А.А.Абдушукуров

СТАТИСТИКА НЕПОЛНЫХ НАБЛЮДЕНИЙ

Асимптотическая теория оценивания для неклассических моделей

$$\Omega$$

$P(A)$ **&** $S(x)$

А.А.Абдушукуров

СТАТИСТИКА НЕПОЛНЫХ НАБЛЮДЕНИЙ

Асимптотическая теория оценивания для неклассических моделей

ТАШКЕНТ

УДК 519.24

Рецензент
доктор физико-математических наук, академик Т.А.Азларов

Абдушукуров А.А.

Статистика неполных наблюдений: асимптотическая теория оценивания для неклассических моделей.-Ташкент, 2008.- 267с.

Книга содержит в основном результаты автора по построению и асимптотическому анализу непараметрических, полупараметрических оценок функционалов выживания в различных обобщенных моделях неполных наблюдений. Значительное внимание уделено задачам статистического оценивания функционалов в разнообразных смесях моделей зависимых и неоднородно-цензурированных наблюдений. Исследование свойств оценок при случайном объёме выборки и с использованием байесовского подхода также является целью данной книги. При исследовании свойств оценок наряду с асимптотическими методами теории вероятностей и математической статистики автором умело используются такие мощные методы как методы мартингалов, слабой и сильной аппроксимации нормированными суммами и гауссовскими процессами, а также и U-статистик.

Книга может быть рекомендована в качестве литературы при чтении специальных курсов для студентов и магистров университетов, а также специалистам занимающимся научными исследованиями в области статистики неполных наблюдений.

Посвящаю памяти
своих родителей

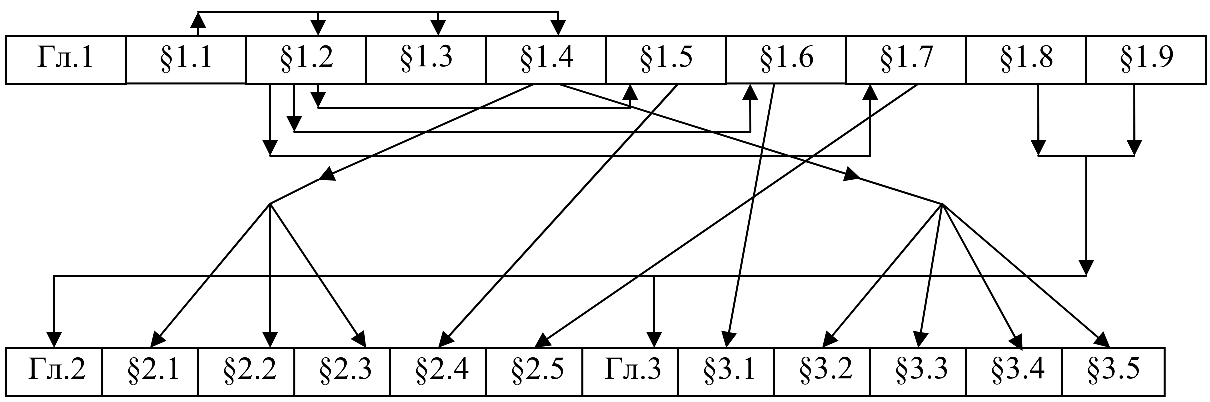
От автора

Книга представляет собой изложение асимптотической теории оценивания для различных обобщённых моделей неполных данных. Рассматриваемые в книге модели неполных наблюдений представляют собой смеси модели конкурирующих рисков с моделями случайного цензурирования и усечения. Книга преследует две цели: рассмотрение задачи непараметрического статистического оценивания по неполным наблюдениям, подчёркивая при этом особенности решения этих задач по сравнению с соответствующими задачами классической математической статистики, а также построение новых оценок для функционалов выживания с доказательством асимптотических свойств оценок используя целый класс современных методов.

Появление настоящей книги неслучайное. Она содержит в основном результаты автора за последние два десятилетия. Автор использовал также и тексты лекций, читаемых для магистров кафедры «Теория вероятностей и математическая статистика », а также студентов направления «Статистика» бакалавриата Национального Университета Узбекистана.

Книга состоит из введения, где также изложены и основные результаты, трёх глав, разбитых на 19 параграфов, выводов по главам, общего заключения, списка литературы и приложений.

Структура основной части книги:



Автор выражает глубокую признательность академику Т.А.Азларову за полезные советы, а также своим ученикам К.С.Сагидуллаеву, А.А.Эшкобилову, Б.Р.Хонимкулову и Н.С.Нурмухамедовой за их неоценимую помощь при подготовке рукописи к печати.

Абдурахим Абдушукуров

Список основных обозначений и сокращений

$I(A)$ - индикатор события A;
$\Im = \{1,2,3,...,k\}$;
$\overline{\Im} = \Im \cup \{0\}$;
$\Im(i) = \Im \setminus \{i\}$;
$a \wedge b = \min(a,b)$;
$a \vee b = \max(a,b)$
$\bigwedge\limits_{i \in \Im} a_i = \min(a_i,\ i \in \Im)$;
$\bigvee\limits_{i \in \Im} a_i = \max(a_i,\ i \in \Im)$;
$\|a\|^{(k)} = \bigvee\limits_{i \in \Im} |a_i|$ - максимум-норма вектора $a = (a_1,...,a_k) \in R^k$;
$P(A)$ - вероятность события A;
$M\xi$ - математическое ожидание случайного элемента ξ;
$D\xi$ - дисперсия случайного элемента ξ;
$\xrightarrow{P}$ - сходимость по вероятности;
$\stackrel{D}{\Rightarrow}$ - сходимость по распределению (слабая сходимость);
$\stackrel{D}{=}$ - равенство по распределению;
■ – знак, показывающий окончание доказательств, утверждений;
T - знак транспонирования: $(...)^T$;
$[a]$ - целая часть числа a;
$\log$ - натуральный логарифм;
$\exp$ - экспонента;
«cádlág функция» - непрерывная справа, имеющая предел слева функция;
$N(0;\Sigma)$ – случайный вектор, имеющий нормальное распределение с параметрами (0;Σ);
$D(U)$ - пространство Скорохода cádlág функций, определенных на множестве U;
$D^{(k)}(U)$ - пространство Скорохода k-мерный cádlág функций, определенных на множестве U;
$D(F)$ - множество точек скачка функции F;
$C(F)$ - множество точек непрерывности функции F;
$Sp(F)$ - носитель одномерного распределения F;
$Supp(F)$ - носитель многомерного распределения F;
□ $^2(\mathcal{F})$–класс квадратично-интегрерируемых мартингалов, относительно потока σ-алгебр $\mathcal{F}$;
□ $_{loc}(\mathcal{F})$–класс локальных мартингалов, относительно потока σ-алгебр $\mathcal{F}$;

□ $_{loc}^{2}(\mathcal{F})$–класс локально-квадратично интегрерируемых мартингалов, относительно потока σ-алгебр $\mathcal{F}$;

$R^k = \overbrace{R \times \ldots \times R}^{k}; \quad R = (-\infty;\infty); \quad \overline{R}^k = \overbrace{\overline{R} \times \ldots \times \overline{R}}^{k}; \quad \overline{R} = [-\infty;\infty]$;

$R^{+k} = \overbrace{R^+ \times \ldots \times R^+}^{k}; \quad R^+ = [0;\infty); \quad \overline{R}^{+k} = \overbrace{\overline{R}^+ \times \ldots \times \overline{R}^+}^{k}; \quad \overline{R}^+ = [0;\infty]$;

$f(t-) = \lim\limits_{s \uparrow t} f(s); \quad f(t+) = \lim\limits_{s \downarrow t} f(s)$;

$\Delta f(t) = f(t) - f(t-)$ - скачок в точке t непрерывной справа функции f;

$f^s(t)$ и $f^d(t)$ - непрерывная и дискретная части функции $f(t)$;

$\int\limits_{(-\infty;x]} f(s)dg(s)$ - интеграл Лебега-Стилтьеса для непрерывных справа функций f и g;

Для последовательности случайных величин $\{\xi_n,\ n \geq 1\}$ и последовательных констант $\{a_n,\ n \geq 1\}$ записи;

а) $\xi_n \overset{п.н.}{=} O(a_n)$ или $\xi_n \overset{п.н.}{=} o(a_n)$ соответственно означают, что $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{|\xi_n|}{a_n} \leq C$ для конечной постоянной $C > 0$ или $C = 0$;

б) $\xi_n = O_p(a_n)$ означают, что $\lim\limits_{x\to\infty} \limsup\limits_{n\to\infty} P\big(|\xi_n| > a_n x\big) = 0$;

в) $\xi_n = o_p(a_n)$ означают, что $\frac{|\xi_n|}{a_n} \xrightarrow{P} 0$ при $n \to \infty$;

ВрБр – время безотказной работы;
ВеБр – вероятность безотказной работы;
ЗБЧ – закон больших чисел;
ЗПЛ – закон повторного логарифма;
к.ф.и. – кумулятивная функция интенсивности;
ЛАН – локальная асимптотическая нормальность;
МКР – модель конкурирующих рисков;
МПИ – модель пропорциональных интенсивностей;
н.о.р. – независимые и одинаково распределенные;
ОМП – оценка максимального правдоподобия;
п.н. – почти наверное;
с.в. – случайная величина;
СОП – статистика отношения правдоподобия;
УЗБЧ – усиленный закон больших чисел;
ф.р. – функция распределения;
х.ф. – характеристическая функция;
э.ф.р. – эмпирическая функция распределения;
ЦПТ – центральная предельная теорема.

Оглавление

Введение

На начальной стадии статистических исследований одной из важных задач является представление результатов наблюдений в виде наиболее удобном для обработки и принятии решений. Качества статистических выводов зависят не только от объема выборочных данных, но и от способа их получения. Одним из основных требований к сбору экспериментальных данных является наличие необходимой информации, т.е. множества данных используемого для принятия решений. Однако, сплошь и рядом приходится иметь дело с неполными наблюдениями и по ним делать выводы о неизвестном законе распределения одного или нескольких с.в. Неполные выборки наблюдений встречаются при анализе данных типа времени жизни, при контроле качества, в страховании, в демографии, в почвоведении, в астрономии и т.д. Так например, в испытаниях объектов (технических устройств, индивидумов) на безотказность, неполнота наблюдений над с.в, означающей продолжительность жизни объекта, может быть вызвана как причинами, связанными со структурой самого объекта (выход из строя объекта или части его элементов лишает от возможности наблюдения за неотказавшими его элементами), так и внешними причинами (исчезновение объекта с поля зрения наблюдателя и / или попадание под наблюдение через некоторое время спустя с начала испытаний). В таких экспериментальных ситуациях наблюдению будет доступна неоднородная многомерная выборка, состоящая как из представляющих интерес с.в, так и от мешающих с.в.. Основной характеристикой, подлежащей к оцениванию по таким неполным выборкам является ф.р. продолжительности жизни (ВеБР) одного или нескольких одновременно испытываемых объектов, а также и более сложные функционалы, называемые биометрическими. Структуры предлагаемых статистических оценок для таких функционалов в случае неполных данных, как правило, зависят от степени сложности схемы наблюдений. Другими словами, для одной и той же оцениваемой характеристики могут быть предложены различные «модельные» оценки. Такое разнообразие оценок особенно часто можно встречать в непараметрической статистике неполных наблюдений. Задачи математической статистики, в особенности непараметрического оценивания по цензурированным наблюдениям обладают специфическими особенностями по сравнению с их аналогами в случае полных наблюдений. Типичными представителями моделей неполных наблюдений на прямой являются модели цензурирования, усечения и их сочетания. На прямой различают модели (однократного, многократного и неоднородного) случайного цензурирования (усечения) с одной стороны (слева или справа), с двух сторон, интервалами наблюдения или ненаблюдения. По степени сложности и оригинальности решаемых задач на передний план следует выдвигать моделей случайного цензурирования, хотя в литературе встречаются также и работы по статистическому оцениванию при усечении данных. В этой связи отметим, что систематическое использование терминов «цензурирование» и «усечение» впервые в статистике принадлежит Хальду [203]. В дальнейшем в целях сохранить математический аппарат в более простом состоянии развитие математической теории пошло в основном на базе модели случайного цензурирования справа [57,88,101,105,106,117,118,121-30,134,135,136,146-157,167,168,176-179,185-198,200,202,205,209,210,218,227,228,235,236,243-249,256,261,281-289,305-310,314-316,322]. Известно, что в случае полных наблюдений апробированной непараметрической оценкой для одномерной или многомерной ф.р. является э.ф.р. [59-63,67,76-79,97, 103,111,114, 119, 140-145,158,162,164,180,222,226,250,253,260,264,267, 276,277,280,312,313]. Задача построения хорошей оценки для ф.р. на базе неполных данных, которая обладала бы аналогичными свойствами что и э.ф.р, была предметом исследований многих статистиков. Существующие в статистической литературе оценки для ф.р. по неполным данным имеют сложные структуры чем э.ф.р.. С учетом особенностей рассматриваемых моделей при исследовании таких оценок приходится иметь дело и с нетрадиционными методами, разрабатывая особые подходы. Среди огромной литературы можно выделить ту часть, где глубокие результаты получены для моделей случайного цензурирования справа или усечения слева. Такое обстоятельство можно объяснить тем, что во первых вся теория, имеющаяся в случае цензурирования справа (усечения слева) без особых трудностей переноситься на случай цензурирования слева (усечения справа). Во вторых, рассмотрение большинством исследователей именно цензурирования справа или усечения слева связано с рядом практических задач, где они возникают [64,74,107,132,184,191,203,227,228,236,238, 263,293,311,317,323]. Впервые, при случайном цензурировании справа PL (product-limit)- оценка была предложена Капланом и Мейером [228] в 1958 году и последующем она была исследована многими авторами. Почти вся теория статистики случайного цензурирования справа основана на PL-оценке, хотя она не является единственной для этой модели. В литературе встречаются различные модифицированные варианты PL-оценки [57,167,183,191]. Исследованию и использованию этой оценки посвящены труды многих ученых, о чем свидетельствует литература в конце книги. Из огромного количества ученых следует выделить имена Ю.К. Беляева, Ю.Н. Благовещенского, R.D.Gill, O. Aalen, M. Csörgö, S. Csörgö, N. Breslow, B. Efron, P.K.Andersen, M.D. Burke, L. Horvàth, A.Földes, L.Rejto, D.M.Dabrowska, J.K. Ghorai, V.Susarla, J.Van Rayzin, P.Major, E.G. Phadia,

