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{4+x^2}+2}=\frac{1}{4}.$$

4.18-Misol. Limitni hisoblang: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 7x}$.

► Limit ostidagi funksiyaning ko‘rinishini o‘zgartiramiz:

$$\frac{\sin 5x}{\sin 7x}=\frac{\sin 5x}{x}\frac{x}{\sin 7x}=\frac{5}{7}\frac{\sin 5x}{5x}\frac{7x}{\sin 7x}.$$

$\lim\limits_{x\to 0}5x=0$, $\lim\limits_{x\to 0}7x=0$ bo‘lganligi uchun murakkab funksiyaning limiti haqidagi teoremani qo‘llab

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}=1,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{7x}=1$$

tengliklarga ega bo‘lamiz. U holda ko‘paytmaning limiti haqidagi teoremani qo‘llab

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 7x}=\frac{5}{7}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{7x}=\frac{5}{7}\cdot 1\cdot 1=\frac{5}{7}.$$ ◄

4.19-Misol. Limitni hisoblang: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$

► Ayniy almashtirishlardan so‘ng

$$\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}=\left(\frac{1+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{2}{x^2}}\right)^{x^2}=\frac{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^2}}{\left(1-\frac{2}{x^2}\right)^{x^2}}=$$

$$=\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{1/x^2}}\left(1-\frac{2}{x^2}\right)^{\frac{2}{-2/x^2}}$$

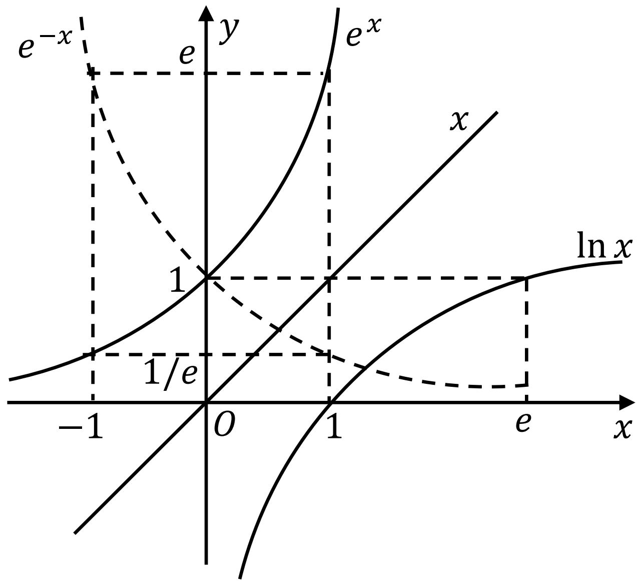
ifodani hosil qilamiz. Bu yerda $1/x^2 = y$ va $-2/x^2 = z$ deb olsak

$$\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2} = (1+y)^{1/y}(1+z)^{1/z}\left[(1+z)^{1/z}\right]^2$$

ko‘rinishni oladi. Agar $x \to \infty$, u holda $y \to 0$ va $z \to 0$, o‘zgaruvchilarni almashtirgandan so‘ng ko‘paytmaning limiti haqidagi teoremani va (4.17), (4.24) formulalarni qo‘llaymiz:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2} = \lim_{y\to 0}(1+y)^{1/y} \cdot \lim_{z\to 0}(1+z)^{1/z} \cdot \lim_{z\to 0}\left[(1+z)^{1/z}\right]^2 = e^4.$$

Eksponenta, natural logarifm va giperbolik funksiyalar. Matematik tahlilda va amaliy masalalarda e soni muhim o‘rin tutadi. Xususan eksponensial (yoki qisqa qilib eksponenta) deb ataluvchi e^x (ba’zan $\exp x$ ko‘rinishda ham yoziladi) ko‘rsatkichli funksiyaning asosi bo‘lib xizmat qiladi. Bu funksiyaga teskari bo‘lgan $\ln x = \log_e x$ logarifmik funksiyning ham asosi bo‘ladi. Ularning grafiklari 4.22-rasmda tasvirlangan. Bu yerda e^{-x} funksiyaning ham grafigi keltirilgan.



4.22-rasm

e asosli logarifmlarni natural logarifmlar deb ataldi. Ular uchun asosiy logarifmik ayniyat

$$e^{\ln x} = \exp(\ln x) = x \qquad (4.25)$$

bo‘ladi. $\ln x$ funksiya asosi birdan katta bo‘lgan logarifmik funksiyalarning barcha xossalariga ega. Bir asosdan ikkinchi asosga o‘tadigan ma’lum formulalar ham o‘rinli, xususan

$$\ln x = \frac{\lg x}{\lg e} = \ln 10 \cdot \lg x = 2{,}3026 \cdot \lg x,$$

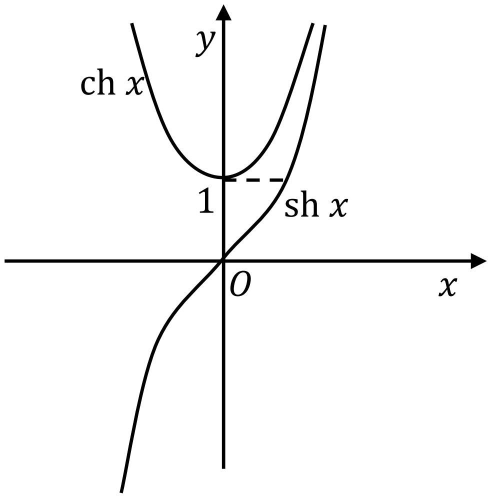
$$\lg x = \frac{\ln x}{\ln 10} = \lg e \cdot \ln x = 0{,}4343 \cdot \ln x.$$

Shunday qilib, e^x va $\ln x$ funksiyalar asosiy elementar a^x va $\log_a x$ funksiyalarning $a = e$ bo‘lgandagi xususiy hollari ekan.

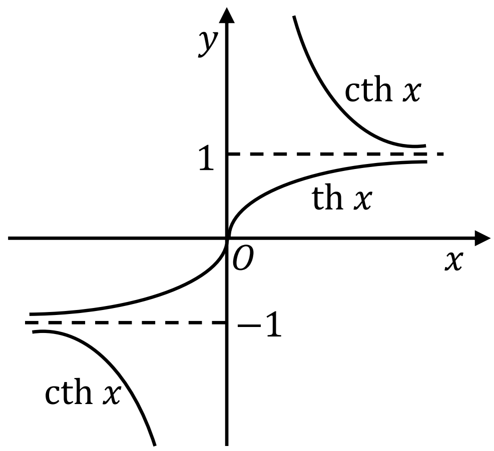
Eksponensial funksiya orqali giperbolik sinus, kosinus, tangens va kotangens funksiyalar quyidagi formulalar bilan aniqlanadi:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}, \qquad \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}.$$

Ulardan $\operatorname{ch} x$ - juft, qolganlari $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{th} x$, $\operatorname{cth} x$ - toq ekanligini ta’kidlab o‘tamiz. Ularning grafiklari 4.23, 4.24-rasmlarda berilgan.



4.23-rasm



4.24-rasm

Trigonometrik funksiyalardagi ma’lum $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ formulaga o‘xshash giperbolik funksiyalarda ham

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1 \tag{4.26}$$

formula ixtiyoriy $x \in \mathbf{R}$ nuqtalar uchun o‘rinli. Bundan tashqari

$$\begin{aligned} \operatorname{sh}(x \pm y) &= \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} y \cdot \operatorname{ch} x \\ \operatorname{ch}(x \pm y) &= \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} y \cdot \operatorname{sh} x \end{aligned} \tag{4.27}$$

formulalar ham o‘rinli.

4.6. Funksiyaning uzluksizligi.

Uzluksizlikning ta’rifi. $f(x)$ funksiya a nuqtaning biror $U(a)$ atrofida aniqlangan va bu nuqtada aniq bir $f(a)$ qiymatni qabul qilsin.

4.19-Ta’rif. Agar $x = a$ nuqtada $f(x)$ funksiyaning limiti mavjud va u $f(a)$ qiymatga teng bo‘lsa, $f(x)$ funksiya a nuqtada uzluksiz deyiladi.

Shunday qilib

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \tag{4.28}$$

tenglik o‘rinli bo‘lsa, $f(x)$ funksiya a nuqtada uzluksiz deb atalar ekan.

Funksiyaning uzluksizligi $\varepsilon - \delta$ tilida quyidagicha ta’riflanadi.

4.20-Ta’rif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son topilib, $|x - a| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x nuqtalarda

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \tag{4.29}$$

tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, $f(x)$ funksiya a nuqtada uzluksiz deyiladi.

Funksiyaning limitiga $x \neq a$ degan shartni qo‘ygan edik. Bu yerda esa bu shart bajarilishini talab qilmaymiz.

Funksiya uzluksizligi tushunchasini ifodalashning yana bir ko‘rinishini keltiramiz. $y = f(x)$ funksiya a nuqtaning biror $U(a)$ atrofida aniqlangan bo‘lsin. Qaralayotgan a nuqtani asosiy nuqta deb hisoblab, argumentning a nuqtadan Δx miqdorga (manfiymi yoki musbatmi farqi yo‘q) farq qiluvchi boshqa $x = a + \Delta x \in U(a)$ qiymatini olamiz. Δx miqdorni argumentning orttirmasi deb ataymiz. Funksiya o‘zgarishining

$$\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a) \tag{4.30}$$

qiymatini f funksiyaning a nuqtadagi x argumentning Δx orttirmasiga mos keluvchi orttirmasi deyiladi.

$f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

uzluksizlik shartini

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(x + \Delta x) = f(a)$$

ko‘rinishda yozish mumkin. Bu esa

$$\lim_{\Delta x\to 0} [f(x + \Delta x) - f(a)] = 0 \tag{4.31}$$

tenglikka teng kuchli. $f(x + \Delta x) - f(a) = \Delta y$ ekanligini e’tiborga olsak, (4.31) tenglikni

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0$$

ko‘rinishda yozish mumkin.

4.21-Ta'rif. Δx argument orttirmasi nolga intilganda $f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi bu orttirmaga mos keluvchi Δy orttirmasi ham nolga intilsa, $y = f(x)$ funksiya a nuqtada uzluksiz deyiladi.

4.20-Misol. $y = x^3$ funksiya son o'qining ixtyoriy a nuqtasida uzluksiz ekanligini ko'rsatamiz.

► a nuqtadagi ixtiyoriy Δx orttirma uchun

$\Delta y = (a + \Delta x)^3 - a^3 = 3a^2 \cdot \Delta x + 3a \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 = (3a^2 + 3a\Delta x + (\Delta x)^2)\Delta x$

tenglikni yozish mumkin. Bu tenglikda $\Delta x \to 0$ da $\Delta y \to 0$ bo'lishi ko'rinib turibdi. ◄

4.21-Misol. $y = \sin x$ funksiya son o'qining ixtyoriy a nuqtasida uzluksiz ekanligini ko'rsatamiz.

► a nuqtadagi ixtiyoriy Δx orttirma uchun

$$|\Delta y| = |\sin(a + \Delta x) - \sin a| = \left|2\sin\frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(a + \frac{\Delta x}{2}\right)\right| \leq |\Delta x|$$

o'rinli bo'ladi. Bu yerda $|\cos(a + \Delta x/2)| \leq 1$ va $|\sin(\Delta x/2)| \leq |\Delta x|/2$ ((4.18) formulaga qarang) tengsizliklardan foydalanildi. Shuning uchun $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$. ◄

Ba'zan funksiyaning nuqtadagi uzluksizligining quyidagi ta'rifidan foydalanish qulay.

4.22-Ta'rif (Geyne). $f(x)$ funksiya a nuqtani o'zida saqlovchi U to'plamda aniqlangan bo'lsin. Agar a nuqtaga intiluvchi ixtiyoriy $\{x_n\}$, $x_n \in U$ ketma-ketlikka mos keluvchi $\{f(x_n)\}$ ketma-ketlik funksiyaning $f(a)$ qiymatiga intilsa, $f(x)$ funksiya a nuqtada uzluksiz deyiladi.

Bu ta'rifdan funksiyaning nuqtada uzilishga ega bo'lishini isbotlashda foydalanish qulayroq. Buning uchun $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = a$ tenglikni qanoatlantiruvchi biror $\{x_n\}$ ketma-ketlik tuzib, unga mos keluvchi $\{f(x_n)\}$ ketma-ketlik uchun $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) \neq f(a)$ munosabatning o'rinli bo'lishini ko'rsatish yetarli.

Geyne ta'rifidan foydalanib

$$\mathrm{D}(x) = \begin{cases} 1, & \text{agar } x - \text{ratsional;} \\ 0, & \text{agar } x - \text{irratsional} \end{cases}$$

Dirixle funksiyasining ixtiyoriy $a \in \mathbf{R}$ nuqtada uzluksiz emasligini ko'rsatamiz.

► a ratsional son bolsin, u holda $\mathrm{D}(a) = 1$bo‘ladi. a nuqtaga yaqinlashuvchi irratsional sonlardan tuzilgan $\{x_n\}$ ketma-ketlikni olamiz (bunday ketma-ketlikni har doim tuzish mumkin). Dirixle funksiyasining berilishiga ko‘ra bu nuqtalarda $\mathrm{D}(x_n) = 0$ bo‘ladi. U holda $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{D}(x_n) = 0 \neq 1 = \mathrm{D}(a)$, ya’ni $\{x_n\}$ ketma-ketlikka mos keluvchi $\{\mathrm{D}(x_n)\}$ ketma-ketlik $\mathrm{D}(a)$ qiymatga intilmas ekan.

a nuqta irratsional son bo‘lganda xuddi shu singari a nuqtaga intiluvchi ratsional sonlardan tuzilgan $\{y_n\}$ ketma-ketlikka mos keluvchi $\{\mathrm{D}(y_n)\}$ ketma-ketlikning limiti 1 bo‘ladi, funksiyaning bu nuqtadagi qiymati esa $\mathrm{D}(a) = 0$ bo‘ldi.
Ikkala holda ham Geyne ta’rifiga ko‘ra funksiya a nuqtada uzilishga ega bo‘ladi. ◄

Funksiya uzluksizligining to‘rtala ta’rifi ham teng kuchli. Har bir holda qulay bo‘lgan ta’rifdan foydalaniladi.

Endi nuqtada uzluksiz bo‘lgan funksiyaning xossalarini o‘rganamiz.

4.17-Teorema. Agar $f(x)$ funksiya a nuqtada uzluksiz va $f(a) > A$ (mos ravishda $f(a) < A$) bo‘lsa, u holda shunday $\delta > 0$ son topiladiki, $U_\delta(a)$ atrofdan olingan barcha x nuqtalar uchun $f(x) > A$ (mos ravishda $f(x) < A$) tengsizlik o‘rinli bo‘ladi.

► Aniqlik uchun $f(a) > A$ va $h = f(a) - A > 0$ bo‘lsin, u holda $f(a) = A + h$bo‘laddi. $\varepsilon = h/2$ deb olsak, $f(x)$ funksiyaning a nuqtada uzluksizligiga ko‘ra shunday $\delta > 0$ son topiladiki, $|x - a| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x nuqtalar uchun $|f(x) - f(a)| < h/2$ yoki

$$-\frac{h}{2} < f(x) - f(a) < \frac{h}{2}$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. Bundan esa barcha $x \in U_\varepsilon(a)$ uchun

$$f(x) > f(a) - \frac{h}{2} = A + h - \frac{h}{2} = A + \frac{h}{2} > A. \quad ◄$$

4.18-Teorema (uzluksiz funksiya ishorasining o‘zgarmasligi). Agar $f(x)$ funksiya a nuqtada uzluksiz va $f(a) \neq 0$ bo‘lsa, u holda a nuqtaning shunday $U_\delta(a)$ atrofi topiladiki, bu intervalda funksiya nolga aylanmaydi va ishorasini o‘zgartirmaydi ($f(a)$ sonining ishorasi bilan bir xil bo‘ladi).

► 4.17-Teoremada $A = 0$ deb olinsa teoremaning isboti kelib chiqadi. ◄

Uzluksiz funksiyalar ustida amallar.

4.19-Teorema. $fx)$ va $g(x)$funksiyalar a nuqtaning biror atrofida aniqlangan bo‘lsin. Agar $fx)$ va $g(x)$funksiyalar a nuqtada uzluksiz bo‘lsa, u holda ularning $f(x)+g(x)$ yig‘indisi, $f(x)-g(x)$ ayirmasi, $f(x)\cdot g(x)$ ko‘paytmasi va $g(a)\neq 0$ qo‘shimcha shartda $f(x)/g(x)$ nisbati ham a nuqtada uzluksiz bo‘ladi.

► Nisbatning uzluksizligini ko‘rsatamiz.

$fx)$ va $g(x)$funksiyalar a nuqtada uzluksiz va $g(a)\neq 0$ bo‘lsin. U holda uzluksiz funksiya ishorasining o‘zgarmasligi haqidagi teoremaga ko‘ra a nuqtaning $g(x)\neq 0$ bo‘ladigan atrofi mavjud bo‘ladi. Shuning uchun a nuqtaning ana shu atrofida $F(x)=f(x)/g(x)$ nisbat funsiya aniqlangan. Teorema shartiga ko‘ra $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=g(a)\neq 0$, nisbatning limiti haqidagi teoremani qo‘llab

$$\lim_{x\to a} F(x)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}=\frac{f(a)}{g(a)}=F(a)$$

tenglikni hosil qildik. Shunday qilib $\lim\limits_{x\to a} F(x)=F(a)$, ya’ni $F(x)=f(x)/g(x)$ funksiya a nuqtada uzluksiz ekan.

Teoremaning qolgan tasdiqlari ham shu kabi isbotlanadi. ◄

Murakkab funksiyaning uzluksizligi.

4.20-Teorema. Agar $y=f(x)$ funksiya a nuqtada uzluksiz, $g(y)$ funksiya esa mos $A=f(a)$ nuqtada uzluksiz bo‘lsa, u holda $g(f(x))$ murakkab funksiya a nuqtada uzluksiz bo‘ladi.

► Teoremaning shartiga ko‘ra $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)=A$, $\lim\limits_{y\to A} g(y)=g(A)=B$. Murakkab funksiyaning limiti haqidagi teoremani qo‘llab

$$\lim_{x\to a} g(f(x))=\lim_{y\to A} g(y)=g(A)=g(f(a)) \tag{4.32}$$

tenglikni hosil qildik, ya’ni $g(f(x))$ murakkab funksiya a nuqtada uzluksiz ekan. ◄

Agar (4.32) tenglikning o‘ng tomonidagi $g(y)$ funksiyaning $f(a)$ argument qiymatini $f(x)$ funksiyaning limiti orqali ifodalasak

$$\lim_{x\to a} g(f(x))=g\left(\lim_{x\to a} f(x)\right) \tag{4.33}$$

tenglikni yozish mumkin.

4.22-Misol. Limitni hisoblang:

$$\lim_{x\to\pi}(1+\operatorname{tg}x)^{3\operatorname{ctg}x}.$$

► Limit ostidagi funksiyani

$$(1+\operatorname{tg}x)^{3\operatorname{ctg}x}=\left((1+\operatorname{tg}x)^{1/\operatorname{tg}x}\right)^3$$

ko‘rinishda yozib olamiz va $y=f(x)=(1+\operatorname{tg}x)^{1/\operatorname{tg}x}$, $g(y)=y^3$ funksiyalarning superpozitsiyasi sifatida qaraymiz. Agar $u=\operatorname{tg}x$ deb o‘zgaruvchilarni almashtirsak, $\lim\limits_{x\to\pi}f(x)$ limitni hisoblash qiyin bo‘lmaydi. Haqiqatdan ham ikkinchi ajoyib limitni ((4.24) formulaga qarang) inobatga olsak

$$\lim_{x\to\pi}(1+\operatorname{tg}x)^{1/\operatorname{tg}x}=\left|\begin{matrix}\operatorname{tg}x=u\\ u\to 0\\ x\to\pi\end{matrix}\right|=\lim_{u\to 0}(1+u)^{1/u}=e$$

limitni topamiz. U holda $g(y)=y^3$ funksiyaning uzluksizligidan (4.20-Misol) (4.33) formulaga ko‘ra

$$\lim_{x\to\pi}(1+\operatorname{tg}x)^{3\operatorname{ctg}x}=\left(\lim_{x\to\pi}(1+\operatorname{tg}x)^{1/\operatorname{tg}x}\right)^3=e^3.\ ◄$$

Bir tomonlama uzluksizlik. Uzilish nuqtalari. $f(x)$ funksiya a nuqtaning o‘ng (chap) yarim atrofida aniqlangan bo‘lsin.

4.23-Ta’rif. Agar $f(x)$ funksiyaning a nuqtada o‘ng limiti mavjud va bu limit $f(a)$ qiymatga teng, ya’ni

$$\lim_{x\to a+0}f(x)=f(a+0)=f(a) \tag{4.34}$$

tenglik orinli bo‘lsa, $f(x)$ funksiya a nuqtada o‘ngdan uzluksiz deyiladi.

a nuqtada chapdan uzluksizlik xuddi shu singari

$$\lim_{x\to a-0}f(x)=f(a-0)=f(a) \tag{4.35}$$

tenglik bilan aniqlanadi.

Agar funksiya $[a,b]$ kesmada aniqlangan bo‘lsa, uning chegaraviy a va b nuqtalarga nisbatan a nuqtada o‘ng uzluksizlik, b nuqtada chap uzluksizlik haqida gapirish mumkin. Oraliqning ixtiyoriy ichki nuqtasidagi uzluksizlik bu nuqtadagi o‘ng va chap uzluksizlikka teng kuchli, chunki nuqtadagi limitning mavjudligi o‘ng va chap limitlarning mavjudligiga teng kuchli (4.2-Teorema).

Funksiya uzluksiz bo‘ladigan nuqtani bu funksiyaning uzluksizlik nuqtasi deb ataymiz. $f(x)$ funksiyaning a uzluksizlik nuqtasida quyidagi shartlar bajarilgan bo‘ladi:

1) Funksiya a nuqtada va uning biror atrofida aniqlangan;
2) a nuqtada ikkala bir tomonlama limitlar mavjud va ular chekli;
3) a nuqtadagi ikkala bir tomonlama limitlar ustma-ust tushadi, ya’ni $f(a+0)=f(a-0)$;
4) a nuqtada ustma-ust tushadigan bir tomonlama limitlar funksiyaning bu nuqtadagi qiymatiga teng, ya’ni

$$f(a+0)=f(a-0)=f(a) \tag{4.36}$$

4.24-Ta’rif. a nuqtada uzluksiz bo‘lmagan funksiyani bu nuqtada uzilishli funksiya, a nuqtani esa bu funksiyaning uzilish nuqtasi deb ataladi.

a nuqta haqida uzilish nuqtasi sifatida gapirilganda, a nuqtaning ixtiyoriy kichik atrofida $f(x)$ funksiya aniqlanish sohasining a nuqtadan farqli boshqa nuqtalari ham mavjud deb faraz qilinadi.

(4.36) uzluksizlik shartining qanday buzilganligiga qarab uzilish nuqtalari turlarga bo‘linadi.

4.25-Ta’rif. Agar $f(x)$ funksiya a nuqtada chekli chap va o‘ng limitlarga ega va ular o‘zaro teng, ammo funksiyaning a nuqtadagi qiymatiga teng bo‘lishmasa

$$f(a+0)=f(a-0)\neq f(a),$$

u holda a nuqta $f(x)$ funksiyaning uzilishi bartaraf qilinadigan nuqtasi deb ataladi.

Uzilishi bartaraf qilinadigan nuqta degan iboraning ma’nosi shundan iboratki, yangi uzluksiz funksiya hosil qilish uchun funksiyaning faqat bitta a nuqtadagi qiymatini o‘zgartirish yetarli. $f(x)$ funksiya yordamida tuziladigan

$$F(x)=\begin{cases} f(x), & x\neq a; \\ \lim\limits_{x\to a} f(x), & x=a \end{cases}$$

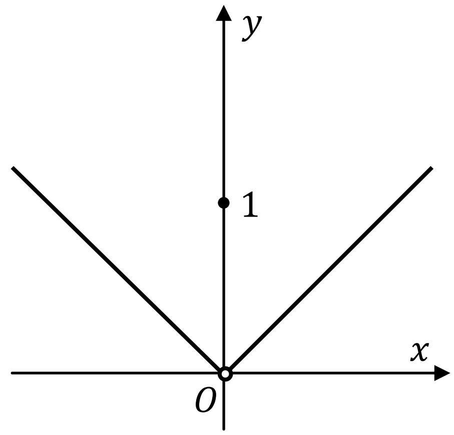
funksiya a nuqtada uzluksiz bo‘ladi. Shunday qilib funksiyaning a nuqtadagi qiymatini o‘zgartirib uzilishni “bartaraf” qildik.

4.23-Misol. $f(x)=\begin{cases} |x| & x\neq 0; \\ 1, & x=0 \end{cases}$ funksiyani qaraymiz.

► Funksiyaning $x = 0$ nuqtadagi chap va ong limitlarini hisoblaymiz:

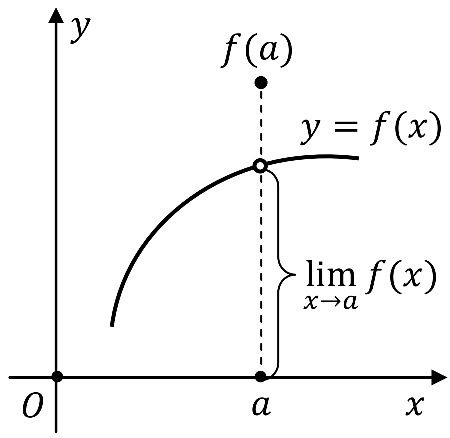
$$\lim_{x\to 0-0} f(x) = \lim_{x\to 0-0} f(x) = 0 \neq 1 = f(0)$$

ya'ni $x = 0$ nuqta uzilishi bartaraf qilinadigan nuqta ekan (4.25-rasm). Agar $f(x)$ funksiyaning $x = 0$ nuqtadagi qiymatini $F(0) = 0$ deb ozgartirsak, bu nuqtada uzluksiz bo'lgan $F(x) = |x|$ funksiyani hosil qilamiz.◄



4.25-rasm

Umuman olganda $(a - \delta_1, a) \cup (a, a + \delta_2)$ to'plamda uzluksiz va a nuqtada bartaraf qilinadigan uzilishga ega funksiyaning grafigi sifatida absissasi a bo'lgan nuqtasi o'yib olib tashlangan uzluksiz egri chiziq xizmat qiladi (4.26-rasm).



4.26-rasm

Uzilishi bartaraf qilinadigan a nuqtada $\lim_{x\to a} f(x)$ limit mavjud bo'lishini ta'kidlab o'tamiz.

Agar $\lim_{x\to a} f(x)$ limit mavjud bo'lmasa a nuqta bartaraf qilib bo'lmaydigan uzilish nuqtasi deb ataladi.

4.26-Ta'rif. Agar $f(x)$ funksiya a nuqtada chap va o'ng limitlarga ega bo'lib, ammo ular har xil bo'lsa

$$\lim_{x\to a-0} f(x) \neq \lim_{x\to a+0} f(x),$$

u holda a nuqta $f(x)$ funksiyaning chekli sakrashli uzilish nuqtasi deb ataladi.

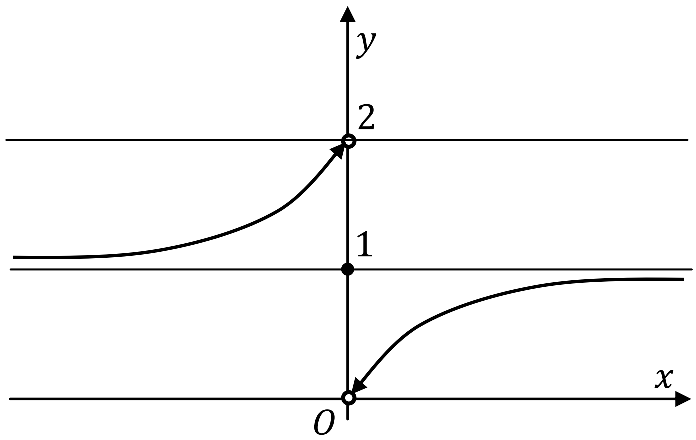
Uzilsh nuqtasini bunday nomlashning ma'nosi shundan iboratki, x o'zgaruvchi a nuqta orqali o'tishda $f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi o'ng va chap limitlarining ayirmasi bilan o'lchanadigan sakrash yuz beradi.

4.24-Misol. Ushbu funksiyani qaraymiz (4.27-rasm):

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{1 + e^{1/x}}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

► Berilgan funksiya $x = 0$ nuqtada 2 ga teng bo‘lgan chekli sakrashga ega bo‘ladi:

$$\lim_{x\to 0-0} f(x) = 2, \quad \lim_{x\to 0+0} f(x) = 0. \text{ ◄}$$



4.27-rasm

Funksiyaning bartaraf qilinadigan va chekli sakrashli uzilish nuqtalari birinchi tur uzilish nuqtalari deb ataladi. $f(x)$ funksiyaning barcha 1-tur uzilish nuqtalari chap va o‘ng limitlarning mavjudligi bilan tavsiflanadi.

4.27-Ta’rif. $f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi chap yoki o‘ng limitlaridan kamida bittasi cheksiz yoki mavjud bo‘lmasa, bu nuqta funksiyaning ikkinchi tur uzilish nuqtasi deb ataladi.

4.25-Misol. Ushbu funksiyani qaraymiz:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

► $x = 0$ nuqtada bir tomonli limitlarni topamiz:

$$\lim_{x\to 0+0} \frac{1}{x} = +\infty, \quad \lim_{x\to 0-0} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Bir tomonli limitlarning ikkalasi ham chekli emas, ya’ni ta’rifga ko‘ra $x = 0$ nuqta ikkinchi tur uzilish nuqtasi bo‘ladi. ◄

4.26-Misol. $y = a^{1/x}$ funksiyani $0 < a < 1$ bo‘lganda qaraymiz.

► $x = 0$ nuqtada bir tomonli limitlarni topamiz:

$$\lim_{x\to 0+0} a^{1/x} = 0, \quad \lim_{x\to 0-0} a^{1/x} = +\infty.$$

$x = 0$ nuqtadagi o‘ng limit cheksiz, ya’ni ta’rifga ko‘ra $x = 0$ nuqta ikkinchi tur uzilish nuqtasi bo‘ladi. ◄

Geometrik talqini ravshan bo‘lgan ushbu teoremani isbotsiz keltiramiz.

4.21-Teorema. X oraliqda monoton bo‘lgan $f(x)$ funksiya bu oraliqda uzilishlarga ega bo‘lsa, u holda bu uzilish nuqtalari albatta birinchi tur bo‘ladi.

Kesmada uzluksiz bo‘lgan funksiyalarning xossalari. Nuqtaning kichik atrofida funksiyaning o‘zgarishi bilan bog‘liq bo‘ladigan xossalar bu funksiyaning lokal xossalari deb ataladi (masalan, nuqtada limitga ega funksiyaning xossalari yoki berilgan nuqtada uzluksiz funksiyaning xossalari). Funksiyaning aniqlanish sohasi bilan yoki bu sohaning biror oralig‘i bilan bog‘liq xossalar global xossalar deb ataladi.

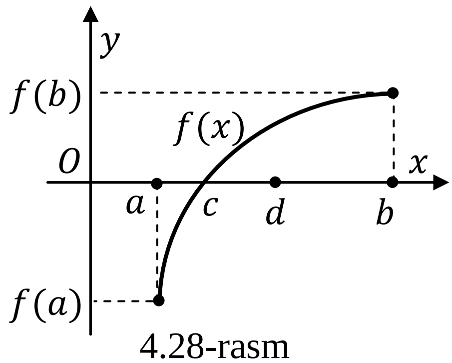
4.28-Ta’rif. Agar (a, b) oraliqning barcha nuqtalarida $y = f(x)$ funksiya uzluksiz bo‘lsa, bu funksiya (a, b) oraliqda uzluksiz deyiladi. Agar funksiya (a, b) oraliqda uzluksiz, a nuqtada chapdan, b nuqtada esa o‘ngdan uzluksiz bo‘lsa bu funksiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz deyiladi.

Masalan, $f(x) = 1/x$ funksiya $(0, 1)$ oraliqda uzluksiz va $[0, 1]$ kesmada uzluksiz emas, chunki $x = 0$ nuqtada funksiya o‘ngdan uzluksiz emas. $\sin x$ funksiya ixtiyoriy $[a, b] \subset \mathbf{R}$ kesmada uzluksiz. Agar funksiya barcha $x \in \mathbf{R}$ nuqtalarda uzluksiz bo‘lsa, u $(-\infty, +\infty)$ intervalda yoki **R** son o‘qida uzluksiz deyiladi.

4.22-Teorema (Bolsano-Koshining birinchi teoremasi). $f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz va kesmaning chetki nuqtalarida turli ishorali qiymatlarni qabul qilsin. U holda (a, b) oraliqda $f(c) = 0$ tenglikni qanoatlantiruvchi c nuqta topiladi.

Teorema oddiy geometrik ma’noga ega: agar funksiya grafigining uzluksiz chizig‘i Ox o‘qdan pastda ham, yuqorida ham yotsa, u holda egri chiziq Ox oqni albatta kesib o‘tadi (4.28-rasm).

► Aniqlik uchun $f(a) < 0$ va $f(b) > 0$ deb olamiz. $[a, b]$ kesmani $d = (a + b)/2$ nuqta yordamida teng ikkiga bo‘lamiz. Agar funksiya bu nuqtada nolga aylansa teorema isbotlangan bo‘ladi. $f(d) \neq 0$ bo‘lsin. U holda $[a, d], [d, b]$ kesmalardan birining chetki nuqtalarida funksiya



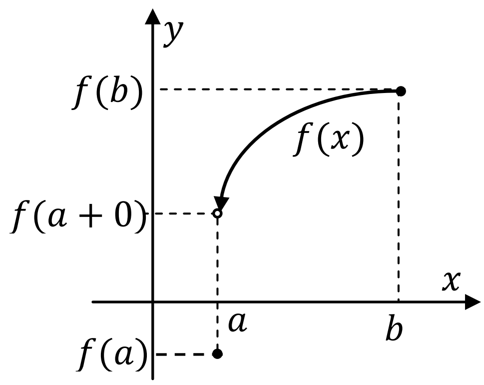
4.28-rasm

turli ishoralarni qabul qiladi, buning ustiga chap chetda manfiy va o‘ng chetda musbat ishorali qiymat bo‘ladi. Bu kesmani $[a_1, b_1]$ orqali belgilaymiz, u holda $f(a_1) < 0$ va $f(b_1) > 0$ bo‘ladi.

$[a_1, b_1]$ kesmani $d_1 = (a_1 + b_1)/2$ nuqta yordamida teng ikkiga bo‘lsamiz, bu yerda ham $f(d_1) = 0$ holni qaramaymiz, chunki bu holda teorema isbotlangan bo‘ladi. Hosil bo‘lgan ikki intervallardan qaysi birining chetlarida funksiya turli ishorali qiymatlarni qabul qilsa, uni biz $[a_2, b_2]$ orqali belgilaymiz, u holda $f(a_2) < 0$ va $f(b_2) > 0$ bo‘ladi. Kesmalarni hosil qilish jarayonini davom ettiramiz. Bunda yoki chekli qadamdan keyin kesmani teng ikkiga bo‘luvchi nuqtada funksiya nolga aylanadi va teoremani isboti tugaydi, yoki bir-birining ichiga joylashgan cheksiz

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset \cdots$$

kesmalar ketma-ketligini hosil qilamiz. U holda n tartib raqamli $[a_n, b_n]$ kesmaning uzunligi $b_n - a_n = (b-a)/2^n$ va $f(a_n) < 0$, $f(b_n) > 0$ bo‘ladi. 3.1-Lemmaga (Kantor) ko‘ra barcha kesmalarga tegishli bo‘lgan c nuqta mavjud bo‘ladi. Ana shu nuqta teorema shartlarini qanoatlantirishini va qidirilayotgan $c \in (a, b)$ nuqta ekanligini ko‘rsatamiz. Funksiyaning (a, b) intervalda uzluksizligi tufayli $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$ b o‘ladi. Agar $f(c)$ musbat bo‘lganda edi, uzluksiz funksiya ishorasining o‘zgarmasligi haqidagi teoremaga ko‘ra c nuqtaning shunday $U_\delta(c)$ atrofi topiladiki, bu atrofdan olingan barcha x nuqtalar uchun $f(x) > 0$ tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. n tartib raqamini kerakli qilib ($(b-a)/2^n < \delta$ shartdan) tanlansa, $[a_n, b_n]$ kesma ana shu intervalga butunligicha tushadi va $f(a_n) > 0$ bo‘ladi. Bu esa



4.29-rasm

$[a_n, b_n]$ kesmaning xossasiga ziddir. Xuddi shu singari $f(c)$ manfiy ishorali bo‘la olmasligini ko‘rsatish mumkin. Demak, $f(c) = 0$ ekan. ◀

4.22-Teoremada $f(x)$ funksiyaning kesmada uzluksizligi muhim shart ekanligini aytib o‘tish kerak. Uni (a, b) oraliqda uzluksizligi bilan almashtirish mumkin emas: 4.29-rasmda (a, b) oraliqda uzluksiz, ammo a nuqtada o‘ngdan uzluksizlik buzilganligi tufayli $[a, b]$ kesmada uzluksiz bo‘lmagan funksiyaning grafigi keltirilgan. Bu funksiya kesmaning chetki nuqtalarida turli ishorali qiymatlarni qabul qiladi, ammo kesmaning birorta nuqtasida ham nolga aylanmaydi. (a, b) oraliqning hech bo‘lmaganda bitta nuqtasida uzilishga ega funksiya manfiy qiymatdan musbat qiymatga nolga aylanmasdan o‘tishi mumkinligi ravshan.

4.23-Teorema (Bolsano-Koshining ikkinchi teoremasi). $f(x)$ funksiya biror X oraliqda (yopiq yoki ochiq, chekli yoki cheksiz) aniqlangan va uzluksiz bo‘lsin. Agar bu oraliqning ikkita a va b $(a < b)$ nuqtalarida teng bo‘lmagan $f(a) = A$ va $f(b) = B$ qiymatlarni qabul qilsa, u holda (A, B) oraliqdan olingan har qanday C nuqta uchun shunday $c \in (a, b)$ nuqta topiladiki, bu nuqtada $f(c) = C$ tenglik o‘rinli bo‘ladi.

► $A < B$ deb hisoblaymiz, shuning uchun $A < C < B$. $[a, b]$ kesmada $g(x) = f(x) - C$ yordamchi funksiyani qaraymiz. Bu funksiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz va kesmaning chetki nuqtalarida turli ishorali qiymatlarni qabul qiladi: $g(a) = f(a) - C = A - C < 0$ va $g(b) = f(b) - C = B - C > 0$. U holda Bolsano-Koshining birinchi teoremasiga ko‘ra shunday $c \in (a, b)$ nuqta topiladiki, uning uchun $g(c) = 0$ tenglik, ya’ni $f(c) - C = 0$ yoki $f(c) = C$ o‘rinli bo‘ladi. ◄

Shunday qilib oraliqda uzluksiz funksiya bir qiymatdan ikkinchi qiymatga o‘tib oraliqdagi har bir qiymatni kamida bir marta qabul qiladi. Boshqacha qilib aytganda x argument biror X oraliqda o‘zgarganda $f(x)$ funksiya qabul qiladigan qiymatlari ham biror Y oraliqni to‘ldiradi. Shuning uchun 4.23-teorama ba’zan uzluksiz funksiyaning oraliqdagi qiymatlari haqidagi teorema ham deb yuritiladi.

4.24-Teorema (Veyyershtrassning birinchi teoremasi). Kesmada uzluksiz funksiya bu kesmada chegaralangan ham bo‘ladi, ya’ni shunday m va M sonlar topilib, barcha $x \in [a, b]$ nuqtalar uchun $m \leq f(x) \leq M$ tengsizlik o‘rinli bo‘ladi.

► Teskarisidan faraz qilamiz, ya’ni $f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada chegaralanmagan bo‘lsin. U holda har bir n natural son uchun $[a, b]$ kesmada shundau $x = x_n$ nuqta topiladiki, bu nuqtada

$$|f(x_n)| \geq n \tag{4.37}$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi.

Bolsano-Veyyershtrass teoremasiga ko‘ra $\{x_n\}$ ketma-ketlikdan chekli ξ nuqtaga yaqinlashuvchi $\{x_{n_k}\}$ qismiy ketma-ketlik tuzish mumkin: $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \xi$. Albatta $a \leq \xi \leq b$ ekanligi ravshan. $f(x)$ funksiyaning ξ nuqtada uzluksizligi tufayli

$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(\xi)$ o‘rinli bo‘lishi kerak. Bunday bo‘lishi mumkin emas, chunki (4.37) tengsizliklarga ko‘ra $\lim_{k\to\infty} |f(x_{n_k})| = +\infty$. Ana shu qarama-qarshilik teoremani isbotlaydi. ◄

Teoremada funksiyaning aynan kesmada uzluksizligi muhim shart hisoblanadi. Oraliqda yoki yarim oraliqda uzluksizlik funksiyaning bu oraliqda chegaralangan bo‘lishini ta’minlay olmaydi. Masalan, $f(x) = 1/x$ funksiya $(0, 1]$ yarim oraliqda uzluksiz, ammo unda chegaralanmagan.

$f(x)$ funksiya biror E to‘plamda aniqlangan va chegaralangan bo‘lsin. $f(x)$ funksiya qiymatlari to‘plamining M aniq yuqori chegarasi $f(x)$ funksiyaning E to‘plamdagi aniq yuqori chegarasi deb ataladi:

$$M = \sup_{x\in E} f(x).$$

$f(x)$ funksiyaning E to‘plamdagi m aniq quyi chegarasi ham xuddi shu singari aniqlanadi:

$$m = \inf_{x\in E} f(x).$$

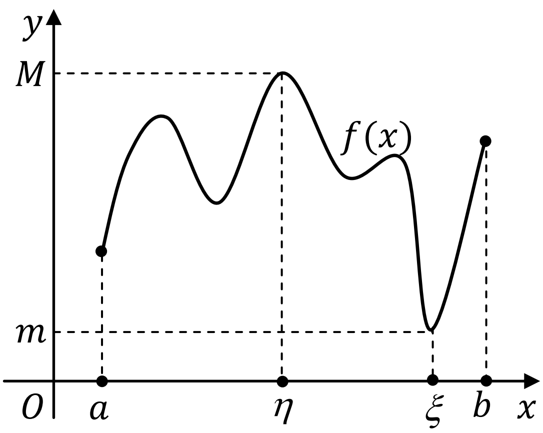
4.25-Teorema (Veyyershtrassning ikkinchi teoremasi). Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz bo‘lsa, u holda $f(x)$ funksiya bu kesmada o‘zining aniq quyi va aniq yuqori chegarasiga erishadi, ya’ni $[a, b]$ kesmada

$$f(\xi) = m = \inf_{x\in E} f(x), \quad f(\eta) = M = \sup_{x\in E} f(x)$$

tengliklarni qanoatlantiruvchi ξ va η nuqtalar topiladi (4.30-rasm).

► $M = \sup_{x\in E} f(x)$ bo‘lsin. Veyyershtrassning birinchi teoremasiga ko‘ra bu chekli son. Faraz qilaylik $f(x)$ funksiyaning qiymati E to‘plamning hech bir nuqtasida M qiymatga teng bo‘lmasin, ya’ni barcha $x \in E$ nuqtalarda $f(x) < M$ bo‘lsin. Bu holda

$$g(x) = \frac{1}{M - f(x)}$$



4.30-rasm

yordamchi funksiyani qaraymiz. Farazimizga ko‘ra kasrning maxraji nolga aylanmaydi, shuning uchun u funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz va demak chegaralangan, ya’ni barcha $x \in [a,b]$ nuqtalarda $g(x) \le \mu$, $(\mu > 0)$ tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. Shuning uchun

$$\frac{1}{M - f(x)} < \mu$$

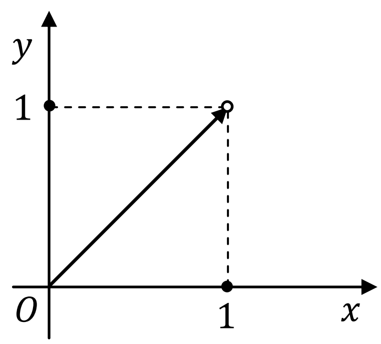
tengsizlikdan osongina

$$f(x) \le M - \frac{1}{\mu}$$

tengsilikka erishamiz, ya’ni M sonidan kichik bo‘lgan $M - 1/\mu$ soni $f(x)$ funksiya qiymatlar to‘plamining yuqori chegarasi bo‘lar ekan. Bunday bo‘lishi mumkin emas, chunki M soni bu funksiya qiymatlar to‘plamining aniq yuqori chegarasi. Yuzaga kelgan qarama-qarshilik teoremani isbotlaydi: $[a,b]$ kesmada shunday ξ nuqta topiladiki, bunda $f(\xi) = M$ tenglik o‘rinli bo‘lib, bu qiymat barcha $f(x)$ qiymatlarning orasida eng kattasi bo‘ladi.

Teoremaning quyi chegarasiga nisbatan qismi ham xuddi shu singari isbotlanadi.◄

Mulohaza. $f(x)$ funksiya uzluksizligi $[a,b]$ kesmada bo‘lishligi muhim shart: $f(x) = x$ funksiya $(-1,1)$ intervalda uzluksiz va chegaralangan, ammo aniq yuqori $\sup\limits_{x\in(-1,1)} x = 1$ chegaraga erishmaydi, ya’ni $(-1,1)$ intervalda $f(a) = 1$ tenglikni qanoatlantiradigan a nuqta yo‘q. Boshqa misol:



4.31-rasm

$f(x) = x - [x]$ funksiyani $[0,1]$ kesmada qaraymiz (4.31-rasm). Bu yerda $\sup\limits_{x\in[0,1]} f(x) = 1$, ammo funksiya 1 qiymatga $[0,1]$ kesmada erishmaydi. Bu esa $f(x)$ funksiya $[0,1]$ kesmada uzilishga egaligi tufayli yuz beradi.

Funksuya qiymatlari to‘plamining aniq yuqori chegarasini $f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ kesmadagi eng katta qiymati, aniq quyi chegarasini esa eng kichik qiymati deb ataymiz. U holda Veyyershtrassning ikkinchi teoremasini quyidagicha ifodalash mumkin.

4.26-Teorema. Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo‘lsa, u bu kesmada o‘zining eng katta va eng kichik qiymatiga erishadi.

4.27-Teorema. $f(x)$ funksiya (a,b) oraliqda monoton o‘suvchi (kamayuvchi) va uzluksiz bo‘lsin. U holda (a,b) oraliqga mos keluvchi funksiya qiymatlarining $(f(a+0), f(b-0))$ (yoki $(f(b-0, f(a+0))$ oralig‘ida o‘suvchi (kamayuvchi) va uzluksiz $x=f^{-1}(y)$ teskari funksiya mavjud.

► $f(x)$ funksiya (a,b) intervalda monoton o‘suvchi bo‘lsin. U holda Bolsano-Veyyershtassning ikkinchi teoremasiga ko‘ra x ozgaruvchi (a,b) intervalda o‘zgarganda $f(x)$ funksiyaning qiymatlari $(f(a+0), f(b-0))$ intervalni to‘ldiradi. U holda har bir $y_0 \in (f(a+0), f(b-0))$ nuqta uchun (a,b) intervaldan $f(x_0)=y_0$ tenglikni qanoatlantiruvchi kamida bitta x_0 nuqta topiladi. $f(x)$ funksiyaning qat’iy monotonligi tufayli bunday x_0 nuqta yagona bo‘ladi, chunki $x_1 > x_0$ bo‘lsa $f(x_1) > y_0$ bo‘ladi va $x_1 < x_0$ bo‘lsa $f(x_1) < y_0$ bo‘ladi. Shunday qilib ixtiyoriy $y_0 \in (f(a+0), f(b-0))$ nuqtaga (a,b) oraliqdan yagona x_0 nuqtani mos qo‘yuvchi bir qiymatli $x=f^{-1}(y)$ teskari funksiyani hosil qildik. $f^{-1}(y)$ funksiya $f(x)$ funksiya singari o‘suvchi bo‘ladi.

Haqiqatdan ham, $y_1 < y_2$ va $x_1 = f^{-1}(y_1)$, $x_2 = f^{-1}(y_2)$ bo‘lsin. Agar $f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2)$ bo‘lganda edi, bu tengsizlik $x_1 \geq x_2$ tengsizlikni anglatar edi va $f(x)$ funksiyaning o‘suvchiligi tufayli $f(x_1) \geq f(x_2)$ tengsizlikni yoki $y_1 \geq y_2$ tengsizlikni hosil qilgan bo‘lar edik, bu esa dastlabki qilgan farazimizga ziddir, ana shu zidlik $x=f^{-1}(y)$ teskari funksiyaning o‘suvchi ekanligini isbotlaydi.

Endi $x=f^{-1}(y)$ funksiyaning $(f(a+0), f(b-0))$ intervalda uzluksiz ekanligini ko‘rsatamiz. Faraz qilaylik funksiya biror $y_0 \in (f(a+0), f(b-0))$ nuqtada uzluksiz bo‘lmasin, u holda $f^{-1}(y)$ funksiya monoton bo‘lganligi uchun 4.21- teoremaga ko‘ra y_0 nuqta albatta birinchi tur uzilish nuqtasi bo‘ladi va bu nuqtada $f^{-1}(y_0-0) \leq f^{-1}(y_0) \leq f^{-1}(y_0+0)$ o‘rinli bo‘ladi. Bu tengsizliklarning hech bo‘lmaganda bittasi qat’iy tengsizlik bo‘ladi, aks holda $f^{-1}(y)$ funksiya y_0

nuqtada uzluksiz bo‘lar edi. Masalan, $f^{-1}(y_0-0)<f^{-1}(y_0)$ bo‘lsin. $f^{-1}(y)$ funksiya o‘suvchi bo‘lganligi uchun $y\le y_0$ nuqtalarda $f^{-1}(y)\le f^{-1}(y_0-0)$ bo‘ladi, $y\ge y_0$ nuqtalarda esa $f^{-1}(y)\ge f^{-1}(y_0-0)$ bo‘ladi. Shuning uchun $(f^{-1}(y_0-0),f^{-1}(y_0))$ intervalda $f^{-1}(y)$ funksiyaning qiymatlari mavjud emas, bunday bo‘lishi mumkin emas. Chunki $(f^{-1}(y_0-0),f^{-1}(y_0))\subseteq(a,b)$ va $f(x)$funksiyaning aniqlanishiga ko‘ra bu intervalning ixtiyoriy $\dot{x}\in(f^{-1}(y_0-0),f^{-1}(y_0))$ nuqtasiga $\dot{y}=f(\dot{x})$ nuqta mos kelishi kerak, ya’ni $f^{-1}(y)$ funksiyaning qiymatlari $(f^{-1}(y_0-0),f^{-1}(y_0))$ intervalda mavjud. Bu qarama-qarshilik qilgan farazimizning noto‘g‘ri ekanligidan dalolat beradi, ya’ni $f^{-1}(y)$ funksiya y_0 nuqtada uzluksiz. ◄

Asosiy elementar funksiyalarning uzluksizligi.

1. $f(x)=C-const$. Funksiya orttirmasi barcha nuqtalarda nolga teng: $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=C-C=0$. Shuning uchun $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$, ya’ni bu funksiya son o‘qining barcha nuqtalarida uzluksiz.

2. $f(x)=x$. Funksiya orttirmasini topamiz: $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=x+\Delta x-x=\Delta x$. U holda $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta x=0$, ya’ni funksiya son o‘qining barcha nuqtalarida uzluksiz bo‘ladi.

3. $f(x)=x^n, n\in\mathbf{N}$. Bu funksiyani chekli sondagi $g(x)=x$ funksiyani o‘zini o‘ziga n marta ko‘paytirish natijasi deb qarasak 4.19-Teoremaga ko‘ra $f(x)$ funksiya son o‘qining barcha nuqtalarida uzluksiz bo‘ladi.

4. $f(x)=\sin x$ funksiyaning son o‘qining barcha nuqtalarida uzluksizligi 4.21-Misolda ko‘rsatilgan.

5. $f(x)=\cos x$ funksiyani $\cos x=\sin(x+\pi/2)$ tenglik orqali ifodalaymiz. $\sin x$ funksiyaning uzluksizligi tufayli $\sin(x+\pi/2)$ funksiya murakkab funksiya sifatida 4.20-Teoremaga ko‘ra son o‘qining barcha nuqtalarida uzluksiz bo‘ladi.

6. Xuddi shu singari 4.19-Teoremaga ko‘ra $\sin x$ va $\cos x$ funksiyalarning nisbati sifatida $f(x)=\operatorname{tg}x$ funksiya $\{x\in\mathbf{R}: x\neq k\pi+\pi/2,\ k\in\mathbf{Z}\}$ to‘plamda, $f(x)=c\operatorname{tg}x$ funksiya esa $\{x\in\mathbf{R}: x\neq k\pi, k\in\mathbf{Z}\}$ to‘plamda uzluksiz bo‘ladi.

7. $f(x) = a^x, a > 0, a \neq 1$ funksiyaning barcha $x \in \mathbf{R}$ nuqtalarda uzluksiz ekanligini isbotlaymiz. x nuqtaga intiluvchi ixtiyoriy $\{x_n\}$ ketma-ketlikni qaraymiz va $\{a^{x_n}\}$ ketma-ketlik a^x soniga intilishini ko‘rsatamiz. 3.12-Ta’rifga ko‘ra ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $N \in \mathbf{N}$ soni topilib, barcha $n > N$ uchun $|a^{x_n} - a^x| < \varepsilon$ tengsizlikning bajarilishini ko‘rsatish kerak. Shunday qilib $\{x_n\}$ ketma-ketlikning x_n hadlari uchun biror tartib raqamidan boshlab $a^x|a^{x_n-x} - 1| < \varepsilon$ yoki $1 - \varepsilon/a^x < a^{x_n-x} < 1 + \varepsilon/a^x$ tengsizlik o‘rinli bo‘lishi kerak. $a \neq 1$ bo‘lganda logarifmik funksiyaning xossasini inobatga olsak

$$-\varepsilon_1 = \log_a\left(1 - \frac{\varepsilon}{a^x} \cdot \frac{|a-1|}{a-1}\right) < x_n - x < \log_a\left(1 + \frac{\varepsilon}{a^x} \cdot \frac{|a-1|}{a-1}\right) = \varepsilon_2 \qquad (4.38)$$

$\{x_n\}$ ketma-ketlikning x nuqtaga yaqinlashuvchi bo‘lganligi tufayli biror $N + 1$ tartib raqamidan boshlab (4.38) qo‘sh tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. Haqiqatdan ham, ketma-ketlik limitining 3.12-Ta’rifiga ko‘ra ixtiyoriy musabat son, xususan $\varepsilon_* = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ uchun shunday $N \in \mathbf{N}$ tartib raqami topiladiki, barcha $n > N$ uchun $|x_n - x| < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi. Yuqoridagilarga teskari tartibda mulohaza qilib, $n > N$ uchun $|a^{x_n} - a^x| < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi. Bu esa 3.12-ta’rifga ko‘ra $\{a^{x_n}\}$ ketma-ketlik a^x soniga intilishini va $f(x) = a^x$ funksiyaning barcha $x \in \mathbf{R}$ nuqtalarda uzluksiz ekanligini anglatadi. Xususiy holda $a = e$ bo‘lsa, $\mathbf{R}$ son o‘qida uzluksiz e^x funksiyaga ega bo‘lamiz.

8. $f(x) = \log_a x$ funksiya qiymatlar sohasi $(0, +\infty)$ bo‘lgan $\mathbf{R}$ son o‘qida qat’iy monoton va uzluksiz a^x funksiyaning teskarisi sifatida 4.27-teoremaga asosan $(0, +\infty)$ intervalda uzluksiz bo‘ladi. Bu yerda ham $a = e$ xususiy holda $(0, +\infty)$ intervalda uzluksiz bo‘lgan natural logarifm $\ln x$ funksiya hosil bo‘ladi.

9. $f(x) = x^\mu, \mu \in \mathbf{R}$ umumiy darajali funksiyani (4.25) asosiy logarifmik ayniyatga ko‘ra $x^\mu = \exp(\mu \ln x)$ ko‘rinishda yozib olamiz. U holda bu funksiya $(0, +\infty)$ intervalda uzluksiz $y = g(x) = \mu \ln x$ va $\mathbf{R}$ son o‘qida uzluksiz $f(y) = \exp(y)$ funksiyalardan tuzilgan $f(g(x))$ murakkab funksiya sifatida 4.20-Teoremaga ko‘ra $(0, +\infty)$ intervalda uzluksiz bo‘ladi.

10. $f(x) = \arcsin x$ va $g(x) = \arccos x$ funksiyalar qiymatlari $[-1, 1]$ kesmani to‘ldiruvchi mos ravishda $[-\pi/2, \pi/2]$ va $[0, \pi]$ kesmalarda qat’iy monoton va uzluksiz $\sin x$ va $\cos x$ funksiyalarga teskari funksiya sifatida 4.27-Teoremaga ko‘ra $[-1, 1]$ kesmada uzluksiz bo‘ladi. Xuddi shu singari $\mathrm{tg}\, x$ va $\mathrm{ctg}\, x$ funksiyalar mos ravishda $(-\pi/2, \pi/2)$ va $(0, \pi)$ intervallarda qat’iy monoton va uzluksiz, qiymatlari esa **R** son oqini toldirganligi uchun ularga teskari $\mathrm{arctg}\, x$ va $\mathrm{arcctg}\, x$ funksiyalar ham 4.27-Teoremaga ko‘ra **R** son o‘qida uzluksiz bo‘ladi.

Shunday qilib barcha asosiy elementar funksiyalar o‘zlarining aniqlanish sohalarida uzluksiz ekan. Elementar funksiyalar sinfidan olingan har qanday funksiyani asosiy elementar funksiyalar ustida chekli sondagi algebraik amallarni bajarish va ularning superpozitsiyalari orqali hosil qilish mumkin. Uzluksiz funksiyalar ustida arifmetik amallar bajarish to‘g‘risidagi 4.19-Teoremaga va murakkab funksiyaning uzluksizligi haqidagi 4.20-Teoremaga ko‘ra bunday elementar funksiyalar o‘zlarining aniqlanish sohasida uzluksiz bo‘ladi.

4.7. Cheksiz kichik funksyalarni taqqoslash.

Cheksiz kichik funksyalarni taqqoslash. Cheksiz kichik funksiyalarni taqqoslashdan asosiy maqsad $x \to a$ da ularning nolga intilish tezligini qiyoslashdan iborat. $x = a$ nuqtada cheksiz kichik $\alpha(x)$ va $\beta(x)$ funksiyalar a nuqtaning o’zi kirmagan biror $\dot{U}(a)$ atrofida noldan farqli va a nuqtaning o‘zida esa nol yoki aniqlanmagan bo‘lishsin.

4.30-Ta’rif. Agar noldan farqli chekli

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = m \neq 0 \tag{4.39}$$

limit mavjud bo‘lsa, $\alpha(x)$ va $\beta(x)$ funksiyalar $x = a$ nuqtada bir xil tartibli cheksiz kichik deb ataladi va $\alpha(x) \underset{x \to a}{=} O\big(\beta(x)\big)$ ko‘rinishda yoziladi (O simvoli “O katta” deb o‘qiladi).

4.16-Teoremaga ko‘ra $\lim\limits_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \frac{1}{m}$ bo‘ladi va shuning uchun $\beta(x) \underset{x \to a}{=} O\big(\alpha(x)\big)$ deb yozish mumkin. O simvoli tranzitivlik xossasiga ega, ya’ni agar $\beta(x) \underset{x\to a}{=} O\big(\alpha(x)\big)$ va $\beta(x) \underset{x\to a}{=} O\big(\gamma(x)\big)$ bo‘lsa, u holda $\alpha(x) \underset{x\to a}{=} O\big(\gamma(x)\big)$ bo‘ladi. Haqiqiqattan ham 4.30-Ta’rifga va ko‘paytmaning limiti haqidagi 4.16-Teoremaga ko‘ra

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\gamma(x)} = \lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)\beta(x)}{\gamma(x)\beta(x)} = \lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}\cdot\lim_{x\to a}\frac{\beta(x)}{\gamma(x)} = c \neq 0. \tag{4.40}$$

4.31-Ta’rif. Agar $\alpha(x)/\,\beta(x)$ nisbatning limiti nol, ya’ni

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0, \tag{4.41}$$

bo‘lsa, $\alpha(x)$ funksiya $x = a$ nuqtada $\beta(x)$ funksiyaga nisbatan yuqoriroq tartibli cheksiz kichik deb ataladi va u $\alpha(x) \underset{x\to 0}{=} o\big(\beta(x)\big)$ ko‘rinishda yoziladi (o simvoli “o kichik deb o‘qiladi”).

Bu holda $\beta(x)$ funksiya $x = a$ nuqtada $\alpha(x)$ funksiyaga nisbatan pastroq tartibli cheksiz kichik deb aytiladi. (4.41) o‘rinli bo‘lsa, albatta

$$\lim_{x\to a}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = \infty \tag{4.42}$$

bo‘lishi ravshan.

(4.41) tenglikdan $\alpha(x)/\beta(x) = \gamma(x)$ funksiyaning $x = a$ nuqtada cheksiz kichik ekanligi kelib chiqadi. Bundan esa $\alpha(x) = \gamma(x)\beta(x)$, ya’ni x o‘zgaruvchi a nuqtaga yaqin bo‘lganda $|\alpha(x)|$ qiymat $|\beta(x)|$ qiymatga nisbatan ko‘p kichik bo‘ladi. Boshqacha qilib aytganda $\alpha(x)$ funksiya $\beta(x)$ funksiyaga nisbatan tezroq nolga intiladi.

4.28-Teorema. a nuqtaning o’zi kirmagan biror $\dot{U}(a)$ atrofida noldan farqli, $x = a$ nuqtada cheksiz kichik bo‘lgan ixtiyoriy $\alpha(x)$ va $\beta(x)$ funksiyalarning $\alpha(x)\cdot\beta(x)$ ko‘paytmasi ko‘paytuvchilarning har biridan yuqoriroq tartibli cheksiz kichik bo‘ladi.

► Haqiqatdan ham, 4.31-Ta’rifga ko‘ra

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)\beta(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x\to a}\beta(x) = 0, \lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)\beta(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to a}\alpha(x) = 0$$

tengliklar teoremadagi tasdiqning to‘griligidan dalolat beradi. ◄

4.32-Ta’rif. Agar $x = a$ nuqtada cheksiz kichik bo‘lgan $\alpha(x)$ va $\beta(x)$ funksiyalar nisbatining chekli ham cheksiz ham limiti mavjud bo‘lmasa, ular taqqoslanmaydigan cheksiz kichiklar deb ataladi.

4.29-Misol. $\alpha(x) = x$ va $\beta(x) = \sin 2x$ funksiyalar 4.30-Ta’rifga ko‘ra $x = 0$ nuqtada bir xil tartibli cheksiz kichik bo‘ladi, chunki funksiyalar nisbatining limiti haqidagi 4.19, murakkab funksiyaning limiti haqidagi 4.20-Teoremalarga va (4.19) birinchi ajoyib limit formulasiga ko‘ra

$$\lim_{x\to 0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x} = \left|\begin{matrix} 2x = t \\ x \to 0 \\ t \to 0 \end{matrix}\right| = 2\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 2 \neq 0.$$

4.30-Misol. $\alpha(x) = 1 - \cos x$ funksiya 4.30-Ta’rifga ko‘ra $x = 0$ nuqtada $\beta(x) = x$ funksiyaga nisbatan yuqoriroq tartibli cheksiz kichik bo‘ladi, chunki 4.19, 4.20-Teoremalarga va (4.19) formulaga ko‘ra

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(x/2)}{x/2} = \left|\begin{matrix} x/2 = t \\ x \to 0 \\ t \to 0 \end{matrix}\right| =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\cdot\lim_{t\to 0}\sin t = 1\cdot 0 = 0.$$

4.31-Misol. $\alpha(x) = \sqrt{x}$ funksiya $x = 0$ nuqtada $\beta(x) = x$ funksiyaga nisbatan pastroq tartibli cheksiz kichik bo‘ladi, chunki

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x}} = \infty.$$

4.32-Misol. $\alpha(x) = x\sin(1/x)$ va $\beta(x) = x$ funksiyalar 4.32-Ta’rifga ko‘ra $x = 0$ nuqtada taqqoslanmaydigan cheksiz kichiklar bo‘ladi, chunki

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x\sin(1/x)}{x} = \lim_{x\to 0}\sin(1/x)$$

limit mavjud emas (4.2 da qaralgan).

4.33-Misol. Darajasi $n \in \mathbf{N}, n > 1$ bo‘lgan x^n darajali funksiya $x = 0$ nuqtada x^{n-1} funksiyaga nisbatan yuqoriroq tartibli cheksiz kichik bo‘ladi, ya’ni $x^n \underset{x\to 0}{=} o(x^{n-1})$, chunki $\lim_{x\to 0}(x^n/x^{n-1}) = \lim_{x\to 0}x = 0$.

$x \to a$ da cheksiz kichikning o‘zgarishini aniqroq taqqoslash uchun ulardan birini o‘ziga xos etalon sifatida tanlanadi va u asosiy cheksiz kichik deb nomlanadi. Albatta, asosiy cheksiz kichikni tanlash ixtiyoriy, ammo ulardan oddiyrog‘i tanlanadi. Masalan, $x \to 0$ da x tanlanadi; $x \to 1$ da $x-1$; $x \to \infty$ da esa $1/x$ va hokazo. Murakkabiroq $\alpha(x)$ cheksiz kichikni baholash uchun asosiy $\beta(x)$ cheksiz kichikning turli xil $k > 0$ darajali $\beta^k(x)$ funksiyalaridan taqqoslash shkalasi tuziladi.

4.33-Ta’rif. Agar $\alpha(x)$ va $\beta^k(x)$ bir xil tartibli cheksiz kichik, ya’ni

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta^k(x)} = c \neq 0 \tag{4.43}$$

bo‘lsa, $\alpha(x)$ cheksiz kichikni $\beta(x)$ cheksiz kichikka nisbatan k tartibli kichik, k sonini esa kichiklik tartibi deb ataladi.

Odatda “k tartibli kichik” o‘rniga oddiy qilib “k tartib” iborasi ishlatiladi.

Bu yerda quyidagilarni ta’kidlab o‘tish joiz:

1. Bir cheksiz kichikning ikkinchisiga nisbatan k tartibi ixtiyoriy musbat son bo‘lishi mumkin;

2. Agar $\alpha(x)$ funksiyaning $\beta(x)$ funksiyaga nisbatan tartibi k bo‘lsa, u holda $\beta(x)$ funksiyaning $\alpha(x)$ funksiyaga nisbatan tartibi $1/k$ bo‘ladi;

3. $\alpha(x)$ cheksiz kichik funksiyani hatto barcha $\beta^k(x)$ darajalar bilan taqqoslash mumkin bo‘lganda ham, k tartibni har doim ham aniqlab bo‘lmaydi.

4.44-Misol. 4.33-Ta’rifga ko‘ra $\alpha(x) = 1-\cos x$ funksiya $x = 0$ nuqtada $\beta(x) = x$ funksiyaga nisbatan $k = 2$ tartibli cheksiz kichik bo‘ladi, chunki funksiyalar nisbatining limiti haqidagi haqidagi 4.19, murakkab funksiyaning limiti haqidagi 4.20-Teoremalarga va (4.19) birinchi ajoyib limit formulasiga ko‘ra

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta^k(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\,\sin^2(x/2)}{x^2} = \begin{vmatrix} x/2 = t, \\ x \to 0 \\ t \to 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\frac{\sin^2 t}{t^2} = \frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1 = \frac{1}{2} \neq 0.$$

4.45-Misol. $\alpha(x) = a^{1/x}, a \in (0,1)$ va $\beta(x) = x$ funksiyalar $x \to 0+0$ da cheksiz kichik bo‘ladi. Ixtiyoriy $k > 0$ uchun

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{a^{1/x}}{x^k}=0 \tag{4.44}$$

ekanligini ko‘rsatamiz. Haqiqatdan ham, $1/a>1$ bo‘lganligi uchun

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{a^{1/x}}{x^k}=\left|\begin{matrix}1/x=t\\ x\to 0+0\\ t\to+\infty\end{matrix}\right|=\lim_{t\to+\infty}a^t t^k=\lim_{t\to+\infty}\frac{t^k}{(1/a)^t}=0.$$

Shunday qilib $x\to+0$ da cheksiz kichik $a^{1/x}$ funksiyani ixtiyoriy $k>0$ uchun x^k bilan taqqoslab bo‘ladi, ammo x cheksiz kichikka nisbatan kichiklik tartibini aniqlab bo‘lmaydi.

Ekvivalent cheksiz kichik funksiyalar. Bir xil tartibli cheksiz kichik funksiyalarning tadbiqida ekvivalent cheksiz kichik funksiyalar muhim o‘rin tutadi.

4.34-Ta’rif. Agar $x=a$ nuqtada cheksiz kichik $\alpha(x)$ va $\beta(x)$ funksiyalar uchun

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1 \tag{4.45}$$

tenglik o‘rinli bo‘lsa, ular ekvivalent cheksiz kichiklar deb ataladi va u $\alpha(x)\underset{x\to a}{\sim}\beta(x)$ ko‘rinishda yoziladi.

Cheksiz kichiklarning ekvivalentlik xossasi cheksiz kichiklarga nisbatan simmetrik, chunki (4.45) tenglikdan $\lim\limits_{x\to a}\beta(x)/\alpha(x)=1$, ya’ni $\beta(x)\underset{x\to a}{\sim}\alpha(x)$ kelib chiqadi. Ekvivalentlik, tranzitivlik xossasiga ega, ya’ni: agar $\alpha(x)\underset{x\to a}{\sim}\beta(x)$ va $\beta(x)\underset{x\to a}{\sim}\gamma(x)$ bo‘lsa $\alpha(x)\underset{x\to a}{\sim}\gamma(x)$ bo‘ladi. Bu xossa (4.45) va (4.40) tengliklardan kelib chiqadi.

$\alpha[\alpha(x)]$ cheksiz kichik $\alpha(x)$ cheksiz kichikka nisbatan yuqoriroq tartibli cheksiz kichik degan ma’noni anglatadi.

Limitlarni hisoblash jarayonida cheksiz kichiklarni taqqoslashga to‘g‘ri keladi. Bunday holda “ $\frac{0}{0}$ ko‘rinishdagi aniqmaslik” deb aytiladi. Bunday turdagi aniqmaslikdan farqli yana $\frac{\infty}{\infty},\infty-\infty,\infty^0,1^\infty$ ko‘rinishdagi aniqmasliklar ham uchrab turadi. Limitlarni bunday hollarda hisoblash aniqmaslikni ochish deb nomlanadi. Aniqmasliklarni ochishda ekvivalent cheksiz kichik funksiyalar haqidai teoremalardan foydalaniladi.

4.29-Teorema. Agar cheksiz kichik funksiyalarni ularning ekvivalentlari bilan almashtirilsa, u holda cheksiz kichiklar nisbatining limiti o‘zgarmaydi.

► $\alpha(x), \beta(x), \gamma(x), \tau(x)$ funksiyalar $x \to a$ da cheksiz kichik funksiyalar, hamda $\alpha(x) \underset{x\to a}{\sim} \beta(x)$, $\gamma(x) \underset{x\to a}{\sim} \tau(x)$ bo‘lsin. U holda

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\gamma(x)} \text{ va } \lim_{x\to a}\frac{\beta(x)}{\tau(x)}$$

limitlarni taqoslaymiz.

1) Nisbatning limiti chekli

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\gamma(x)} = A < \infty$$

U holda:

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\gamma(x)} = \lim_{x\to a}\frac{\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}\beta(x)}{\frac{\gamma(x)}{\tau(x)}\tau(x)} = \lim_{x\to a}\frac{\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}}{\frac{\gamma(x)}{\tau(x)}}\cdot\lim_{x\to a}\frac{\beta(x)}{\tau(x)} = \frac{1}{1}\cdot\lim_{x\to a}\frac{\beta(x)}{\tau(x)} = \lim_{x\to a}\frac{\beta(x)}{\tau(x)}$$

2) Nisbatning limiti cheksiz

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\gamma(x)} = \infty.$$

U holda:

$$\lim_{x\to a}\frac{\gamma(x)}{\alpha(x)} = 0$$

ekanligidan foydalanamiz:

$$0 = \lim_{x\to a}\frac{\gamma(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x\to a}\frac{\frac{\gamma(x)}{\tau(x)}\tau(x)}{\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}\beta(x)} = \lim_{x\to a}\frac{\frac{\gamma(x)}{\tau(x)}}{\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}}\cdot\lim_{x\to a}\frac{\tau(x)}{\beta(x)} =$$

$$= \frac{1}{1}\cdot\lim_{x\to a}\frac{\tau(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to a}\frac{\tau(x)}{\beta(x)} \quad \text{ya'ni} \quad \lim_{x\to a}\frac{\tau(x)}{\beta(x)} = 0$$

Bundan esa:

$$\lim_{x\to a}\frac{\tau(x)}{\beta(x)} = \infty \quad \text{yoki} \quad \lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\gamma(x)} = \lim_{x\to a}\frac{\tau(x)}{\beta(x)}$$

3) Nisbatning limiti mavjud emas.

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\gamma(x)}$$

limitning mavjud emasligidan

$$\lim_{x\to a}\frac{\tau(x)}{\beta(x)}$$

limitning mavjud bo‘lmasligi kelib chiqishi tabiiy. ◄

4.30-Teorema. Ikkita cheksiz kichik funksiyalar ekvivalent bo‘lishligi uchun ularning ayirmasi bu cheksiz kichiklarning har biriga nisbatan yuqoriroq tartibli cheksiz kichik bo‘lishligi zarur va yetarli.

► **Zarurligi.** $\alpha(x),\beta(x)$ funksiyalar $x=a$ nuqtada cheksiz kichik funksiyalar, hamda $\alpha(x)\underset{x\to a}{\sim}\beta(x)$ bo‘lsin. U holda

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}=1$$

bo‘ladi. Shuning uchun

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)-\beta(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to a}\left[\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}-\frac{\beta(x)}{\beta(x)}\right]=\lim_{x\to a}\left[\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}-1\right]=$$

$$=\lim_{x\to a}\left[\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}\right]-1=0$$

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)-\beta(x)}{\alpha(x)}=\lim_{x\to a}\left[\frac{\alpha(x)}{\alpha(x)}-\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}\right]=$$

$$=\lim_{x\to a}\left[1-\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}\right]=1-\lim_{x\to a}\left[\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}\right]=0$$

Bu tengliklar $\alpha[\alpha(x)-\beta(x)]$ va $\beta[\alpha(x)-\beta(x)]$ degan ma’nolarni anglatadi.

Yetarliligi. $\alpha(x),\beta(x)$ funksiyalar $x=a$ nuqtada cheksiz kichik funksiyalar, hamda $\alpha[\alpha(x)-\beta(x)]$ va $\beta[\alpha(x)-\beta(x)]$ bo‘lsin. So‘ngi ikki munosabat

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)-\beta(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)-\beta(x)}{\alpha(x)}=0$$

ma'noni anglatadi. U holda:

$$0=\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)-\beta(x)}{\alpha(x)}=1-\lim_{x\to a}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}\ ,$$

bundan esa,

$$\lim_{x\to a}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}=1,$$

ya'ni $\alpha(x) \underset{x\to a}{\sim} \beta(x)$ ◄

4.31-Teorema. $x = a$ nuqtada cheksiz kichik bo‘lgan $\alpha(x)$ va $\beta(x)$ funksiyalar ekvivalent bo‘lishsin: $\alpha(x) \underset{x\to a}{\sim} \beta(x)$, $x(t)$ funksiya esa τ nuqtaning o’zi kirmagan biror $\dot{U}(\tau)$ atrofida a sonidan farqli va $t \to \tau$ da a soniga intilsin. U holda $t \to \tau$ da $\alpha(x(t))$ va $\beta(x(t))$ murakkab funksiyalar $t \to \tau$ da ekvivalent bo‘lishadi: $\alpha(x(t)) \underset{x\to a}{\sim} \beta(x(t))$.