W. Stute, J.Wellner, N. Veraverbeke, которые своими исследованиями внесли существенный вклад развитию теории цензурирования наблюдений на базе PL-оценки. Позже независимо Альтшулером [106] и Бреслоу [117] была предложена экспоненциальная оценка для ВеБР. В [118] доказано, что обе оценки асимптотически эквивалентны. В работах автора данной книги [15,16,31,(324)] предложены оценки другой-степенной структуры при случайном цензурировании справа. В частности, оценка автора [31,324] в МПИ, называемая в литературе ACL-оценкой (ACL-Abdushukurov – Cheng – Lin), является асимптотически эффективной оценкой по сравнению с остальными и она успешно используется в исследованиях других учёных (см. [147,150,151,155,262,263,297,301-303] и обзоры в них).

Благодаря трудам многих ученых, связанным с исследованиями в моделях цензурирования и усечения сейчас в математической статистике имеется отдельное направление, называемое **статистикой неполных наблюдений.** В своём арсенале (по свидетельству базы данных AMS Math. Sci.) она насчитывает около 5000 работ только по статистике цензурированных данных. Такие исследования продолжают ещё развиваться, пополняясь всё более новыми моделями и методами. Трудности, возникающие при решении задач непараметрической статистики, когда имеет место цензурирование случайных векторов были отмечены в обзорных статьях [64,65] Гилла. Он же (R.Gill) в своём пленарном докладе на 22-встрече европейских статистиков [199] (1998 г., Вильнюс) отметил также сходства и различия решаемых задач при анализе пропущенных пространственных данных (missing data) с цензурированными. По части оценивания неизвестных параметров по неполным наблюдениям глубокие результаты получены авторами [57,58,90,91]. Так в работах Благовещенского [57,58] разработаны более общие методы оценивания параметров, включающие в себя и метод максимального правдоподобия. Такие методы позволяют получить состоятельные, асимптотически нормальные и асимптотически эффективные оценки для неизвестных параметров. Тиховым [90] предложены методы построения и исследования оценок байесовского типа и максимального правдоподобия в случае неполностью известных параметрических семейств распределений и в случае цензурирования выборок по II типу.

Анализ имеющейся литературы по статистике неполных наблюдений показал, что работ по построению и исследованию непараметрических оценок в моделях двустороннего цензурирования не много. Отметим работы [73,131,213,292,293], в которых рассмотрены частные модели и соответствующие оценки типа Каплана-Мейера. Более того, результаты аппроксимации, установленные в [73,213] не являются оптимальными.

Задачи непараметрического оценивания ф.р. многомерной с.в. при случайном цензурировании справа рассмотрены авторами [64,65,128,129,156,157,206,214216,217]. Предлагаемые в этих работах оценки являются в основном по структуре множительными и они неоднозначны. В этих работах обсуждаются лишь вопросы состоятельности оценок. Неоднозначность определения этих оценок объясняется тем, что в многомерном случае нет единого подхода определения интеграл - произведения, на которого основывается PL-оценка (см. [64,65]).

Дальнейшее развитие исследований по статистике неполных наблюдений показало необходимость рассмотрения более общих моделей, построения и исследования в них непараметрических оценок функционалов от распределений. Значительный интерес представляют при этом разнообразные смеси моделей зависимых и неоднородно-цензурированных наблюдений. Не были проведены исследования непараметрических оценок при случайном объёме выборки. Исследования в моделях случайного цензурирования с двух сторон, а также многомерного цензурирования не велись в достаточной степени, имеющиеся оценки являются частными, установленные для них результаты не являются окончательными. Настоящая монография в целом посвящена решению этих задач. Рассматриваемые нами модели неполных наблюдений представляют собой обобщение моделей цензурирования с двух сторон и МКР. Отдельно исследованы модели информативного цензурирования. В основном рассматриваются три класса оценок – экспоненциальные, множительные и степенные соответственно для функционалов таких же структур. Предлагаемые нами оценки в общих моделях содержать в себе и известные оценки Каплана – Мейера и Альтшулера – Бреслоу. Все доказанные в настоящей книге результаты аппроксимации оценок гауссовскими процессами являются оптимальными по скорости аппроксимации. Предлагаемые и исследуемые оценки построены по универсальному методу подстановки. Этот метод в случае полных выборок описан в [62]. Следует особо отметить работы [211,255], основные результаты которых являются неверными. По статье [211] имеется критическое замечание А.А.Абдушукурова в реферате MR 1 981 458 (см. Math.SciNet.: Mathematical Reviews (American Mathematical Society 2004). Соответствующее критическое замечание по поводу статьи [255] опубликовано в США в работе А.А.Абдушукурова [15].

Вкратце изложим результаты, составляющие основное содержание книги.

В первой главе вводятся базовые функционалы, их представления и статистические оценки в моделях неполных данных. Исследованы свойства трёх типов функционалов: экспоненциальной, множительной и степенной структур. В специальной МКР более детально уточнены их свойства и взаимоотношения. Определены обобщенные модели неполных данных, включающие в себя как МКР так и модели случайного цензурирования на прямой. В этих моделях найдены представления для трёх классов функционалов через допускающие оценки распределения. Для одних и тех же функционалов построены различные статистические оценки в соответствующих моделях. Используя вышеупомянутые три типа функционалов построены непараметрические оценки для многомерной функции выживания при неоднородном зависимом цензурировании справа. Для функции выживания в регрессионной модели Кокса, когда присутствует цензурирование с двух сторон предложены параметрические – непараметрические оценки трёх типов. Аналогичные оценки построены также и в общей зависимой модели случайного цензурирования, когда выборка сама также зависит от времени. Доказан и ряд новых результатов для процессов эмпирического типов для разнораспределенных данных и выборок случайного объёма.

Известно, что в случае полной выборки $X^{(n)}=\left(X_1,...,X_n\right)$ из независимых наблюдений над с.в. X с неизвестной ф.р. $F(x)=P(X\le x)$ несмещенной и достаточной ОМП для $F(x)$ является э.ф.р. $F_n^э(x)=\frac{1}{n}\sum_{K=1}^{n}\mathrm{I}\left(X_K\le x\right),\ x\in\overline{R}$. Фадия [264] показал, что $F_n^э(x)$ является также и минимаксной оценкой для $F(x)$ в классе статистик $\left\{\varphi_n(x)=a+\sum_{k=1}^{n}b_k\mathrm{I}\left(X_k\le x\right),\ a_k,\ b_k\ge 0,\ a+\sum_{k=1}^{n}b_k\le 1\right\}$ относительно функции потерь

$$L(F;\varphi_n)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(F(x)-\varphi_n(x)\right)^2\left[F(x)\left(1-F(x)\right)\right]^{-1}dW(x),$$

где $W(\cdot)$ ненулевая конечная мера на (R; □) и □- борелевская σ-алгебра на R. Э.ф.р. обладает также и многими асимптотическими (при $n\to\infty$) свойствами, которые играют фундаментальную роль в асимптотической теории статистического оценивания и проверки гипотез. Исследования следующих учёных внесли существенный вклад в становление и развитие асимптотической теории с участием э.ф.р.: J. Bernoulli, E.Borel, В.И.Гливенко, F.P. Cantelli, А.Н.Колмогоров, Н.В.Смирнов, M.Kac, K.L.Chung, J.L.Doob, M.D.Donsker, A.Dvoretzky, J.Kiefer, J.Wolfowitz., Д.М.Чибисов, R.Pyke, M.Csörgö, S. Csörgö, Я.Ю. Никитин, B.R.James, W. Stute, R.S. Singh, J.Komlös, P. Major, G. Tusnady, R.Beran, J.A.Wellner, W. Philipp, P. Révész, И.С.Борисов, J. Bretagnolle, K. Alexander, R.M. Dudley, D.M.Mason, H.J.A. Degenhardt и другие. Однако, в случае неполных данных, когда число наблюдений интересующей нас с.в. X образует выборку случайного объёма, э.ф.р., построенная по такой выборке, вообще говоря, не является состоятельной оценкой ф.р.. Такая особенность неполных наблюдений на примере простой модели случайного цензурирования справа продемонстрирована в § 1.1. Существующие в статистической литературе непараметрические оценки для ф.р. хотя бы для модели случайного цензурирования справа имеют более сложную структуру чем э.ф.р..

В § 1.2. в целях построения в дальнейшем различных непараметрических оценок вводятся функционалы от субраспределений. Пусть $\Upsilon = \{(G_1, ..., G_K)\}$- класс ограниченных неубывающих и непрерывных справа функций $\{G_i(x), (x;i) \in \bar{R} \times \Im\}$, для которых $G_i(-\infty) = 0$ для всех $i \in \Im$. Пусть $G(x) = G_1(x) + ... + G_K(x)$, $L(x) = L_1(x) + ... + L_K(x)$, где

$$L_i(x) = \int_{(-\infty;x]} \frac{dG_i(u)}{G(\infty) - G(u-)}, \quad i \in \Im .$$

Заметим, что L и L_i, $i \in \Im$ являются обобщениями к.ф.и., неубывающими càdlàg функциями, $\Delta L(x) \le 1, \Delta L_i(x) \le 1, i \in \Im$. Для них справедливо разложение Жордана: $L = L^c + L^d$, $L_i = L_i^c + L_i^d$, где

$$L_i^c(x) = \int_{(-\infty,x]} \frac{dG_i^c(u)}{G(\infty) - G(u-)}, \qquad L_i^d(x) = \sum_{u \in D_{G_i}(x)} \Delta L_i(u) = \sum_{u \le x} \frac{\Delta G_i(u)}{G(\infty) - G(u-)} \quad .$$

При $(x;i) \in \bar{R} \times \Im$ введём следующие функционалы на Υ:

$$\Phi_i(G_1, ..., G_k)(x) = \exp(-L_i^c(x)) \prod_{u \le x} (1 - \Delta L_i(u))$$

.

При $x > a \ge -\infty$, функционалы $\Phi_i(\cdot)(x)$ представимы также и в виде

$$\Phi_i(G_1, ..., G_k)(x) = \Phi_i(G_1, ..., G_k)(a) \exp\left\{-\left(L_i^c(x) - L_i^c(a)\right)\right\} \cdot \prod_{a < u \le x} (1 - \Delta L_i(u)) \ . \quad (1)$$

Рассмотрим интегральные уравнения типа Вольтерра при $(x;i) \in [a;\infty) \times \Im$:

$$\Phi_i(G_1, ..., G_k)(x) = \Phi_i(G_1, ..., G_k)(a) - \int_{[a;x]} \Phi_i(G_1, ..., G_k)(u-) dL_i(u). \qquad (2)$$

В следующем утверждении показано, что интегральное уравнение (2) при каждом $i \in \Im$ имеет единственное решение представляемое в виде (1).

Представление (1) играет важную роль при построении множительных оценок.

Лемма 1.2.3. При заданной к.ф.и. L_i интегральное уравнение (2) имеет единственное локально-ограниченное решение Φ_i, представляемое в виде (1). ■

При доказательстве этой леммы существенно используются результаты работ [191,246,299].

Легко видеть, что функционал Φ_i представим в виде: $\Phi_i\left(G_1,...,G_k\right)(x)=$ $=\exp\left(A_i^c(x)+A_i^d(x)\right)$, где

$$A_i^c(x)=-\int_{(-\infty;x]} \mathrm{I}\left\{u\in C\left(G_i\right)\cap\left(-\infty;T_G\right]\right\}dL_i(u),$$

$$A_i^d(x)=-\sum_{u\in D(G_i)} \mathrm{I}\left\{u\in\left(-\infty;x\right]\cap\left(-\infty;T_G\right]\right\}\log\left(1-\Delta L_i(u)\right),$$

где $T_G=\sup\left\{x\in\overline{R}:G(x)<G(\infty)\right\}$.

Функционалы (1) при $a=-\infty$ и $k=2$ впервые были рассмотрены Гиллом [192]. Он показал, что эти функционалы являются непрерывными по всем $G_j,L_j,j\in\Im$ при $x\le T_G$, непрерывны справа, неотрицательны, невозрастают по $x\in\overline{R}$ и $\Phi_i(\cdot)(-\infty)=1$.

В § 1.2 рассматриваются также и следующие функционалы степенной структуры на Υ:

$$\Psi_i\left(G_1,...,G_K\right)(x)=\left[G(\infty)-G(x-)\right]^{R^{(i)}(x)},\quad (x;i)\in\overline{R}\times\Im, \tag{3}$$

где $R^{(i)}(x)=L_i(x)/L(x)$ - функция отношения к.ф.и. (при $\frac{\infty}{\infty}=1$). Очевидно, $0\le R^{(i)}(x)\le 1,\ i\in\Im,\ R^{(1)}(x)+...+R^{(k)}(x)=1$. Следовательно,

$$\prod_{i=1}^{k}\Psi_i\left(G_1,...,G_K\right)(x)=G(\infty)-G(x-),\ x\in\overline{R}.$$

Пусть $Sp(G)=\left[\tau_G;T_G\right]\ne\varnothing$, где $\tau_G=\inf\left\{x\in\overline{R}:G(x)>0\right\}$.

Лемма 1.2.4. Для любых $\left(G_1,...,G_K\right)\in\Upsilon$ и $(x;i)\in Sp(G)\times\Im$:

(а) $0<\Psi_i\left(G_1,...,G_K\right)(x)\le\left(1\vee G(\infty)\right)$;

(б) Ψ_i являются непрерывными функционалами по $G_1,...,G_K,G,L,L_i$ и $R^{(i)}$; ■

Рассмотрим специальные случаи функционалов Ψ_i.

Замечание 1.2.6. а) В формулах (3) функции $\{G_j(x),\ j\in\Im\}$ заменим соответственно на нормированные $\left\{G_j^0\left(x\right)=G_j\left(x\right)/G\left(\infty\right), j\in\Im\right\}$ и образуем

$$\Psi_i^\circ\left(G_1^\circ,...,G_K^\circ\right)\left(x\right)=\left[1-G^\circ\left(x-\right)\right]^{R_\circ^{(i)}(x)},\ \left(x;i\right)\in\overline{R}\times\Im, \qquad (4)$$

где на самом деле $R_\circ^{(i)}\left(x\right)\equiv R^{(i)}\left(x\right)$. Функционалы (4) будут использованы при построении степенных оценок функции выживания в различных моделях неполных наблюдений.

б) Если существуют числа $\alpha_i\in\left(0;1\right)$, такие, что $\alpha_1+...+\alpha_k=1$ и для всех $x\in\overline{R}:G_i\left(x\right)=\alpha_i G\left(x\right)$, то $R^{(i)}\left(x\right)\equiv\alpha_i$. В этом случае свойства Ψ_i будут определятся только свойствами G.

в) Пусть в (4) $G_1^\circ=F$ - непрерывная справа ф.р. и для всех $m\in\Im(1)$: $G_m^\circ\equiv 0$. Тогда $\Psi_i\left(F,0,...,0\right)\left(x\right)=1-F\left(x-\right)$ и $\Phi_i\left(F,0,...,0\right)\left(x\right)=1-F\left(x\right)$, т.е. оба функционала различаются и в этом частном случае.

В конце § 1.2 установлены двусторонние неравенства для функционалов, из которых в случае непрерывности всех функций $\left\{G_i,i\in\Im\right\}$ следует, что $\Phi_i\left(\cdot\right)\left(x\right)\equiv\Psi_i\left(\cdot\right)\left(x\right)\equiv\exp\left(-L_i\left(x\right)\right)$, т.е получаются экспоненциальные функционалы.

В § 1.3 определены основные модели неполных наблюдений и в них приведены представления и свойства функционалов из § 1.2. При этом базовой считается модель $\left(Z;A\right)$.

I. Модель (*Z;A*). На вероятностном пространстве $(\Omega,\mathcal{A},P)$ рассмотрим с.в. Z с ф.р. $H\left(x\right)=P\left(Z\le x\right),x\in\overline{R}$. Для фиксированного натурального числа k, пусть $\left\{A^{(i)},i\in\Im\right\}$ попарно несовместные события, такие, что $P\left(\cup_{i\in\Im}A^{(i)}\right)=1$. Интерес представляют совместные свойства пар $\left\{\left(Z;A^{(i)}\right),i\in\Im\right\}$. Пусть $\left\{H(x;i)=P\left(Z\le x,A^{(i)}\right),\ \left(x;i\right)\in\overline{R}\times\Im\right\}$- субраспределения и введём к.ф.и.

$$\Lambda\left(x;i\right)=\int\limits_{(-\infty;x]}\frac{dH\left(u;i\right)}{1-H\left(u-\right)},\qquad \Lambda_H\left(x\right)=\int\limits_{(-\infty;x]}\frac{dH\left(u\right)}{1-H\left(u-\right)}.$$

Тогда $H\left(x\right)=\sum_{i=1}^k H\left(x;i\right)$, $\Lambda_H\left(x\right)=\sum_{i=1}^k\Lambda\left(x;i\right)$. Наблюдается выборка $S_\circ^{(n)}=\left\{\left(Z_j,\delta_j^{(1)},...,\delta_j^{(k)}\right)^T,\ j=1,...,n\right\}$, где $\delta_j^{(i)}=\mathrm{I}\left(A_j^{(i)}\right)$ и $\left\{\left(Z_j;A_j^{(1)},...,A_j^{(k)}\right),j\ge 1\right\}$- последовательность независимых копий совокупности $\left(Z;A^{(1)},...,A^{(k)}\right)$. В $\left(Z;A\right)$ - модели основной задачей является оценивание к.ф.и. $\left\{\Lambda\left(\cdot;i\right),i\in\Im\right\}$ и их функционалов по выборке $S_\circ^{(n)}$. В § 1.3 обсуждаются связи $\left(Z;A\right)$ - модели с МКР (с возможно зависимыми рисками), различные условия встречающиеся в статистической литературе, используемые в задачах непараметрического оценивания в МКР, а также $(Z;A)$ - модель с возможно совместимыми событиями $\{A^{(i)}, i \in \Im\}$. Базовыми функционалами, подлежащими к оцениванию в $(Z;A)$-модели по $S_\circ^{(n)}$ являются следующие варианты функционалов $\exp(-L_i), \Phi_i$ и Ψ_i из § 1.2:

$$1-F_1(x;i)=\exp(-\Lambda(x;i))=\exp(-\Lambda^c(x;i))\prod_{u\le x}\exp(-\Delta\Lambda(u;i)),$$

$$1-F_2(x;i)=\exp(-\Lambda^c(x;i))\prod_{u\le x}(1-\Delta\Lambda(u;i)), \tag{5}$$

$$1-F_3(x;i)=\left[1-H(x-)\right]^{R(x;i)},\ R(x;i)=\Lambda(x;i)\left[\Lambda_H(x)\right]^{-1}.$$

Пусть $\bigcap_{i\in\Im}\{x\in R: 0<\Lambda(x;i)<\infty\}\ne\varnothing$. Функционалы (5) обладают свойствами ф.р. и при этом для всех $(x;i)\in Sp(H)\times\Im: F_2(x;i)\ge F_1(x;i)$ и в частности, если H - непрерывная ф.р., то $F_1(x;i)\equiv F_3(x;i)$. А в случае непрерывности всех $\{H(\cdot;i), i\in\Im\}$: $F_m(x;i)=1-\exp\left\{-\int\limits_{(-\infty;x]}(1-H(u))^{-1}dH(u;i)\right\}$, $m=1,2,3$. Отметим, что оценки Альтшулера – Бреслоу и Каплана – Мейера являются специальными случаями функционалов F_1 и F_2 соответственно, а степенные оценки Абдушукурова являются функционалами структуры F_3.
В следующей теореме приводятся ряд полезных неравенств для функционалов (5). Обозначим $\omega_1(x;i)=\frac{1}{2}\exp(-\Lambda^c(x;i))\cdot\sum_{u\le x}[\Delta\Lambda(u;i)]^2$,

$$\omega_2(x;i)=\sum_{u\le x}\left[\Delta\Lambda(u;i)\right]^2(1-\Delta\Lambda(u;i))^{-1},\ \omega_3(x)=\sum_{u\le x}\left[\Delta\Lambda_H(u)\right]^2(1-\Delta\Lambda_H(u))^{-1},$$

$$\omega_4(x;i)=\omega_2(x;i)+\omega_3(x),$$

Теорема 1.3.1. Для произвольных субраспределений $\{H(\cdot;i), i\in\Im\}$ при всех $(x;i)\in Sp(H)\times\Im$ справедливы следующие неравенства:

(I) $0\le F_2(x;i)-F_1(x;i)\le\omega_1(x;i)$;

(II) $0<-\log(1-F_2(x;i))+\log(1-F_1(x;i))<\omega_2(x;i)$;

(III) $0<-\log(1-F_3(x;i))+\log(1-F_1(x;i))<\omega_3(x)$;

(IV) $\left|-\log(1-F_2(x;i))+\log(1-F_3(x;i))\right|<\omega_4(x;i)$;

(V) $0\le F_3(x;i)-F_1(x;i)<\omega_3(x)$;

(VI) $\left|F_2(x;i)-F_3(x;i)\right|<\omega_4(x;i)$; ■

Пусть в $(Z;A)$- модели $Z_j=\bigwedge_{i\in\Im}Y_j^{(i)},\ \delta_j^{(i)}=\mathrm{I}\left(Z_j=Y_j^{(i)}\right)$, где $\left\{\left(Y_j^{(1)},...,Y_j^{(k)}\right),\ j\geq 1\right\}$-последовательность н.о.р. случайных векторов с совместной функцией выживания $L(y_1,...,y_k)=P(Y_j^{(1)}>y_1,...,Y_j^{(k)}>y_k),\quad (y_1,...,y_k)\in\overline{R}^k$. Интерес представляет оценивание маргинальных функций выживания $\left\{1-F^{(i)}(x)=P\left(Y_j^{(i)}>x\right),\ i\in\Im\right\}$ и соответствующих к.ф.и.

$$\Lambda^{(i)}(x)=\int_{(-\infty;x]}\left(1-F^{(i)}(u-)\right)^{-1}\cdot dF^{(i)}(u).$$

Рассматриваемая модель является МКР с зависимыми рисками. Пусть $H(x)=1-L(x,...,x)$ и совместное распределение рисков $\left\{Y^{(i)},i\in\Im\right\}$ таково, что имеют место равенства $\Lambda^{(i)}(x)=\Lambda(x;i),i\in\Im$, которые для независимых рисков выполняются автоматически. Тогда функционалы (5) могут быть использованы для построения оценок для $1-F^{(i)}$ по выборке $S_{\circ}^{(n)}$.