► $F(t) = \alpha(x(t))/\beta(x(t))$ murakkab funksiya uchun (4.17) formulani va teoremaning $\alpha(x) \underset{x\to a}{\sim} \beta(x)$ shartini qo‘llasak,

$$\lim_{t\to\tau} F(t) = \lim_{t\to\tau} \frac{\alpha(x(t))}{\beta(x(t))} = \lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$$

limitni topamiz, ya’ni (4.28) formulaga ko‘ra $\alpha(x) \underset{x\to a}{\sim} \beta(x)$. ◄

Endi ba’zi elememtar funksiyalarning ekvivalentlik munosabatini o‘rnatamiz.

1. (4.19) birinchi ajoyib limitga ko‘ra

$$\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x. \tag{4.46}$$

2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} \frac{\sin x}{\cos x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot 1 = 1$ limitdan

$$\operatorname{tg} x \underset{x\to 0}{\sim} x. \tag{4.47}$$

3. $x(t) = \arcsin t$ funksiya $t = 0$ nuqtada uzluksiz (4.6.ga qarang) va shuning uchun $\lim\limits_{t\to 0} \arcsin t = \arcsin 0 = 0$. U holda 4.32-Teoremaga va (4.46) formuladan $t = \sin(\arcsin t) \underset{t\to 0}{\sim} \arcsin t$ yoki dastlabki x o‘zgaruvchiga qaytsak

$$\arcsin x \underset{x\to 0}{\sim} x. \tag{4.48}$$

4. $x(t) = \operatorname{arctg} t$ funksiyaning $t = 0$ nuqtada uzluksizligi tufayli $\lim\limits_{t\to 0} \operatorname{arctg} t = \operatorname{arctg} 0 = 0$. 4.32-Teoremaga va (4.48) formulaga $t = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} t) \sim t \to 0 \operatorname{arctg} t$ yoki dastlabki x o‘zgaruvchiga qaytsak

$$\operatorname{tg} x \underset{x\to 0}{\sim} x. \tag{4.49}$$

5. Ikkinchi ajoyib limitdagi (4.24) formula $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$ tenglikni aniqlagan edi. $\ln y$ funksiyaning $y=e$ nuqtada uzluksizligini inobatga olsak (4.33) formulaga ko‘ra

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{1/x}=\ln\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=\ln e=1$$

tenglikka ega bo‘lamiz. 4.34-Ta’rifga ko‘ra esa

$$\ln(1+x)\underset{x\to 0}{\sim}x. \tag{4.50}$$

Ma’lumki, $\log_a(1+x)=(\ln(1+x))/\ln a$. Bu tenglikni (4.50) formulaga qo‘llab

$$\log_a(1+x)\underset{x\to 0}{\sim}\frac{x}{\ln a} \tag{4.51}$$

6. $x(t)=a^t-1$ funksiyaning $t=0$ nuqtada uzluksizligi tufayli $\lim\limits_{t\to 0}(a^t-1)=0$. (4.51) formulaga ko‘ra $\log_a(1+a^t-1)\underset{t\to 0}{\sim}\frac{a^t-1}{\ln a}$ yoki $t\underset{t\to 0}{\sim}\frac{a^t-1}{\ln a}$. Dastlabki x o‘garuvchiga qaytsak

$$(a^x-1)/\ln a\underset{x\to 0}{\sim}x \tag{4.52}$$

Xususiy holda, $a=e$ bo‘lsa

$$e^x-1\underset{x\to 0}{\sim}x \tag{4.53}$$

7. Hosil qilingan (4.53) formulani inobatga olsak

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^s-1}{x}=\left|\begin{matrix}x=e^t-1,\\ t=\ln(1+x)\\ x\to 0 \text{ da } t\to 0\end{matrix}\right|=\lim_{t\to 0}\frac{(1+e^t-1)^s-1}{e^t-1}=$$

$$=s\lim_{t\to 0}\frac{e^{st}-1}{st}\lim_{t\to 0}\frac{t}{e^t-1}=s\cdot 1\cdot 1=s.$$

Demak, $(1+x)^s-1\underset{x\to 0}{\sim}sx$ yoki ixtiyoriy $s\neq 0$ uchun

$$\frac{(1+x)^s-1}{s}\underset{x\to 0}{\sim}x \tag{4.54}$$

ekvivalentlik munosabati o‘rinli bo‘ladi. Xususiy holda $s=1/2$ bo‘lsa, $\sqrt{1+x}-1\underset{x\to 0}{\sim}x/2$ bo‘ladi.

Hosil qilingan (4.46)-(4.54) munosabatlardan ekvivalentlikning tranzitivlik xossasiga ko‘ra,

$$x \underset{x\to 0}{\sim} \sin x \underset{x\to 0}{\sim} \operatorname{tg} x \underset{x\to 0}{\sim} \arcsin x \underset{x\to 0}{\sim} \operatorname{arctg} x \underset{x\to 0}{\sim} \ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim}$$

$$\underset{x\to 0}{\sim} \ln a \cdot \log_a(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} (a^x - 1)\cdot \ln a \underset{x\to 0}{\sim} e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{(1+x)^s - 1}{s} \qquad (4.55)$$

munosabatlar zanjirini hosil qilamiz.

4.32-Teorema. $\alpha(x) \underset{x\to a}{\sim} \beta(x)$ va $f(x)$ funksiya a nuqtaning o'zi kirmagan biror atrofida aniqlangan bo'lsin. Agar $x = a$ nuqtada $\alpha(x)f(x)$ kopaytmaning (yoki $f(x)/\alpha(x)$ nisbatning) limiti mavjud bo'lsa, u holda $\alpha(x)$ cheksiz kichikni $\beta(x)$ bilan almashtirilganda limitning qiymati o'zgarmaydi.

► $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x)f(x) = A$ va $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{\alpha(x)} = B$ bo'lsin. U holda (4.45) va 4.19-Teoremaga ko'ra,

$$\lim_{x\to a} \beta(x)f(x) = \lim_{x\to a} \frac{\beta(x)f(x)\alpha(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x\to a} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} \cdot \lim_{x\to a} f(x)\alpha(x) = 1\cdot A = A,$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\beta(x)} = \frac{\alpha(x)f(x)}{\beta(x)\alpha(x)} = \lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \cdot \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\alpha(x)} = 1\cdot B = B.$$

Bu teoremaga ko'ra (4.55) munosabatlar zanjiridan foydalanish qulay. Bunda limitda qatnashgan cheksiz kichik unga ekvivalent bo'lgan cheksiz kichik bilan almashtiriladi.

4.46-Misol. (4.55) munosabatlar zanjiriga ko'ra hisoblaymiz:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\cos x}{e^{x^2} - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin^2(x/2)}{x^2} = -2\lim_{x\to 0} \frac{(x/2)^2}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

Nazorat savollari

1. Sonli funksiya deb nimaga aytiladi?
2. Funksiya qanday usullar bilan beriladi?
3. Qanday funksiyalarga davriy funksiya deyiladi?
4. Qanaday funksiyalar monoton deyiladi?
5. Funksiyaning limiti deb nimaga aytiladi?
6. Funksiyaning nuqtadagi chap va o'ng limiti nima?
7. Cheksiz kichik va cheksiz katta funksiyalar o'rtasida qanday bog'liqlik mavjud?
8. Limitga ega bo'lgan funksiyalar qanday xossalarga ega?
9. Qachon funksiya nuqtada uzluksiz deyiladi?
10. Cheksiz kichik funksiyalar qachon bir xil tartibli deyiladi?

Mashqlar.

Quyidagi funksiyalarning aniqlanish sohasini toping:

1. $y = x^3 + 5x^2 - x + 9.$

2. $y = \sqrt{2 - 5x - 3x^2}.$

3. $y = \sqrt{6x^2 + 7x - 5}.$

4. $y = \log_5(6\sin x - 3).$

Limitlarni hisoblang:

5. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3+1}{x^2+2}.$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4+x^2-3x+7}{3x^4+x^3+8x^2-5x+1}.$

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+5x^2-7x+6}{x^2+7x+8}.$

8. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2+x-12}{x^2-5x+6}.$

9. $\lim\limits_{x\to\frac{5}{3}}\frac{6x^2-x-15}{3x^2-8x+5}.$

10. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2-x}}{x-1}.$

11. $\lim\limits_{x\to 7}\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}.$

12. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}.$

13. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5\sin 2x}{7x}.$

14. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\arcsin x}{7x}.$

15. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{2x^2+1}\right)^{x^2}$

16. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{x}$

17. $\lim\limits_{x\to\infty}x^{\frac{1}{x}}.$

18. $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\pi - 2x)^{\cos x}.$

19. $\lim\limits_{x\to\pi/2}\left(\frac{x}{\operatorname{ctg} x} - \frac{\pi}{2\cos x}\right).$

20. $\lim\limits_{x\to\pi/2}\left(2x\operatorname{tg} x - \frac{\pi}{\cos x}\right)$

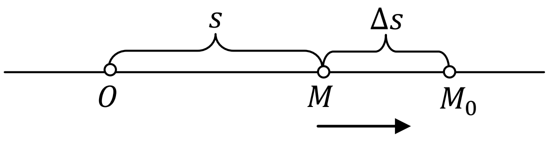
V BOB. BIR O‘ZGARUVCHILI FUNKSIYANING HOSILASI VA DIFFERENSIALI

5.1. Hosila

Harakatlanayotgan nuqtaning tezligi haqidagi masala. To‘gri chiziqli harakatlanayotgan moddiy nuqtaning v tezligini toppish masalasini qaraymiz. Nuqtaning holatini uning biror boshlang‘ich O nuqtadan hisoblanadigan masofa aniqlaydi; ana shu masofa bosib o‘tilgan yo‘l deb ataladi. Bosib o‘tilgan s yo‘l t vaqtga bog‘liq, ya’ni s yo‘l t vaqtning funksiyasi bo‘ladi:

$$s = f(t) \tag{5.1}$$

Nuqta vaqtning t momentida M holatda bo‘lib, boshlang‘ich O nuqtadan s masofada bo‘lsin. t o‘zgaruvchiga Δt orttirma beramiz va vaqtning $t + \Delta t$ momentini qaraymiz, bunda nuqta M_1 holatda va boshlang‘ich holatdan $s + \Delta s$ masofada bo‘ladi (5.1- rasm). Shunday qilib Δt vaqt oralig‘ida s masofa Δs miqdorga o‘zgaradi: $s + \Delta s = f(t + \Delta t)$. Bunday holda Δt vaqt mobaynida s miqdor Δs orttirma oldi deyiladi. Bu orttirma aniqlanishiga ko‘ra,



5.1-rasm

$$\Delta s = f(t + \Delta t) - f(t) \tag{5.2}$$

tenglikni qanoatlantiradi. Endi $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ nisbatni qaraymiz. Bu nisbat Δt vaqt mobaynidagi o‘rtacha tezlikni beradi:

$$v_{\text{o}'\text{rt}} = \Delta s/\Delta t \tag{5.3}$$

Har doim ham o‘rtacha tezlik nuqtaning t momentdagi tezligini beravermaydi. Masalan, Δt oraliqning boshida nuqta juda tez harakatlansa, oxirida esa juda sekin harakat qilsa, u holda vaqtning t momenridagi haqiqiy tezlikdan o‘rtacha tezlik ancha farq qilishi ravshan. Ana shu haqiqiy tezlikni o‘rtacha tezlik orqali ifodalash uchun Δt vaqt oraligini imkon darajasida kichik olish kerak.

Nuqtaning t momentdagi v tezligi deb, Δt vaqt oralig‘idagi $v_{\text{o}'\text{rt}}$ o‘rtacha tezlikning Δt vaqt oralig‘i 0 ga intilgandagi limitiga aytiladi:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta s/\Delta t \tag{5.4}$$

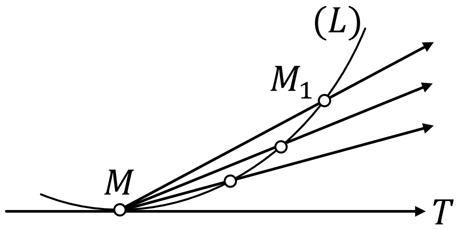
(5.4) tenglikni (5.2) tenglikdan foydalanib yozamiz:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} \tag{5.5}$$

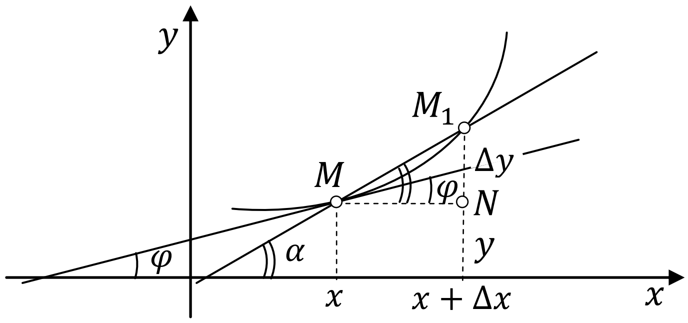
Hosil qilingan formula notekis harakat tezligi formulasi bo‘ladi. (5.5) formuladan ko‘rinib turibdiki, v tezlik vaqtning Δt orttirmasiga bog‘liq bo‘lmasdan, balki t o‘zgaruvchining qiymatiga va $f(t)$ funksiyaning ko‘rinishiga bog‘liq bo‘lar ekan.

Egri chiziqqa urinma o‘tkazish masalasi. Tekislikda (L) egri chiziq va uning ixtiyoriy M nuqtasi berilgan bo‘lsin (5.2-rasm). Ana shu M nuqtada urinma o‘tkazish masalasini, to‘g‘rirog‘i ana shu urinmaning burchak koeffisiyentini topish masalasini qaraymiz. Dastlab urinmaning umumiy ta’rfini keltiramiz. (L) egri chiziqda M nuqtadan farqli yana M_1 nuqtani olamiz va MM_1 kesuvchini o‘tkazamiz.

(L) egri chiziqqa M nuqtada o‘tkazilgan urinma deb, M_1 nuqta (L) egri chiziq bo‘ylab M nuqtaga intilganda MM_1 kesuvchining MT limitik holatiga aytiladi.



5.2-rasm



5.3-rasm

Endi $f(x)$ funksiya va Dekart koordinatalar sistemasida unga mos $y = f(x)$ egri chiziqni qaraymiz (5.3-rasm). Argumentning biror x qiymatida funksiya $y = f(x)$ qiymatni qabul qiladi. Ana shu x, y qiymatlarga egri chiziqning $M(x, y)$ nuqtasi mos keladi. x argumentga Δx orttirma beramiz va argumentning yangi $x + \Delta x$ qiymatiga funksiyaning $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$ qiymati mos keladi. Natijada egri chiziqda $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$ nuqta hosil bo‘ladi. MM_1 kesuvchini o‘tkazamiz va kesuvchi bilan Ox o‘qning musbat yo‘nalishi orasidagi burchakni α orqali belgilaymiz. 5.3-rasmdagi M_1MN uchburchakda $|M_1N| = \Delta y, |MN| = \Delta x$ tomonlar uchun

$$\Delta y / \Delta x = \mathrm{tg}\, \alpha \tag{5.6}$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi, ya’ni M_1M kesuvchining burchak koeffisiyenti $k_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ tenglik bilan aniqlanadi.

Agar Δx orttirma nolga intilsa, u holda M_1 nuqta egri chiziq bo‘ylab M nuqtaga intiladi. Urinmaning ta’rifiga ko‘ra M_1M kesuvchining limitik holati qidiralyotgan urinma to‘g‘ri chiziq bo‘ladi. Bu harakat jarayonida α burchak ham o‘zgaradi va u biror φ burchakka intilsa, bu burchak urinmaning Ox o‘qning musbat yo‘nalishi bilan tashkil qilgan burchagi bo‘ladi. Shuning uchun urinmaning burchak koeffisiyenti

$$k = tg\varphi = \lim_{\Delta t \to 0} tg\,\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad (5.7)$$

tenglik bilan aniqlanadi.

Hosilaning ta’rifi. Agar yuqorida qaralgan masalalarni tahlil qiladigan bo‘lsak, o‘zgaruvchilarni talqin qilishni e’tiborga olinmasa, ularda muhim umumiylik mavjud. U ham bo‘lsa funksiya orttirmasining argument orttirmasiga nisbatining argument orttirmasi nolga intilgandagi limitidan iborat. Shunday qilib biz differensial hisobning asosiy tushunchasi-hosila tushunchasiga keldik.

Biror (a, b) oraliqda aniqlangan

$$y = f(x) \qquad (5.8)$$

funksiya berilgan bo‘lsin. Bunda x argumentning bu oraliqdan olingan har bir qiymatiga $y = f(x)$ funksiyaning aniq bir qiymati mos keladi.

x argument biror Δx orttirma olsin. Bu orttirma musbatmi yoki manfiymi farqi yo‘q, muhimi $x + \Delta x$ qiymat qaralayotgan (a, b) oraliqda qolishi kerak. U holda y funksiya biror Δy orttirma oladi. Shunday qilib argumentning yangi $x + \Delta x$ qiymatiga funksiyaning yangi $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$ qiymati mos keladi. Shu sababli funksiya orttirmasi uchun

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \qquad (5.9)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi. Funksiya Δy orttiramasining mos $\Delta x \neq 0$ orttirmaga nisbatini tuzamiz:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (\Delta x \neq 0).$$

Qo‘zg‘almas x qiymatda bu nisbat Δx orttirmaning funksiyasidan iborat bo‘ladi:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \varphi(\Delta x).$$

5.1-Ta'rif. Agar Δx orttirma nolga intilganda $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nisbatning limitti mavjud bo'lsa, bu limit $y = f(x)$ funksiyaning x nuqtadagi hosilasi deb ataladi va u $f'(x)$ yoki $y'(x)$ yoki y'_x yoki $\frac{dy}{dx}$ orqali belgilanadi. Hosilaning aniq bir a nuqtadagi qiymati $f'(a)$, $y'(a)$, $y'_x|_{x=a}$, $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}$ ifodalardan biri orqali belgilanadi.

Shunday qilib, ta'rifga ko'ra,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{5.10}$$

(5.10) limit chekli yoki cheksiz bo'lishi mumkin. Shu sababli chekli yoki cheksiz hosila haqida gapirish mumkin. Hozircha limit chekli bo'lgan holni qaraymiz.

Hosilani hisoblashga misollar.

5.1-Misol. $y = c$ $(c = \text{const.})$ o'zgarmas funksiyaning hosilasini topamiz. Ixtiyoriy x nuqtada va ixtiyoriy Δx orttirmada $f(x) = c$, $f(x + \Delta x) = c$ bo'lganligi uchun $\Delta y = 0$ bo'ladi va hosilaning ta'rifiga ko'ra,

$$(c)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0.$$

5.2-Misol. $y = x^2$ funksiyaning hosilasini topamiz. Ixtiyoriy x nuqtada va ixtiyoriy Δx orttirmada

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2.$$

Shuning uchun:

$$(x^2)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

5.3-Misol. $y = e^x$ funksiyaning hosilasini topamiz. Ixtiyoriy x nuqtada va ixtiyoriy Δx orttirmada

$$\Delta y = e^{x + \Delta x} - e^x = e^x(e^{\Delta x} - 1).$$

Bundan esa (4.57) formulaga ko'ra

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^x(e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = e^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^x \cdot 1 = e^x.$$

Shunday qilib,

$$(e^x)' = e^x \tag{5.11}$$

tenglik ixtiyoriy x uchun orinli.

5.4-Misol. Hosilaning ta'rifidan foydalanib

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

funksiyaning $x = 0$ nuqtadagi $f'(0)$ hosilasini topamiz:

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{x \to 0} \frac{(\Delta x)^2 \sin\frac{1}{\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{x \to 0} \Delta x \sin\frac{1}{\Delta x} = 0.$$

Bu yerda 4.13-Misoldan foydalanildi.

Endi yuqorida qaralgan harakatlanayotgan moddiy nuqtaning tezligi haqidagi masalaga qaytamiz.

(5.5) formulaga ko'ra $s = f(t)$ qonuniyat bilan harakatlanayotgan moddiy nuqtaning vaqtning t momentidagi v tezligi

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

tenglik bilan aniqlanar edi. O'ng tomondagi limit $f(t)$ funksiyaning t nuqtadagi hosilasini beradi. Shuning uchun vaqtning t momentigacha bosib o'tilgan yo'ldan olingan hosila vaqtning t momentidagi tezlikka teng bo'ladi:

$$v = f'(t). \tag{5.12}$$

Egri chiziqqa o'tkazilgan urinma va normal tenglamasi. Egri chiziq $y = f(x)$ tenglama bilan berilgan bo'lsin. Egri chiziqda $M(a, f(a))$ nuqta olamiz va $f'(a)$ hosila mavjud deb faraz qilib, bu nuqtada egri chiziqqa o'tkazilgan urinma tenglamasini keltirib chiqaramiz. Egri chiziqqa $M\big(x, f(x)\big)$ nuqtada o'tkazilgan urinmaning k burchak koeffisiyenti (5.7) formulaga ko'ra,

$$k = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

tenglik bilan aniqlanadi. Bu yerda, o'ng tomiondagi limit $f'(x)$ hosilani beradi. Shuning uchun egri chiziqqa $M\big(x, f(x)\big)$ nuqtada o'tkazilgan urinmaning burchak koeffisiyenti uchun

$$k = f'(x) \qquad (5.13)$$

teng'lik o'rinli bo'ladi.

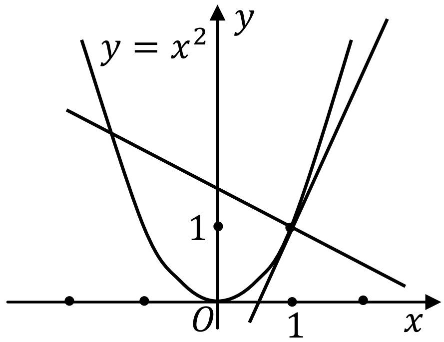
Berilgan nuqtadan o'tuvchi va berilgan burchak koffisiyentli to'g'ri chiziq tenglamasining formulasiga ko'ra $M(a, f(a))$ nuqtadan o'tuvchi va k burchak koeffisientli to'g'ri chiziq tenglamasi

$$y - f(a) = k(x - a)$$

ko'rinishda bo'ladi. Urinma chiziq uchun $k = f'(a)$ bo'ladi. Shuning uchun $y = f(x)$ funksiya grafigiga $M(a, f(a))$ nuqtada o'tkazilgan urinma to'g'ri chiziq tenglamasi

$$y - f(a) = f'(a)(x - a) \qquad (5.14)$$

bo'ladi. M nuqtadan o'tuvchi egri chiziq urinmasiga perpendikulyar to'g'ri chiziq $y = f(x)$ funksiya grafigining M nuqtadagi *normali* deb ataladi. To'g'ri chiziqlarning perpendikulyarlik shartiga ko'ra normalning burchak koeffisienti $k_n = -1/k_u$ tenglikni qanoatlantiradi, bu yerda k_u- urinmaning burchak koeffisiyenti. Agar $f'(a) \neq 0$ bo'lsa $y = f(x)$ funksiya grafigining M nuqtadagi normali tenglamasi



5.4-rasm

$$y - f(a) = -(x - a)/f'(a) \qquad (5.15)$$

bo'ladi. $f'(a) = 0$ holda normal vertikal bo'ladi (urinmaning o'zi Ox o'qqa parallel bo'ladi), shuning uchun uning tenglamasi $x = a$ bo'ladi.

5.5-Misol. $f(x) = x^2$ funksiya garfigiga $(1, 1)$ nuqtada o'tkazilgan urinma va normal tenglamasini tuzing (5.4-rasm).

► Funksiya va uning hosilasining $x = 1$ nuqtadagi qiymatini hisoblaymiz: $(1) = 1$, $f'(x) = 2x$, $f'(1) = 2$. U holda (5.14) tenglamaga ko'ra urinma

$$y - 1 = 2(x - 1) \text{ yoki } y = 2x - 1$$

tenglamaga ega bo'ladi. Normal tenglamasini (5.15) formulaga ko'ra tuzamiz:

$$y - 1 = -\frac{x - 1}{2} \quad \text{yoki} \quad y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}. \quad ◄$$

5.2-Ta'rif. Agar $y = f(x)$ funksiya va uning hosilasi (a, b) oraliqda uzluksiz bo'lsa, u holda bu funksiya (a, b) oraliqda silliq deyiladi, $y = f(x)$ tenglama bilan beriladigan egri chiziq esa (a, b) oraliqda silliq chiziq deyiladi.

O'ng va chap hosilalar. $f(x)$ funksiyaning x nuqtadagi o'ng va chap hosilalari tushunchasini kiritamiz.

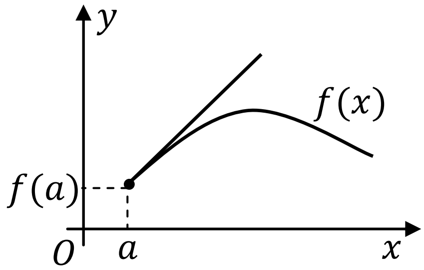
5.3-Ta'rif. Agar ushbu

$$f'(x+0) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

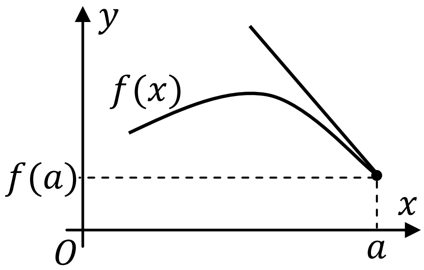
limit mavjud bo'lsa, bu limit $y = f(x)$ funksiyanig x nuqtadagi o'ng hosilasi deb ataladi, agar

$$f'(x-0) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

limit mavjud bo'lsa, biz uni x nuqtadagi chap hosila deb ataymiz.



5.5-rasm



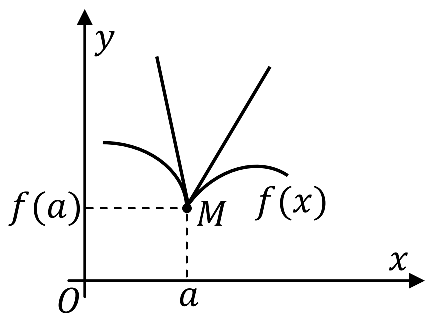
5.6-rasm

Chap yoki o'ng hosilalar mavjud bo'lgan nuqtalarda funksiya grafigi bir tomonlama urinmalarga ega bo'ladi (5.5 va 5.6-rasmlar).

Bir tomonlama limit tushunchasidan foydalanib hosila mavjudlighining zarur va yetarli shartini keltiramiz: x nuqtada $f'(x)$ hosilaning mavjud bo'lishligi uchun, x nuqtada $y = f(x)$ funksiyaning o'ng va chap hosilalari mavjud va ular teng bo'lishligi zarur va yetarli:

$$f'(x+0) + f'(x-0) = f'(x).$$

Shunday funksiyalar ham borki, ular biror oraliqda uzluksiz, ammo unung biror ichki $x = a$ nuqtasida $\Delta y / \Delta x$ orttirmalar nisbatining bir



5.7-rasm

tomonlama limitlari teng bo‘lmaydi. Ana shu teng bo‘lmagan bir tomonlama limitlar bir tomonlama hosilalar ekanligi ravshan. Funksiya grafigining mos nuqtasida bir tomonlama urinmalari mavjud bo‘ladi va umuman olganda ular o‘zaro burchak tashkil qiladi (5.7-rasm). Bu holda $M(a, f(a))$ nuqta funksiya grafigining sinish nuqtasi deb ataladi.

5.6-Misol. $f(x) = |x|$ funksiyani qaraymiz. $x = 0$ nuqtada funksiya orttirmasining argument orttirmasiga nisbatini tuzamiz:

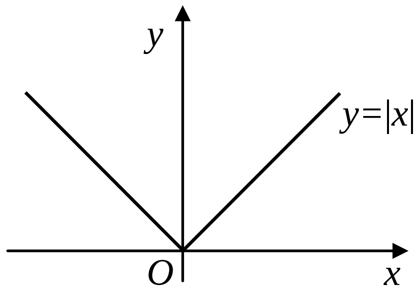
$$\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \begin{cases} 1, & \text{agar } \Delta x > 0, \\ -1, & \text{agar } \Delta x < 0. \end{cases}$$

Shuning uchun $f(x) = |x|$ funksiya $x = 0$ nuqtada

$$f'(0+0) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = 1$$

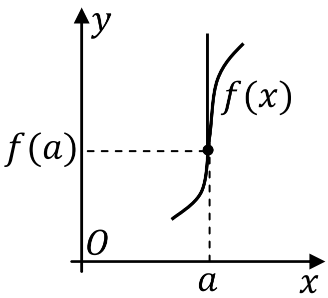
o‘ng hosilaga va

$$f'(0-0) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = -1$$

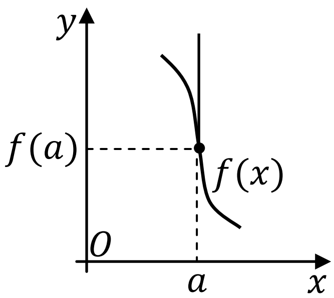


5.8-rasm

chap hosilaga ega bo‘ladi, ammo ular teng emas va demak $f(x) = |x|$ funksiya $x = 0$ nuqtada hosilaga ega emas. Geometrik jihatdan bu $y = |x|$ funksiyaning grafigi $O(0,0)$ nuqtada sinishini anglatadi (5.8-rasm).

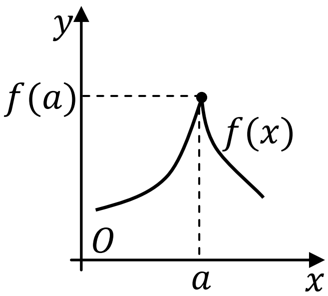


5.9-rasm

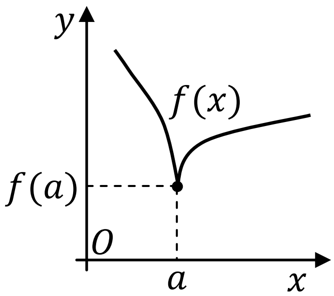


5.10-rasm

$\Delta y/\Delta x$ ayirmalar nisbatining bittasi yoki ikkalasi ham a nuqtada cheksiz bo‘lishi mumkin. Bu holda $y = f(x)$ funksiyaning bir tomonlama chap yoki o‘ng (yoki chap ham o‘ng ham) cheksiz hosilasi haqida gapirish mumkin. Uzluksiz funksiyaning bir tomonlama cheksiz hosilalasi aniq bir ishorali (yoki $+\infty$ yoki $-\infty$) bo‘ladi. Agar biror a nuqtada chap va o‘ng bir tomonlama hosilalarning ishoralari bir xil bo‘lsa, u holda berilgan funksiya ana shu nuqtada aniq bir ishorali cheksiz hosilaga ega bo‘ladi (musbat 5.9-rasm, manfiy 5.10-rasm). Bu holda funksiya garfigiga mos nuqtada o‘tkazilgan urinma vertikal bo‘ladi. Agar bir tomonlama cheksiz hosilalarning ishoralari turlicha bo‘lsa, funksiya grafigining mos nuqtasi o‘tkirlashgan nuqta (qaytish nuqtasu) bo‘ladi (5.11, 5.12-rasmlar)



5.11-rasm



5.12-rasm

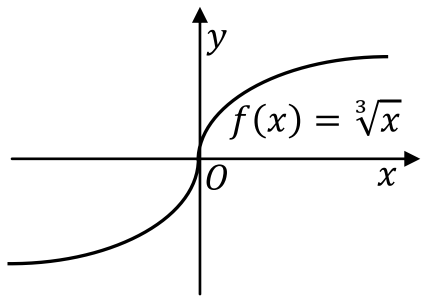
5.7-Misol. $f(x) = \sqrt[3]{x}$ funksiyani qaraymiz. $x = 0$ nuqtada funksiya orttirmasining argument orttirmasiga nisbatini hisoblaymiz:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \frac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}}.$$

Shuning uchun

$$f'(0+0) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(0-0) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty,$$

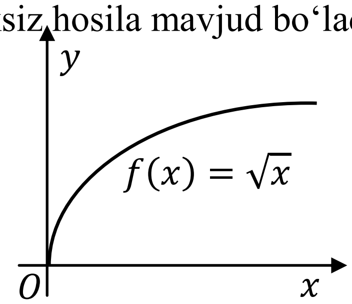
ya’ni funksiya $x = 0$ nuqtada bir xil ishorali bir tomonlama cheksiz hosilalarga ega ekan va shuning uchun $f'(0) = +\infty$ bo‘ladi. $f(x) = \sqrt[3]{x}$ funksiyaning grafigi $O(0,0)$ nuqtada $x = 0$ vertikal urinmaga ega bo‘ladi (5.13-rasm).◀



5.13-rasm

5.8-Misol. $f(x) = \sqrt{x}$ funksiya $x \geq 0$ nuqtalarda aniqlangan (5.14-rasm). $x = 0$ nuqtadagi orttirmalar nisbati $\Delta y / \Delta x = (\Delta x)^{-1/2}$ bo‘ladi va $\Delta x > 0$ bo‘lgandagina qarash mumkinligidan, faqat $f'(0+0) = +\infty$ o‘ng cheksiz hosila mavjud bo‘ladi.◀

5.9-Misol. $f(x) = x^{2/3}$ funksiyaning $x = 0$ nuqtadagi orttirmalar nisbati



5.14-rasm

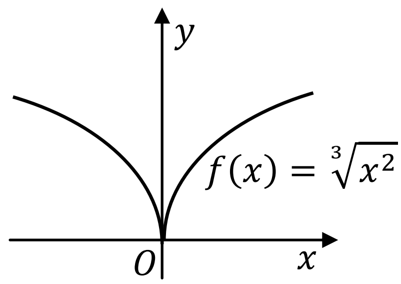
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \frac{(\Delta x)^{2/3}}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x}}$$

tenglik bilan aniqlanadi. Bundan esa,

$$f'(0+0) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{1}{(\Delta x)^{1/3}} = +\infty,$$

$$f'(0-0) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{1}{(\Delta x)^{1/3}} = -\infty.$$

Shunday qilib, bu funksiya $x = 0$ nuqtada turli ishorali bir tomonlama cheksiz hosilalarga ega va $O(0,0)$ nuqta esa funksiya grafigining o‘tkirlashgan nuqtasi bo‘ladi (5.15-rasm).◄



5.15-rasm

Funksiyaning differensiallanuvchanligi.

5.4-Ta’rif. Agar $y = f(x)$ funksiya biror a nuqtada

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

hosilaga ega bo‘lsa, u holda funksiya bu nuqtada differensiallanuvchi deyiladi.

Shuning uchun funksiyaning hosilasini topish uni differensiallash deb ham yuritiladi.

5.5-Ta’rif. Agar (a, b) oraliqning yoki $[a, b]$ kesmaning barcha nuqtalarida $f(x)$ funksiya differensiallanuvchi bo‘lsa, u holda funksiya (a, b) oraliqda yoki mos ravishda $[a, b]$ kesmada differensiallanuvchi deyiladi.

5.1-Teorema. Agar $y = f(x)$ funksiya biror a nuqtada differensiallanuvhci bo‘lsa, u holda u bu nuqtada uzluksiz bo‘ladi.

► $y = f(x)$ funksiya a nuqtada differensiallanuvhci, ya’ni

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(a)$$

hosila mavjud bo‘lsin. U holda 4.12-Teoremaga ko‘ra

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(a) + \alpha(\Delta x),$$

bu yerda $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$. Bundan esa

$$\Delta y = f'(a) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$$

tenglikni yozish mumkin. Hosil qilingan tenglikning ikkala tomonida limitga o‘tamiz:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} [f'(a) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x] = 0,$$

ya’ni

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} [f(a + \Delta x) - f(a)] = 0,$$

yoki

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(a + \Delta x) = f(a).$$

Bu munosabat $f(x)$ funksiyaning a nuqtada uzluksiz ekanligidan dalolat beradi.◄

Endi differensiallanuvchi funksiyalarning muhim bir xossasini keltiramiz.

5.2-Teorema. $y = f(x)$ funksiya a nuqtada differensiallanuvchi bo‘lishligi uchun, argumentning Δx orttirmasiga mos funksiyaning $\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$ orttirmasini

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x \tag{5.16}$$

ko'rinishda ifodalash mumkin bo‘lishi zarur va yetarli. Bu yerda A biror o‘zgarmas son bo‘lib Δx orttirmaga bog‘liq emas va $\lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$.

► **Zarurligi.** $y = f(x)$ funksiya a nuqtada differensiallanuvchi bo‘lsin. Bu nuqtada Δy orttirmani (5.16) ko‘rinishda ifodalash mumkinligini isbotlaymiz. Shartga ko‘ra,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$$

hosila mavjud. U holda 4.12-Teoremaga ko‘ra,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(a) + \alpha(\Delta x),$$

bu yerda $\lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$. Bundan esa,

$$\Delta y = \underbrace{f'(a)}_{A} \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$$

tenglikni hosil qilamiz. Δy orttirmani (5.16) ko‘rinishda ifodalash mumkinligi isbotlandi, hamda $A = f'(a)$ ekanligini aniqladik.

Yetarliligi. Δy orttirma (5.16) ko‘rinishda ifodalangan bo‘lsin. U holda (5.16) tenglikdan

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x)$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu yerda tenglikning ikkala tomonida limitga o‘tamiz. O‘ng tomonda $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x)=0$ ekanligini va A o‘zgarmas sonligini inobatga olsak chap tomonning ham limiti mavjudligi kelib chiqadi. Chap tomonning limiti esa hosilani beradi, ya’ni $f(x)$ funksiya a nuqtada differensiallanuvchi ekan.◄

5.10-Misol. $y=x^3$ funksiyani qaraymiz.

► Ixtiyoriy x va ixtiyoriy Δx orttirmada

$$\Delta y=(x+\Delta x)^3-x^3=\underbrace{3x^2}_{A}\Delta x+\underbrace{(3x\cdot\Delta x+\Delta x^2)}_{\alpha}\cdot\Delta x$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi. Shuning uchun ta’rifga ko‘ra $y=x^3$ funksiya ixtiyoriy x nuqtada differensiallanuvchi bo‘ladi.◄

5.2-Teoremaga ko‘ra funksiyaning nuqtada differensiallanuvchi bo‘lishi bilan uni bu nuqtada (5.16) ko‘rinishda tasvirlash teng kuchli ekan. Shuning uchun bu formulani ta’rif sifatida ham qabul qilish mumkin.

5.6-Ta’rif. $y=f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi Δy orttirmasini (5.16) ko‘rinishda tasvirlash mumkin bo‘lsa, bu funksiya a nuqtada differensiallanuvchi deyiladi.

5.2. Ba’zi bir elementar funksiyalarning hosilasi

$\boldsymbol{y=x^a}$ **($\boldsymbol{a}$-ixtiyoriy haqiqiy son) darajali funksiya.** Bu funksiya barcha $x>0$ uchun aniqlangan. Shuning uchun

$$\Delta y=(x+\Delta x)^a-x^a=x^a\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^a-1\right].$$

U holda

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=x^a\frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^a-1}{\Delta x}.$$

(4.60) munosabatlar zanjiridan

$$\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^a-1\underset{\Delta x\to 0}{\sim}a\frac{\Delta x}{x}$$

ekvivalentlik munosbatini hosil qilamiz. U holda 4.33-Teoremaga ko‘ra

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=x^a\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^a-1}{\Delta x}=x^a\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a\frac{\Delta x}{x}}{\Delta x}=ax^{a-1}.$$

Shunday qilib,

$$(x^a)' = ax^{a-1}. \tag{5.17}$$

$\boldsymbol{y = a^x}$ $(\boldsymbol{a} > 0, -\infty < x < +\infty)$ **ko‘rsatkichli funksiya.** Orttirmalar nisbati

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

Ko‘rinishda bo‘ladi. Bu yerda ham (4.60) hisoblangan limitdan foydalanib

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x \cdot \ln a}{\Delta x} = a^x \cdot \ln a$$

hosilani topamiz, ya’ni

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a. \tag{5.18}$$

Xususiy holda, agar $y = e^x$ bo‘lsa, u holda

$$(e^x)' = e^x. \tag{5.19}$$

$\boldsymbol{y = \log_a x}$, $(\boldsymbol{0} < a \neq 1, 0 < x < +\infty)$ **logarifmik funksiya.** Bu holda

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log_a(x + \Delta x) - \log_a x}{\Delta x} = \frac{1}{x} \cdot \frac{\log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}}.$$

Bu yerda ham (4.60) munosabatlar zanjiridan foydalanamiz:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a(1 + \Delta x/x)}{\Delta x/x} = \frac{1}{x \ln a} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x/x}{\Delta x/x} = \frac{1}{x \ln a} \cdot 1 = \frac{1}{x \ln a},$$

$$(\log_a x)' = 1/(x \ln a) \tag{5.20}$$

logarifmik funksiyaning hosilasini topdik. Xususiy holda, agar $y = \ln x$ bo‘lsa $y' = \frac{1}{x}$ bo‘ladi.

Trigonometrik funksiyalar. Dastlab $y = \sin x$ funksiyaning hosilasini topamiz. Orttirmalar nisbatini olamiz:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

$\cos x$ funksiyaning uzluksizligidan va birinchi ajoyib limitdan foydalanib, hosil qilingan tenglikda limitga o‘tib

$$(\sin x)' = \cos x \tag{5.21}$$

hosilani topdik.

$y = \cos x$ funksiyaning hosilasini topamiz. Orttirmalar nisbati uchun

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cos\,(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x} = -\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi. Bu yerda ham $\sin x$ funksiyaning uzluksizligidan va birinchi ajoyib limitdan foydalanib, hosil qilingan tenglikda limitga o‘tib

$$(\cos x)' = -\sin x \tag{5.22}$$

hosilani topdik.

$y = \mathrm{tg}\, x$ funksiya uchun

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\mathrm{tg}\,(x + \Delta x) - \mathrm{tg}\, x}{\Delta x} = \frac{\frac{\sin(x+\Delta x)}{\cos(x+\Delta x)} - \frac{\sin x}{\cos x}}{\Delta x} =$$

$$= \frac{\sin(x + \Delta x) \cdot \cos x - \cos(x + \Delta x) \cdot \sin x}{\Delta x \cdot \cos x \cdot \cos(x + \Delta x)} =$$

$$= \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \cdot \frac{1}{\cos x \cdot \cos(x + \Delta x)}$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi. Bu yerda ham yuqoridagi singari limitga o‘tib

$$(\mathrm{tg}\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x \tag{5.23}$$

hosilani topamiz.

Xuddi shu singari, agar $y = \mathrm{ctg}\, x$ bo‘lsa, uning hosilasi

$$(\mathrm{ctg}\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x \tag{5.24}$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

5.3. Hosila hisoblash qoidalari

O‘zgarmas songa ko‘paytirilgan funksiyaning hosilasi.

5.3-Teorema. Differensiallanuvchi funksiya bilan o‘zgarmas sonning ko‘paytirishdan iborat funksiya ham differensiallanuvchi bo‘ladi va uning hosilasi bu funksiya hosilasi bilan ana shu o‘zgarmas son ko‘payutmasiga teng:

$$(C \cdot u(x))' = C \cdot u'(x). \tag{5.25}$$

► x argumentga noldan farqli Δx orttirma beramiz. U holda funksiyaning mos orttirmasi

$$\Delta y = C \cdot u(x + \Delta x) - C \cdot u(x) = C \cdot [u(x + \Delta x) - u(x)]$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Shuning uchun orttirmalar nisbati

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = C \cdot \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x}$$

tenglik bilan topiladi. U holda hosila uchun

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = C \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} = C \cdot u'(x)$$

tenglikka ega bo‘lamiz. ◄

5.11-Misol. $y = -3\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ funksiyaning hosilasini toping.

► (5.17) formulaga ko‘ra,

$$y' = \left(-3\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)' = -3\left(x^{-\frac{1}{3}}\right)' = -3\left(-\frac{1}{3}\right)x^{-\frac{1}{3}-1} = x^{-\frac{4}{3}} = \frac{1}{x\sqrt[3]{x}}. \quad ◄$$

Yig‘indining hosilasi.

5.4-Teoprema. Ikikita differensiallanuvchi funksiyalarning algebraik yig‘indisi ham differensiallanuvchi bo‘ladi va uning hosilasi bu funksiyalar hosilalarining algebraik yig‘indisiga teng:

$$(u(x) \pm v(x))' = u'(x) \pm v'(x) \tag{5.26}$$

► $y = u(x) + v(x)$ funksiya orttirmasini tuzamiz:

$$\Delta y = [u(x+\Delta x) \pm v(x+\Delta x)] - [u(x) \pm v(x)] = [u(x+\Delta x) - u(x)] \pm$$
$$+[v(x+\Delta x) - v(x)] = \Delta u \pm \Delta v$$

U holda

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

va bu yerda limitga o‘tsak

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

yoki

$$y' = u'(x) \pm v'(x).$$

5.12-Misol. $y = x^5 + 4\sin x$ funksiyaning hosilasini topamiz.

► (5.21) va (5.26) formulalarga ko‘ra

$y' = (x^5 + 4\sin x)' = (x^5)' + (4\sin x)' = 5x^4 + 4\cos x.$ ◄

5.3 va 5.4-Teoremalarning tasdiqlaridan chekli m sondai differensiallanuvchi $f_k(x), k = 1, \dots, m,$ funksiyalarning $c_k \in \mathbf{R}$ o‘zgarmaslar bilan chiziqli kombinatsiyasini differensiallash qoidasini keltirib chiqarish mumkin:

$$\left(\sum_{k=1}^{m} c_k f_k(x)\right)' = \sum_{k=1}^{m} c_k f_k'(x)$$

Ko‘paytmaning hosilasi.

5.5-Teorema. Ikkita differensiallanuvchi funksiya ko‘paytmasi ham differensiallanuvchi bo‘ladi va uning hosilasi quyidagi tenglik bilan topiladi:

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \qquad (5.27)$$

► $y = u(x)v(x)$ funksiya orttirmasini tuzamiz:

$$\Delta y = [u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)] - [u(x)v(x)] =$$
$$= [u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x+\Delta x)] +$$
$$+[u(x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x)] =$$
$$=[u(x+\Delta x) - u(x)]v(x+\Delta x) + [v(x+\Delta x) - v(x)]u(x).$$

U holda

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot v(x+\Delta x) + \frac{\Delta v}{\Delta x} \cdot u.$$

Bundan limitga o‘tamiz. $v(x)$ funksiya differensiallanuvchi bo‘lganligi uchun 5.1-Teoremaga ko‘ra u uzluksiz hamdir, shuning uchun $\lim\limits_{\Delta x \to 0} v(x+\Delta x) = v(x)$ bo‘ladi. Buni quyidagi limitda qo‘llasak

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot v(x+\Delta x) + \frac{\Delta v}{\Delta x} \cdot u\right) =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} v(x+\Delta x) + u \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

yoki

$$y' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x). \blacktriangleleft$$

5.13-Misol. $y = x^2 \ln x$ funksiyaning hosilasini topamiz.

► (5.17) va (5.20) formulalarni inobatga olib (5.27) formulaga ko‘ra

$$y' = (x^2 \ln x)' = (x^2)' \ln x + x^2 (\ln x)' = 2x \ln x + x^2 \frac{1}{x} =$$

$$= 2x\ln x + x. \blacktriangleleft$$

Agar u, v va w funksiyalar x nuqtada differensiallanuvchi bo‘lsa, u holda

$$(uvw)' = (uv)'w + (uv)w' =$$
$$= (u'v + uv')w + uvw' = u'vw + uv'w + uvw'.$$

Bu qoida ixtiyoriy chekli sondagi differensiallanuvchi ko‘paytuvchilar uchun ham o‘rinli

$$(uvw \dots s)' = u'vw \dots s + uv'w \dots s + \dots + uvw \dots s'.$$

Bo‘linmaning hosilasi.

5.5-Teorema. Ikikita differensiallanuvchi funksiyaning bo‘linmasi ham bo‘luvchi nolga aylanmaydigan nuqtalarda differensiallanuvchi bo‘ladi va uning hosilasi bu nuqtalarda quyidagi tenglik bilan topiladi:

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}, \qquad v(x) \neq 0. \tag{5.28}$$

► $y = \frac{u(x)}{v(x)}$ nisbatning orttirmasini tuzamiz:

$$\Delta y = \frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u(x+\Delta x)v(x) - v(x+\Delta x)u(x)}{v(x+\Delta x)v(x)}.$$

Tenglikning ikkala tomonini Δx orttirmaga bo‘lib, orttirmalar nisbatini hosil qilamiz:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot v - \frac{\Delta v}{\Delta x} \cdot u\right)}{v(x+\Delta x)v(x)}.$$

U holda $\lim\limits_{\Delta x \to 0} v(x+\Delta x) = v(x)$ ekanligini inobatga olgan holda bu yerda limitga o‘tamiz:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot v - \frac{\Delta v}{\Delta x} \cdot u\right)}{v(x+\Delta x)v(x)} = \frac{\lim\limits_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot v - \frac{\Delta v}{\Delta x} \cdot u\right)}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} v(x+\Delta x)v(x)} =$$
$$= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}. \quad \blacktriangleleft$$

5.14-Misol. $y = \operatorname{tg} x$ funksiyadan $\sin x$ va $\cos x$ funksiyalarning nisbati sifatida hosila olamiz.

$$\blacktriangleright \; y' = (\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x\,(\cos x)'}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}. \quad ◄$$

5.15-Misol. $y = x^3 + 3x^2 + 11$ egri chiziqning shunday nuqtalarini topingki, bu nuqtalarda egri chiziqqa o‘tkazilgan urinmalar $y = 24x - 1$ to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lsin.

► (5.13) formulaga ko‘ra $y = f(x)$ funksiya grafigiga $M(a, f(a))$ nuqtada o‘tkazilgan urinma to‘g‘ri chiziqning k burchak koeffisienti $k = f'(a)$ tenglikni qanoatlantiradi. Bizning holda $f'(a) = 3a^2 + 6a$. U holda to‘g‘ri chiziqlarning paralellik shartiga ko‘ra $f'(a) = 24$ yoki $3a^2 + 6a = 24$ bundan esa $a^2 + 2a - 8 = 0$ kvadrat tenglamani hosil qilamiz va uni yechib $a_1 = -4,\ a_2 = 2$ izlanayotgan nuqtalarning abssissasini hosil qilamiz. Ularning ordinatalari esa $f(a_1) = -5$ va $f(a_2) = 31$ bo‘ladi. Shunday qilib izlanayotgan nuqtalar $M_1(-4, -5)$ va $M_2(2, 31)$ bo‘lar ekan. ◄

Murakkab funksiyaning hosilasi

5.6-Teorema (murakkab funksiyani differensiallash). Agar $u = f(x)$ funksiya a nuqtada differensiallanuvchi, $y = g(u)$ funksiya esa mos $A = f(a)$ nuqtada differensiallanuvchi bo‘lsa, u holda $g(f(x))$ murakkab funksiya ham a nuqtada differensiallanuvchi bo‘ladi va

$$[g(f(x))]'_x|_{x=a} = g'(A) \cdot f'(a) \qquad (5.29)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

► $x = a$ qiymatga Δx orttirma beramiz. U holda $u = f(x)$ funksiya Δu orttirma va agar $\Delta u \neq 0$ bo‘lsa, $y = g(u)$ funksiya o‘z navbatida Δy orttirma oladi. Teorema shartiga ko‘ra $y = g(u)$ funksiya A nuqtada differensiallanuvchi, shuning uchun 5.2-Teoremaga ko‘ra Δy orttirmani

$$\Delta y = g'(A) \cdot \Delta u + \alpha(\Delta u) \cdot \Delta u \qquad (5.30)$$

ko‘rinishda ifodalash mumkin, bu yerda $\alpha(\Delta u)$ funksiya $\Delta u = 0$ nuqtada cheksiz kichik. Umuman olganda $\alpha(\Delta u)$ funksiya $\Delta u = 0$ nuqtada aniqlanmagan va biz $\alpha(0) = 0$ deb olib, uni bu nuqtada ham aniqlaymiz. U holda $\alpha(\Delta u)$ funksiya $\Delta u = 0$ nuqtada uzluksiz bo‘ladi.

(5.30) tenglikning ikkala tomonini Δx orttirmaga bo‘lamiz:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = g'(A)\frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha(\Delta u)\frac{\Delta u}{\Delta x}. \quad (5.31)$$

Teorema shartiga ko‘ra $u = f(x)$ funksiya a nuqtada differensiallanuvchi va demak bu nuqtada uzluksiz hamdir. Shuning uchun $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta u = 0$ va bu o‘z navbatida $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta u) = 0$ tenglikka olib keladi. Bundan tashqari teorema shartidan $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = f'(a)$ tenglik ham kelib chiqadi. Demak (5.31) tenglikning o‘ng tomoni $\Delta x = 0$ nuqtada $g'(A) \cdot f'(a)$ qiymatga teng limitga ega ekan. Shuning uchun (5.31) tenglikning chap tomoni ham $\Delta x = 0$ nuqtada limitga ega bo‘ladi, ya’ni $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ limit mavjud va u $g(f(x))$ murakkab funksiyaning a nuqtadagi hosilasi bo‘ladi. (5.31) tenglikda limitga o‘tib

$$[g(f(x))]'_x|_{x=a} = g'(A) \cdot f'(a) \quad (5.32)$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu yerda $g'(A)$ belgi $g(u)$ funksiyadan u bo‘yicha olingan hosilasining $A = f(a)$ nuqtadagi qiymatini anglatadi. ◄

(5.32) tenglikni

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \qquad \text{yoki} \qquad y'_x = y'_u \cdot u'_x \quad (5.33)$$

ko‘rinishda yozish mumkin.

5.16-Misol. $y = e^{\operatorname{tg} x}$ funksiyaning hosilasini toping.

► Bu yerda y erkin x argumentning murakkab funksiyasi: $y = e^u$ va $u = \operatorname{tg} x$. Shuning uchun

$$y'_x = (e^u)'_u \cdot u'_x = e^u \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = e^{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}. \quad ◄$$

Agar murakkab funksiya bir nechta superpozitsiyadan hosil qilingan bo‘lsa, uning hosilasi murakkab funksiyani differensiallash qoidasini ketma-ket qo‘llab topiladi. Bu qoida odatda oraliq argumentlarni oshkora ko‘rinishda kiritilmasdan qo‘llaniladi.

5.17-Misol. $y = \sin^3(x^2 + x)$ funksiyaning hosilasini toping.

$$► \; y' = 3(\sin^2(x^2 + x))(\sin(x^2 + x))' =$$

$$= 3\sin^2(x^2 + x)\cos(x^2 + x)\,(x^2 + x)' =$$

$$= 3\sin^2(x^2 + x)\cos(x^2 + x)\,(2x + 1). \quad ◄$$

Logarifmlab differensiallash. $y = u^v, (u > 0)$ ko‘rsatkichli-darajali funksiyani qaraymiz, bu yerda u va v lar erkin x argumentning differensiallanuvchi funksiyalari. Funksiyani logarifmlaymiz:

$$\ln y = v \ln u \tag{5.34}$$

(4.25) asosiy logarifmik ayniyatdan berilgan funksiyani

$$y = e^{v \ln u} \tag{5.35}$$

ko'rinishda yozib olamiz. u va v funksiyalar differensiallanuvchi bo‘lganligi sababli (5.35) murakkab funksiya bir vaqtning o‘zida $u > 0$ va v funksiya aniqlanadigan x nuqtalarda differensiallanuvchi bo‘ladi. (5.34) tenglikning ikkala tomonini x bo‘yicha differensiallaymiz:

$$\frac{1}{y} y' = v' \ln u + v \frac{1}{u} u'.$$

Bundan esa $y' = y(u'v/u + v' \ln u)$, yoki y o‘rniga ko‘rsatkichli-darajali ifodani qo‘yib, I.Bernulli tomonidan isbotlangan

$$y' = y\left(\frac{v}{u} u' + v' \ln u\right)$$

formulani hosil qilamiz. Hosilani topishning bunday usuli *logarifmlab differensiallash* deb ataladi.

5.18-Misol. $y = x^{\cos x}$ funksiyani differensiallang.

► Funksiyani logarifmlaymiz: $\ln y = \cos x \cdot \ln x$ va tenglikning ikkala tomonini differensiallaymiz $y'/y = -\sin x \cdot \ln x + (\cos x)/x$ va natijada

$$y' = y\left(\frac{\cos x}{x} - \sin x \cdot \ln x\right) = x^{\cos x - 1} \cos x - x^{\cos x} \sin x \cdot \ln x. \quad ◄$$

Teskari funksiyaning hosilasi

5.7-Teorema. $y = f(x)$ funksiya $x = a$ nuqtada noldan farqli chekli $f'(a)$ hosilaga ega va bundan tashqari mos $y = b = f(a)$ nuqtada uzluksiz bo‘lgan uning bir qiymatli teskari $x = g(y)$ funksiyasi mavjud bo‘lsin. U holda $g'(b)$ hosila ham mavjud va u

$$g'(b) = 1/f'(a) \tag{5.36}$$

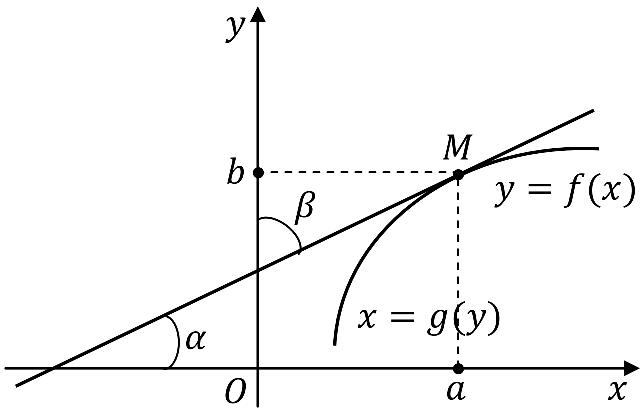
tenglikni qanoatlantiradi.

► $y=b$ qiymatga Δy orttirma beramiz. U holda $x=g(y)$ funksiya ham Δx orttirma oladi. $y=f(x)$ funksiyaning bir qiymatliligi tufayli $\Delta y\neq 0$ bo‘lganda Δx ham noldan farqli bo‘ladi. Shuning uchun

$$\frac{\Delta x}{\Delta y}=\frac{1}{\Delta y/\Delta x} \tag{5.37}$$

nisbat ma’noga ega. (5.37) tenglik o‘ng tomonidagi kasrning maxraji $f'(a)\neq 0$ limitga intiladi, ya’ni (5.37) tenglikning o‘ng tomoni chekli $1/f'(a)$ limitga ega.

Demak bu tenglikning chap tomoni ham chekli limitga ega bo‘ladi, 5.1-Ta’rifga ko‘ra bu limit $g'(b)$ hosilaga teng bo‘ladi. Shunday qilib, $x=g(y)$ teskari funksiya b nuqtada differensiallanuvchi va uning hosilasi (5.36) tenglik bilan topiladi.◄



5.16-rasm

Endi (5.36) tenglikning geometrik talqinini ko‘raylik. xOy koordinatalar tekisligida qaralgan $y=f(x)$ va $x=g(y)$ funksiyalarning grafikalari ustma-ust tushadi (5.16-rasm). Shuning uchun grafikning $M(a,b)$ nuqtasida o‘tkazilgan urinmaning koordinata o‘qlari bilan tashkil qilgan α va β burchaklari uchun $\alpha+\beta=\pi/2$ tenglik o‘rinli va hosilaning geometrik ma’nosi bo‘yicha ham o‘rinli:

$$g'(b)=\operatorname{tg}\beta=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{1}{f'(a)}.$$

5.19-Misol. (5.36) formulani *teskari trigonometrik funksiyalarning* hosilasini topishga qo‘llaymiz.

► 1. $y=\arcsin x\,,(x\in[-1,1],y\in[-\pi/2,\pi/2])$ funksiya barcha $y\in(-\pi/2,\pi/2)$ uchun $x'=\cos y>0$ hosilaga ega bo‘lgan $x=\sin y$ funksiyaning teskari funksiyasi. U holda 5.7-Teoremaga ko‘ra barcha $x\in(-1,1)$ uchun y' hosila mavjud va

$$y'=(\arcsin x)'=\frac{1}{x'}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

y funksiyaning aniqlanish sohasiga tegishli $x = \pm 1$ nuqtalar kiritilmagan, chunki ularga mos $y = \pm\pi/2$ nuqtalarda $x' = \cos y = 0$.

2. $y = \operatorname{arctg} x, (x \in \mathbf{R}, y \in (-\pi/2, \pi/2))$ funksiya barcha $y \in (-\pi/2, \pi/2)$ uchun $x' = 1/\cos^2 y > 0$ hosilaga ega bo‘lgan $x = \operatorname{tg} y$ funksiyaga teskari funksiya. Demak, 5.7-Teoremaga ko‘ra barcha $x \in \mathbf{R}$ nuqtalarda y' hosila mavjud va

$$y' = (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{x'} = \cos^2 y = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Xuddi shu singari ixtiyoriy $x \in (-1, 1)$ uchun

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

va barcha $x \in \mathbf{R}$ uchun

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}$$

formulalarni hosil qilish mumkin.◄

5.20-Misol. $y = \arcsin(2x/(1 + x^2))$ funksiyaning hosilasini toping.

$$\blacktriangleright\ y' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}} \cdot \frac{2(1 + x^2) - 4x^2}{(1 + x^2)^2} = \frac{2(1 - x^2)}{|1 - x^2|(1 + x^2)} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{2}{1 + x^2} & \text{agar } |x| < 1, \\ -\dfrac{2}{1 + x^2} & \text{agar } |x| > 1. \end{cases}$$

$|x| = 1$ bo‘lganda hosila mavjud emas. ◄

Giperbolik funksiyalarning hosilalari

Aniqlanilishiga ko‘ra giperbolik sinus $\operatorname{sh} x = (e^x - e^{-x})/2$, giperboli kosinus esa $\operatorname{ch} x = (e^x + e^{-x})/2$ ko‘rinishda bo‘ladi. Bu yerda hosila olish qoidalarini qo‘llab,

$$(\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{(e^x - e^{-x})}{2}\right)' = \frac{1}{2}((e^x)' - (e^{-x})') = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \operatorname{ch} x,$$

$$(\operatorname{ch} x)' = \left(\frac{(e^x + e^{-x})}{2}\right)' = \frac{1}{2}((e^x)' + (e^{-x})') = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \operatorname{sh} x$$

hosilalarni topamiz.

Aniqlanilishiga ko‘ra giperbolik tangens $\operatorname{th} x = (\operatorname{sh} x)/\operatorname{ch} x$ va giperbolik kotangens $\operatorname{cth} x = (\operatorname{ch} x)/\operatorname{sh} x$ ko‘rinishda bo‘ladi. Bo‘linmani differensiallash qoidasidan va $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$ aynyatdan foydalanib,

$$(\operatorname{th} x)' = \left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right)' = \frac{(\operatorname{sh} x)' \cdot \operatorname{ch} x - (\operatorname{ch} x)' \cdot \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x},$$

$$(\operatorname{cth} x)' = \left(\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}\right)' = \frac{(\operatorname{ch} x)' \cdot \operatorname{sh} x - (\operatorname{sh} x)' \cdot \operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^2 x} = \frac{\operatorname{sh}^2 x - \operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x} = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$$

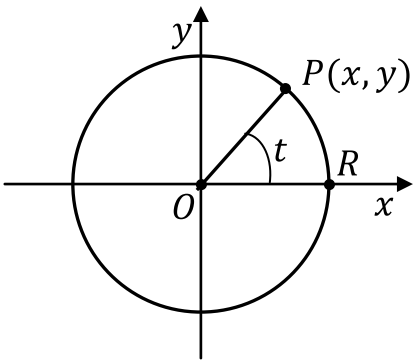
giperbolik tangens va kotangens funksiyalarining hosilalarini topdik.

Parametrik shaklda berilgan funksiyaning hosilasi. Tekislikda xOy to‘g‘ri burchakli koordinatalar sistemasini kiritamiz. $x(t)$ va $y(t)$ funksiyalar $\alpha \le t \le \beta$ kesmada uzluksiz bo‘lsin. Agar t parametrni vaqt sifatida qarasak, u holda ko‘rsatilgan funksiyalar koordinatalari xOy tekislikda

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \alpha \le t \le \beta, \tag{5.38}$$

bo‘lgan P nuqtaning harakat qonunini aniqlaydi.

5.7-Ta’rif. (x, y) koordinatalari (5.38) tenglamalar bilan aniqlanadigan tekislikning barcha $\{P\}$ nuqtalari to‘plami yassi egri chiziq deb ataladi. Bu holda egri chiziq parametrik shaklda berilgan deyiladi.



5.17-rasm

5.21-Misol. Markazi koordinatalar boshida bo‘lgan R radiusli aylanani (5.17-rasm)

$$\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t, \end{cases} 0 \le t \le 2\pi \tag{5.39}$$

parametrik tenglama bilan berish mumkin, bu yerda t orqali Ox o‘q bilan $P(x, y)$ nuqta orqali o‘tkazilgan OP radius vektor orasidagi burchakning radian o‘lchovi. ◄

Agar (5.38) sistemada t parametr yo‘qotilsa x va y qatnashgan bitta tenglama qoladi va natijada berilgan egri chiziq $F(x, y) = 0$ tenglama bilan aniqlanadi. Masalan, (5.38) tenglamalarning o‘ng va chap tomonlarini kvadratga ko‘tarib, so‘ngra hadma-had qo‘shsak t parametr yo‘qoladi va natijada aylananing bizga ma’lum $x^2 + y^2 = R^2$ tenglamasiga ega bo‘lamiz. Ammo t parametrni har dom ham yo‘qotib bo‘lavermaydi. Egri chiziq parametrik shaklda berilgan holda ham egri chiziqqa o‘tkazilgan urinmani topish uchun y o‘zgaruvchidan x o‘zgaruvchi bo‘yicha hosila olish kerak bo‘ladi.

x va y o‘zgaruvchilar t parametrning

$$x = x(t), y = y(t), t \in (\alpha, \beta)$$

funksiyalari sifatida berilgan bo‘lsa, y ozgaruvchining x o‘zgaruvchiga funksional bog‘liqligi parameter shaklda berilgan deyiladi.

Funksiya parametrik shaklda berilganda y funksiyadan x bo‘yicha hosilani hisoblash masalasini qaraymiz.

$x = x(t)$, $y = y(t)$ funksiyalar biror (α, β) oraliqda aniqlangan va uzluksiz bo‘lsin. $x = x(t)$ funksiyaning $t = g(x)$ teskari funksiyasi mavjud bo‘lsin. U holda

$$y = y[g(x)] \tag{5.40}$$

murakkab funksiyani hosil qilamiz. Faraz qilaylik, $x(t)$ va $y(t)$ funksiyalar $t \in (\alpha, \beta)$ nuqtada differensiallanuvchi va $x'(t) \neq 0$, $t = g(x)$ funksiya esa mos x nuqtada differensiallanuvchi bo‘lsin. U holda murakkab funksiyani differensiallash qoidasiga ko‘ra, $y = y[g(x)]$ murakkab funksiya ham x nuqtada differensiallanuvchi bo‘ladi va

$$y'_x = y'_t \cdot t'_x \tag{5.41}$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi. Teskari funksiyani differensiallash qoidasiga binoan $t'_x = 1/x'_t$ bo‘ladi va uni (5.41) tenglikka qo‘ysak

$$y'_x = y'_t \cdot \frac{1}{x'_t} = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Shunday qilib, parametrik ko‘rinishda berilgan funksiyaning hosilasi yana o‘z navbatida

$$\begin{cases} y'_x = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}, & \alpha \leq t \leq \beta \\ x = x(t), \end{cases} \tag{5.42}$$

parametrik shaklda berilgan funksiya bo‘lar ekan.

5.22-Missol. $\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t, \end{cases}$ $0 \leq t \leq 2\pi$ aylana uchun y'_x hosilani toping.

► $x'_t,\ y'_t$ hoslalarni topamiz: $x'_t = (R\cos t)' = -R\sin t,\ y'_t = (R\sin t)' = R\cos t$. Ularni yuqoridagi parametrik shakldа berilgan funksiyani differensiallash formulasiga qo‘ysak

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{R\cos t}{-R\sin t} = -\mathrm{ctg}\, t$$

hosilani topamiz. ◄

5.23-Missol. $\begin{cases} x = t^2 + t - 5, \\ y = 2t^2 - t + 2 \end{cases}$ parametrik shakldа berilgan egri chiziqqa $P(-3, 3)$ nuqtada o‘tkazilgan urinmaning Ox o‘q bilan tashkil qilgan burchagini toping.

► Dastlab t parametrning urinish nuqtasiga mos keluvchi t_0 qiymatini topamiz. Bu qiymat

$$\begin{cases} t^2 + t - 5 = -3, \\ 2t^2 - t + 2 = 3 \end{cases}$$

tenglamalarning har birini qanoatlantirishi lozim. Birinchi tenglamaning ildizlari $t_1 = 1, t_2 = -2$ ikkinchisiniki esa $t_1 = 1, t_2 = -1/2$. Demak, egri chiziqning berilgan P nuqtasiga $t_0 = 1$ qiymat mos kelar ekan. Endi egri chiziq P nuqtasida o‘tkazilgan urinmaning y'_x hosilaning $x = -3$ nuqtadagi qiymatiga teng bo‘lgan burchak koffisiyentini topamiz:

$$y'_x|_{x=2} = \frac{y'_t}{x'_t}\bigg|_{t=1} = \frac{2t+1}{4t-1}\bigg|_{t=1} = \frac{3}{3} = 1,$$

(5.7) formulaga ko‘ra $\mathrm{tg}\,\alpha = 1$ yoki $\alpha = 45^{\circ}$. ◄

Oshkormas ko‘rinishda berilgan funksiyaning hosilasi. x va y o‘zgaruvchilarning qiymatlari o‘zaro

$$F(x, y) = 0 \tag{5.43}$$

tenglama bilan bog‘langan bo‘lsin. Agar biror (a, b) oraliqda aniqlangan $y = f(x)$ funksiyani (5.43) tenglamaga qoyilganda uni x o‘zgaruvchiga nisbatan ayniyatga aylantirsa, (5.43) tenglama $y = f(x)$ funksiyani oshkormas analitik usulda aniqlaydi deb aytiladi. Bunday funksiyaning o‘zini esa oshkormas funksiya deb yuritiladi. Oshkormas ko‘rinishda berilgan differensiallanuvchi funksiyaning hosilasini hisoblash uchun (5.43) tenglikning ikkala tomonini ham murakkab funksiyani differensiallash

(5.29) qoidasiga ko‘ra x bo‘yicha differensiallab, so‘ngra hosil bo‘lgan $F'_x\big(x, f(x)\big) = 0$ tenglamani $y' = f'(x)$ hosilaga nisbatan yechish kerak.

5.24-Misol. $y^4 + xy - x^2 = 0$ tenglama bilan berilgan $y = f(x)$ oshkormas funksiyaning y' hosilasini toping.

► y o‘zgaruvchini x o‘zgaruvchining funksiyasi deb hisoblab tenglamaning ikkala tomonini murakkab funksiyani differensiallash qoidasiga ko‘ra differensiallaymiz:

$$4y^3y'_x + y + xy'_x - 2x = 0,$$

bu yerdan

$$y'_x = \frac{2x - y}{4y^3 + x}. \quad ◄$$

5.25-Misol. $x^2 + 3xy - y^2 + 2x - 3y + 1 = 0$ ikkinchi tartibli chizining $M(1, 2)$ nuqtasida o‘tkazilgan urinmaning burchak koeffisiyentini toping.

► Tenglamani x bo‘yicha differensiallaymiz: $2x + 3y + 3xy'_x - 2yy'_x + 2 - 3y'_x = 0$. Bu yerda $x = 1$ va $y = 2$ deb hisoblab, hosilaning berilgan nuqtadagi qiymatini topamiz $y'_x|_{(1,2)} = 2$. U holda (5.7) formulaga ko‘ra $k = 2$. ◄

Funksiyani differensiallashning asosiy formula va qoidalari.

Elementar funksiyalarning hosilalri (murakkab funksiya holida).

1. $(C)' = 0, \ (C = \text{const})$.
2. $(u^a)' = au^{a-1} \cdot u'$,

   $a = \frac{1}{2}$ bo‘lsa $\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$.

   $a = -1$ bo‘lsa $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2} \cdot u'$.
3. $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u', (a > 0, a \neq 1)$,

   $(e^u)' = e^u \cdot u'$.
4. $(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln u} \cdot u', (a > 0, a \neq 1)$.

   $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$.
5. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$.
6. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$.
7. $(\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$.
8. $(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$.
9. $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$.
10. $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$.
11. $(\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$.
12. $(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$.
13. $(\operatorname{sh} u)' = \operatorname{ch} u \cdot u'$.
14. $(\operatorname{ch} u)' = \operatorname{sh} u \cdot u'$.
15. $(\operatorname{th} u)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 u} \cdot u'$.
16. $(\operatorname{cth} u)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 u} \cdot u'$.

Differensiallashning asosiy qoidalari

$u(x)$ va $v(x)$ funksiyalar x nuqtada differensiallanuvchi, $f(u)$ funksiya esa u nuqtada differensiallanuvchi bo‘lsin.

$y = Cu, (C = \text{const})$	$y' = Cu'.$
$y = u \pm v$	$y' = u' \pm v'.$
$y = uv$	$y' = u'v + uv'.$
$y = \frac{u}{v}, (v \neq 0)$	$y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$
$y = f(u), u = u(x)$	$y'_u = f'_u \cdot u'$
$y = f(x),\ x = f^{-1}(y)$	$x'_y = \frac{1}{y'_x}, (y'_x \neq 0)$
$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases}$	$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}, x'_t \neq 0$

5.4. Differensial

Differensialning ta’rifi. $y = f(x)$ funksiya x nuqtaning biror atrofida aniqlangan va bu nuqtada differensiallanuvchi bo‘lsin. U holda argumentning Δx orttirmasiga mos keluvchi funksiyaning Δy orttirmasini

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x \tag{5.44}$$

ko'rinishda tasvirlash mumkin, bu yerda $\alpha(\Delta x)$ funksiya $\Delta x = 0$ nuqtada cheksiz kichik.

5.8-Ta’rif. Agar $y = f(x)$ funksiya x nuqtada differensiallanuvchi bo‘lsa, funksiya orttirmasining $A \cdot \Delta x$ qismi $A \neq 0$ bo‘lganda, $y = f(x)$ funksiyaning differensiali deb ataladi va u dy yoki df orqali belgilanadi:

$$dy = A \cdot \Delta x. \tag{5.45}$$

$A \neq 0$ bo‘lganda funksiya differensialini funksiya Δy orttirmasining bosh chiziqli qismi deb ataladi, chunki (5.44) tenglikda $\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$ funksiya $\Delta x = 0$ nuqtada $A \cdot \Delta x$ ko‘paytmaga nisbatan yuqori tartibli cheksiz kichik.

$A = 0$ bo‘lsa, dy differensial nolga teng deb hisoblanadi.

5.2-Teoremaga ko‘ra $A = f'(x)$ bo‘ladi, shu sababli (5.45) formula

$$dy = f'(x)\Delta x \tag{5.46}$$

ko‘rinishni oladi. Funksiya differensiali tushunchasi bilan bir qatorda erkin x o‘zgaruvchining dx differensiali tushunchasini

$$dx = \Delta x \tag{5.47}$$

tenglik bilan kiritamiz. U holda $y = f(x)$ funksiya differensialini

$$dy = f'(x)dx \tag{5.48}$$

shaklda yozish mumkin. Bu yozuvdan o‘z navbatida $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ tenglikni hosil qilamiz. Hosilaning bunday belgilanishini 5.1.da kiritgan edik, uni dy funksiya differensialining dx argument differensialiga nisbati sifatida qarash mumkin.

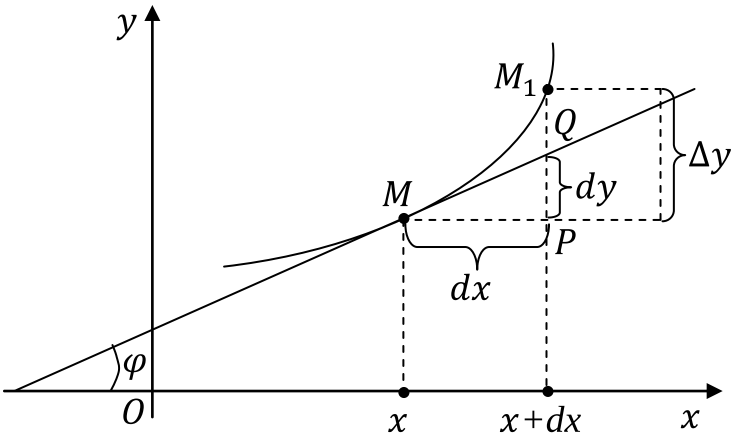
Differensialning geometrik ma’nosi. $y = f(x)$ tenglama bilan egri chiziq berilgan bo‘lsin, bu yerda $f(x)$ funksiya $x \in (a, b)$ nuqtada differensiallanuvchi funksiya (5.18-rasm). $M(x, y)$ nuqtada bu egri chiziqqa urinma o‘tkazamiz. Egri chiziqda abssissasi $x + dx$ bo‘lgan M_1 nuqtani belgilaymiz. Ma’lumki, $f'(x)$ urinmaning burchak koeffisiyenti, ya’ni $f'(x) = \operatorname{tg}\varphi$.

MPQ uchburchakni qaraymiz. Rasmdan ko‘rinib turibdiki

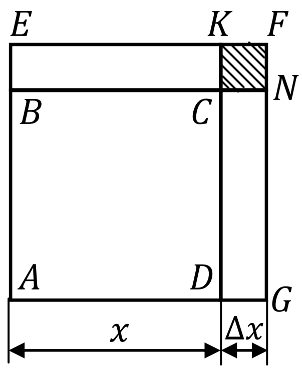
$$PQ = MP \cdot \operatorname{tg}\varphi = f'(x)dx = dy.$$

Shunday qilib, $y = f(x)$ funksiyaning $dy = f'(x)dx$ differensiali $y = f(x)$ egri chiziqqa abssissasi x bo‘lgan nuqtaga o‘tkazilgan urinmaning urinish nuqtasidan $x + dx$ nuqtaga o‘tganda olgan orttirmasiga teng ekan.

5.18-rasmdan va (5.44)-(5.46) tengliklardan $M_1Q = \Delta y - dy = \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$.



5.18-rasm



5.19-rasm

Δy va dy orasidagi farqni tomoni x bo‘lgan $ABCD$ kvadrat yuzini aniqlaydigan $y = x^2$ funksiya misolida ko‘ramiz (5.19-rasm). x qiymatga Δx orttirma berib tomoni

$x + \Delta x$ bo‘lgan $AEFG$ kvadratni hosil qilamiz va uning yuzi $(x + \Delta x)^2$ qiymatga teng. U holda funksiyaning $\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$ orttirmasini geometrik talqin qilinsa, 5.19-rasmga ko‘ra $BEFN$ va $DCNG$ to‘g‘ri to‘rtburchaklar yuzlari yig‘indisiga teng. $y = x^2$ funksiyaning x nuqtadagi $dy = 2x\Delta x$ differensiali $BCKE$ va $DCNG$ to‘g‘ri to‘rtburchaklar yuzlari yig‘indisiga teng, $\Delta y - dy = (\Delta x)^2$ ayirma esa $CKFN$ kvadrat yuziga mos keladi.

5.18 va 5.19-rasmlardan ko‘rinib turibdiki, Δx orttirma qanchalik kichik bo‘lsa, Δy va dy orasidagi farq shunchalik kichik bo‘ladi.

Differensialni hisoblash qoidalari. $y = f(x)$ funksiyaning dy differensiali y' hosiladan faqat dx ko‘paytuvchi bilangina farq qilganligi sababli, differensialni hisoblash uchun differensiallash qoidalaridan va elementar funksiyalar hosilalaring formulalaridan foydalanish mumkin.

1. $y = Cu, \quad (C = \text{const})$ $\qquad dy = Cdu$
2. $y = u \pm v$ $\qquad dy = du \pm dv$
3. $y = uv$ $\qquad dy = udv + vdu$
4. $y = \dfrac{u}{v}, \quad (v \neq 0)$ $\qquad dy = \dfrac{vdu - udv}{v^2}$

► Haqiqatdan ham, masalan differensiallanuvchi $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalarning ko‘paytmasi uchun: $d(uv) = (uv)'dx = (u'v + uv')dx = vu'dx + uv'dx = udv + vdu$. ◄

Murakkab funksiyaning differensiali. Murakkab funksiyani differensiallash qoidasi differensialning muhim bir xossasini olish imkonini beradi. $y = y(x)$ erkin x o‘zgaruvchining differensiallanuvchi funksiyasi bo‘lsin. U holda (5.48) formulaga ko‘ra x nuqtada $dy = y'(x)dx$.

Endi $y = f(u)$ o‘zining u argumenti bo‘yicha differensiallanuvchi, u argument esa o‘z navbatida x argumentning differensiallanuvchi funksiyasi, ya’ni $u = u(x)$ bo‘lsin. U holda $y(x) = f(u(x))$ murakkab funksiya x argument bo‘yicha differensiallanuvchi bo‘ladi. x erkin argumentning funksiyalari sifatida differensiallanuvchi $y(x)$ va $u(x)$ funksiyalar uchun

$$dy = y'(x)dx \text{ va } du = u'(x)dx \qquad (5.49)$$

tengliklarni yozish mumkin. Ammo murakkab funksiyani differensiallashning (5.29) qoidasiga ko‘ra $y'(x) = f'(u)u'(x)$. Bu ifodani (5.49) formulalarning birinchisiga qo‘yib, hamda ikkinchisini inobatga olsak $y(x) = f(u(x))$ bo‘lganda

$$dy = f'(u)u'(x)dx = f'(u)du \qquad (5.50)$$

tenglikni hosil qilamiz, ya’ni natijada differensial yozuvining dastlabki (5.46) shakliga keldik, ammo bu yerda u erkin o‘zgaruvchi emas. Boshqacha qilib aytganda, differensialni yozish shakli funksiya argument erkinmi yoki boshqa argumentning differensiallanuvchi funksiyasimi bunga bog‘liq emas ekan. Differensial yozuvi shaklining *invariantlik* (o‘zgarmaslik) xossasi xuddi ana shundan iborat.

Bu xossadan kelib chiqadiki, x argument erkinmi yoki boshqa argumentning funksiaysimi, qat’iy nazar har doim y'_x hosilani dy va dx differensiallarning nisbati sifatida ifodalash mumkin. Muhimi ikkala differensial ham erkin deb qabul qilingan o‘zgaruvchi bo‘yicha hisoblanishi kerak.

Differensialning taqribiy hisoblashlarga tadbiqi. $y = f(x)$ funksiya a nuqtada differensiallanuvchi bo‘lsin, u holda argumentning Δx orttirmasiga mos keluvchi funksiyaning Δy orttirmasini

$$\Delta y = f'(a)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$$

ko'rinishda tasvirlash mumkin, bu yerda $f'(a)\Delta x = dy(a)$ va $\alpha(\Delta x)$ dunksiya $\Delta x = 0$ nuqtada cheksiz kichik.

Agar $dy(a) \neq 0$ va demak $f'(a) \neq 0$ bo‘lsa, u holda

$$\frac{\Delta y}{dy} = 1 + \frac{\alpha(\Delta x)}{f'(a)}.$$

O‘ng tomondagi ikkinchi qo‘shiluvchi $\Delta x = 0$ nuqtada cheksiz kichik, shu sababli $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y/dy = 1$, ya’ni Δy va dy cheksiz kichiklar ekvivalent: $\Delta y \underset{\Delta x \to 0}{\sim} dy$, ularning $\Delta y - dy$ ayirmasi esa o‘zlariga nisbatan yuqoririoq tartibli cheksiz kichik. Shuning uchun Δy orttirmaning taqribiy qiymati sifatida dy miqdorni olishimiz mumkin: $\Delta y \approx dy$.

Shunday qilib, agar $dy(a) \neq 0$ bo‘lsa, u holda funksiyaning $a + \Delta x$ nuqtadagi qiymatini hisoblash uchun

$$f(a+\Delta x) \approx f(a)+f'(a)\Delta x \tag{5.51}$$

formuladan foydalanish mumkin. Bunda $|\Delta x|$ etarlicha kichik bo‘lsa absolyut va nisbiy xatolik ham xoxlagancha kichik bo‘ladi.

Masalan, $y = x^s, s \in \mathbf{R}$ bo‘lsin. U holda

$$\Delta y = (a+\Delta x)^s - a^s,\ dy(a) = sa^{s-1}\Delta x.$$

$|\Delta x|$ kichik qiymatlarni qabul qilganda

$$(a+\Delta x)^s \approx a^s + dy(a)$$

yoki

$$(a+\Delta x)^s \approx a^s + sa^{s-1}\Delta x$$

deb olamiz. Xususiy holda, $s = 1/2$ bo‘lsa

$$\sqrt{a+\Delta x} \approx \sqrt{a} + \frac{1}{2\sqrt{a}}\Delta x, a > 0. \tag{5.52}$$

5.26-Misol. Taqribiy hisoblang $\sqrt{3{,}996}$.

► $a = 4, \Delta x = -0{,}004$ deb olsak, (5.52) formulaga ko‘ra

$$\sqrt{3{,}996} = \sqrt{4+(-0{,}004)} \approx \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}}(-0{,}004) = 1{,}999. \quad ◄$$

Funksiyaning Δy orttirmasini uning dy differensiali bilan almashtirishning qulaylik tomoni shundan iboratki, dy differensial Δx orttirmaga chiziqli bog‘liq, Δy esa murakkabiroq bog‘liqlikdan iborat. Agar $x = a + \Delta x$ va $\Delta x = x - a$ deb olsak, (5.51) formula

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a) \tag{5.53}$$

ko'rinishni oladi. Shunday qilib, x argumentning qiymati a qiymatga yaqin bo‘lganda (5.53) tenglikka ko‘ra $f(x)$ funksiya chiziqli funksiya bilan almashtirilar ekan. Geometrik jihatdan buni $y = f(x)$ egri chiziq $(a, f(a))$ nuqta atrofida egri chiziqqa o‘tkazilgan urinmaning kesmasi bilan almashtiriladi deb talqin qilish mumkin.

Xususiy holda, $a = 0$ bo‘lsa, (5.53) formulani

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bu yerda $f(x)$ o‘rniga turli elementar funksiyalarni qo‘yib, x o‘zgaruvchining nolga yaqin qiymatlari uchun bir qator taqribiy formulalarni olish mumkin:

$$\sin x \approx x, \operatorname{tg} x \approx x, e^x \approx 1 + x, \ln(1 + x) \approx x,$$

$$(1 + x)^s \approx 1 + sx \text{ (xususiy holda, } \sqrt{1 + x} \approx 1 + x/2) \quad (5.54)$$

Bu taqribiy tengliklar $x = 0$ nuqtada cheksiz kichik bo‘lgan funksiyalarning ekvivalentlik munosabatlariga mos keladi.

5.27-Misol. Ushbu $e^{0.1}$, $\ln 1{,}25$ qiymatlarni taqribiy hisoblaymiz.

► (5.54) formulaga ko‘ra $x = 0{,}1$ qiymatda e^x funksiya uchun $e^{0.1} \approx 1{,}1$ va $x = 0{,}25$ qiymatda $\ln(1 + x)$ funksiya uchun $\ln 1{,}25 \approx 0{,}25$ qiymatlarni olamiz.◄

5.5. Yuqori tartibli hosila va differensiallar

Yuqori tartibli hosilalar. Agar $f(x)$ funksiya (a, b) oraliqning barcha nuqtalarida $f'(x)$ hosilaga ega bo‘lsa, u holda $f'(x)$ ham x o‘zgaruvchining (a, b) oraliqda aniqlangan funksiyasi bo‘ladi. Bunday aniqlangan $f'(x)$ funksiya ham $x \in (a, b)$ nuqtada hosilaga ega bo‘lishi mumkin. Bu hosilani biz $f(x)$ funksiyadan olingan ikkinchi tartibli hosila deb ataymiz va uni $f''(x)$ yoki $f^{(2)}(x)$ orqali belgilaymiz. Shunday qilib

$$f''(x) = \left(f'(x)\right)'.$$

Yuqoriroq tartibli hosilalar xuddi shu singari aniqlanadi, chunonchi, $f(x)$ funksiyaning $n-$ tartibli hosilasi uning $(n - 1)-$tartibli hosilasidan hosila olib aniqlanadi:

$$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'. \quad (5.55)$$

Hosilaning tartibini daraja bilan farqlash uchun u qavsga olingan.

$f^{(n)}(x)$ hosilani topish uchun dastlab $f'(x)$ hosila olinadi, so‘ngra $f'(x)$ hosiladan yana hosila olinib $f''(x)$ topiladi, va hokazo kerakli tartibli hosilani olmaguncha davom ettiriladi. Shunday qilib, yuqori tartibli hosilalar differensiallashning ma’lum formula va qoidalari asosida hisoblanar ekan.

5.28-Misol. $y = e^{kx}$, ($k = \text{const}$) funksiyaning $n-$tartibli hosilasini topamiz.

► Ketma-ket differensiallab

$$y' = ke^{kx}, y'' = k^2 e^{kx}, \ldots.$$

Matemati induksiya metodiga ko‘ra, ixtiyoriy $n \in \mathbf{N}$ uchun

$$(e^{kx})^{(n)} = k^n e^{kx}, n = 1,2, \dots .◄$$

5.29-Misol. $y = \sin x$ va $y = \cos x$ funksiyalarning n −tartibli hosilasini topamiz.

► Ketma-ket differensiallab

$$y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),\ \ y'' = -\sin x = \sin(x + \pi) = \sin\left(x + 2\,\frac{\pi}{2}\right), \dots$$

hosilalarni topamiz. Matematik induksiya metodi bilan ixtiyoriy $n \in \mathbf{N}$ uchun

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\,\frac{\pi}{2}\right)$$

tenglikka ega bo‘lamiz.

Xuddi shu singari ixtiyoriy $n \in \mathbf{N}$ uchun

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\,\frac{\pi}{2}\right)$$

tenglikni hosil qilish mumkin. ◄

(a, b) oraliqda aniqlangan va oraliqning barcha $x \in (a, b)$ nuqtalarida n −tartibli hosilaga ega bo‘lgan funksiyalar to‘plamini $C^n(a, b)$ orqali belgilanadi. Barcha $x \in (a, b)$ nuqtalarda ixtiyoriy tartibli hosilaga ega bo‘lgan funksiyani cheksiz marta differensiallanuvchi funksiya deb ataymiz va $f(x) \in C^\infty(a, b)$ ko‘rinishda yozamiz. $e^x, \sin x, \cos x$ funksiyalar $(-\infty, +\infty)$ oraliqda cheksiz marta differensiallanuvchi.

To‘rtinchi va undan yuqori tartibli hosilalarni ba’zan qavslarsiz rim raqamlarida belgilanadi, ya’ni $y^{IV}, y^V, y^{VI}, \dots$ ko‘rinishda yoziladi.

Ikkinchi tartibli hosilaning fizik ma’nosi. Moddiy nuqta $s = S(t)$ qonun bo‘yicha to‘g‘ri chiziqli harakatlansin. U holda ma’lumki, vaqtning t momentidagi oniy tezligi $v(t) = S'(t)$ tenglikni qanoatlantiradi.

Vaqtning t momentida material nuqtaning tezligi v bo‘lsin. Agar nuqta tekis harakatlanmayotgan bo‘lsa, u holda t momentdan keyin o‘tadigan Δt vaqt mobaynida tezlik o‘zgaradi va Δv orttirma oladi.

Δt vaqt mobaynidagi *o‘rtacha tezlanish* deb Δv tezlik orttirmasining Δt vaqt orttirmasiga nisbatiga aytiladi:

$$a_{\text{o'rt}} = \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Δt orttirma qanchalik kichik bo‘lsa, o‘rtacha tezlanish shunchalik vaqtning t momentidai tezlanishiga yaqin bo‘ladi.

t momentdagi tezlanish deb vaqt orttirmasi nolga intilganda tezlik orttirmasining vaqt orttirmasiga nisbatining limitiga aytiladi:

$$a = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t},$$

boshqacha qilib aytganda vaqtning t momentidagi tezlanishi v tezlikdan t vaqt bo‘yicha olingan hosilaga teng ekan:

$$a = v'(t),$$

ammo biz yuqorida $v = S'(t)$ ekanligini ta’kidlab o‘tgan edik, demak u holda

$$a = \left(S'(t)\right)' = S''(t),$$

ya'ni to‘g‘ri chiziqli harakatning tezlanishi bosib o‘tilgan yo‘ldan vaqt bo‘yicha olingan ikkinchi tartibli hosilaga teng ekan.

5.30-Misol. Erkin tushayotgan jismning bosib o‘tgan yo‘li vaqtga

$$s(t) = gt^2/2 + v_0 t + s_0 \tag{5.56}$$

qonuniyat bilan bog‘langan, bu yerda g= 9,8$\frac{m}{sek^2}$ – erkin tushish tezlanishi, s_0 bosib o‘tilayotgan s yolning $t = 0$ vaqtdagi qiymati $s_0 = s|_{t=0}$.

► (5.56) tenglikni differensiallab

$$v = s'(t) = gt + v_0 \tag{5.57}$$

tezlikni topamiz. Bu tenglikdan $v_0 = v|_{t=0}$ kelib chiqadi. Yana bir marta differensiallab

$$a = v'(t) = s''(t) = g$$

tezlanishni topdik. Aksincha ham o‘rinli ekanligini, ya’ni pastga qarab tushayotgan harakat tezlanishi o‘zgarmas g bo‘lsa, u holda $s_0 = s|_{t=0}$, $v_0 = v|_{t=0}$ shartda uning tezligi (5.56), bosib o‘tilgan yo‘l esa (5.56) tenglik orqali ifodalanilishini ta’kidlab o‘tamiz.◄

Yig‘indi va ko‘paytmaning yuqori tartibli hosilalari.

5.8-Teorema. Agar $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalar x nuqtada $n-$ tartibli hosilaga ega bo‘lsa, u holda $u(x) \pm v(x)$ va $u(x) \cdot v(x)$ funksiyalar ham bu nuqtada $n-$tartibli hosilaga ega va

$$(u(x) \pm v(x))^{(n)} = u^{(n)}(x) + v^{(n)}(x) \tag{5.58}$$

$$\big(u(x) \cdot v(x)\big)^{(n)} = u^{(n)} \cdot v + C_n^1 u^{(n-1)} \cdot v' + C_n^2 u^{(n-2)} \cdot v'' + \cdots +$$

$$+C_n^m u^{(n-m)} \cdot v^{(m)} + \cdots + u \cdot v^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, u^{(n-k)} \cdot v^{(k)} \tag{5.59}$$

tengliklar o‘rinli bo‘ladi, bu yerda $C_n^k = n!/(k!\,(n-k)!)$ orqali n elementni k tadan qilib guruhlashlar soni belgilangan.

► Ikkala formula ham matematik induksiya metodi bo‘yicha isbotlanadi. (5.58) formulaning isbotini o‘quvchiga havola qilamiz. Agar $y = u(x) \cdot v(x)$ bo‘lsa, u holda

$$y' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$y'' = u'' \cdot v + 2u' \cdot v' + u \cdot v''$$

ya'ni (5.59) formula $n = 1$ va $n = 2$ uchun o‘rinli ekan, (5.59) formula ixtiyoriy n uchun o‘rinli deb faraz qilib, uning $n + 1$ uchun o‘rinli ekanligini ko‘rsatamiz. $u^{(n+1)}$ va $v^{(n+1)}$ hosilalar mavjud deb (5.59) tenglikni differensiallaymiz:

$$\big(u(x) \cdot v(x)\big)^{(n+1)} = \big((uv)^{(n)}\big)' = u^{(n)} \cdot v + (C_n^0 + C_n^1) u^{(n)} \cdot v' +$$

$$+(C_n^1 + C_n^2) u^{(n-1)} \cdot v'' + \cdots + (C_n^{n-1} + C_n^n) u' \cdot v^{(n)} + u \cdot v^{(n+1)}. \tag{5.60}$$

$k \leq n$ uchun

$$C_n^{k-1} + C_n^k = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!\,(n-k)!} =$$

$$= \frac{n!\,(k+n-k+1)}{k!\,(n-k+1)!} = \frac{(n+1)!}{k!\,(n+1-k)!} = C_{n+1}^k.$$

U holda (5.60) tenglik

$$\big(u(x) \cdot v(x)\big)^{(n+1)} = u^{(n+1)} \cdot v + C_n^1 u^{(n)} \cdot v' + C_n^2 u^{(n-1)} \cdot v'' + \cdots +$$

$$+C_{n+1}^n u' \cdot v^{(n)} + u \cdot v^{(n+1)}$$

ko‘rinishni oladi, bu esa (5.59) tenglik $n + 1$ uchun ham o‘rinli ekanligini anglatadi. Shunday qilib Leybnis formulasi deb ataluvchi (5.59) formulani isbotladik. ◄

5.31-Misol. Leybnis formulasidan foydalanib $y = x^2 e^x$ funksiyaning $y^{(1001)}$ hosilasini toping.

► $y^{(1001)} = \Big(\underbrace{e^x}_{u} \cdot \underbrace{x^2}_{v}\Big)^{(1001)} = (e^x)^{(1001)} \cdot x^2 + C_{1001}^1 (e^x)^{(1000)} \cdot (x^2)' +$

$+C_{1001}^1 (e^x)^{(999)} \cdot (x^2)'' + 0 = e^x x^2 + 2002 e^x x + 1001 \cdot 10^3 e^x.$ ◄

Parametrik va oshkormas ko‘rinishda berilgan funksiyalarning yuqori tartibli hosilalari. $y = f(x)$ funksiya

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad \alpha \le t \le \beta$$

parametrik tenglamalar bilan berilgan bo‘lsin va $x(t)$, $y(t)$ funksiyalar barcha $t \in (\alpha, \beta)$ nuqtalarda yetarli tartibda differensiallanuvchi va $x'(t) \neq 0$ bo‘lsin. U holda (5.42) formulaga ko‘ra, ixtiyoriy $t \in (\alpha, \beta)$ nuqtada y'_x hosila

$$\begin{cases} y'_x = y'(t)/x'(t), \\ x = x(t), \end{cases} \quad \alpha \le t \le \beta$$

tenglik bilan topiladi. Bu yangi parametrik shaklda berilgan funksiyani oldingi qoidani qo‘llab yana x bo‘yicha differensiallash mumkin:

$$\begin{cases} y''_{xx} = \dfrac{(y'_x)'_t}{x'_t}, \\ x = x(t), \end{cases} \alpha \le t \le \beta; \quad \begin{cases} y'''_{xxx} = \dfrac{(y''_{xx})'_t}{x'_t}, \\ x = x(t), \end{cases} \alpha \le t \le \beta; \ldots$$

Xususiy holda, ikkinchi tartibli hosilani keltirib chiqaramiz: bo‘linmaning, teskari funksiyaning hosilalari formulalarini qo‘llab

$$y''_{xx} = (y'_x)'_x = \left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_x = \left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_t t'_x = \left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_t \frac{1}{x'_t} =$$

$$= \frac{y''_{tt} x'_t - y'_t x''_{tt}}{(x'_t)^2} \frac{1}{x'_t} = \frac{y''_{tt} x'_t - y'_t x''_{tt}}{(x'_t)^3}.$$

Shunday qilib parametrik shaklda berilgan funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi

$$\begin{cases} y''_{xx} = \dfrac{y''_{tt} x'_t - y'_t x''_{tt}}{(x'_t)^3}, \\ x = x(t), \end{cases} \alpha \le t \le \beta \qquad (5.61)$$

ko‘rinishda bo‘lar ekan.

5.32-Misol. $y = f(x)$ funksiya

$$\begin{cases} x(t) = e^t \cos t, \\ y(t) = e^t \sin t, \end{cases} \quad t \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$$

munosabatlar bilan parametrik shaklda berilgan bo‘lsa, uning ikkinchi tartibli hosilasini toping.

► $x(t)$ va $y(t)$ funksiyalarning t parametr bo‘yicha birinchi va ikkinchi tartibli hosilalarini topamiz: $x_t' = e^t \cos t - e^t \sin t$, $y_t' = e^t \sin t + e^t \cos t$, $x_{tt}'' = e^t \cos t - e^t \sin t - e^t \sin t - e^t \cos t = -2e^t \sin t$, $y_{tt}'' = e^t \sin t + e^t \cos t + e^t \cos t - e^t \sin t = 2e^t \cos t$ bu topilgan hosilalarni (5.60) formulaga qo‘yib, y_{xx}'' ikkinchi tartibli hosilani topamiz.

$$y_{xx}'' = \frac{2e^t \cos t\,(e^t \cos t - e^t \sin t) - (e^t \sin t + e^t \cos t)(-2e^t \sin t)}{(e^t \cos t - e^t \sin t)^3} =$$

$$= \frac{2e^{2t}(\cos^2 t - \cos t \sin t + \sin^2 t + \cos t \sin t)}{e^{3t}(\cos t - \sin t)^3} = \frac{2e^{-t}}{(\cos t - \sin t)^3}.$$

natijada

$$\begin{cases} y_{xx}'' = \dfrac{2e^{-t}}{(\cos t - \sin t)^3}, & t \in \left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right] \\ x = e^t \cos t, \end{cases}$$

izlanayotgan hosilani topdik. ◄

5.33-Misol. $x^3 \sin y - y = 0$ tenglama bilan berilgan $y = f(x)$ oshkormas funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasini topamiz.

► Tenglamaning ikkala tomonini differensiallaymiz:

$$3x^2 \sin y + x^3 \cos y \cdot y' = 0$$

bu yerdan

$$y' = -\frac{3x^2 \sin y}{x^3 \cos y} = \frac{3\,\mathrm{tg}\, y}{x}.$$

Birinchi tartibli hosila uchun ifodani inobatga olgan holda, songi tenglikni differensiallaymiz:

$$y'' = 3\frac{(\mathrm{tg}\, y)'x - (x)'\mathrm{tg}\, y}{x^2} = 3\frac{\frac{1}{\cos^2 y} \cdot y' - \mathrm{tg}\, y}{x^2} =$$

$$= 3\frac{\frac{1}{\cos^2 y}\frac{3\,\mathrm{tg}\, y}{x} - \mathrm{tg}\, y}{x^2} = 3\frac{3\frac{\sin y}{\cos^3 y} - \mathrm{tg}\, y}{x^2} = 3\frac{\sin y(3 - \cos^2 y)}{x^2 \cos^3 y}. \quad ◄$$

Yuqori tartibli differensiallar. Yuqori tartibli differensiallarni ham hosilalar singari quyi tartiblardan yuqori tartiblarni aniqlaymiz. $y = f(x)$ funksiyaning x nuqtadagi dy birinchi tartibli differensialini oddiyroq qilib berilgan nuqtadagi birinchi differensial deb ataymiz. Shunday qilib birinchi differensial

$$dy = f'(x)dx$$

mavjud bo‘lsin. O‘ng tomondagi faqat birinchi ko‘paytuvchigina x o‘zgaruvchiga bog‘liq, ikkinchi ko‘paytuvchi dx erkin x o‘zgaruvchining orttirmasi va u o‘zgaruvchiga bogliq emas. Demak dy birinchi differensial x o‘zgaruvchining funksiyasidan iborat ekan, shuning uchun bu funksiyaning differensiali to‘g‘risida gapirish mumkin.

Agar $y = f(x)$ funksiyaning x nuqtadagi dy differensialining differensiali mavjud bo‘lsa biz uni ikkinchi differensial (ikkinchi tartibli differensial) deb ataymiz va uni d^2y orqali belgilaymiz:

$$d(dy) = d^2y.$$

Ikkinchi differensial uchun ifoda topamiz. Differensialning aniqlanishiga ko‘ra

$$d^2y = [f'(x)dx]'dx.$$

Qavs ichidagi dx ko‘paytuvchi x o‘zgaruvchiga bog‘liq emas, shuning uchun uni hosila belgisidan tashqariga chiqarish mumkin va natijada

$$d^2y = f''(x)(dx)^2$$

tenglikka ega bo‘lamiz. Differensialning darajasini yozishda qavslarni yozmaslik qabul qilingan, masalan, $(dx)^2$ o‘rniga dx^2 deb yozish qabul qilingan; xuddi shu singari $(dx)^3$ o‘rniga dx^3 yoziladi va hokazo.

Ikkinchi differensialdan olingan differensial uchinchi differensial deb ataladi:

$$d^3y = d(d^2y) = [f''(x)dx^2]'dx = f'''(x)dx^3.$$

Bu jarayonni davom ettirib, ixtiyoriy n −tartibli differensialni aniqlaymiz:

$$d^ny = d(d^{n-1}y) = \left[f^{(n-1)}(x)dx^{n-1}\right]'dx = f^{(n)}(x)dx^n.$$

Differensialning har xil tartiblaridan foydalanib ixtiyoriy tartibli hosilani differensiallar nisbati shaklida yozish mumkin:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}, \qquad f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n}$$

Shunday qilib, $y = f(x)$ funksiyaning x nuqtada $n-$tartibli differensialning mavjud bo’lishi uchun, u bu nuqtada n marta differensiallanuvchi bo‘lishligi zarur ekan.

Agar $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalarning x nuqtada $n-$tartibli differensiallari mavjud va $C = \text{const}$ bo‘lsa,

$$d^n(Cu) = Cd^nu \text{ va } d^n(u \pm v) = d^nu \pm d^nv \qquad (5.62)$$

tengliklar o‘rinli bo‘ladi. Ko‘paytmaning $n-$tartibli hosilasi uchun hosil qilingan Leybnis formulasi $n-$tartibli differensial uchun

$$d^n(uv) = d^nu \cdot v + C_n^1 d^{n-1}u \cdot dv + C_n^2 d^{n-2}u \cdot d^2v + \cdots +$$
$$+ C_n^{n-1} du \cdot d^{n-1}v + u \cdot d^nv \qquad (5.63)$$

tenglikni hosil qilamiz, bu yerda C_n^k $-$orqali n elementdan k tadan qilib guruhlashlar soni belgilangan.

5.34-Misol. $y = \sqrt{x+2}$ funksiyaning x nuqtadagi d^2y ikkinchi tartibli differensialini toping.

► Funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasini topamiz:

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x+2}}, \qquad y'' = -\frac{1}{4\sqrt{(x+2)^3}}.$$

U holda

$$d^2y = y''dx^2 = -\frac{1}{4\sqrt{(x+2)^3}}dx^2. \quad ◄$$

5.6. Differensial hisobning asosiy teoremalari

Hosilaning nollari haqida teoremalar.

5.10-Teorema (Ferma). $y = f(x)$ funksiya biror E oraliqda aniqlangan va bu oraliqning ichki c nuqtasida eng katta yoki eng kichik qiymatini qabul qilsin. Agar bu nuqtada chekli $f'(c)$ hosila mavjud bo‘lsa, u holda $f'(c) = 0$ bo‘ladi.

► Aniqlik uchun $f(x)$ funksiya c nuqtada eng katta qiymatni qabul qiladi deb faraz qilamiz. U holda barcha $x \in E$ nuqtalar uchun $f(x) \leq f(c)$ tengsizlik o‘rinli bo‘ladi.

$x = c + \Delta x$ deb olsak, $f(c + \Delta x) \leq f(c)$. Hosilaning ta'rifiga va teorema shartiga ko‘ra

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} = f'(c)$$

chekli limit mavjud. Agar $\Delta x > 0$ bo‘lsa, u holda $(f(c + \Delta x) - f(c))/\Delta x \leq 0$ va tengsizlikda limitga o‘tish haqidagi 4.6-Teoremaga ko‘ra

$$\lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} = f'(c + 0) \leq 0$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. Agar $\Delta x < 0$ bo‘lsa, u holda $(f(c + \Delta x) - f(c))/\Delta x \geq 0$ va bu yerda ham 4.6-Teoremaga ko‘ra

$$\lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} = f'(c - 0) \leq 0.$$

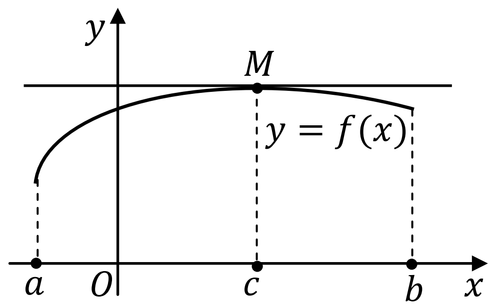
Nuqtadagi bir tomonlama va ikki tomonlama limitlar haqidagi 4.2-Teoremaga ko‘ra so‘ngi uchta munosabatdan

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} = 0$$

yoki $f'(c) = 0$ tenglikka ega bo‘lamiz.

Funksiyaning eng kichik qiymati bo‘lgan hol ham xuddi shu singari isbotlanadi. ◄

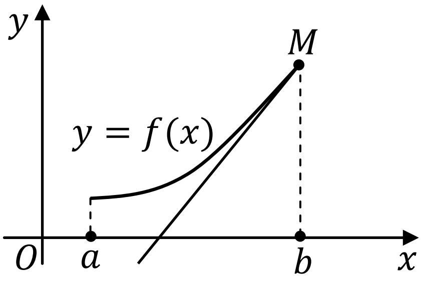


5.20-rasm

$f'(c)$ hosilaning nolga aylanishi $f(x)$ funksiya grafigiga $M(c, f(c))$ nuqtada o‘tkazilgan urinma Ox o‘qqa parallel bo‘lishini anglatadi (5.20-rasm). Teoremaning shartida c nuqtaning ichki nuqta ekanligi muhim shart. Teorema isbotida bu shartga ko‘ra c nuqtadan ham chapdagi, ham o‘ngdagi x nuqtalarni qarash imkonini berdi. Bu shartsiz teorema noto‘g‘ri ham bo‘lishi mumkin. Haqiqatdan ham, agar funksiya eng katta qiymatga oraliqning chetki nuqtalaridan birida erishsa, u holda hosila (agar u mavjud bo‘lsa) nolga aylanmasligi ham mumkin (5.21-rasm).

Endi fransuz matematigi M.Roll nomi bilan ataladigan sodda ammo muhim teoremani keltiramiz.

5.11-Teorema (Roll). Agar $y = f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz, (a, b) oraliqda differensiallanuvchi va kesmaning chetki nuqtalarida teng $f(a) = f(b)$ qiymatlarni qabul qilsa, u holda (a, b) oraliqda kamida bitta shunday c nuqta topilib, bu nuqta uchun $f'(c) = 0$ tenglik o‘rinli bo‘ladi.



5.21-rasm

► $y = f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz bo‘lganligi uchun Veyyershtrassning ikkinchi teoremasiga ko‘ra u o‘zining eng katta M va eng kichik m qiymatlariga erishadi.

Ikki holni qaraymiz.

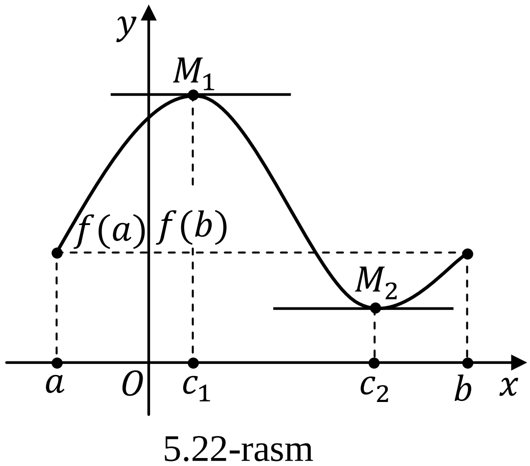
1. $M = m$, ya’ni $f(x)$ funksiya (a, b) oraliqda o‘zgarmas qiymatni qabul qiladi, shuning uchun barcha $x \in (a, b)$ nuqtalarda $f'(x) = 0$ bo‘ladi. Bu holda c sifatida (a, b) oraliqning ixtiyoriy nuqtasini olish mumkin.

2. $M > m$. Teorema shartiga ko‘ra $f(a) = f(b)$, shuning uchun funksiya M va m qiymatlardan birini (a, b) oraliqning ichki c nuqtasida qabul qiladi. U holda Ferma teoremasiga ko‘ra bu nuqtada $f'(c) = 0$ tenglik o‘rinli bo‘ladi. ◄

Xususiy holda $f(a) = f(b) = 0$ bo‘lganda quyidagi natija o‘rinli.

Natija. Differensiallanuvchi funksiyaning ikkita noli oralig‘ida uning hosilasining noli yotadi.

Roll teoremasi quyidagi geometrik talqinga ega: agar uzluksiz egri chiziq $[a, b]$ kesmaning chetlarida o‘zaro teng ordinatalrga ega va kesmaning barcha ichki nuqtalarida novertikal urinmaga ega bo‘lsa, u holda egri chiziqda urinmasi Ox

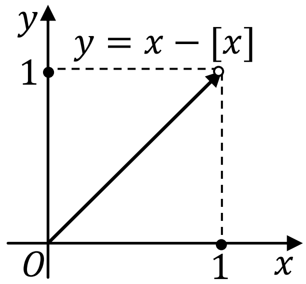


5.22-rasm

o‘qqa parallel bo‘lgan kamida bitta nuqta mavjud (5.22-rasmda (a,b) oraliqning c_1 va c_2 nuqtalariga mos keluvchi M_1 va M_2 nuqtalar).

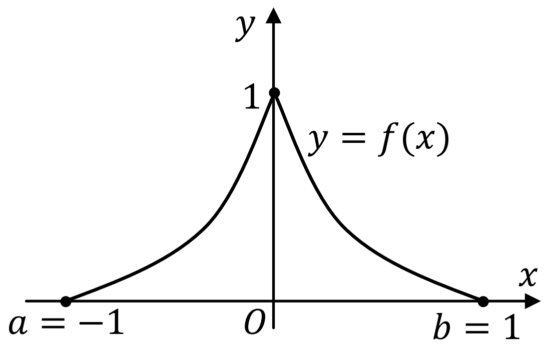
5.11-Teoremaning barcha shartlari muhim. Masalan, $y=|x|$ funksiya $[-1,1]$ kesmada uzluksiz, kesmaning chetlarida teng $y(-1)=y(1)=1$ qiymatlarni qabul qiladi, ammo kesmaning ichki $x=0$ nuqtasida differensiallanuvchi emas (5.6-Misol). Teoremaning ikkinchi sharti bajarilmayapti, shu sababli $(-1,1)$ oraliqda y' hosila nolga aylanadigan nuqta yo‘q.

5.35-Misol. $f(x)=x-[x]$ funksiya (5.23-rasm) $[0,1]$ kesmada teoremaning uzluksizlik shartidan boshqa barcha shartlarini qanoatlantiradi: $x=1$ nuqtada funksiya uzilishga ega, $(0,1)$ oraliqning barcha nuqtalarida hosila $f'(x)=1$.◄



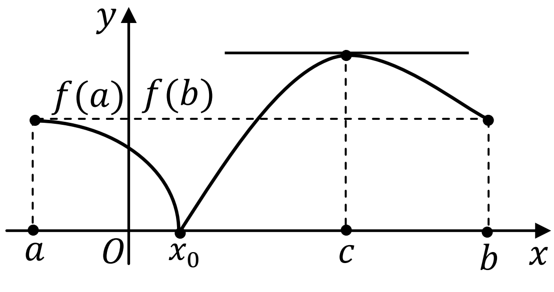
5.23-rasm

5.36-Misol. $f(x)=1-\sqrt[3]{x^2}$ funksiya $[-1,1]$ kesmada uzluksiz, kesmaning chetki nuqtalarida $f(-1)=f(1)=0$ teng qiymatlarni qabul qiladi, $f'(x)=-2/\sqrt[3]{x}$ hosila esa $(-1,1)$ oraliqning $x=0$ nuqtasidan boshqa barcha nuqtalarda chekli qiymatni qabul qiladi. Shunday qilib, Roll teoremasining bitta sharti bajarilmayapti, shu sababli teoremani mazkur funksiyaga qo‘llab bo‘lmaydi (5.24-rasm).



5.24-rasm

Roll teoremasi yetarlilik xususiyatiga ega, ya’ni barcha shartlar bajarilgandagina teoremaning tasdig‘i o‘rinli, ammo hatto bitta sharti bajarilmay qolsa ham qaralayotgan funksiya hosilasining nollari mavjudligi haqida aniq bir tasdiqni aytish mumkin bo‘lmay qoladi. 5.25-rasmda $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz, kesmaning chetlarida teng qiymatlarga erishadi, ammo ichki x_0



5.25-rasm

nuqtada differensiallanuvchi emas.

Shunga qaramasdan (a, b) oraliqda $f'(c) = 0$ bo‘ladigan $x = c$ nuqta mavjud (mos nuqtada funksiya grafigiga o‘tkazilgan urinma Ox o‘qqa parallel).

Agar $s = f(t)$ funksiya to‘g‘ri chiziqli uzluksiz harakatda s nuqta koordinatasining t vaqtga bog‘liqligini aniqlasa, u holda $f(a) = f(b)$ tenglik nuqta harakatni vaqtning a momentida boshlagandan keyin $b - a$ vaqt oralig‘idan so‘ng boshlang‘ich holatiga qaytishi kerakligini anglatadi. Ammo buning uchun vaqtning hech bo‘lmaganda bitta $t_0 \in (a, b)$ oraliq momentida nuqtaning $f'(t_0)$ tezligi nolga aylanishi kerak. Roll teoremasining mexanik interpretatsiyasi ana shundan iborat.

Chekli ayirmalar formulasi.

5.12-Teorema (Lagranj). Agar $y = f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz, (a, b) oraliqda differensiallanuvchi bo‘lsa, u holda (a, b) oraliqda kamida bitta shunday c nuqta topiladiki, bu nuqta uchun

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c), \qquad a < c < b$$

formula o‘rinli bo‘ladi.

► $$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \tag{5.64}$$

tenglik bilan $[a, b]$ kesmada aniqlangan $F(x)$ yordamchi funksiyani kiritamiz. Bu funksiya $[a, b]$ kesmada Roll teoremasining barcha shartlarini qanoatlantiradi. Haqiqatdan ham, u $[a, b]$ kesmada uzluksiz, chunki (5.64) tenglikning o‘ng tomonidagi har bir qo‘shiluvchi uzluksiz. $F(x)$ funksiyani aniqlagan har bir qo‘shiluvchi (a, b) oraliqda differensiallanuvchi bo‘lganligi tufayli $F(x)$ funksiyaning o‘zi ham bu oraliqda differensiallanuvchi. Nihoyat $[a, b]$ kesmaning chetki nuqtalarida $F(a) = F(b) = 0$ teng qiymatlarni qabul qiladi.

Roll teoremasiga ko‘ra, (a, b) oraliqda $F'(x)$ hosila nolga aylanadigan kamida bitta $c \in (a, b)$ nuqta mavjud: $F'(c) = 0$. Bu tenglikni (5.64) orqali ifodalaymiz

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0.$$

Bundan esa

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c), \qquad a<c<b. \blacktriangleleft$$

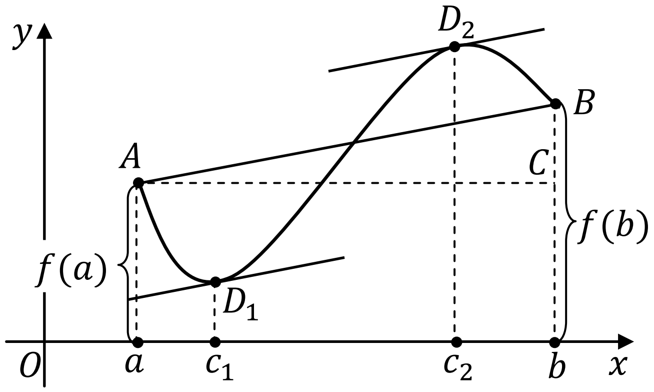
Roll teoremasi Lagranj teoremasining $f(a)=f(b)$ bo‘lgandagi xususiy holi bo‘ladi.

Endi Lagranj teoremasining geometrik talqinini ko‘raylik.

5.26-rasmda

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{BC}{AC}$$

nisbat AB vatarning burchak koeffisiyenti, $f'(c)$ hosila esa $y=f(x)$ egri chiziqqa abssissasi $x=c$ bo‘lgan nuqtada o‘tkazilgan urinmaning burchak koeffisiyenti. Shunday qilib, ixtiyoriy nuqtasida urinma o‘tkazish mumkin bo‘lgan egri chiziqning $\overset{\smile}{AB}$ yoyida kamida bitta shunday $C(c, f(c))$ nuqta topiladiki, bu nuqtada egri chiziqqa o‘tkazilgan urinma AB vatarga parallel bo‘ladi.



5.26-rasm

Isbotlangan $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$ formula, yoki

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a), \ a<c<b, \tag{5.65}$$

Lagranj formulasi yoki chekli ayirmalar formulasi deb yuritiladi.

c sonini (umuman olganda, a va b sonlar oralig‘ida yotgan noma’lum son)

$$c=a+\theta\cdot(b-a)$$

ko'rinishda ifodalash ba’zan qulay bo‘ladi, bu yerda θ ushbu $0<\theta<1$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi qandaydir son. U holda (5.65) Lagranj formulasi

$$f(b)-f(a)=f'\big(a+\theta\cdot(b-a)\big)(b-a), \ 0<\theta<1 \tag{5.66}$$

shaklni oladi. a va b o‘rniga mos ravishda x va $x+\Delta x$ olib, Lagranj formulasini

$$\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\theta\cdot\Delta x)\Delta x, \ 0<\theta<1 \tag{5.67}$$

ko‘rinishda yozamiz. Bu tenglik argumentning ixtiyoriy Δx orttirmasida funksiyaning orttirmasi uchun $\Delta f(x) \approx f'(x)\Delta x$ taqribiy tenglik o‘rniga aniq ifodani beradi. (5.67) formuladagi θ umuman olganda noma’lum son.

5.37-Misol. Lagranj teoremasidan foydalanib, ixtiyoriy x_1 va x_2 uchun

$$|\operatorname{arctg} x_2 - \operatorname{arctg} x_1| \leq |x_2 - x_1|$$

tengsizlikning o‘rinli ekanligini isbotlang.

► $f(x) = \operatorname{arctg} x$ funksiyani qaraymiz. Bu funksiya ixtiyoriy $[a, b]$ kesmada Lagranj teoremasining barcha shartlarini qanoatlantiradi. Shuning sababli ixtiyoriy x_1 va x_2 uchun

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

yoki

$$\operatorname{arctg} x_2 - \operatorname{arctg} x_1 = \frac{1}{1 + c^2}(x_2 - x_1),$$

bu yerda c nuqta x_1 va x_2 nuqtalar oralig‘ida yotadi. Bu tenglikdan

$$|\operatorname{arctg} x_2 - \operatorname{arctg} x_1| = \frac{1}{1 + c^2}|x_2 - x_1|$$

tenglikni yozamiz, ixtiyoriy c uchun $\frac{1}{1+c^2} < 1$ tengsizlik o‘rinli bo‘lishini inobatga olsak, so‘ngi tenglik $|\operatorname{arctg} x_2 - \operatorname{arctg} x_1| \leq |x_2 - x_1|$ tengsizlikka aylanadi. ◄

5.13-Teorema (Koshi). Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar

1) $[a, b]$ kesmada uzluksiz;

2) (a, b) oraliqda differensiallanuvchi;

3) (a, b) oraliqda hosila $g'(x) \neq 0$ bo‘lsa,

u holda (a, b) oraliqda kamida bitta shunday c nuqta topiladiki, bu nuqta uchun

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}, \qquad a < c < b \tag{5.68}$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi va u Koshi formulasi deb ataladi.

► Teorema shartidan $g(b) - g(a) \neq 0$ bo‘ladi, aks holda $g(a)$ va $g(b)$ teng bo‘lar edi va Roll teoremasiga ko‘ra $g'(x)$ hosila (a, b) oraliqning kamida bitta nuqtasida nolga aylanadi, bu esa Koshi teoremasining 3) shartiga ziddir. Shunday qilib (5.68) tenglik ma’noga ega. Endi uning (a, b) oraliqdan olingan birorta c uchun o‘rinli ekanligini ko‘rsatamiz.

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\big(g(x) - g(a)\big) \tag{5.69}$$

yordamchi funksiyani tuzamiz. Bu funksiya Roll teoremasining barcha shartlarini qanoatlantiradi. Haqiqatdan ham:

1) $F(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz, chunki $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar bu kesmada uzluksiz;

2) $F(x)$ funksiya (a, b) oraliqda differensiallanuvchi, chunki (5.68) tenglikning o‘ng tomonidagi har bir qo‘shiluvchi bu oraliqda differensiallanuvchi;

3) bevosita o‘rniga qo‘yib $F(a) = f(b) = 0$ ekanligiga amin bo‘lamiz.

Bu funksiyaga Roll teoremasini qo‘llab, a va b nuqtalar oralig‘ida $F'(c) = 0$ tenglikni qanoatlantiruvchi c nuqta mavjud deb xulosa chiqaramiz. (5.69) tenglikka ko‘ra

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x),$$

shuning uchun

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c) = 0.$$

So‘ngi tenglikning ikkala tomonini $g'(c)$ noldan farqli hosilaga bo‘lib

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

talab qilingan tenglikni hosil qildik. ◄

Lagranj teoremasi Koshi teoremasining xususiy holi, chunki Koshi teoremasida $g(x) = x$ deb olinsa Lagranj teoremasi hosil bo‘ladi.

Mulohaza. Roll, Lagranj va Koshi teoremalarida u yoki bu tenglik o‘rinli bo‘ladigan qandaydir $c \in (a, b)$ “o‘rta nuqta” xususida so‘z boradi. Shuning uchun bu teoremalar guruhini differensial hisobning o‘rta qiymatlar haqidai teoremalari deb nomlash mumkin.

Aniqmasliklarni ochish (Lopitall qoidasi). $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $x = a$ nuqtaning biror atrofida aniqlangan va $f(a) = g(a) = 0$ bo‘lsin. U holda $\frac{f(x)}{g(x)}$ nisbat $x = a$ nuqtada ma’noga ega bo‘lamaydi. Biroq bu nisbatning $x = a$ nuqtada limiti mavjud bo‘lishi mumkin. $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ limitni topish bu holda $\frac{0}{0}$ ko‘rinishdagi aniqmaslikni ochish deb ataladi.

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ va $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$ bo‘lganda $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ limitni topish $\frac{\infty}{\infty}$ ko‘rinishdagi aniqmaslikni ochish degani.

$\infty - \infty$ ko‘rinishdagi aniqmaslikni ochish deganda $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ va $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$ shartlarni qanoatlantiruvchi funksiyalar uchun $\lim\limits_{x\to a}[f(x) - g(x)]$ ko‘rinishdagi limitni topish tushuniladi.

$x \to \infty$ holda bu tushunchalar xuddi shu singari izohlanadi.

5.14-Teorema (Lopitall qoidasi). $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $x = a$ nuqtaning o‘zi kirmagan biror $\dot{U}_\delta(a)$ atrofida $f'(x)$ va $g'(x)$ hosilalrga ega va bu atrofda $g(x)$ va $g'(x)$ funksiyalar nolga aylanmasin. Agar

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \text{ va } \lim_{x\to a} g(x) = 0$$

va hosilalarning $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ nisbati $x = a$ nuqtada chekli yoki cheksiz limitga ega bo‘lsa, u holda bu funksiaylarning nisbati ham bu nuqtada limitga ega va

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

► Teoremada $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalarning $x = a$ nuqtadagi qiymatlari haqida so‘z yuritilmagan. Biz $f(a) = g(a) = 0$ deb olamiz. Endi $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ va $\lim\limits_{x\to a} g(x) = g(a)$, u holda $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar a nuqtada uzluksiz bo‘ladi. Shuning uchun $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[a, x]$ kesmada (yoki $[x, a]$ kesmada) Koshi teoremasining barcha shartlarini qanoatlantiradi, bu yerda x nuqta $(a - \delta, a + \delta)$ oraliqning ixtiyoriy nuqtasi. Demak, bu teoremaga ko‘ra a va x oralig‘ida kamida bitta $c = c(x)$ nuqta topiladiki, uning uchun

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \tag{5.70}$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi. Agar birorta x qiymatda bunday c nuqtalar bittadan ko‘p bo‘lsa, ulardan birini tayinlab olamiz.

c nuqta x nuqtaga bog‘liq va x nuqta a nuqtaga intilganda: $x \to a$, tayin c nuqta ham a nuqtaga intiladi: $c \to a$. Teorema shartiga ko‘ra $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ nisbat $x = a$ nuqtada chekli yoki cheksiz limitga ega. Shuning uchun $\frac{f'(c)}{g'(c)}$ nisbat $c = a$ nuqtada $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ nisbatning limitiga teng limitga ega bo‘ladi:

$$\lim_{\substack{x\to a \\ (c\to a)}} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{5.71}$$

(5.70) va (5.71) munosabatlardan

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{5.72}$$

kelib chiqadi. ◀

(5.72) tenglik Lopitall qoidasini ifodalaydi. Bu qoidaga ko‘ra funksiyalar nisbatning limitini (ma’lum shartlar o‘rinli bo‘lganda) bu funksiyalar hosilalari nisbatining limiti bilan almashtirish mumkin.

5.38-Misol. Limitni hisoblang:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(1 - \cos x)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2}.$$

1-Mulohaza. Agar teoremaning sharti faqat $(a - \delta, a)$ yoki $(a, a + \delta)$ oraliqda o‘rinli bo‘lsa, (5.72) formulani $\lim\limits_{x\to a-0} \frac{f(x)}{g(x)}$ yoki $\lim\limits_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)}$ limitni hisoblashga qo‘llash mumkin.

2-Mulohaza. Hosilalar nisbatining limiti mavjud bo‘lmasdan, balki funksiyalar nisbatining limiti mavjud bo‘lishi ham mumkin.

5.39-Misol. $f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$ va $g(x) = x$ funksiyalrni qaraymiz. Ularning nisbati $x = 0$ nuqtada limitga ega:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0.$$

Ular hosilalarining $\frac{f'(x)}{g'(x)}=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$ nisbati $x=0$ nuqtada limitga ega emas. ◀

Shunday qilib $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ limitning mavjudligidan $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ limitning mavjudligi kelib chiqmaydi.

3-Mulohaza. Agar Lopital teoremasining shartini $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalargina emas, balki ularning $f'(x)$ va $g'(x)$ hosilalari ham qanoatlantirsa, u holda $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ limitni hisoblash uchun Lopital qoidasini ketm-ket ikiki marta qo‘llash mumkin. Agar keying tartibli hosilalar ham teorema shartini qanoatlantirsa ularga ham Lopital qoidasini qo‘llash mumkin.

5.40-Misol. Limitni hisoblang:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)'}{(x^3)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}.$$

5.15-Teorema (Lopitalning ikkinchi qoidasi). $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $x=a$ nuqtaning o‘zi kirmagan biror $\dot{U}_\delta(a)$ atrofida $f'(x)$ va $g'(x)$ hosilalrga ega va bu atrofda $g(x)$ va $g'(x)$ funksiyalar nolga aylanmasin. Agar

$$\lim_{x\to a}f(x)=\infty \text{ va } \lim_{x\to a}g(x)=\infty$$

va hosilalarning $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ nisbati $x=a$ nuqtada chekli yoki cheksiz limitga ega bo‘lsa, u holda bu funksiaylarning nisbati ham bu nuqtada limitga ega va

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.◀

Bu yerda ham $x\to a-0$ yoki $x\to a+0$ bo‘lgandagi limitlarni qarash mumkin.

5.41-Misol. Limitni hisoblang:

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{\ln\sin ax}{\ln\sin bx}=\lim_{x\to 0+0}\frac{(\ln\sin ax)'}{(\ln\sin bx)'}=\lim_{x\to 0+0}\frac{\frac{a\cos ax}{\sin ax}}{\frac{b\cos bx}{\sin bx}}=$$

$$=\frac{a}{b}\lim_{x\to 0+0}\left(\frac{\cos ax}{\cos bx}\cdot\frac{\sin bx}{\sin ax}\right)=1,(a>0,b>0).$$

Lopital qoidasini:

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ va $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$ bo‘lganda $\lim\limits_{x\to a} [f(x)\cdot g(x)]$ limitni hisoblashga qo‘llash mumkin.

► Bu holda $f(x)\cdot g(x)$ ko‘paytmani

$$f(x)\cdot g(x) = \frac{f(x)}{1/g(x)} \qquad \text{yoki} \qquad f(x)\cdot g(x) = \frac{g(x)}{1/f(x)}$$

ko‘rinishda yozib o‘ng tomoniga Lopital qoidasini qo‘llash mumkin. ◄

5.42-Misol. $\lim\limits_{x\to 0+0} (x\ln x) = \lim\limits_{x\to 0+0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0+0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0+0} \frac{-x^2}{x} = 0.$ ◄

2. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ va $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$ bo‘lganda $\lim\limits_{x\to a} [f(x) - g(x)]$ limitni hisoblashga qo‘llash mumkin.

► Bu holda $f(x) - g(x)$ ayirmani yana

$$f(x) - g(x) = \frac{1}{\frac{1}{f(x)}} - \frac{1}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)}\cdot\frac{1}{g(x)}}$$

nisbat shaklida ifodalash kerak va so‘ngra Lopital qoidasini qo‘llash kerak. ◄

5.43-Misol.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{x\ln x - x + 1}{(x-1)\ln x} = \lim_{x\to 1}\frac{(x\ln x - x + 1)'}{\big((x-1)\ln x\big)'} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{\ln x + 1 - \frac{1}{x}} = \lim_{x\to 1}\frac{(\ln x)'}{\left(\ln x + 1 - \frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}.$$

3. $\lim\limits_{x\to a} [f(x)]^{g(x)}, f(x) > 0$ limitni hisoblashda, quyidagi uchta hollardan biri bo‘lganda Lopital qoidasini qo‘llash mumkin:

i) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0,\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0\ (0^0)$;

ii) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 1,\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty\ (1^\infty)$;

iii) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty,\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0\ (\infty^0)$.

► $y = [f(x)]^{g(x)}$ deb olamiz, uni logarifmlab

$$\ln y = g(x)\ln f(x)$$

tenglikka ega bo‘lamiz. Tenglikning ikkala tomonida limitga o‘tib hisoblaymiz:

$$\lim_{x\to a}\ln y = \lim_{x\to a}[g(x)\ln f(x)].$$

Bu limitni hisoblashda 1. holda qaralganlarning mosi tanlanadi.

Faraz qilaylik, biz $\lim\limits_{x\to a}\ln y = A$ limitni topdik. U holda $\lim\limits_{x\to a} y = e^A$, ya’ni

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)} = e^A. \quad ◄$$

5.44-Misol. Limitni toping $\lim\limits_{x\to 0+0} x^x$.

► $y = x^x$ deb olamiz; u holda $\ln y = x\ln x$. Bu yerdan

$$\lim_{x\to 0+0}\ln y = \lim_{x\to 0+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0+0}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to 0+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0,$$

bundan esa $\lim\limits_{x\to 0+0} y = e^0 = 1$. ◄

5.16-Teorema. $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar

1) x o‘zgaruvchining mutlaq qiymati bo‘yicha yetarlicha katta qiymatlarida aniqlangan;

2) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$ yoki $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ va $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$;

3) x o‘zgaruvchining mutlaq qiymati bo‘yicha yetarlicha katta qiymatlarida $f'(x)$ va $g'(x) \neq 0$ hosilalar mavjud;

4) funksiyalar hosilalarining (chekli yoki cheksiz)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

limiti mavjud. U holda funksiyalar nisbatining ham limiti mavjud bo‘ladi va

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

► Teoremaning to‘g‘riligiga ishonch hosil qilish uchun $x = \frac{1}{t}$ tenglik orqali yangi o‘zgartuvchi kiritib, 5.14 va 5.15-Teoremalarning natijalaridan foydalanish kerak.◄

5.45-Misol. ► $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x^2)'}{(e^x)'} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(2x)'}{(e^x)'} =$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{e^x} = 0. \quad ◀$$

5.7. Teylor formulasi

Bu formula matematik tahlilning asosiy formulalaridan biri hisoblanadi va u ko‘p tadbiqlarga ega. U murakkab analitik ifoda bilan berilgan funksiyani tahlil qilishga oson bo‘lgan ko‘phad bilan almashtirish imkonini beradi.

Ko‘phad uchun Teylor formulasi. n −darajali ko‘phad uchun Teylor formulasini keltirib chiqaramiz. n −darajali

$$P(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n,\ b_n = \text{const} \neq 0 \qquad (5.73)$$

ko‘phadni qaraymiz. a soni qanday bo‘lishidan qat’iy nazar (5.73) ko‘phadni $x - a$ ayirmaning darajalari ko‘rinishda ifodalash mumkin. Haqiqatdan ham,

$$x = a + t$$

deb olamiz. U holda

$$P(x) = P(a+t) = b_0 + b_1(a+t) + b_2(a+t)^2 + \cdots + b_n(a+t)^n.$$

O‘ng tomondagi qavslarni ochib va o‘xshash hadlarni guruhlab

$$P(a+t) = A_0 + A_1t + A_2t^2 + \cdots + A_nt^n$$

ko‘phadni hosil qilamiz. Bu yerda yana t o‘zgaruvchini x orqali ifodalab

$$P(x) = A_0 + A_1(x-a) + A_2(x-a)^2 + \cdots + A_n(x-a)^n \qquad (5.74)$$

izlanayotga ko‘phadga ega bo‘lamiz, bu yerda $A_0, A_1, \ldots, A_n$ −hozircha noma’lum bo‘lgan qandaydir o‘zgarmas sonlar.

(5.74) ko‘phadni x o‘zgaruvchi bo‘yicha n marta differensiallaymiz:

$$\left.\begin{array}{l} P'(x) = A_1 + 2A_2(x-a) + 3A_3(x-a)^2 + \cdots + nA_n(x-a)^{n-1} \\ P''(x) = 2\cdot 1A_2 + 3\cdot 2A_3(x-a) + \cdots + n(n-1)A_n(x-a)^{n-2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ P^{(n)}(x) = n(n-1)\ldots 2\cdot 1A_n \end{array}\right\} \qquad (5.75)$$

(5.74) va (5.75) tengliklarda $x = a$ deb olib

$$A_0 = P(a), A_1 = \frac{P'(a)}{1!}, A_2 = \frac{P''(a)}{2!}, \ldots, A_n = \frac{P^{(n)}(a)}{n!}$$

(5.74) tenglikdagi nomalum $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$ koffisiynetlarni topdik. Demak (5.74) tenglikni

$$P(x) = P(a) + \frac{P'(a)}{1!}(x-a) + \frac{P''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \quad (5.76)$$

ko‘rinishda yozish mumkin bo‘ladi. Bu tenglik n −darajali $P(x)$ ko‘phadning $x-a$ ayirmaning darajalari boyicha *Teylor formulasi* deb ataladi (B.Teylor (1685-1731)-ingliz matematigi). Bu yerda $a=0$ xususiy holda

$$P(x) = P(0) + \frac{P'(0)}{1!}x + \frac{P''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{P^{(n)}(0)}{n!}x^n \qquad (5.77)$$

Makloren formulasini hosil qilamiz (K.Makloren (1698-1746)-shotland matematigi).

5.46-Misol. $P(x) = 2x^3 + 5x^2 + 4x - 5$ ko‘phadni

1) x o‘zgaruvchining darajalari bo‘yicha;

2) $x-1$ ayirmaning darajalari bo‘yicha yoying.

► Ko‘phad va uning hosilalarining qiymatlarini $x=0$ va $x=1$ nuqtalarda hisoblaymiz:

$P(x) = 2x^3 + 5x^2 + 4x - 5$	$P(0) = -5$	$P(1) = 6$
$P'(x) = 6x^2 + 10x + 4$	$P'(0) = 4$	$P'(1)$=20
$P''(x) = 12x + 10$	$P''(0) = 10$	$P''(1) = 22$
$P'''(x) = 12$	$P'''(0) = 12$	$P'''(1) = 12$

(5.77) formulaga ko‘ra

$$P(x) = -5 + \frac{4}{1!}x + \frac{10}{2!}x^2 + \frac{12}{3!}x^3 = -5 + 4x + 5x^2 + 2x^3$$

Makloren yoyilmasini va (5.76) formulaga ko‘ra

$$P(x) = 6 + \frac{20}{1!}(x-1) + \frac{22}{2!}(x-1)^2 + \frac{12}{3!}(x-1)^3 =$$

$$= 6 + 20(x-1) + 11(x-1)^2 + 2(x-1)^3$$

Teylor yoyilmasini hosil qildik. ◄

Differensiallanuvchi funksiya uchun Teylor formulasi. $f(x)$ funksiya a nuqtada n marta differensiallanuvchi bo‘lsin. Bu, funksiya a nuqtaning biror atrofida aniqlangan va bu atrofda $(n-1)$ –tartibli va ungacha bo‘lgan barcha tartibli hosilalarga ega va bundan tashqari bu nuqtaning o‘zida n −tartibli $f^{(n)}(a)$ hosila mavjud degan ma’noni anglatadi.

n −tartibli

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \quad (5.78)$$

ko‘phadni tuzamiz. Ko‘rinib turibdiki, bu ko‘phad, uning n −tartibli va ungacha bo‘lgan barcha tartibli hosilalari a nuqtada $f(x)$ funksiya bilan bir xil qiymat qabul qiladi. Haqiqatdan ham,

$P_n(a) = f(a),$

$$P_n'(a) = \left(f'(a) + f''(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}\right)\Bigg|_{x=a} = f'(a),$$

$$P_n''(a) = \left(f''(a) + f'''(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{(n-2)!}(x-a)^{n-2}\right)\Bigg|_{x=a} = f''(a)$$

va umuman $k = \overline{0,n}$ uchun

$$P_n^{(k)}(a) = \left(f^{(k)}(a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{(n-k)!}(x-a)^{n-k}\right)\Bigg|_{x=a} = f^{(k)}(a)$$

tengliklar o‘rinli. Bu yerda va keyin mulohazalarda $k = 0$ bo‘lganda $f^{(0)}(x) = f(x)$ va $0! = 1$ deb qabul qilingan.

(5.78) ko‘phad *Teylor ko‘phadi,* uning koeffisiyentlari esa *Teylor koeffisiyentlari* deb ataladi.

Teylor ko‘phadi $x = a$ nuqtaning atrofida $f(x)$ funksiyaga taqribiy yaqinlashishni beradi, ya’ni

$$f(x) \approx P_n(x) == f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Bu taqribiy yaqinlashishdagi xatolikni, ya’ni $f(x) - P_n(x)$ ayirmani $R_n(x)$ orqali belgilaymiz. U holda bu tenglik va belgilashlardan

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots +$$

$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n(x) \quad (5.79)$$

Teylor formulasini hosil qilamiz. Bunda Teylor formulasining qoldiq hadi deb ataluvchi $R_n(x)$ qoldiq $x = a$ nuqtada $(x-a)^n$ cheksiz kichikka nisbatan yuqori tartibli cheksiz kichik. Buni quyidagi teorema tasdiqlaydi.

5.17-Teorema. Agar $f(x)$ funksiya a nuqtada n marta differensiallanuvchi bo‘lsa, u holda

$$R_n(x) \underset{x\to a}{=} o((x-a)^n). \tag{5.80}$$

► Teoremani isbotlash uchun

$$\lim_{x\to a}\frac{R_n(x)}{(x-a)^n}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-P_n(x)}{(x-a)^n}=0$$

ekanligini ko‘rsatish yetarli. Limit ostidagi nisbat $[0/0]$ ko‘rinishdagi aniqmaslikni ifodalaydi. Teoremaning sharti va $P_n^{(k)}(a)=f^{(k)}(a)$, $(k=\overline{0,n-1})$ tengliklar bu aniqmaslikni ochish uchun Lopital qoidasini $(n-1)$ marta qo‘llash imkonini beradi:

$$\lim_{x\to a}\frac{R_n(x)}{(x-a)^n}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-P_n(x)}{(x-a)^n}=\lim_{x\to a}\frac{\left(f(x)-P_n(x)\right)'}{((x-a)^n)'}=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)-\left(f'(a)+f''(a)(x-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}\right)}{n(x-a)^{n-1}}=\cdots=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(a)-f^{(n)}(a)(x-a)}{n!\,(x-a)}=$$

$$=\frac{1}{n!}\lim_{x\to a}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(a)}{x-a}-\frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Teoremaning shartiga ko‘ra a nuqtada $f^{(n)}(a)$ hosila mavjud va hosilaning 5.10-Ta’rifiga ko‘ra,

$$\lim_{x\to a}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(a)}{x-a}=f^{(n)}(a)$$

limit mavjud. Shuning uchun oldingi tenglikning o‘ng tomoni nolga teng, bundan esa (5.80) kelib chiqdi. ◄

a nuqtada n marta differensiallanuvchi $f(x)$ funksiyani bu nuqta atrofida tasvirlovchi Teylor ko‘phadi xatoligi $o((x-a)^n)$ ko‘rinishda bo‘lgan yagona ko‘phad ekanligini ko‘rsatamiz.

5.18-Teorema. a nuqtada n marta differensiallanuvchi $f(x)$ funksiya xatoligi $x=a$ nuqtada $o((x-a)^n)$ ko‘rinishda bo‘lgan $x-a$ ayirmaning $n-$darajali ko‘phadi shaklida tasvirlansa, u holda bu ko‘phadning koeffisiyentlari Teylor koeffisiyentlari bo‘ladi, ko‘phadning o‘zi esa Teylor ko‘phadi bo‘ladi.

► $f(x)$ funksiya $x-a$ ayirmaning darajalari bo‘yicha

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n} c_k\,(x-a)^k+o((x-a)^n)$$

ko‘phad bilan tasvirlangan bo‘lsin. $o((x-a)^n)\underset{x\to a}{=}\mu(x)(x-a)^n$ munosabatni qanoatlantiruvchi $x=a$ nuqtada cheksiz kichik bo‘lgan $\mu(x)$ funksiya mavjudligini eslatib o‘tamiz. $f(x)$ funksiyaning ko‘rsatilgan tasvirini uning (5.79) tasviriga (5.80) tenglikni inobatga olgan holda tenglashtiramiz:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n} c_k\,(x-a)^k+\beta(x)(x-a)^n=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\gamma(x)(x-a)^n,$$

bu yerda $\beta(x)$ va $\gamma(x)$ funksiyalar $x=a$ nuqtada cheksiz kichik. Bu tenglikda $x=a$ nuqtada limitga o‘tsak, chap va o‘ng tomonlarning birinchi hadlaridan boshqa hamma hadlari nolga aylanadi. Bundan $c_0=f(a)$. O‘zaro teng qo‘shiluvchilarni tashlab yuborib va ikkala tomonni $x-a$ ayirmaga qisqartirib

$$\sum_{k=1}^{n} c_k\,(x-a)^{k-1}+\beta(x)(x-a)^{n-1}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^{k-1}+\gamma(x)(x-a)^{n-1}$$

tenglikka ega bo‘lamiz. Bu yerda ham $x=a$ nuqtada limitga o‘tsak $c_1=f'(a)$ bo‘ladi. Koeffisiyentlarni topishning tasvirlangan jarayonini ketma-ket davom ettirib, barcha $k=\overline{0,n}$ uchun har safar $c_k=f^{(k)}(a)/k!$ ifodani olamiz, ya’ni qilingan farzlarda c_k Teylor koffisiyentalri,

$$\sum_{k=0}^{n} c_k\,(x-a)^k$$

ko‘phad esa $f(x)$ funksiyaning Teylor ko‘phadi bo‘lar ekan. ◄

Shunday qilib, $x=a$ nuqtaning atrofida $f(x)$ funksiyaga c_k koeffisiyentlari $f^{(k)}(a)/k!$ ifodadan farq qiladigan har qanday $\sum_{k=0}^{n} c_k\,(x-a)^k$ ko‘phad bilan taqribiy yaqinlashishning xatoligi Teylor ko‘phadi bilan yaqinlashishdagi xatolikdan $x=a$ nuqtada past tartibli cheksiz kichik bo‘lar ekan. Shuning uchun Teylor ko‘phadini bir xil darajali ko‘phadlar orasida eng yaxshi taqribiy yaqinlashuvchi ko‘phad deb ataladi.

5.47-Misol. $f(x) = 1/(1-x)$ funksiyani maxraji x va birinchi hadi 1 bo‘lgan cheksiz kamayuvchi geometrik progressiyaning yig‘indisi sifatida qarash mumkin, ya’ni

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + R_n(x), \qquad (5.81)$$

bunda qoldiq had $R_n(x) = x^{n+1} + x^{n+2} + \dots = x^{n+1}/(1-x)$ ko‘rinishda bo‘ladi va uning uchun $x^{n+1}/(1-x) \underset{x\to a}{=} o(x^n)$ munosabat o‘rinli bo‘ladi. Endi $f(x)$ funksiyaning Teylor koeffisiyentlarini hisoblaymiz:

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, f''(x) = \frac{1\cdot 2}{(1-x)^3}, \dots, f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$$

va demak, barcha $k = \overline{0,n}$ uchun $f^{(k)}(0)/k! = 1$ bo‘ladi. Shunday qilib (5.81) formula $f(x)$ funksiyaning Teylor yoyilmasi ekan, ◀

$x - a + \Delta x$ va $f(x) - f(a) = f(a+\Delta x) - f(a) = \Delta f(a)$ deb belgilash kiritib, (5.79) formulani ba’zan

$$\Delta f(a) = f'(a)\Delta x + \frac{f''(a)}{2!}(\Delta x)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(\Delta x)^n +$$

$$+o((\Delta x)^n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(\Delta x)^k + o((\Delta x)^n) \qquad (5.82)$$

ko‘rinishda yozish qulay. (5.82) formulada $f^{(k)}(a)(\Delta x)^k$ ko‘paytma $f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi $d^k f(a)$ differensialidan iborat. Shuning uchun (5.82) formulani

$$\Delta f(a) = df(a) + \frac{d^2 f(a)}{2!} + \dots + \frac{d^n f(a)}{n!} + +o((\Delta x)^n) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{d^{(k)} f(a)}{k!} + o((\Delta x)^n) \qquad (5.83)$$

ko‘rinishda yozish mumkin. Bunday ko‘rinishdagi tenglikni n −tartibli differensiallardagi Teylor formulasi deb ataladi.