В § 1.3 рассматриваются модели $(Z\wedge Y;B),(Z\vee L;C),u\left(L\vee(Z\wedge Y);D\right)$, включающие в себя модели случайного цензурирования справа, слева и с двух сторон, а также и $(Z;A)$-модель (т.е. МКР). В них найдены представления для функционалов (5) и их усеченных аналогов. Рассмотрим здесь только модель $\left(L\vee(Z\wedge Y);D\right)$, включающую в себя исследуемые в диссертации и другие модели. Эта модель является смесью случайного цензурирования с двух сторон с $(Z;A)$-моделью.

II. Модель ($L\vee(Z\wedge Y);D$). Пусть в $(Z;A)$-модели с.в. Z и события $\left\{A^{(i)},i\in\Im\right\}$ подвергаются случайному цензурированию слева и справа с.в. L и Y с ф.р. $K(x)=P(L\leq x)$ и $G(y)=P(Y\leq y),x,y\in\overline{R}.$ Пусть с.в $\{Z,L,Y\}$ являются независимыми в совокупности. Наблюдается выборка $S_3^{(n)}=\left\{\left(\zeta_j;\chi_j^{(\circ)},\chi_j^{(1)},...,\chi_j^{(K)}\right)^T,\ j=1,...,n\right\}$, где $\zeta_j=L_j\vee\left(Z_j\wedge Y_j\right),\ \chi_j^{(i)}=\mathrm{I}\left(D_j^{(i)}\right)$, $i\in\overline{\Im}$, $D_j^{(\circ)}=\left\{\omega:Z_j(\omega)\wedge Y_j(\omega)<L_j(\omega)\right\}\cup\left\{\omega:L_j(\omega)\leq Y_j(\omega)<Z_j(\omega)\right\}$, $D_j^{(i)}=A_j^{(i)}\cap\left\{\omega:L_j(\omega)\leq Z_j(\omega)\leq Y_j(\omega)\right\},i\in\Im$ и $\left\{Z_j;L_j;Y_jD_j^{(\circ)},D_j^{(1)},D_j^{(1)},...,D_j^{(K)},j\geq 1\right\}$-последовательность н.о.р. копий совокупности $\left(Z,L,Y;D^{(\circ)},D^{(1)},...,D^{(K)}\right)$. Здесь

$$D^{(\circ)}=\{\omega:Z(\omega)\wedge Y(\omega)<L(\omega)\}\cup\{\omega:L(\omega)\leq Y(\omega)<Z(\omega)\},$$

$D^{(i)}=A^{(i)}\cap\{\omega:L(\omega)\leq Z(\omega)\leq Y(\omega)\},i\in\Im$. Легко видеть, что события $\left\{D^{(i)},i\in\Im\right\}$

обладают теми же свойствами, что и $\left\{A^{(i)},\, i\in\Im\right\}$. В данной модели интерес представляют пары $\left\{\left(Z;A^{(i)}\right),\, i\in\Im\right\}$, а с.в. L и Y с ф.р. K и G считаются мешающими. Модель $\left(L\vee\left(Z\wedge Y\right);D\right)$ является обобщением моделей $(Z\wedge Y;B)$ и $\left(Z\vee L;C\right)$, получаемых соответственно при $P\left(L=-\infty\right)=1$ и $P(Y=+\infty)=1$. В $\left(L\vee\left(Z\wedge Y\right);D\right)$-модели рассматриваются следующие усеченные слева на уровне τ версии функционалов (5) при $x\in\left[\tau;\infty\right)\times\Im$:

$$1-F_{1\tau}\left(x;i\right)=\exp\left(-\Lambda_\tau^c\left(x;i\right)\right)\prod_{\tau\le u\le x}\exp\left(-\Delta\Lambda_\tau\left(u;i\right)\right),$$

$$1-F_{2\tau}\left(x;i\right)=\exp\left(-\Lambda_\tau^c\left(x;i\right)\right)\prod_{\tau\le u\le x}\left(1-\Delta\Lambda_\tau\left(u;i\right)\right), \tag{6}$$

$$1-F_{3\tau}\left(x;i\right)=\left[\frac{P\left(L\le x\le Z\wedge Y\right)}{P\left(L\le\tau\le Z\wedge Y\right)}\right]^{R_\tau(x;i)},$$

где $R_\tau\left(x;i\right)=\Lambda_\tau\left(x;i\right)\left\{-\int\limits_{[\tau;x]}\frac{dP\left(L\le u\le Z\wedge Y\right)}{P\left(L\le u\le Z\wedge Y\right)}\right\}^{-1}$, $\Lambda_\tau\left(x;i\right)=\Lambda\left(x;i\right)-\Lambda\left(u-;i\right)$ и число τ удовлетворяет условиям при $\gamma\left(x\right)=1-\left(1-G\left(x\right)\right)\left(1-H\left(x\right)\right)$:

$$\begin{cases}\inf\limits_{x\in(\tau;\infty]}\left\{K\left(x\right)\left(1-\gamma\left(x-\right)\right\}>0,\\ \bigcap\limits_{i\in\Im}\Gamma_{K,G,\tau}^{(i)}\neq\varnothing.\end{cases} \tag{7}$$

В (7) $\Gamma_{K,G,\tau}^{(i)}=\left\{x\in R:0<\Lambda_\tau\left(x;i\right)<\infty\right\},\ i\in\Im;\ \Gamma_{K,G,\tau}^{(\circ)}=\left\{x\in R:0<\Lambda_{1\tau}\left(x;0\right)<\infty\right\}$, где для к.ф.и. Λ_τ и $\Lambda_{1\tau}$ справедливы представления при $x\ge\tau$

$$\Lambda_\tau\left(x;i\right)=\int\limits_{[\tau;x]}\frac{dT\left(u;i\right)}{P\left(L\le u\le Z\wedge Y\right)},\ i\in\Im,\quad \Lambda_{1\tau}\left(x;0\right)=\int\limits_{[x;\infty)}\frac{dT_1\left(u;0\right)}{E\left(u-\right)},$$

а функции $E(x)=P(\zeta=L\vee(Z\wedge Y)\le x)=K(x)\gamma(x)$,

$$T(x;i)=P\left(L\le Z\le Y,\, Z\le x, A^{(i)}\right)=\int\limits_{(-\infty;x]}K(u)\left(1-G(u-)\right)dH(u;i),\ i\in\Im,$$

$$T_1(x;0)=P\left(Z\wedge Y<L, L\le x\right)=\int\limits_{(-\infty;x]}\gamma(u-)dK(u),\ T_2(x;0)=P\left(L\le Y<Z,\, Y\le x\right)=\int\limits_{(-\infty;x]}K(u)\left(1-H(u)\right)dG(u)$$

обладают свойством $E\left(x\right)=T_1\left(x;0\right)+T_2\left(x;0\right)+\sum_{i=1}^{k}T\left(x;i\right),\ x\in\overline{R}$. Для вероятности $q(u)=P(L\le u\le Z\wedge Y)$ имеет место выражение $q(u)=K(u)-E(u-)-\Delta T_1(u;0)$. Поскольку $E(u)$ и $T_1(u;0)$ допускают эмпирическое оценивание по $S_3^{(n)}$, то при оценивании $q(u)$ основная задача состоит в оценивании $K(u)$. Для оценивания $K(x)$ используются следующие левосторонние аналоги функционалов (6) при $x\ge\tau$:

$$F_{1\tau}(x;0)=\exp\left(-\Lambda_{1\tau}^{c}(x;0)\right)\prod_{x\le u}\exp\left(-\Delta\Lambda_{1\tau}(u;0)\right),$$

$$F_{2\tau}(x;0)=\exp\left(-\Lambda_{1\tau}^{c}(x;0)\right)\prod_{x\le u}\left(1-\Delta\Lambda_{1\tau}(u;0)\right), \tag{8}$$

$$F_{3\tau}(x;0)=\left[E(x)\right]^{d(x)},\ d(x)=\Lambda_{1\tau}(x;0)\left[\Lambda_E^{*}(x)\right]^{-1},$$

где

$$\Lambda_E^{*}(x)=\int\limits_{[x;\infty)}\left[E(u-)\right]^{-1}\cdot dE(u).$$

В § 1.4 построены непараметрические оценки для функционалов из § 1.3, используя их представления в соответствующих моделях. В модели $(Z;A)$ для функционалов (5) предлагаются следующие оценки $S_{\circ}^{(n)}$:

$$1-F_{1n}(x;i)=\prod_{u\le x}\exp\left(-\Delta\Lambda_n(u;i)\right),$$

$$1-F_{2n}(x;i)=\prod_{u\le x}\left(1-\Delta\Lambda_n(u;i)\right), \tag{9}$$

$$1-F_{3n}(x;i)=\left[1-H_n(x-)\right]^{R_n(x;i)},$$

где

$$R_n(x;i)=\Lambda_n(x;i)\left[\Lambda_n(x)\right]^{-1},\Lambda_n(x;i)=\int\limits_{(-\infty;x]}\left(1-H_n(u-)\right)^{-1}dH_n(u;i),$$

$$\Lambda_n(x)=\int\limits_{(-\infty,x]}(1-H_n(u-))^{-1}dH_n(u)\ \text{ и }\ H_n(x;i)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{I}\left(Z_j\le x,\delta_j^{(i)}=1\right),\quad i\in\Im,$$

$H_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{I}\left(Z_j\le x\right)$-эмпирические оценки $\{H(x;i),i\in\Im\}$ и $H(x)$ соответственно. Поскольку оценки (9) сами являются функционалами типа (5), то для них теорема 1.3.1 имеет место. В теореме 1.4.1 оценены правые части неравенств (I)-(VI) для статистик (9) и установлено, что они имеют порядок $O\left(\left(n(1-H_n(x))^2\right)^{-1}\right)$ п.н. для всех

$(x;i)\in(-\infty;\max\{Z_1,...,Z_n\})\times\Im$. В модели $(Z\wedge Y;B)$, в которой наблюдается выборка $S_1^{(n)}=\left\{\left(\xi_j,\Delta_j^{(\circ)},\Delta_j^{(1)},...,\Delta_j^{(k)}\right),j=1,...,n\right\}$, где $\xi_j=Z_j\wedge Y_j$, $\Delta_j^{(i)}=\mathrm{I}\left(B_j^{(i)}\right),i\in\bar{\Im}$, $B_j^{(\circ)}=\{\omega:Y_j(\omega)<Z_j(\omega)\}$ и $B_j^{(i)}=A_j^{(i)}\bigcap\{\omega:Z_j(\omega)\le Y_j(\omega)\}$, $i\in\Im$ для функционалов (5) предлагаются оценки при $i\in\Im$

$$1-\bar{F}_{1n}(x;i)=\prod_{u\le x}\exp\left(-\frac{\Delta M_n(u;i)}{1-N_n(u-)}\right),$$

$$1-\bar{F}_{2n}(x;i)=\prod_{u\le x}\left(1-\frac{\Delta M_n(u;i)}{1-N_n(u-)}\right), \qquad (10)$$

$$1-\bar{F}_{3n}(x;i)=\left[1-N_n(x-)\right]^{\bar{R}_n(x;i)},\bar{R}_n(x;i)=\bar{\Lambda}_n(x;i)\left[\Lambda_n(x)\right]^{-1}.$$

Здесь $\bar{\Lambda}_n(x;i)=\int\limits_{(-\infty;x]}(1-N_n(u-))^{-1}\cdot dM_n(u;i),i\in\Im,\ \Lambda_n(x)=\int\limits_{(-\infty;x]}(1-N_n(u-))^{-1}\cdot dN_n(u),$

$M_n(x;i)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n\mathrm{I}\left(\xi_j\le x,\Delta_j^{(i)}=1\right)$ $i\in\Im$ и $N_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n\mathrm{I}\left(\xi_j\le x\right)$. Поскольку оценки (10) по структуре являются функционалами типа (5), то и для них теорема 1.3.1 остаётся в силе. В $(L\vee(Z\wedge Y);D)$- модели каждому из функционалов (6) по выборке $S_3^{(n)}$ при $(x;i)\in[\tau;\infty)\times\Im$ и $m=1,2,3$ предлагаются соответственно по три оценок:

$$1-F_{1\tau n}^{(m)}(x;i)=\prod_{\tau\le u\le x}\exp\left(-\Delta\Lambda_{m\tau n}(u;i)\right),$$

$$1-F_{2\tau n}^{(m)}(x;i)=\prod_{\tau\le u\le x}\left(1-\Delta\Lambda_{m\tau n}(u;i)\right),$$

$$1-F_{3\tau n}^{(m)}(x;i)=\left[\frac{q_{mn}(x)}{q_{mn}(\tau)}\right]^{R_{m\tau n}(x;i)}, \qquad (11)$$