Teylor formulasidagi qoldiq handing turli ko‘rinishlari. (5.79) n −tartibli Teylor formulasining (5.80) ko‘rinishdagi qoldiq hadini Peano shaklidagi qoldiq had deb ataladi (D.Peano (1858-1932)-italyan matematigi). $n-$tartibli Teylor formulasini Peano shaklidagi qoldiq had bilan birlashtirib

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+o((\Delta x)^n) \tag{5.84}$$

Peano shaklidagi qoldiq hadli $n-$tartibli Teylor formulasi deb ataladi. Biroq, qoldiq handing bunday ko‘rinishi muhim kamchiliklarga ega:

1) $f(x)$ funksiyani a nuqtaning atrofi $P_n(x)$ Teylor ko‘phadi orqali tasvirlanganda yuzaga kelgan xatolikni hisoblashga imkon bermaydi;

2) ko‘phad funksiyaning berilgan aniqlikda o‘rnini bosa oladigan a nuqta atrofning o‘lchamlarini aniqlashga imkon bermaydi;

3) ko‘phadning n darajasini oshirish hisobiga xatolikka qanday ta’sir o‘tkazish haqida gapirib bo‘lmaydi.

Agar 5.17-Teorema shartiga qo‘shimcha qilib a nuqtada yana $f(x)$ funksiyaning $f^{(n+1)}(a)$ hosialsining ham mavjudligi talab qilinsa, bu teoremaga asosan

$$R_n(x)=f(x)-P_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}+o((\Delta x)^{n+1})$$

tenglikni yozish mumkin. Bundan esa, Peano shaklidagi qoldiq had uchun

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(a)+\alpha(x)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \tag{5.85}$$

kabi boshqa ifodani hosil qilamiz, bu yerda

$$\alpha(x)=(n+1)!\frac{o((x-a)^{n+1})}{(x-a)^{n+1}}$$

funksiya $x=a$ nuqtada cheksiz kichik. Qoldiq hading bunday ko‘rinishi ba’zi hollarda $f(x)$ funksiyaning a nuqta atrofida o‘zgarishini tahlil qilishga qulay. Qulaylik shundan iboratki, chekli $f^{(n+1)}(a)\neq 0$ qiymatda $x=a$ nuqtada qoldiq hadning $x-a$ ayirmaga nisbatan kichiklik tartibi aniq qiymatga ega, (5.80) shakldа esa uning kichiklik tartibining $(x-a)^n$ ifodaga nisbatan yuqoriroqligini aytish mumkin xolos.

Quyidagi ko‘rinishdagi qoldiq hadni

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, 0 < \theta < 1 \qquad (5.87)$$

Lagranj ko'rinishidagi qoldiq had deb ataymiz. Lagranj qoldiq hadining Peano qoldiq hadidan farqi shundan iboratki, $f^{(n+1)}(x)$ hosila a nuqtada emas balki a va x oralig'idagi $c = a + \theta(x-a)$ nuqtada hisoblanadi. (5.79) va (5.87) formulalarni birlashtirib ($0 < \theta < 1$ bo'lganda)

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \qquad (5.88)$$

Lagranj shaklidagi qoldiq hadli n −tartibli Teylor formulasini hosil qildik.

Makloren formulasi. $a = 0$ xususiy holda (5.79) Teylor formulasi

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^n(0)}{n!}x^n + R_n(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(0)}{k!}x^k + R_n(x) \qquad (5.89)$$

Makloren formulasini hosil qiladi. (5.89) tenglikda qoldiq had

Peano shaklida

$$R_n(x) = o(x^n) \qquad \text{yoki} \qquad R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(0) + \beta(x)}{(n+1)!}x^n \qquad (5.90)$$

Ko'rinishga ega bo'ladi, bu yerda $\beta(x)$ funksiya $x = 0$ nuqtada cheksiz kichik;

Lagranj shaklidagi qoldiq had esa

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}, \qquad 0 < \theta < 1 \qquad (5.91)$$

shaklda bo'ladi. Shunday qilib (5.89) Makloren formulasi $f(x)$ funksiyani $x = 0$ nuqta atrofida tasvirlar ekan.

Ba'zi elementar funksiyalarni Makloren formulasi bo'yicha yoyish.

Elementar funksiyalarni Lagranj qoldiq hadli

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^n(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} \qquad (5.92)$$

Makloren formulasi bo'yicha yoyamiz.

1. $f(x) = e^x$

►$k=\overline{0,n}$ uchun $f^{(k)}(x)=e^x$ va shuning uchun $f^{(k)}(0)=1$, $f^{(n+1)}(\theta x)=e^{\theta x}$. U holda Lagranj shaklidagi qoldiq hadli (5.89) Makloren formulasi eksponensial funksiya uchun

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+R_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1} \qquad (5.93)$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

2. $f(x)=\sin x$

Funksiyaning va uning hosilalarining $x=0$ nuqtadagi qiymatlarini hisoblaymiz:

$f(x)=\sin x\Rightarrow f(0)=0,\qquad f'(x)=\cos x\Rightarrow f'(0)=1,$

$f''(x)=-\sin x\Rightarrow f''(0)=0\qquad f'''(x)=-\cos x\Rightarrow f'''(0)=-1$

va umuman

$f^{(k)}(x)=\sin\left(x+k\cdot\frac{\pi}{2}\right)$

bundan esa,

$$f^{(k)}(0)=\sin k\cdot\frac{\pi}{2}=\begin{cases}0, & k=2p\\(-1)^p, & k=2p+1\end{cases}$$

qoldiq hag esa,

$$f^{(n+1)}(\theta x)=\sin\left(\theta x+(n+1)\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

Demak, $\sin x$ funksiyaning Teylor ko‘phadida x o‘zgaruvchining juft darajalari oldidagi koeffisiyentlar nolga aylanar ekan. Shuning uchun (5.92) formulada $n=2k-1$ deb olsak

$$\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots+(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}+$$

$$+\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\sin\left[\theta x+(2k+1)\frac{\pi}{2}\right],\ \ 0<\theta<1 \qquad (5.94)$$

3. $f(x)=\cos x$

Funksiyaning va uning hosilalarining $x=0$ nuqtadagi qiymatlarini hisoblaymiz:

$f(x)=\cos x\Rightarrow f(0)=1,\qquad f'(x)=-\sin x\Rightarrow f'(0)=0,$

$f''(x)=-\cos x\Rightarrow f''(0)=-1\qquad f'''(x)=\sin x\Rightarrow f'''(0)=-1$

va umuman

$$f^{(k)}(x) = \cos\left(x + k \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

bundan esa

$$f^{(k)}(0) = \cos k \cdot \frac{\pi}{2} = \begin{cases} 0, & k = 2p+1 \\ (-1)^p, & k = 2p \end{cases}$$

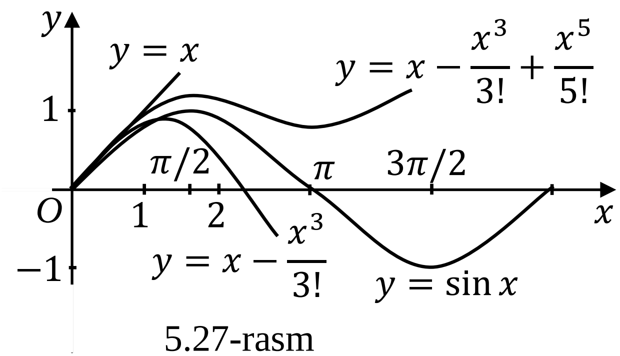
qoldiq hag esa

$$f^{(n+1)}(\theta x) = \cos\left(\theta x + (n+1) \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

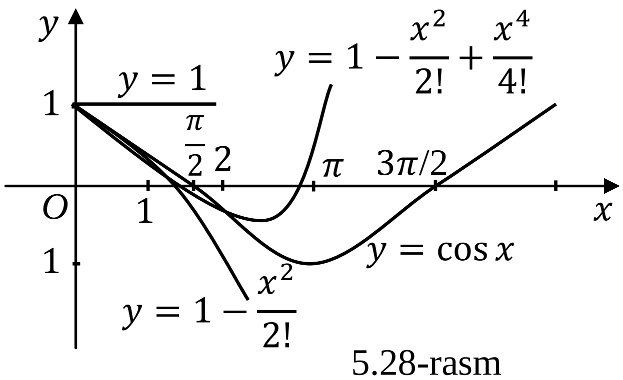
Demak $\cos x$ funksiyaning Teylor ko‘phadida x o‘zgaruvchining toq darajalari oldidagi koeffisiyentlar nolga aylanar ekan. Shuning uchun (5.92) formulada $n = 2k$ deb olsak

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} +$$
$$+ \frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!} \sin\left[\theta x + (2k+2)\frac{\pi}{2}\right], \quad 0 < \theta < 1 \qquad (5.95)$$

(5.94) va (5.95) formulalardan $\sin x$ va $\cos x$ funksiyalarning qiymatlarini ixtiyoriy aniqlikda hisoblash uchun foydalanish mumkin. 5.27 va 5.28-rasmlarda $x = 0$ nuqtaning atrofida $\sin x$ $\cos x$ funksiyalarning Teylor ko‘phadlari bilan taqribiy yaqinlashishlari ko‘rsatilgan.



5.27-rasm



5.28-rasm

4. $f(x) = \ln(1 + x)$

Bu funksiya $x > -1$ uchun aniqlangan va ixtiyoriy tartibli hosilasi mavjud. U holda ularning qiymatlarini hisoblaymiz:

$$f(x) = \ln(1+x) \quad \Rightarrow f(0) = 0, \quad f'(x) = \frac{1}{1+x} \quad \Rightarrow f'(0) = 1,$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \quad \Rightarrow f''(0) = -1, \quad f'''(x) = \frac{1\cdot 2}{(1+x)^2} \quad \Rightarrow f'''(0) = 2!,$$

……………………………………………………………………………………

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n} \qquad \Rightarrow f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1}(n-1)!$$

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+2}\frac{n!}{(1+x)^{n+1}} \qquad f^{(n+1)}(\theta x) = (-1)^{n+2}\frac{n!}{(1+\theta x)^{n+1}}$$

(5.92) Makloren formulasiga ko‘ra

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} +$$

$$+(-1)^{n+2}\frac{n!}{(1+\theta x)^{n+1}}x^{n+1}, 0 < \theta < 1 \qquad (5.96)$$

5. $f(x) = (1+x)^\alpha$ (α −haqiqiy son, $x > -1$)

Funksiyaning va uning hosilalarining $x = 0$ nuqtadagi qiymatlarini hisoblaymiz:

$f(x) = (1+x)^\alpha,$ $\qquad \Rightarrow f(0) = 1,$

$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1},$ $\qquad \Rightarrow f'(0) = \alpha,$

$f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2},$ $\qquad \Rightarrow f'(0) = \alpha(\alpha-1),$

……………………………………………………………………………………

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}, \qquad \Rightarrow f^{(n)}(0) =$$

$$= \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1),$$

$$f^{(n+1)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)(1+x)^{\alpha-n-1}, \qquad \Rightarrow f^{(n+1)}(\theta x) =$$

$$= \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)(1+\theta x)^{\alpha-n-1}.$$

Shuning uchun

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n +$$

$$+R_{n+1}(x) \qquad (5.97)$$

bu yerda

$$R_{n+1}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)(1+\theta x)^{\alpha-n-1}x^{n+1}, 0 < \theta < 1.$$

Agar $\alpha = m$ −natural son bo‘lsa (5.92) formulaning $(m+1)$ −hadidan boshlab barcha hadlari nolga aylanadi va Makloren formulasi Nyuton binom formulasiga aylanadi

$$(1+x)^{\alpha}=1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+x^n.$$

Elementar funksiyalarni asimptotik baholashda va limitlarni hisoblashda Makloren formulasidan foydalanish. (4.60) formulada elementar funksiyalar uchun asimptotik ekvivalentlik munosabatlarini o‘rnatgan edik:

$$\left.\begin{aligned} \sin x = x + o(x) \\ e^x = 1 + x + o(x) \\ \ln(1+x) = x + o(x) \\ (1+x)^{\alpha} + 1 + \alpha x + o(x) \end{aligned}\right\} \; x \to 0. \tag{5.98}$$

(5.98) formulalar kichik $|x|$ qiymatlarda elementar funksiyalarni tasvirlaydi. Biz ulardan oddiy limitlarni hisoblashda foydalandik. x o‘zgaruvchining yuqoriroq darajalari asosiy o‘rin tutadigan mukammalroq limitlarni hisoblashda (5.98) formulalar yetarli bo‘lmaydi. Shuning sababli elementar funksiyalar uchun yanayam aniqroq asimptotik baholashlar olish zarurati paydo bo‘ladi. Bunday baholashlarni Peano shaklidagi qoldiq hadli Makloren formulasi yordamida olish mumkin. Bunday baholashlarni keltiramiz:

$$\left.\begin{gathered} e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\ \sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{k-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o\big(x^{2n)}\big) \\ \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^k\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \\ \ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n) \\ (1+x)^{\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \\ + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n) \end{gathered}\right\} \; x \to 0 \tag{5.99}$$

5.47-Misol. Limitni toping

$$\lim_{\Delta t \to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$$

► (5.98) formulalar bilan bu limitni topib bo‘lmaydi. Maxrajning ko‘rinishiga qarab o‘zgaruvchining uchinchi darasi asosiy o‘rin tutadi deb xulosaga kelish mumkin. Shuning uchun (5.99) formulalardan $n=3$ holda foydalanamiz:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\left(\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+o(x^4)\right)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{3!}+\frac{o(x^4)}{x^3}\right)=\frac{1}{6}.$$

Nazorat savollari

1. Hosila deb nimaga aytiladi?
2. Egri chiziqqa o‘tkazilgan urinma bilan hosila o‘zaro qanday bog‘langan?
3. Funksiya qachon differensiallanuvchi deyiladi?
4. Differensiallanuvchi funksiyalar yig‘indisining hosilasi nimaga teng?
5. Qanday funksiyalarga logarifmlab differensiallash usuli qo‘llaniladi?
6. Teskari funksiyaning hosilasi qanday topiladi?
7. Qachon funksiya oshkormas ko‘rinishda berilgan deyiladi?
8. Funksiyaning differensialai nima?
9. Differensialning geometrik ma’nosi nimadan iborat?
10. Ikkinchi tartibli hosilaning fizik ma’nosi nimadan iborat?
11. Aniqmaslikni ochish deganda nimani tushunasiz?
12. Teylor va Makloren formulalarining farqi nimada?

Mashqlar.

Bevosita hosilaning ta’rifidan foydalanib funksiyaning hosilasini toping:

1. $y=x^3$. **2.** $y=1/x$. **3.** $y=\sqrt{x}$. **4.** $y=2x^2-x$.

$y=f(x)$ egri chiziqqa $x=a$ nuqtada o‘tkazilgan urinma va normal tenglamasini tuzing:

5. $y=x^3, a=1$. **6.** $y=1/x, a=1$. **7.** $y=\sqrt{x}, a=4$. **8.** $y=1/\sqrt{x},\ a=9$

Funksiyalarning hosilalarini toping:

9. $y=x^5+4x^4-2x^3+4x-1$. **10.** $y=\sin 2x\cdot e^x$. **11.** $y=\sqrt{5x-4}$.

12. $y=(x^2+3x-4)/(x^2+1)$. **13.** $y=\arcsin 5x$. **14.** $y=2^{-3x}$.

$y'(x)$ hosilani toping:

15. $y=\sqrt[3]{\dfrac{1}{1+x^2}}$. **16.** $y=\sin x-\cos x$. **17.** $y=\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$.

18. $y=\dfrac{1}{3}\mathrm{tg}^3\,x$. **19.** $y=\sin 5x$. **20.** $y=2\sin(-x)$. **21.** $y=\sin^2 x$.

22. $y=\mathrm{sh}^3 x$. **23.** $y=\sqrt{\mathrm{ch}\,x}$. **24.** $y=\mathrm{th}(\ln x)$. **25.** $y=(\sin x)^{\cos x}$.

26. $y=x^{\sin x}$. **27.** $y=\ x^{\ln x}$. **28.** $y=(x+2)^{3/2}\sqrt[3]{x-1}$.

Funksiyaning differensialini toping.

29. $y = 1/(4x^4)$. **30.** $y = \mathrm{tg}^2\, x$. **31.** $y = 5^{\ln \sin x}$.

32. arctg 1,02 qiymatini taqribiy hisoblang.

Qayta differensiallashni bajaring:

33. $y = 4x^3 - 5x^2 + 6x - 4;\ y'' = ?$ **34.** $y = \mathrm{arctg}\, x,\ y''(1) = ?$

35. $y = a^{3x},\ y''' = ?$ **36.** $y = x^5 \ln x,\ y''' = ?$

Yuqori tartibli differensialni toping:

37. $y = e^{-x^2/2}, d^2y = ?$ **38.** $y = x^m,\ d^3y = ?$

Parametrik ko‘rinishda berilgan funksiyaning y'_x hosilasini toping:

39. $\begin{cases} x = 2t - 1, \\ y = t^3. \end{cases}$ **40.** $\begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = b \sin^3 t. \end{cases}$ **41.** $\begin{cases} x = e^{-t}, \\ y = e^{2t}. \end{cases}$

Parametrik ko‘rinishda berilgan funksiyaning y''_{xx} hosilasini toping:

42. $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = t^3. \end{cases}$ **43.** $\begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t. \end{cases}$

Lopital qoidasidan foydalanib quyidagi limitlarni toping.

44. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3x^2 + 4x - 7}{2x^2 + 3x - 5}$ **45.** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \cos x - \sin x}{x^3}$ **46.** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{tg}\, x - \sin x}{x - \sin x}$

47. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 + x) - x}{\mathrm{tg}^2 x}$ **48.** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{\sin x} - e^x}{\sin x - x}$ **49.** $\lim\limits_{x \to 0+0} \dfrac{\ln x}{\ln \sin x}$

50. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x} \right)$ **51.** $\lim\limits_{x \to 0+0} (1 + x)^{\ln x}$ **52.** $\lim\limits_{x \to 0+0} \left(\dfrac{1}{x} \right)^{\sin x}$

53. $x^3 + 3x^2 - 2x + 4$ ko‘phadni $x + 1$ ikkihadning darajalari boyicha yoying.

54. $x^3 - 2x^2 + 3x + 5$ ko‘phadni $x - 2$ ikkihadning darajalari boyicha yoying.

55. $f(x) = 1/x$ funksiyani $a = -1$ nuqta atrofida Teylor formulasi boyicha yoying.

56. $f(x) = xe^x$ funksiyani $a = 0$ nuqta atrofida Makloren formulasi boyicha yoying.

Makloren formulasidan foydalanib limitlarni toping:

57. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\cos x - 1 - x^2/2}{x^4} \right)$ **58.** $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\sqrt{1 + x} + \sqrt[3]{1 + x} - 2\sqrt[4]{1 - x}}{x} \right)$

VI BOB. BIR O‘ZGARUVCHILI FUNKSIYANI TEKSHIRISH

6.1. Funksiyaning o‘sish va kamayish shartlari

4.1. da monoton funksiyalarga ta’rif bergan edik. Bu yerda ham bu ta’riflarni kengroq ko‘rinishda takrorlaymiz. $[a,b]$ kesmada aniqlangan $f(x)$ funksiya berilgan bo‘lsin.

6.1-Ta’rif. $x_1 < x_2$ shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $x_1, x_2 \in [a,b]$ uchun $f(x_1) \leq f(x_2)$ tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada kamaymaydigan funksiya deb ataladi. Agar $x_1 < x_2$ shartdan doimo $f(x_1) < f(x_2)$ kelib chiqsa, $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada o‘suvchi deyiladi.

6.2-Ta’rif. Agar $[a,b]$ kesmadagi $x_1 < x_2$ shartdan $f(x_1) \geq f(x_2)$ tengsizlik kelib chiqsa, $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada o‘smaydigan, $x_1 < x_2$ shartdan $f(x_1) > f(x_2)$ tengsizlik kelib chiqsa, $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada kamayuvchi deyiladi.

6.3-Ta’rif. Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada faqat kamaymaydigan (xususiy holda o‘suvchi) yoki faqat o‘smaydigan (xususiy holda kamayuvchi) bo‘lsa, uni biz $[a,b]$ kesmada monoton funksiya deb ataymiz. O‘suvchi va kamayuvchi funksiyalarni qat’iy monoton funksiyalar deb ataymiz.

6.1-Teorema. $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz va hech bo‘lmaganda (a,b) oraliqda $f'(x)$ hosilaga ega bo‘lsin. $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada kamaymaydigan bo‘lishi uchun (a,b) oraliqning barcha x nuqtalarida $f'(x) \geq 0$ tengsizlikning bajarilishi zarur va yetarli.

► **Zarurligi.** $f'(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada kamaymaydigan bo‘lsin (6.1-rasm). (a,b) oraliqda hosila $f'(x) \geq 0$ bo‘lishini ko‘rsatamiz. (a,b) oraliqda x va $x + \Delta x$ nuqtalarni olamiz. Shartga ko‘ra $f(x)$ funksiya kamaymaydi, u holda ixtiyoriy Δx orttirmada (musbat yoki manfiy) Δx va $f(x + \Delta x) - f(x)$ ayirmaning ishorasi bir xil va shuning uchun

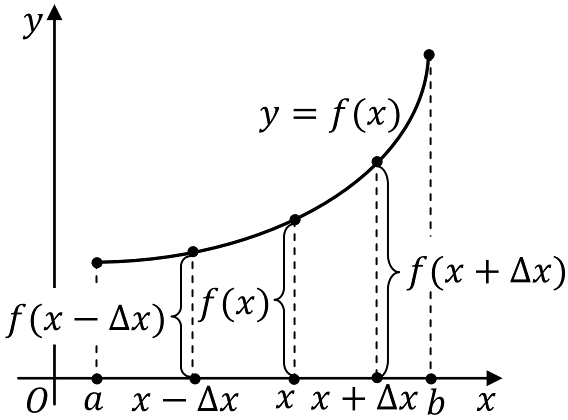
$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. (a,b) oraliqning barcha x nuqtasida $f'(x)$ hosila mavjudligini inobatga olsak va limitning ishorasi haqidagi 4.5-Teoremaga ko‘ra

$$f'(x) = \lim_{x\to a} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0.$$

Shunday qilib ixtiyoriy $x \in (a, b)$ nuqtada $f'(x) \geq 0$.

Yetarliligi. (a, b) nuqtada $f'(x) \geq 0$ bo‘lsin. $f(x)$ funksiyaning $[a, b]$ kesmada kamaymasligini ko‘rsatamiz. $[a, b]$ kesmaning ixtiyoriy $x_1 < x_2$ nuqtalarini olamiz. Lagranj teoremasiga ko‘ra,



6.1-rasm

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1),$$

bu yerda $x_1 < c < x_2$. Shartga ko‘ra (a, b) oraliqning har bir nuqtasida $f'(x) \geq 0$, u holda $f'(c) \geq 0$. Bundan tashqari $x_2 > x_1$. Shuning uchun

$$f(x_2) \geq f(x_1).$$

Shunday qilib $x_1 < x_2$ tengsizlikdan $f(x_1) \leq f(x_2)$ tengsizlik kelib chiqar ekan, bu esa $f(x)$ funksiyaning $[a, b]$ kesmada kamaymasligini anglatadi. ◀

Keyingi teorema ham xuddi shu singari isbotlanadi.

6.2-Teorema. $f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz va hech bo‘lmaganda (a, b) oraliqda $f'(x)$ hosilaga ega bo‘lsin. $f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada o‘smaydigan bo‘lishi uchun (a, b) oraliqning barcha x nuqtalarida $f'(x) \leq 0$ tengsizlikning bajarilishi zarur va yetarli.

Qaralgan teoremalar kesmada uzluksiz va oraliqning chekli sondagi nuqtalarida hosilaga ega bo‘lmagan funksiyalar uchun ham o‘rinli. Bu bevosita isbotning borishidan kelib chiqadi. Buning uchun oraliq hosila mavjud bo‘lmagan nuqtalar yordamida uzluksiz hosilali kichik intervallarga ajratiladi.

Shunday qilib, $f'(x)$ hosilaning oraliqda ishorasini o‘zgartmasligi (oraliqning chekli sondagi nuqtalaridagina nolga aylanadi degan shartda) $f(x)$ funksiyaning mazkur oraliqda qat’iy monoton bo‘lishligi uchun yetarli shart bo‘ladi.

6.3-Teorema. Agar $[a, b]$ kesmada uzluksiz va (a, b) oraliqda differensiallanuvchi $f(x)$ funksiyaning hosilasi ixtiyoriy $x \in (a, b)$ nuqtada $f'(x) \geq 0$ $(f'(x) \leq 0)$ va hech qanday $E \subseteq (a,b)$ oraliqda $f'(x)$ hosila aynan nol bo‘lmasa, $f(x)$ funksiya (a,b) oraliqda o‘sadi (kamayadi).

► (a,b) oraliqning ixtiyoriy $x_1 < x_2$ nuqtalarini olamiz. Lagranj teoremasiga ko‘ra

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

bu yerda $x_1 < c < x_2$. Shartga ko‘ra (a,b) oraliqning har bir nuqtasida $f'(x) \geq 0$, u holda $f'(c) \geq 0$. Bundan tashqari $x_2 > x_1$. Shuning uchun $f(x_2) \geq f(x_1)$. Demak $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada kamaymas ekan. Bundan tashqari ixtiyoriy $x \in (x_1, x_2)$ uchun $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$. Bu qo‘sh tengsizliklardan hech bo‘lmaganda bittasi qat’iy tengsizlik ekanligini ko‘rsatamiz. Haqqiqattan ham, agar $f(x_1) = f(x_2)$ deb faraz qilsak, ixtiyoriy $x \in (x_1, x_2)$ uchun

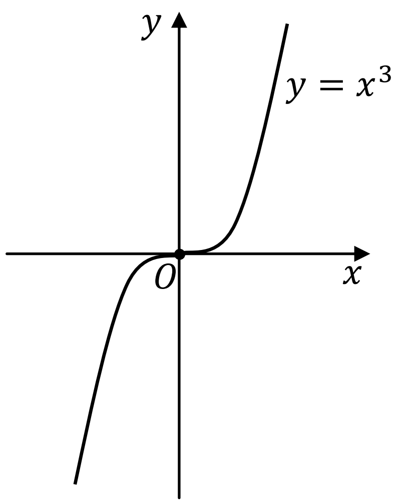
$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) = f(x_1),$$

ya’ni funksiya (x_1, x_2) oraliqda o‘zgarmas funksiya bo‘ladi, u holda barcha $x \in (x_1, x_2)$ uchun $f'(x) \equiv 0$. Teoremaning shartiga ko‘ra bunday bo‘lishi mumkin emas.

Shuning uchun $x_1 < x_2$ bo‘lganda $f(x_1) < f(x_2)$ bo‘ladi, ya’ni $f(x)$ funksiya (a,b) oraliqda o‘suvchi.

Shunday qilib funksiya o‘sishi uchun yetarli shartni isbotladik. Funksiya kamayishi uchun yetarli shart ham xuddi shu singari isbotlanadi.◄

Biroq $f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ kesmada o‘suvchiligidan (a,b) oraliqda $f'(x) > 0$ tengsizlikning o‘rinli bolishi kelib chiqmaydi.

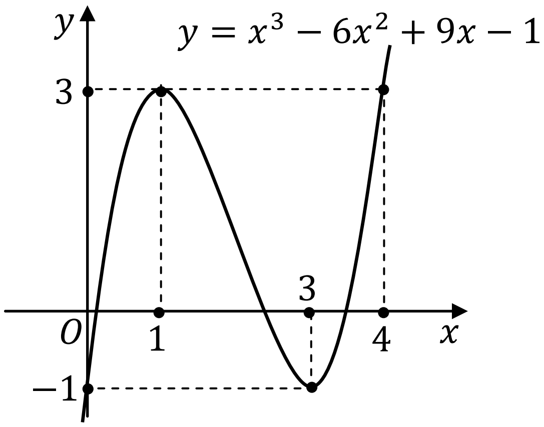


6.2-rasm

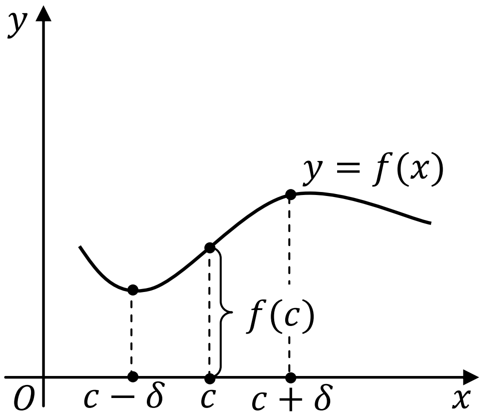
6.1-Misol. $f(x) = x^3$ funksiya $[-1, 1]$ kesmada o‘sadi, ammo uning $f'(x) = 3x^2$ hosilasi $x = 0$ nuqtada nolga aylanadi (6.2-rasm). ◄

6.2-Misol. $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$ funksiyaning o‘sish va kamayish oraliqlarini toping.

► Bu funksiya barcha $x \in \mathbf{R}$ nuqtalarda aniqlangan. Uning $y' = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$ hosilasi $(-\infty, 1)$ va $(3, +\infty)$ oraliqlarda musbat va $(1, 3)$ oraliqda manfiy. U holda 6.3-Teoremaga ko‘ra funksiya $(-\infty, 1)$ va $(3, +\infty)$ oraliqlarda o‘sadi va $(1, 3)$ oraliqda kamayadi (6.3-rasm).



6.3-rasm



6.4-rasm

6.4-Ta’rif. Agar c nuqtaning shunday $(c - \delta, c + \delta)$ atrofi topilib, bu oraliqdan olingan barcha $x < c$ uchun $f(x) < f(c)$ va barcha $x > c$ uchun $f(x) > f(c)$ tengsizliklar o‘rinli bo‘lsa, $f(x)$ funksiya c nuqtada o‘suvchi deyiladi (6.4-rasm).

Agar c nuqtaning biror atrofidan olingan barcha $x < c$ uchun $f(x) > f(c)$ va barcha $x > c$ uchun $f(x) < f(c)$ tengsizliklar o‘rinli bo‘lsa, $f(x)$ funksiya c nuqtada kamayuvchi deyiladi

Keyingi teoprema funksiya nuqtada o‘sishining va kamayishning yetarli shartini ifodalaydi.

6.3-Teorema. $f(x)$ funksiya $x = c$ nuqtada $f'(c)$ hosilaga ega bo‘lsin. Agar $f'(c) > 0$ bo‘lsa, u holda funksiya $x = c$ nuqtada o‘sadi; agar $f'(c) < 0$ bo‘lsa, $f(x)$ funksiya c nuqtada kamayadi.

► $f'(c) > 0$ bo‘lsin. Bu esa

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} > 0$$

degan ma’noni anglatadi. U holda shunday $\delta > 0$ son topiladiki, $0 < |\Delta x| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha Δx orttirmalar uchun

$$\frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} > 0$$

tengsizli o‘rinli bo‘ladi. Bundan esa Δx va $f(c + \Delta x) - f(c)$ orttirmalar bir xil ishorali ekanligi kelib chiqadi: agar $\Delta x < 0$ bo‘lsa, $f(c + \Delta x) - f(c) < 0$, ya’ni

$f(c+\Delta x) < f(c)$; $\Delta x > 0$ bo‘lsa, $f(c+\Delta x) - f(c) > 0$, ya’ni $f(c+\Delta x) > f(c)$. Bu esa ta’rifga ko‘ra $f(x)$ funksiya c nuqtada o‘suvchi ekanligini anglatadi.

Xuddi su singari mulohaza yuritib, agar $f'(c) < 0$ bo‘lsa, $f(x)$ funksiya c nuqtada kamayuvchi ekanligini isbotlash mumkin. ◄

6.2. Funksiyaning ekstremumi

$f(x)$ fiunksiya (a,b) oraliqda aniqlangan bo‘lsin.

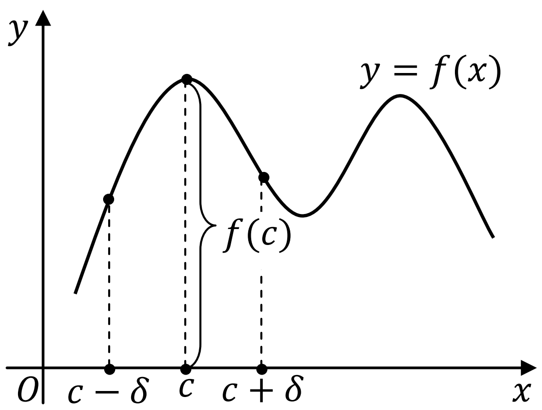
6.5-Ta’rif. Agar $c \in (a,b)$ nuqtaning shunday $(c-\delta, c+\delta)$ atrofi topilib, bu atrofdan olingan barcha x nuqtalarda

$$f(x) \le f(c) \tag{6.1}$$

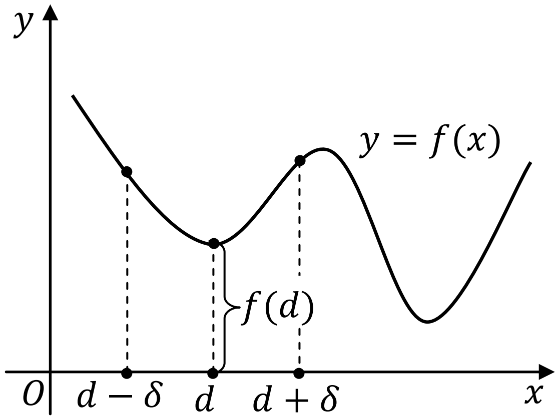
tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, c nuqta $f(x)$ funksiyaning *lokal maksimum* nuqtasi deb ataladi (6.5-rasm). Agar $d \in (a,b)$ nuqtaning shunday $(d-\delta, d+\delta)$ atrofi topilib, bu atrofdan olingan barcha x nuqtalarda

$$f(x) \ge f(d) \tag{6.2}$$

tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, d nuqta $f(x)$ funksiyaning *lokal minimum* nuqtasi deb ataladi (6.6-rasm). Agar (6.1) va (6.2) tensizliklar qat’iy tengsizliklar bo‘lsa qat’iy lokal maksimum va qat’iy lokal minimum haqida gapirish mumkin bo‘ladi.



6.5-rasm



6.6-rasm

Lokal maksimum nuqtadagi $f(c)$ qiymatni $f(x)$ funksiysiyaning lokal maksimumi va lokal minimum nuqtadagi $f(d)$ qiymatni lokal minimumi deb ataladi. Lokal maksimum va lokal minimum tushunchalar birlashtirilib lokal ekstremumlar deb ataladi. Keyingi satrlarda lokal va qat’iy so‘zlarini ishlatmasdan faqat maksimum, minimum va ekstremum so‘zlarini ishlatamiz, hamda qat’iy maksimum va qat’iy minimum hollarni qaraymiz. Agar funksiya c va d nuqtalarda mos ravishda maksimum va minimum qiymatlarga erishsa biz ularni $f(c) = f_{max}$ va $f(d) = f_{min}$ orqali yozamiz.

Funksiya ekstremumi mavjudligining zaruriy sharti.

6.4-Teorema. Agar $f(x)$ funksiya c nuqtada differensiallanuvchi va bu nuqtada ekstremumga erishsa, u holda $f'(c) = 0$ bo‘ladi.

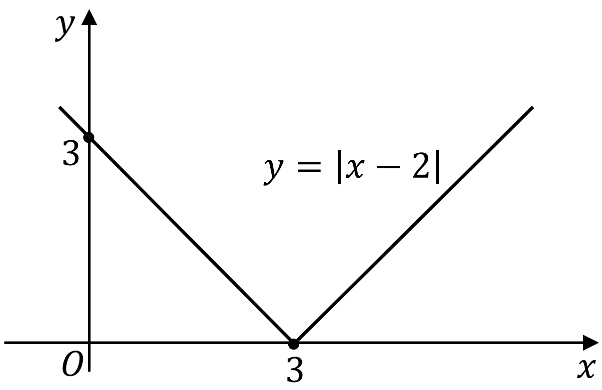
► Aniqlik uchun c maksimum nuqtasi bo‘lsin. 6.5-Ta’rifga ko‘ra c nuqtaning shunday $(c-\delta, c+\delta)$ atrofi topiladiki, $f(x)$ funksiya c nuqtada bu atrofning eng katta qiymatini qabul qiladi. U holda c nuqtada Ferma teoremasining shartlari bajariladi, shuning uchun bu nuqtada $f'(c) = 0$ bo‘ladi. c minimum nuqta bo‘lgan hol ham xuddi shu singari isbotlanadi. ◄

6.4-Teorema oddiy geometrik talqinga ega: differensiallanuvchi $f(x)$ funksiyaning c ekstremum nuqtasiga mos keluvchi $(c, f(c))$ nuqtada $y = f(x)$ egri chiziqda o‘tkazilgan urinma Ox o‘qqa parallel bo‘ladi.

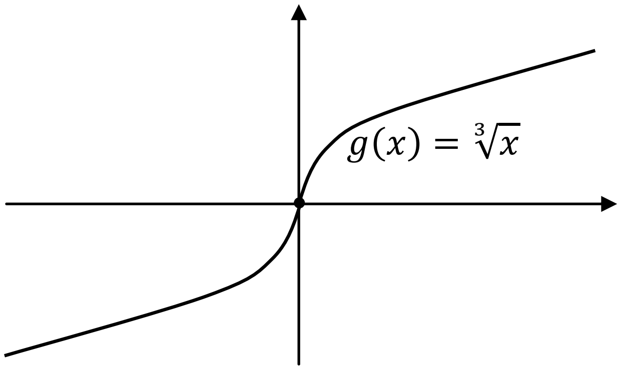
6.6-Ta’rif. $f(x)$ funksiyaning hosilasi nolga teng bo‘ladigan nuqtalar bu funksiyaning statsionar nuqtalari deb ataladi.

6.4-Teoremaga ko‘ra differensiallanuvchi funksiya ekstremumga o‘zining statsionar nuqtalaridagina erishishi mumkin ekan. Biroq hamma statsionar nuqtalarda ham funksiya ekstremumga erishavermaydi. Buni $f(x) = x^3$ funksiyaning misolida ko‘rish mumkin (6.2-rasm). Uning $f'(x) = 3x^2$ hosilasi $x = 0$ nuqtada nolga aylanadi, ya’ni bu nuqta uning statsionar nuqtasi bo‘ladi, ammo funksiya $x = 0$ nuqtada ekstremumga erishmaydi.

Endi ayrim nuqtalarda hosilasi cheksiz yoki mavjud bo‘lmagan funksiyalarni qaraymiz. Masalan $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ funksiya $x = 0$ nuqtada maksimumga erishadi, uning hosilasi esa bu nuqtada cheksiz (5.15-rasm). $y = |x-2|$ funksiya $x = 2$ nuqtada hosilaga ega emas, shunga qaramasdan funksiya bu nuqtada minimumga erishadi (6.7-arsm). Demak funksiyaning hosilasi cheksiz yoki mavjud bo‘lmagan nuqtalarda ham funksiya ekstremumga erishishi mumkin ekan. Ammo bu yerda ham hosilaning mavjud emasligi yoki cheksizga aylanishi ekstremum mavjudligiga kafolat bermaydi. Bunga $g(x) = \sqrt[3]{x},\ x \in \mathbf{R}$ funksiyani misol qilib ko‘rsatish mumkin. U $x = 0$ nuqtada cheksiz hosilaga ega, ammo funksiya mazkur nuqtada ekstremumga erishmaydi, chunki bu nuqtaning ixtiyoriy atrofida ham manfiy ham musbat qiymatlarni qabul qiladi (6.8-rasm).



6.7-rasm



6.8-rasm

Shunday qilib, ekstremum mavjudligining zaruriy shartini quyidagicha ifodalash mumkin: agar $f(x)$ funksiya $x = c$ nuqtada ekstremumga erishsa, u holda yoki funksiya bu nuqtada differensiallanuvchi va uning hosilasi $f'(c) = 0$ yoki $x = c$ nuqtada funksiya differensiallanuvchi emas.

6.7-Ta’rif. $f(x)$ funksiyaning o‘zi uzluksiz, uning hosilasi esa nol, cheksiz yoki umuman mavjud bo‘lmagan nuqtalarni, funksiyaning *kritik nuqtalari* deb ataladi.

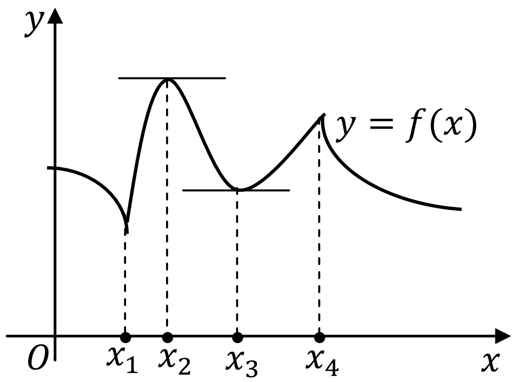
6.5-Teorema. $f(x)$ funksiya ekstremumga o‘zining faqat kritik nuqtalarida erishishi mumkin.

► $f(x)$ funksiya c nuqtada $f'(c) \neq 0$ hosilaga ega bo‘lsin. Aniqlik uchun $f'(c) > 0$ deb faraz qilamiz. U holda $f(x)$ funksiya c nuqtada o‘suvchi bo‘ladi. Shuning uchun shunday $\delta > 0$ son topiladiki, $(c - \delta, c)$ oraliqdan olingan barcha x uchun $f(x) < f(c)$ tengsizlik, $(c, c + \delta)$ oraliqdan olingan barcha x uchun esa $f(c) < f(x)$ tengsizlik o‘rinli bo‘ladi (6.4-rasm). Bundan $f(x)$ funksiyaning $f(c)$ qiymati eng katta yoki eng kichik bo‘ladigan c nuqtaning atrofi mavjud emas degan xulosaga kelish mumkin va shuning uchun c nuqta $f(x)$ funksiyaning maksimum nuqtasi ham, minimum nuqtasi ham bo‘lmaydi.

Xuddi shu singari mulohazalar bilan $f'(c) < 0$ holda ham ana shunday xulosaga kelish mumkin.

Shunday qilib, agar c nuqtada hosila $f'(c) \neq 0$ bo‘lsa, c nuqta $f(x)$ funksiyaning maksimum nuqtasi ham, minimum nuqtasi ham bo‘laolmas ekan. Demak, $f(x)$ funksiyaning ekstremumi $f'(x)$ hosila yoki nol bo‘ladigan yoki mavjud bo‘lmaydigan nuqtalardagina bo‘lishi mumkin ekan. ◄

Teoremaning geometrik talqini 6.9-rasmda keltirilgan. Grafigi bu rasmda tasvirlangan $y = f(x)$ funksiya x_1, x_2, x_3, x_4 nuqtalarda ekstremumga erishadi; bunda x_1 va x_4 nuqtalarda $f'(x)$ hosila mavjud emas, x_2 va x_3 nuqtalarda uning qiymati nolga teng.

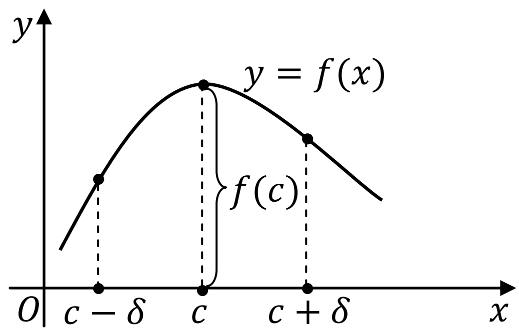


6.9-rasm

Funksiya ekstremumi mavjudligining yetarli sharti.

6.6-Teorema. $x = c$ nuqta $f(x)$ funksiyaning kritik nuqtasi bo‘lsin, ya’ni funksiyaning bu nuqtadagi hosilasi yoki $f'(c) = 0$ yoki mavjud emas, funksiyaning o‘zi esa c nuqtada uzluksiz. Shunday $\delta > 0$ son topilib, $(c - \delta, c)$ oraliqdan olingan barcha x uchun $f'(x) > 0$ va $(c, c + \delta)$ oraliqdan olingan barcha x uchun esa $f'(x) < 0$ tengsizlik o‘rinli bo‘lsin, ya’ni x o‘zgaruvchi c nuqta orqali o‘tganda $f'(x)$ hosila o‘zining ishorasini plyusdan minusga o‘zgartirsin. U holda $f(x)$ funksiya c nuqtada maksimumga erishadi, ya’ni $f(c) = f_{\max}$.

► Teorema shartiga ko‘ra $(c - \delta, c)$ oraliqda $f'(x) > 0$, shuning uchun $f(x)$ funksiya $[c - \delta, c]$ kesmada o‘sadi; $(c, c + \delta)$ oraliqda esa $f'(x) < 0$, shu sababli $f(x)$ funksiya $[c, c + \delta]$ kesmada kamayadi. Demak $f(x)$ funksiyaning $f(c)$ qiymati c nuqtaning $(c - \delta, c + \delta)$ oraliqdagi uning eng katta qiymati bo‘lar ekan (6.10-rasm), bu esa $f(x)$ funksiya c nuqtada maksimumga erishishini anglatadi. ◄

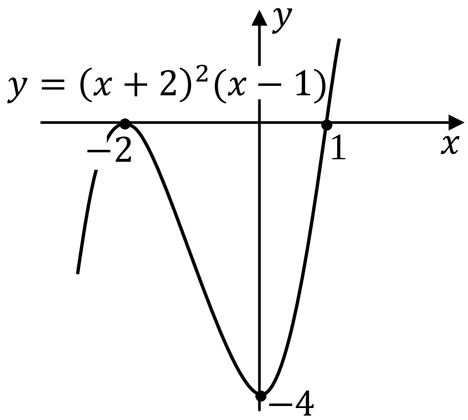


6.10-rasm

Xuddi shu singari quyidagi teoremani isbotlash mumkin.

6.7-Teorema. $x = c$ nuqta $f(x)$ funksiyaning kritik nuqtasi bo‘lsin, ya’ni funksiyaning bu nuqtadagi hosilasi yoki $f'(c) = 0$ yoki mavjud emas, funksiyaning o‘zi esa c nuqtada uzluksiz. Shunday $\delta > 0$ son topilib, $(c - \delta, c)$ oraliqdan olingan barcha x uchun $f'(x) < 0$ va $(c, c + \delta)$ oraliqdan olingan barcha x uchun esa $f'(x) > 0$ tengsizlik o‘rinli bo‘lsin, ya’ni x o‘zgaruvchi c nuqta orqali o‘tganda $f'(x)$ hosila o‘zining ishorasini minusdan plyusga o‘zgartirsin. U holda $f(x)$ funksiya c nuqtada minimumga erishadi, ya’ni $f(c) = f_{\min}$.

6.3-Misol. $f(x) = (x + 2)^2(x - 1)$ funksiyaning monotonlik intervallarini va ekstremumlarini toping.



6.11-rasm

► Funksiya **R** son o‘qida aniqlangan. Uning hosilasi $f'(x) = 2(x + 2)(x - 1) + (x + 2)^2 = 3x(x + 2)$, ya’ni ikkita $x_1 = -2$ va $x_2 = 0$ statsionar nuqtaga ega. Ular son o‘qini uchta oraliqqa ajratadi: $(-\infty, -2)$, $(-2, 0)$, $(0, +\infty)$ va ualrning har birida hosila o‘zining ishorasini saqlaydi, ya’ni 6.3-Teoremaga ko‘ra funksiya bu oraliqlarda monoton. Bu monotonliklar quyidagilardan iborat:

$(-\infty, -2)$ oraliqda $f'(x) > 0 \Rightarrow$ funksiya bu oraliqda o‘sadi;

$(-2, 0)$ oraliqda $f'(x) < 0 \Rightarrow$ funksiya bu oraliqda kamayadi;

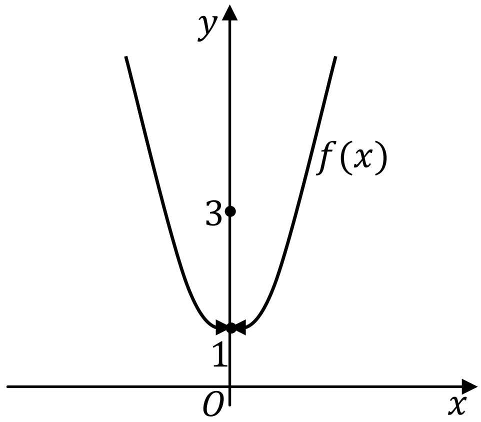
$(0, +\infty)$ oraliqda $f'(x) > 0 \Rightarrow$ funksiya bu oraliqda o‘sadi.

6.6 va 6.7-Teoremalarga ko‘ra $f(x)$ funksiya $x_1 = -2$ nuqtada maksimumga, $x_2 = 0$ nuqtada esa minimumga erishadi: $f_{\max} = f(-2) = 0$ va $f_{\min} = f(0) = -4$. Funksiyaning grafigi 6.11-rasmda tasvirlangan.

6.4-Misol. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \neq 0, \\ 3, & x = 0 \end{cases}$ tarkibli funksiyani ekstremumga tahlil qiling.

► Funksiyaning $f'(x)$ hosilasi $x = 0$ nuqtadan boshqa hamma nuqtalarda mavjud va $x = 0$ nuqtadan o‘tishda hosila minusdan plyusga o‘tadi. Shunga qaramasdan funksiya $x = 0$ nuqtadan maksimumga ham minimumga ham erishmaydi. Buni bevosita 6.12-rasmda ham ko‘rish mumkin. 6.7-Teoremani bu funksiyaga qo‘llab bo‘lmaydi, chunki funksiya $x = 0$ nuqtada uzilishga ega. ◄

Shunday qilib, ekstremum mavjudligining yetarli sharti berilgan 6.6 va 6.7-Teoremalarni kritik nuqtada uzilishga ega bo‘lgan funksiyaga qo‘llab bo‘lmas ekan.



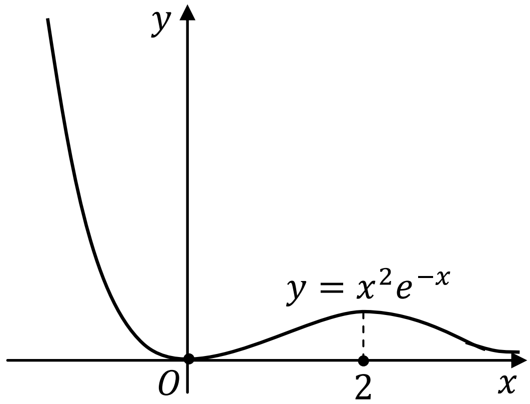
6.12-rasm

Funksiya ekstremumini topishning 1-qoidasi. $f(x)$ funksiyaning maksimum minimum nuqtalarini topish uchun:

1) funksiyaning $f'(x)$ hosilasini topib, uni nolga tenglashtirib, hosil bo‘lgan $f'(x) = 0$ tenglamani yechish kerak;

2) $f'(x)$ hosila mavjud bo‘lmaydigan nuqtalarni topish kerak. Bu nuqtalar va $f'(x) = 0$ tenglamaning ildizlari $f(x)$ funksiyaning kritik nuqtalari bo‘ladi;

3) har bir kritik nuqtaning chap va o‘ng tomonlarida $f'(x)$ hosilaning ishoralarini tekshirish kerak. Agar x o‘zgaruvchi $x = c$ kritik nuqtadan o‘tishda $f'(x)$ hosila o‘zining ishoralarini plyusdan minusga o‘zgartirsa, $f(x)$ funksiya c nuqtada maksimumga erishadi; agar $f'(x)$ hosilaning ishorasi minusdan plyusa o‘zgarsa, $f(x)$ funksiya c nuqtada minimumga erishadi. Agar x o‘zgaruvchi $x = c$ kritik nuqtadan o‘tishda $f'(x)$ hosila o‘zining ishorasini o‘zgartirmasa, $f(x)$ funksiya c nuqtada maksimumga ham minimumga ham erishmaydi. ◄



6.13-rasm

6.5-Misol. $y = x^2e^{-x}$ funksiyani ekstremumga tekshiring.

► 1) Hosilani topamiz: $y' = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = e^{-x}(2 - x)x$.

2) y' hosilani nolga tenglashtirib funksiyaning kritik nuqtalarini topamiz: $x = 0$, $x = 2$.

3) Har bir kritik nuqtadan chapda va o‘ngda hosilaning ishoralarini tekshiramiz:

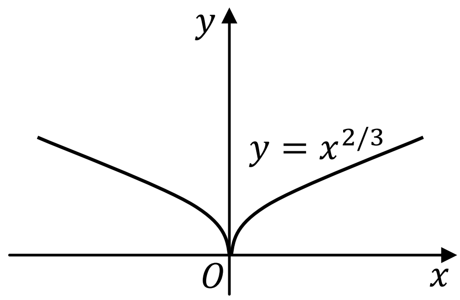
$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, +\infty)$
$y' < 0$	$y' > 0$	$y' < 0$
$-$	$+$	$-$

Shunday qilib $x = 0$ minimum nuqta, $x = 2$ esa maksimum nuqta bo‘lar ekan (6.13-rasm). ◄

6.6-Misol. $y = x^{2/3}$ funksiyani ekstremumga tekshiring.

► 1) Hosilani topamiz:

$$y' = \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}.$$



6.14-rasm

2) Hosila hech qayerda nolga aylanmaydi, ammo $x = 0$ nuqtada mavjud emas:

$$\lim_{x\to 0} y'(x) = \frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \infty.$$

3) $x = 0$ nuqtadan chapda va o‘ngda y' hosilaning ishoralarini tekshiramiz:

$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
$y' < 0$	$y' > 0$
$-$	$+$

Shunday qilib $x = 0$ nuqta funksiyaning minimum nuqtasi ekan (6.14-rasm).

Funksiyani ekstremumga yuqori tartibli hosilalar yordamida tekshirish

Keyingi teorema ham ekstremumning yetarlilik shartini ifodalaydi.

6.8-Teorema. $x = c$ nuqtada $f(x)$ funksiya birinchi va ikkinchi tartibli hosilalarga ega va bunda $f'(c) = 0$ va $f''(c) \neq 0$ bo‘lsin. Agar $f''(c) < 0$ bo‘lsa, $f(x)$ funksiya c nuqtada maksimumga, $f''(c) > 0$ bo‘lsa, minimumga erishadi.

► $f'(c) = 0$ bo‘lganligi uchun c nuqta berilgan funksiyaning kritik nuqtasi bo‘ladi. $f''(c) < 0$ bo‘lsin. Bundan $f'(x)$ funksiya c nuqtada kamayishi ekanligi kelib chiqadi, ya’ni c nuqtaning shunday $(c - \delta, c + \delta)$ atrofi topiladiki, $(c - \delta, c)$ oraliqdan olingan barcha x uchun $f'(x) > f'(c) = 0$ va $(c, c + \delta)$ oraliqdan olingan barcha x uchun $f'(x) < f'(c) = 0$ tengsizliklar o‘rinli bo‘ladi. Shunday qilib x o‘zgaruvchi c nuqta orqali o‘tganda $f'(x)$ hosila o‘z ishorasini plyusdan minusga o‘zgartirar ekan. Demak, $f(x)$ funksiya c nuqtada maksimumga erishadi.

Shunga o‘xshash mulohazalar bilan, agar c kritik nuqtada ikkinchi tartibli hosila $f''(c) > 0$ bo‘lsa, $f(x)$ funksiya c nuqtada minimumga erishishini isbotlash mumkin. ◄

Bu yerdan funksiyaning ekstremumini topishning ikkinchi qoidasini hosil qilamiz.

Funksiya ekstremumini topishning 2-qoidasi. $f(x)$ funksiyaning maksimum va minimum nuqtalarini topish uchun, dastlab uning kritik nuqtalari topiladi. Bu 1-qoidadagi singari bajariladi. So‘ngra $f''(x)$ ikkinchi tartibli hosila topiladi. Agar ikkinchi tartibli hosila c kritik nuqtada $f''(c) < 0$ bo‘lsa, $f(x)$ funksiya bu nuqtada maksimumga, agar $f''(c) > 0$ bo‘lsa, funksiya bu nuqtada minimumga erishadi.

Agar c kritik nuqtada ikkinchi taribli hosila ham nolga aylansa, funksiyani ekstremumga tekshirishga yuqori tartibli hosilalarni jalb qilish mumkin:

6.9-Teorema. $f(x)$ funksiya $x = c$ nuqtada n marta differensiallanuvchi va bunda $(n-1)$-tartibgacha barcha hosilalar bu nuqtada nolga aylansin: $f'(c) = f''(c) = \cdots = f^{(n-1)}(c) = 0$ va $f^{(n)}(c) \neq 0$ bo‘sin. U holda, agar n juft bo‘lsa funksiya c nuqtada ekstremumga erishadi va $f^{(n)}(c) < 0$ bo‘lsa $f(c) = f_{\max}$; $f^{(n)}(c) < 0$ bo‘lsa $f(c) = f_{\min}$ bo‘ladi.

► $f(x)$ funksiyani c nuqtaning $U_1(c)$ atrofida (5.84) Peano qoldiq hadli $(n-1)$-tartibli Teylor formulasi orqali tasvirlaymiz:

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots +$$

$$+\frac{f^{(n-1)}(c)}{(n-1)!}(x-c)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c) + \alpha(x)}{n!}(x-c)^n,$$

bu yerda $\alpha(x)$ funksiya c nuqtada cheksiz kichik. Teoremaning shartiga ko‘ra $f'(c) = f''(c) = \cdots = f^{(n-1)}(c) = 0$, Teylor formulasini

$$f(x) - f(c) = \frac{f^{(n)}(c) + \alpha(x)}{n!}(x-c)^n \tag{6.3}$$

ko‘rinishda yozish mumkin. n juft bo‘lsa ixtiyoriy $x \in U_1(c), x \neq c$ uchun $(x - c)^n > 0$ bo‘ladi. $\alpha(x)$ funksiya c nuqtada cheksiz kichik bo‘lganligi uchun

$$\lim_{x \to c} \frac{f^{(n)}(c) + \alpha(x)}{n!} = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} \neq 0$$

c nuqtada noldan farqli limitga ega bo‘lgan funksiyaning ishorasi c nuqtaning kichik atrofida o‘zgarmas bo‘lganligi uchun c nuqtaning shunday $U_2(c)$ atrofi mavjudki, bu atrofda $f^{(n)}(c) + \alpha(x)$ funksiyaning ishorasi $f^{(n)}(c)$ qiymatning ishorasi bilan bir xil bo‘ladi. U holda (6.3) tenglikka ko‘ra $U(c) = U_1(c) \cap U_2(c)$ atrofda $f(x) - f(c)$ ayirmaning ishorasi $f^{(n)}(c)$ qiymatning ishorasi bilan bir xil bo‘ladi. Boshqacha qilib aytganda, agar $f^{(n)}(c) < 0$ bo‘lsa ixtiyoriy $x \in U(c)$ uchun $f(x) < f(c)$ bo‘ladi va 6.5-Ta’rifga ko‘ra $f(c) = f_{\max}$; agar $f^{(n)}(c) > 0$ bo‘lsa ixtiyoriy $x \in U(c)$ uchun $f(x) > f(c)$ bo‘ladi va 6.5-Ta’rifga ko‘ra $f(c) = f_{\min}$. ◄

6.9-Teorema isbotining borishidan ko‘rish mumkinki, n toq bo‘lganda (6.3) tenglikdagi $(x - c)^n$ ko‘paytuvchi x o‘zgaruvchi c nuqta orqali o‘tganda ishorasini o‘zgartiradi va shuning uchun c nuqta $f(x)$ funksiyaning ekstremum nuqtasi bo‘lmaydi. Shunday qilib, noldan farqli bo‘ladigan hosila n tartibining juftligi $f(x)$ funksiyaning c nuqtqda ekstremumi mavjudligi uchun nafaqat yetarli shart, balki zaruriy shart ham ekan.

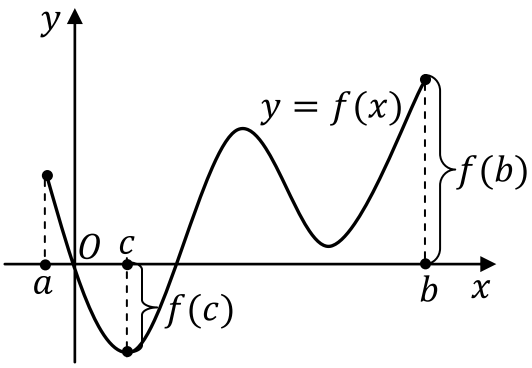
6.7-Misol. $y = x^m, m \in \mathbf{N}$ funksiyaning $m - 1$ tartibgacha bo‘lgan barcha hosilalar $x = 0$ nuqtada nolga teng va $f^{(m)}(0) = m! > 0$. Bunda m juft bo‘lsa $x = 0$ bu funksiyaning minimum nuqtasi bo‘ladi, m toq bo‘lsa, $y = x^m$ funksiya $x = 0$ nuqtada ekstremumga ega emas. ◄

Funksiyaning kesmadagi eng katta va eng kichik qiymati. Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz bo‘lsa, Veyyershtrassning ikkinchi teoremasiga ko‘ra funksiya bu kesmada o‘zining eng katta va eng kichik qiymatlariga erishadi.

Agar $f(x)$ funksiya o‘zining eng katta M qiymatini $[a, b]$ kesmaning ichki c nuqtasida qabul qilsa, $M = f(c)$ qiymat $f(x)$ funksiyaning lokal maksimumi bo‘ladi.

Biroq $f(x)$ funksiya o‘zining eng katta M qiymatiga $[a, b]$ kesmaning chetki nuqtalarida ham erishishi mumkin.

Shuning uchun $[a,b]$ kesmada uzluksiz $f(x)$ funksiyaning eng katta M qiymatini topish uchun $f(x)$ funksiyaning (a,b) oraliqdagi barcha maksimumlarini topish kerak, $[a,b]$ kesmaning chetki nuqtalaridagi $f(a)$ va $f(b)$ qiymatlarini hisoblab va ular orasidan eng kattasini tanlash kerak. $f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ kesmadagi m eng kichik qiymati bu funksiyaning (a,b) oraliqdagi barcha minimumlari va $f(a)$ va $f(b)$ qiymatlar orasidagi eng kichigi bo‘ladi.



6.15-rasm

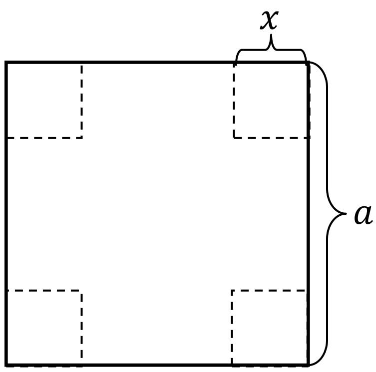
Grafigi 6.15-rasmda tasvirlangan $f(x)$ funksiya uchun $M=f(b)$ va $m=f(c)$ bo‘ladi.

6.8-Misol. Tomoni a qiymatga teng bo‘lgan kavadrat shaklidagi temir tunukaning burchaklaridan teng kvadratlar kesib olinib va chetlari qayrilib to‘g‘ri burchakli ochiq quti yasaladi. Eng katta hajmli qutini qanday hosil qilish mumkin?

► x o‘zgaruvchining funksiyasi sifatida qutining v hajmi

$$v(x)=x(a-2x)^2, \qquad 0\le x\le \frac{a}{2}$$

formula bilan hisoblanadi (6.16-rasm). Ana shu $v(x)$ funksiyaning eng katta qiymatini topishimiz kerak. Birinchi tartibli hosilasini topamiz:



6.16-rasm

$$v'(x)=(a-2x)^2-4x(a-2x)=(a-2x)(a-6x).$$

Bu yerda $v(x)$ funksiyaning kritik nuqtalarini topamiz: $x_1=a/6$ va $x_2=a/2$. $(a,a/2)$ oraliqda $x_1=a/6$ kritik nuqta yotadi.

$v(x)$ funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasini topamiz

$$v''(x)=-2(a-6x)-6(a-2x)=24x-8a.$$

va uning $x_1=a/6$ nuqtadagi qiymatini hisoblaymiz:

$$v''\left(\frac{a}{6}\right)=-4a<0.$$

Demak $v(x)$ funksiya $x=a/6$ nuqtada maksimumga erishadi:

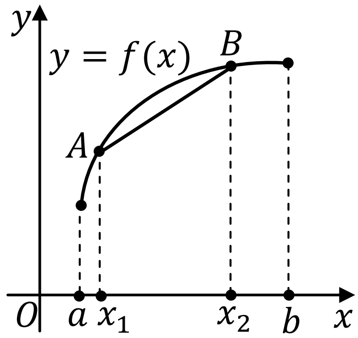
$$v\left(\frac{a}{6}\right)=\frac{a}{6}\left(a-2\cdot\frac{a}{6}\right)^2=\frac{a}{6}\left(\frac{2}{3}a\right)^2=\frac{2a^3}{27}.$$

$[0,a/2]$ kesmaning chetki nuqtalarida $v(0)=v\left(\frac{a}{2}\right)=0$ bo‘ladi.

Shunday qilib, agar $x=a/6$ deb olsak quti eng katta hajmli bo‘lar ekan va uning hajmi $\frac{2a^3}{27}$ bo‘ladi. ◄

6.3. Funksiya grafigining qavariqligi va botiqligi

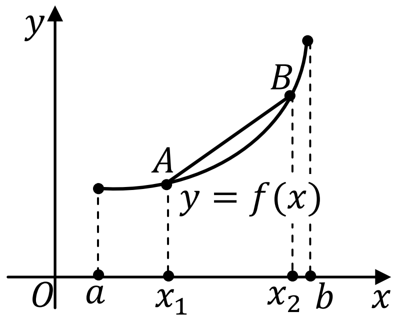
Egri chiziqning qavariqligi va botiqligi. $y=f(x)$ funksiya (a,b) oraliqda berilgan va $a<x_1<x_2<b$ bo‘lsin. $f(x)$ funksiya garfigida yotgan $A(x_1,f(x_1))$ va $B(x_2,f(x_2))$ nuqtalar orqali to‘g‘ri chiziq o‘tkazamiz.



6.17-rasm

Bu to‘g‘ri chiziqning A va B nuqtalar orasidagi kesmasini AB vatar deb ataymiz.

6.8-Ta’rif. Ixtiyoriy x_1 va $x_2, a<x_1<x_2<b$ nuqtalar uchun $A(x_1,f(x_1))$ va $B(x_2,f(x_2))$ nuqtalarni tutashtiruvchi AB vatar $y=f(x)$ egri chiziqdan pastda yotsa, bu egri chiziq (a,b) oraliqda qavariq deyiladi (6.17-rasm). Agar AB vatar $y=f(x)$ egri chiziqdan yuqorida yotsa, bu egri chiziqni biz (a,b) oraliqda botiq deb ataymiz (6.18-rasm). Shu bilan bir qatorda $f(x)$ funksiyaning o‘zini ham (a,b) oraliqda qavariq (botiq) deb ataymiz.



6.18-rasm

Endi yuqorida aytilgan A va B nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasini tuzamiz.

Bu to‘g‘ri chiziq tenglamasini berilgan ikki nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi sifatida

$$\frac{y-f(x_1)}{f(x_2)-f(x_1)}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1} \qquad (6.4)$$

yoki

$$y = \frac{f(x_2)(x - x_1) + f(x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1} \tag{6.5}$$

ko‘rinishda yozish mumkin. (6.5) tenglamaning o‘ng tomonini $l(x)$ orqali belgilab, uni $y = l(x)$ ko‘rinishda yozamiz. U holda 6.8-Ta’rifga ko‘ra qavariq egri chiziq uchun

$$l(x) < f(x) \tag{6.6}$$

va botiq egri chiziq uchun

$$l(x) > f(x) \tag{6.7}$$

tengsizlikni yozish mumkin.

Shunday qilib, 6.8-Ta’rifni (6.6) va (6.7) tengsizliklar orqali ifodalaymiz.

6.9-Ta’rif. Ixtiyoriy x_1 va $x_2, a < x_1 < x_2 < b$ nuqtalar uchun (6.6) tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, $y = f(x)$ egri chiziq (a, b) oraliqda qavariq, (6.7) tengsizlik bajarilsa, bu egri chiziqni (a, b) oraliqda botiq deb ataymiz.

Funksiya grafigi qavariq (botiq) bo‘ladigan har qanday oraliq funksiyaning qavariqlik (botiqlik) oralig‘i deb ataladi.

6.10-Teorema (qavariqlik va botiqlikning yetarli sharti). Agar $f(x)$ funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi ixtiyoriy $x \in (a, b)$ uchun $f''(x) < 0$ $(f''(x) > 0)$ bo‘lsa, funksiya bu oraliqda qavariq (botiq) bo‘ladi.

► Agar $a < x_1 < x_2 < b$ bo‘lsa, u holda (6.15) tenglikka ko‘ra

$$l(x) - f(x) = \frac{f(x_2)(x - x_1) + f(x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1} - f(x) =$$

$$= \frac{f(x_2)(x - x_1) + f(x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1} - f(x)\frac{(x - x_1) + (x_2 - x)}{x_2 - x_1} =$$

$$= \frac{[f(x_2) - f(x)](x - x_1) - [f(x) - f(x_1)](x_2 - x)}{x_2 - x_1}.$$

Kvadrat qavslar ichidagi ayirmalar uchun 5.12-Lagranj teoremasini qo‘llab

$$l(x) - f(x) = \frac{f'(d)(x_2 - x)(x - x_1) - f'(c)(x - x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1} =$$

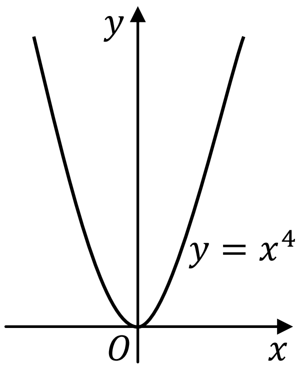
$$= \frac{[f'(d) - f'(c)](x - x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1},$$

tenglikni yozish mumkin, bu yerda $x_1 < c < x < d < x_2$. Bu yerda ham $f'(c) - f'(d)$ ayirmaga 5.12-Lagranj teoremasini qo‘llaymiz. U holda

$$l(x) - f(x) = \frac{f''(s)(d-c)(x-x_1)(x_2-x)}{x_2-x_1}, \qquad c < s < d.$$

Bu yerda tenglikning o‘ng tomonidagi ifodaning ishorasi $f''(s)$ ikkinchi tartibli hosila qiymatining ishorasi bilan bir xil (qolgan ko‘paytuvchilar musbat ishorali). Shuning uchun (a, b) oraliqda agar $f'' < 0$ bo‘lsa, $l(x) < f(x)$, ya’ni $f(x)$ funksiya qavariq; agar $f'' > 0$ bo‘lsa, $l(x) > f(x)$, ya’ni $f(x)$ funksiya botiq bo‘ladi. ◄

Ikkinchi tartibli hosilaning o‘zgarmas ishoralilik sharti qavariqlik va botiqlik uchun faqat yetarli shart, ammo zaruriy shart emas: qavariqlik va botiqlik intervallarida ikkinchi tartibli hosila nolga ham aylanishi mumkin. Masalan, $y = x^4$ funksiya **R** son o‘qida botiq, biroq uning $y'' = 12x^2$ ikkinchi tartibli hosilasi $x = 0$ nuqtada nolga aylanadi (6.19-rasm).



6.19-rasm.

6.9-Misol. $f(x) = \operatorname{arctg} x$ funksiyaning qavariqlik va botiqlik intervallarini toping.

► Bu funksiya **R** son o‘qida aniqlangan va cheksiz marta differensiallanuvchi. Birinchi va ikkinchi tartibli hosilalarni hisoblaymiz:

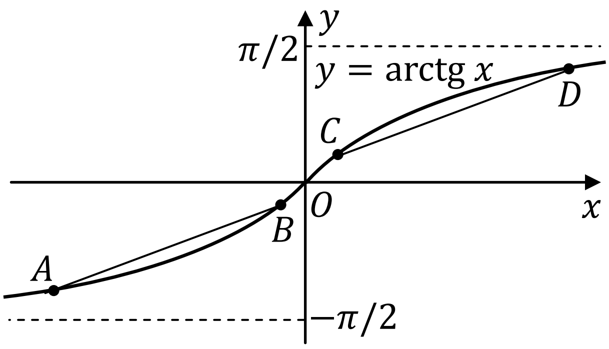
$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2},$$

$$(\operatorname{arctg} x)'' = \left(\frac{1}{1+x^2}\right)' = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}.$$

Ko‘rinib turibdiki $x < 0$ bo‘lsa $(\operatorname{arctg} x)'' > 0$, ya’ni funksiya $(-\infty, 0)$ oraliqda botiq, $x > 0$ bo‘lsa $(\operatorname{arctg} x)'' < 0$, ya’ni funksiya $(0, +\infty)$ oraliqda qavariq (6.20-rasm).◄

6.10-Teoremaning va noldan farqli limitga ega funksiyaning ishorasi o‘zgarmaslik xossasining natijasi quyidagi tasdiq bo‘ladi.

6.1-Tasdiq. Agar $f(x)$ funksiyaning $f''(x)$ ikkinchi tartibli hosilasi c



6.20-rasm

nuqtada uzluksiz va manfiy (musbat) ishorali bo‘lsa, u holda c nuqtaning shunday $(c-\delta, c+\delta)$ atrofi topiladiki, bu atrofda funksiya qavariq (botiq) bo‘ladi.

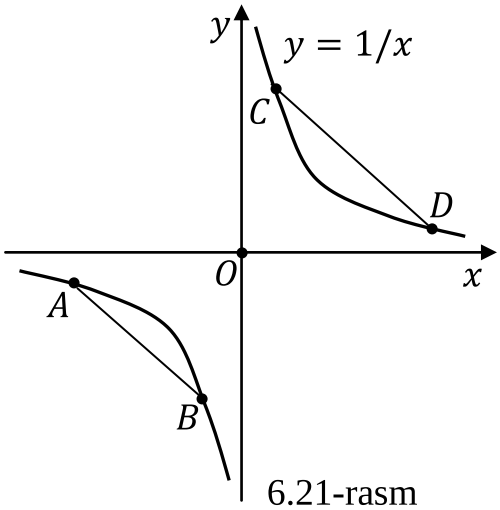
Egri chiziqning burilish nuqtasi.

6.10-Ta’rif. $f(x)$ funksiya c nuqtaning biror atrofida aniqlangan va uzluksiz bo‘lsin. Agar x o‘zgaruvchi c nuqtadan o‘tishda $f(x)$ funksiyaning qavariqligi botiqlikka yoki botiqligi qavariqlikka o‘tsa, c nuqta funksiyaning burilish nuqtasi, $(c, f(c))$ nuqta esa $f(x)$ funksiya grafigining burilish nuqtasi deb ataladi.

6.10-Misol. 6.2-rasmda $f(x)=x^3$ funksiyaning grafigi va 6.8-rasmda esa unga teskari $g(x)=\sqrt[3]{x}$ funksiyaning grafigi keltirilgan. $g(x)$ funksiyaning hosilasi $x=0$ nuqtada cheksiz. $x=0$ nuqta ikkala funksiya uchun ham burilish nuqtasi bo‘ladi. Haqiqattan ham, $x<0$ bo‘lsa $f''(x)=6x<0$ va $x>0$ bo‘lsa $f''(x)>0$. Xuddi shunday, $x<0$ bo‘lsa $g''(x)=-2x^{-5/3}/9<0$ va $x>0$ bo‘lsa $g''(x)>0$. 6.10-Teoremani inobatga olsak x o‘zgaruvchi $x=0$ nuqtadan o‘tishda ikkala funksiyada ham qavariqlik bilan botiqlik o‘rinlarini almashishadi: $f(x)$ funksiyada qavariqlik botiqlikka, $g(x)$ funksiyada esa botiqlik qavariqlikka o‘tadi.◄

6.11-Misol. $f(x)=\begin{cases}1/x, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$ funksiya $x=0$ nuqtada cheksiz hosilaga ega bo‘ladi (6.21-rasm) va x o‘zgaruvchi bu nuqtadan o‘tganda qavariqlik botiqlikka o‘tadi, chunki agar $x<0$ bo‘lsa $f''(x)=2/x^3<0$ va $x>0$ bo‘lsa $f''(x)>0$ bo‘ladi. Biroq $x=0$ nuqtada funksiya uzilishga ega va shuning uchun $x=0$ nuqta bu funksiya uchun burilish nuqtasi bo‘lmaydi. ◄

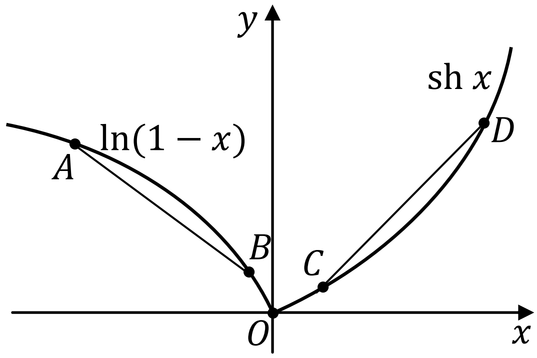
6.12-Misol. $f(x)=x^{2/3}$ funksiya (6.14-rasm) uchun $x=0$ burilish nuqtasi bo‘lmaydi, chunki x o‘zgaruvchi bu nuqta orqali o‘tganda funksiyaning qavariqligi botiqlikka o‘tmasdan, qavariqligicha qoladi. Haqiqattan ham, $x<0$ bo‘lganda ham, $x>0$ bo‘lganda ham $f''(x)=$



6.21-rasm

$-2x^{-4/3}/9 < 0$ bo‘ladi. Funksiya grafigi $(0,0)$ nuqtada “burilmasdan” balki urinma orqali “orqaga qaytadi”. Bu holda uni funksiyaning qaytish nuqtasi (ba’zan o‘tkirlanish nuqtasi) deb ataladi.

6.12-Misol. $f(x) = \begin{cases} \ln(1-x), & x < 0, \\ \text{sh}\, x, & x \geq 0 \end{cases}$ funksiya x argument $x = 0$ nuqtadan o‘tishda qavariqlikdan botiqlikka o‘tadi (8.22-rasm), chunki $x < 0$ bo‘lganda $f''(x) = -1/(1-x)^2 < 0$ va $x > 0$ bo‘lganda $f''(x) = \text{sh}\, x > 0$. Berilgan funksiyaning $x = 0$ nuqtada hosilasi mavjud bo‘lmasligiga qaramasdan, $x = 0$ nuqta funksiyaning burilish nuqtasi bo‘ladi. Bu yerda chap va o‘ng hosilalar teng emas: $f'(x-0) = -1 \neq f'(x+0) = 1$. ◄



6.22-rasm

6.11-Teorema (burilish nuqtasining zaruriy sharti). Funksiyaning burilish nuqtasida ikkinchi tartibli hosila mavjud va uzluksiz bo‘lsa, u nolga teng.

► Teskarisidan farz qilaylik, ya’ni $f(x)$ funksiyaning c burilish nuqtasidagi ikkinchi tartibli hosilasi noldan farqli bo‘lsin, ya’ni masalan $f''(c) < 0$ ($f''(c) > 0$) bo‘lsin. U holda 6.2-tasdiqga ko‘ra c nuqtaning shunday $(c-\delta, c+\delta)$ atrofi topiladiki, bu atrofda $f(x)$ funksiya qavariq (botiq) bo‘ladi. Bunday bo‘lishi mumkin emas, chunki c nuqta bir vaqtning o‘zida ham qavariqlik (botiqlik), ham burilish nuqtasi bo‘lmaydi. Ana shu zidlik teoremani isbotlaydi. ◄

6.12-Teorema (burilish nuqtasining birinchi yetarli sharti). Agar c nuqtada uzluksiz $f(x)$ funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi $f''(c) = 0$ yoki $f''(c)$ mavjud bo‘lmasa va x o‘zgaruvchi c nuqtadan o‘tishda $f''(x)$ hosila o‘z ishorasini o‘zgartirsa, c nuqta $f(x)$ funksiyaning burilish nuqtasi bo‘ladi.

► 1) $x < c$ bo‘lganda $f''(x) < 0$ va $x > c$ bo‘lganda $f''(x) > 0$ bo‘lsin. 6.10-Teoremaga ko‘ra $x < c$ bo‘lganda $f(x)$ qavariq va $x > c$ bo‘lganda esa botiq bo‘ladi. Demak 6.10-Ta’rifga ko‘ra $x = c$ nuqta $f(x)$ funksiyaning burilish nuqtasi bo‘ladi.

2) $x < c$ bo‘lganda $f''(x) > 0$ va $x > c$ bo‘lganda $f''(x) < 0$ bo‘lsin. 6.10-Teoremaga ko‘ra $x < c$ bo‘lganda $f(x)$ botiq va $x > c$ bo‘lganda esa qavariq bo‘ladi. Demak 6.10-Ta’rifga ko‘ra $x = c$ nuqta $f(x)$ funksiyaning burilish nuqtasi bo‘ladi. ◄

6.13-Teorema (burilish nuqtasining ikkinchi yetarli sharti). Agar biror c nuqtada $f(x)$ funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi nolga teng: $f''(c) = 0$ va uchinchi tartibli hosilasi noldan farqli: $f'''(c) \neq 0$ bo‘lsa, c nuqta $f(x)$ funksiyaning burilish nuqtasi bo‘ladi.

► Teoremaning shartidan $f(x)$ funksiya c nuqtaning biror $U_1(c)$ atrofida kamida ikki marta differensiallanuvchi ekanligi kelib chiqadi. $f''(x)$ funksiyani (5.84) Piano qoldiq hadli birinchi tartibli Teylor formulasi bilan tasvirlaymiz:

$$f''(x) = f''(c) + \frac{f'''(c) + \alpha(x)}{1!}(x - c) = \big(f'''(c) + \alpha(x)\big)(x - c),$$

bu yerda $\alpha(x)$ funksiya $x = c$ nuqtada cheksiz kichik.

$$\lim_{x\to c}\alpha(x) = 0, \qquad \lim_{x\to c}(f'''(c) + \alpha(x)) = f'''(c) \neq 0$$

bo‘lganligi uchun noldan farqli limitga ega funksiyaning o‘zgarmas ishoralilik xossasiga ko‘ra c nuqtaning shunday $U_2(c)$ atrofi topiladiki, bu atrofda $f'''(c) + \alpha(x)$ yig‘indining ishorasi $f'''(c)$ qo‘shiluvchisining ishorasi bilan bir xil bo‘ladi. U holda c nuqtaning $U(c) = U_1(c) \cap U_2(c)$ atrofida x o‘zgaruvchi c nuqta orqali o‘tganda $f''(x)$ funksiya $(x - c)$ ko‘paytuvchi bilan o‘z ishorasini o‘zgartiradi. Demak 6.12-Teoremaga ko‘ra c nuqta $f(x)$ funksiyaning burilish nuqtasi bo‘ladi.◄

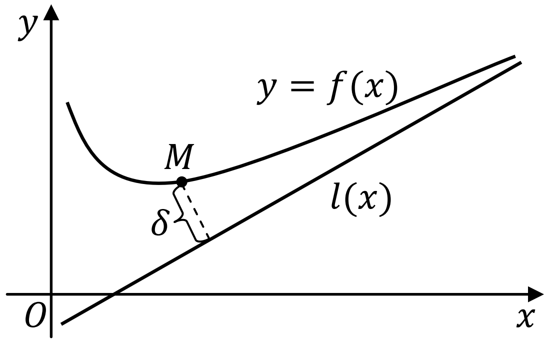
6.4. Funksiya grafigining asimptotalari

Agar $y = f(x)$ tenglama bilan berilgan egri chiziqning biror bo‘lagi cheksizlikka intilsa, bu egri chiziqni cheksiz bo‘lakli egri chiziq deb ataymiz.

6.11-Ta’rif. Cheksiz bo‘lakli $y = f(x)$ egri chiziqning asimptotasi deb shunday $l(x)$ to‘g‘ri chiziqqa aytamizki, bunda $l(x)$ to‘g‘ri chiziqdan egri chiziqning M nuqtasigacha bo‘lgan $\delta(M)$ masofa M nuqta egri chiziq bo‘ylab cheksiz uzoqlashganda nolga intiladi (6.23-rasm).

Asimptotalar uch ko‘rinishda: vertikal, og‘ma va gorizontal asimptotalar bo‘ladi.

Vertikal asimptotalar. Agar $\lim\limits_{x\to c+0} f(x)$ va $\lim\limits_{x\to c-0} f(x)$ bir tomonlama limitlarning kamida bittasi cheksiz bo‘sa $x=c$ to‘g‘ri chiziqni $y=f(x)$ funksiya grafigining *vertikal asimptotasi* deb ataymiz.



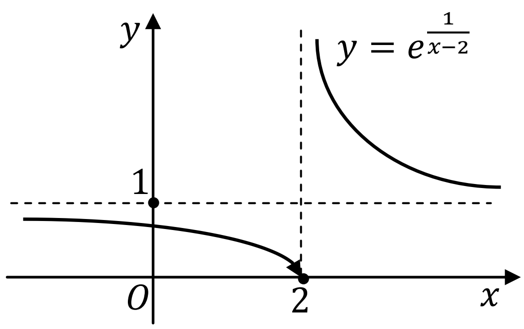
6.23-rasm

$y=f(x)$ egri chiziqning vertical asimptotalarini topish uchun:

1) $f(x)$ funksiyaning Ox o‘qdagi uzilish nuqtalarini topamiz;

2) ular orasidan $f(x)$ funksiyaning kamida bitta limiti (chap yoki o‘ng) $+\infty$ yoki $-\infty$ bo‘ladiganlarini tanlaymiz. Bular $x_1, x_2, \dots, x_m$ bo‘lsin. U holda $x=x_1$, $x=x_2$, …, $x=x_m$ to‘g‘ri chiziqlar $y=f(x)$ funksiya grafigining verikal asimptotalari bo‘ladi.

6.13-Misol. $y=e^{\frac{1}{x-2}}$ funksiya grafigining vertikal asimptotalarini topamiz. Bu funksiya **R** son o‘qining $x=2$ nuqtadan boshqa hamma nuqtalarida aniqlangan. $x=2$ nuqtadagi chap va o‘ng limitlarni hisoblaymiz:



6.24-rasm

$$\lim_{x\to 2-0} e^{\frac{1}{x-2}}=0 \text{ va } \lim_{x\to 2+0} e^{\frac{1}{x-2}}=+\infty.$$

Demak, $x=2$ to‘g‘ri chiziq qaralayotgan funksiyaning x o‘zgaruvchi $x=2$ nuqtaga o‘ngdan intilganda asimptotasi bo‘lar ekan (6.24-rasm).◄

6.14-Misol. $y=1/(1-x^2)$ funksiyaning vertikal asimptotalarini toping.

► Funksiya ifodasidagi kasr maxrajini ko‘paytuvchilarga ajratamiz:

$$y=\frac{1}{1-x^2}=\frac{1}{(1-x)(1+x)}.$$

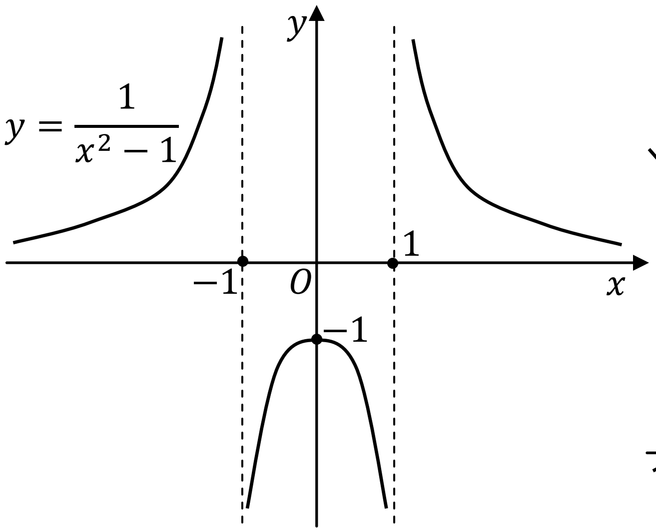
Ko‘rinib turibdiki $x=-1$ va $x=1$ to‘g‘ri chiziqlar ikki tomonlama vertikal asimptotalar bo‘ladi (6.25-rasm), chunki

$$\lim_{x\to -1-0}\frac{1}{1-x^2}=+\infty, \qquad \lim_{x\to -1+0}\frac{1}{1-x^2}=-\infty,$$

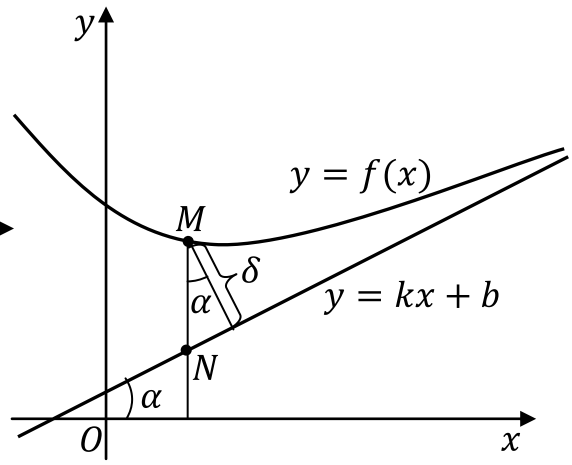
$$\lim_{x\to 1-0}\frac{1}{1-x^2}=-\infty,\qquad \lim_{x\to 1+0}\frac{1}{1-x^2}=+\infty. \quad \blacktriangleleft$$

Og‘ma asimptotalar. $y=f(x)$ funksiya barcha $x\geq a$ (yoki $x\leq a$) nuqtalarda aniqlangan bo‘lsin. $y=kx+b$ to‘g‘ri chiziq $y=f(x)$ funksiya grafigining asimptotasi bo‘lsin. Bunday asimptotani *og‘ma asimptota* deb ataymiz.

Aniqlik uchun x argumentning musbat ishorali katta qiymatlarini qaraymiz. $y=kx+b$ to‘g‘ri chiziq $y=f(x)$ egri chiziqning asimptotasi degani ta’rifga ko‘ra egri chiziqning $M(x,f(x))$ nuqtasidan bu to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan δ masofa x o‘zgaruvchi musbat cheksizlikka intilganda: $x\to+\infty$, nolga intiladi.



6.25-rasm



6.26-rasm

α $(\alpha\neq\pi/2)$ orqali asimptotaning Ox o‘q bilan tashkil qilgan burchagini belgilaymiz. 6.26-rasmda $\delta=|MN|\cos\alpha$ ekanligi ko‘rinib turibdiki. $\cos\alpha=\text{const}\neq 0$ bo‘lganligi uchun $x\to+\infty$ da δ miqdorning nolga intilishi $|MN|$ miqdorning ham nolga intilishini ta’minlaydi va aksincha. $|MN|=|f(x)-kx-b|$ ekanligini inobatga olsak, $y=kx+b$ to‘g‘ri chiziq $y=f(x)$ egri chiziqning $x\to+\infty$ da asimptotasi bo‘lishligi uchun

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx-b)=0$$

bo‘lishi zarur va yetarli degan xulosaga kelamiz. So‘ngi tenglikni cheksiz kichik miqdorlar orqali ifodalasak

$$f(x)=kx+b+\alpha(x) \tag{6.8}$$

bu yerda $\lim_{x\to+\infty} \alpha(x) = 0$.

$y = f(x)$ egri chiziqning $x \to +\infty$ da $y = kx + b$ to‘g‘ri chiziq asimptotasi bo‘ladi degan tasdiqning ma’nosi shundan iboratki, $x \to +\infty$ da $y = f(x)$ funksiya o‘zini “qaryib chiziqli funksiya singari” tutadi, ya’ni $y = kx + b$ chiziqli funksiyadan $x \to +\infty$ da cheksiz kichik miqdorga farq qiladi.

6.14-Teorema. $y = f(x)$ funksiyaning grafigi $x \to +\infty$ da $y = kx + b$ og‘ma asimptotaga ega bo‘lishligi uchun

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k \quad \text{va} \quad \lim_{x\to+\infty} [f(x) - kx] = b \tag{6.9}$$

ikkala limitning ham mavjud bo‘lishi zarur va yetarli.

► **Zaruzligi.** $y = f(x)$ funksiyaning grafigi $x \to +\infty$ da $y = kx + b$ og‘ma asimptotaga ega bo‘lsin, $f(x)$ funksiya uchun (6.8) tasvir o‘rinli bo‘lsin:

$$f(x) = kx + b + \alpha(x) \text{ bu yerda } \alpha(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$

U holda

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left[k + \frac{b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x}\right] = k,$$

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x\to+\infty} [b + \alpha(x)] = b,$$

ya’ni (6.9) ikkala limit ham mavjud.

Yetarliligi. (6.9) tengliklardagi ikkala limit ham mavjud bo‘lsin. Ulardan ikkinchisining mavjudligi $f(x) - kx - b$ ayirmani $x \to +\infty$ da cheksiz kichik miqdor deb mulohaza yuritishga imkon beradi, Bu ayirmani $\alpha(x)$ orqali belgilasak, quyidagi tenglikka ega bo‘lamiz

$$f(x) = kx + b + \alpha(x) \text{ bu yerda } \alpha(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$

Bu esa $y = f(x)$ funksiya grafiga $y = kx + b$ og‘ma asimptotaga ega degan ma’noni anglatadi. ◄

$x \to -\infty$ hol ham xuddi shunday tadqiq qilinadi.

6.15-Misol. $y = x^2/(x - 1)$ funksiyaning asimptotalarini toping.

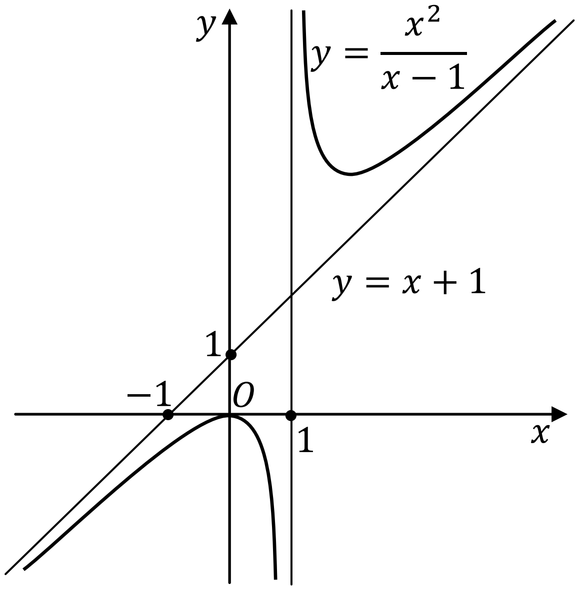
► Funksiyaning ifodasidan uning grafigi $x = 1$ vertikal asimptotaga ega degan xulosaga kelamiz. Funksiyaning ko‘rinishini o‘zgartiramiz:

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1} = \frac{x^2-1+1}{x-1} = x+1+\frac{1}{x-1}.$$

So‘ngi $1/(x-1)$ qo‘shiluvchi $x \to \infty$ da nolga intiladi. Shunday qilib, $f(x) = x^2/(x-1)$ funksiyani

$$f(x) = x+1+\alpha(x),$$

ko‘rinishda yozish mumkin ekan, bu yerda $\alpha(x) = 1/(x-1) \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$. 6.14-Teoremaga ko‘ra berilgan funksiya $y = x+1$ og‘ma asimptotaga ega degan xulosaga kelamiz (6.27-rasm). ◄



6.27-rasm

$\Delta = f(x) - kx - b$ ayirmaning ishorasini tekshirish orqali muhim xulosalar chiqarish mumkin. Agar $\Delta > 0$ bo‘lsa, egri chiziq asimptotadan yuqorida; $\Delta < 0$ bo‘lsa, asimptotadan pastda joylashgan bo‘ladi.

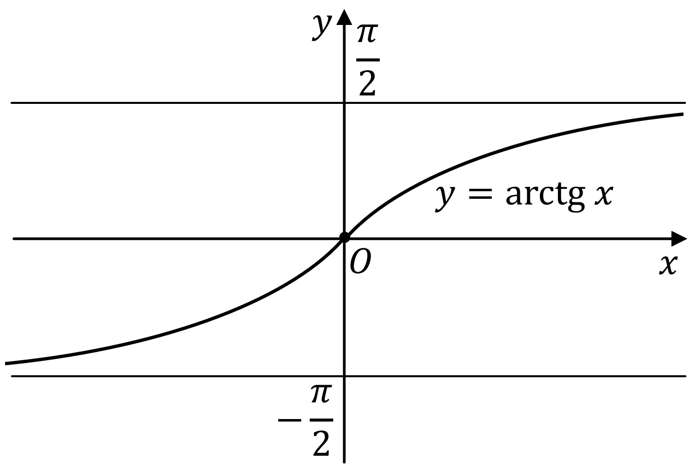
Gorizontal asimptotalar ($k = 0$ bo‘lgan xususiy hol)

Agar $f(x)$ funksiya uchun

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = b$$

$$(\text{yoki } \lim_{x\to-\infty} f(x) = b)$$

chekli limit mavjud bo‘lsa, $y = b$ to‘g‘ri chiziq $y = f(x)$ funksiya grafigi mos ravishda o‘ng yoki chap bo‘lagining *gorizontal asimptotasi* bo‘ladi.



6.28-rasm

6.16-Misol. $y = \operatorname{arctg} x$ funksiyaning gorizontal asimptotalarini topamiz.

► Funksiyaning cheksizliklardagi limitlarini hisoblaymiz:

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}, \qquad \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}.$$

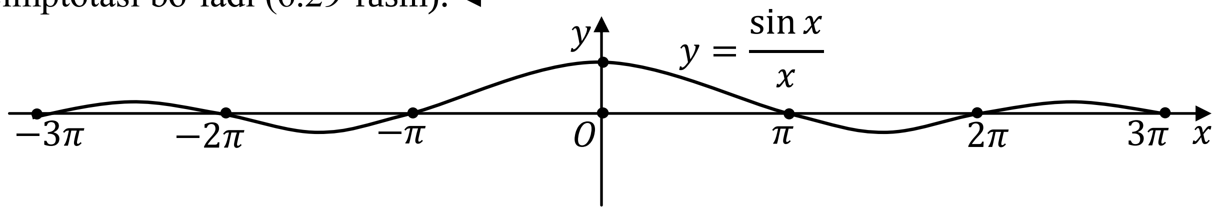
Shunday qilib, $y = \operatorname{arctg} x$ funksiyaning o‘ng bo‘lagi $y = \pi/2$, chap bo‘lagi esa $y = -\pi/2$ gorizontal asimptotalarga ega bo‘lar ekan (6.28-rasm). ◄

6.17-Misol. $y=\frac{\sin x}{x},\ y(0)=1$ funksiyaning gorizontal asimptotasini topamiz.

► Funksiyaning cheksizlikdagi limiti nolga teng:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0.$$

Shuning uchun $y=0$ to‘g‘ri chiziq $y=\frac{\sin x}{x},\ y(0)=1$ funksiyaning gorizontal asimptotasi bo‘ladi (6.29-rasm).◄



6.29-rasm

6.17-Misoldan ko‘rinib turibdiki $y=f(x)$ egri chiziq o‘zining asimptotasini cheksiz ko‘p marta ham kesib o‘tishi mumkin ekan.

6.5. Funksiyani tekshirishning umumiy sxemasi va funksiya grafigini yasash

Funksiyaning holati haqida eng yaxshi ko‘rsatmali tasavvurni uning grafigi beradi. Funksiyaning grafigini yasashdan oldin uni limitlar nazariyasining va differensial hisobning metodlari bilan quyidagi bosqichlarda tekshiriladi:

1) funksiyaning aniqlanish sohasi topiladi, uning juftlik yoki toqlik xossasi va davriyligi aniqlanadi;

2) funksiyzning uzilish nuqtalari topiladi va ularning turlari aniqlanadi, funksiya grafigining vertikal asimptotalari va uzluksizlik oraliqlari aniqlanadi;

3) funksiya grafigining koordinata o‘qlarini kesib o‘tish nuqtalari topiladi, ya’ni $f(0)$ qiymat va $f(x)=0$ tenglamaning ildizlari topiladi;

4) funksiyaning kritik nuqtalari topiladi va ular orasidan ekstremum nuqtalar aniqlanadi, ekstremum nuqtalarda funksiyaning qiymatlari hisoblanadi, funksiyaning monotonlik intervallari aniqlanadi;

5) funksiyaning burilish nuqtalari topiladi va bu nuqtalarda funksiyaning qiymatlari hisoblanadi, qavariqlik va botiqlik intervallari aniqlanadi;

6) $x\to\pm\infty$ da funksiyaning o‘zgarishi tekshiriladi, ya’ni funksiya grafigining og‘ma va gorizontal asimptotalari topiladi.

Funksiyani tekshirishning sanab o‘tilgan bosqichlarining natijalari funksiya grafigining xomaki chizmasini yasash inkonini beradii. Grafikning xomaki chizmasini yasashni osonlashtirish uchun bu natijalardan jadval tuzish maqsadga muvofiq bo‘ladi.

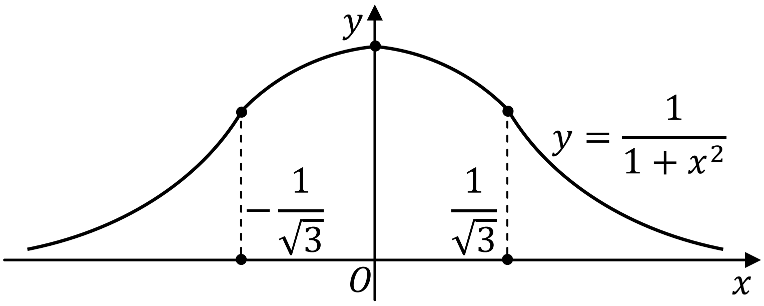
6.18-Misol. $y = 1/(1 + x^2)$ funksiya grafigini yasang.

► 1) Funksiyaning aniqlanish sohasi **R** son o‘qidan iborat: $D(y) = (-\infty, +\infty)$; funksiya juft: $f(-x) = f(x)$, shu sababli uning grafigi Oy o‘qqa nisbatan simmetrik; davriy emas; funksiyaning juftligidan, uning grafigini $x \geq 0$ yarim o‘qda yasash yetarli, so‘ngra Oy o‘qqa nisbatan simmetrik tasvirlanadi;

2) funksiyaning uzilish nuqtalari va vertikal asimptotalari yo‘q; **R** son o‘qida uzluksiz;

3) $x = 0$ bo‘lganda $y = 1$; ixtiyoriy $x \in$ **R** uchun $y \neq 0, y > 0$, ya’ni funksiya grafigi $y > 0$ yuqori yarim tekislikda yotadi;

4) $y' = -2x/(1 + x^2)$. Hosilani nolga tenglashtirib $x = 0$ kritik nuqtani topamiz. $x < 0$ bo‘lganda funksiya o‘sadi va $x > 0$ bo‘lganda funksiya kamaydi; x o‘zgaruvchi $x = 0$ nuqtadan o‘tganda $y'(x)$ hosila o‘z ishorasini minusdan plyusga o‘zgartiradi. Demak $x = 0$ maksimum nuqta ekan: $f_{\max} = f(0) = 1$.



6.30-rasm

5) Ikkinchi tartibli hosila $y'' = -2(1 - 3x^2)/(1 + x^2)^2$ va u $x = \pm 1/\sqrt{3}$ nuqtalarda nolga aylanadi. Simmetriyani inobatga olib $x = 1/\sqrt{3}$ nuqtada tekshiramiz. $x < 1/\sqrt{3}$ bo‘lsa $y'' < 0$ shu sababli funksiya grafigi qavariq; $x > 1/\sqrt{3}$ bo‘lsa $y'' > 0$ shu sababli funksiya grafigi botiq. Demak $x = 1/\sqrt{3}$ nuqta funksiya grafigining burilish nuqtasi bo‘lar ekan.

6) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{1}{1+x^2} = 0$. Demak $y = 0$ to‘g‘ri chiziq funksiya grafigining gorizontal asimptotasi bo‘lar ekan. Uning og‘ma asimptotasi yo‘q.

Olingan natijalardan quyidagi jadvalni tuzamiz:

x	$\left(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},0\right)$	0	$\left(0,\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\left(\frac{1}{\sqrt{3}},+\infty\right)$
$f'(x)$	+	+	+	0	−	−	−
$f''(x)$	+	0	−	−2	−	0	+
$f(x)$	↗	burilish nuqtasi	↗	max	↘	burilish nuqtasi	↘

Jadvalda "↗" strelka funksiyaning o'sishishini, "↘" strelka esa funksiyaning kamayishini anglatadi. Funksiyaning grafigi 6.30-rasmda tasvirlangan. ◄

6.19-Misol. $y=\sqrt[3]{x(x-1)^2}$ funksiya grafigini yasang.

► 1) Funksiyaning aniqlanish sohasi **R** son o'qidan iborat: $D(y)=(-\infty,+\infty)$; funksiya juft ham emas, toq ham emas va davriy ham emas;

2) funksiyaning uzilish nuqtalari yo'q (demak vertikal asimptotalari yo'q) va **R** son o'qida uzluksiz;

3) funksiya grafigi koordinatalar boshidan o'tadi, bundan tashqari, $f(1)=0$.

4) $f(x)$ funksiyaning hosilasi

$$f'(x)=\frac{3x-1}{3\sqrt[3]{x^2(x-1)}}$$

R son o'qining barcha nuqtalarida mavjud, $x=1/3$ nuqtada nol ($f(x)$ funksiyaning statsionar nuqtasi), $x=0$ va $x=1$ nuqtalarda esa cheksiz. $f(x)$ funksiyaning bu kritik nuqtalari atrofida $f'(x)$ hosilaning o'zgarishini tekshiramiz.

x o'zgaruvchi $x=0$ nuqtadan o'tganda hosila o'z ishorasini o'zgartirmaydi, ya'ni bu nuqtada ekstremumning yetarli shart bajarilmaydi. $x=0$ nuqta ekstremum nuqta bo'lmaydi.

$x=1$ kritik nuqtaga o'tamiz.

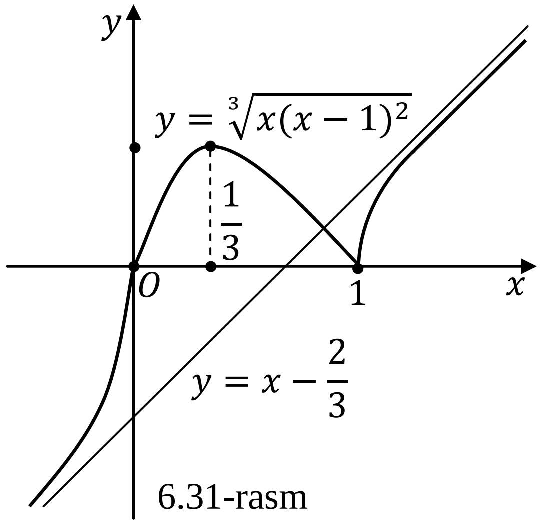
$$\lim_{x\to 1-0} f'(x)=\lim_{x\to 1-0}\frac{3x-1}{3\sqrt[3]{x^2(x-1)}}=-\infty,$$

$$\lim_{x\to 1+0} f'(x)=\lim_{x\to 1+0}\frac{3x-1}{3\sqrt[3]{x^2(x-1)}}=+\infty$$

bo'lganligi uchun $x=1$ nuqtaning atrofida $x<1$ bo'lganda $f'(x)<0$ va $x>1$ bo'lganda $f'(x)>0$ bo'ladi, ya'ni x o'zgaruvchi $x=1$ nuqtadan o'tganda $f'(x)$

hosila o‘z ishorasini minusdan plyusga o‘zgartirar ekan. Shuning uchun 6.7-Teoremaga ko‘ra bu nuqta $f(x)$ funksiyaning minimum nuqtasi bo‘ladi va uning minimal qiymati $f_{\min} = f(1) = 0$. `

$x = 1/3$ nuqtada $f'(x)$ hosila nolga aylanadi. x o‘zgaruvchi $x = 1/3$ nuqtadan o‘tganda $f'(x)$ hosila o‘z ishorasini plyusdan minusga o‘zgartiradi. Shuning uchun 6.6-Teoremaga ko‘ra bu nuqta $f(x)$ funksiyaning maksimum nuqtasi bo‘ladi va uning maksimal qiymati $f_{\max} = f(1/3) = \sqrt[3]{4}/3 \approx 0{,}53$.



6.31-rasm

Shunday qilib, $x \in (-\infty, 1/3)$ bo‘lganda $f'(x) > 0$ va 6.3-Teoremaga ko‘ra bu oraliqda o‘sadi, $x \in (1/3, 0)$ bo‘lganda $f'(x) < 0$ va 6.3-Teoremaga ko‘ra bu oraliqda kamayadi, $(1, +\infty)$ oraliqda esa yana $f'(x) > 0$ va funksiya bu yerda o‘sadi.

5) $f(x)$ funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi

$$f''(x) = \frac{2}{9\sqrt[3]{x^5(x-1)^4}}$$

hech bir nuqtada nolga aylanmaydi, $x = 0$ va $x = 1$ nuqtalarda mavjud emas. x o‘zgaruvchi $x = 0$ nuqtadan o‘tishda ikkinchi tartibli hosila o‘z ishorasini plyusdan minusga o‘zgartiradi, ya’ni 6.12-Teoremaga ko‘ra $x = 0$ nuqta $f(x)$ funksiyaning burilish nuqtasi bo‘ladi. x o‘zgaruvchi $x = 1$ nuqtadan o‘tishda ikkinchi tartibli hosila o‘z ishorasini o‘zgartirmaydi va bu nuqta $f(x)$ funksiyaning burilish nuqtasi bo‘lmaydi.

Shunday qilib, $(-\infty, 0)$ oraliqda $f''(x) > 0$ va $f(x)$ funksiya bu yerda botiq; $x \in (0, 1)$ va $x \in (1, +\infty)$ bo‘lganda $f''(x) < 0$ va bu oraliqlarda $f(x)$ funksiya qavariq.

6) 6.14-Teoremadagi

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{x(x-1)^2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{2/3} = 1$$

va

$$b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x(x-1)^2}-x\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}x\left(\left(1-\frac{1}{x}\right)^{2/3}-1\right)=-\lim_{y\to 0}\frac{(1+y)^{2/3}-1}{y}=-\frac{2}{3}$$

limitlar mavjud ekan, shuning uchun $f(x)$ funksiya grafigi $y=x-2/3$ tenglamali ikki tomonlama asimptotaga ega bo‘ladi.

Topilgan natijalardan quyidai jadvalni tuzamiz:

x	$(-\infty,0)$	0	$\left(0,\frac{1}{3}\right)$	$\frac{1}{3}$	$\left(\frac{1}{3},1\right)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	$+\infty$	$+$	0	$-$	mavjud emas	$+$
$f''(x)$	$+$	mavjud emas	$-$	$-$	$-$	mavjud emas	$-$
$f(x)$	↗	burilish nuqtasi	↗	max	↘	min	↗

Jadval asosida funksiyaning grafigini chizamiz (6.31-rasm).◄

6.19-Misol. Quyidagi funksiyaning grafigini yasang

$$y=x+\frac{1}{x^2}.$$

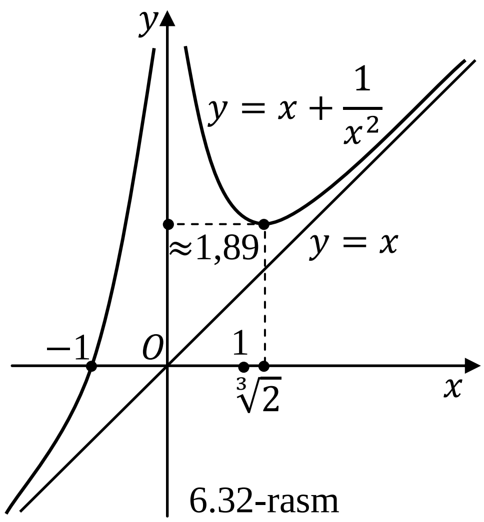
► 1) **R** son son o‘qining $x=0$ nuqtasidan boshqa barcha nuqtalarda aniqlangan: $D(y)=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$;

2) $x=0$ nuqta 2-tur uzilish nuqtasi, shuning uchun $x=0$ to‘g‘ri chiziiq vertikal asimptota bo‘ladi; funksiya juft ham emas, toq ham emas va davriy ham emas;

3) $y=0$ desak $x^3+1=0$ tenglamaga ega bo‘lamiz va uning yechimi $x=-1$ bo‘ladi, shuning uchun funksiyz grafigi Ox o‘qni $(-1,0)$ nuqtada kesib o‘tadi;

4) funksiyaning hosilasini olib, nolga tenglashtiramiz:

$$y'=1-\frac{2}{x^3}=\frac{x^3-2}{x^3}=0,\qquad x^3-2=0,$$



6.32-rasm

ya’ni $x=\sqrt[3]{2}$ kritik nuqta bo‘ladi. $x=0$

nuqtada hosila cheksiz, demak funksiyaning ikkita $x = 0$ va $x = \sqrt[3]{2}$ kritik nuiqtalari bor ekan. Bu nuqtalar atrofida hosilaning ishoralarini tekshiramiz:

$x < 0$ bo‘lsa $f'(x) > 0$ bo‘ladi, shuning uchun funksiya grafigi $(-\infty, 0)$ oraliqda o‘sadi; $0 < x < \sqrt[3]{2}$ bo‘lsa $f'(x) < 0$, shuning uchun funksiya grafigi $(0, \sqrt[3]{2})$ oraliqda kamayadi, $x > \sqrt[3]{2}$ bo‘lsa, yana $f'(x) > 0$ bo‘ladi, shuning uchun $(\sqrt[3]{2}, +\infty)$ oraliqda funksiya grafigi o‘sadi. Funksiya $x = \sqrt[3]{2}$ nuqtada uzluksiz bo‘lganligi uchun 6.7-Teoremaga ko‘ra $x = \sqrt[3]{2}$ funksiyaning minimum nuqtasi bo‘ladi va $f_{\min} = f(\sqrt[3]{2}) \approx 1{,}89$;

5) Ikkinchi tartibli hosila barcha $x \neq 0$ nuqtalarda

$$y'' = \frac{6}{x^4} > 0$$

bo‘lganligi uchun, funksiya o‘zining aniqlanish sohasida botiq.

6) 6.14-Teoremadagi

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x + \frac{1}{x^2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x^3}\right) = 1,$$

$$b = \lim_{x\to\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x\to\infty} \left[x + \frac{1}{x^2} - x\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

limitlar mavjud ekan, shuning uchun $f(x)$ funksiya grafigi $y = x$ tenglamali ikki tomonlama asimptotaga ega bo‘ladi.

Topilgan natijalardan quyidai jadvalni tuzamiz:

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, \sqrt[3]{2})$	$\sqrt[3]{2}$	$(\sqrt[3]{2}, +\infty)$
$f'(x)$	+	+	+	mavjud emas	–	0	+
$f''(x)$	+	+	+	mavjud emas	–	+	–
$f(x)$	↗	0	↗	$x = 0$ vertikal asimptota	↘	min	↗

Jadval asosida funksiya grafigini 6.32-rasmda tasfirlaymiz.◄

6.6. Tenglamaning haqiqiy ildizlarini taqribiy hisoblash

Masalaning qo‘yilishi. Bir o‘zgaruvchili chiziqli bo‘lmagan

$$f(x) = 0 \tag{6.10}$$

tenglamani yechish zarurati ilmiy tadqiqot va texnik tadbiqlarda yuzaga keladi. Xususan $g(x)$ funksiyaning statsionar nuqtalarini topish $g'(x) = f(x) = 0$ tenglamani yechishga olib keladi. Umumiy holda masala (6.10) tenglamani $f(x^*) \equiv 0$ ayniyatga aylantiradigan x^* qiymatni topishdan iborat. Bunday qiymatlar (6.10) tenglamaning ildizlari (yoki yechimlari) deb ataladi.

Ma'lumki, $f(x)$ funksiya biror oraliqda qat'iy monoton bo'lsa, u teskari funksiyaga ega. Bu holda teskari funksiya $y = 0$ nuqtada aniqlangan va analitik berilgan bo'lishi mumkin. Bu holda aniq analitik yechim topiladi. Biroq umumiy holda analitik yechishining imkoni yo'q. Shu sababli (6.10) tenglamani taqribiy yechish muhim ahamiyat kasb etadi.

Masalaga qo'yiladigan umumiy shartlar. (6.10) tenglamani yechish uchun, biz dastlab tenglamaning ξ ildizi yakkalangan deb faraz qilamiz, ya'ni bu ildizdan boshqa ildiz yotmaydigan $[a, b]$ kesma mavjud: $a < \xi < b$.

Agar buning ustiga $f(x)$ funksiya kesmaning chetki nuqtalarida turli ishorali $f(a)$ va $f(b)$ qiymatlarni qabul qilsa, ildizni o'zida saqlovchi kesmalarni ketma-ket teng ikkiga bo'lib va bo'linish nuqtalarida $f(x)$ funksiya qiymatining ishorasini aniqlab, kesmalarni toraytirish hisobiga ildizni taqribiy hisoblash mumkin. Biroq bu usul oddiyligiga qaramasdan, amaliyotda ba'zan foydasiz yoki juda ham ko'p hisoblashlarni talab qilishi mumkin. Kitobxon mazkur bo'limda (6.10) tenglamani taqribiy yechishning oddiy va maqsadga tez yetaklovchi ikkita usuli bilan tanishadi. Bu yerda biz yana differensial hisobning tushunchalari va metodlaridan foydalanamiz.

Ikkala usulda ham quyidagi umumiy shartlar bajariladi deb faraz qilamiz:

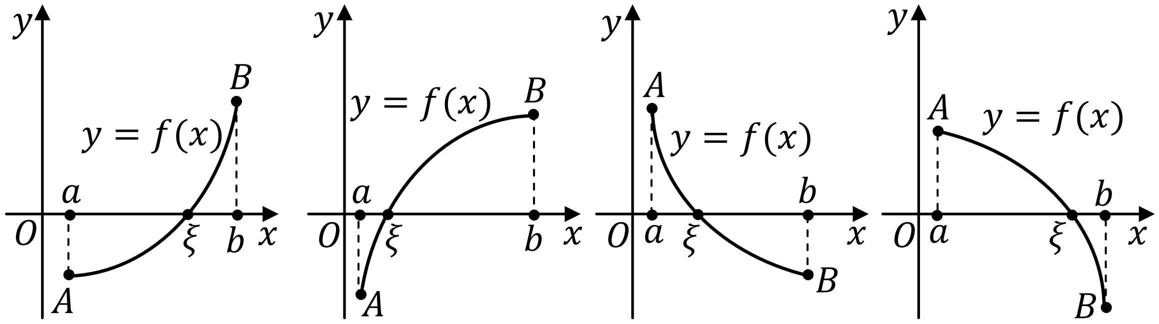
1) $f(x)$ funksiya va uning $f'(x), f''(x)$ hosilalari $[a, b]$ kesmada uzluksiz;

2) funksiyaning kesma chetki nuqtalaridagi $f(a)$ va $f(b)$ qiymatlari turli ishorali: $f(a) \cdot f(b) < 0$;

3) ikkala $f'(x)$ va $f''(x)$ hosilalarning har biri $[a, b]$ kesmada ishorasini o'zgartirmaydi.

1) va 2) shartlar (6.10) tenglamaning $[a, b]$ kesmada ildizi mavjudligini ta'minlaydi (4.22-Teorema). 3) shartga ko'ra $f'(x)$ hosila kesmada ishorasini

o‘zgartirmaydi, shuning uchun u bu kesmada yoki o‘sadi yoki kamayadi, bu esa ildizning yagonaligini ta’minlaydi. $f''(x)$ hosila ishorasini o‘zgartirmasligi funksiya grafigining kesmada qavariq yoki botiqligini ta’minlaydi. 6.33-rasmda $f'(x)$ va $f''(x)$ hosilalarning turli ishoralari kombinatsiyalariga mos keluvchi to‘rtta hol tasvirlangan.



6.33-rasm

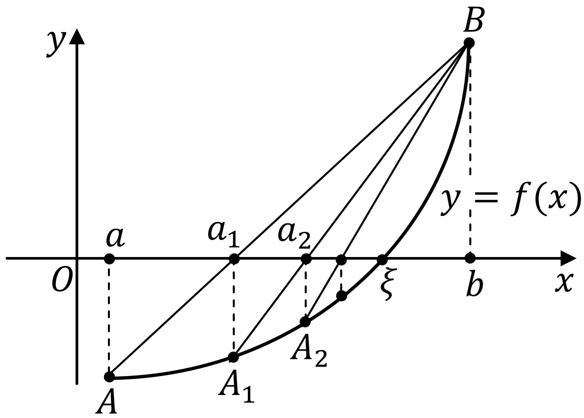
Bu hollarning har biriga birinchi va ikkinchi tartibli hosilalarning quyidagi kombitatsitasi mos keladi; ixtiyoriy $x \in [a, b]$ uchun

1) $f'(x) > 0, \quad f''(x) > 0,$

2) $f'(x) > 0, \quad f''(x) < 0,$

3) $f'(x) < 0, \quad f''(x) > 0,$

4) $f'(x) < 0, \quad f''(x) < 0.$



6.34-rasm

Vatarlar usuli. Aniqlik uchun $[a, b]$ kesma nuqtalari uchun $f'(x) > 0$, $f''(x) < 0$ o‘rinli bo‘lsin. $A(a, f(a))$ va $B(b, f(b))$ nuqtalarni AB vatar bilan tutashtiramiz (6.34-rasm). Bu vatar A va B nuqtalardan o‘tuvchi, tenglamasi

$$\frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - a}{b - a} \tag{6.11}$$

bo‘lgan to‘g‘ri chiziqning kesmasi bo‘ladi. AB vatar Ox o‘qni kesib o‘tadigan a_1 nuqta a va ξ nuqtalar oralig‘ida yotadi va ξ ildizga a nuqtaga nisbatan yaqinroq bo‘ladi, demak uni ξ ildizning a qiymatga nisbatan aniqroq taqribiy qiymati deb qarash mumkin. (6.11) tenglikda x o‘rniga a_1 qiymatni qoyib

$$a_1 = a - \frac{f(a)(b - a)}{f(b) - f(a)} \tag{6.12}$$

tenglikka ega bo‘lamiz. Agar ξ ildizning taqribiy qiymati sifatida a_1 qiymatni oladigan bo‘lsak, $\overset{\frown}{AB}$ yoy o‘rniga AB vatarni olgan bo‘lamiz. Vatarlar usulining asl ma’nosi ham shundan iborat. Endi $\overset{\frown}{AB}$ yoyda abssisasi a_1 bo‘lgan A_1 nuqtani olamiz va A_1 va B nuqtalardan A_1B vatar o‘tkazamiz. Bu vatar Ox o‘q bilan

$$a_2 = a_1 - \frac{(b - a_1)f(a_1)}{f(b) - f(a_1)}$$

nuqtada kesishadi. a_2 nuqta a_1 nuqta bilan ξ ildiz oralig‘ida yotadi. Shuning uchun a_2 qiymat ξ ildizning a_1 taqribiy qiymatga nisbatan aniqroq taqribiy qiymati bo‘ladi. Bu jarayonni davom ettirib, o‘sib boruvchi taqribiy qiymatlar ketma-ketligini hosil qilamiz:

$$a < a_1 < a_2 < \cdots < a_n < a_{n+1} < \cdots < \xi$$

Bunda ikkita ketma-ket qiymat (6.12) tenglikga o‘xshagan

$$a_{n+1} = a_n - \frac{(b - a_n)f(a_n)}{f(b) - f(a_n)} \tag{6.13}$$

formula bilan bog‘langan.

Endi n o‘sishi bilan $a_n \to \xi$ ekanligini isbotalymiz. Haqiqattan ham, 3.12-Teoremaga ko‘ra monoton o‘suvchi va yuqoridan chegaralangan (masalan, ξ ildiz bilan) a_n ketma-ketlik chekli $\alpha \leq \xi$ limitga intiladi. (6.13) tenglikda limitga o‘tsak va bunda $f(x)$ funksiyaning uzluksizligini inobatga olsak

$$\frac{(b - \alpha)f(\alpha)}{f(b) - f(\alpha)} = 0$$

bundan esa $f(\alpha) = 0$. (6.10) tenglamaning $[a, b]$ kesmada ξ ildizdan boshqa ildizlari yo‘qligi tufayli $\alpha = \xi$ bo‘ladi.

6.34-rasmda Ox o‘qdagi $a_1, a_2, ...$ nuqtalar ketma-ketligi ξ ildizga asta-sekin yaqinlashib borishi tasvirlangan.

Shunday qilib, yuqoridagi qoidani yetarli sonda takrorlab ξ ildizning taqribiy qiymatini ixtiyoriy aniqlikda hisoblash mumkin. Olingan taqribiy qiymat uchun xatolikni baholaymiz. Buning uchun $f(a_n) - f(\xi)$ ayirmaga (5.64) chekli ayirmalar formulasini qo‘llaymiz:

$$f(a_n) = f(a_n) - f(\xi) = (a_n - \xi)f'(c), \quad (a_n < c < \xi)$$

Bu yerdan

$$a_n - \xi = \frac{f(a_n)}{f'(c)};$$

agar m orqali $|f'(x)|$ ifodaning $[a, b]$ kesmadagi eng kichik qiymatini belgilasak

$$|a_n - \xi| \leq \frac{|f(a_n)|}{m} \tag{6.14}$$

baholashni hosil qilamiz.

6.34-rasmda barcha vatarlarning bir uchi $B(b, f(b))$ nuqtada joylashgan va (6.13) formulada ham har bir taqribiy yaqinlashish $f(x)$ funksiyaning $f(b)$ qiymati orqali hisoblangan. Shuning uchun biz $B(b, f(b))$ nuqtani qo‘zg‘almas nuqta deb ataymiz. Qo‘zg‘almas nuqta sifatida $A(a, f(a))$ nuqtani ham olish mumkin.

Agar $[a, b]$ kesmada $f'(x)$ va $f''(x)$ hosilalarni ishorasi bir xil bo‘lsa (6.33-rasmda 1) va 4) hollar) qo‘zg‘almas nuqta sifatida $B(b, f(b))$ nuqta olinadi va taqribiy yaqinlashishlar (6.13) formula bilan hisoblanadi. Qaralayotgan kesmada $f'(x)$ va $f''(x)$ hosilalarni ishorasi har xil bo‘lsa (6.33-rasmda 2) va 3) hollar) qo‘zg‘almas nuqta sifatida $A(a, f(a))$ nuqtani olish kerak va taqribiy yaqinlashishlar

$$a_{n+1} = a_n - \frac{(a - a_n)f(a_n)}{f(a) - f(a_n)} \tag{6.15}$$

formula bilan hisoblanadi.

6.20-Misol. $x^3 + 5x^2 - 2x - 5 = 0$ birorta taqribiy ildizini 0,01 aniqlikda toping.

► $f(1) = -1$ va $f(2) = 19$ ekanligidan tenlamaning kamida bitta ildizi $[1, 2]$ kesmada yotadi degan xulosaga kelamiz. Hosilalarini topamiz:

$$f'(x) = 3x^2 + 10x - 2, \qquad f''(x) = 6x + 10.$$

Ularning ikkalasi ham $[1, 2]$ kesmada musbat ishorali qimat qabul qiladi. $f'(x)$ hosilaning bu kesmadagi eng kichik qiymati $m = f'(1) = 11$ bo‘ladi.

Endi yaqinlashish ketma-ketligini tuzamiz:

$$a_1 = 1 - \frac{f(1)(2-1)}{f(2) - f(1)} = 1 - \frac{-2}{19 + 2} = 1 + \frac{2}{21} = 1{,}05$$

Funksiyaning bu nuqtadagi qiymatini hisoblaymiz:

$$f(1{,}05) = 1{,}05^3 + 5 \cdot 1{,}05^2 - 2 \cdot 1{,}05 - 5 = -0{,}42987$$

Xatolikni (6.14) boyicha tekshiramiz:

$$|a_1 - \xi| \le \frac{|f(a_1)|}{m} = \frac{0,42987}{11} = 0,03908$$

Demak hali talab qilingan aniqlik yo‘q va shuning uchun keying yaqinlashishni tuzamiz:

$$a_2 = 1,05 - \frac{f(1,05)(2 - 1,05)}{f(2) - f(1,05)} = 1,071, \qquad f(a_2) = f(1,071) = -0,178,$$

$$|a_2 - \xi| \le \frac{|f(a_2)|}{m} = \frac{0,178}{11} = 0,01619$$

Hali ham talab qilingan aniqlikka erishilgani yo‘q. Shuning uchun keying yaqinlashishni tuzamiz:

$$a_3 = 1,071 - \frac{f(1,071)(2 - 1,071)}{f(2) - f(1,071)} = 1,0796,$$

$$f(a_3) = f(1,0796) = -0,0727,$$

$$|a_3 - \xi| \le \frac{|f(a_3)|}{m} = \frac{0,0727}{11} = 0,0066 < 0,01$$

Talab qilingan aniqlikka erishdik. Shuning uchun tenglamaning 0,01 aniqlikdagi taqribiy ildizi sifatida $\xi = 1,0796$ qiymatni olish mumkin.◄

Nyuton qoidasi (Urinmalar usuli). $f(x)$ funksiyaga nisbatan shartlar o‘rinli va (6.10) tenglamaning ildizi $[a, b]$ kesmada yakkalangan bo‘lsin.

Funksiyz grafigiga $B(b, f(b))$ nuqtada urinma o‘tkazamiz (6.35-rasm). Bu urinma tenglamasi (5.14) formulaga ko‘ra

$$y - f(b) = f'(b)(x - b) \tag{6.16}$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Urinmaning Ox o‘q bilan kesishish nuqtasini b_1 orqali belgilaymiz. Bu b_1 nuqta Ox o‘qda ξ va b nuqtalar oralig‘ida yotadi, ya’ni u ξ aniq ildizga yaqinroq. Shuning uchun b_1 qiymatni (6.10) tenglamaning taqribiy yechimi deb olish mumkin. $x = b_1$ bo‘lganda $y = 0$ bo‘ladi. Shuning uchun (6.16) tenglikda x o‘rniga b_1 qiymatini qo‘yamiz:

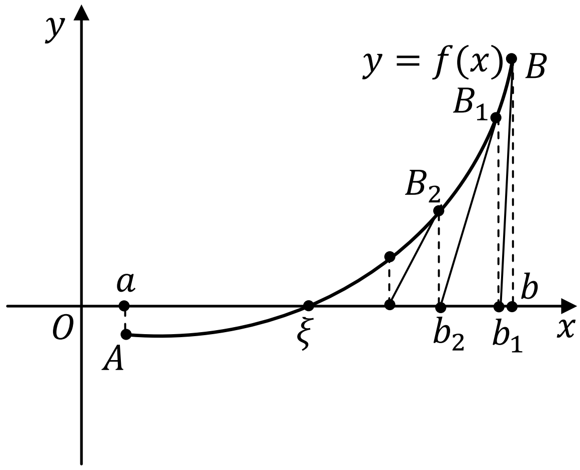
$$-f(b) = f'(b)(b_1 - b).$$

Bu yerda b_1 qiymatni topamiz:

$$b_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)} \tag{6.17}$$

Endi $\breve{AB}$ yoyda abssisasi b_1 bo‘lgan B_1 nuqtani olamiz va bu nuqtada urinma o‘tkazamiz. Bu urinmaning Ox o‘q bilan kesishish nuqtasini b_2 orqali belgilaymiz. b_2 nuqta ξ aniq ildiz va b_1 nuqta oralig‘ida yotadi: $\xi < b_2 < b_1$. Bu jarayonni davom ettirib. Kamayib boruvchi

$$b > b_1 > b_2 > \cdots > b_n >$$
$$> b_{n+1} > \cdots > \xi$$



6.35-rasm

taqribiy qiymatlar ketma-ketligini hosil qilamiz. Bunda keyingi qiymat oldingisi orqali

$$b_{n+1} = b_n - \frac{f(b_n)}{f'(b_n)} \tag{6.18}$$

formula bilan topiladi. Quyidan ξ aniq ildiz bilan chegaralangan monoton kamayuvchi $b_1, b_2, ...$ ketma-ketlik 3.12-Teoremaga ko‘ra biror β nuqtaga intiladi. Bu β berilgan (6.10) tenglamaning ildizi bo‘ladi. Haqiqattan ham, (6.18) tenglikda limitga o‘tsak va $f(x)$ funksiyaning uzluksizligini inobatga olsak

$$\frac{f(\beta)}{f'(\beta)} = 0, \qquad \text{bundan esa } f(\beta) = 0 \text{ va } \beta = \xi.$$

6.35-rasmda $b_1, b_2, ...$ taqribiy qiymatlar ketma-ketligi ξ taqribiy yechimga yaqinlashib borishi rasvirlangan.

M orqali $f''(x)$ ikkinchi tartibli hosilaning $[a, b]$ kesmadagi eng katta qiymatini, m orqali esa $f'(x)$ birinchi tartibli hosilaning $[a, b]$ kesmadagi eng kichik qiymatini belgilaymiz. Taqribiy yaqinlashishdagi xatolik (6.14) tengsizlik bilan baholanadi va bundan tashqari bu xatolik

$$|b_{n+1} - \xi| \le \frac{M}{2m} |b_n - \xi|^2. \tag{6.19}$$

tengsizlikni ham qanoatlantiradi.O‘ng tomonda ikkinchi daraja turibdi, ana shu daraja b_n taqribiy yechimlarning ξ aniq yechimga tezroq intilishini ta’minlaydi. Shuning uchun urinmalar usuli tenglamaning ildizini topishda eng samarali usullardan biri hisoblanadi.

Bu yerda ham birinchi urinmani qaysi nuqtadan o‘tkazish muhim o‘rin tutadi va agar nuqta noto‘g‘ri tanlansa aniq yechimga yaqinlashmasligi muhim.

Agar $[a, b]$ kesmada $f'(x)$ va $f''(x)$ hosilalarni ishorasi bir xil bo‘lsa (6.33-rasmda 1) va 4) hollar) birinchi urinma $B(b, f(b))$ nuqtada o‘kaziladi. Qaralayotgan kesmada $f'(x)$ va $f''(x)$ hosilalarni ishorasi har xil bo‘lsa (6.33-rasmda 2) va 3) hollar) birinchi urinma $A(a, f(a))$ nuqtada o‘kaziladi va ikkala holda ham taqribiy yaqinlashishlar (6.18) formula bilan hisoblanadi.

6.21-Misol. $x^3 + 5x^2 - 2x - 5 = 0$ tenglamaning birorta haqiqiy ildizini 0,0001 aniqlikda toping.

► Ko‘phadning $x = -1$ va $x = 0$ nuqtqlqrdagi qiymatlarini hisoblaymiz:

$$f(-1) = 1 \text{ va } f(0) = -5$$

demak tenglamaning ildizi $[-1, 0]$ oraliqda mavjud ekan. Hosilalarini topamiz:

$$f'(x) = 3x^2 + 10x - 2, \qquad f''(x) = 6x + 10.$$

Birinchi tartibli hosila $[-1, 0]$ kesmada manfiy ishorali qimat, ikkinchi taribli hosila esa musbat ishorali qiymat qabul qiladi (ya’ni 6.33-rasmda 3) hol). $|f'(x)|$ ifodaning bu kesmadagi eng kichik qiymati $m = |f'(0)| = 2$ va $|f''(x)|$ ifodaning $[-1, 0]$ kesmadagi eng katta qiymati $M = |f''(0)| = 10$ bo‘ladi.

Demak b_0 sifatida kesmaning chak chegarasini olamiz (birinchi va ikkinchi tartibli hosilalarning ishoralari har xil).

$$b_1 = b_0 - \frac{f(b_0)}{f'(b_0)} = -1 - \frac{f(-1)}{f'(-1)} = -0{,}88889$$

$$f(b_1) = 0{,}026063, f'(b_1) = -8{,}51852$$

$$|b_1 - \xi| \leq \frac{|f(b_1)|}{m} = \frac{0{,}026063}{2} = 0{,}013032$$

$$b_2 = b_1 - \frac{f(b_0)}{f'(b_0)} = -0{,}88889 - \frac{f(-0{,}88889)}{f'(-0{,}88889)} = -0{,}88583$$

$$f(b_2) = 0{,}000022, f'(b_1) = -8{,}50421$$

$$|b_2 - \xi| \leq \frac{|f(b_2)|}{m} = \frac{0{,}000022}{2} = 0{,}000011 < 0{,}01.$$

Talab qilingan aniqlikka erishildi. Shuning uchun $b_2 == -0{,}88583$ qiymatni berilgan tenglamaning 0,0001 aniqlikdagi taqribiy yechimi deb qabul qilish mumkin.◄

Nazorat savollari

1. Qanday shart bajarilganda funksiya oraliqda o‘suvchi bo‘ladi?
2. Qanday shart bajarilganda funksiya oraliqda kamayuvchi bo‘ladi?
3. Lokal maksimum va lokal minimum nuqtalar deb qanday nuqtalarga aytiladi?
4. Funksiya ekstremumi mavjudligining zaruriy sharti nimadan iborat?
5. Qanday nuqtalar funksiyaning krtik nuqtalari deb ataladi?
6. Funksiya ekstremumi mavjudligining yetarli sharti nimadan iborat?
7. Qachon funksiya oraliqda qavariq deyiladi?
8. Qachon funksiya oraliqda botiq deyiladi?
9. Qavariqlik va botiqlikning yetarli sharti nimadan iborat?
10. Qanday nuqtalarga burilish nuqtasi deyiladi?
11. Egri chiziqning asimptotasi nima?
12. Asimptotaning qanday turlari mavjud?
13. Tenglamani taqribiy yechish deganda nimani tushunasiz?
14. Tenglamani taqribiy yechishning qanday usullarini bilasiz?

Mashqlar.

Funksiyaning grafigini yasang:

1. $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1.$ **2.** $y = xe^{-x}.$ **3.** $y = x^3 + 6x^2 - 15x+1.$

4. $y = x^3 - 9x^2 + 15x - 3.$ **4.** $y = x - x^3.$ **5.** $y = x^3 + 3x^2 - 9x - 2.$

6. $y = \dfrac{x^2 - 1}{x}.$ **7.** $y = \dfrac{x^2 + 1}{x}.$ **8.** $y = \dfrac{x^3 - 4}{x^2}.$ **9.** $y = 2\ln\dfrac{x-1}{x} + 1.$

Funksiyaning berilgan E kesmadagi eng katta va eng kichik qiymatini toping:

10. $y = 4 - x - 4/x^2, E = [1, 4].$ **11.** $y = x^4 - 2x^2 + 5, E = [-2, 2].$

12. $y = x + 2\sqrt{x}, E = [0.4].$ **13.** $y = \sqrt{100 - x^2}, E = [-6, 8].$

Tenglamaning birorta ildizini vatarlar va urinmalar usuli bilan 0,01 aniqlikda toping:

14. $x^3 - 6x^2 + 11x - 2 = 0.$ **15.** $3x^3 + 4x^2 + 7x - 6 = 0.$

VII BOB. ANIQMAS INTEGRAL

7.1. Boshlang‘ich funksiya va aniqmas integral tushunchasi.

Ma’lumki, biror $y = f(x)$ funksiyaning hosilasini hisoblash jarayonini uni differensiallash deb yuritilar edi. Biz endi differensiallash amaliga teskari bo‘lgan amal integrallash amalini o‘rganamiz.

Differensiallash hisobining asosiy masalasi berilgan funksiyaga ko‘ra uning hosilasini topish bo‘lsa, integral hisobining asosiy masalasi funksiya hosilasiga ko‘ra uning o‘zini topishdir.

Aytaylik $y = f(x)$ funksiya biror X oraliqda qaralayotgan bo‘lsin.

7.1-Ta’rif. Agar X oraliqning barcha nuqtalarida

$$F'(x) = f(x) \tag{7.1}$$

tenglik o‘rinli bo‘lsa, $F(x)$ o‘sha oraliqda $f(x)$ funksiyaning boshlang‘ich funksiyasi deb ataladi.

Masalan: $F(x) = cosx$ funksiya $f(x) = -sinx$ uchun boshlang‘ich funksiyadir, yoki $F(x) = ln|x|$ $(x \neq 0)$ funksiya $f(x) = \frac{1}{x}$ uchun boshlang‘ich funksiya bo‘ladi.

Yuqoridagi ta’rif hamda misollardan ko‘rinayaptiki, agar $F(x)$ funksiya $f(x)$ funksiyaning biror oraliqda boshlang‘ich funksiyasi bo‘lsa, o‘sha oraliqda $F(x) + C$ ifoda ham boshlang‘ich funksiya bo‘ladi, chunki $C = const \neq 0$ bo‘lib, $C' = 0$. Demak, berilgan funksiyaning boshlang‘ich funksiyalari cheksiz ko‘p ekan. Umuman, boshlang‘ich funksiyalar haqidagi quyidagi teorema o‘rinli.

7.1-Teorema. Har qanday uzluksiz funksiya cheksiz ko‘p boshlang‘ich funksiyalarga ega bo‘lib, ularning ixtiyoriy ikkitasi bir- biridan o‘zgarmas songa farq qiladi.

◀Isbot. Uzluksiz funksiyaning boshlang‘ichi mavjudligini isbotlash muammoliroq bo‘lganligi sababli, biz bu masalani ochiq qoldiramiz. Boshlang‘ich funksiyalarning soni cheksiz ko‘pligi yuqorida ko‘rsatildi. Bizga ikkita boshlang‘ich funksiyaning bir- biridan o‘zgarmasga farq qilishini isbotlash qoldi. $F(x)$ hamda $\Phi(x)$ lar $f(x)$ funksiya uchun boshlang‘ich funksiyalar bo‘lsin. Demak

$$F'(x) = f(x)\,, \qquad \Phi'(x) = f(x)$$

Bu ikki tengliklarni bir- biridan ayirsak

$$F'(x) - \Phi'(x) = 0$$

ya'ni

$$[F(x) - \Phi(x)]' = 0$$

Agar fuknsiyaning hosilasi nolga teng bo'lsa, uning o'zi o'zgarmas bo'lganligi uchun

$$F(x) - \Phi(x) = C$$

shuni isbotlash talab etilgan edi.

Demak ixtiyoriy ikkita boshlang'ich funksiya uchun $\Phi(x) = F(x) + C$ deb yozish mumkin. ►

7.2-Ta'rif. Agar X oraliqda $F(x)$ funksiya $f(x)$ uchun boshlang'ich funksiya bo'lsa, u holda o'sha oraliqda $F(x) + C$ ifodani $f(x)$ funksiyaning aniqmas integrali deb yuritiladi va $\int f(x)dx$ kabi yoziladi.

Demak ta'rifga ko'ra:

$$\int f(x)dx = F(x) + C \qquad (7.2)$$

bu yerda, $\int$ aniqmas integral belgisi, x integrallash o'zgaruvchisi, $f(x)$-integrallanuvchi funksiya hamda, $f(x)dx$ - esa integral belgisi ostidagi ifoda deb yuritiladi.

Agar $F(x)$ funksiya $f(x)$ ning boshlang'ich funksiyasi bo'lsa, aniqmas integral geometrik jihatdan bu boshlang'ich funksiyani vertikal ravishda yuqoriga va pastga siljitishlardan hosil bo'ladigan chiziqlar sinfini ifodalaydi.

Funksiyalarni integrallash amali funksiyalarni differensiallash amaliga teskari bo'lgan amaldir. Ammo differensiallash amali kabi elementar funksiyalarni integrallash har doim ham mumkin bo'lavermaydi. SHuning uchun funksiyalarni sinflarga ajratib, bu sinflarni integrallash usullarini alohida o'rganamiz.

7.2. Aniqmas integralning asosiy xossalari.

1. Agar biror oraliqda (7.1) tenglik o'rinli bo'lsa aniqmas integralning hosilasi integrallanuvchi funksiyaga teng bo'ladi, ya'ni:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x) \qquad (7.3)$$

Haqiqatan ham,

$$(\int f(x)dx)' = (F(x) + C)' = F'(x) + C' = F'(x) + 0 = f(x)$$

2. Agar (7.1) tenglik o‘rinli bo‘lsa, u holda

$$d(\int f(x)dx) = f(x)dx \qquad (7.4)$$

bo‘ladi.

Funksiya differensialining aniqlanishiga asosan:

$$d(\int f(x)dx) = d(F(x) + C) = dF(x) + dC = F^{'}(x)dx + 0 = f(x)dx.$$

3. Agar aniqmas integral belgisi ostida biror funksiyaning differensiali ishtirok etsa bu aniqmas integralning qiymati differensial belgisi ostidagi funksiya bilan o‘zgarmas sonning yig‘indisiga teng bo‘ladi, ya’ni:

$$\int dF(x) = F(x) + C \qquad (7.5)$$

Haqiqatan ham differensialning ta’rifi va (7.1) tenglikka ko‘ra,

$$\int dF(x) = \int F^{'}(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + C$$

Masalan, $\int sinxdx = -\int dcosx = -cosx + C.$

7.3. Anikmas integral jadvali.

Quyida biz asosiy elementar funksiyalar aniqmas integrallarining jadvalini keltiramiz. Jadvaldagi har bir formulaning to‘g‘riligini differensiallash yo‘li bilan tekshiriladi.

1. $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \quad a \neq -1;$
2. $\int \frac{1}{x} dx = ln|x| + C;$
3. $\int e^x dx = e^x + C;$
4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{lna} + C;$
5. $\int sinxdx = -cosx + C;$
6. $\int cosxdx = sinx + C;$
7. $\int \frac{1}{cos^2 x} dx = tgx + C;$
8. $\int \frac{1}{sin^2 x} dx = -ctgx + C;$

9. $\int tgxdx = -ln|cosx| + C$;

10. $\int ctgxdx = -ln|sinx| + C$;

11. $\int \frac{1}{1+x^2}dx = arctgx + C$;

12. $\int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{a}arctg\frac{x}{a} + C$;

13. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = arcsinx + C$;

14. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = arcsin\frac{x}{a} + C$;

15. $\int \frac{1}{a^2-x^2}dx = \frac{1}{2a}ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$;

16. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}dx = ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$;

17. $\int lnxdx = xlnx - x + C$.

Eslatma. Bu jadvalga qo‘shimcha ravishda giperbolik funksiyalarning integrallarni ham qo‘shishimiz mumkin. Keltirilgan integrallar jadvalidagi 9, 10, 15, 16, 17 formulalarga mos keluvchi formulalar hosilalar jadvalida yo‘q. 17- formulani quyida keltiriladigan bo‘laklab integrallash usuli yordamida chiqaramiz. Qolganlarini esa bevosita differensiallash yordamida isbotlash mumkin. Masalan, 16 formulani tekshiraylik:

$$\left[ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right|\right]' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 \pm a^2}}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$$

Demak 16 formula o‘rinli. Qolgan formulalarni ham xuddi shu kabi teshirishimiz mumkin.

7.4. Aniqmas integralni hisoblashning qoidalari

7.2-Teorema. O‘zgarmas ko‘paytuvchini integral belgisidan chiqarib yozish mumkin, ya’ni agar $A = const \neq 0$ bo‘lsa, u holda

$$\int Af(x)dx = A\int f(x)dx \tag{7.6}$$

bo‘ladi.

◄Isbot. Bu tenglikning ikkala tomonini differensiallasak,

$$\left(\int Af(x)dx\right)' = Af(x), \ \left(A\int f(x)dx\right)' = A\left(\int f(x)dx\right)' = Af(x).$$

Demak, berilgan tenglikning chap va o‘ng tomonidagi funksiyalar bir- biridan o‘zgarmas songa farq qiladi. Aniqmas integrallar o‘zgarmas son ma’nosida teng bo‘lganligi uchun, teorema isbot bo‘ldi. ►

7.3-Teorema. CHekli dona funksiyalar algebraik yig‘indisining integrali qo‘shiluvchilar integrallarining algebraik yig‘indisiga teng bo‘ladi, ya’ni: $\int[f_1(x) +$ $f2x+\cdots+fkxdx=f1xdx+f2xdx+\cdots+fkxdx$(7.7)

◄ Isbot.Tenglikning ikkala tomonini differensiallab topsak

$$[\int[f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_k(x)]dx]' = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_k(x)$$

$$[\int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx + \cdots + \int f_k(x)dx]' = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_k(x)$$

YUqoridagi xossadagi kabi (7.7) tenglikning ikki tomoni o‘zgarmas ma’nosida o‘zaro teng bo‘lganligi uchun teorema o‘rinli. ►

7.4-Teorema. Agar (7.2) tenglik o‘rinli bo‘lsa, har doim quyidagilarni yozish mumkin:

$$\int f(x+b)dx = F(x+b) + C \tag{7.8}$$

$$\int f(ax)dx = \frac{1}{a}F(ax) + C \tag{7.9}$$

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C \tag{7.10}$$

◄Isbot. Biz umumiy bo‘lgan oxirgi holni isbotlaymiz. Buning uchun (7.10) tenglikning chap va o‘ng tomonlarini differensiallaymiz

$$[\int f(ax+b)dx]' = f(ax+b),$$

$$\left[\frac{1}{a}F(ax+b) + S\right]' = \frac{1}{a}\big(F(ax+b)\big)' = \frac{1}{a}F'(ax+b)a = F'(ax+b) = f(ax+b)$$

CHap va o‘ng tomon hosilalari teng, shuning uchun (10) tenglik o‘rinli bo‘ladi.►

YUqoridagi teoremalar qo‘llanishiga doir misollar qaraylik.

7.1-Misol. $\int\left(3x^{\frac{2}{3}} + \frac{4}{\sqrt{x}} - x^4 + 7\right)dx$ integralni hisoblang.

$$►\int\left(3x^{\frac{2}{3}}+\frac{4}{\sqrt{x}}-x^4+7\right)dx=\int\left(3x^{\frac{2}{3}}+4x^{-\frac{1}{2}}-x^4+7\right)dx=$$

$$=3\frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}+4\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}-\frac{x^5}{5}+7x+C=\frac{9}{5}x^{\frac{5}{3}}+8x^{\frac{3}{2}}-\frac{x^5}{5}+7x+C. ◄$$

7.2-Misol. $\int\frac{1}{\sqrt{3x-4}}dx$ integralni hisoblang.

►Integral ostidagi ifodani shakl almashtirsak

$$\int\frac{1}{\sqrt{3x-4}}dx=\int(3x-4)^{-\frac{1}{2}}dx$$

Darajali funksiyaning integrali va (7.10) formulaga ko‘ra

$$\int\frac{1}{\sqrt{3x-4}}dx=\frac{1}{3}\frac{(3x-4)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C=\frac{2}{3}(3x-4)^{\frac{1}{2}}+C. ◄$$

7.5. Bo‘laklab integrallash va o‘zgaruvchini almashtirish usuli.

Integrallash amali – differensiallashga teskari bo‘lganligi uchun, differensiallashda qo‘llaniladigan ko‘pchilik usullarni aniqmas integralni hisoblashga ham qo’llash mumkin. Masalan yig‘indida bu amallar bir xil hisoblanadi yoki o‘zgarmas ko‘paytuvchini ikkala amaldan ham tashqariga chiqarish mumkin.

Bo‘laklab integrallash usuli.

Bu usul ko‘paytmaning differensiali formulasidan kelib chiqadi. $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalar x bo‘yicha differensiallanuvchi bo‘lsin. Bu holda

$$d(uv)=udv+vdu$$

yoki

$$udv=d(uv)-vdu$$

Oxirgi tenglikni integrallab topsak

$$\int udv=\int d(uv)-\int vdu$$

yoki

$$\int udv=uv-\int vdu \tag{7.11}$$

Hosil bo‘lgan tenglikka **bo‘laklab integrallash formulasi** deb ataladi.

Mazkur formuladan foydalanishda aniqmas integral ostidagi ifodani shunday bo‘laklarga ajratish lozimki, natijada tenglikning o‘ng tomonidagi integral dastlabkisiga qaraganda sodda integralga keladigan bo‘lsin. Ushbu formulaning qo‘llanilishiga doir bir necha misol qaraylik.