где

$$R_{m\tau n}(x;i)=\Lambda_{m\tau n}(x;i)\left\{-\int\limits_{[\tau;x]}\left(q_{mn}(u)\right)^{-1}\cdot dq_{mn}(u)\right\}^{-1},\ \Lambda_{m\tau n}(x;i)=\int\limits_{[\tau;x]}\left(q_{mn}(u)\right)^{-1}\cdot dT_n(u;i),$$

$q_{mn}(x)=K_{mn}(x)-E_n(x-)-\Delta T_{1n}(x;0)$. При этом $E_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n\mathrm{I}\left(\zeta_j\le x\right)$, $T_{1n}(x;0)=$ $=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n\mathrm{I}\left(\zeta_j\le x,\chi_{1j}^{(\circ)}=1\right)$ $T_n(x;i)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n\mathrm{I}\left(\zeta_j\le x,\chi_j^{(i)}=1\right)$, $i\in\Im$, а оценки для $K(x)$ определяются (согласно (8)) формулами при $x\ge\tau$:

$$K_{1n}(x)=\exp\left(-\Lambda_{1\tau n}(x;0)\right),\ K_{2n}(x)=\prod_{x\le u}\left(1-\Delta\Lambda^{+}_{1\tau n}(u;0)\right),$$

$$K_{3n}(x)=\left[E_n(x)\right]^{d_n(x)},d_n(x)=\Lambda_{1\tau n}(x;0)\left\{-\int_{[x;\infty)}\left[E_n(u-)\right]^{-1}\cdot dE_n(u)\right\}^{-1}$$

$$\Lambda_{1\tau n}(x;0)=\int_{[x;\infty)}\left[E_n(u-)\right]^{-1}\cdot dT_{1n}(u;0),\Lambda^{+}_{1\tau n}(x;0)=\int_{[x;\infty)}\left[E_n(u)\right]^{-1}\cdot dT_{1n}(u;0).$$

Пусть в модели $\left(L\vee(Z\wedge Y);D\right)$ наблюдается выборка $\tilde{S}_3^{(n)}=$ $=\left\{\left(\zeta_j;L_j;\chi_j^{(\circ)},\chi_j^{(1)},...,\chi_j^{(k)}\right),j=1,...,n\right\}$. Тогда для вероятности $q(x)$ может быть использована эмпирическая оценка $q_n^{э}(x)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{I}\left(L_j\le x\le Z_j\wedge Y_j\right)$.Через $\left\{\tilde{F}_{m\tau n}(x;i),m=1,2,3;(x;i)\in[\tau;\infty)\times\Im\right\}$ обозначим оценки функционалов (6) по выборке $\tilde{S}_3^{(n)}$, получаемые заменой в формулах (11) всех $q_{mn}(x)$ на $q_n^{э}(x)$. Для оценок $F_{j\tau n}^{(m)}(x;i)$ и $\tilde{F}_{j\tau n}(x;i),j,m=1,2,3;\quad i\in\Im$ также имеет место аналог теоремы 1.4.1. В частности, справедлива

Теорема 1.4.5. При $(x;i)\in\left[\tau;\max\{\zeta_1,...,\zeta_n\}\right)\times\Im$ и $m=1,2,3$ справедливы соотношения:

$$0\le F_{2\tau n}^{(m)}(x;i)-F_{1\tau n}^{(m)}(x;i)\le\frac{2}{n}\sup_{\tau\le u\le x}\left\{\left[q_{mn}(u)\right]^{-2}\right\},\ \text{п.н.}$$

$$0< F_{3\tau n}^{(m)}(x;i)-F_{1\tau n}^{(m)}(x;i)\le\frac{2}{n}\sup_{\tau\le u\le x}\left\{\left[q_{mn}(u)\right]^{-2}\right\},\ \text{п.н.}$$

$$\left|F_{2\tau n}^{(m)}(x;i)-F_{3\tau n}^{(m)}(x;i)\right|\le\frac{4}{n}\sup_{\tau\le u\le x}\left\{\left[q_{mn}(u)\right]^{-2}\right\},\ \text{п.н.}\qquad\blacksquare$$

Пусть модель $(Z;A)$ есть МКР с $Z_j=\bigwedge_{j\in\Im}Y_j^{(i)}$, $A_j^{(i)}=\left\{\omega:Z_j(\omega)=Y_j^{(i)}(\omega)\right\}$, $i\in\Im$, где $\left\{\left(Y_j^{(1)},...,Y_j^{(k)}\right),j\ge1\right\}$- последовательность н.о.р. с. векторов и $\Lambda(x;i)=\int_{(-\infty;x]}\left(1-F^{(i)}(u-)\right)^{-1}dF^{(i)}(u)$- к.ф.и., $F^{(i)}(x)=P\left(Y_j^{(i)}\le x\right),i\in\Im$. Если требуется оценить условные функции выживания $1-F_\tau(x;i)=P\left(Y_j^{(i)}\ge x\big/Y_j^{(i)}\ge\tau\right),i\in\Im$ и $1-H_\tau(x)=P\left(Z_j\ge x\big/Z_j\ge\tau\right),x\ge\tau$,- элементов и самой системы, то для этих целей могут быть использованы соответственно оценки $1-F_{j\tau n}^{(m)}(x;i),1-\overline{F}_{j\tau n}(x;i)$, а также $1-H_{j\tau n}^{(m)}(x)=\prod_{i=1}^{K}\left(1-F_{j\tau n}^{(m)}(x;i)\right)$ и $1-\tilde{H}_{j\tau n}(x)=\prod_{i=1}^{K}\left(1-\tilde{F}_{j\tau n}(x;i)\right)$,

$j,m=1,2,3$. Оценки (10),(11) подробно исследованы в главе 2.

§ 1.5 книги посвящён построению непараметрических оценок для многомерной функции выживания при неоднородном цензурировании наблюдений справа. Отметим исследования G.Campbell, D.M.Dabrowska, L. Horvàth, J.A.Hanley, M.N. Parnes, Y.Huang, T.A.Louis, в которых рассматривались аналогичные задачи в специальных моделях случайного цензурирования. Ими были построены и частично исследованы различные непараметрические оценки множительной структуры. Неоднозначность определения этих оценок объясняется тем, что интеграл-произведение в многомерном случае можно ввести различными путями. Трудности, возникающие при анализе многомерных данных типа времени жизни подробно обсуждаются в обзорных статьях Р.Гилла [64,65]. Он заметил, что при многомерном цензурировании не удаётся исследовать оценки при помощи мартингальной техники. Действительно, в отличие от одномерного, в многомерном случае нет канонического способа определения понятий «прошлого», «настоящего», «будущего», на которых основывается само понятие мартингал. Поэтому к настоящему времени нет универсальных методов построения и исследования оценок вероятности выживания в многомерном случае. Исследования в этом направлении показывают, что как в одномерном, так и в многомерном случаях при построении непараметрических оценок вероятности выживания оценивание накопленной функции риска является ключевой задачей. Отметим работу J.D.Fermanian [172], где получены глубокие результаты по исследованию многомерных оценок к.ф.и.. В данной книге, используя функционалы из § 1.2 построены и подробно исследованы три класса оценок двумерной функции выживания в общей модели зависимого и неоднородного случайного цензурирования справа. Отметим, что такая схема наблюдений в многомерном случае ранее никем не была рассмотрена.

Пусть $\{X_i=(X_{1i},X_{2i}),i\ge 1\}$- последовательность н.о.р. двумерных случайных векторов с общей непрерывной функцией выживания $F(s;t)=P(X_{11}>s;X_{21}>t),(s;t)\in\overline{R}^2$. Эта последовательность цензурируется справа последовательностью $\{Y_i=(Y_{1i},Y_{2i}),i\ge 1\}$-независимых двумерных случайных векторов с функциями выживания $\{G_{(i)}(s;t)=P(Y_{1i}>s,Y_{2i}>t),i\ge 1\},(s;t)\in\overline{R}^2$. Наблюдению доступна выборка $V^{(n)}=\{(Z_i,\Delta_i),1\le i\le n\}$, где $Z_i=(Z_{1i},Z_{2i}),\Delta_i=(\delta_{1i};\delta_{2i}),Z_{ki}=X_{ki}\wedge Y_{ki}$ и $\delta_{ki}=I(Z_{ki}=X_{ki}),k=1,2$. Задача состоит в оценивании F по выборке $V^{(n)}$ при мешающих функциях $\{G_{(i)},i\ge 1\}$. Для $F(s;t)$ предлагаются следующие оценки:

$$F_{1n}(s;t)=\exp\left(-\left(\tilde{\Lambda}_{1n}(s;-\infty)+\tilde{\Lambda}_{2n}(s;t)\right)\right),$$

$$F_{2n}(s;t)=\prod_{u\le s}\left(1-\tilde{\Lambda}_{1n}(\Delta u;-\infty)\right)\prod_{v\le t}\left(1-\tilde{\Lambda}_{2n}(s;\Delta v)\right), \qquad (12)$$

$$F_{3n}(s;t)=\left[H_n(s;t)\right]^{R_n(s;t)},\ R_n(s;t)=\tilde{\Lambda}_n(s;t)\left[\Lambda_n(s;t)\right]^{-1},$$

где $\tilde{\Lambda}_n(s;t)=\tilde{\Lambda}_{1n}(s;-\infty)+\tilde{\Lambda}_{2n}(s;t), \qquad \Lambda_n(s;t)=\Lambda_{1n}(s;-\infty)+\Lambda_{2n}(s;t),$

$$\tilde{\Lambda}_{1n}(s;t)=\int_{(-\infty;s]}\frac{\tilde{M}_n(du;t)}{H_n(u-;t)},\ \ \tilde{\Lambda}_{2n}(s;t)=\int_{(-\infty;t]}\frac{\tilde{N}_n(s;dv)}{H_n(s;v-)},$$

$$\Lambda_{1n}(s;t)=\int_{(-\infty;s]}\frac{M_n(du;t)}{H_n(u-;t)},\ \ \Lambda_{2n}(s;t)=\int_{(-\infty;t]}\frac{N_n(s;dv)}{H_n(s;v-)},$$

$$H_n(s;t)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}I\left(Z_{1i}>s,Z_{2i}>t\right),\ \ M_n(s;t)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}I\left(Z_{1i}\le s,Z_{2i}>t\right),$$

$$N_n(s;t)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}I\left(Z_{1i}>s,Z_{2i}\le t\right),\ \ \tilde{M}_n(s;t)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}I\left(Z_{1i}\le s,Z_{2i}>t,\delta_{1i}=1\right),$$

$$\tilde{N}_n(s;t)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}I\left(Z_{1i}>s,Z_{2i}\le t,\delta_{2i}=1\right).$$

Систематическое исследование свойств оценок (12) проводиться в § 2.4.

В § 1.6 описывается модель Кокса при случайном цензурировании наблюдений с двух сторон. Эта модель характеризуется тем, что представляющие интерес с.в. и цензоры являются зависимыми. D.Cox [138,139] рассматривал следующую регрессионную модель. Пусть условная к.ф.и. объекта с временем жизни Z удовлетворяет представлению

$$\Lambda(x/v)=\Lambda_0(x)\exp\left(\left(\beta^T,v\right)\right),\ x\ge 0, \qquad (13)$$

где базовая к.ф.и. $\Lambda_0(x)=\Lambda(x/0)$ - непрерывна,

$$\Lambda(x/v)=\lim_{h\downarrow 0}P\left(Z\le x+h/Z\ge x,\ V=v\right),$$

$V=\left(V_1,...,V_p\right)$-вектор ковариат (величин регрессии или предсказывающих факторов) и $\beta=\left(\beta_1,...,\beta_p\right)$- вектор параметров регрессии. Задача состоит в оценивании базовой функции выживания $1-H(x)=\exp\left(-\Lambda_0(x)\right),\ \ x\ge 0$ по независимым наблюдениям над вектором $(Z;V)$. Модель Кокса широко применяется при анализе данных типа времени жизни (подробно см. [74]). К настоящему времени имеется обширная литература по исследованиям, связанным с этой моделью. При исследовании вышеизложенной задачи оценивания $H(x)$ в основном рассмотрены только те случаи, когда с.в. Z либо наблюдаема, либо подвергается только правостороннему цензурированию. Следует упомянуть статью A. Tsiatis [294], в которой при случайном цензурировании справа для $H(x)$ предлагается экспоненциальная оценка. В § 1.6 рассматривается более общая ситуация, когда с.в. Z цензурируется с двух сторон и, используя функционалы из § 1.2 предлагаются оценки трёх типов для условной функции выживания с.в. Z. Одна из этих оценок обобщает оценку из [294].