7.3-Misol. $\int xe^{2x}dx$ ni hisoblang.

►u sifatida x ni, dv ni $e^{2x}dx$ deb olsak, $du = dx$ va $v = \frac{1}{2}e^{2x}$ bo‘ladi. Demak,

$$\int xe^{2x}dx = \left| \begin{matrix} u = x \\ du = dx \\ dv = e^{2x}dx \\ v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{matrix} \right| = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C. ◄$$

Ko‘rib turibmizki bir marta bo‘laklash formulasi qo‘llanilganidan so‘ng jadval integraliga keldik.

7.4-Misol. $\int lnxdx$ ni hisoblang.

$$►\int lnxdx = \left| \begin{matrix} u = lnx \\ du = \frac{1}{x}dx \\ dv = dx \\ v = x \end{matrix} \right| = xlnx - \int x\frac{dx}{x} = xlnx - \int dx = xlnx - x + C ◄$$

$x^k a^x,\ x^k sinx,\ x^k cosx,\ x^k lnx,\ x^k arctgx,\ x^k arcsinx,\ e^{ax}sinbx,\ e^{ax}cosbx$ kabi hamda ularga o‘xshash funksiyalar bo‘laklab integrallash usuli yordamida integrallanadi. x^k qatnashgan hollarda (k natural son) k nechaga teng bo‘lsa shuncha marta bo‘laklab integralashga to‘g‘ri keladi.

7.5-Misol. $\int x^2 sinxdx$ integralni hisoblang.

$$►\int x^2 sinxdx = \left| \begin{matrix} u = x^2 \\ du = 2xdx \\ dv = sinxdx \\ v = -cosx \end{matrix} \right| = -x^2cosx + 2\int xcosxdx =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = x \\ du = dx \\ dv = cosxdx \\ v = sinx \end{matrix} \right| = -x^2cosx + 2xsinx - 2\int sinxdx =$$

$$= -x^2cosx + +2xsinx + 2cosx + C. ◄$$

$I_1 = \int e^{ax} cosbxdx$ va $I_2 = \int e^{ax} sinbxdx$ kabi integrallarni hisoblashda integral ostidagi ifoda $e^{ax} = u$, $cosbxdx = dv$ yoki $sinbxdx = dv$ kabi bo‘laklariga ajratiladi. Bo‘laklab integrallash formulasi bir marta qo‘llanilganda yana yuqoridagi integrallarga o‘xshash integrallar hosil bo‘ladi. U yerda yana bir marta bo‘laklab integrallash usuli qo‘llaniladi. Natijada yana dastlabki integralga o‘xshash integral hosil bo‘ladiki, uni chap tomonga o‘tkazib berilgan integral hisoblanadi.

$$► \int e^{ax} sinbxdx = \begin{vmatrix} u = e^{ax} \\ du = ae^{ax}dx \\ dv = sinbxdx \\ v = -\frac{1}{b}cosbx \end{vmatrix} = -\frac{1}{b}e^{ax}cosbx + \frac{a}{b}\int e^{ax} cosbxdx =$$

$$= \begin{vmatrix} u = e^{ax} \\ du = ae^{ax}dx \\ dv = cosbxdx \\ v = \frac{1}{b}sinbx \end{vmatrix} = -\frac{1}{b}e^{ax}cosbx + \frac{a}{b}\left[\frac{1}{b}e^{ax}sinbx - \frac{a}{b}\int e^{ax} sinbxdx\right]$$

O‘zgaruvchini almashtirish (o‘rniga qo‘yish) usuli.

Aytaylik, $\int f(x)dx$ integralni hisoblash lozim bo‘lsin, lekin integral mavjudligi ma’lum bo‘lsada, integral belgisi ostidagi funksiyaga boshlang‘ich funksiyani bevosita topish mumkin bo‘lmasin. U holda, ushbu integralda o‘zgaruvchini shunday o‘zgartirish lozim bo‘ladiki, natijada qaralayotgan integral bevosita integrallanadigan bo‘lsin.

Aytaylik, $x = \varphi(t)$ funksiya o‘zining argumentiga nisbatan uzluksiz differensiallanuvchi funksiya bo‘lib, unga $t = \psi(x)$ teskari funksiya mavjud bo‘lsin. Agar $dx = \varphi'(t)dt$ ekanligini e’tiborga olsak, yuqoridagi integral quyidagicha o‘zgaradi:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \qquad (7.12)$$

Uni hisoblab, natijaga $t = \psi(x)$ qo‘yilsa, dastlabki integral hisoblangan bo‘ladi. Odatda, (7.12) ni aniqmas integralda **o‘zgaruvchini almashtirish** yoki **o‘rniga qo‘yish formulasi** deb yuritiladi.

(7.12) tenglikning to‘g‘ri ekanligiga, uning ikkala tomonini x bo‘yicha differensiallab ishonch hosil qilish mumkin. Ma’lumki, chap tomon uchun

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$$

O‘ng tomon uchun x bo‘yicha hosila olishda t ni oraliq o‘zgaruvchi sifatida qaraymiz va $x'_t = \varphi'(t)$, $t'_x = \frac{1}{x'_t} = \frac{1}{\varphi'(t)}$ ekanligini e’tiborga olamiz

$$\left(\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\right)'_x = \left(\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\right)'_t t'_x = f(\varphi(t))\varphi'(t)\frac{1}{\varphi'(t)} =$$

$$= f(\varphi(t)) = f(x)$$

SHunday qilib (7.12) tenglikning o‘ng va chap tomonlaridan x bo‘yicha olingan hosilalar teng ekan, ya’ni (7.12) tenglik to‘g‘riligi isbotlandi.

Eslatma: Integrallashda o‘zgaruvchini almashtirish uchun ko‘pchilik hollarda almashtirishni $x = \varphi(t)$ kabi emas, balki $t = \psi(x)$ kabi olish qulay bo‘ladi.

Quyida aniqmas integralda o‘zgaruvchini almashtirishga doir bir necha misol keltiramiz.

7.6-Misol. $\int x\sqrt{x-1}dx$ ni hisoblang.

►$t = \sqrt{x-1}$ almashtirish kiritamiz, u holda, $x = t^2 + 1 \; va \; dx = 2tdt$

Natijada,

$$\int x\sqrt{x-1}dx = \int (t^2+1)\cdot t \cdot 2tdt = 2\int (t^4+t^2)\,dt = \frac{2}{5}t^5 + \frac{2}{3}t^3 + C ==$$

25(x−1)52+23(x−1)32+C. ◄

7.7-Misol. $\int cosx\sqrt{sinx}dx$ ni hisoblang.

►$t = sinx$ almashtirish bajaramiz, u holda $dt = cosxdx$.
Demak,

$$\int cosx\sqrt{sinx}dx = \int \sqrt{t}dt = \int t^{\frac{1}{2}}dt = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}sin^{3/2}x + C. \text{ ◄}$$

7.8-Misol. $\int \sqrt{a^2 - x^2}dx$ hisoblansin.

►Bu yerda, $x = asint$ almashtirishdan foydalanamiz. $dx = acostdt$ $\left(-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2} \; va - a \leq x \leq a\right)$ ga ko‘ra, quyidagini yoza olamiz:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \int \sqrt{a^2 - a^2 sin^2 t}\, acostdt = a^2 \int cos^2 t\, dt =$$

=a21+cos2t2dt=a22t+a24sin2t+C=a22t+a22sintcost+C.

Agar $t = arcsin\frac{x}{a}$ va $cost = \sqrt{1 - sin^2 t} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ ekanligini inobatga olsak,

natijada, $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{a^2}{2} arcsin\frac{x}{a} + \frac{a^2}{2}\frac{x}{a}\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} + C = \frac{a^2}{2} arcsin\frac{x}{a} +$

$+x2a2-x2+C.$◀

7.6. Ratsional kasrlar. Eng sodda kasr funksiyalar va ularni integrallash.

Har qanday funksiyani ham integrallaganda elementar funksiyalar yordamida ifodalab bo‘lmaydi. Bunga ko‘plab misollar keltirishimiz mumkin. SHuning uchun integrallari elementar funksiyalar yordamida ifodalanuvchi funksiyalar sinflarini ajratish muhimdir. Integrallari etarlicha sodda amallar ketma- ketligi yordamida topiluvchi funksiyalar sinfiga **ratsional funksiyalar** kiradi. Ma’lumki, har qanday $R(x)$ ratsional funksiya ikkita $P(x)$ va $Q(x)$ ko‘phadlarning nisbati sifatida qaralishi mumkin

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Aytaylik, suratdagi $P(x)$ ko‘phadning darajasi m maxrajdagi ko‘phad $Q(x)$ darajasi n dan katta yoki teng bo‘lsin. Agar $P(x)$ ko‘phadni $Q(x)$ ga bo‘lsak, bo‘linmada biror $N(x)$ ko‘phad, qoldiqda esa darajasi $n - 1$ dan katta bo‘lmagan $P_1(x)$ ko‘phad hosil bo‘ladi. Demak, berilgan kasrni quyidagicha yozish mumkin

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = N(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)}$$

Biz $N(x)$ ko‘phadni integrallashni bilganimiz tufayli, ixtiyoriy ratsional kasrni integrallash suratining darajasi maxraj darajasidan past bo‘lgan kasrni integrallashga keltirilar ekan. SHuning uchun bundan keyin $R(x)$ ratsional kasr haqida gapirganimizda har doim $m < n$ deb faraz qilamiz. Bunday kasrlar **to‘g‘ri kasr** deb ataladi. Noto‘g‘ri kasrning butun qismini ajratib olishga quyidagi misolni ko‘rishimiz mumkin

$$\frac{x^4 + 3x^2 - 5x + 6}{x^2 - 3x + 2} = x^2 + 3x + 10 + \frac{19x - 14}{x^2 - 3x + 2}$$

Avvalo to‘g‘ri kasrlarni integrallash jarayonida muhim bo‘lgan quyidagi **eng sodda kasr funksiyalar** deb ataluvchi to‘rt turdagi funksiyalarni qaraylik

$$\frac{A}{ax+b} \tag{7.13}$$

$$\frac{A}{(ax+b)^m} \tag{7.14}$$

$$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} \tag{7.15}$$

$$\frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n} \tag{7.16}$$

Bu yerda, a,b,c,A,B lar ixtiyoriy haqiqiy sonlar bo‘lib, m, n ($m\geq 2$, $n\geq 2$) natural sonlardir. SHuningdek, (7.15) va (7.16) xildagi kasr funksiyalari maxrajidagi kvadrat uchhadda $D = b^2 - 4ac < 0$ deb faraz qilinadi.

YUqorida qaralayotgan (7.13) va (7.14) xildagi kasr funksiyalarni integrallash bevosita jadval integraliga keltiriladi.

$$\int \frac{Adx}{ax+b} = \frac{A}{a}\int \frac{d(ax+b)}{ax+b} = \frac{A}{a} ln|ax+b| + C$$

$$\int \frac{A\,dx}{(ax+b)^m} = \frac{A}{a}\int \frac{d(ax+b)}{(ax+b)^m}$$

$$= \frac{A}{a}\int (ax+b)^{-m}\, d(ax+b) = \frac{A}{a}\frac{(ax+b)^{-m+1}}{-m+1} + C =$$

$$= -\frac{A}{a(m-1)(ax+b)^{m-1}} + C$$

(7.15) va (7.16) xildagi kasr funksiyalarni integrallash uchun ularning maxrajidagi kvadrat uchhaddan to‘la kvadrat ajratish usulini qo‘llaymiz.

$$\int \frac{(Ax+B)\,dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a}\int \frac{(Ax+B)\,dx}{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}} = \frac{1}{a}\int \frac{(Ax+B)\,dx}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}} =$$

$$= \frac{1}{a}\int \frac{(Ax+B)\,dx}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}} = \left| \begin{matrix} \frac{4ac-b^2}{4a^2} = k^2 \\ x+\frac{b}{2a} = t \\ dx = dt \end{matrix} \right| = \frac{1}{a}\int \frac{\left(A\left(t-\frac{b}{2a}\right)+B\right)\,dt}{t^2+k^2} =$$

$$= \frac{B-\frac{Ab}{2a}}{a}\int \frac{dt}{k^2+t^2} + \frac{A}{a}\int \frac{tdt}{k^2+t^2} = \frac{2aB-Ab}{2a^2}\frac{1}{k}arctg\frac{t}{k} + \frac{A}{2a}ln|k^2+t^2| + C$$

Oxirgi natijada yangi t o‘zgaruvchidan x o‘zgaruvchisiga o‘tilsa, (7.15) xildagi sodda kasr batamom integrallangan bo‘ladi.

$$\int \frac{(Ax+B)\,dx}{ax^2+bx+c} = \frac{2aB-Ab}{a\sqrt{4ac-b^2}} arctg\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} + \frac{A}{2a} ln|ax^2+bx+c| + C$$

(7.16) xildagi sodda kasrni integrallash biroz murakkab hisoblashlarni talab etadi va uni hisoblashda ham yuqoridagi tarzdagi amallar bajariladi.

$$\int \frac{(Ax+B)\,dx}{(ax^2+bx+c)^n} = \frac{1}{a^n}\int \frac{(Ax+B)\,dx}{\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)^n} = \frac{1}{a^n}\int \frac{(Ax+B)\,dx}{\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right]^n} =$$

$$= \frac{1}{a^n}\int \frac{(Ax+B)\,dx}{\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]^n} = \left| \begin{array}{c} \frac{4ac-b^2}{4a^2} = k^2 \\ x+\frac{b}{2a} = t \\ dx = dt \end{array} \right| = \frac{1}{a^n}\int \frac{\left(A\left(t-\frac{b}{2a}\right)+B\right)dt}{(t^2+k^2)^n} =$$

$$= \frac{B-\frac{Ab}{2a}}{a^n}\int \frac{dt}{(t^2+k^2)^n} + \frac{A}{a^n}\int \frac{tdt}{(t^2+k^2)^n} = \frac{2aB-Ab}{2a^{n+1}}\int \frac{dt}{(t^2+k^2)^n} + \frac{A}{2a^n(n-1)(t^2+k^2)^{n-1}} \qquad (7.17)$$

(7.17) ifodadagi $\int \frac{dt}{(t^2+k^2)^n}$ integralni Y_n bilan belgilab olamiz va uni hisoblaymiz.

$$Y_n = \int \frac{dt}{(t^2+k^2)^n} = \frac{1}{k^2}\int \frac{k^2dt}{(t^2+k^2)^n} = \frac{1}{k^2}\int \frac{k^2+t^2-t^2dt}{(t^2+k^2)^n} = \frac{1}{k^2}\int \frac{dt}{(t^2+k^2)^{n-1}} - \int \frac{t\,tdt}{(t^2+k^2)^n} =$$

$$= \left| \begin{array}{c} u = t \\ dv = \frac{tdt}{(t^2+k^2)^n} \\ v = -\frac{1}{2(n-1)(t^2+k^2)^{n-1}} \end{array} \right| = \frac{1}{k^2}Y_{n-1} - \frac{1}{k^2}\left[\frac{-t}{2(n-1)(t^2+k^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)}\int \frac{dt}{(t^2+k^2)^{n-1}}\right]$$

Oxirgi ifodani qayta guruhlab topsak

$$Y_n = \frac{1}{k^2}\cdot\frac{2n-3}{2(n-1)}\int \frac{dt}{(t^2+k^2)^{n-1}} + \frac{1}{k^2}\frac{t}{2(n-1)(t^2+k^2)^{n-1}} \qquad (7.18)$$

(7.18) dagi $Y_{n-1} = \int \frac{dt}{(t^2+k^2)^{n-1}}$ integralda yana yuqoridagi usulni qo‘llasak, natijada $Y_{n-2} = \int \frac{dt}{(t^2+k^2)^{n-2}}$ ga kelamiz. SHu yo‘sinda davom eta borib, oxirida $Y_1 = \int \frac{dt}{t^2+k^2}$ ni hosil qilamiz. Bu esa jadval integralidir. SHunday qilib, barcha topilgan natijalarni o‘rinlariga qo‘yib, oxiri Y_n ning qiymatini hisoblaymiz va u qiymatni keltirib (7.17) ga qo‘yamiz. U yerda t o‘zgaruvchidan x o‘zgaruvchiga o‘tilsa, 4- xildagi eng sodda kasr funksiya batamom integrallanadi.

(7.16) integraldagi *n* ni ketma- ket pasaytirish jarayonini rekurrent formula deb yuritiladi.

Eng sodda ratsional funksiyalarni integrallashga doir misollar qaraylik.

7.9-Misol. $\int \frac{7x-2\, dt}{3x^2-5x+4}$ integralni hisoblang.

►Bu integral (7.15) turdagi integral bo‘lib, uni hisoblash qulay bo‘lishi uchun to‘la kvadrat ajratamiz

$$\int \frac{7x-2}{3x^2-5x+4}dx = \int \frac{\frac{7}{6}(6x-5)-2+\frac{35}{6}}{3x^2-5x+4}dx = \frac{7}{6}\int \frac{(6x-5)}{3x^2-5x+4}dx + \frac{23}{6}\int \frac{1}{3x^2-5x+4}dx =$$

$$= \frac{7}{6}\int \frac{d(3x^2-5x+4)}{3x^2-5x+4} + \frac{23}{6}\int \frac{12}{36x^2-60x+48}dx = \frac{7}{6}ln(3x^2-5x+4) +$$

$$+46\int \frac{1}{(6x-5)^2+23}dx = \frac{7}{6}ln(3x^2-5x+4) + \frac{46}{6}\int \frac{d(6x-5)}{(6x-5)^2+\left(\sqrt{23}\right)^2}dx =$$

$$= \frac{7}{6}ln(3x^2-5x+4) + \frac{\sqrt{23}}{3}arctg\frac{6x-5}{\sqrt{23}} + C. \blacktriangleleft$$

7.10-Misol. $\int \frac{3x+5}{(x^2-4x+7)^2}dx$ integralni hisoblang.

$$\blacktriangleright \int \frac{3x+5}{(x^2-4x+7)^2}dx = \int \frac{3x+5}{[(x-2)^2+3]^2}dx = \begin{vmatrix} t = x-2 \\ x = t+2 \\ dx = dt \end{vmatrix} = \int \frac{3t+6+5}{(t^2+3)^2}dt =$$

$$= 3\int \frac{t}{(t^2+3)^2}dt + 11\int \frac{dt}{(t^2+3)^2}.$$

Oxirgi ifodaning birinchi integralini bevosita hisoblash mumkin, ikkinchisini hisoblash uchun (7.18) formulani $n = 2$ da qo‘llaymiz.

$$\int \frac{3x+5}{(x^2-4x+7)^2}dx = \int \frac{d(t^2+3)}{(t^2+3)^2} + \frac{11}{3}\cdot\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+3} + \frac{11}{3}\frac{t}{2(t^2+3)} =$$

$$= -\frac{3}{2}\frac{1}{t^2+3} + \frac{11}{6}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{t}{\sqrt{3}} + \frac{11}{6}\frac{t}{t^2+3} + C = \frac{11t-9}{6(t^2+3)} + \frac{11}{6\sqrt{3}}arctg\frac{t}{\sqrt{3}} + C$$

Dastlabki o‘zgaruvchi x ga qaytib oxirgi natijani hosil qilamiz

$$\int \frac{3x+5}{(x^2-4x+7)^2}dx = \frac{11x-31}{6(x^2-4x+7)} + \frac{11}{6\sqrt{3}}arctg\frac{x-2}{\sqrt{3}} + C. \blacktriangleleft$$

7.7. Ratsional funksyalarni integrallash

Biror ko‘phadning ildizlari deyilganda, uning qiymatini 0 ga aylantiradigan argumentning qiymatlariga aytiladi.

Masalan, $5x^2-6x+6$ kvadrat uchhadning ildizlari bo‘lib $x = \frac{3}{5} \pm \frac{4}{5}i$ sonlari xizmat qiladi. CHunki ushbu qiymatlar kvadrat uchhadni 0 ga aylantiradi.

Algebraning asosiy teoremasiga ko‘ra har qanday n darajali ko‘phad karraliliklari bilan hisoblaganda rosa n ta ildizga ega bo‘ladi. SHu bilan birga bu ko‘phadning ildizlari yoki haqiqiy yoki o‘zaro qo‘shma kompleks sonlardan iborat bo‘ladi.

Bezu teoremasiga ko‘ra biror α haqiqiy soni $Q(x)$ ko‘phadning ildizi bo‘lsa, uni

$$Q(x) = (x - \alpha)S(x)$$

kabi ko‘paytuvchiga ajratish mumkin bo‘lib, bu erda $S(x)$ ko‘phadning darajasi $n - 1$ ga teng. Xuddi shu kabi $\alpha \pm i\beta$ sonlari ko‘phadning ildizlari bo‘lsa ko‘phad

$$Q(x) = (x^2 + px + q)T(x)$$

kabi ko‘paytuvchiga ajraydi. Agar ildizlar karralikka ega bo‘lsalar ko‘phad uchun mos ravishda

$$Q(x) = (x - \alpha)^k S(x)$$

yoki

$$Q(x) = (x^2 + px + q)^k T(x)$$

larni hosil qilamiz. Demak, barcha ildizlar bo‘yicha ko‘phadni ko‘paytuvchilarga ajratsak

$$Q(x) = (x - \alpha_1)^{k_1} \cdots (x - \alpha_i)^{k_i} (x^2 + p_1 x + q_1)^{r_1} \cdots \left(x^2 + p_j x + q_j\right)^{r_j}$$

ni hosil qilamiz. Bu yerda k_i va r_j lar mos ildizlarning karraliligini bildiradi.

Biz ko‘phadlarning ildizlarini qanday topish, ya’ni ko‘phadni qanday qilib ko‘paytuvchilarga ajratish masalasi bilan shug‘ullanmaymiz, chunki tenglamalarni echish algebraik masala bo‘lib, uning o‘zi murakkab jarayon. Ko‘paytuvchilarga ajratishni amaliy masala sifatida misollar echish jarayoni uchun qoldiramiz.

Aytaylik, $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ to‘g‘ri ratsional funksiyaning maxrajidagi $Q(x)$ ko‘phad quyidagicha ko‘paytuvchilarga ajralgan bo‘lsin:

$$Q(x) = (x - \alpha_1)^{k_1} \cdots (x - \alpha_i)^{k_i} (x^2 + p_1 x + q_1)^{r_1} \cdots \left(x^2 + p_j x + q_j\right)^{r_j} \quad (7.19)$$

SHuningdek, bu yerdagi kvadrat uchhadlarning barchasining diskriminantlari noldan kichik hamda $k_1 + \cdots + k_i + 2(r_1 + \cdots + r_j) = n$ bo‘lsin.

$\frac{P(x)}{Q(x)}$ ratsional kasrning eng sodda kasrlarga yoyilmasida $Q(x)$ ko‘phadning har bir $(x - \alpha)^k$ ko‘paytuvchisiga

$$\frac{A_{11}}{x-\alpha}+\frac{A_{12}}{(x-\alpha)^2}+\cdots+\frac{A_{1k}}{(x-\alpha)^k}$$

Xuddi shu kabi har bir $(x^2+px+q)^r$ ko‘paytuvchiga

$$\frac{B_{11}x+C_{11}}{x^2+px+q}+\frac{B_{12}x+C_{12}}{(x^2+px+q)^2}+\cdots+\frac{B_{1r}x+C_{1r}}{(x^2+px+q)^r}$$

yig‘indi mos keladi.

U holda quyidagi qoida o‘rinli bo‘ladi:

Agar $R(x)$ to‘g‘ri ratsional funksiyaning maxrajidagi ko‘phad (7.19) kabi ifodalanadigan bo‘lsa, uni quyidagicha eng sodda kasr funksiyalarning yig‘indisi shaklida ifodalash mumkin:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_{11}}{x-\alpha_1}+\frac{A_{12}}{(x-\alpha_1)^2}+\cdots+\frac{A_{1k_1}}{(x-\alpha_1)^{k_1}}+\frac{A_{21}}{x-\alpha_2}+\frac{A_{22}}{(x-\alpha_2)^2}+\cdots+\frac{A_{1k_2}}{(x-\alpha_2)^{k_2}}\cdots+\frac{A_{i1}}{x-\alpha_i}+$$

$$+\frac{A_{i2}}{(x-\alpha_i)^2}+\cdots+\frac{A_{ik_i}}{(x-\alpha_i)^{k_i}}+\frac{B_{11}x+C_{11}}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{B_{12}x+C_{12}}{(x^2+p_1x+q_1)^2}+\cdots+\frac{B_{1r_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{r_1}}+$$

$$+\frac{B_{21}x+C_{21}}{x^2+p_2x+q_2}+\frac{B_{22}x+C_{22}}{(x^2+p_2x+q_2)^2}+\cdots+\frac{B_{2r_2}x+C_{2r_2}}{(x^2+p_2x+q_2)^{r_2}}+\cdots+\frac{B_{j1}x+C_{j1}}{x^2+p_jx+q_j}+\frac{B_{j2}x+C_{j2}}{\left(x^2+p_jx+q_j\right)^2}+$$

$$\cdots+\frac{B_{jr_j}x+C_{jr_j}}{\left(x^2+p_jx+q_j\right)^{r_j}} \qquad (7.20)$$

Hosil bo‘lgan yoyilmadagi $A_{11},A_{12},\dots,B_{11},B_{12},\dots,C_{11},C_{12}\dots$ noma’lum koeffitsientlarni aniqlash uchun quyidagi mulohazalardan foydalanamiz:

(7.20) tenglik ayniyatdan iborat bo‘lganligi uchun bu tenglikning o‘ng tomoniga umumiy maxraj bersak, tenglikning ikkala tomonining maxrajlari o‘zaro teng bo‘ladi. Natijada, darajalari bir xil bo‘lgan ikkita ko‘phadlar tengligini hosil qilamiz. x ning bir xil darajalari oldidagi mos koeffitsientlarni tenglashtirsak noma’lum $A_{11},A_{12},\dots,B_{11},B_{12},\dots,C_{11},C_{12}$.. koeffitsientlarni aniqlash uchun chiziqli tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. Ratsional funksiyani eng sodda kasr funksiyalarga yoyishning bu usuliga **noma’lum koeffitsientlar usuli** deb ataladi.

SHunday qilib to‘g‘ri ratsional funksiyani integrallash 4 xildagi eng sodda kasr funksiyalarni integrallashga keltirilar ekan. Bunda quyidagicha 4 ta hol bo‘lishi mumkin.

1-hol. Agar $R(x)$ to‘g‘ri ratsional funksiyaning mahrajidagi $Q(x)$ ko‘phadning ildizlari haqiqiy sonlar bo‘lib, ular bir-biriga teng bo‘lmasalar, u holda $R(x)$ faqatgina birinchi xildagi eng sodda kasr funksiyalarni integrallashga keltiriladi.

►Masalan:

$$\int \frac{2x+3}{(x-3)(x-4)}dx = \int \left[\frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-4}\right]dx$$

Oxirgi integraldagi ifodaga umumiy maxraj berib, mos tengliklarni yozamiz:

$$A(x-4) + B(x-3) = 2x+3$$

$$\begin{cases} A+B=2 \\ 4A+3B=3 \end{cases} \qquad \begin{cases} A=-9 \\ B=11 \end{cases}$$

Aniqlangan koeffitsientlarni integralga qo‘ysak jadval integrallari hosil bo‘ladi.

$$\int \frac{2x+3}{x^2-7x+12}dx = \int \left[\frac{-9}{x-3} + \frac{11}{x-4}\right]dx = -9\int \frac{1}{x-3}dx + 11\int \frac{1}{x-4}dx =$$

$$= -9ln|x-3| + 11ln|x-4| + C. ◄$$

2-hol. Agar $R(x)$ ning mahrajidagi ko‘phad faqat haqiqiy ildizlargagina ega bo‘lib, undan ayrimlari takrorlanuvchi (karrali) bo‘lsa, uni integrallash 1-chi va 2-chi xildagi eng sodda kasr funksiyalarni integrallashga keltiriladi.

►Masalan:

$$\int \frac{dx}{(x-1)^2(x+4)} = \int \left[\frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+4}\right]dx$$

YUqoridagi kabi amallarni bajarsak

$$\frac{1}{(x-1)^2(x+4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+4}$$

$$A(x-1)(x+4) + B(x+4) + C(x-1)^2 = 1$$

$$\begin{cases} A+C=0 \\ 3A+B-2C=0 \\ -4A+4B+C=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} A=-\frac{1}{25} \\ B=\frac{1}{5} \\ C=\frac{1}{25} \end{cases}$$

Demak

$$\int \frac{dx}{(x-1)^2(x+4)} = -\frac{1}{25}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{5}\int \frac{dx}{(x-1)^2} + \frac{1}{25}\int \frac{dx}{x+4} =$$

$$= -\frac{1}{25}ln|x-1| - \frac{1}{5}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{25}ln|x+4| = \frac{1}{25}ln\left|\frac{x+4}{x-1}\right| - \frac{1}{5}\frac{1}{x-1} + C. ◄$$

Ushbu misolda ko‘rganimizdek, noma’lum koeffitsientlarni topish uchun qavslarni ochish, guruhlash va tenglamalar sistemasini echish kabi etarlicha katta hajmli amallarni bajarishni chetlab o‘tish uchun **ixtiyoriy qiymatlar usulini** qo‘llash mumkin. Bu usulning ma’nosi shundan iboratki, noma’lum koeffitsientlarni topish uchun ikki tomon suratlarini tenglashtirilganda x ga turlicha qiymatlar beriladi. Hisoblashlarni osonlashtirish uchun maxraj nolga aylanadigan qiymatlar berilishi qulay. Masalan, yuqoridagi misolda 1 va -4 qiymatlar yordamida koeffitsientlar osongina aniqlanadi.

3-hol. Agar $R(x)$ ning maxrajidagi ko‘phadning ildizlari orasida ham haqiqiy karrali, ham har xil kompleks ildizlar uchrasa, uni integrallash 1-nchi, 2-nchi va 3-nchi xildagi eng sodda kasrlarni integrallashga keltiriladi.

►Masalan:

$\int \frac{x^4+3x^2-5}{x^3+2x^2+5x}dx$ integralni hisoblash talab etilgan bo‘lsin. Ratsional funksiya suratining darajasi maxrajnikidan yuqori bo‘lganligi uchun kasrning butun va to‘g‘ri kasr qismini ajratib olamiz

$$\frac{x^4+3x^2-5}{x^3+2x^2+5x} = x-2+\frac{2x^2+10x-5}{x^3+2x^2+5x}$$

Demak

$$\int \frac{x^4+3x^2-5}{x^3+2x^2+5x}dx = \int (x-2)dx + \int \frac{2x^2+10x-5}{x(x^2+2x+5)}dx =$$

$$= \frac{(x-2)^2}{2} + \int \left(\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+5}\right)dx$$

Oxirgi integralda umumiy maxraj berib mos kasrlarni tenglashtirsak

$$2x^2+10x-5 = A(x^2+2x+5)+Bx^2+Cx$$

ni hosil qilamiz. Bu yerda ixtiyoriy qiymatlar usuliga ko‘ra $x=0$ deb olsak $A=-1$ ekanligi kelib chiqadi, natijada

$$3x^2+12x = Bx^2+Cx$$

ni hosil qilamiz. Bu yerdan $B=3, C=12$ larni topamiz. U holda:

$$\int \frac{x^4+3x^2-5}{x^3+2x^2+5x}dx = \frac{(x-2)^2}{2} + \int \left(-\frac{1}{x}+\frac{3x+12}{x^2+2x+5}\right)dx = \frac{(x-2)^2}{2} - ln|x| +$$

$$+\frac{3}{2}\int \frac{2x+2+6}{x^2+2x+5}dx = \frac{(x-2)^2}{2} - ln|x| + \frac{3}{2}\int \frac{(2x+2)dx}{x^2+2x+5} + 9\int \frac{dx}{(x+1)^2+4} =$$

$$=\frac{(x-2)^2}{2}-ln|x|+\frac{3}{2}ln|x^2+2x+5|+\frac{9}{2}arctg\frac{x+1}{2}+C. ◄$$

4-hol. Agar to‘g‘ri ratsional funksiyaning maxraji ham haqiqiy karrali, ham kompleks karrali ildizlarga ega bo‘lsa, u holda uni integrallash to‘rtala xildagi eng sodda kasr funksiyalarni integrallashga keltiriladi.

$$►\int\frac{2xdx}{(x+1)(x^4+2x^2+1)}=\int\frac{2xdx}{(x+1)(x^2+1)^2}=\int\left(\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}\right)dx$$

YUqoridagi kabi amallarni bajarib quyidagi tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ B+C=0 \\ 2A+B+C+D=0 \\ B+C+D+E=2 \\ A+C+E=0 \end{cases}$$

Bu sistemani yechib topsak $A=-\frac{1}{2}, B=\frac{1}{2}, C=-\frac{1}{2}, D=1, E=1$

Topilgan koeffitsiyentlarni yuqoridagi integralga olib borib qo‘yamiz va uni hisoblaymiz

$$\int\frac{2xdx}{(x+1)(x^4+2x^2+1)}=-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1}+\frac{1}{2}\int\frac{x-1}{x^2+1}dx+\int\frac{x+1}{(x^2+1)^2}dx=$$

$$=-\frac{1}{2}ln|x+1|+\frac{1}{4}ln|x^2+1|+\frac{x-2}{2(x^2+1)^2}+C. ◄$$

7.8. Irratsional funksiyalarni integrallash

Irratsional funksiyalarni integrallash ancha murakkab jarayon bo‘lib, ularning integrali har doim ham elementar funksiyalar bilan ifodalanavermaydi. Mumkin bo‘lgan hollarda irratsionalliklar u yoki bu usul yordamida har qanday holda chekli qadamda integrallanadigan ratsional funksiyaga keltiriladi. Quyida biz ayrim algebraik irratsionalliklarni integrallash jarayonini ko‘rib o‘tamiz.

1. $\int R(x, x^{\alpha}, x^{\beta}, \ldots, x^{\gamma})dx$ kabi integralni hisoblash lozim bo‘lsin. Bu yerda R o‘zining argumentlariga nisbatan ratsional funksiyadir, $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$ lar esa ratsional sonlar. Ushbu integral $x=z^n$ va $dx=nz^{n-1}dz$ almashtirishlar yordamida yangi o‘zgaruvchi z ga nisbatan ratsional funksiyani integrallashga keltiriladi. Bu yerdagi $n-\alpha, \beta, \ldots, \gamma$ kasr sonlarning umumiy maxrajidir.

7.11-Misol. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[4]{x^3}+4}$ ni hisoblang.

►Ildiz koʻrsatgichlari 2 va 4 uchun 4 soni EKUK boʻlganligi uchun $x = z^4$ deb olamiz. U holda $dx = 4z^3dz$, $\sqrt{x} = z^2$, $\sqrt[4]{x^3} = z^3$ ekanligidan

$$\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[4]{x^3}+4} = \int \frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{x^{3/4}+4} = 4\int \frac{z^2}{z^3+4} z^3dz = 4\int \left(z^2 - \frac{4z^2}{z^3+4}\right)dz = \frac{4}{3}z^3 -$$

$$\frac{16}{3}ln|z^3+4| + C = \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} - \frac{16}{3}ln\left|\sqrt[4]{x^3}+4\right| + C. ◄$$

2. Quyidagi $\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\alpha}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\beta}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\gamma}\right]dx$ kabi integralni hisoblash uchun $\frac{ax+b}{cx+d} = z^n$ almashtirishdan foydalaniladi, bu yerda n soni $\alpha, \beta, \dots, \gamma$ ratsional sonlarining umumiy maxraji. Natijada irratsionallik yangi integrallash oʻzgaruvchisi z ga nisbatan ratsional funksiyaga oʻzgaradi.

7.12-Misol. $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx$ ni hisoblang.

►Bu integralni hisoblash uchun $\frac{x-1}{x+1} = z^2$, $\frac{1+z^2}{1-z^2} = x$, $dx = \frac{4zdz}{(1-z^2)^2}$ kabi almashtirishni bajaramiz, natijada

$$\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx = -4\int \frac{z^2dz}{(z^2-1)(z^2+1)} = \int \left[\frac{A}{z+1} + \frac{B}{z-1} + \frac{Cz+D}{z^2+1}\right]dz$$

$$A(z^2+1)(z-1) + B(z+1)(z^2+1) + Cz(z^2-1) + D(z^2-1) = z^2$$

Agar $z = -1$ deb olsak $A = -\frac{1}{4}$, $z = 1$ dan $B = \frac{1}{4}$, $z = 0$ dan $D = \frac{1}{2}$ va $C = 0$ ni aniqlaymiz. Demak

$$\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx = \int \frac{dz}{z+1} - \int \frac{dz}{z-1} - 2\int \frac{dz}{z^2+1} = ln\left|\frac{z+1}{z-1}\right| - 2arctgz + C =$$

$$ln\left|\frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}\right| - 2arctg\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + C. ◄$$

Xususan, yuqoridagi holda $ax+b$ ga nisbatan irratsionallik ishtirok etsa, u yerda $ax+b = z^n$ almashtirishdan foydalanish qulaydir.

3. $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$ koʻrinishidagi integrallar.

Quyidagi $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$ integralni hisoblash lozim boʻlsin. Dastlab ba’zi xususiy hollardan boshlaymiz.

a) Aytaylik $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ ni hisoblash kerak bo‘lsin. Ravshanki, $a<0$ va $D=b^2-4ac\le 0$ da integral ma’noga ega emas. Bu integralni hisoblash uchun kvadrat uchhaddan to‘la kvadrat ajratilib, integrallar jadvalidagi (14) yoki (16) formula qo‘llaniladi.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \int \frac{dx}{\sqrt{a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right)}} = \left| \begin{matrix} x+\frac{b}{2a}=t \\ dx=dt \end{matrix} \right| =$$

$$= \int \frac{dt}{\sqrt{a\left(t^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right)}}$$

Oxirgi integral a va D ning ishoralariga bog‘liq ravishda ikki xil tarmoqlanadi.

1) $a>0$ da

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}}} = \frac{1}{\sqrt{a}} ln\left|t+\sqrt{t^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}} ln\left|2ax+b+\sqrt{ax^2+bx+c}\right| + C$$

2) $a<0$ va $D>0$ da

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{-a}}\int \frac{dt}{\sqrt{-t^2+\frac{b^2-4ac}{4a^2}}} = \frac{1}{\sqrt{-a}}\int \frac{dt}{\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}-t^2}} = \frac{1}{\sqrt{-a}} arcsin \frac{\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}{t} +$$

$$+C = \frac{1}{\sqrt{-a}} arcsin \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2ax+b} + C$$

7.13-Misol. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+15}}$ integralni hisoblang

► $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+15}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+3)^2+6}} = \int \frac{d(x+3)}{\sqrt{(x+3)^2+6}} =$

$= ln\left|x+3+\sqrt{x^2+6x+15}\right| + C.$ ◄

7.14-Misol. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2-4x}}$ integralni hisoblang.

► $\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2-4x}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-(x^2+4x-5)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{9-(x+2)^2}} = \int \frac{d(x+2)}{\sqrt{9-(x+2)^2}} = arcsin\frac{x+2}{3} + C.$ ◄

b) $\int \frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ kabi integralni hisoblash lozim bo‘lsin.

Dastlab kasrning maxrajidagi ifodadan kvadrat uchhadning kvadrati ajratib olinadi va bu integralni ikkita integralning yig‘indisi shaklida yoziladi:

$$\int \frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \int \frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)}} = \int \frac{\left(A\left(x+\frac{b}{2a}\right)-\frac{Ab}{2a}+B\right)dx}{\sqrt{a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right)}} =$$

$$= A\int \frac{\left(x+\frac{b}{2a}\right)dx}{\sqrt{a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right)}} + \left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right)}}$$

Bu integrallarda $x+\frac{b}{2a}=t$ almashtirish bajarsak, birinchi integral darajali funksiyaning integraliga

$$\int \frac{\left(x+\frac{b}{2a}\right)dx}{\sqrt{a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right)}} = \int \frac{d\left(at^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right)}{\sqrt{a\left(t^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right)}} = \frac{1}{a}\sqrt{a\left(t^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right)} = \frac{1}{a}\sqrt{ax^2+bx+c}$$

ikkinchisi esa yuqorida hisoblangan integralga keladi.

7.15-Misol. $\int \frac{(4x+3)dx}{\sqrt{x^2+6x+15}}$ integralni hisoblang.

►$\int \frac{(4x+3)dx}{\sqrt{x^2+6x+15}} = \int \frac{2(2x+6)-9}{\sqrt{x^2+6x+15}}dx = 2\int \frac{(2x+6)dx}{\sqrt{x^2+6x+15}} - 9\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+15}} =$

$= 2\int \frac{d(x^2+6x+15)}{\sqrt{x^2+6x+15}} - 9\int \frac{dx}{\sqrt{(x+3)^2+6}} = 4\sqrt{x^2+6x+15} -$

$-9ln\left|x+3+\sqrt{x^2+6x+15}\right| + C.$ ◄

v) $\int \frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{ax^2+bx+c}}$ kabi integralni hisoblash lozim bo‘lsin.

Bu integralda $\frac{1}{x-\alpha}=t, x=\frac{1}{t}+\alpha, dx=-\frac{dt}{t^2}$ almashtirish bajaramiz:

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{ax^2+bx+c}} = \int \frac{t\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt}{\sqrt{a\left(\frac{1}{t^2}+\frac{2}{t}\alpha+\alpha^2\right)+b\left(\frac{1}{t}+\alpha\right)+c}} =$$

$$= -\int \frac{dt}{\sqrt{a+2a\alpha t+a\alpha^2t^2+bt+b\alpha t^2+c}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{(a\alpha^2+b\alpha)t^2+(2a\alpha+b)t+a+c}}$$

Demak shakl almashtirishlardan so‘ng a) bandda qaralgan integralga kelamiz.

g) Ko‘p hollarda $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$ $(a\neq 0)$ kabi integrallarni hisoblashda trigonometrik almashtirishlardan foydalaniladi. Buning uchun radikal ostidagi uchhaddan to‘la kvadrat ajratilib $t = x + \frac{b}{2a}$ almashtirish bajariladi. U holda $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{at^2 + \frac{4ac-b^2}{4a}}$.

Mumkin bo‘lgan barcha holatlarni qarab chiqamiz:

1. $a > 0$, $\frac{4ac-b^2}{4a} > 0$. Bu holda $a = p^2$, $\frac{4ac-b^2}{4a} = q^2$ belgilashlar kiritsak $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{p^2t^2 + q^2}$;

2. $a > 0$, $\frac{4ac-b^2}{4a} < 0$. Bu holda $a = p^2$, $\frac{4ac-b^2}{4a} = -q^2$ belgilashlar kiritsak $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{p^2t^2 - q^2}$

3. $a < 0$, $\frac{4ac-b^2}{4a} > 0$. Bu holda $a = -p^2$, $\frac{4ac-b^2}{4a} = q^2$ belgilashlar kiritsak $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{q^2 - p^2t^2}$;

4. $a < 0$, $\frac{4ac-b^2}{4a} < 0$. Bu holda $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ ildiz ma’noga ega emas.

SHunday qilib, $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx$ integral quyidagi

1. $\int R(t, \sqrt{p^2t^2 + q^2})dt$
2. $\int R(t, \sqrt{p^2t^2 - q^2})dt$
3. $\int R(t, \sqrt{q^2 - p^2t^2})dt$

integrallardan biriga keltiriladi.

Ularning birinchisini $t = \frac{q}{p}tgz$, ikkinchisini $t = \frac{q}{p}\frac{1}{cosz}$, uchinchisini esa, $t = \frac{q}{p}sinz$ almashtirishlar yordamida $sinz$ va $cosz$ ga nisbatan ratsional funksiyaga keltirib hisoblash mumkin.

7.16-Misol. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+2x+17)^3}}$ integralni hisoblang.

$$►\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+2x+17)^3}} = \int \frac{dx}{\sqrt{((x+1)^2+16)^3}} = |1 + x = t| = \int \frac{dt}{\sqrt{(t^2+16)^3}} =$$

$$= \left| \begin{array}{c} t = 4tgz \\ dt = \frac{4dz}{cos^2z} = \\ = 4(1 + tg^2z)dz \end{array} \right| = \int \frac{4(1+tg^2z)dz}{\sqrt{16^3(1+tg^2z)^3}} = \frac{1}{16}\int \frac{dz}{\sqrt{1+tg^2z}} = \frac{1}{16}\int cosz\, dz =$$

$$= \frac{1}{16}sinz + C = \frac{1}{16}\frac{tgz}{\sqrt{1+tg^2z}} + C = \frac{1}{16}\frac{t}{\sqrt{16+t^2}} + C = \frac{1}{16}\frac{1+x}{\sqrt{x^2+2x+17}} + C. ◄$$

d) $\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$ ko‘rinishidagi integral ham $t = x + \frac{b}{2a}$ almashtirish yordamida $\int \sqrt{p^2t^2 \pm q^2}\,dt$ yoki $\int \sqrt{q^2 - p^2t^2}\,dt$ integrallardan biriga keltiriladi, ular esa mos trigonometrik almashtirishlar yordamida ratsionallashtiriladi.

7.17- Misol. $\int \sqrt{3-4x^2+4x}\,dx$ integralni hisoblang.

$$►\int \sqrt{3-4x^2+4x}\,dx = 2\int \sqrt{1-\left(x-\tfrac{1}{2}\right)^2}\,dx = \left|\begin{matrix} x-\frac{1}{2}=t \\ dx = t \end{matrix}\right| =$$

$$= 2\int \sqrt{1-t^2}\,dt = \left|\begin{matrix} t = sinz \\ dt = coszdz \end{matrix}\right| = 2\int cos^2z\,dz =$$

$$= \int (1+cos2z)\,dz = \left(z + \tfrac{1}{2}sin2z\right) + C = (z + sinzcosz) + C =$$

$$= \left(arcsint + t\sqrt{1-t^2}\right) + C = \left(arcsin\left(x-\tfrac{1}{2}\right) + \left(x-\tfrac{1}{2}\right)\sqrt{\tfrac{3}{4} - x^2 + x}\right) + +C =$$

$$\tfrac{1}{4}\left(4arcsin\left(x-\tfrac{1}{2}\right) + (2x-1)\sqrt{3-4x^2+4x}\right) + C. ◄$$

Eslatma: Irratsional ifodalarni integrallashda yuqorida qaralgan usullardan tashqari Eyler almashtirishlari, differensial binomini integrallash kabi va boshqa shunga o‘xshash usullardan foydalaniladi.

7.9. Trigonometrik funksiyalarni integrallash.

SHu paytgacha integral ostidagi funksiyalar integral o‘zgaruvchisiga nisbatan ratsional yoki irratsional bo‘lgan hollarni qarab chiqqan edik. Ushbu mavzuda biz trigonometrik funksiyalarning integrallarini o‘rganamiz. Eng sodda hollardan boshlaylik.

1) $\int \boldsymbol{sinmx \cdot cosnxdx}$; $\int \boldsymbol{sinmx \cdot sinnxdx}$; $\int \boldsymbol{cosmx \cdot cosnxdx}$ (*m* va *n* lar ixtiyoriy haqiqiy sonlardir) kabi integrallar.

Bu ko‘rinishdagi integrallarni hisoblash lozim bo‘lsa, trigonometrik funksiyalarning ko‘paytmalarini yig‘indiga keltiruvchi quyidagi formulalardan foydalaniladi:

$$cos\alpha \cdot cos\beta = \tfrac{1}{2}[cos(\alpha+\beta) + cos(\alpha-\beta)],$$

$$cos\alpha \cdot cos\beta = \tfrac{1}{2}[cos(\alpha+\beta) - cos(\alpha-\beta)],$$

$$sin\alpha \cdot sin\beta = \frac{1}{2}[sin(\alpha+\beta) - sin(\alpha-\beta)].$$

7.18-Misol. $\int sin\frac{2}{3}x \cdot cos\frac{3}{5}xdx$ integralni hisoblang.

$$\blacktriangleright \int sin\frac{2}{3}x \cdot cos\frac{3}{5}xdx = \frac{1}{2}\int\left(sin\frac{19}{15}x + sin\frac{1}{15}x\right)dx =$$

$$\frac{1}{2}\int sin\frac{19}{15}xdx + +\frac{1}{2}\int sin\frac{x}{15}dx = -\frac{15}{38}cos\frac{19}{15}x - \frac{15}{2}cos\frac{x}{15} + C. \blacktriangleleft$$

2) $\int \boldsymbol{sin^n xdx}, \int \boldsymbol{cos^m xdx}$ ko‘rinishdagi integrallar.

Bu kabi integrallarni hisoblash lozim bo‘lsa, n va m sonlarining butun musbat, toq yoki juft sonlar ekanliklari hollari alohida qaraladi.

a) Agar $n = 2k+1$ va $m = 2p+1$ kabi toq sonlar bo‘lsa, ular quyidagicha almashtirish bilan ko‘phadni integrallashga olib kelinadi.

$$\int sin^{2k+1}xdx = \int sin^{2k}x \cdot sinxdx = \int (sin^2x)^k \cdot sinxdx =$$

$$= -\int (1-cos^2x)^k d(cosx);$$

$$\int cos^{2p+1}xdx = \int cos^{2p}x \cdot cosxdx = \int (1-sin^2x)^p d(sinx);$$

7.19-Misol. $\int cos^5xdx$ integralni hisoblang.

$$\blacktriangleright \int cos^5xdx = \int cos^4x \cdot cosxdx = \int (1-sin^2x)^2 d(sinx) =$$

$$= \int d(sinx) - 2\int sin^2xd(sinx) + \int sin^4xd(sinx) =$$

$$= sinx - \frac{2}{3}sin^3x + \frac{1}{5}sin^5x + C. \blacktriangleleft$$

b) Agar $n = 2k$ va $m = 2p$ musbat juft sonlar bo‘lsa, u holda $sin^2x = = \frac{1-cos2x}{2}$ va $cos^2x = \frac{1+cos2x}{2}$ formulalardan foydalanib integral ostidagi funksiyaning darajasi pasaytiriladi.

7.20-Misol. $\int sin^6xdx$ integralni hisoblang.

$$\blacktriangleright \int sin^6xdx = \int\left(\frac{1-cos2x}{2}\right)^3 dx = \frac{1}{8}\int (1 - 3cos2x + 3cos^2 2x - cos^3 2x)\,dx =$$

$$= \frac{x}{8} - \frac{3}{16}sin2x + \frac{3}{8}\int \frac{1+cos4x}{2}dx - \frac{1}{8}\int cos^2 2xcos2xdx =$$

$$= \frac{x}{8} - \frac{3}{16}sin2x + \frac{3}{16}\int dx + \frac{3}{16}\int cos4xdx - \frac{1}{16}\int (1-sin^2 2x)d(sin2x) =$$

$$=\frac{x}{8}-\frac{3}{16}sin2x+\frac{3}{16}x+\frac{3}{64}sin4x-\frac{1}{16}sin2x+\frac{1}{48}sin^3 2x+C=$$

$$=\frac{5}{16}x-\frac{1}{4}sin2x+\frac{3}{64}sin4x+\frac{1}{48}sin^3 2x+C. ◄$$

3) $\int \boldsymbol{sin^n x\cdot cos^m xdx}$ ko‘rinishdagi integrallar.

Bunday kurinishdagi integrallarni hisoblash uchun, (bu yerda *m* va *n* lar yana butun sonlar) quyidagi hollarni alohida o‘rganamiz:

a) Agar *n* va *m* butun sonlar hamda ulardan hech bo‘lmaganda biri toq son bo‘lsa (aniqlik uchun *n* toq bo‘lsin), u integralni hisoblash quyidagicha amalga oshiriladi.

$$\int sin^{2k+1}x\cdot cos^m xdx=\int sin^{2k}x\cdot cos^m x\cdot sinxdx=$$

$$\int(1-cos^2x)^k\cdot cos^m xd(cosx)=|t=cosx|=\int(1-t^2)^k\cdot t^m dt$$

Oxirgi integral esa ratsional funksiyaning integralidir.

7.21-Misol. $\int\frac{cos^3x}{sin^6x}dx$ integralni hisoblang.

$$►\int\frac{cos^3x}{sin^6x}dx=\int\frac{1-sin^2x}{sin^6x}d(sinx)=|t=sinx|=\int\frac{1-t^2}{t^6}dt=$$

$$=\int\left(\frac{1}{t^6}-\frac{1}{t^4}\right)dt=-\frac{1}{5sin^5x}+\frac{1}{3sin^3x}+C. ◄$$

b) *n* va *m* ham musbat juft sonlar bo‘lsa, qaralayotgan integralni hisoblash trigonometrik funksiyalarning darajalarini pasaytirish formulalari yordamida sin va cos ning darajalarini integrallashga keltiriladi.

7.22-Misol. $\int sin^6x\cdot cos^4xdx$ integralni hisoblang.

$$►\int sin^6x\cdot cos^4xdx=\int\left(\frac{1-cos2x}{2}\right)^3\left(\frac{1+cos2x}{2}\right)^2dx=$$

$$=\frac{1}{32}\int\big((1-cos2x)(1+cos2x)\big)^2(1-cos2x)dx=$$

$$=\frac{1}{32}\int(sin^2 2x)^2(1-cos2x)dx=\frac{1}{32}\int\left(\frac{1-cos4x}{2}\right)^2(1-cos2x)dx=$$

$$=\frac{1}{128}\int(1-2cos4x+cos^2 4x)(1-cos2x)dx=$$

$$=\frac{1}{128}\int(1-2cos4x+cos^2 4x-cos2x+2cos2xcos4x-cos^2 4xcos2x)dx=$$

$$= \frac{x}{128} - \frac{sin4x}{256} + \frac{1}{256}\int(1 + cos8x)dx - \frac{1}{256}sin2x + \frac{1}{128}\int(cos6x + cos4x)dx -$$

$$-\frac{1}{128}\int\frac{1+cos8x}{2}cos2xdx = \frac{3x}{256} - \frac{sin4x}{512} + \frac{sin8x}{2048} - \frac{3sin2x}{512} + \frac{sin6x}{1024} - \frac{sin10x}{5120} + C. ◀$$

v) Agar m va n butun juft sonlar bo‘lib, ulardan hech bo‘lmaganda bittasi manfiy bo‘lsa, yuqoridagi usulni qo‘llab bo‘lmaydi. Bu holda $tgx = z$ yoki $ctgx = z$ almashtirishdan foydalaniladi.

7.23-Misol. $\int\frac{sin^4x}{cos^{10}x}dx$ integralni hisoblang.

$$►\int\frac{sin^4x}{cos^{10}x}dx = \int tg^4x\frac{dx}{cos^6x} = \int tg^4x\frac{1}{cos^4x}\frac{dx}{cos^2x} =$$

$$= \int tg^4x\,(1 + tg^2x)^2d(tgx) = |tgx = z| = \int z^4\,(1 + z^2)^2dz =$$

$$= \int z^4\,dz + 2\int z^6\,dz + \int z^8\,dz = \frac{tg^5x}{5} + 2\frac{tg^7x}{7} + \frac{tg^9x}{9} + C. ◀$$

g) Agar $m + n = 0$ bo‘lsa ham, $tgx = z$ yoki $ctgx = z$ almashtirishdan foydalaniladi.

7.24-Misol. $\int\frac{cos^5x}{sin^5x}dx$ integralni hisoblang.

$$►\int\frac{cos^5x}{sin^5x}dx = \int ctg^5xdx = \begin{vmatrix} ctgx = z \\ x = arctgz \\ dx = -\frac{dz}{1+z^2} \end{vmatrix} = -\int z^5\frac{dz}{1+z^2} =$$

$$= -\int\left(z^3 - z + \frac{z}{1+z^2}\right)dz = -\frac{z^4}{4} + \frac{z^2}{2} - \frac{1}{2}ln|z^2 + 1| + C =$$

$$= -\frac{ctg^4x}{4} + \frac{ctg^2x}{2} - \frac{1}{2}ln|ctg^2x + 1| + C. ◀$$

3) $\int \boldsymbol{R(sinx, cosx)dx}$ ko‘rinishdagi integrallar

Agar $sinx$ va $cosx$ trigonometrik funksiyalarga nisbatan ratsional bo‘lgan $R(sinx, cosx)$ kabi ifodalarni integrallash lozim bo‘lsa, ko‘p hollarda universal almashtirish deb ataluvchi $tg\frac{x}{2} = t$ almashtirishdan foydalaniladi. Ushbu holda $sinx$ va $cosx$ larni

$$sinx = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},\quad cosx = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

formulalar yordamida yarim burchakning tg lari orqali ifodalaniladi. Agar bunda $\frac{x}{2} = arctgt, dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ ekanligini nazarda tutsak, quyidagini hosil qilamiz:

$$\int R(sinx, cosx)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}$$

Oxirgi integral esa bizga yaxshi ma’lum bo‘lgan ratsional funksiyaning integralidir.

7.25-Misol. $\int \frac{dx}{4sinx+3cosx+5}$ integralni hisoblang.

$$►\int \frac{dx}{4sinx+3cosx+5} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{4\frac{2t}{1+t^2}+3\frac{1-t^2}{1+t^2}+5} = 2\int \frac{dt}{8t+3-3t^2+5+5t^2} = 2\int \frac{dt}{2t^2+8t+8} =$$

$$= \int \frac{dt}{t^2+4t+4} = \int \frac{dt}{(t+2)^2} = -\frac{1}{t+2} + C = -\frac{1}{tg\frac{x}{2}+2} + C. ◄$$

SHunday qilib keltirilgan universal almashtirish yordamida sin va cos trigonometrik funksiyalarlarga nisbatan ratsional bo‘lgan ixtiyoriy $R(sinx, cosx)$ funksiyani integrallashni ratsional funksiyani integrallashga olib kelish mumkin ekan. Lekin amaliyotda bu almashtirish ko‘pincha o‘ta murakkab ratsional funksiyalar integrallariga olib keladi. Ana shu qiyinchiliklarni chetlab o‘tish uchun ba’zi maxsus hollarni alohida qarab chiqamiz.

4) Ba’zi maxsus hollardagi almashtirishlar

Ko‘p hollarda universal almashtirishdan foydalanish o‘rniga $cosx$ va $sinx$ funksiyalarining juft yoki toq darajada qatnashishlarini hisobga olish maqsadga muvofiqdir. SHuning uchun quyidagi hollarni alohida qarab chiqaylik:

a) Integral belgisi ostidagi ratsional funksiya $sinx$ ga nisbatan toq funksiya bo‘lsin. Bu holda $cosx = t$ va $sinxdx = -dt$ almashtirishlar orqali integral belgisi ostidagi funksiya ratsionallashtiriladi.

7.26-Misol.

$\int \frac{sin^3xdx}{2+cosx}$ integralda $sinx$ hamda $cosx$ ga nisbatan ratsional bo‘lgan integral belgisi ostidagi funksiya $sinx$ ga nisbatan toq funksiyadir. ►SHuning uchun yuqoridagi almashtirishlardan foydalaniladi.

$$\int \frac{sin^3xdx}{2+cosx} = \left|\begin{matrix} t = cosx \\ dt = -sinxdx \end{matrix}\right| = \int \frac{t^2-1}{2+t}dt = \int \frac{t^2+4t+4-4t-5}{2+t}dt =$$

$$=\int\frac{(t+2)^2-4t-5}{t+2}dt=\int\left[t+2-\frac{4t}{t+2}-\frac{5}{t+2}\right]dt=$$

$$\frac{t^2}{2}+2t-5ln|t+2|—4\int\frac{t+2-2}{t+2}dt=\frac{t^2}{2}+2t-5ln|t+2|-4\int\left[1-\frac{2}{t+2}\right]dt=$$

$$=\frac{t^2}{2}+2t-5ln|t+2|-4t+8ln|t+2|+C=\frac{t^2}{2}-2+3ln|t+2|+C=$$

$$=\frac{1}{2}cos^2x-2cosx+3ln|cosx+2|+C.\ ◄$$

b) Agar yuqoridagi integralda integral belgisi ostidagi funksiya $cosx$ ga nisbatan toq bo‘ladigan bo‘lsa, u erda $sinx=t$ almashtirishdan foydalaniladi.

v) Agar yuqoridagi integralda qaralayotgan funksiya ham $sinx$ ga nisbatan ham $cosx$ ga nisbatan juft bo‘ladigan bo‘lsa, u erda $tgx=t$ almashtirishdan foydalaniladi.

7.27-Misol. $\int\frac{dx}{(1+sin^2x)cos^2x}$ integralni hisoblang.

►$\int\frac{dx}{(1+sin^2x)cos^2x}$ integralda funksiya $sinx$ va $cosx$ ga nisbatan juft bo‘lganligi uchun $tgx=t$ almashtirishdan foydalaniladi.

$$\int\frac{dx}{(1+sin^2x)cos^2x}=\left|\begin{matrix}tgx=t;\ \frac{dx}{cos^2x}=dt\\ sin^2x=\frac{tg^2x}{1+tg^2x}=\frac{t^2}{1+t^2}\end{matrix}\right|=\int\frac{dt}{1+\frac{t^2}{1+t^2}}=\int\frac{(1+t^2)dt}{1+2t^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{1+2t^2+1}{1+2t^2}dt=\frac{1}{2}\int dt+\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{d(\sqrt{2}t)}{1+(\sqrt{2}t)^2}=\frac{1}{2}t+\frac{1}{2\sqrt{2}}arctg\sqrt{2}t+C=$$

$$=\frac{1}{2}tgx+\frac{1}{2\sqrt{2}}arctg\sqrt{2}tgx+C.\ ◄$$

Eslatma: YUqorida boshlang‘ich funksiyalari elementar funksiyalar orqali ifodalanadigan ayrim funksiyalarning sinfini o‘rgandik. SHunday funksiyalar ham mavjudki, ularning boshlang‘ich funksiyalarini elementar funksiyalar orqali ifodalash mumkin bo‘lmaydi, ya’ni integrallanmaydigan funksiyalar sinfi mavjuddir. Quyidagi integrallarni elementar funksiyalar orqali ifodalab bo‘lmaydi:

1. $\int e^{-x^2}dx$- Puasson integrali;

2. $\int sinx^2dx,\ \ \int cosx^2dx$- Frenel integrallari;

3. $\int\frac{dx}{lnx}$- integral logarifm;

4. $\int\frac{e^x}{x}dx$- integral logarifmga keltiriladi;

5. $\int \frac{sinx}{x} dx$- integral sinus;

6. $\int \frac{cosx}{x} dx$- integral kosinus;

Bundan tashqari $\int R\left(x, \sqrt{P(x)}\right)dx$ ko‘rinishdagi integrallarning ko‘pchiligi $P(x)$ darajasi ikkidan yuqori bo‘lgan ko‘phad holida elementar funksiyalar bilan ifodalanmaydi.

Nazorat savollari.

1. Boshlang’ich funksya va aniqmas integral ta’rifi. Aniqmas integral jadvali.
2. O’zgaruvchi almashtirish va bo’laklab integrallash usullari.
3. Sodda kasrlarni integrallash. Ratsional funksyalarni integrallash.
4. Irratsioanl va triganometrik funksyalarni integrallash.

Mashqlar

1. Aniqmas integrallarni hisoblang va integrallash natijasini differensiallab tekshiring.

a) $\int(3x - \sqrt[7]{x^5} + 2\sin x - 3)dx$; *b)* $\int(\sin\ 3x + x\sqrt{1+x^2})dx$; *c)* $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3}dx$; *d)* $\int(x^7 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + 2^x)dx$; *e)* $\int\left(x^2\sqrt[3]{4-x^2} + \frac{1}{\sin^2 4x}\right)dx$; *f)* $\int \frac{x+1}{x^2+2x-3}dx$.

2. Aniqmas integrallarni hisoblang.

a) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x}dx$; *b)* $\int \cos 2x \cdot \sin 10x dx$; *c)* $\int tg^2 7x dx$;

d) $\int \frac{1}{x^2+2x+5}dx$; *e)* $\int \sin(7x-1)\sin 5x dx$; *f)* $\int \frac{3x+2}{x^2+1}dx$.

3. Aniqmas integrallarni hisoblang.

a) $\int \frac{3x+9}{x^2-6x+12}dx$; b) $\int \frac{x-3}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$.

4. Aniqmas integrallarni o‘zgaruvchini almashtirib hisoblang.

$a)$ $\int x^3\sqrt{4-3x^4}dx$; b) $\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}dx$.

c) $\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{9-2x^3}}dx$; d) $\int \frac{dx}{x\sqrt{4-x^2}}$.

5. Aniqmas integrallarni bo‘laklab integrallash usulida hisoblang.

a) $\int \frac{\ln x}{x} dx$; b) $\int x \arcsin x dx$; s) $\int x e^{11x-1} dx$;

d) $\int \ln(1 + x^2) dx$; e) $\int x \cos\left(\frac{x}{2} + 1\right) dx$.

6. Aniqmas integrallarni hisoblang.

a) $\int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)} dx$; b) $\int \frac{dx}{x(x+1)^2}$.

s) $\int \frac{dx}{x(x^2-1)}$; d) $\int \frac{13dx}{x(x^2+6x+13)}$.

7. Aniqmas integrallarni hisoblang.

a) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1} dx$; b) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^2+2}}$; s) $\int \frac{4x dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1}$.

8. Aniqmas integrallarni hisoblang.

a) $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^4 x}} dx$; b) $\int \frac{dx}{4-5\sin x}$;

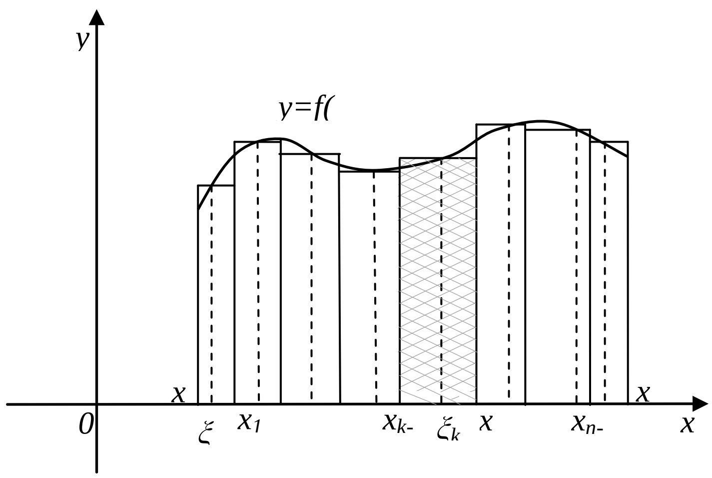
s) $\int \frac{\cos 2x}{\sqrt{3+4 sin2x}} dx$; d) $\int \frac{sin\, x dx}{sin\, x+1}$.

VIII BOB. ANIQ INTEGRAL

Matematik analizning asosiy tushunchalaridan biri- aniq integral, matematika, fizika, mexanikaning muhim tadbiqiy vositasidir. Yuza, yoy uzunligi, hajm, tezlik, ish, inersiya momenti va hokazolarni topish, aniq integralni hisoblashga keltiriladi.

8.1. Aniq integral tushunchasiga keltiriluvchi masalalar

Bizga $[a,b]$ kesmada musbat qiymatlar qabul qiluvchi $y = f(x)$ funksiya berilgan bo‘lsin. $y = f(x)$ funksiyaning grafigi, Ox o‘qi, $x = a,\ x = b$ to‘g‘ri chiziqlar bilan chegaralangan figurani (8.1- rasm) egri chiziqli trapetsiya deb ataladi. Bu egri chiziqli trapetsiyaning yuzasini topaylik. Buning uchun $[a,b]$ kesmani $a = x_0 < x_1 < x_2 \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ nuqtalar yordamida n ta ixtiyoriy bo‘lakka bo‘lamiz va shu nuqtalardan Oy o‘qiga parallel to‘g‘ri chiziqlar o‘tkazamiz. Har bir $[x_{k-1}, x_k]$ oraliqdan ξ_k nuqtani ixtiyoriy tanlaymiz va funksiyaning o‘sha nuqtadagi qiymati $f(\xi_k)$ ni hisoblaymiz. So‘ngra har-bir kichik egri chiziqli trapetsiyaning yuzasini asosi $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}, k = \overline{1,n}$ ga, balandligi $f(\xi_k)$ ga teng bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchakka almashtiramiz.



8.1-rasm

U holda berilgan egri chiziqli trapetsiyaning yuzasi taqriban quyidagiga teng bo‘ladi:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k$$

Bu yig‘indi $[a,b]$ oraliqni nechta bo‘lakka bo‘lganligimizga va uni qanday bo‘lishimizga hamda bu bo‘lakchalarda ξ_k nuqtani qanday tanlaganimizga bog‘lik bo‘ladi.

$$\lambda = \max_{1\le k\le n} \Delta x_k$$

ya’ni oraliqchalarning eng kattasini λ deb belgilash kiritsak, λ nolga intilganda n ∞ ga intiladi. Ravshanki, agar oraliqlar sonini orttira borsak, yuqoridagi yig‘indining qiymati egri chiziqli trapetsiyaning yuziga yaqinlashadi.

SHunday qilib, egri chiziqli trapetsiyaning yuzasi sifatida quyidagi limitni qabul kilish mumkin ekan:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

8.2. Aniq integralning ta’rifi

Aytaylik, $y = f(x)$ funksiya biror $[a,b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz bo‘lsin. Ushbu $[a,b]$ kesmani $a = x_0,\ x_1,\ x_2, \cdots, x_{n-1},\ x_n = b$ $(x_0 < x_1 < x_2 \cdots < x_{n-1} < x_n)$ nuqtalar yordamida n ta $[x_0,\ x_1]$, $[x_1,\ x_2]$, …,$[\,x_{k-1},\ x_k]$,…, $[\,x_{n-1},\ x_n]$ bo‘laklarga bo‘lib chiqamiz. Har bir bo‘lakning uzunligini $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}, k = \overline{1,n}$ deb belgilab, har bir bo‘lakda ξ_k nuqtani ixtiyoriy tanlaymiz va funksiyaning o‘sha nuqtadagi qiymati $f(\xi_k)$ ni hisoblaymiz, hamda $f(\xi_k)\Delta x_k$ ni topamiz. Barcha ko‘paytmalarni qo‘shib chiqib quyidagi yig‘indini tuzamiz:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k \tag{8.1}$$

Ushbu (8.1) tenglik bilan aniqlanadigan yig‘indini $y = f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ kesma bo‘yicha hisoblangan integral yig‘indisi deb ataladi.

YUqoridagi kesmalar ichidagi eng katta uzunlikka ega bo‘lganini λ_n bilan belgilaylik:

$$\lambda_n = \max_{1\le k\le n} \Delta x_k$$

8.1-Tarif. Agar $\lambda_n \to 0$ $(n \to \infty)$ da (8.1) ko‘rinishdagi integral yig‘indi biror chekli I limitga ega bo‘lib, bu limit $[a,b]$ kesmani bo‘laklarga bo‘lish usuliga hamda u bo‘laklardagi ξ_k nuqtalarning tanlanilishiga bog‘liq bo‘lmasa, uni biz $y = f(x)$ funksiyaning $[a, b]$ kesma bo‘yicha aniq integrali deb ataymiz va quyidagicha belgilaymiz:

$$I = \int_a^b f(x)dx \qquad (8.2)$$

bu yerda, a va b sonlar aniq integralning mos ravishda quyi va yuqori chegaralari, x integrallash o‘zgaruvchisi, $f(x)$ esa integrallanuvchi funksiya deyiladi. Demak, tarifga ko‘ra:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda_n \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k \qquad (8.3)$$

YUqoridagi misolga asosan, aniq integral geometrik jihatdan $x = a, x = b$ vertikal to‘g‘ri chiziqlar, Ox o‘qi hamda $y = f(x) \geq 0$ bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyaning yuzasini ifodalar ekan.

Biz quyidagi muhim teoremani isbotsiz keltiramiz.

8.1-Teorema. Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz bo‘lsa, u holda funksiya shu kesmada integrallanuvchi bo‘ladi.

8.3. Aniq integralning asosiy xossalari

1- xossa. Ta’rifga ko‘ra, $a = b$ bo‘lsa, har doim

$$\int_a^b f(x)dx = 0$$

◀Isbot. $a = b$ ekanligidan (1) integral yig‘indida barcha Δx_k lar nolga teng. U holda $S_n = 0$ va ta’rifga ko‘ra integral nolga teng. ▶

2-xossa. Aniq integralda integrallash chegaralarining o‘rinlarini almashtirilsa, uning qiymati teskari ishoraga o‘zgaradi

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

◀Isbot. Aniqlik uchun $a < b$ deb olaylik. Tenglikning o‘ng tomonidagi integral uchun bo‘linish b nuqtadan boshlanganligi sababli barcha Δx_k manfiy bo‘ladi, chap tomondagi integral uchun esa Δx_k lar musbat. SHu sababli tenglikning ikki tomonidagi integrallar bir- biridan ishoraga farq qiladi.▶

3-xossa. Aniq integrallarning qiymati integrallash o‘zgaruvchisining ko‘rinishiga bog‘liq emas:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(z)dz = \cdots$$

4- xossa. Agar $A = const \neq 0$ bo‘lsa, $\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx$ kabi bo‘ladi.

◀Isbot. Ta’rifga ko‘ra

$$\int_a^b Af(x)dx = \lim_{\lambda_n \to 0} \sum_{k=1}^n Af(\xi_k)\,\Delta x_k = A\lim_{\lambda_n \to 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\,\Delta x_k =$$

$$= A\int_a^b f(x)dx. \blacktriangleright$$

5- xossa. Agar $f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)$ funksiyalar, $[a,b]$ da integrallanuvchi funksiyalar bo‘lsa, u holda:

$$\int_a^b [f_1(x) \pm\ f_2(x) \pm \cdots \pm f_m(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx \pm \cdots \pm$$

$$\pm \int_a^b f_m(x)dx$$

◀Isbot.

$$\int_a^b [f_1(x) \pm\ f_2(x) \pm \cdots \pm f_m(x)]dx = \lim_{\lambda_n \to 0} \sum_{k=1}^n [f_1(\xi_k) \pm\ f_2(\xi_k) \pm \pm \cdots \pm$$

$f_m(\xi_k)\Delta x_k = \lim_{\lambda_n \to 0}\sum_{k=1}^n f_1(\xi_k)\Delta x_k \pm \lim_{\lambda_n \to 0}\sum_{k=1}^n f_2(\xi_k)\Delta x_k \pm \dots \pm \lim_{\lambda_n \to 0}\sum_{k=1}^n f_m(\xi_k)\Delta x_k = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx \pm \dots \pm \int_a^b f_m(x)dx$. ►

6 – xossa. Agar $c \in [a,b]$ bo‘lsa, u holda

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \tag{8.4}$$

kabi bo‘ladi. Aniq integralning ushbu additivlik xossasi chekli sondagi nuqtalar uchun ham o‘rinlidir.

◀Isbot. Aniq integral ta’rifida $[a,b]$ kesmaning bo‘linishi ixtiyoriy bo‘lganligi uchun, bo‘linishni shunday tanlaymizki c nuqta bo‘linish nuqtasi bilan ustma- ust tushsin. Endi $[a,b]$ kesmaga mos (8.1) integral yig‘indini shunday ikki qismga ajratamizki, birinchi yig‘indi $[a,c]$ kesmaga, ikkinchi yig‘indi $[c,b]$ kesmaga mos kelsin

$$\sum_a^b f(\xi_k)\,\Delta x_k = \sum_a^c f(\xi_k)\,\Delta x_k + \sum_c^b f(\xi_k)\,\Delta x_k$$

Bu tenglikda $\lambda_n \to 0$ limitga o‘tsak (4) tenglikni hosil qilamiz. ►

7-xossa. Agar $[a, b]$ kesmada $f(x) \geq \varphi(x)$ bo‘lsa,

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b \varphi(x)dx \qquad (8.5)$$

◄Isbot. Barcha nuqtalarda $f(x) \geq \varphi(x)$ bo‘lganligi sababli, bu funksiyalarning integral yig‘indilari uchun ham

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k \geq \sum_{k=1}^{n} \varphi(\xi_k)\,\Delta x_k$$

kabi tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. Limitning xossalariga ko‘ra bu tengsizlikda limitga o‘tish mumkin bo‘lib, limitga o‘tishda tengsizlik belgisi saqlanadi. Limitlar natijasiga ko‘ra (8.5) tengsizlikni hosil qilamiz. ►

8- xossa. Agar $y = f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz bo‘lib, uning shu kesmadagi eng kichik va eng katta qiymatlari mos ravishda m va M lar bo‘lsa, u holda har doim quyidagi tengsizlik o‘rinli bo‘ladi:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a) \qquad (8.6)$$

◄Isbot: SHartga ko‘ra

$$m \leq f(x) \leq M$$

7- xossaga ko‘ra

$$\int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b M\,dx \qquad (8.7)$$

Lekin $\int_a^b m\,dx = m(b-a)$ va $\int_a^b M\,dx = M(b-a)$. Bularni (8.7) ga qo‘yib (8.6) ni hosil qilamiz. ►

9- xossa. (O‘rta qiymat haqidagi teorema). Agar $y = f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz bo‘lsa, u holda $[a, b]$ kesma ichida yotuvchi, shunday bir $x = c$ nuqta mavjudki, uning uchun har doim quyidagi tenglik o‘rinlidir.

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a) \qquad (a \leq c \leq b)\,.$$

◄Isbot: Agar m va M sonlar funksiyaning $[a, b]$ kesmadagi eng kichik va eng katta qiymatlari bo‘lsa (8.6) ga asosan

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq M.$$

Bu yerda $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \mu$ deb olsak, $m \leq \mu \leq M$.

$y = f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz bo‘lganligi uchun, m va M sonlar orasidagi barcha qiymatlarni qabul qiladi. O‘z navbatida shunday c $(a \leq c \leq b)$ topiladiki, $f(c) = \mu$ bo‘ladi, ya’ni

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)\ . \ \blacktriangleright$$

8.4. Aniq integralda yuqori chegara bo‘yicha hosila.

Agar $\int_a^b f(x)\,dx$ aniq integralda quyi chegarani o‘zgartirmasdan yuqori chegarani o‘zgartira borsak, uning qiymati ham yuqori chegaraga nisbatan o‘zgara boradi, ya’ni aniq integral yuqori chegaraning funksiyasi bo‘ladi.

◀Qulaylik uchun integral yuqori chegarasini x deb olamiz, uni integral o‘zgaruvchisi bilan farqlash uchun integrallashni t bo‘yicha deb olamiz. Natijada $\int_a^x f(t)\,dt$ kabi integralni hosil qilamiz. Quyi chegara a o‘zgarmas bo‘lganida u x ning funksiyasiga aylanadi. Biz bu integralni

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \qquad (8.8)$$

kabi belgilaymiz. Bu yerda integral ishorasi ostidagi funksiyani $[a, x]$ oraliqda uzluksiz deb faraz qilamiz.

(8.8) tenglikda x ga Δx orttirma beramiz, u holda

$$F(x+\Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt$$

bo‘ladi.

Ushbu tengliklarni hadlab ayirsak,

$$F(x+\Delta x) - F(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt$$

ya’ni $F(x)$ funksiyaning orttirmasini hosil qilamiz

$$\Delta F = \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt. \qquad (8.9)$$

(8.9) tenglikka o‘rta qiymat haqidagi teoremani (9- xossa) qo‘llasak ,

$$\Delta F = f(c)\Delta x \ \ (x < c < x+\Delta x)$$

Bundan esa,

$$\frac{\Delta F}{\Delta x} = f(c) \tag{8.10}$$

ni hosil qilamiz. (8.10) tenglikning har ikkala tomonida $\Delta x \to 0$ da limitga o‘tamiz:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(c)$$

$\Delta x \to 0$ da $c \to x$ bo‘lganligi va hosila ta’rifiga ko‘ra

$$F'(x) = f(x)$$

ni hosil qilamiz. ►

Demak biz quyidagi teoremani isbot qildik:

8.2-Teorema. Agar $f(x)$ uzluksiz funksiya bo‘lsa, $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ funksiya uchun $F'(x) = f(x)$ tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Boshqacha aytganda, aniq integralning yuqori chegarasi bo‘yicha hosilasi, integral ishorasi ostidagi funksiyaning yuqori chegaradagi qiymatiga teng bo‘lar ekan.

Yuqorida isbot etilgan teoremadan uzluksiz bo‘lgan har qanday funksiyaning boshlang‘ichi mavjudligi kelib chiqadi.

8.5. Aniq integralni hisoblash. Nyuton- Leybnits formulasi.

Aniq integralni uning ta’rifidan foydalanib hisoblash juda noqulay bo‘lib murakkab hisoblashlarni talab etadi. Aniq integralni hisoblash haqidagi muhim bo‘lgan quyidagi teoremani isbotlaymiz.

8.3-Teorema. $y = f(x)$ funksiya biror $[a, b]$ kesmada aniqlangan hamda uzluksiz bo‘lib, $F(x)$ uning uchun o‘sha kesmadagi biror boshlang‘ich funksiyasi bo‘lsin, ya’ni $F'(x) = f(x)$, u holda quyidagi formula o‘rinli bo‘ladi.

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \tag{8.11}$$

Bu tenglikka Nyuton-Leybnits formulasi deb ataladi.

◄Isbot: $F(x)$ biror boshlang‘ich funksiya bo‘lsin. YUqoridagi teoremaga asosan $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ ham $f(x)$ ning boshlang‘ichi bo‘ladi. Ikkita boshlang‘ich funksiyalar bir- biridan o‘zgarmas songa farq qilganligi uchun

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) + C \tag{8.12}$$

kabi yozishimiz mumkin. Bu tenglik C ning mos tanlanganida barcha x lar uchun o‘rinli. C ni aniqlash uchun (8.12) tenglikda $x = a$ deb olamiz, u holda

$$\int_a^a f(t)\,dt = F(a) + C \quad \text{yoki} \quad 0 = F(a) + C$$

bu erdan $C = -F(a)$.

O‘z navbatida

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a).$$

bu yerda $x = b$ deb olsak, integral ostidagi o‘zgaruvchining qanday bo‘lishiga bog‘liq bo‘lmaganligi uchun Nyuton – Leybnits formulasini hosil qilamiz:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \blacktriangleright$$

SHuni ta’kidlashimiz lozimki, $F(b) - F(a)$ ayirma, ya’ni Nyuton- Leybnits formulasida boshlang‘ich funksiyaning tanlanishiga bog‘liq emas. Keltirilgan bu formulaning qulayligi shundaki, aniq integralni hisoblash uchun funksiyaning boshlang‘ichini bilish etarli ekan. SHu sababli bu formula katta amaliy ahamiyatga egadir. Aniq integralni hisoblashga doir misollar qaraylik:

1. ► $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sinx\,dx = -cosx\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -cos\frac{\pi}{2} + cos0 = 1;$ ◄
2. ► $\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}ln|1 + x^2|\Big|_0^1 = \frac{1}{2}(ln2 - ln1) = ln\sqrt{2}.$ ◄

8.6. Bo‘laklab integrallash usuli

Faraz qilaylik, $u = u(x)$ va $v = v(x)$ funksiyalar biror $[a, b]$ kesmada uzluksiz differensiallanuvchi funksiyalar bo‘lsin, u holda:

$$d(uv) = vdu + udv$$

bo‘lganligi uchun tenglikning har ikkala tomonini a dan b gacha bo‘lgan chegaralarda hadlab integrallaymiz

$$\int_a^b d(uv) = \int_a^b vdu + \int_a^b udv.$$

Tenglikning chap tomoniga Nyuton-Leybnits formulasini qo‘llab, quyidagi formulaga ega bo‘lamiz.

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu \qquad (8.13)$$

Mazkur formula, bo‘laklab integrallash formulasi deb ataladi.

8.1-Misol.

$$\blacktriangleright \int_0^{\frac{\pi}{2}} xsinx\,dx = \left| \begin{array}{c} u = x, du = dx \\ dv = sinxdx \\ v = -cosx \end{array} \right| = -xcosx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} cosxdx = -\frac{\pi}{2}cos\frac{\pi}{2} +$$

$$+0 \cdot cos0 + sinx \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = sin\frac{\pi}{2} - sin0 = 1. \blacktriangleleft$$

8.2-Misol.

$$\blacktriangleright \int_0^1 arctgx\,dx = \left| \begin{array}{c} u = arctgx \\ du = \frac{dx}{1+x^2} \\ dv = dx,\ v = x \end{array} \right| = xarctgx \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{xdx}{1+x^2} =$$

$$= arctg1 - arctg0 - \frac{1}{2}ln|1+x^2| \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}ln2. \blacktriangleleft$$

8.7. O‘rniga qo‘yish usuli.

Aytaylik, $\int_a^b f(x)\,dx$ ni hisoblash lozim bo‘lsin, bu erda $f(x)$ funksiya kesmada uzluksiz. Agar $x = \varphi(t)$ funksiya $[\alpha, \beta]$ kesmada o‘zining 1-tartibli hosilasi bilan birgalikda uzluksiz bo‘lib,

$$\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$$

shartlar o‘rinli bo‘lsa, u holda quyidagi formula har doim o‘rinli:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)dt \qquad (8.14)$$

Haqiqatan ham, $F(x)$ funksiya $f(x)$ ning boshlang‘ich funksiyasi bo‘lsa, u holda

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

$$\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C.$$

Bu tengliklarning birinchisini $[a, b]$ oraliqda integrallaymiz va N’yuton-Leybnits formulasini qo‘llaymiz:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x) = F(b) - F(a)$$

Ikkinchi tenglikka asosan

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) \Big|_\alpha^\beta = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a)$$

Oxirgi tengliklarning o‘ng tomonlari teng, shuning uchun ularning chap tomonlari ham o‘zaro teng.

Ushbu formula, odatda aniq integralda o‘rniga qo‘yish yoki o‘zgaruvchini almashtirish usulining formulasi deb ataladi. Ushbu usulga ko‘ra aniq integralda o‘zgaruvchini shunday bir funksiya bilan almashtirish lozimki, natijada yangi o‘zgaruvchiga nisbatan hosil bo‘lgan integral sodda ko‘rinishga ega bo‘lishi lozim, shuningdek almashtirish orqali aniq integralning yangi o‘zgaruvchiga nisbatan chegaradagi holi topiladi.

8.3-Misol.

$$► \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \left| \begin{matrix} x = sint \\ dx = costdt \\ t_1 = 0 \\ t_2 = \frac{\pi}{2} \end{matrix} \right| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-sin^2t}costdt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2tdt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+cos2t}{2}dt = \left(\frac{t}{2} + \frac{1}{4}sin2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}. ◄$$

Eslatma: Aniq integralni hisoblashda yangi o‘zgaruvchidan eskisiga qaytish kerak emas, balki yangi o‘zgaruvchining chegaralarini keyingi boshlang‘ich funksiyaga qo‘yish kerak. Ba’zi hollarda o‘rniga qo‘yish usuli bilan integrallashda yangi o‘zgaruvchiga nisbatan chegarani aniqlash murakkab bo‘lishi mumkin. SHuning uchun bunday hollarda yangi o‘zgaruvchiga nisbatan boshlang‘ich funksiya hisoblangandan keyin eski o‘zgaruvchiga qaytiladi va eski chegaralarga nisbatan Nyuton-Leybnits formulasi qo‘llanadi.

Ma’lumki, biror oraliqda uzluksiz bo‘lgan funksiya uchun har doim boshlang‘ich funksiya mavjud, ya’ni biror oraliqda uzluksiz bo‘lgan funksiya integrallanuvchi funksiya bo‘ladi. Lekin har doim ham berilgan oraliqda berilgan funksiya uchun boshlang‘ich funksiyani hisoblash mumkin bo‘lavermaganligi uchun ko‘pgina aniq integrallarni taqribiy hisoblashga majbur bo‘lamiz. Aniq integrallarni taqribiy hisoblash usullaridan eng samarali usullar to‘g‘ri to‘rtburchaklar usuli, trapetsiya usuli, hamda parabola usullari hisoblanadi. Ular Oliy matematikaning maxsus kurslarida o‘rganiladi.

8.8. Xosmas integrallar

Ma'lumki, $f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ kesma bo'yicha aniq integrali tushunchasi kiritilayotganda, uni o'sha kesmada aniqlangan hamda uzluksiz deb faraz qilgan edik. Agar $f(x)$ funksiya qaralayotgan oraliqning biror nuqtasida uzluksiz bo'lmasa, yoki $[a,b]$ kesmaning uzunligi chekli bo'lmasa, u holda biz odatdagidek aniq integral tushunchasini kirita olmaymiz. Ana shu hollarda kiritiladigan aniq integrallarni **xosmas** integrallar deb aytiladi.

I. CHegaralari cheksizlik bo'lgan (I-tur) xosmas integrallar

Faraz qilaylik $f(x)$ funksiya $[a,+\infty)$ oraliqda aniqlangan, hamda uzluksiz bo'lsin. Ushbu oraliqning uzunligi cheksizlik bo'lganligi uchun ham odatdagidek aniq integral tushunchasini kiritib bo'lmaydi, lekin funksiya ixtiyoriy b $(b>a)$ uchun $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo'lganligi uchun aniq integral mavjud bo'ladi. Bu integralning qiymati b ga bog'liq, ya'ni b ning funksiyasida iborat. $\int_a^b f(x)\,dx$ integralning $b\to\infty$ qanday o'zgarishi masalasini qarab chiqamiz.

8.4-Ta'rif. Agar

$$\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$

chekli limit mavjud bo'lsa, bu limitga $f(x)$ funksiyadan $[a,+\infty)$ oraliq bo'yicha olingan **I-tur xosmas integral** deb ataladi va

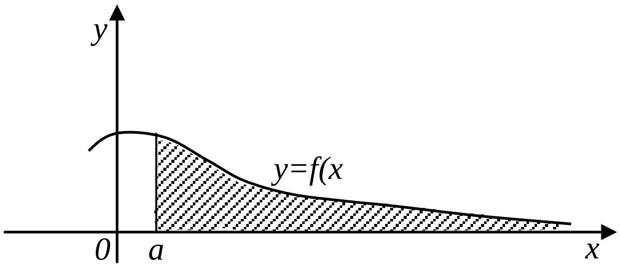
$$\int_a^\infty f(x)\,dx$$

kabi belgilanadi. Demak, ta'rifga ko'ra:

$$\int_a^\infty f(x)\,dx=\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx \qquad (8.15)$$

Bu holda $\int_a^\infty f(x)\,dx$ integral **mavjud** yoki **yaqinlashuvchi** deb ataladi. Agar $\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx$ chekli limit mavjud bo'lmasa, $\int_a^\infty f(x)\,dx$ integral **uzoqlashuvchi** deyiladi.

$f(x)\ge 0$ bo'lganida xuddi aniq integraldagi kabi $\int_a^\infty f(x)\,dx$ integralning qiymati, $y=f(x)$ funksiya grafigi, $x=a$ to'g'ri chiziq va abssissa o'qi bilan chegaralangan cheksiz sohaning yuzasiga teng (8.2- rasm).



8.2-rasm

Xosmas integralni hisoblash Nyuton-Leybnits formulasi va limitni hisoblashga keltiriladi. Agar integral ostidagi $f(x)$ funksiyaning boshlang'ichi $F(x)$ mavjud bo'lsa, ta'rifga ko'ra

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}[F(b)-F(a)] = F(\infty)-F(a)$$

Demak $\lim\limits_{b\to\infty} F(b) = F(\infty)$ limit chekli bo'lsa integral yaqinlashuvchi, aks holda integral uzoqlashuvchi.

8.4-Misol.

$$\blacktriangleright \int_1^{\infty}\frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{b\to\infty} arctgx\Big|_1^b = \lim_{b\to\infty}[arctgb - arctg1] =$$

$$= \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}. \blacktriangleleft$$

Agar $f(x)$ funksiya $(-\infty, b]$ oraliqda aniqlangan ham uzluksiz bo'lsa, uning shu oraliq bo'yicha xosmas integrali $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ kabi belgilanib, ta'rifga ko'ra uning ham yaqinlashuvchi bo'lishi uchun quyidagi tenglik

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx \qquad (8.16)$$

ning o'ng tomonidagi limit mavjud bo'lishi lozim.

Umuman $f(x)$ funksiya $(-\infty,\infty)$ oraliqda aniqlangan hamda uzluksiz bo'lsa, u holda shu oraliq bo'yicha xosmas integralning mavjud bo'lishligi uchun quyidagi tenglik

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_0^{\infty} f(x)\,dx \qquad (8.17)$$

ning o'ng tomonidagi har ikkala xosmas integrallarning bir paytda mavjud bo'lishligi lozimdir. (8.17) tenglikda 0 ning o'rniga ixtiyoriy a sonini olganimizda ham integralning qiymati o'zgarmaydi.

Ko‘pchilik misollarni echishda va xosmas integrallarning amaliy masalalarga tadbiqlarida bu integralning qiymati emas, balki uning yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi ekanligini bilish, integralni baholash etarli bo‘ladi. Bu masalalarni quyidagi xossalar aniqlab beradi.

Xossalari

1. $y = f(x)$ va $y = \varphi(x)$ funksiyalar $[a, +\infty)$ oraliqda aniqlangan bo‘lib $0 \leq f(x) \leq \varphi(x)$ tengsizlikni qanoatlantirsin, u holda:

a) $\int_a^\infty \varphi(x)\,dx$ yaqinlashuvchi ekanligidan $\int_a^\infty f(x)\,dx$ integralning yaqinlashuvchi ekanligi kelib chiqadi va $\int_a^\infty f(x)\,dx \leq \int_a^\infty \varphi(x)\,dx$;

b) $\int_a^\infty f(x)\,dx$ integral uzoqlashuvchi ekanligidan $\int_a^\infty \varphi(x)\,dx$ integral uzoqlashuvchi ekanligi kelib chiqadi.

2. $\int_a^\infty |f(x)|\,dx$ integral yaqinlashuvchi bo‘lsa, 1- xossaga ko‘ra $\int_a^\infty f(x)\,dx$ integral ham yaqinlashuvchi bo‘ladi va bu integral **mutloq yaqinlashuvchi** deyiladi.

Funksiyaning o‘zidan olingan integral yaqinlashuvchi bo‘lib, uning modulidan olingan integral uzoqlashuvchi bo‘lsa bu integralga **shartli yaqinlashuvchi** deyiladi.

Ko‘pchilik xosmas integrallarning yaqinlashuvchiligini tekshirishda qo‘llaniladigan quyidagi integralni qaraylik:

$$I = \int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^\alpha}, \alpha > 0$$

a) $\alpha < 1$ bo‘lsa integral uzoqlashuvchi, chunki

$$I = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b\to\infty} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_1^b == \frac{1}{1-\alpha}\lim_{b\to\infty}[b^{1-\alpha} - 1] = \infty,$$

b) $\alpha = 1$ bo‘lganida ham integral uzoqlashuvchi, chunki

$$I = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty} ln|x|\,\Big|_1^b = \infty,$$

v) $\alpha > 1$ bo‘lsa

$$I = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}\lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{b^{\alpha-1}} - 1\right] = \frac{1}{\alpha-1},$$ ya’ni integral yaqinlashuvchi.

SHunday qilib

$$I = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \begin{cases} \alpha \le 1 \quad da\ uzoqlashuvchi \\ \alpha > 1 \quad da\ yaqinlashuvchi \end{cases} \tag{8.18}$$

8.5-Misol.

► $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2 e^x}$ integral yaqinlashuvchi ekanligini isbotlang. $x \ge 1$ qiymatda $\frac{1}{x^2 e^x} \le \frac{1}{x^2}$ tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. Xosmas integrallarning yuqoridagi (4) alomatiga ko‘ra $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ integral yaqinlashuvchi. 1 a) xossaga ko‘ra esa berilgan integral ham yaqinlashuvchi.◄

8.6-Misol.

► $\int_1^{\infty} \frac{(x-1)cosxdx}{x^3}$ integralni yaqinlashishga tekshiring. Integral ostidagi funksiya ishora almashinuvchi, shuning uchun

$$\left|\frac{(x-1)cosx}{x^{\frac{5}{2}}}\right| \le \left|\frac{x}{x^{\frac{5}{2}}}\right| = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}.$$

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}} = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}} = -2\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\Big|_1^b = -2\lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{b}} - 1\right] = 2$$

bo‘lganligi uchun $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}$ yaqinlashuvchi integral. O‘z navbatida berilgan integral ta’rifga ko‘ra mutloq yaqinlashuvchi bo‘ladi. ◄

II. II – tur xosmas integrallar

Aytaylik, $y = f(x)$ funksiya $(a, b]$ oraliqning barcha nuqtalarida uzluksiz bo‘lib, uning $x = a$ chap chegarasida aniqlanmagan yoki uzilishga ega bo‘lsin. Bu holda ham odatdagi aniq integral tushunchasini kiritib bo‘lmaydi, ya’ni funksiyaning ushbu kesma bo‘yicha integrali yana xosmas integral bo‘ladi. Funksiya $(a, b]$ oraliqda uzluksiz bo‘lganligi sababli ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun

$$\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\, dx$$

aniq integral mavjud.

8.5-Ta’rif. $y = f(x)$ funksiya $(a, b]$ oraliqda uzluksiz bo‘lib,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\, dx$$

chekli limit mavjud bo‘lsa, bu limitning qiymatiga $y = f(x)$ funksiyadan $[a, b]$ kesma bo‘yicha olingan II- tur xosmas yoki chegaralanmagan funksiya integrali deb ataladi.

Demak, ta’rifga ko‘ra:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx \qquad (8.19)$$

Agar (8.19) limit mavjud bo‘lsa integral yaqinlashuvchi, aks holda uzoqlashuvchi deyiladi.

Agar $f(x)$ funksiya kesmaning barcha nuqtalarida uzluksiz bo‘lib, faqatgina $x = b$ o‘ng chegarada uzilishga ega bo‘lsa, $\int_a^b f(x)\,dx$ xosmas integralning mavjud bo‘lishi uchun quyidagi tenglik

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$

ning o‘ng tomonidagi limitning mavjud bo‘lishi lozim.

Aytaylik, $y = f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmaning barcha nuqtalarida uzluksiz bo‘lib, biror ichki $x = s$ nuqtasida uzilishga ega bo‘lsin. Bunday holda ham aniq integral mavjud bo‘lmasligi mumkin. SHuning uchun integral

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^s f(x)\,dx + \int_s^b f(x)\,dx$$

kabi ikkita xosmas integralga ajratiladi, hamda berilgan integral yaqinlashuvchi bo‘lishi uchun tenglikning o‘ng tomonidagi ikkala integralning ham yaqinlashishi talab etiladi. Agar ulardan birortasi uzoqlashuvchi bo‘lsa berilgan integral ham uzoqlashadi.

8.7-Misol.

$$\blacktriangleright \int_0^2 \frac{dx}{x-2} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{2-\varepsilon} \frac{dx}{x-2} = \lim_{\varepsilon \to 0} ln|x-2| \Big|_0^{2-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} [ln|\varepsilon| - ln2] = \infty. \blacktriangleleft$$

Demak, qaralayotgan xosmas integral mavjud emas ya’ni uzoqlashuvchi ekan.

Ko‘pchilik hollarda integral ostidagi funksiyaning boshlang‘ichini topish mumkin bo‘lmaydi yoki uni topish murakkab hisoblashlarga olib keladi. Bunday holda integralni hisoblamasdan uning yaqinlashuvchi ekanligini aniqlash bilan chegaralanish mumkin. Integralning yaqinlashuvchiligini aniqlash uchun quyidagi xossalardan foydalanamiz.

Xossalari

1. $y = f(x)$ va $y = \varphi(x)$ funksiyalar $[a, b]$ oraliqda aniqlangan va uzluksiz bo‘lib faqatgina $x = a$ nuqtada uzilishga ega bo‘lsin hamda $0 \le f(x) \le \varphi(x)$ tengsizlikni qanoatlantirsin, u holda:

a) $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ yaqinlashuvchi ekanligidan $\int_a^b f(x)\,dx$ integralning yaqinlashuvchi ekanligi kelib chiqadi va $\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b \varphi(x)\,dx$;

b) $\int_a^b f(x)\,dx$ integral uzoqlashuvchi ekanligidan $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ integral uzoqlashuvchi ekanligi kelib chiqadi.

2. $\int_a^b |f(x)|\,dx$ integral yaqinlashuvchi bo‘lsa, 1- xossaga ko‘ra $\int_a^b f(x)\,dx$ integral ham yaqinlashuvchi bo‘ladi va bu integral **mutloq yaqinlashuvchi** deyiladi.

Funksiyaning o‘zidan olingan integral yaqinlashuvchi bo‘lib, uning modulidan olingan integral uzoqlashuvchi bo‘lsa bu integralga **shartli yaqinlashuvchi** deyiladi.

CHeksiz oraliq bo‘yicha olingan xosmas integrallarning yaqinlashuvchiligini tekshirishda qo‘llaniladigan integral kabi quyidagi integralni qaraylik:

$I = \int_0^b \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^b \frac{dx}{x^\alpha}, \alpha > 0$

a) $\alpha < 1$ bo‘lsa integral yaqinlashuvchi, chunki

$I = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^b \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_\varepsilon^b = \frac{1}{1-\alpha} \lim_{\varepsilon \to 0} [b^{1-\alpha} - \varepsilon^{1-\alpha}] = b^{1-\alpha}$,

b) $\alpha = 1$ bo‘lganida integral uzoqlashuvchi, chunki

$I = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^b \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \to 0} ln|x| \Big|_\varepsilon^b = \infty$,

v) $\alpha > 1$ bo‘lsa integral uzoqlashuvchi

$I = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^b \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} \lim_{\varepsilon \to 0} [b^{1-\alpha} - \varepsilon^{1-\alpha}] = \infty.$

SHunday qilib

$$I = \int_0^b \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \alpha \ge 1 & da\ uzoqlashuvchi \\ \alpha < 1 & da\ yaqinlashuvchi \end{cases} \qquad (8.20)$$

8.8-Misol.

$$►\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x}=\int_{-1}^{0}\frac{dx}{x}+\int_{0}^{1}\frac{dx}{x}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-1}^{\varepsilon}\frac{dx}{x}+\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{1}\frac{dx}{x}=\lim_{\varepsilon\to 0}[ln|\varepsilon|-ln|1|]+$$
$$+\lim_{\varepsilon\to 0}[ln|1|-ln|\varepsilon|]=\infty.◄$$

Demak, qaralayotgan integral mavjud emas.

8.9-Misol.

$$►\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-1+\varepsilon}^{0}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0}^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=$$
$$=\lim_{\varepsilon\to 0}arcsinx\Big|_{-1+\varepsilon}^{0}+\lim_{\varepsilon\to 0}arcsinx\Big|_{0}^{1-\varepsilon}=$$
$$=\lim_{\varepsilon\to 0}[arcsin0-\arcsin(-1+\varepsilon)]+\lim_{\varepsilon\to 0}[arcsin(1-\varepsilon)-\arcsin 0]=$$
$$=-\arcsin(-1)+arcsin1=2arcsin1=\pi.◄$$

Demak, qaralgan xosmas integral mavjud bo‘lar ekan.

Eslatma: Agar funksiya qaralayotgan kesma ichida bir emas chekli dona nuqtalarda uzilishga ega bo‘lsa, o‘sha oraliq bo‘yicha xosmas integralni hisoblash uchun aniq integralning additivlik xossasidan foydalaniladi.

Mashqlar

1. Aniq integrallarni hisoblang.

$a)\ \int_{1}^{2}\left(2x^2+\frac{2}{x^2}\right)dx;$ $\qquad b)\ \int_{1}^{4}\sqrt{x}dx;$

$c)\ \int_{1}^{e^2}\frac{dx}{x\sqrt{1+lnx}};$ $\qquad d)\ \int_{0}^{1}\frac{dx}{x^2+4x+5};$

$e)\ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{cosx-cos^3x}dx;$ $\qquad f)\ \int_{0}^{4}\frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}};$

$g)\ \int_{0}^{\sqrt{3}}x^5\sqrt{1+x^2}dx;$ $\qquad$ h) $\int_{0}^{2}\sqrt{4-x^2}dx;$

i) $\int_{1}^{3}\frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}};$ $\qquad j)\ \int_{0}^{5}\frac{dx}{2x+\sqrt{3x+1}}.$

2. Berilgan xosmas integrallar hisoblansin.

$a)\ \int_{1}^{e}lnxdx;$ $\qquad b)\ \int_{0}^{\pi}x^2cosxdx;$

$c)\ \int_{0}^{\pi^2}cos\sqrt{x}dx;$ $\qquad d)\ \int_{0}^{\sqrt{3}}xarctgxdx;$

$e)\ \int_{e}^{\infty}\frac{dx}{x(lnx)^3};$ $\qquad f)\ \int_{0}^{\infty}x^3e^{-x^2}dx.$

3. Xosmas integrallarni hisoblang yoki ularning uzoqlashuvchi ekanligini ko‘rsating

$a)\ \int_1^{\infty}\frac{2+sinx}{\sqrt{x}}dx;$ b) $\int_0^{\frac{1}{e}}\frac{dx}{x(lnx)^2};$ $c)\ \int_1^2\frac{xdx}{\sqrt{x-1}};$

d) $\int_0^{\infty}\frac{xdx}{16x^4+1}$, e) $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt[3]{2-4x}}$.

8.9. Aniq integralning geometriya va mexanikaga tadbiqlari.

Ko‘plab geometrik, fizik yoki mexanik masalalarni echishda aniq integraldan keng foydalaniladi. Jumladan, yassi figura yuzasi, egri chiziq yoyi, aylanish jismining hajmi, bajarilgan ishni, momentni topish aniq integralni hisoblashga keltiriladi. Biz quyida ana shu masalalarni hal etishga batafsil to‘xtalamiz.

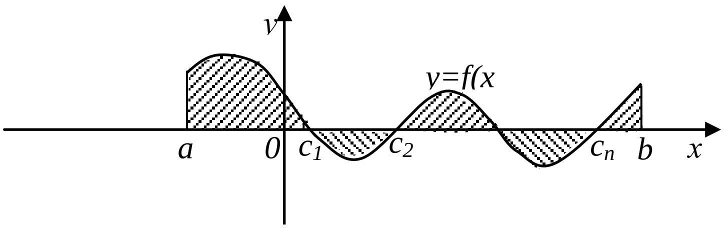
1. Yuzalarni hisoblash.

Biz egri chiziqli trapetsiyaning yuzasi aniq integral yordamida $\int_a^b f(x)dx$ formula bilan topilishini ko‘rgan edik.

Bu formula yordamida yuqoridan $f(x)\geq 0$, yon tomonlaridan $x=a,\ x=b$ to‘g‘ri chiziqlar, quyidan Ox o‘qi bilan chegaralangan har qanday figuraning yuzasini hisoblasa bo‘ladi.

$f(x)\leq 0$ bo‘lganida aniq integralning 7- xossasiga asosan $\int_a^b f(x)dx\leq 0$ bo‘ladi. SHuning uchun egri chiziqli trapetsiyaning yuzi $S=-\int_a^b f(x)dx$ bo‘ladi.

Agar $y=f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmaning $c_1,c_2,\dots,c_n$ nuqtalarida o‘zining ishorasini bir necha marta o‘zgartiradigan bo‘lsa (1-rasm), u holda $y=f(x)$ egri chiziq bilan chegaralangan figuraning yuzini hisoblash uchun $[a,c_1],[c_1,c_2],\dots,[c_n,b]$ oraliqlarda figuralarning yuzalari hisoblanib, so‘ngra ular qo‘shiladi.

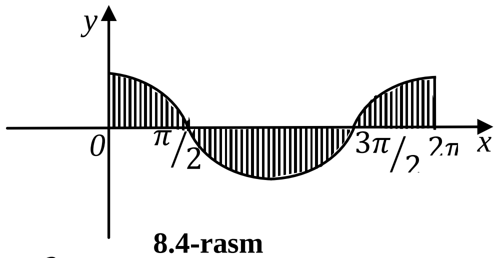


8.3-rasm

Yuzalarni bitta integral yordamida hisoblash uchun $[a, b]$ kesmada funksiyaning qiymatini moduli bo‘yicha olib qarash yetarli, ya’ni

$$\int_a^b |f(x)|dx \qquad (8.21)$$

8.10-Misol. $y = cosx$ funksiya va Ox o‘qi bilan chegaralangan sohaning yuzasini toping, bu yerda $0 \le x \le 2\pi$.



8.4-rasm

►$0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ va $\frac{3\pi}{2} \le x \le 2\pi$ da $cosx \ge 0$, $\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2}$ da esa $cosx \le 0$ bo‘lganligi uchun

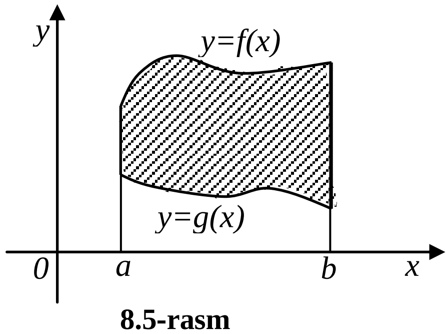
$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cosxdx + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} cosxdx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} cosxdx =$$

$$= sinx \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + sinx \Big|_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} - sinx \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = sin\frac{\pi}{2} - sin0 + sin2\pi - sin\frac{3\pi}{2} - -sin\frac{3\pi}{2} + sin\frac{\pi}{2} = 4. ◄$$

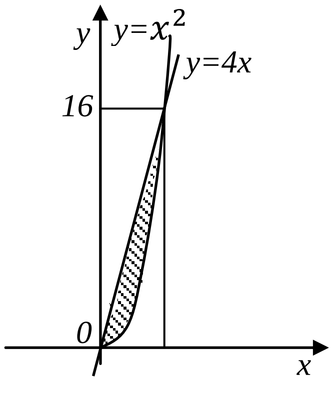
Agar bizga berilgan tekis figura yuqoridan $y = f(x)$ egri chiziq, quyidan $y = g(x)$ egri chiziq, yon tomonlaridan $x = a$ va $x = b$ to’g’ri chiziqlar bilan chegaralangan bo‘lib, $[a, b]$ kesmada $f(x) \ge g(x)$ bo‘lsa, bunday figuraning yuzasi (8.5-rasm)

$$S = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx \qquad (8.22)$$

formula bilan hisoblanadi.



8.5-rasm



8.6-rasm

8.11-Misol. $y = x^2$ parabola va $y = 4x$ to‘g‘ri chiziq bilan chegaralangan sohaning yuzasini hisoblansin (8.6- rasm).

►Bu chiziqlarning kesishish nuqtasini topamiz

$x^2 = 4x$ dan $x_1 = 0$ va $x_2 = 4$.

[0,4] kesmada $4x \geq x^2$ bo‘lganligi uchun

$$S = \int_0^4 [4x - x^2]\, dx = \left[2x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]\Big|_0^4 = 32 - \frac{64}{3} = 10\frac{2}{3}. ◄$$

Biror egri chiziq o‘zining $x = x(t)$ va $y = y(t)$ $(\alpha \leq t \leq \beta)$ parametrik tenglamasi bilan berilgan bo‘lib, bu funksiyalar o‘zlarining birinchi tartibli hosilalari bilan birgalikda $[\alpha, \beta]$ da uzluksiz hamda $x(\alpha) = a,\ x(\beta) = b$ bo‘lsin.

$y = f(x) \geq 0$ funksiya $[a, b]$ kesmada aniqlangan bo‘lib, u parametrlanganida yuqoridagi chiziqni aniqlasin. Ma’lumki, egri chiziqli trapetsiyaning yuzasi

$$S = \int_a^b y dx$$

ga teng. Bu integralda o‘zgaruvchini almashtirsak $x = x(t), dx = x'(t)dt$

$$S = \int_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt \qquad (8.23)$$

Oxirgi tenglik egri chiziq parametrik tenglamasi bilan berilganida yuzani aniqlovchi formula hisoblanadi.

8.12-Misol. $x = acost,\ y = bsint$ ellips bilan chegaralangan sohaning yuzini toping.

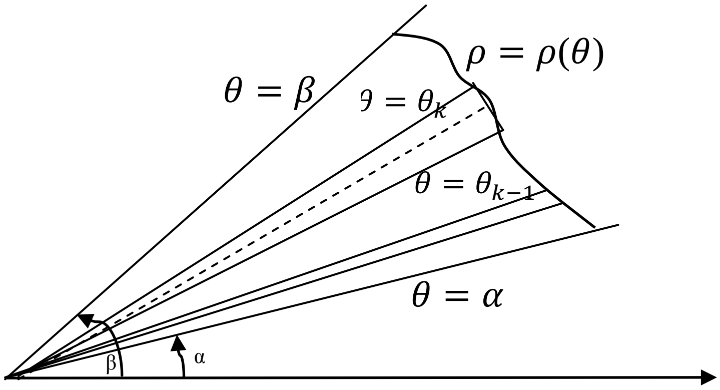
►Bu soha koordinata o‘qlariga nisbatan simmetrik bo‘lganligi uchun, uning yuqori yarim bo‘lagidagi yuzini topish etarli. Bu sohada x o‘zgaruvchi $-a$ dan a gacha o‘zgarganligi uchun, t o‘zgaruvchi π dan 0 gacha o‘zgaradi. Demak,

$$S = 2\int_\pi^0 bsint(-asint)dt = -2ab\int_\pi^0 sin^2tdt = -ab\int_\pi^0 (1 - cos2t)dt ==$$

$$-ab\left(t - \frac{1}{2}sin2t\right)\Big|_\pi^0 = \pi ab. ◄$$

Aytaylik (ρ, θ) qutb koordinatalar sistemasida $(x = \rho cos\theta, y = \rho sin\theta)$ egri chiziq $\rho = \rho(\theta)$ tenglama bilan berilgan bo‘lsin, bu erda $\alpha \leq \theta \leq \beta$. Bundan tashqari $\rho = \rho(\theta)$ funksiya $[\alpha, \beta]$ kesmada uzluksiz bo‘lsin.

Ma'lumki, $\theta = \alpha$ va $\theta = \beta$ qutb koordinatalari sistemasida nurlarni aniqlaydi. SHuning uchun $\rho = \rho(\theta)$ egri chiziq, $\theta = \alpha$ va $\theta = \beta$ nurlar bilan chegaralangan soha egri chiziqli sektordan iborat bo'ladi (8.7- rasm).



8.7-rasm

Bu egri chiziqli sektorning yuzasini topish uchun uni $\theta = \theta_0 = \alpha,\ \theta = \theta_1,\ \theta = \theta_2, \dots, \theta = \theta_n = \beta$ nurlar yordamida ixtiyoriy ravishda bo'laklarga ajratamiz. Har bir k- bo'lakchaning $\Delta\theta_k = \theta_k - \theta_{k-1}$ burchagini va shu bo'lakcha ixtiyoriy burchagi γ_k ning $\rho(\gamma_k)$ radius vektorini topib shu bo'lakchalar yuzalarini taqriban hisoblaymiz

$$Q_k = \frac{1}{2}\rho^2(\gamma_k)\Delta\theta_k.$$

Bu yuzalarni yig'ib egri chiziqli sektorning taqribiy yuzasini hosil qilamiz

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} Q_k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \rho^2(\gamma_k)\Delta\theta_k$$

Bu yig'indi $\rho^2 = \rho^2(\theta)$ funksiyaning integral yig'indisi bo'lganligi uchun $\max_k \Delta\theta_k \to 0$ da limitga o'tsak $\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\theta)d\theta$ integralni hosil qilamiz. Ikkinchi tomondan bu limit egri chiziqli sektorning yuzasi S ga teng.

SHunday qilib

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\theta)d\theta \qquad (8.24)$$

8.13-Misol. $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ Bernulli lemniskatasi bilan chegaralangan figuraning yuzi hisoblansin (8.8- rasm).

►Egri chiziqning tenglamasini qutb koordinatalar sistemasida yozib olamiz. CHiziq tenglamasida $x = \rho cos\theta,\ \ y = \rho sin\theta$ almashtirish bajarsak

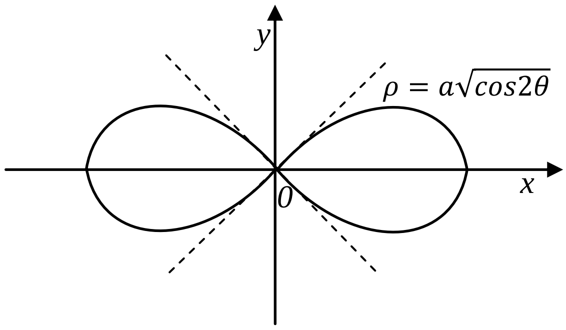
$$\rho^2 = a^2 cos2\theta$$

yoki

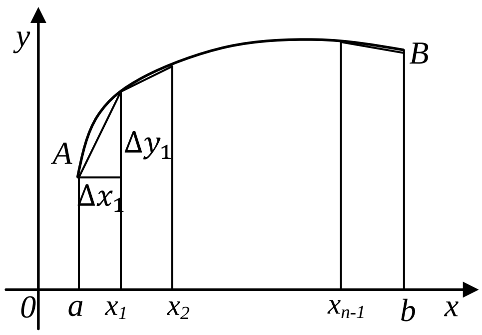
$$\rho = a\sqrt{cos2\theta}.$$

Figuraning simmetrikligini hisobga olsak, qidirilayotgan yuzaning birinchi chorakdagi bo‘lagi yuzini hisoblash yetarli

$$S = 4 \cdot \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 cos2\theta d\theta = 2a^2 \cdot \frac{1}{2} sin2\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = a^2. \blacktriangleleft$$



8.8-rasm



8.9-rasm

2. YOy uzunliklarini hisoblash

Aytaylik, $y = f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada o‘zining birinchi tartibli hosilasi bilan birgalikda uzluksiz funksiya bo‘lsin. Uning $[a, b]$ kesmaga mos keluvchi AV yoyining uzunligini aniqlaydigan formulani topaylik. Buning uchun AV yoyni $A, M_1, M_2, \dots, M_{n-1}, B$ nuqtalar yordamida n ta bo‘lakka ajratamiz. Bo‘linish nuqtalari abssissalari $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b$ bo‘lsin. Har ikkita ketma- ket bo‘linish nuqtalari orqali vatarlar o‘tkazib AV yoy ichida siniq chiziq quramiz (8.9- rasm). Agar

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \qquad \Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1}), \quad \left(i = \overline{1, n}\right)$$

deb olsak, bu siniq chiziqning L_n uzunligi

$$L_n = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta y_1)^2} + \sqrt{(\Delta x_2)^2 + (\Delta y_2)^2} + \cdots + \sqrt{(\Delta x_n)^2 + (\Delta y_n)^2} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$$

ga teng. YOki shakl almashtirilsa

$$L_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \, \Delta x_i.$$

Lagranj formulasiga ko‘ra

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(\xi_i), \; x_{i-1} < \xi_i < x_i.$$

SHuning uchun

$$L_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(f'(\xi_i)\right)^2} \, \Delta x_i.$$

Hosil qilingan yig‘indi $\sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}$ funksiyaning $[a, b]$ kesmadagi integral yig‘indisi bo‘ladi. $f'(x)$ ni uzluksiz deb faraz qilganligimiz uchun, yuqoridagi integral yig‘indining limiti mavjud. Ikkinchi tomondan siniq chiziq uzunligi limiti AV yoy uzunligiga teng. SHunday qilib L_n ning $\max_i \Delta x_i \to 0$ dagi limiti mavjud bo‘lib u AV yoy uzunligiga teng

$$L_{AB} = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2} \, dx \qquad (8.25)$$

8.14-Misol. Egri chiziq $y = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$ tenglama bilan berilgan. Uning abssissalari $x_1 = 3$ va $x_2 = 8$ bo‘lgan nuqtalar orasidagi yoyi uzunligini toping.

►YOy uzunligini topish uchun $y' = \sqrt{x}$ ni hisobga olgan holda (8.25) formuladan foydalanamiz

$$L = \int_3^8 \sqrt{1 + \left(\sqrt{x}\right)^2} \, dx = \int_3^8 \sqrt{1 + x} \, dx = \frac{2}{3}(1 + x)^{\frac{3}{2}} \Big|_3^8 = \frac{38}{3}. \blacktriangleleft$$

Agar egri chiziq o‘zining $x = x(t)$ va $y = y(t)$ parametrik tenglamasi bilan berilgan bo‘lib, bu funksiyalar o‘zlarining birinchi tartibli hosilalari bilan birgalikda $[\alpha, \beta]$ kesmada uzluksiz bo‘lsin. (8.25) formulada yangi o‘zgaruvchi t ga o‘tilsa va $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}, dx = x'_t dt$ ekanligi e’tiborga olinsa, u holda uning $[\alpha, \beta]$ kesmaga mos keluvchi yoyining uzunligi quyidagicha aniqlanadi

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} \, dt \qquad (8.26)$$

8.15-Misol. $y = a(1 - \cos t), \; x = a(t - \sin t)$ sikloidaning birinchi arkasi yoyi uzunligini toping.

►Sikloidaning barcha arkalari bir xil bo‘lib, birinchi arkada parametr 0 dan 2π gacha o‘zgaradi. $y_t' = a\sin t,\ x_t' = a(1-\cos t)$ ekanligini nazarda tutsak, (8.26) ga ko‘ra:

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2 sin^2 t}\,dt = a\int_0^{2\pi} \sqrt{2(1-\cos t)}\,dt =$$

$$= 2a\int_0^{2\pi} sin\frac{t}{2}dt = -4acos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = 8a. ◄$$

(ρ,θ) qutb koordinatalar sistemasida $\rho = \rho(\theta)$ tenglama bilan berilgan egri chiziqning $\theta = \alpha$ va $\theta = \beta$ nurlarning orasida joylashgan bo‘lagining uzunligini topish uchun (8.26) formulada

$$x = \rho cos\theta,\ y = \rho sin\theta$$

kabi almashtirish bajaramiz. Agar θ ni parametr deb olsak

$$x_\theta' = \rho' cos\theta - \rho sin\theta, \qquad y_\theta' = \rho' sin\theta + \rho cos\theta$$

ga ega bo‘lamiz. Bularni (8.26) formulaga qo‘yib topsak, quyidagi formulani hosil qilamiz

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\,d\theta \tag{8.27}$$

Bu yerda ham $\rho = \rho(\theta)$ funksiya o‘zining birinchi tartibli hosilasi bilan birgalikda uzluksiz deb faraz qilinadi.

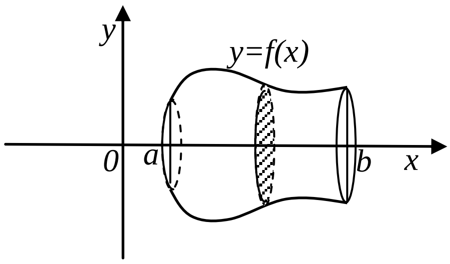
8.16-Misol. $\rho = e^\theta$ logarifmik spiralning bitta aylanishida hosil bo‘ladigan yoyi uzunligini toping.

►Qutb koordinatalarida yoy uzunligini hisoblashning (8.27) formulasiga ko‘ra

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{e^{2\theta} + e^{2\theta}}\,d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\,e^\theta d\theta = \sqrt{2}e^\theta\Big|_0^{2\pi} = \sqrt{2}(e^{2\pi} - 1). ◄$$

3. Aylanma jism hajmi va sirtini hisoblash

Aytaylik, $y = f(x)$ egri chiziq, $x = a$ va $x = b$ vertikal to‘g‘ri chiziqlar hamda Ox o‘qi bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiya qaralayotgan bo‘lsin. Uni Ox o‘qi atrofida aylantirganda biror aylanma jism hosil bo‘ladi (8.10- rasm). Bu jismni Ox ga perpendikulyar bo‘lgan $x = c$ tekisliklar bilan kesilganida kesimda radiusi $f(c)$ ga teng bo‘lgan doiralar hosil bo‘ladi.



8.10-rasm

Faraz qilaylik, $[a, b]$ kesma $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b$ nuqtalar bilan bo‘laklarga ajratilgan. Bu nuqtalar orqali abssissa o‘qiga perpendikulyar tekisliklar o‘tkazamiz. Har bir $[x_{i-1}, x_i]$ kesmadan ixtiyoriy ravishda ξ_i nuqta olib, radiusi $f(\xi_i)$ va balandligi $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ bo‘lgan silndrik jism quramiz. Ravshanki, bunday silindrlar soni n ta bo‘ladi. Barcha silindrlar hajmlarini hisoblab yig‘amiz, u holda yig‘indi aylanma jismning hajmiga taqriban teng bo‘ladi:

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} \pi\big(f(\xi_i)\big)^2 \Delta x_i$$

Agar bu yig‘indida $\max_i \Delta x_i \to 0$ da limitga o‘tsak aylanma jismning hajmini, ikkinchi tomondan $\big(f(x)\big)^2$ funksiyaning $[a, b]$ kesma bo‘yicha integralini hosil qilamiz. Demak, aylanma jism hajmi

$$V = \pi \int_a^b \big(f(x)\big)^2 dx = \pi \int_a^b y^2\, dx \qquad (8.28)$$

formula bilan hisoblanadi.

8.17-Misol. Radiusi a ga teng, markazi $(0, b)$ ($b > a$) nuqtada bo‘lgan aylanani Ox o‘qi atrofida aylanishidan hosil qilingan jismning hajmini toping.

►Bu jism tordan iboratdir (8.11- rasm). Aylananing tenglamasi

$$x^2 + (y - b)^2 = a^2$$

bo‘ladi. Bu yerdan $y = b \pm \sqrt{a^2 - x^2}$. Torning hajmi $y = b + \sqrt{a^2 - x^2}$ yuqori yarim aylananing aylanishidan hosil bo‘lgan jism hajmidan, quyi yarim aylana $y = b - \sqrt{a^2 - x^2}$ ning aylanishidan hosil bo‘lgan jism hajmini ayirish natijasigan teng. SHuning uchun

$$V = \pi \int_{-a}^{a} \big(b + \sqrt{a^2 - x^2}\big)^2 dx - \pi \int_{-a}^{a} \big(b - \sqrt{a^2 - x^2}\big)^2 dx =$$

$$= 8\pi b \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \left| \begin{matrix} x = asint \\ t_1 = 0, t_2 = \frac{\pi}{2} \\ dx = acostdt \end{matrix} \right| = 8\pi b a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2 t\, dt =$$

$$= 4\pi b a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + cos2t)\, dt = 4\pi b a^2 \left(t + \frac{1}{2} sin2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi^2 a^2 b. \blacktriangleleft$$

O‘zining birinchi tartibli hosilasi bilan birgalikda uzluksiz bo‘lgan biror $y = f(x)$ funksiya grafigining $[a, b]$ kesmaga mos keluvchi yoyini Ox o‘qi atrofida aylantirganda biror aylanma sirt hosil bo‘ladi (8.10-rasm). Bu sirtning yuzasini aniqlaymiz. Buning uchun egri chiziq yoyi uzunligini hisoblashdagi kabi vatarlar o‘tkazib, ularning uzunliklarini $\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_n$ kabi belgilaymiz:

$$\Delta s_i = \sqrt{1 + \left(f'(\xi_i)\right)^2}\, \Delta x_i, \quad x_{i-1} < \xi_i < x_i$$

Har bir i- vatar aylanishida kesik konus hosil bo‘lib uning yuzi

$$\Delta Q_i = 2\pi \frac{y_i + y_{i-1}}{2} \Delta s_i$$

ga teng. Ularni yig‘ib chiqsak siniq chiziqning aylanishidan hosil bo‘lgan sirt yuzasi kelib chiqadi

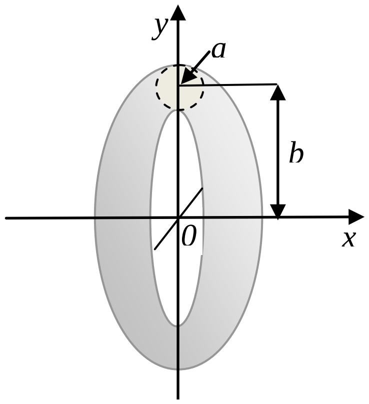
$$Q_n = \sum_{i=1}^n \Delta Q_i = 2\pi \sum_{i=1}^n \frac{y_i + y_{i-1}}{2} \sqrt{1 + \left(f'(\xi_i)\right)^2}\, \Delta x_i =$$

$$= 2\pi \sum_{i=1}^n \frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{2} \sqrt{1 + \left(f'(\xi_i)\right)^2}\, \Delta x_i$$

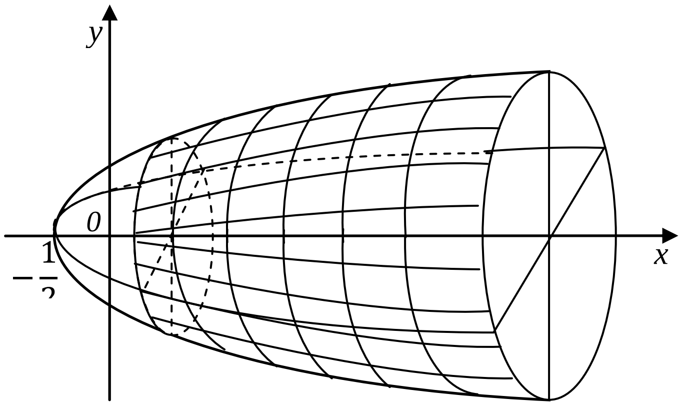
Agar bu yig‘indida $\max_i \Delta x_i \to 0$ da limitga o‘tsak aylanma sirt yuzasini aniq yordamida hisoblash formulasini hosil qilamiz

$$Q = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2} dx \qquad (8.29)$$

8.18-Misol. $y^2 = 2x + 1$ parabolaning $x_1 = 1$ va $x_2 = 7$ abssissalar oralig‘idagi yoyini aylantirishdan hosil bo‘lgan sirtning yuzasi hisoblansin (8.12-rasm).



8.11-rasm



8.12-

► (8.29) formula va 8.12- rasmdan quyidagilarga ega bo‘lamiz:

$$Q = 2\pi \int_1^7 \sqrt{2x+1} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{2x+1}}\right)^2}\, dx = 2\pi \int_1^7 \sqrt{2x+1+1}\, dx =$$

$$= 2\pi \int_1^7 \sqrt{2x+2}\, dx = 2\pi \cdot \frac{1}{2} \frac{(2x+2)^{3/2}}{3/2} \Big|_1^7 \frac{2}{3}\pi(64-8) = \frac{112\pi}{3}. ◄$$

4. Aniq integral yordamida bajarilgan ishni hisoblash.

Aytaylik, M nuqta biror F kuch ta’sirida Ox o‘qi bo‘ylab harakatlanayotgan bo‘lsin. M nuqta shu kuch ta’sirida $x = a$ nuqtadan $x = b$ nuqtaga ko‘chganida bajarilgan ishni topish masalasini qo‘yaylik.

Agar F kuch o‘zgarmas bo‘lsa, ravshanki bajarilgan ish

$$A = F(b-a)$$

ga teng bo‘ladi.

Faraz qilaylik, F kuch nuqtaning vaziyatiga, ya’ni x ga bog‘liq. Demak qo‘yilgan kuch x ning funksiyasi bo‘ladi. $[a, b]$ kesmani $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b$ nuqtalar bilan ixtiyoriy ravishda n ta bo‘laklarga ajratamiz. Har bir $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ bo‘lakchada ixtiyoriy ξ_i nuqta olamiz. U holda $[x_{i-1}, x_i]$ kesmadagi kuchning bajargan ishining taqribiy qiymati

$$A_i = F(\xi_i)\,\Delta x_i$$

dan iborat bo‘ladi. $[a, b]$ kesmada bajargan ishi esa

$$A_n = \sum_{i=1}^n A_i = \sum_{i=1}^n F(\xi_i)\,\Delta x_i.$$

Bu yerda A_n yig‘indi $F(x)$ funksiyaning integral yig‘indisidan iboratdir. Agar bu tenglikda $\max_i \Delta x_i \to 0$ da limitga o‘tsak F kuchning $[a, b]$ kesmada bajargan ishini hosil qilamiz

$$A = \int_a^b F(x)dx \tag{8.30}$$

8.19-Misol. Agar prujinani $1\,sm$ cho‘zish uchun $1\,kN$ kuch sarf qilinsa uni $10\,sm$ cho‘zish uchun bajariladigan ishni hisoblang.

►Guk qonuniga asosan, prujinani cho‘zadigan kuch, uning cho‘zilishiga proporsional, ya’ni $F = kx,$ bu erda, x prujinaning cho‘zilishi (metrda), k proporsionallik koeffitsienti. Masala shartiga ko‘ra $x = 0{,}01\,m, F = 1\,kN$

$1 = 0{,}01 \cdot k$ tenglikdan $k = 100$ ekanligi kelib chiqadi va $F = 100x$

(8.30) formulaga ko‘ra bajarilgan ish

$$A = \int_0^{0,1} 100x dx = 50x^2 \Big|_0^{0,1} = 0{,}5\,kDj. ◄$$

ga teng bo‘ladi.

5. Jismning og‘irlik markazini hisoblash

Jismning og‘irlik markazi mexanik tushuncha bo‘lib, biz uning ta’rifiga to‘xtalib o‘tirmasdan, bu nuqta koordinatalarini aniqlash masalasi bilan shug‘ullanamiz. $m_1, m_2, \dots, m_n$ massalar tekislikning $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2), \dots, M_n(x_n, y_n)$ nuqtalariga jamlangan bo‘lsin. Mexanikadan ma’lumki bu tizimning og‘irlik markazi $M(\xi, \eta)$ ning koordinatalari quyidagi formulalar bilan aniqlanadi

$$\xi = \frac{\sum_{i=1}^n x_i\, m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad \eta = \frac{\sum_{i=1}^n y_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

Agar moddiy nuqtalar tizimi bir jinsli bo‘lsa, $(m_1 = m_2 = \cdots = m_n)$ og‘irlik markazi koordinatalari massa miqdoriga bog‘liq emas, balki faqatgina nuqtalarning joylashuviga bog‘liq bo‘ladi:

$$\xi = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{M}, \quad \eta = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{M}.$$

Nuqta massasining uning biror o‘qqacha bo‘lgan masofaga ko‘paytmasi, shu nuqtaning o‘qqa nisbatan statik momenti deyiladi. SHuning uchun $x_i m_i$ va $y_i m_i$ lar M_i nuqtaning mos ravishda Ox va Oy o‘qlarga nisbatan statik momentlari bo‘ladi. Barcha nuqtalar statik momentlari yig‘indisi tizimning statik momenti bo‘ladi va biz ularni M_x va M_y kabi belgilaymiz. O‘z navbatida moddiy nuqtalar tizimining statik momentini

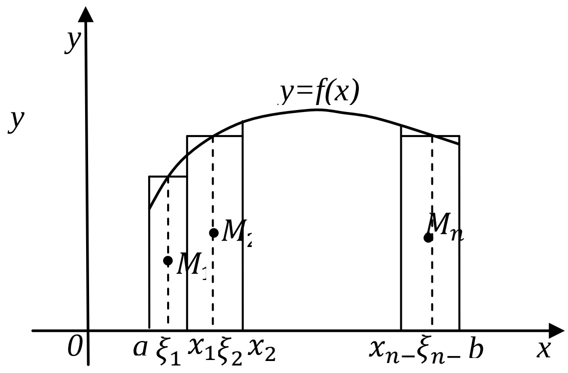
$$\xi = \frac{M_x}{M}, \quad \eta = \frac{M_y}{M}$$

kabi yozishimiz mumkin, bu yerda M massalar yig'indisi. Bu erdan

$$\xi M = M_x, \quad \eta M = M_y$$

SHunday qilib material nuqtalar tizimining og'irlik markazini shunday aniqlash mumkinki, agar bu nuqtada barcha massani jamlansa, bu nuqtaning biror o'qqa nisbatan statik momenti shu tizimning mos statik momentiga teng bo'ladi.

Bir jinsli yupqa plastinani qaraylik. Uning zichligini δ ($\delta = const$) bilan belgilaymiz. Bu plastinani Oxy o'qiga joylashtiramiz. Qo'yilgan bu shartlarda plastinaning og'irlik markazi faqatgina uning geometrik formasiga bog'liq bo'ladi. Faraz qilaylik, plastina Oxy tekislikda yuqoridan $y = f(x)$ funksiya grafigi, quyidan Ox o'qi, yon tomondan $x = a, y = b$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiya shaklida bo'lsin. Trapetsiyani ixtiyoriy ravishda olingan $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b$ nuqtalar orqali Oy o'qiga parallel o'tkazilgan to'g'ri chiziqlar yordamida n ta trapetsiyalarga ajratamiz. Har bir $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ bo'lakchada $\xi_i = \frac{x_i + x_{i-1}}{2}$ nuqta olamiz va barcha trapetsiyalarni asosi Δx_i ga balandligi $f(\xi_i)$ ga teng bo'lgan to'g'ri to'rtburchaklar bilan almashtiramiz (8.13- rasm). Hosil qilingan to'g'ri to'rtburchaklarning og'irlik markazlari $M_i\left(\xi_i, \frac{1}{2} f(\xi_i)\right)$ nuqtalarda bo'ladi.



8.13-

Har bir to'rtburchakning massasi uning yuzasi va zichligi ko'paytmasi $\delta f(\xi_i)\Delta x_i$ ga teng. To'g'ri to'rtburchaklarning jami massalarini og'irlik markaziga to'plab, hosil qilingan material nuqtalar tizimining og'irlik markazini topamiz:

$$\xi^{(n)}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\xi_i\delta f(\xi_i)\Delta x_i}{\sum_{i=1}^{n}\delta f(\xi_i)\Delta x_i},\quad \eta^{(n)}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}f(\xi_i)\delta f(\xi_i)\Delta x_i}{\sum_{i=1}^{n}\delta f(\xi_i)\Delta x_i}$$

δ o‘zgarmas bo‘lganligi uchun

$$\xi^{(n)}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\xi_i f(\xi_i)\Delta x_i}{\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i},\quad \eta^{(n)}=\frac{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(f(\xi_i)\right)^2\Delta x_i}{\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i}$$

Agar $\max_i \Delta x_i \to 0 \quad (n\to\infty)$ limitga o‘tsak $\left(\xi^{(n)},\eta^{(n)}\right)$ nuqtalar plastina og‘irlik markaziga yaqinlashadi. O‘ng tomondagi kasrlar suratlarida mos ravishda $xf(x)$ va $f^2(x)$ funksiyalar, maxrajlarda esa $f(x)$ funksiyalar $[a,b]$ kesma bo‘yicha integral yig‘indilari turibdi. Demak, limitga o‘tsak,

$$\xi=\frac{\int_a^b xf(x)dx}{\int_a^b f(x)dx},\qquad \eta=\frac{1}{2}\frac{\int_a^b f^2(x)dx}{\int_a^b f(x)dx}$$

$\int_a^b f(x)dx$ trapetsiya yuzasi S ga teng bo‘lganligi va $y=f(x)$ ekanligidan

$$\xi=\frac{\int_a^b xydx}{S},\qquad \eta=\frac{1}{2}\frac{\int_a^b y^2dx}{S} \tag{8.31}$$

Agar plastina $y=f_1(x), y=f_2(x), x=a,\ y=b$ chiziqlar bilan chegaralangan bo‘lsa, og‘irlik markazlari koordinatalari quyidagicha topiladi

$$\xi=\frac{\int_a^b x[f_2(x)-f_1(x)]dx}{S},\qquad \eta=\frac{1}{2}\frac{\int_a^b[f_2^2(x)-f_1^2(x)]dx}{S} \tag{8.32}$$

$y=f(x)$ chiziq bilan aniqlangan bir jinsli egri chiziqning $x=a,\ y=b$ to‘g‘ri chiziqlar orasidagi bo‘lagi og‘irlik markazi koordinatalari

$$\xi=\frac{\int_a^b x\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx}{L},\ \ \eta=\frac{\int_a^b y\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx}{L} \tag{8.33}$$

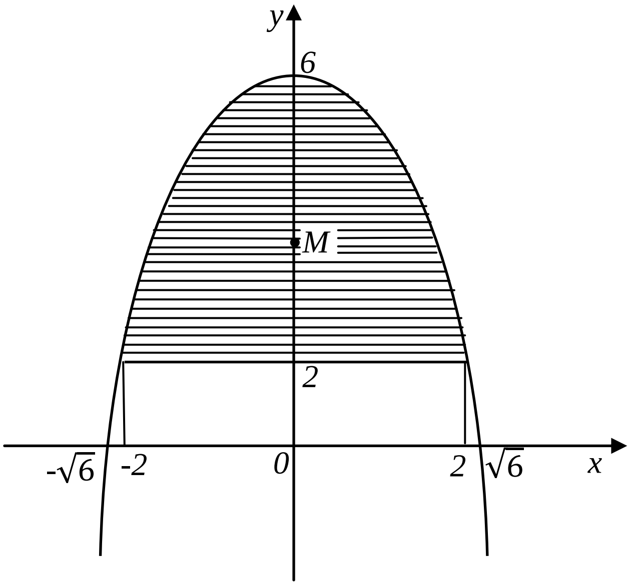
formula bilan hisoblanadi, bu erda $L-$ egri chiziqning $x=a,\ y=b$ to‘g‘ri chiziqlar orasidagi bo‘lagi uzunligi.

8.20-Misol. $y=6-x^2$ va $y=2$ chiziqlar bilan chegaralangan, bir jinsli yassi figuraning og‘irlik markazi topilsin.

►Bu figuraning bir jinsli va simmetrik ekanligidan (8.14-rasm) $\xi=0,\ \eta$ ni topish uchun esa (8.32) formuladan foydalanamiz:

$$\eta=\frac{1}{2}\frac{\int_{-2}^{2}((6-x^2)^2-2^2)dx}{\int_{-2}^{2}(4-x^2)dx}=\frac{1}{2}\frac{\int_{-2}^{2}(32-12x^2+x^4)dx}{2\int_0^2(4-x^2)dx}=\frac{1}{2}\frac{\left(32x-4x^3+\frac{x^5}{5}\right)}{(4x-x^3/3)\Big|_0^2}\Bigg|_0^2=$$

$$= \frac{1}{2}\frac{192/5}{16/3} = 3{,}6. \blacktriangleleft$$



8.14-rasm

SHuningdek, biror fazoviy jismning biror koordinata tekisligiga nisbatan kesimi ma’lum bo‘lganda ham u fazoviy jismning hajmi aniq integral yordamida hisoblanishi mumkin. Moddiy nuqtaning harakat qonuni tezlikka nisbatan berilgan bo‘lsa, uning ma’lum vaqt oralig‘ida bosib o‘tgan masofasini topish ham integral orqali hal qilinadi. SHuningdek, aniq integral yordamida mexanikaning hamda fizikaning boshqa masalalarini hal etish mumkin bo‘ladi.

Nazorat savollari.

1. Aniq integral va uning xossalari. Aniq integralni hisoblashning asosiy formulasi.
2. Aniq integralda o’zgaruvchi almashtirish va bo’laklab integrallash formulalari.
3. Aniq integralning geometriya va mexanika masalalariga tadbiqi.
4. 1 tur xosmas integral va uning xossalari.
5. 2 tur xosmas integral va uning xossalari.

Mashqlar

1. Ushbu $y^2 = 9x,\ y = 3x$ chiziqlar bilan chegaralangan sohaning yuzasini toping.
2. $y = x^2 + 4x,\ y = x + 4$ chiziqlar bilan chegaralangan sohaning yuzasini toping.

3. Ushbu $y = \frac{1}{(1+x^2)}$, $y = \frac{x^2}{2}$ chiziqlar bilan chegaralangan sohaning yuzasini toping.

4. YOpiq $y^2 = x^2 - x^4$ chiziq bilan chegaralangan sohaning yuzasini toping.

5. $y = a(1 - cost), x = s(t - sint)$ sikloidaning birinchi arkasi va *Ox* o‘qi bilan chegaralangan sohaning yuzasini hisoblang.

6. Parametrik ko‘rinishdagi $x = 3t^2$, $y = 3t - t^2$ chiziq bilan chegaralangan sohaning yuzasini hisoblang.

7. $y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$ egri chiziq va uning asimptotasi bilan chegaralangan sohaning yuzasini hisoblang.

8. Kardioida bilan chegaralangan sohaning yuzasini hisoblang: $\rho = a(1 - cos\varphi)$.

9. Berilgan $y = 2\sqrt{x}$ parabolaning $x_1=0$ va $x_2=1$ abssissalari orasidagi yoy uzunligini hisoblang.

10. $x = a\, cos^3 t$, $y = a\, sin^3 t$ astroidaning uzunligi hisoblansin.

11. Kardioidaning uzunligini hisoblang $\rho = a(1 - cos\varphi)$.

12. To‘g‘ri chiziqli harakat qilayotgan nuqtaning tezligi $v = te^{-0,01t}\ m/s$ ga teng. Nuqtaning to‘la to‘xtaguncha bosib o‘tgan masofasini hisoblang.

13. Uzunligi *l* ga teng, og‘irligi P ga teng bo‘lgan bir jinsli sterjenning oxiriga nisbatan inersiya momenti topilsin.

14. Bir jinsli, zichligi $\delta=2,5\ t/m^3$ qurilish materialidan, radiusi $R=2m$, balandligi $H=3m$ bo‘lgan konus ko‘rinishidagi qo‘rg‘onni qurish uchunsarflangan ishni hisoblang.

15. YAssi $u=x$ va $u=x^2-2x$ chiziqlar bilan chegaralangan bir jinsli figuraning og‘irlik markazini toping.

16. Moddiy nuqtaning tezligi $v = 4te^{-t^2}\ m/s$ bo‘lsa, nuqta harakat boshlangandan to‘xtaguncha qancha yo‘l bosib o‘tadi.

IX BOB. KO‘P O‘ZGARUVCHILI FUNKSIYALAR

9.1. Tekislikda sohalar

Fizika, texnika va bizni o‘rab turgan tabiatda turli jarayonlarni o‘rganishda ikki va undan ortiq kattaliklarning o‘zaro bog‘lanishlariga duch kelamiz. Masalan, yassi figuralarning yuzalari ikkita kattalik, hajmlar esa uchta erkli kattaliklar orqali ifodalanadi. Ana shu ko‘rinishdagi masalalarni hal etish uchun ko‘p o‘zgaruvchili funksiya tushunchasini kiritamiz.

Aytaylik xOy tekislikda biror (x_0, y_0) nuqta qaralayotgan bo‘lsin. Ana shu nuqtaning “ε- atrofi” deb, markazi (x_0, y_0) nuqtada bo‘lib, radiusi ε dan iborat bo‘lgan $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \varepsilon^2$ doiraga aytiladi. Agar biror (x_0, y_0) nuqta o‘zining istalgan kichik atrofi bilan ham M to‘plamda yotadigan bo‘lsa, uni M to‘plamning **ichki nuqtasi** deb ataladi. Faqatgina ichki nuqtalardan tashkil topgan to‘plam **ochiq to‘plam** deyiladi.

Agar (x_0, y_0) nuqtaning istalgan kichik atrofida ham M to‘plamga tegishli, ham M to‘plamga tegishli bo‘lmagan nuqtalar mavjud bo‘lsa, (x_0, y_0) nuqtani M to‘plamning chegaraviy nuqtasi deb ataladi. Barcha chegaraviy nuqtalar to‘plami esa M to‘plamning chegarasi deyiladi. Masalan, biror L yopiq egri chizik bilan chegaralangan tekislikdagi nuqtalar to‘plami M ochiq to‘plam bo‘lib, L yopiq egri chiziq esa, M to‘plamning chegarasi bo‘ladi. Odatda, chegarasi bilan qo‘shib olingan to‘plamni **yopiq to‘plam** deyiladi.

SHuningdek, agar biror to‘plamning har qanday ikki nuqtasini shu to‘plamning ichki nuqtalaridan tashkil topgan uzluksiz egri chiziq yordamida birlashtirish mumkin bo‘lsa, uni **bog‘lamli to‘plam** deb, aksincha bo‘lsa bog‘lamli bo‘lmagan to‘plam deyiladi. Har qanday bog‘lamli ochiq to‘plam **ochiq soha** deyiladi. CHegarasi bilan qo‘shib olingan soha esa yopik soha deb ataladi. Odatda ochiq va yopiq sohalar mos ravishda D va $\overline{D}$ bilan belgilanadi. Soha deyilganda, bog‘lamli ochiq to‘plam tushuniladi va biz ko‘pincha bir bog‘lamli sohalar bilan ish ko‘ramiz. Sohaga doira, xalqa, uchburchak kabi figuralar misol bo‘la oladi.

9.2. Ikki o‘zgaruvchili funksiyalar haqida asosiy tushunchalar.

Aytaylik, tekislikda biror D soha qaralayotgan bo‘lsin.

9.1-Ta’rif. x va y haqiqiy o‘zgaruvchilarning D sohadagi har bir juft (x, y) qiymatiga z o‘zgaruvchining bir sonli to‘plamdagi bir yoki bir necha haqiqiy qiymati biror qonun yoki qoida yordamida mos qilib qo‘yiladigan bo‘lsa, u holda D sohada x va y haqiqiy o‘zgaruvchilarga bog‘liq bo‘lgan z funksiya aniqlangan deb ataladi.

SHuningdek, bir juft (x, y) qiymatga o‘zgaruvchi z ning bittagina qiymati mos kelsa, funksiya bir qiymatli, aksincha ko‘p qiymatli deyiladi. Ikki argumentli funksiyalar ham jadval, grafik va analitik usullarda beriladi.

Analitik usulda berilgan funksiyalar $z = f(x, y)$, $z = \varphi(x, y)$ ... kabi yoziladi. Bu yerdagi f, φ va boshqalar o‘zgaruvchilar bilan funksiyalar orasidagi bog‘lanishni ifodalaydigan qonun yoki qoidani anglatadi.

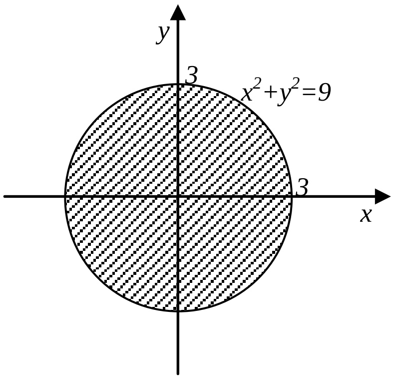
Bizga biror $z = f(x, y)$ kabi funksiya berilgan bo‘lsin. Ta’rifga ko‘ra, ushbu funksiyaning aniqlanish sohasi deyilganda (x, y) o‘zgaruvchilar juftligining qabul qila oladigan shunday bir qiymatlari to‘plamiga aytiladiki, u qiymatlarning har birida funksiya har doim ma’noga ega bo‘ladi. z ning qabul qiladigan qiymatlariga esa qiymatlar sohasi deyiladi.

9.1-Misol. $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ funksiyaning aniqlanish sohasini toping.

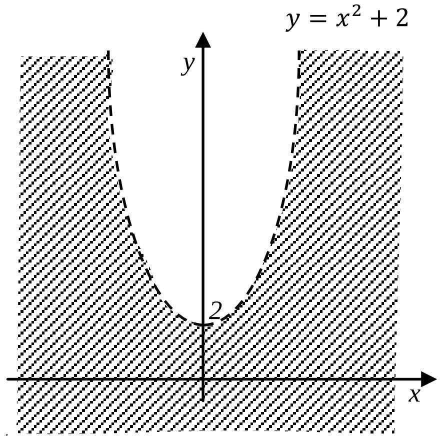
►Funksiya ma’noga ega bo‘lishligi uchun $9 - x^2 - y^2 \geq 0$, yoki $x^2 + y^2 \leq 9$ shart bajarilishi kerak. Demak, ushbu funksiyaning aniqlanish sohasi xOy tekislikdagi $x^2 + y^2 \leq 9$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi (x, y) kabi nuqtalar to‘plamidan iborat bo‘lib, bu to‘plam markazi koordinatalar boshida va radiusi 3 ga teng bo‘lgan yopiq doiradan iborat (9.1-rasm).◄

9.2-Misol. $z = ln(x^2 - y + 2)$ funksiyaning aniqlanish sohasini toping.