Пусть с.в. Z подвергается случайному цензурированию слева и справа соответственно с.в. L и Y с маргинальными условными ф.р. $K\left(x/v\right)=$ $=P\left(L\le x/V=v\right), G\left(x/v\right)=P\left(Y\le x/V=v\right),\ x\ge 0$. Пусть $H(x/v)=P(Z\le x/V=v)$. Тогда согласно (13) $H\left(x/v\right)=\exp\left\{-\Lambda_0\left(x\right)\exp\left(\left(\beta^T;v\right)\right)\right\}$. Рассмотрим условия:

(C1) Совместное распределение вектора (Z,L,Y,V) таково, что компоненты с. вектора (Z,L,Y) условно независимы при заданном векторе ковариат V с ф.р. $\pi(v)=P\left(V_1\le v_1,...,V_p\le v_p\right),\ v=\left(v_1,...,v_p\right)\in\overline{R}^{+p}$.

(C2) Совместное распределение вектора (Z,L,Y,V) таково, что для чисел $\tau,\ T,\ \Lambda_0(T)<\infty$ и $\inf\limits_{\tau\le x\le T}\int\limits_{R^{+p}}P\left(L\le x\le Z\wedge Y/V=v\right)d\pi(v)>0$.

(C3) Наблюдению доступен вектор $\lambda=\left(\zeta,L,\chi_1,\chi_2,\chi_3,V\right)$ размерности $(p+5)$,где $\zeta=L\vee(Z\wedge Y), \chi_1=I(Z\wedge Y<L),\ \chi_2=I(L\le Y<Z)$ и $\chi_3=I(L\le Z\le Y)$. Заметим, что с.в. Z наблюдаема лишь в случае $\chi_3=1$.

Пусть $S^{(n)}=\left\{\left(\zeta_j,L_j,\chi_{1j},\chi_{2j},\chi_{3j},V_j\right),\ j=1,...,n\right\}$-независимая повторная выборка наблюдений над с. вектором λ. Через $\hat{\beta}_n$ обозначим ОМП параметра β, получаемую решением системы уравнений $\left\{\frac{\partial\log L_n(\beta)}{\partial\beta_i}=0, i=1,...,p\right\}$, где

$$L_n(\beta)=\prod_{\substack{i=1\\ \zeta_i\le T}}^{n}\left\{\frac{\exp\left(\left(\beta^T,v_i\right)\right)}{\sum\limits_{j=1}^{n}\exp\left(\left(\beta^T,v_i\right)\right)I\left(L_j\le\zeta_i\le Z_j\wedge Y_j\right)}\right\}^{\chi_{3i}}.$$

Пусть $\Lambda_{\tau 0}(x)=\Lambda_0(x)-\Lambda_0(\tau-)$. Тогда $\Lambda_{\tau 0}(x;\beta)=\int\limits_{[\tau;x]}\left(\omega^{(0)}(u;\beta)\right)^{-1}dT_3(u)$, где $T_3(x)=\int\limits_{R^{+p}}P(\zeta\le x,\chi_3=1/V=v)\,d\pi(v)$ и $\omega^{(0)}(x;\beta)=\int\limits_{[0;\infty)}\exp\left(\left(\beta^T,v\right)\right)\cdot$ $\cdot P(L\le x\le Z\wedge Y/V=v)\,d\pi(v)$. Оценкой для $\Lambda_{\tau 0}(x)$ является $\Lambda_{\tau 0}^{(n)}\left(x;\hat{\beta}_n\right)=\int\limits_{[\tau;x]}\left(\omega_n^{(0)}\left(u;\hat{\beta}_n\right)\right)^{-1}\cdot dT_{3n}(u)$, где $T_{3n}(x)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}I\left(\zeta_j\le x,\chi_{3j}=1\right)$ и $\omega_n^{(0)}(x;\beta)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\exp\left(\left(\beta^T;v_j\right)\right)I\left(L_j\le x\le Z_j\wedge Y_j\right)$. В § 1.6 предлагаются следующие оценки для условной функции выживания $1-H_{\tau 0}(x)=P(Z>x/Z\ge\tau,\,V=0)$, $x\ge\tau$: $1-\hat{H}_{\tau 0}^{(n)}(x;m)=\Psi_{nm}\left(x;\hat{\beta}_n\right)$, $m=1,2,3;x\ge\tau$, где

$$\Psi_{n1}(x;\beta)=\exp\left(-\Lambda_{\tau 0}^{(n)}(x;\beta)\right),\qquad \Psi_{n2}(x;\beta)=\prod_{\tau\le u\le x}\left(1-\Delta\Lambda_{\tau 0}^{(n)}(u;\beta)\right),$$

$$\Psi_{n3}(x;\beta)=\left[\omega_n^{(0)}(x;\beta)/\omega_n^{(0)}(\tau;\beta)\right]^{R_n(x;\beta)},\text{ и}$$

$$R_n(x;\beta)=\Lambda_{\tau 0}^{(n)}(x;\beta)\left\{-\int\limits_{[\tau;x]}\left(\omega_n^{(0)}(u;\beta)\right)^{-1}\cdot d\omega_n^{(0)}(u;\beta)\right\}^{-1}.$$

Тогда соответствующими оценками $1-H_\tau(x/v)=P(Z>x/Z\ge\tau,V=v)$ являются

$$1-\hat{H}_{\tau m}^{(n)}(x/v)=\left[\Psi_{nm}\left(x;\hat{\beta}_n\right)\right]^{\exp\left(\left(\hat{\beta}_n^T,v\right)\right)},\ m=1,2,3;x\ge\tau .$$

Все оценки, введенные в §1.6 исследованы в § 3.1 данной книги.

В § 1.7 рассматривается задача оценивания ВеБР сложной технической системы, функция надёжности которой удовлетворяет выражению $1-F(x)=h_\varphi(p_1,...,p_k)$, $x\ge 0$ (см. [50;51]:

$$h_\varphi(p_1,...,p_k)=\sum_{U\in\{0,1\}^k}\varphi(U)\prod_{j=1}^{k}p_j^{U_j}\cdot\left(1-p_j\right)^{1-U_j},\ \left(0^0=1\right). \tag{14}$$

Здесь $U=(U_1,...,U_k)$- описывает состояние системы из k элементов, $p_j=1-F_j(x)$ - функция надёжности j- компоненты системы. Пусть имеется совокупность n однотипных систем со структурной функцией (14) и $X_{ji}-$ВрБР j- компоненты i- системы $\left(j=\overline{1.k};\ i=\overline{1.n}\right)$. Тогда $X_{1j},X_{2j},...,X_{nj}$ н.о.р. с.в. с ф.р. $F_j(x)$. Через T_i и L_i соответственно обозначим ВрБР и момент входа под наблюдение i- системы. Пусть T_i и L_i

взаимонезависимые с.в. с ф.р. $F(x)=P(T_i \le x)$ и $K(x)=P(L_i \le x)$. Заметим, что с.в. X_{ij} цензурируется справа с.в-ой T_i и они являются зависимыми. Схема наблюдений такова, что испытание систем на безотказность проводится в промежутке времени $[0;t]$. Тогда в момент времени t будем наблюдать выборку $C^{(n)}(t)=\left\{Z_1^{(n)}(t),...,Z_k^{(n)}(t)\right\}$, где

$$Z_j^{(n)}(t)=\left\{\left(\xi_{ij}(t),\ \delta_{ij}(t)\right),\ 1\le i\le n\right\},$$

$$\xi_{ij}(t)=0\vee\left(X_{ij}\wedge(t-L_i)\wedge T_i\right),\ \delta_{ij}(t)=I\left(X_{ij}\le T_i\wedge(t-L_i)\right).$$

В данной модели, для j- компоненты i- системы наблюдается либо отказ $\left(\delta_{ij}(t)=1\right)$ либо цензурирование $\left(\delta_{ij}(t)=0\right)$. Оценим $1-F$ по выборке $C^{(n)}(t)$ с учётом формулы (14). Пусть $\Lambda_j(x)=\int\limits_{[0;x]}\left(1-F_j(u-)\right)^{-1}dF_j(u)$ к.ф.и. j-компоненты. Введём считающие процессы при $0\le x\le t$: $N_{jn}(x;t)=\sum\limits_{i=1}^{n}I\left(\xi_{ij}(t)\ge x\right)$, $M_{jn}(x;t)=\sum\limits_{i=1}^{n}I\left(\xi_{ij}(t)\le x,\delta_{ij}(t)=1\right)$ и соответствующую к.ф.и. $\Lambda_{jn}(x;t)=\int\limits_{[0;x]}\left[N_{jn}(u;t)\right]^{-1}dM_{jn}(u;t)$, где $dM_{in}(u;t)=M_{jn}(u;t)-M_{jn}(u-;t)$. Для $1-F_j(x)$ рассмотрим следующие оценки трёх типов при $0\le x\le t,\ \ j=1,...,k$:

$$1-F_{jn}^{(1)}(x;t)=\exp\left(-\Lambda_{jn}(x;t)\right),$$

$$1-F_{jn}^{(2)}(x;t)=\prod_{u\le x}\left(1-\left(\Lambda_{jn}(u;t)-\Lambda_{jn}(u-;t)\right)\right), \qquad (15)$$

$$1-F_{jn}^{(3)}(x;t)=\left[\frac{1}{n}N_{jn}(x;t)\right]^{R_{jn}(x;t)},$$

где $R_{jn}(x;t)=\Lambda_{jn}(x;t)\left[\Lambda_{jn}^{*}(x;t)\right]^{-1}$ и $\Lambda_{jn}^{*}(x;t)=-\int\limits_{[0;x]}\left(N_{jn}(u;t)\right)^{-1}\cdot d\,N_{jn}(u-;t)$. Пусть $F_{jn}^{\square}(x;t)$ одна из оценок из (15) для $F_j(x), j=1,...,k$. Тогда согласно (13) соответствующие оценки для $1-F(x)$ определяются формулами $1-F_n^{\square}(x;t)=h_\varphi\left(1-F_{1n}^{\square}(x;t),...,1-F_{kn}^{\square}(x;t)\right)$, $0\le x\le t$. Поскольку введенные непараметрические оценки (15) зависят от двух аргументов $(x;t)$, то путём дискретизации по t вводятся их модифицированные варианты. В § 2.5 исследуются последовательные аналоги множительных оценок. Эти результаты обобщают соответствующие исследования авторов [161,201].

§ 1.8 книги является вспомогательным. В нем приводятся фундаментальные понятия и утверждения из стохастического анализа. При этом особо выделяются мартингалы с непрерывным временем, образованные считающими процессами. Результаты из § 1.8 будут использованы при исследовании непараметрических оценок, введенных в данной книге.

В § 1.9 собраны основные результаты из асимптотической теории для эмпирических процессов как для одинаково распределённых, так и для разнораспределенных с.в.-н.. Хотя результаты § 1.9 являются вспомогательными, среди них имеются также и ряд представляющих самостоятельный интерес новых результатов, доказанных впервые в диссертации. К ним можно отнести теоремы $E^{**}, F^{*}, G^{*}, H^{*}, K^{*}, L, L^{*}, M^{*}$ *и* M^{**}, установленные для эмпирических статистик Каца и их модификаций.

Во второй главе исследованы асимптотические свойства непараметрических оценок функционалов, введенных в главе 1. Известно, что в случае полной выборки оптимальную аппроксимацию эмпирического процесса последовательностью броуновских мостов установили J. Komlös, P. Major, G. Tusnady [233]. Это – неулучшаемая аппроксимация порядка $O\left(n^{-1/2}\log n\right)$ на всей прямой. Этот результат обобщили M.D. Burke, S. Csörgö, L. Horvàth [125, 126], доказывая соответствующие аппроксимации для экспоненциальных и множительных оценок в $(Z;A)$- модели, а также P. Major, L. Rejtö [249] для оценки Каплана – Мейера при случайном цензурировании справа. В этих работах тот же оптимальный порядок получен на части прямой $(-\infty;T]$, $T<\infty$. Horvàth [213] доказал аппроксимацию оценки множительной структуры последовательностью гауссовских процессов для частной модели цензурирования с двух сторон. При этим установленная им скорость аппроксимации имеет порядок $O\left(n^{-\lambda}\right), \lambda=1/45000$, т.е. очень далёкая от оптимальности. В § 2.1 нами доказаны результаты аппроксимации для непараметрических оценок, построенных в $\left(L\vee(Z\wedge Y);D\right)$ - модели в § 1.3. Установленные нами результаты аппроксимации на интервале $[\tau;T)$ являются оптимальными и обобщают результаты вышеупомянутых работ. Учитывая то, что $K(x)$ является мешающей ф.р., а её оценки $\left\{K_{mn}(x), m=1,2,3\right\}$ асимптотически эквивалентными, далее нами будет использована только экспоненциальная оценка $K_{1n}(x)$, так как она относительно легко исследуема. Обозначив её через $K_n(x)$, соответствующие оценки (11) обозначим как $\left\{F_{m\tau n}(x;i), m=1,2,3\right\}$, опуская верхние индексы. Пусть $V_{mn}^{(i)}(x)=n^{1/2}\left(F_{m\tau n}(x;i)-F_{m\tau}(x;i)\right)$,

$m=1,2,3;\ \ (x;i)\in[\tau;\infty)\times\Im$ и для $v=(v_1,...,v_k)\in R^k$, $V_{mn}(v)=\left(V_{mn}^{(1)}(v_1),...,V_{mn}^{(k)}(v_k)\right)$. Вектор–процессы $V_{mn}(v)$ аппроксимируем последовательностью гауссовских вектор-процессов $W_{mn}(v_1)=\left(W_{mn}^{(1)}(v),...,W_{mn}^{(k)}(v_k)\right), m=1,2,3;$ где $W_{mn}^{(i)}(x)=-\left(1-F_{m\tau}(x;i)\right)\cdot N_n^{(i)}(x)$,

$$N_n^{(i)}(x)=\int\limits_{[\tau;x]}\frac{\left(B_n^{(k+1)}(u)-\lambda_n(u)\right)dT(u;i)}{\left(K(u)-E(u)\right)^2}+\frac{B_n^{(i)}(x)}{K(x)-E(x)}-$$

$$-\frac{B_n^{(i)}(\tau)}{K(\tau)-E(\tau)}-\int\limits_{[\tau;x]}\frac{B_n^{(i)}(u)d\left(K(u)-E(u)\right)}{\left(K(u)-E(u)\right)^2},$$

$$\lambda_n(x)=-K(x)\cdot\left\{\int\limits_{[x;\infty)}\frac{B_n^{(k+1)}(u)dT_1(u;0)}{E^2(u)}+\frac{B_{1n}^{(0)}(x)}{E(x)}-\int\limits_{[x;\infty)}\frac{B_{1n}^{(0)}(u)dE(u)}{E^2(u)}\right\},$$

- гауссовские процессы, являющиеся линейными функционалами от последовательности процессов $B_n^{(0)}(x),B_n^{(1)}(x),...,B_n^{(k+1)}(x)$ броуновского типа с нулевыми средними и заданной ковариационной структурой. Пусть $\|a\|^{(k)}=\bigvee\limits_{i\in\Im}|a_i|$ - максимум–норма вектора $a=(a_1,...,a_k)\in R^k$ и $[\tau;T)^k=\left\{v=(v_1,...,v_k):\tau\le v_i<T;i\in\Im\right\}$, где числа τ,T таковы, что для заданного $\varepsilon>0$ и $n\ge 2$:

$$\begin{cases}\tau,T\in\left\{x:0<K(x)<1\right\}\bigcap\left\{x:0<E(x)<1\right\},\\ \inf\limits_{\tau\le x<T}\left(K(x)-E(x)\right)>0,\\ E(\tau)\ge\left(2(1+\varepsilon)\cdot\dfrac{\log n}{n}\right)^{1/2},\\ \left[E(\tau)\right]^2\cdot\inf\limits_{\tau\le x<T}\left(K(x)-E(x)\right)\ge 64\left((1+\varepsilon)\dfrac{\log n}{2n}\right)^{1/2}.\end{cases}\qquad(16)$$

Теорема 2.1.2. Пусть $K(\cdot),E(\cdot),\left\{H(\cdot;i),i\in\Im\right\}$ непрерывны и выполнены условия (16). Тогда при $m=1,2,3$:

$$P\left(\sup\limits_{v\in[\tau;T)^k}\left\|V_{mn}(v)-W_{mn}(v)\right\|^{(k)}>R_m\cdot n^{-1/2}\log n\right)<k\cdot Q_m\,n^{-(1+\varepsilon)},$$

где $R_m=R_m(\varepsilon,K,E)$ и Q_m - положительные постоянные. ■

Доказательство теорему 2.1.2 основывается на теореме 2.1.1 об аппроксимации вектор- процесса от оценок к.ф.и. последовательностью гауссовских процессов, а также на пять лемм, среди которых одна (лемма 2.1.8) играет ключевую роль при получении оптимального порядка аппроксимации. Аналогичное утверждение доказано и для оценок $\left\{\tilde{F}_{m\tau n}(x;i), m=1,2,3\right\}$. Пусть $\tilde{V}_{mn}(v)=\left(\tilde{V}_{mn}^{(1)}(v_1),...,\tilde{V}_{mn}^{(k)}(v_k)\right), \tilde{V}_{mn}^{(i)}(x)=n^{1/2}\left(\tilde{F}_{m\tau n}(x;i)-F_{m\tau}(x;i)\right)$,

$\tilde{W}_{mn}(v)=\left(\tilde{W}_{mn}^{(1)}(v_1),...,\tilde{W}_{mn}^{(k)}(v_k)\right)$, $\tilde{W}_{mn}^{(i)}(x)=-\left(1-F_{m\tau}(x;i)\right)\tilde{N}_n^{(i)}(x)$, где $\tilde{N}_n^{(i)}(x)$ имеет такую же структуру, что и $N_n^{(i)}(x)$, с той лишь разницей, что вместо $\lambda_n(u)$ находится гауссовский процесс $\tilde{\lambda}_n(u)$:

$\left\{\tilde{\lambda}_n(u);-\infty<u<\infty\right\}\overset{D}{=}\left\{B\left(K(u)\right);-\infty<u<\infty\right\}$ и $\left\{B(y),0\le y\le 1\right\}$ - броуновский мост.

Теорема 2.1.13. Пусть $K(\cdot),E(\cdot),\left\{H(\cdot;i),i\in\Im\right\}$- непрерывны, выполнены первые два условия (16) и $r^{-1}=\sup\limits_{\tau\le x\le T}\left(K(x)-E(x)\right)^{-1}\ge 8\left((1+\varepsilon)\dfrac{\log n}{2n}\right)^{1/2}$, $n\ge 2$. Тогда при $m=1,2,3$:

$$P\left(\sup_{v\in[\tau;T)}\left\|\tilde{V}_{mn}(v)-\tilde{W}_{mn}(v)\right\|^{(k)}>\tilde{R}_m\cdot n^{-1/2}\cdot\log n\right)<k\cdot\tilde{Q}_m n^{-(1+\varepsilon)},$$

где $\tilde{R}_m=\tilde{R}_m(\varepsilon,K,E)$ и $\tilde{Q}_m$ - положительные постоянные. ■

Следствие 2.1.14. Из доказательства теорем 2.1.2. и 2.1.13 следует аппроксимация оценок $F_{m\tau n}(x;i)$и $\tilde{F}_{m\tau n}(x;i)$ через соответствующие кумулятивные процессы при $m=1,2,3$ равномерно по всем $(x;i)\in[\tau;T)\times\Im$:

$$\left(F_{m\tau n}(x;i)-F_\tau(x;i)\right)\exp\left(\Lambda_\varepsilon(x;i)\right)=\left(\Lambda_{m\tau n}(x;i)-\Lambda_\tau(x;i)\right)+R_n(x),$$

$$\left(\tilde{F}_{m\tau n}(x;i)-F_\tau(x;i)\right)\exp\left(\Lambda_\tau(x;i)\right)=\left(\tilde{\Lambda}_{m\tau n}(x;i)-\Lambda_\tau(x;i)\right)+\tilde{R}_n(x),$$

где $\quad 1-F_\tau(x;i)=\exp\left(-\Lambda_\tau(x;i)\right),\quad \sup\limits_{\tau\le x<T}\left|R_n(x)\right|\overset{п.н.}{=}O\left(n^{-1/2}\log n\right),$

$\sup\limits_{\tau\le x<T}\left|\tilde{R}_n(x)\right|\overset{п.н.}{=}O\left(n^{-1/2}\log n\right)$, . ■

Поскольку процесс $\tilde{\Lambda}_{m\tau n}(x;i)-\Lambda_\tau(x;i)$ представим через мартингал, порождаемый считающим процессом, то для оценок $\tilde{F}_{m\tau n}(x;i)$ справедлива также следующая теорема о мартингальной аппроксимации с оценкой скорости.

Теорема 2.1.17. В условиях теоремы 2.1.13:
(а) для всех $m = 1, 2, 3$ и $i \in \Im$:

$$\sup_{\tau \le x < T} \left| \left(\tilde{F}_{m\tau n}(x;i) - F_\tau(x;i) \right) \exp\left(\Lambda_\tau(x;i) \right) - \int_{[\tau;x]} \frac{I\left(nC_n(u) > 0 \right)}{nC_n(u)} dm_n^{(i)}(u) \right| \overset{п.н.}{=} O\left(n^{-1} \log n \right), \quad (17)$$

где $m_n^{(i)}(u) = \sum_{j=1}^{n} \left(I\left(\zeta_j \le u, \chi_j^{(i)} = 1 \right) - \int_{(-\infty;u]} I\left(L_j \le s \le Z_j \wedge Y_j \right) d\Lambda(s;i) \right)$, $m_n(u) =$
$= \left(m_n^{(1)}(u), ..., m_n^{(k)}(u) \right) \in \square^2_{loc}(\square_u)$, $\square_x = \mathcal{N}_0 \cup \sigma\left(I\left(\zeta_j \le u, \chi_j^{(i)} = 1 \right), u \le x, 1 \le j \le n, i \in \Im \right)$.
Интеграл в (17) также принадлежит классу $\square^2_{loc}(\square_x)$;
(б) при $n \to \infty$, $m = 1,2,3$ и $v = (v_1, ..., v_k) \in [\tau;T)^k$:

$$\left(n^{1/2} \left(\tilde{F}_{m\tau n}(v_i;i) - F_\tau(v_i;i) \right), \; i \in \Im \right) \overset{D}{\Rightarrow} \left(\omega_1(v_1), ..., \omega_k(v_k) \right),$$

где $\{\omega_i(x), i \in \Im\}$-независимые гауссовские процессы с нулевыми средними и ковариационной структурой при $x, y \in [\tau;T)$ и $i \in \Im$:

$$M\omega_i(x)\omega_i(y) = (1 - F_\tau(x;i))(1 - F_\tau(y;i)) \int_{[\tau, x \wedge y]} \left[K(u)(1 - G(u-))(1 - H(u))^2 \right]^{-1} dH(u;i). \quad \blacksquare$$

В § 2.2 доказаны свойства строгой состоятельности непараметрических оценок из § 1.3 в модели $\left(L \vee (Z \wedge Y); D \right)$. Речь идет о законах типа повторного логарифма. ЗПЛ для эмпирических процессов в случае полной выборки от н.о.р. с.в. доказал J. Kiefer [229] а для разнораспределенных с.в. S. Csörgö, L. Horvàth [153]. Аналогичные результаты для оценки Каплана-Мейера в модели случайного цензурирования справа получены в работах A.Földes, L. Rejtö, E.G. Phadia, J.Van Ryzin, S.Csörgö, L. Horvàth. В рассматриваемой нами общей модели $\left(L \vee (Z \wedge Y); D \right)$ аналогичные результаты для оценок трёх структур доказаны как при однородном так и при неоднородном цензурировании наблюдений.