►Funksiyaning berilishiga ko‘ra $x^2 - y + 2 > 0$ yoki $y < x^2 + 2$ shart o‘rinli bo‘lishi kerak. Bu tengsizlikni qanoatlantiruvchi nuqtalar to‘plami $y = x^2 + 2$ parabolaning tashqi qismidan iborat (9.2-rasm).◄



9.1-rasm



9.2-rasm

Ma’lumki, $y = f(x)$ kabi bir argumentli funksiya geometrik jihatdan xOy tekislikdagi egri chiziqdan iborat bo‘lar edi. $z = f(x, y)$ kabi ikki argumentli funksiya esa, geometrik jihatdan $Oxyz$ fazodagi biror sirtdan iborat bo‘ladi. Bu sirt uch o‘lchovli fazodagi $\big(x, y, f(x, y)\big)$ nuqtalarning geometrik o‘rnidan iborat bo‘lib, bu erda (x, y) funksiyaning aniqlanish sohasidagi nuqtalar.

Analitik geometriya kursida ikkinchi tartibli sirtlarni o‘rganish jarayonida kesimlar usulidan foydalaniladi. Bu usulga ko‘ra sirt, koordinata tekisliklariga parallel tekisliklar bilan kesimlaridagi egri chiziqlar orqali tadqiq etiladi. Biz bu usulni $z = f(x, y)$ funksiya uchun ham qo‘llaymiz. Agar y ga o‘zgarmas $y = y_0$ qiymat bersak, bir o‘zgaruvchili $z = f(x, y_0)$ funksiyani hosil qilamiz. Hosil bo‘lgan bu funksiyaga bir o‘zgaruvchili funksiyani tekshirish usullarni qo‘llab z ning x erkli o‘zgaruvchiga nisbatan o‘zgarish qonuniyatlarini aniqlab olishimiz mumkin. Geometrik jihatdan bu $z = f(x, y)$ sirtni Oxz koordinata tekisligiga parallel bo‘lgan $y = y_0$ tekislik bilan kesimidagi chiziqni o‘rganishimizni anglatadi. Xuddi shu kabi sirtni $x = x_0$ tekislik bilan kesimini ham qarashimiz mumkin.

Endi erkli o‘zgaruvchilarga emas balki z ga $z = z_0$ qiymat beraylik. U holda

$$f(x, y) = z_0 \tag{9.1}$$

tenglik x va y o‘zgaruvchilar orasidagi bog‘lanishni beradi. Geometrik jihatdan biz $z = f(x, y)$ sirtning $z = z_0$ tekislik bilan kesimini hosil qilamiz. Oxy tekisiligida (9.1) tenglama $z = f(x, y)$ sirtning $z = z_0$ tekislik bilan kesimidagi chiziqning proeksiyasini beradi. Bu chiziq bo‘ylab harakatlanishda funksiyaning qiymati o‘zgarmas bo‘ladi.

9.2-Ta’rif. $z = f(x, y)$ funksiyaning **sath chizig‘i** deb Oxy tekisligining shunday chizig‘iga aytiladiki, bu chiziqning barcha nuqtalarida funksiyaning qiymati o‘zgarmas bo‘ladi.

z_0 turli qiymatlariga mos keluvchi sath chiziqlari birgalikda sath chiziqlari tarmog‘ini tashkil etadi. Bu tarmoq z_0 ning qiymatlari bir- biridan kam farq qilganida funksiya o‘zgarish xarakterini o‘rganishga yordam beradi.

Sath chiziqlari amaliy masalalarda ikki o‘zgaruvchining funksiyasini tasvir etishda foydalaniladi. Masalan, biror hududdagi nuqtaning dengiz sathiga nisbatan balandiligini qaralganida- bu nuqtaning koordinatalari bo‘yicha ikki o‘zgaruvchili funksiya deb olinib, kartada sath chiziqlari chiziladi. Topografiyada ular gorizontallar deb ataladi. Gorizontallar tarmog‘i yordamida hududning balandligini nazorat qilish osonlashadi.

Xuddi yuqoridagi kabi uch o‘lchovli fazoda soha tushunchasini kiritib, uch o‘zgaruvchili $u = f(x, y, z)$ funksiyaga ta’rif berishimiz mumkin. Bunday funksiyaning aniqlanish sohasi (x, y, z) sonlar uchligining qabul qilishi mumkin bo‘lgan qiymatlaridan iborat bo‘lib, u fazodagi biror sohadan iborat bo‘ladi. $u = f(x, y, z)$ funksiyaning grafigini geometrik talqin etib bo‘lmaydi.

9.3. Ikki o‘zgaruvchili funksiyalarning limiti va uzluksizligi.

Aytaylik, $z = f(x, y)$, funksiya biror $M_0(x_0, y_0)$ nuqtaning biror atrofida aniqlangan bo‘lsin (funksiya nuqtaning o‘zida aniqlanmagan bo‘lishi ham mumkin).

9.3-Ta’rif. Agar har qanday $\varepsilon > 0$ son uchun, shunday $\delta > 0$ son mavjud bo‘lib, $|x - x_0| < \delta$ va $|y - y_0| < \delta$ shartlarni qanoatlantiruvchi *x* va *y* lar uchun

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon$$

tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, u holda *A* soni $z = f(x, y)$ funksiyaning $M_0(x_0, y_0)$ nuqtadagi limiti deyiladi.

Agar A soni $f(x,y)$ funksiyaning $M_0(x_0,y_0)$ nuqtadagi limiti bo‘lsa, u holda quyidagicha yoziladi:

$$A=\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=\lim_{M\to M_0} f(x,y)$$

Bir argumentli funksiyaning limitlari ustida qanday xossalar o‘rinli bo‘lsa, ikki argumentli funksiyaning limitlari ustida ham shunday xossalar o‘rinli bo‘ladi.

9.3-Misol. $A=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$ limitni hisoblang

► Limit belgisi ostidagi ifodada almashtirishlar bajarib, quyidagiga ega bo‘lamiz.

$$A=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{(x^2+y^2)\left(\sqrt{x^2+y^2+1}+1\right)}{\left(\sqrt{x^2+y^2+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+y^2+1}+1\right)}=$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{(x^2+y^2)(\sqrt{x^2+y^2+1}+1)}{x^2+y^2+1-1}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(\sqrt{x^2+y^2+1}+1\right)=2 ◄$$

Aytaylik, yana $z=f(x,y)$ funksiya qaralayotgan bo‘lib, u $M_0(x_0,y_0)$ nuqtaning o‘zida ham atrofida ham aniqlangan bo‘lsin.

9.4-Ta’rif. Agar

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)$$

kabi tenglik o‘rinli bo‘lsa, $z=f(x,y)$ funksiyani $M_0(x_0,y_0)$ nuqtada uzluksiz deb ataladi.

Agar $M_0(x_0,y_0)$ nuqtada ikkala argumentga ham mos ravishda Δx va Δy orttirmalar bersak, o‘z navbatida funksiya

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$$

orttirmaga ega bo‘ladi. Unga funksiyaning to‘la orttirmasi deyiladi.

To‘la orttirma yordamida yuqorida keltirilgan funksiya uzluksizligini quyidagicha ta’riflashimiz mumkin bo‘ladi.

9.5-Ta’rif. Agar $M_0(x_0,y_0)$ nuqtada

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\Delta z=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}[f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)]=0$$

bo‘lsa, funksiya shu nuqtada uzluksiz deyiladi.

Agar ikki argumentli funksiya biror D sohaning barcha nuqtalarida uzluksiz bo‘lsa, uni o‘sha sohada uzluksiz funksiya deb yuritiladi. Agar funksiya uchun biror nuqtada uzluksizlik shartlari bajarilmasa, u shu nuqtada uzilishga ega deyiladi. Bir o‘zgaruvchili funksiyalar kabi uzilish nuqtalarini xususiyatlariga ko‘ra, turlarga ajratish mumkin.

9.4-Misol. $f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ funksiyani uzluksizlikka tekshiring.

► Ravshanki, $M_0(0,0)$ dan tashqari tekislikning barcha nuqtalarida funksiyaning limiti mavjud va uzluksiz. Funksiyaning limiti mavjud bo‘lishi uchun $M(x,y)$ nuqtaning $M_0(0,0)$ ga qaysi yo‘sinda, ya’ni qaysi chiziq bo‘ylab yaqinlashishiga bog‘liq emas. SHuning uchun $y=kx$ deb olsak

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2-k^2x^2}{x^2+k^2x^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{1-k^2}{1+k^2}=\frac{1-k^2}{1+k^2}$$

Demak, k ning turli qiymatlarida limitning qiymati turlicha bo‘ladi, ya’ni funksiyaning limiti mavjud emas va o‘z navbatida funksiya $M_0(0,0)$ nuqtada uzilishga ega. ◄

9.5-Misol. $f(x,y)=\frac{1}{x^2-y^2}$ funksiyani uzluksizlikka tekshiring.

►Ko‘rinib turibdiki, agar $x^2-y^2\neq 0$ bo‘lsa funksiya uzluksiz. Bu funksiya $y=\pm x$ to‘g‘ri chiziqlarning ustida, ya’ni Oxy tekisligining birinchi va ikkinchi choraklari bissektrisalari ustida uzlishga ega.◄

Bir argumentli funksiyaning uzluksizligi haqidagi barcha mulohazalar ikki argumentli funksiya uchun ham o‘zgarishsiz qoladi. Xususan, ikki argumentli elementar funksiyalarning aniqlanish sohalari bilan uzluksizlik sohalari ustma-ust tushadi.

9.4. Ikki o‘zgaruvchili funksiyalarning xususiy hosilalari.

Faraz qilaylik, $z=f(x,y)$ funksiya biror D sohada aniqlangan hamda uzluksiz bo‘lsin. Agar o‘zgaruvchi y ni o‘zgartirmasdan o‘zgaruvchi x ga biror Δx orttirma bersak, natijada funksiya $f(x+\Delta x,y)$ qiymatga ega bo‘ladi. Quyidagi $\Delta_x z=$

$f(x+\Delta x, y) - f(x,y)$ ayirmani $z = f(x,y)$ funksiyaning (x,y) nuqtasidagi o‘zgaruvchi x ga nisbatan xususiy orttirmasi deb yuritiladi.

Xuddi shunday o‘zgaruvchi x ni o‘zgartirmasdan o‘zgaruvchi y ga biror Δy orttirma beramiz. Natijada funksiya $f(x, y+\Delta y)$ qiymatga ega bo‘ladi. U holda quyidagi $f(x, y+\Delta y) - f(x,y)$ ifoda $z = f(x,y)$ funksiyaning (x,y) nuqtasidagi o‘zgaruvchi y ga nisbatan xususiy orttirmasi deb yuritiladi va
$\Delta_y z = f(x, y+\Delta y) - f(x,y)$ kabi yoziladi.

9.6-Ta’rif. Agar xususiy ortirma $\Delta_x z$ ning argument orttirmasi Δx ga bo‘lgan nisbatining $\Delta x \to 0$ dagi biror chekli limiti mavjud bo‘lsa, u limitni $z = f(x,y)$ funksiyaning (x,y) nuqtadagi o‘zgaruvchi x ga nisbatan xususiy hosilasi deb ataladi, hamda u xususiy hosilani quyidagi z'_x, $\frac{\partial z}{\partial x}$, f'_x, $\frac{\partial f}{\partial x}$ belgilarning biri orqali yoziladi.

Demak, ta’rifga ko‘ra xususiy hosila mavjud bo‘lishi uchun

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

kabi chekli limit mavjud bo‘lishi kerak ekan.

Xuddi shunday y o‘zgaruvchi bo‘yicha xususiy hosila

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

kabi limit bilan aniqlanib, z'_y, $\frac{\partial z}{\partial y}$, f'_y, $\frac{\partial f}{\partial y}$ kabi belgilanadi.

Xususiy hosilalarni hisoblashda quyidagi qoidalarga rioya qilinishi lozim:

a) Hosila hisoblanayotgan o‘zgaruvchidan boshqa o‘zgaruvchini o‘zgarmas deb faraz qilinadi.

b) Hosila bir o‘zgaruvchili funksiyaning hosilasini hisoblashdagi qoidalar bo‘yicha hisoblanadi.

9.6-Misol. $z = x^2 - 2xy + y^3$ funksiyaning xususiy hosilalarni toping.

►Ta’rifga va yuqorida keltirilgan qoidaga ko‘ra

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 2y, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -2x + 3y^2. ◄$$

9.7-Misol. $z = arctg\frac{x}{y}$ funksiyaning xususiy hosilalarni toping.

►Bir o‘zgaruvchili funksiyaning hosilasini hisoblash qoidalariga ko‘ra

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(arctg\frac{x}{y}\right)'_x=\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)'_x=\frac{y^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{1}{y}=\frac{y}{x^2+y^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(arctg\frac{x}{y}\right)'_y=\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)'_y=\frac{y^2}{x^2+y^2}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)=-\frac{x}{x^2+y^2}$$

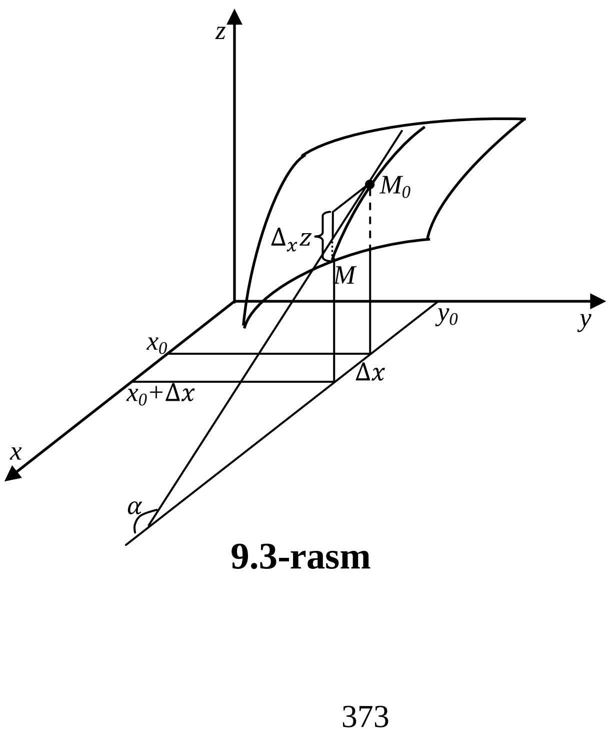
$\frac{\partial z}{\partial x}$ va $\frac{\partial z}{\partial y}$ xususiy hosilalarning absolyut qiymati, mos ravishda faqat x yoki y o‘zgarganida funksiyaning o‘zgarishining tezligini anglatadi. Ularning ishoralari esa bu o‘zgarishning xarakterini, ya’ni o‘sishi yoki kamayishini bildiradi. ◄

Xususiy hosilaning geometrik ma’nosi: $z=f(x,y)$ sirtning $y=y_0$ tekislik bilan kesimiga $M_0(x_0,y_0,z_0)$ nuqtada o‘tkazilgan urinmaning Ox o‘qiga nisbatan burchak koeffitsienti $f'_x(x_0,y_0)$ ga teng, ya’ni $f'_x(x_0,y_0)=tg\alpha$ (9.3- rasm). SHuning uchun bu urinmaning tenglamasi

$$\begin{cases} z-z_0=f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) \\ y=y_0 \end{cases} \tag{9.2}$$

dan iborat bo‘ladi.

Xuddi shu kabi $z=f(x,y)$ sirtning $x=x_0$ tekislik bilan kesimiga $M_0(x_0,y_0,z_0)$ nuqtada o‘tkazilgan urinmaning Oy o‘qiga nisbatan burchak koeffitsienti $f'_y(x_0,y_0)$ ga teng.



9.3-rasm

9.5. To‘la differensial.

Faraz qilaylik $z=f(x,y)$ funksiya biror D sohada aniqlangan bo‘lsin. Agar o‘zgaruvchi x ga D sohadan chiqmaslik sharti bilan biror Δx orttirma, o‘zgaruvchi y ga ham D sohadan chiqmaslik sharti bilan biror Δy orttirma bersak,

$$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$$

ifodaga $z=f(x,y)$ funksiyaning (x,y) nuqtadagi to‘la orttirmasi deb atalar edi.

9.7-Ta’rif. Agar $z=f(x,y)$ funksiyaning to‘la orttirmasini $M(x,y)$ nuqtada

$$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+\alpha(\Delta x,\Delta y) \tag{9.3}$$

ko‘rinishda yozish mumkin bo‘lsa, funksiya shu nuqtada differensiallanuvchi deyiladi. Bu erda A va B lar Δx va Δy larga nisbatan o‘zgarmas sonlar, $\alpha(\Delta x,\Delta y)$ esa $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ ga nisbatan cheksiz kichik miqdor.

9.8-Ta’rif. Funksiya to‘la orttirmasining Δx va Δy larga nisbatan chiziqli bo‘lgan qismiga (bosh qismiga) uning to‘la differensiali deb ataladi va

$$dz=A\Delta x+B\Delta y$$

kabi belgilanadi.

9.8-Misol. $z=x^2-xy+y^2$ funksiyaning to‘la orttirmasi va to‘la differensialini toping.

►Tarifga asosan

$$\Delta z=(x+\Delta x)^2-(x+\Delta x)(y+\Delta y)+(y+\Delta y)^2-x^2+xy-y^2=$$
$$=x^2+2x\Delta x+\Delta x^2-xy-x\Delta y-y\Delta x-\Delta x\Delta y+y^2+2y\Delta y+\Delta y^2-$$
$$-x^2+xy-y^2=2x\Delta x-x\Delta y+2y\Delta y-y\Delta x+\Delta x^2-\Delta x\Delta y+\Delta y^2=$$
$$=(2x-y)\Delta x+(2y-x)\Delta y+\Delta x^2-\Delta x\Delta y+\Delta y^2$$

$dz=(2x-y)\Delta x+(2y-x)\Delta y$ ifoda $\Delta x\ va\ \Delta y$ larga nisbatan chiziqli bo‘lib z ning to‘la differensialidir, $\alpha=\Delta x^2-\Delta x\Delta y+\Delta y^2$ kattalik esa $\Delta\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ ga nisbatan yuqori tartibli cheksiz kichikdir. Shunday qilib, $\Delta z=dz+\alpha.$◄

9.1-Teorema. Agar $z=f(x,y)$ funksiya $M(x,y)$ nuqtada differensiallanuvchi bo‘lsa, bu funksiyaning $\frac{\partial z}{\partial x}$ va $\frac{\partial z}{\partial y}$ xususiy hosilalari mavjud bo‘lib uning to‘la differensiali

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$$

kabi ifodalanadi.

◀Teorema shartiga ko‘ra

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)$$

tenglik bajariladi. Xususan bu tenglik $\Delta y = 0$ da ham o‘rinli bo‘lib, bu holda to‘la orttirma x bo‘yicha xususiy orttirmaga aylanadi. Demak,

$$\Delta_x z = A\Delta x + \alpha(\Delta x, 0)$$

Oxirgi tenglikning ikkala tomonini Δx bo‘lib limitga o‘tsak

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = A + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(\Delta x, 0)}{\Delta x}$$

$\alpha(\Delta x, \Delta y) = \alpha(\Delta x, 0)$ ifoda $\Delta\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{\Delta x^2 + 0} = |\Delta x|$ ga nisbatan cheksiz kichik bo‘lganligi uchun

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(\Delta x, 0)}{\Delta x} = 0.$$

Demak,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = A$$

Xuddi shu kabi

$$\frac{\partial z}{\partial y} = B$$

ekanligini isbot qilishimiz mumkin.

SHunday qilib

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$$ ▶

Erkli o‘zgaruvchilar uchun $\Delta x = dx$ va $\Delta y = dy$ ekanligini nazarga olsak

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy \qquad (9.4)$$

YUqoridagi teoremaning teskarisi qo‘shimcha shartlar bajarilganida ma’noga ega, ya’ni quyidagi teorema o‘rinli.

9.2-Teorema. Agar $z = f(x, y)$ funksiya $M(x, y)$ nuqtada $\frac{\partial z}{\partial x}$ va $\frac{\partial z}{\partial y}$ uzluksiz xususiy hosilalarga ega bo‘lsa, funksiya bu nuqtada differensiallanuvchi bo‘ladi.

◀ Funksiyaning to‘la orttirmasi

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

ni

$$\Delta z = [f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)] + [f(x, y+\Delta y) - f(x,y)] \quad (9.5)$$

kabi shakl almashtiramiz. Birinchi ayirma x ga nisbatan xususiy orttirma bo‘lib, ikkinchi argumentning qiymati o‘zgarmas bo‘lib $y+\Delta y$ ga teng. Ikkinchi ayirma esa y ga nisbatan xususiy orttirma bo‘lib, bu holda x o‘zgarmas. Ikkala ayirmaga ham Lagranjning chekli ayirmalar formulasini qo‘llasak

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y) = f_x'(\xi, y+\Delta y)\Delta x, (x < \xi < x+\Delta x)$$

$$f(x, y+\Delta y) - f(x,y) = f_y'(x,\eta)\Delta y, (y < \eta < y+\Delta y)$$

Xususiy hosilalar $M(x,y)$ nuqtada uzluksiz bo‘lganligi uchun

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f_x'(\xi, y+\Delta y) = f_x'(x,y) \quad (9.6)$$

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f_y'(x,\eta) = f_y'(x,y) \quad (9.7)$$

(9.6) va (9.7) tengliklar va limitlar haqidagi teoremalardan foydalanib

$$f_x'(\xi, y+\Delta y) = f_x'(x,y) + \alpha_1(\Delta x, \Delta y)$$

$$f_y'(x,\eta) = f_y'(x,y) + \alpha_2(\Delta x, \Delta y)$$

larni yozishimiz mumkin. Bu erda $\alpha_1(\Delta x, \Delta y)$ va $\alpha_2(\Delta x, \Delta y)$ miqdorlar Δx va Δy ga nisbatan cheksiz kichik. Hosil qilingan ifodalarni (9.5) qo‘ysak

$$\Delta z = f_x'(x,y)\Delta x + f_y'(x,y)\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y) \quad (9.8)$$

bu erda $\alpha(\Delta x, \Delta y) = \alpha_1(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \alpha_2(\Delta x, \Delta y)\Delta y$.►

9.9-Misol. $z = ln^2(x^2+y^2)$ funksiyaning to‘la differensialini toping.

►Avval xususiy hosilalarni topamiz:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2l\,n(x^2+y^2)\cdot\frac{2x}{x^2+y^2}; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 2\,ln(x^2+y^2)\cdot\frac{2y}{x^2+y^2}$$

(9.3) formulaga asosan quyidagilarga ega bo‘lamiz

$$dz = 4\ln(x^2+y^2)\cdot\frac{1}{x^2+y^2}\cdot(xdx+ydy)◄$$

Funksiyaning to‘la orttirmasi uchun (9.8) formula yordamida taqribiy hisoblashlarni bajarishimiz mumkin. Bu formuladagi $\alpha(\Delta x, \Delta y)$ miqdor etarlicha kichik bo‘lganligi uchun

$$\Delta z \approx f'_x(x,y)\Delta x + f'_y(x,y)\Delta y$$

olishmiz mumkin. Ikkinchi tomondan

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$$

ekanligini e'tiborga olsak,

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) \approx f'_x(x,y)\Delta x + f'_y(x,y)\Delta y$$

yoki

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx f(x,y) + f'_x(x,y)\Delta x + f'_y(x,y)\Delta y \qquad (9.9)$$

9.10-Misol. $(1{,}02)^{3{,}01}$ ni taqribiy hisoblang.

► $z = x^y$ funksiyani qaraymiz. $x = 1$ *va* $y = 3$ da quyidagilarga ega bo'lamiz.

$z = 1^3 = 1; \quad \Delta x = 1{,}02 - 1 = 0{,}02, \ \Delta y = 3{,}01 - 3 = 0{,}01$

$z = x^y$ funksiyaning ixtiyoriy nuqtadagi to'la differensialini topamiz:

$$dz = yx^{y-1}\Delta x + x^y lnx\,\Delta y$$

Berilgan $\Delta x = 0{,}02$ va $\Delta y = 0{,}01$ orttirmalarni etiborga olgan holda buning $\mathrm{M}(1;3)$ nuqtadagi qiymatini hisoblaymiz.

$$dz = 3 \cdot 1^2 \cdot 0{,}02 + 1^3 ln1 \cdot 0{,}02 = 0{,}06$$

U holda $z = (1{,}02)^{3{,}01} \approx z + \ dz = 1 + 0{,}06 = 1{,}06$. ◄

9.6. YUqori tartibli xususiy hosilalar

$z = f(x,y)$ funksiya biror D sohada aniqlangan hamda uzluksiz bo'lsin. Faraz qilaylik $z = f(x,y)$ funksiyaning D sohadagi ixtiyoriy (x,y) nuqtada $\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x,y)$ va $\frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x,y)$ xususiy hosilalari mavjud bo'lsin. U holda ularning har biri yana *x* va *u* o'zgaruvchilariga nisbatan funksiyalardan iborat bo'ladi.

9.9-Ta'rif. Agar $\frac{\partial z}{\partial x}$ va $\frac{\partial z}{\partial y}$ xususiy hosilalardan har birining ham *x*, ham *u* o'zgaruvchilariga nisbatan xususiy hosilalari mavjud bo'lsa, ularni $z = f(x,y)$ funksiyaning ixtiyoriy (x,y) nuqtadagi ikkinchi tartibli xususiy hosilalari deb ataladi.

Har bir birinchi xususiy hosilalar ikkitadan xususiy hosilaga ega. SHunday qilib to'rtta xususiy hosilani hosil qildik va ularni quyidagicha belgilaymiz:

$$z''_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x,y), \qquad z''_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x,y),$$

$$z''_{yx} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x,y), \qquad z''_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x,y).$$

Demak, ikki argumentli funksiyaning biror nuqtadagi barcha ikkinchi tartibli xususiy hosilalari mavjud bo‘lsa, ularning soni 4 taga teng bo‘lar ekan.

9.11-Misol. $z = e^{x^2y^2}$ funksiyaning ikkinchi tartibli xususiy hosilalarini toping.

► Avval birinchi tartibli xususiy hosilalarini topamiz:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x^2y^2} \cdot 2xy^2, \frac{\partial z}{\partial x} = e^{x^2y^2} \cdot 2x^2y.$$

Yana bir marta differensiallab quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^{x^2y^2} \cdot 4x^2y^4 + e^{x^2y^2} \cdot 2y^2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^{x^2y^2} \cdot 4x^4y^2 + e^{x^2y^2} \cdot 2x^2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = e^{x^2y^2} \cdot 4x^3y^3 + e^{x^2y^2} \cdot 4xy,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial x} = e^{x^2y^2} \cdot 4x^3y^3 + e^{x^2y^2} \cdot 4xy.$$

Oxirgi ikki ifodani solishtirib, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ ekanligini ko‘ramiz. ◄

Odatda, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ va $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ kabi ikkinchi tartibli xususiy hosilalarni aralash ikkinchi tartibli xususiy hosilalar deb ataladi.

Aralash ikkinchi tartibli xususiy hosilalar tengligi haqidagi teoremani isbotsiz keltiramiz.

9.3-Teorema. Agar $z = f(x,y)$ funksiya va uning $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ xususiy hosilalari biror nuqta va uning atrofida uzluksiz bo‘lsalar, u holda o‘sha nuqtada aralash ikkinchi tartibli xususiy hosilalar qiymatlari bir – biriga teng, ya’ni

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \qquad (9.10)$$

bo‘ladi.

Umuman, agar $z = f(x,y)$ funksiyaning ixtiyoriy (x,y) nuqtadagi n – tartibli xususiy hosilalari mavjud bo‘lsalar, ularning soni 2^n ta bo‘ladi.

Masalan, uchinchi tartibli xususiy hosilalarning soni 8 ta bo‘lib, ular quyidagilardir.

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \ \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}, \ \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}, \ \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x}, \ \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}, \ \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x}, \ \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y}, \ \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}$$

Aralash hosilalarlarning tengligi haqidagi teoremadan quyidagi umumiy xulosa kelib chiqadi:

Ikki o‘zgaruvchili funksiyaning ixtiyoriy tartibdagi xususiy hosilasi o‘zgaruvchilar bo‘yicha hosila olish tartibiga bog‘liq emas.

Demak, uchinchi tartibli xususiy hosilalar uchun

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2} \quad \text{va} \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y} = \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x}$$

Ixtiyoriy sondagi o‘zgaruvchili funksiyalar uchun yuqori tartibli xususiy hosilalar haqidagi keltirilgan fikr va mulohazalar o‘rinli bo‘ladi.

Masalan $u = f(x,y,z)$ funksiyaning ikkinchi tartibli xususiy hosilalari soni 9 ta bo‘lib

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y}.$$

9.7. YUqori tartibli differensiallar

9.10-Ta’rif. Agar ikki argumentli funksiyaning ixtiyoriy (x,y) nuqtasidagi to‘la differensialining yana to‘la differensiali mavjud bo‘lsa, uni funksiyaning o‘sha nuqtadagi ikkinchi tartibli to‘la differensiali deb ataladi va $d^2 z$ yoki $d^2 f(x,y)$ orqali belgilanadi.

Demak, ta’rifga ko‘ra $d^2 z = d(dz)$ ekan. Funksiyaning ikkinchi tartibli differensialini hisoblash ifodasini topaylik.

$$d^2 z = d(dz) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx\right) + d\left(\frac{\partial z}{\partial y}dy\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx\right)dy + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}dy\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}dy\right)dy =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2.$$

Xuddi shunday mulohazalar asosida uchinchi tartibli differensialni hosil qilamiz

$$d^3z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}dx^3 + 3\ \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}dx^2dy + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}dxdy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}dy^3.$$

Demak, yuqoridagi keltirib chiqarilgan formulalardan ko‘rinyaptiki,

$$d^2z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2, d^3z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^3$$

Bu formulalarni ixtiyoriy tartibli differensiallarni hisoblash uchun ham qo‘llash mumkin bo‘lib

$$d^nz = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n \qquad (9.11)$$

9.12-Misol. $z = x^3 + y^3 + x^2y^2$ funksiyaning ikkinchi tartibli to‘la differensialini toping.

►Ikkinchi tartibli xususiy hosilalarni topamiz.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 2xy^2;\ \ \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 + 2x^2y;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x + 2y^2;\ \ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y + 2x^2\ ;\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 4xy.$$

Shunday qilib,

$$\partial^2 z = (6x + 2y^2)dx + 8xydxdy + (6y + 2x^2)dy^2 ◄$$

9.8. Murakkab funksiyaning hosilasi

Aytaylik, biror sohada ikkita $u = \varphi(x,y), v = \psi(x,y)$ funksiyalar berilgan bo‘lib, mos ravishda bu funksiyalarning qiymatlari sohasida $z = f(u,v)$ funksiya aniqlangan bo‘lsin. Bunday holda x va y ning $z = f\big(\varphi(x,y),\psi(x,y)\big) = F(x,y)$ murakkab funksiyasini hosil qilamiz. u va v funksiyalar x va y ga nisbatan, $f(u,v)$ esa u va v ga nisbatan differensiallanuvchi bo‘lsin.

Agar x ga Δx orttirma bersak, u va v funksiyalar mos ravishda $\Delta_x u$ va $\Delta_x v$ orttirmalar oladi. Murakkab funksiyaning xususiy orttirmasi esa $\Delta_x z$ bo‘ladi. $z = f(u,v)$ differensiallanuvchi bo‘lganligi uchun uning xususiy orttirmasini (9.3) ga ko‘ra

$$\Delta_x z = \frac{\partial z}{\partial v}\Delta_x u + \frac{\partial z}{\partial v}\Delta_x v + \alpha(\Delta_x u, \Delta_x v)$$

kabi yozishimiz mumkin.

Bu tenglikni Δx ga bo‘lib $\Delta x \to 0$ da limitga o‘tamiz

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\frac{\partial z}{\partial u}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x u}{\Delta x}+\frac{\partial z}{\partial v}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x v}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\alpha(\Delta_x u,\Delta_x v)}{\Delta x}$$

bu yerda $\Delta_x u \to 0, \Delta_x v \to 0$ hamda $\alpha(\Delta_x u, \Delta_x v) \to 0$ va

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\alpha(\Delta_x u,\Delta_x v)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\alpha(\Delta_x u,\Delta_x v)}{\sqrt{\Delta_x u^2+\Delta_x v^2}}\cdot\frac{\sqrt{\Delta_x u^2+\Delta_x v^2}}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\alpha(\Delta_x u,\Delta_x v)}{\sqrt{\Delta_x u^2+\Delta_x v^2}}\cdot\sqrt{\left(\frac{\Delta_x u}{\Delta x}\right)^2+\left(\frac{\Delta_x v}{\Delta x}\right)^2}=0$$

ekanligi uchun

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} \tag{9.12}$$

Xuddi shu kabi

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} \tag{9.13}$$

9.13-Misol. $z=u^2+v^3,\ u=2x-y,\ v=x-y$ murakkab funksiyaning xususiy hosilalarini toping.

► $$\frac{\partial z}{\partial u}=2u,\ \frac{\partial z}{\partial v}=3v^2$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2, \frac{\partial v}{\partial x}=1, \frac{\partial u}{\partial y}=\ -1, \frac{\partial v}{\partial y}=-1$$

Topilganlarni (9.12) va (9.13) larga olib borib qo‘ysak

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2u\cdot 2+3v^2\cdot 1=4u+3v^2,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=2u\cdot(-1)+3v^2\cdot(-1)=-2u-3v^2.◄$$

Bizga $u=\varphi(x,y), v=\psi(x,y)$ funksiyalar berilgan bo‘lib, mos ravishda bu funksiyalarning qiymatlari sohasida $z=f(u,v)$ funksiya aniqlangan bo‘lsin. Agar $z=f(u,v)$ funksiya o‘zining aniqlanish sohasida differensiallanuvchi bo‘lsa, uning to‘la differensiali

$$dz=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv$$

ga teng. Ikkinchi tomondan $z=f\big(\varphi(x,y),\psi(x,y)\big)$ ekanligi uchun uning to‘la differensiali

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

kabi topiladi. Bu yerda $\frac{\partial z}{\partial x}$ va $\frac{\partial z}{\partial y}$ ni (9.12) va (9.13) formulalardagi shakllari bilan almashtirsak

$$dz = \left(\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy$$

Agar bu tenglikni qayta guruhlab shakl almashtirsak

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right) + \frac{\partial z}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy\right) = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv$$

Demak,

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv$$

SHunday qilib, $z = f(u,v)$ murakkab funksiya to‘la differensialining shakli erkli o‘zgaruvchilar yoki ularning funksiyalari bo‘lishiga bog‘liq emas ekan. Bunga birinchi tartibli differensialning invariantligi deyiladi.

Eslatma. Agar f yoki φ, ψ funksiyalar ikkidan ko‘p o‘zgaruvchilarga bog‘liq bo‘lganida (9.12) va (9.13) formulalarni mos ravishda umumlashtirish mumkin. Masalan, $z = f(u,v,w)$, $u = \varphi(x,y), v = \psi(x,y)$ murakkab funksiyaning x va y bo‘yicha xususiy hosilalari

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial x}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}$$

formulalar bilan hisoblanadi.

9.9. Oshkormas funksiyaning hosilasi.

Ikki o‘zgaruvchini bog‘lovchi tenglama, ya’ni ikki o‘zgaruvchining oshkormas funksiyasiga duch kelgan edik. Eslatib o‘tamiz bir o‘zgaruvchining oshkormas funksiyasi

$$F(x,y) = 0 \tag{9.14}$$

tenglik bilan aniqlanadi.

SHuni ta’kidlashimiz lozimki (14) tenglamadan har doim ham y ni x ning funksiyasi shaklida oshkor ko‘rinishda ifodalab bo‘lmaydi. Masalan, $x^2 + y^2 + 4 = 0$ tenglama haqiqiy ildizga ega emas, demak y ni x ning funksiyasi deb qaray olmaymiz. Ba’zi murakkabroq hollarda (9.14) tenglama ildizlari mavjudmi, qaysi x larda ildizga ega ekanligini aniqlash qiyin, shuning uchun biror oshkor funksiyani beradimi degan masala ochiq qoladi. Biz qaysi hollarda (9.14) tenglamadan o‘zgaruvchilardan birini ikkinchisining funksiyasi sifatida ifodalash mumkinligi haqidagi teoremani keltiramiz.

9.4-Teorema. (oshkormas funksiyaning mavjudligi haqidagi teorema) $F(x, y)$ funksiya o‘zining xususiy hosilalari bilan birgalikda $M_0(x_0, y_0)$ nuqtaning biror atrofida uzluksiz bo‘lsin. Agar $F(x_0, y_0) = 0$ va $F_y'(x_0, y_0) \neq 0$ bo‘lsa

$$F(x, y) = 0$$

tenglama x_0 nuqtaning atrofida $y_0 = \varphi(x_0)$ shartni qanoatlantiruvchi yagona $y = \varphi(x)$ echimga ega bo‘lib, bu funksiya uzluksiz differensiallanuvchi bo‘ladi.

9.14-Misol. Oshkormas $x^2y + lny - x = 0$ funksiyani $M_0(1,1)$ nuqtaning arofida oshkor funksiya ko‘rinishida tasvirlash mumkinligiga tekshiring.

► Bu yerda $F(x, y) = x^2y + lny - x$ bo‘lib $M_0(1,1)$ nuqtada $F(1,1) = 0$. $F_x'(x, y) = 2xy - 1,\ F_y'(x, y) = x^2 + \frac{1}{y}$ xususiy hosilalar esa berilgan nuqtaning atrofida uzluksiz va $F_y'(1,1) = 2 \neq 0$. Demak yuqoridagi teoremaga asosan $y = \varphi(x)$ oshkor funksiya mavjud va $\varphi(1) = 1$. Biz bunday funksiyaning mavjudligini isbot qilgan bo‘lsakda uni yaqqol ifoda eta olmaymiz, chunki berilgan tenglamani y ga nisbatan algebraik echib bo‘lmaydi.◄

Ikki o‘zgaruvchining oshkormas funksiyasi

$$F(x, y, z) = 0$$

tenglik tenglik bilan aniqlanadi. Bu tenglikdan z ni x va y ning oshkor funksiyasi ko‘rinishida ifodalash haqidagi yuqoridagiga o‘xshash teoremani keltirishimiz mumkin.

Faraz qilaylik

$$F(x, y) = 0$$

oshkormas funksiya berilgan bo‘lib, bu funksiya yuqoridagi teoremaning barcha shartlarini qanoatlantirsin, ya’ni $y = \varphi(x)$ funksiya mavjud bo‘lsin. Agar bu tenglamada y ning o‘rniga $\varphi(x)$ ni qo‘ysak ayniyat hosil bo‘ladi

$$F(x, \varphi(x)) = 0$$

Oxirgi tenglikni murakkab funksiya kabi differensiallasak

$$F'_x + F'_y \varphi'(x) = 0$$

$y' = \varphi'(x)$ ekanligi uchun oxirgi tenglikdan

$$y' = -\frac{F'_x}{F'_y} \qquad (9.15)$$

ni hosil qilamiz. (9.15) ga oshkormas funksiya hosilasini hisoblash formulasi deb ataladi.

Aytaylik, $F(x, y, z) = 0$ tenglama z ni x va y erkli o'zgaruvchilarning biror $z = \varphi(x, y)$ funksiyasi kabi aniqlasin. Agar tenglamaga z ning o'rniga $\varphi(x, y)$ ni qo'ysak quyidagi ayniyatga ega bo'lamiz:

$$F(x, y, \varphi(x, y)) = 0$$

Bundan kelib chiqadiki, $F(x, y, z)$ funksiyadan x va y bo'yicha olingan xususiy hosilalar ham nolga teng bo'lishi kerak. Bu tenglikni murakkab funksiya sifatida x va y bo'yicha differensiallab quyidagilarni topamiz

$$F'_x + F'_z \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \qquad F'_y + F'_z \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

Bu tengliklardan topsak

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} \qquad (9.16)$$

(9.16) formulalar berilgan $F(x, y, z)$ funksiyaning hosilalari orqali aniqlanuvchi $z = \varphi(x, y)$ oshkormas funksiyaning xususiy hosilalarini ifodalaydi.

9.15-Misol. Oshkormas ko'rinishda berilgan $xyz + x^3 - y^3 - z^3 + 5 = 0$ tenglamadan z funksiyaning xususiy hosilalarini toping.

► (16) formulalardan foydalanib, quyidaglarga ega bo'lamiz:

$$F'_x = yz + 3x^2, \qquad F'_y = xz - 3y^2, \qquad F'_z = xy - 3\,x^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{yz + 3x^2}{xy - 3\,x^2}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{xz - 3y^2}{xy - 3\,x^2} \blacktriangleleft$$

9.10. Ikki o‘zgaruvchili funksiya differensial hisobining geometrik tadbiqlari.

Sirtning biror nuqtasidagi urinma tekisligi tenglamasi shu sirt tenglamasi bilan bog‘liq bo‘ladi.

Faraz qilaylik S sirt, $z = f(x, y)$ tenglama bilan berilgan bo‘lib $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqtada differensiallanuvchi bo‘lsin. Bu sirtning $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqtasi orqali o‘tuvchi urinma tekisligi tenglamasini aniqlaymiz. Buning uchun S sirtning $y = y_0$ va $x = x_0$ tekisliklar bilan kesimlarini qaraymiz. Kesimda hosil bo‘lgan yassi chiziqlarga urinmalar o‘tkazamiz. M_0 nuqtada kesishuvchi bu ikki urinma, sirtga M_0 nuqtada o‘tkazilgan urinma tekislikni aniqlaydi. (9.2) formulalarga ko‘ra urinmalarning tenglamalari mos ravishda

$$\begin{cases} z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) \\ y = y_0 \end{cases} \tag{9.17}$$

va

$$\begin{cases} z - z_0 = f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) \\ x = x_0 \end{cases} \tag{9.18}$$

dan iborat bo‘ladi. Analitik geometriya kursidan ma’lumki $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqtadan o‘tuvchi tekislik tenglamasi

ko‘rinishga ega. (9.17) va (9.18) to‘g‘ri chiziqlar bu urinma tekislikda yotganligi uchun uning tenglamasini qanoatlantirishi kerak, shuning uchun

$$f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) = A(x - x_0)$$

bu erdan

$$f'_x(x_0, y_0) = A$$

Xuddi shu kabi

$$f'_y(x_0, y_0) = B$$

Demak sirtga $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqtada o‘tkazilgan urinma tekislik tenglamasi

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) \tag{9.19}$$

dan iborat bo‘ladi.

Sirt tenglamasi oshkormas holdagi $F(x, y, z) = 0$ tenglama bilan berilgan bo‘lsin. $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqtaning atrofida oshkormas funksiya mavjudligi haqidagi teoremaga ko‘ra funksiya $z = f(x, y)$ kabi ifodalanadi. (9.16) formulalardan

$$f'_x(x_0,y_0) = -\frac{F'_x(x_0,y_0,z_0)}{F'_z(x_0,y_0,z_0)}, \qquad f'_y(x_0,y_0) = -\frac{F'_y(x_0,y_0,z_0)}{F'_z(x_0,y_0,z_0)}$$

ni yozishimiz mumkin. Bularni (19) formulaga qo‘yib shakl almashtirsak

$$F'_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0) + F'_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0) + F'_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0) = 0 \quad (9.20)$$

hosil bo‘ladi.

Sirtning biror $M_0(x_0,y_0,z_0)$ nuqtasidagi normali deb, shu nuqta orqali o‘tuvchi hamda sirtning shu nuqtasiga o‘tkazilgan urinma tekisligiga perpendikulyar bo‘lgan to‘g‘ri chiziqqa aytiladi.

$M_0(x_0,y_0,z_0)$ nuqtada sirtga o‘tkazilgan urinma tekislikning normali oshkor tenglama bilan berilgan bo‘lsa

$$\vec{n} = \left(f'_x(x_0,y_0), f'_y(x_0,y_0), -1\right)$$

oshkormas tenglama bilan berilgan bo‘lsa

$$\vec{m} = \left(F'_x(x_0,y_0,z_0),\ F'_y(x_0,y_0,z_0), F'_z(x_0,y_0,z_0)\right)$$

dan iborat bo‘ladi.

Bu normal o‘z navbatida normal to‘g‘ri chiziqning yo‘naltiruvchi vektori bo‘ladi. SHuning uchun analitik geometriya kursidan ma’lum bo‘lgan fazodagi to‘g‘ri chiziqning tenglamalari formulalariga ko‘ra, sirtning oshkor tenglamasi uchun normal to‘g‘ri chiziq tenglamasi

$$\frac{x-x_0}{f'_x(x_0,y_0)} = \frac{y-y_0}{f'_y(x_0,y_0)} = \frac{z-z_0}{-1} \quad (9.21)$$

oshkormas tenglamasi uchun

$$\frac{x-x_0}{F'_x(x_0,y_0,z_0)} = \frac{y-y_0}{F'_y(x_0,y_0,z_0)} = \frac{z-z_0}{F'_z(x_0,y_0,z_0)} \quad (9.22)$$

dan iborat bo‘ladi.

9.16-Misol. $x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0$ sirtga $M_0(1,2,-1)$ nuqtadagi o‘tkazilgan urinma tekislik va normal tenglamalarini toping.

► $F(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6$ deb olib

$$F'_x(x_0,y_0,z_0) = (3x^2 + yz)\,|_{M_0} = 1,$$

$$F'_y(x_0,y_0,z_0) = (3y^2 + xz)\,|_{M_0} = 11,$$

$$F'_z(x_0,y_0,z_0) = (3z^2 + yx)\,|_{M_0} = 5$$

larni topamiz.

Bularni (9.20) va (9.22) tenglamalarga qo‘yib, mos ravishda urinma tekislik tenglamasi

$$(x-1)+11(y-2)+5(z-1)=0$$

va normal tenglamalarini topamiz:

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{11}=\frac{z+1}{5} \quad ◀$$

9.17-Misol. $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+z^2=1$ ellipsoidning $x+y+z=0$ tekislikka parallel urinma tekisligi tenglamasini tuzing.

▶ $F_x^{'}(x_0,y_0,z_0)=x_0, \qquad F_y^{'}(x_0,y_0,z_0)=y_0, \qquad F_z^{'}(x_0,y_0,z_0)=2z_0$

bo‘lganligi uchun, urinma tekislik tenglamasining ko‘rinishi quyidagicha bo‘ladi

$$x_0(x-x_0)+y_0(y-y_0)+2z_0(z-z_0)=0.$$

Tekisliklar parallelligining shartiga ko‘ra

$$\frac{x_0}{1}=\frac{y_0}{1}=\frac{2z_0}{1}.$$

(x_0,y_0,z_0) nuqta sirtda yotganligi uchun

$$\frac{{x_0}^2}{2}+\frac{{y_0}^2}{2}+{z_0}^2=1.$$

Bu shartlardan (x_0,y_0,z_0) nuqta koordinatalarini topsak $M_1\left(\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ va $M_2\left(-\frac{2}{\sqrt{5}},-\frac{2}{\sqrt{5}},-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$. Urinma tekislik tenglamasi esa

$$\frac{2}{\sqrt{5}}\left(x-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)+\frac{2}{\sqrt{5}}\left(y-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)+\frac{2}{\sqrt{5}}\left(z-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)=0$$

yoki

$$x+y+z=\sqrt{5} \quad \text{va} \quad x+y+z=-\sqrt{5}$$

dan iborat. ◀

9.11. Ikki o‘zgaruvchili funksiya uchun Teylor formulasi.

Bizga ikki o‘zgaruvchili $z=f(x,y)$ funksiya berilgan bo‘lib, bu funksiyaning $(n+1)$ tartibgacha bo‘lgan barcha xususiy hosilalari mavjud bo‘lsin. Teylor formulasi $f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$ ni Δx va Δy ning darajalari bo‘yicha yoyishni talab etadi. YAngi erkli o‘zgaruvchi t ni kiritamiz va

$$x = x_0 + \Delta x t, \quad y = y_0 + \Delta y t \tag{9.23}$$

deb olamiz. Bunday holda bir o‘zgaruvchili

$$\varphi(t) = f(x, y) = f(x_0 + \Delta x t, y_0 + \Delta y t)$$

funksiyani hosil qilamiz. Bu funksiya uchun

$$\varphi(0) = f(x_0, y_0) \ \text{ va } \ \varphi(1) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \tag{9.24}$$

$\varphi(t)$ funksiya uchun Makloren formulasini Lagranj qoldiq hadi bilan yozamiz

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \frac{\varphi'(0)}{1!} + \frac{\varphi''(0)}{2!} + \cdots + \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!} + \frac{\varphi^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!} \tag{9.25}$$

Endi $\varphi^{(k)}(0)$ va $\varphi^{(n+1)}(\theta)$ hosilalarni $f(x, y)$ funksiyalar orqali ifodalaymiz. (9.23) ga ko‘ra x va y lar erkli o‘zgaruvchi t ga nisbatan chiziqli bo‘lib

$$dx = \Delta x dt, \quad dy = \Delta y dt$$

Ikki o‘zgaruvchili funksiyaning yuqori tartibli differensiali formulasiga ko‘ra

$$d^k\varphi(t) = d^k f(x, y) = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^k f(x, y) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^k f(x, y)dt^k$$

Bu yerdan

$$\varphi^{(k)}(t) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^k f(x, y)$$

$t = 0$ da $\quad x = x_0, \quad y = y_0$ va $\ t = \theta$ da $x = x_0 + \Delta x\theta, \quad y = y_0 + \Delta y\theta$, shuning uchun

$$\varphi^{(k)}(0) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^k f(x_0, y_0)$$

$$\varphi^{(n+1)}(\theta) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^{n+1} f(x_0 + \Delta x\theta, y_0 + \Delta y\theta)$$

Topilganlarni (9.25) ga qo‘yib (9.24) ni hisobga olsak

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + \left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right) f(x_0, y_0) +$$

$$+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^2 f(x_0, y_0) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^n f(x_0, y_0) +$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^{n+1} f(x_0 + \Delta x\theta, y_0 + \Delta y\theta)$$

Oxirgi ifodada qavslarni ochib yuborsak

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\Delta y +$$

$$\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}\Delta x^2 + 2\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x \partial y}\Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}\Delta y^2\right) + \cdots + \qquad (9.26)$$

$$+\frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^n f(x_0,y_0) + \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^{n+1} f(x_0+\Delta x\theta, y_0 +$$

$$+\Delta y\theta.$$

Bu tenglikka ikki o‘zgaruvchili funksiyaning Teylor formulasi deb ataladi.

9.12. Ikki o‘zgaruvchili funksiyaning ekstremumi va uning zaruriy shartlari

Biror D sohada $z = f(x,y)$ funksiya berilgan bo‘lib, bu funksiya sohaning barcha nuqtalarida aniqlangan va uzluksiz bo‘lsin.

9.11-Ta’rif. Agar D sohaga tegishli bo‘lgan biror $M_0(x_0,y_0)$ nuqtaning etarlicha kichik atrofidagi barcha nuqtalar uchun $f(x_0,y_0) < f(x,y)$ kabi tengsizlik bajarilsa, $M_0(x_0,y_0)$ nuqtani $f(x,y)$ funksiyaning minimum nuqtasi deb, aksincha, $f(x_0,y_0) > f(x,y)$ shart bajarilsa, uni maksimum nuqtasi deb yuritiladi.

Funksiyaning minimum va maksimum nuqtalari uning ekstremum nuqtalari, bu nuqtalardagi qiymatlari esa ekstremumlari deyiladi.

9.18-Misol. $z = 4 - x^2 + 6x - y^2$ funksiyaning ekstremum nuqtasini va bu nuqtadagi qiymatini toping.

► Funksiyaning ko‘rinishini shakl almashtiramiz:

$$z = 4 - x^2 + 6x - y^2 = 13 - x^2 + 6x - 9 - y^2 = 13 - (x-3)^2 - y^2.$$

So‘ngi ifoda eng katta qiymatiga erishishi uchun ayriluvchilar eng kichik qiymatiga erishishi, ular ifodaning kvadratidan iborat bo‘lganligi uchun nolga teng bo‘lishi zarur. Demak, funksiya $x = 3$, $y = 0$ da maksimumga erishadi, ya’ni funksiyaning maksimum nuqtasi $(3, 0)$ va $z(3,0) = 13$. ◄

Avvalo funksiyaning ekstremumga erishishi uchun zarur bo‘lgan shartlarni aniqlaymiz.

Agar $z = f(x,y)$ funksiyaning aniqlanish sohasiga tegishli bo‘lgan $M_0(x_0,y_0)$ nuqtadagi birinchi tartibli xususiy hosilalari nolga teng bo‘lsa:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

yoki ulardan hech bo‘lmaganda bittasi mavjud bo‘lmasa, $M_0(x_0, y_0)$ nuqta shu funksiyaning kritik nuqtasi deyiladi.

9.5-Teorema. (ekstremumning zaruriy sharti) Agar $z = f(x, y)$ funksiya $M_0(x_0, y_0)$ nuqtada ekstremumga erishsa, uning 1-tartibli xususiy hosilalari o‘sha nuqtada nolga teng bo‘ladi yoki ulardan hech bo‘lmaganda bittasi mavjud bo‘lmaydi.

◀Faraz qilaylik $z = f(x, y)$ funksiya $M_0(x_0, y_0)$ nuqtada ekstremumga erishadi. Agar $y = y_0$ deb olsak, berilgan funksiya x ga nisbatan bir o‘zgaruvchili funksiya sifatida ekstremumga erishadi. Bir o‘zgaruvchili funksiya ekstremumi zaruriy shartiga ko‘ra $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} = 0$ yoki mavjud emas. Xuddi shu kabi $x = x_0$ bo‘lganida $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} = 0$ yoki mavjud emas.▶

Agar funksiya biror nuqtada ekstremumga erishsa, yuqoridagi teoremaga asosan u kritik nuqta bo‘ladi. Ma’lumki, sirtga o‘tkazilgan urinma tekislik tenglamasi

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

tenglama bilan aniqlanadi. Bu tenglikdan birinchi tartibli xususiy hosilalar mavjud bo‘lganida ekstremum nuqtasida o‘tkazilgan urinma tekislik tenglamasi

$$z - z_0 = 0$$

ekanligi kelib chiqadi.

Demak, *ekstremum nuqtasida sirtga urinma tekislik o‘tkazish mumkin bo‘lsa, u Oxy koordinata tekisligiga parallel bo‘lar ekan*.

9.13. Ikki o‘zgaruvchili funksiyaning ekstremumining yetarli shartlari

Bir o‘zgaruvchili funksiyalardagi kabi ekstremumning zaruriy sharti ekstremum mavjud bo‘lishi uchun etarli emas. YA’ni, berilgan nuqtada xususiy hosilalar nolga teng ekaniligidan bu nuqtada ekstremumga erishilishi kelib chiqmaydi. Masalan, $z = xy$ funksiyani olaylik. Uning $z'_x = y$, $z'_y = x$ xususiy hosilalari koordinata boshida nolga teng, lekin bu nuqtada funksiya ekstremumga erishmaydi. CHunki,

$z(0,0) = 0$ va bu nuqtaning ixtiyoriy atrofida funksiya turli ishorali qiymatlarni qabul qiladi: birinchi va uchinchi choraklarda funksiya musbat, ikkinchi va to‘rtinchi choraklarda esa funksiya manfiy.

Ikki o‘zgaruvchili funksiya uchun ekstremumning etarli shartlari bir o‘zgaruvchili funksiyaga nisbatan biroz murakkabroq bo‘lib, ularni birinchi tartibli hosilalar yordamida keltirib bo‘lmaydi.

Etarli shartlarni keltirishdan oldin quyidagi belgilashlarni kiritamiz: $\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2} =$

$$A, \quad \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x \partial y} = B, \; \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2} = C, \quad D = AC - B^2$$

9.6-Teorema. $f(x,y)$ funksiya $M_0(x_0,y_0)$ nuqtaning biror atrofida ikkinchi tartibgacha uzluksiz xususiy hosilalarga ega bo‘lib, $M_0(x_0,y_0)$ funksiyaning kritik nuqtasi bo‘lsin, ya’ni

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} = 0$$

u holda $M_0(x_0,y_0)$ nuqtada

a) $D < 0$ bo‘lsa, ekstremum mavjud emas;

b) $D > 0$ bo‘lsa, ekstremum mavjud bo‘lib, bunda agar $A < 0$ bo‘lsa, funksiya qaralayotgan nuqtada maksimumga, agar $A > 0$ bo‘lsa, minimumga ega bo‘ladi;

v) Agar $D = 0$ bo‘lsa, bu nuqtada ekstremumning mavjud yoki mavjud emasligi noaniq qoladi. Bu holda funksiyaning ekstremumlarini aniqlash uchun uni qo‘shimcha tekshirish lozim bo‘ladi.

◄ Qaralayotgan funksiya uchun (26) formulaga ko‘ra $n = 1$ da Teylor formulasini yozamiz

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\Delta y +$$

$$+ \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}\Delta x^2 + 2\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}\Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}\Delta y^2\right)\Bigg|_{\substack{x = x_0 + \Delta x\theta \\ y = y_0 + \Delta y\theta}}$$

Teorema shartlarini e’tiborga olgan holda oxirgi tenglikni shakl almashtiramiz

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0,y_0) =$$

$$= \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}\Delta x^2 + 2\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}\Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}\Delta y^2\right)\Bigg|_{\substack{x = x_0 + \Delta x\theta \\ y = y_0 + \Delta y\theta}}$$

$\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2},\ \Delta x = \rho cos\alpha,\ \Delta y = \rho$ kabi belgilashlar kiritamiz, u holda

$$\Delta f = \frac{\rho^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}cos^2\alpha + 2\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}cos\alpha sin\alpha + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}sin^2\alpha\right)\Bigg|_{\substack{x=x_0+\Delta x\theta \\ y=y_0+\Delta y\theta}} \quad (9.27)$$

Ikkinchi tartibli hosilalarning uzluksizligi va $\Delta x, \Delta y, \rho$ larning cheksiz kichik miqdor ekanligini nazarda tutsak, tenglikning o‘ng tomonidagi ikkinchi tartibli hosilalar yuqorida kiritilgan A, B, C sonlaridan cheksiz kichikka farq qiladi. SHuning uchun (9.27) formuladagi ikkinchi tartibli hosilalarni mos ravishda $A + \delta_1,\ B + \delta_2,$ $C + \delta_3$ sonlari bilan almashtirish mumkin bo‘lib, bu erda $\delta_1, \delta_2,\ \delta_3$ cheksiz kichik miqdorlar. Bularni hisobga olgan holda (9.27) formulani quyidagicha yozib olamiz

$$\Delta f = \frac{\rho^2}{2!}(Acos^2\alpha + 2Bcos\alpha sin\alpha + Csin^2\alpha + \delta) \quad (9.28)$$

bu erda $\delta = \delta_1 cos^2\alpha + 2\delta_2 cos\alpha sin\alpha + \ \delta_3 sin^2\alpha.$

(9.28) formulani shakl almashtiramiz

$$\Delta f = \frac{\rho^2}{2A}[(Acos\alpha + Bsin\alpha)^2 + (AC - B^2)sin^2\alpha + \delta].$$

Funksiya maksimumi va minimumi ta’rifiga ko‘ra, ρ ning etarlicha kichik qiymatlarida Δf ning ishorasi $(-)$ bo‘lsa fuknsiya (x_0, y_0) nuqtada maksimumga, (+) bo‘lsa minimumga erishadi.

Quyidagi hollarni ajratamiz:

1. $AC - B^2 > 0$ bo‘lsin. Bunday holda $AC > 0,\ A \neq 0$ va

$$(Acos\alpha + Bsin\alpha)^2 + (AC - B^2)sin^2\alpha > 0.$$

δ miqdor ρ ga nisbatan cheksiz kichik bo‘lganligi uchun

$$(Acos\alpha + Bsin\alpha)^2 + (AC - B^2)sin^2\alpha + \delta > 0.$$

Demak Δf ning ishorasi faqat A ga bog‘liq bo‘lib qoldi. SHunday qilib $A > 0$ bo‘lsa $\Delta f > 0$ va funksiya (x_0, y_0) nuqtada minimumga erishadi, $A < 0$ da esa $\Delta f < 0$ va funksiya maksimumga erishadi.

2. $AC - B^2 < 0$ bo‘lsin. Agar $A \neq 0$ bo‘lsa $\alpha = 0$ qiymatda

$$(Acos\alpha + Bsin\alpha)^2 + (AC - B^2)sin^2\alpha + \delta = A^2 + \delta > 0$$

$Acos\alpha + Bsin\alpha = 0$ qiymatda

$$(Acos\alpha + Bsin\alpha)^2 + (AC - B^2)sin^2\alpha + \delta = (AC - B^2)sin^2\alpha + \delta < 0.$$

Demak (x_0, y_0) nuqtaning atrofida Δf ham musbat ham manfiy ishoralarni qabul qilar ekan. Bunday holda ekstremum mavjud emas.

Agar $A = 0$ bo‘lsa,

$$\Delta f = \frac{\rho^2}{2!}(2Bcos\alpha sin\alpha + Csin^2\alpha + \delta) = \frac{\rho^2}{2!}(sin\alpha(2Bcos\alpha + Csin\alpha) + \delta).$$

Bu erda α ni shunday tanlashimiz mumkinki $2Bcos\alpha + Csin\alpha > 0$. α ning ana shu qiymati va $(-\alpha)$ qiymatlari uchun Δf ning ishorasi turlicha bo‘ladi va ekstremum mavjud emas.

3. $AC - B^2 = 0$ yuqoriroq tartibli hosilalardan foydalanish talab etiladi. Biz bu holga to‘xtalmaymiz.►

Demak berilgan funksiyaning ekstremum qiymatlarini topish uchun quyidagilarni bajarish lozim bo‘ladi:

1. Berilgan funksiyaning aniqlanish sohasi topiladi.
2. (x_0, y_0) kritik nuqtalari topiladi.
3. Barcha ikkinchi tartibli xususiy hosilalari hisoblanib, (x_0, y_0) nuqtada $D = AC - B^2$ ifoda tuziladi.

Bunda:

a) Agar $D < 0$ bo‘lsa, bu nuqtada ekstremum mavjud emas.

b) Agar $D > 0$ bo‘lsa, ekstremum mavjud bo‘lib, bunda agar $A < 0$ bo‘lsa, funksiya qaralayotgan nuqtada maksimumga, agar $A > 0$ bo‘lsa, minimumga ega bo‘ladi.

v) Agar $A = 0$ bo‘lsa, bu nuqtada ekstremumning mavjud yoki mavjud emasligi noaniq qoladi. Bu holda funksiyaning ekstremumlarini aniqlash uchun uni qo‘shimcha tekshirish lozim bo‘ladi.

9.19-Misol. $z = x^3 + y^3 - 3xy$ funksiyaning ekstremum qiymatlarini toping.

► 1) Bu funksiya butun Oxy tekisligining barcha nuqtalarida aniqlangan.

2) Funksiyaning kritik nuqtalarini topamiz:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y = 0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 3x = 0.$$

Tenglamalar sistemasini echamiz:

$\begin{cases} x^2 - y = 0 \\ y^2 - x = 0 \end{cases}$ bundan $x_1 = 0, x_2 = 1, y_1 = 0, y_1 = 1.$

SHunday qilib, $M_1(0,0)$ va $M_2(1,1)$ kritik nuqtalarga ega bo‘lamiz.

Quyidagilarni topamiz:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -3, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y$$

$M_1(0,0)$ nuqtada $D = AC - B^2 = 0 \cdot 0 - 9 = -9 < 0$. Demak bu nuqtada ekstremum yo‘q.

$M_1(1,1)$ nuqtada $D = AC - B^2 = 6 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 1 - 9 = 27 > 0$ va $A = 6 > 0$. Bundan kelib chiqadiki $M_2(1,1)$ nuqtada funksiya minimumga erishadi: $z_{min} = -1$ ◄

9.14. Ikki argumentli funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatlari

Ma’lumki, agar $z = f(x, y)$ funksiya yopiq D sohada aniqlangan va uzluksiz bo‘lsa, u shu sohada o‘zining eng katta va eng kichik qiymatlariga erishadi. Agar bu nuqta sohaning ichida bo‘lsa, ravshanki u ekstremum nuqta bo‘ladi. Lekin shunday bo‘lishi mumkinki, funksiya o‘zining eng katta va eng kichik qiymatlariga sohaning chegarasida erishadi. SHuning uchun eng katta va eng kichik qiymatlarni hisoblash uchun quyidagicha ish yuritamiz:

1) Funksiyaning o‘sha sohadagi funksiyaning ekstremum qiymatlarini hisoblaymiz.

2) Funksiyaning chegaraviy nuqtalardagi qiymatlarini tekshiramiz. (bunda bir o‘zgaruvchili funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatlarini qanday hisoblasak, xuddi shunday yo‘l tutamiz)

3) Olingan natijalarni taqqoslab, funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatlarini topamiz.

9.20-Misol. $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$ funksiyaning $x = 0$, $y = 0$, $x + y = -3$ chiziqlar bilan chegaralangan sohadagi eng katta va eng kichik qiymatlarini toping.

► Quyidagi tenglamalar sistemasidan M_1 statsionar nuqtani topamiz:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y + 1 = 0,\\ \frac{\partial z}{\partial y} = 2y - x + 1 = 0.\end{aligned}\right\}$$

Bundan $x = -1,\ y = -1.\ z(-1,-1) = 1$ bo‘lgan $M_1(-1,-1)$ nuqtani hosil qilamiz.

Berilgan funksiyani chegaralarida tekshiramiz.

$x = 0$ bo‘lgan to‘g‘ri chiziqda $z_1 = y^2 + y$ ga ega bo‘lamiz va masala bir o‘zgaruvchili funksiyaning OB oraliqdagi eng katta va eng kichik qiymatlarini topishga keltiriladi.

Quyidagilarni topamiz:

$$z_y' = 2y + 1 = 0, \qquad y = -\frac{1}{2}, \qquad z_{yy}'' = 2$$

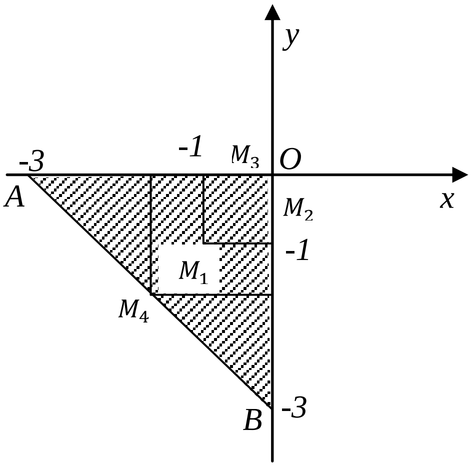
$z_2 = z\left(0; -\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$ bo‘ladigan $M_2(0, -\frac{1}{2})$ shartli lokal minimum nuqtani hosil qilamiz. $[-3{,}0]$ kesmaning chekka nuqtalarida $z_3 = z(0;-3) = 6,\ z_4 = z(0;0) = 0$ bo‘ladi.

Xuddi shu kabi $y = 0$ bo‘ladigan OA kesmada quyidagilarga ega bo‘lamiz: $z = x^2 + x,\ z_x' = 2x + 1, x = -\frac{1}{2},\ z_{xx}'' = 2$, yani $M_3(-\frac{1}{2}, 0)$– lokal minimum nuqta bo‘lib, bu nuqtada $z_5(-\frac{1}{2}, 0) = -\frac{1}{4}$ bo‘ladi. $(-3;0)$ nuqtada $z_6 = z(-3;0) = 6$ bo‘ladi. $x + y = -3$ to‘g‘ri chiziqdagi kesmada $y = -x - 3$ ifodani z funksiyaga qo‘yib, quyidagilarni hosil qilamiz.

$$z = 3x^2 + 9x + 6,$$

$$z_x' = 6x + 9 = 0, \quad x = -\frac{3}{2}.$$

Bundan, $z_7 = z\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{4}$ bo‘ladigan $M_4\left(-\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}\right)$ nuqtani topamiz. *AB* kesmaning chetki nuqtalaridagi funksiyaning qiymatlari topilgan. z funksiyaning barcha topilgan qiymatlarini solishtirib, quyidagi xulosaga kelamiz, *A(-3,0) va B(0,-3)* nuqtalarda o‘zining eng katta qiymatiga erishadi $z_{max} = 6$, *M₁(-1,-1)* statsionar nuqtada esa $z_{min} = -1$ bo‘ladi (9.4- rasm).◄



9.4-rasm

Nazariy savollar.

1. Soha tushunchasi. Ikki o'zgaruchili funksiyaning ta'rifi.
2. Ikki o'zgaruvchili funksyaning uzluksizligi va limiti.
3. Ikki o'zgaruvchili funksiyaning xususiy hosilalari va differensiali.
4. Ikki o'zgaruvchili murakkab funksiyaning hosilalari.
5. Yuqori tartibli xususiy hosilalar va differensiallar.
6. Ikki o'zgaruvchili funksiyaning ekstremumi.
7. Ikki o'zgaruvchili funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatlari.

Mashqlar

1. Quyidagi funksiyalarning aniqlanish sohasini toping.

   a) $z = \sqrt{y^2 - 2x + 4)}$ b) $z = \frac{1}{\sqrt{x+y}} + \sqrt{x - y}$

   s) $z = ln\, x + ln\, cos\, y$ d) $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 9}$

2. Ko'rsatilgan funksiyalarning xususiy hosilalarini toping.

   a) $z = (x^2 + y^2 - xy^2)^3$ b) $z = \arcsin\frac{y}{x}$

   c) $z = x\sqrt{y} + \frac{y}{\sqrt{x}}$ d) $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$

   e) $z = \ln(x \times y + lnx \times y)$ f) $u = ln\sqrt{(x^2 + y^2)(x^2 + z^2)}$

3. $z = x + y + \sqrt{x^2 + y^2}$ funksiyaning xususiy hosilalarining *$M_0(3,4)$* nuqtadagi qiymatlarini hisoblang.
4. $z = ln(x^2 + y^2)$ funksiyaning to‘la differensialini toping.
5. Funksiyalarning mos orttirmalarini ularning to‘la differensiallari bilan almashtirib, berilgan ifodani taqribiy hisoblang:

   a) $(1{,}02)^3 \cdot (0{,}97)^3$; *b)* $\sqrt{(4{,}05)^2 + (2{,}93)^2}$
6. Agar $u = xsiny$, $v = ycosx$ bo‘lsa, $z = \sqrt{u^2 + v^2}$ funksiyaning xususiy hosilalarini toping.
7. $x^2 + y^2 + z^2 - 6x = 0$ bo‘lsa $\frac{\partial z}{\partial x}$ va $\frac{\partial z}{\partial y}$ ni toping.
8. $z = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2$ sirtga $= M_0(3,1,4)$ nuqtada o‘tkazilgan urinma tekislik va normal tenglamasini toping.
9. $z = e^x(xcosy - ysiny)$ funksiyaning $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = 0$ tenglamani qanoatlantirishini isbotlang.
10. $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$ funksiyaning ekstremumlarini toping.
11. *z*=$x^2y(4 - x - y)$ funksiyaning, $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 6$ to‘g‘ri chiziqlar bilan chegaralangan sohadagi eng katta va eng kichik qiymatlarini toping.

ADABIYOTLAR

1. Алимов Ш.О. Ашуров Р.Р. Математик тахлил 1,2-қисм. Ўқув қўлланма. – Тошкент: Турон-Иқбол. 2017й.
2. Ахмедов А.Б., Шодмонов Г., Эсонов Э.Э., Абдукаримов А.А., Шамсиев Д.Н. Олий математикадан индивидуал топшириқлар. 1-қисм. Ўқув қўлланма. – Тошкент: Ўзбекистон энциклопедияси, 2014й.
3. Ахмедов А.Б., Шодмонов Г., Эсонов Э.Э., Абдукаримов А.А., Шамсиев Д.Н. Олий математикадан индивидуал топшириқлар. 2 қисм. Ўқув қўлланма. – Тошкент: Ўзбекистон энциклопедияси, 2017й.
4. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры (10-е издание), -М.:Физматлит, 2005г. -304 стр.
5. Бугров, Я.С. Высшая математика. задачник.: Учебное пособие для академического бакалавриата / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. - Люберцы: Юрайт, 2016г. - 192 с.
6. Бугров, Я.С. Высшая математика в 3 т. Т.2. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии: Учебник для академического бакалавриата / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. - Люберцы: -Юрайт, 2016г. - 281 с.
7. Бугров, Я.С. Высшая математика в 3 т. Т.1 в 2 книгах. Дифференциальное и интегральное исчисление: Учебник для академического бакалавриата / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. - Люберцы: -Юрайт, 2016г. - 501 с.
8. Бугров, Я.С. Высшая математика в 3 т. Т.3 в 2 книгах. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного: Учебник / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. - Люберцы: -Юрайт, 2016г. - 507 с.
9. Геворкян, П.С. Высшая математика. Линейная алгебра и аналитическая геометрия / П.С. Геворкян. - М.: Физматлит, 2014г. - 208 с.
10. Геворкян, П.С. Высшая математика. Основы математического анализа: Учебное пособиеЧ.1 / П.С. Геворкян. - М.: Физматлит, 2013г. - 240 с.
11. Гусак А.А. Высшая математика 1 том. -Мн.:TetraSistems, 2000г.-504 с.
12. Зельдович, Я.Б. Высшая математика для начинающих и ее приложения к физике / Я.Б. Зельдович. - М.: Физматлит, 2016г. - 520 с.

13. Лунгу, К.Н. Высшая математика. Руководство к решению задач. Ч. 2. / К.Н. Лунгу, Е.В. Макаров. - М.: Физматлит, 2013г. - 384 с.
14. Лунгу, К.Н. Высшая математика. Руководство к решению задач. Ч. 1 / К.Н. Лунгу, Е.В. Макаров. - М.: Физматлит, 2010г. - 216 с.
15. Минорский П. Сборник задач по высшей математике. –М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010г.
16. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для ВТУЗов. 2 частях -М.: Наука, 2001г.
17. Письменный Д. «Конспект лекции по высшей математике», 1,2,3 часть. -М.: Айрис Пресс, 2008г.
18. Шипачев, В.С. Высшая математика. полный курс в 2 т. том 1: Учебник для академического бакалавриата / В.С. Шипачев. - Люберцы: Юрайт, 2016г. - 288 с.
19. Шипачев, В.С. Высшая математика. полный курс в 2 т. том 2: Учебник для академического бакалавриата / В.С. Шипачев. - Люберцы: Юрайт, 2016г. - 341 с.
20. Xurramov Sh.R. Oliy matematika. Misol va masalalar nazorat topshiriqlari. 1-qism. -Toshkent. 2015г.
21. John Bird. Basic Engineering Mathematics (5a Ed.), 2010, X+563 pp. ISBN-13: 978-1-85-617697-2.
22. S. Ahmad, A. Ambrosetti A Textbook on Ordinary Differential Equations, 2014, XIV+324pp, ISBN 978-3-319-02128-7.
23. Peter V. O'Neil, Advanced Engineering Mathematics (7th edition), 2011, X+912 pp, ISBN-10: 1111427410.
24. K. A. Stroud, Engineering Mathematics (7th Edition), 2013, XI+1020 pp. ISBN: 978-0831134709.
25. Glyn James, Modern Engineering Mathematics (5th Edition) 2015, XII+1152 pp. ISBN: 1292080736.
26. Claudio Canuto, Anita Tabacco. Mathematical Analysis I, II. Springer-Verlag Italia, Milan 2015.

MUNDARIJA