Теорема 2.2.2. Пусть $K(\cdot), E(\cdot), \{H(\cdot;i), i \in \Im\}$ непрерывны и выполнены первые два условия (16). Тогда для $m = 1,2,3$ и $i \in \Im$:

$$\limsup_{n \to \infty} \sup_{x \ge \tau} \frac{\left| F_{m\tau n}(x;i) - F_{m\tau}(x;i) \right|}{1 - F_{m\tau}\left(\lambda(n); i \right)} = L_m, п.н.$$

где $L_m = L_m\left(G, K, E, T(\cdot;0),...,T(\cdot;k)\right)$ положительные постоянные, последовательность $\lambda(n) = \lambda(n;\alpha_m) \geq \tau$ определяется как

$$\lambda(n) = \sup\left\{x \in R : 1-\gamma(x) \geq \frac{\alpha_m}{E(\tau)} \cdot \left(\frac{\log\,\log n}{2n}\right)^{1/2}\right\},\ n \geq 2\,.$$

Числа α_m при $m = 1,2$ удовлетворяют неравенству $\frac{3}{\alpha_m}\left[\frac{4}{\alpha_m}\left(2+M^0\right)+4+M^0\right]<1,$ а при $m=3,$ $\frac{6}{\alpha_3}\cdot\left[\frac{8}{r^2}\left(4+M^0\right)\left(2+M^0\right)+\frac{2}{r^2}\left(7+3M^0\right)+1\right]<1,$ где $M^0 > 0$ удовлетворяет ЗПЛ

$$\limsup_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{\log\log n}\right)^{1/2}\sup_{x\geq\tau}\left|K_n(x)-K(x)\right| = M^0,\ \text{п.н.} \qquad \blacksquare$$

Аналогичный результат справедлив и для оценок $\left\{\tilde{F}_{m\tau n}(x;i),\ m = 1,2,3\right\}$.

Теорема 2.2.3. В условиях теоремы 2.2.2, при $m = 1,2,3$ и $i \in \Im$:

$$\limsup_{n\to\infty}\sup_{x\geq\tau}\frac{\left|\tilde{F}_{m\tau n}(x;i)-F_{m\tau}(x;i)\right|}{1-F_{m\tau}\left(\tilde{\lambda}(n);i\right)} = \tilde{L}_m,\ \text{п.н.}$$

где $\tilde{L}_m = \tilde{L}_m\left(G, K, E, T(\cdot;0),...,T(\cdot;k)\right)$- положительные постоянные, последовательность $\tilde{\lambda}(n) = \tilde{\lambda}(n;\tilde{\alpha}_m) \geq \tau$ определяется как

$$\tilde{\lambda}(n) = \ = \sup\left\{x \in R : 1-\gamma(x) \geq \frac{\tilde{\alpha}_m}{E(\tau)}\left(\frac{\log\log n}{2n}\right)^{1/2}\right\},\ n \geq 2\,.$$

Здесь числа $\tilde{\alpha}_m$ при $m = 1,2$ удовлетворяют неравенству $3\tilde{\alpha}_m^{-2}\left(12+5\tilde{\alpha}_m\right)<1,$ а при $m = 3,\ 6\tilde{\alpha}_3^{-1}\cdot r^{-2}\cdot\left(140+r^2\right)<1$. ■

В § 2.2 установлены ЗПЛ, используя результаты аппроксимации из § 2.1.

Теорема 2.2.4. Пусть в условиях теоремы 2.1.2 для каждого $i \in \Im$:

$$\sup_{\tau\leq x<T} M\left[N_n^{(i)}(x)\right]^2 < \infty\,.$$

Тогда при каждом $m = 1,2,3$ и $i \in \Im$

$$\limsup_{n\to\infty}\left(\frac{n}{\log\,\log n}\right)^{1/2}\sup_{\tau\leq x<T}\left|F_{m\tau n}(x;i)-F_{m\tau}(x;i)\right| = \ell,\ \text{п.н.}$$

где $\ell = \ell(K,E)$-универсальная (по i)положительная постоянная. ■

Теорема 2.2.5. Пусть в условиях теоремы 2.1.13 для каждого $i \in \Im$:

$$\sup_{\tau \le x < T} M\left[\tilde{N}_n^{(i)}(x)\right]^2 < \infty .$$

Тогда при каждом $m = 1,2,3$ и $i \in \Im$:

$$\limsup_{n\to\infty} \left(\frac{n}{\log\log n}\right)^{1/2} \sup_{\tau \le x < T} \left|\tilde{F}_{m\tau n}(x;i) - F_{m\tau}(x;i)\right| = \tilde{\ell}, \ \textit{п.н.}$$

где $\tilde{\ell} = \tilde{\ell}(K,E)$ универсальная (по i) положительная постоянная. ■

В § 2.2 рассматривается и более общая ситуация, в которой цензурирование с двух сторон является неоднородным. Пусть векторы $\{(L_k, Y_k),\ k \ge 1\}$ разнораспределены, имеют независимые компоненты,

$$K^{(k)}(x) = P(L_k \le x),\ G^{(k)}(x) = P(Y_k \le x),\ E^{(k)}(x) = P(\zeta_k \le x),\ k \ge 1 .$$

Пусть

$$K(x;n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} K^{(k)}(x),\ E(x;n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E^{(k)}(x),\ x \in \overline{R} .$$

Теорема 2.2.6. Пусть распределения $K^{(k)}(\cdot)$, $E^{(k)}(\cdot), k \ge 1$ и $\{H(\cdot;i), i \in \Im\}$ непрерывны и $\liminf_{n\to\infty} \inf_{\tau \le x < T} \left(K(x;n) - E(x;n)\right) > 0$. Тогда при каждом $m = 1,2,3$ и $i \in \Im$:

$$\limsup_{n\to\infty} \sup_{\tau \le x < T} \left(\frac{n}{\log\log n}\right)^{1/2} \cdot \left|F_{m\tau n}(x;i) - F_{m\tau}(x;i)\right| = L_m^*, \ \textit{п.н.}$$

$$\limsup_{n\to\infty} \sup_{\tau \le x < T} \left(\frac{n}{\log\log n}\right)^{1/2} \cdot \left|\tilde{F}_{m\tau n}(x;i) - F_{m\tau}(x;i)\right| = \tilde{L}_m^*, \ \textit{п.н.}$$ ■

В § 2.3. в модели $(Z \wedge Y; B)$ доказаны более глубокие результаты об аппроксимации оценок (10) гауссовскими процессами, когда правосторонняя граница аппроксимирующего интервала является членом вариационного ряда. Такие результаты для оценки Каплана-Мейера при случайном цензурировании справа были доказаны в работах [149,193,282] и оптимальные по скорости аппроксимации результаты доказал S. Csörgö [149]. Поскольку модель $(Z \wedge Y; B)$ является обобщенным аналогом случайного цензурирования справа, то доказательство аналогичных результатов для оценок $\bar{F}_{1n}(x;i)$ *и* $\bar{F}_{2n}(x;i)$ не представляет труда (теорема 2.3.1.). Здесь нами будет сформулирован соответствующий результат и для оценок $\bar{F}_{3n}(x;i)$.

Пусть последовательность целых чисел $\{k_n, n \ge 1\}$ такова, что $1 \le k_n < n$ и для утверждений с вероятностью 1 выполнено условие: $k_n \ge \log n$ для всех достаточно больших n и последовательность $\left\{\frac{k_n}{n}, n \ge 1\right\}$-асимптотически невозрастает (например, $k_n \equiv [\alpha n], k_n \equiv [n^\alpha]$, при $\alpha \in (0,1)$);

Обозначим $D(x;i) = d(x;i)/(1+d(x;i))$, где $d(x;i) = \int\limits_{(-\infty;x]} \frac{dH(u;i)}{(1-H(u-))^2(1-G(u-))}$, $i \in \Im$. Пусть $\tau > \sup\{x \in R : (1-G(x))(1-H(x)) = 1\}$. Через $\{W_n^{(i)}(x), 0 < x < \infty, i \in \Im\}$, $\{W^{(i)}(x;n), 0 < x < \infty, n \ge 1; i \in \Im\}$ и $\{K_n^{(i)}(y) = n^{-1/2} K(y;n), 0 \le y \le 1, n \ge 1, i \in \Im\}$ соответственно обозначим последовательности винеровских процессов, двухпараметрические винеровские процессы (листы), процессы Кифера, где $K(y;n)$- киферовский лист. Введём вектор-процессы $\bar{\beta}_{3n}(v) =$
$= n^{1/2}\left(\left(\bar{F}_{3n}(v_1;1) - F_3(v_1;1)\right)\left(1-F_3(v_1;1)\right)^{-1}, \ldots, \left(\bar{F}_{3n}(v_k;k) - F_3(v_k;k)\right)\left(1-F_3(v_k;k)\right)^{-1}\right)$,

$$\bar{\sigma}_{3n}(v) = n^{1/2}\left(\left(\bar{F}_{3n}(v_1;1) - F_3(v_1;1)\right)\cdot\left[\left(1-F_3(v_1;1)\right)\left(1+d_n(v_1;1)\right)\right]^{-1}, \ldots, \left(\bar{F}_{3n}(v_k;k) - F_3(v_k;k)\right)\right.$$

$$\left.\left[\left(1-F_3(v_k;k)\right)\cdot\left(1+d_n(v_k;k)\right)\right]^{-1}\right), \quad \text{где} \quad d_n(x;i) = \int\limits_{(-\infty;x)} \frac{dM_n(u;i)}{1-N_n(u-)}, \ i \in \Im.$$

Пусть $\xi_{(1)} \le \xi_{(2)} \le \ldots \le \xi_{(n)}$ - вариационный ряд из данных $\{\xi_j, j = 1, \ldots, n\}$.

Теорема 2.3.2. Пусть распределения $G(\cdot), \{H(\cdot;i), i \in \Im\}$ - непрерывны. Тогда для всех $i \in \Im$ справедливы аппроксимации:

$$\sup_{\tau \le x \le \xi_{(n-k_n)}} \frac{\left|\bar{F}_{3n}(x;i) - F_3(x;i)\right|}{1 - F_3(x;i)} = O_p(k_n^{-1/2}),$$

$$\sup_{v \in \left[\tau; \xi_{(n-k_n)}\right]^k} \left\|\bar{\beta}_{3n}(v) - \left(W_n^{(1)}\left(d(v_1;1)\right), \ldots, W_n^{(k)} d(v_k;k)\right)\right\|^{(k)} = O_p\left(k_n^{-1} n^{1/2} \log n\right),$$

$$\sup_{v \in \left[\tau; \xi_{(n-k_n)}\right]^k} \left\|\bar{\beta}_{3n}(v) - n^{1/2}\left(W^{(1)}\left(d(v;1);n\right), \ldots, W^{(k)}\left(d(v_k;k);n\right)\right)\right\|^{(k)} = O_p\left(k_{2n}^{-1} \cdot n^{1/2} \log n\right),$$

$$\sup_{v\in\left[\tau;\xi_{(n-k_n)}\right]^k}\left\|\bar{\sigma}_{3n}(v)-\left(B_n^{(1)}\left(D(v_1;1)\right),...,B_n^{(k)}\left(D(v_k;k)\right)\right)\right\|^{(k)}=O_p\left(k_n^{-1}n^{1/2}\log n+k_n^{-3/2}n\right),$$

$$\sup_{v\in\left[\tau;\xi_{(n-k_n)}\right]^k}\left\|\bar{\sigma}_{3n}(v)-\left(K_n^{(1)}\left(D(v_1;1)\right),...,K_n^{(k)}\left(D(v_k;k)\right)\right)\right\|^{(k)}=$$

$$=O_p\left(k_{2n}^{-1}n^{1/2}\log^2 n+k_{2n}^{-3/2}\cdot n\cdot(\log n)^{1/2}(\log\log n)^{1/2}\right). \qquad \blacksquare$$

Заметим, что в теореме 2.3.2 сформулированы слабые варианты (по вероятности) аппроксимационных результатов для оценок $\bar{F}_{3n}(\cdot;i), i\in\Im$. Более того, в них левые границы интервалов зависят от числа $\tau=\tau(G,H)$. В этих аппроксимациях можно полагать $\tau=-\infty$, однако теорема 2.3.4 показывает, что это может привести к ухудшению скорости аппроксимации (см. замечание 2.3.5).

В §2.4 исследованы свойства оценок двумерной функции выживания, определенные в § 1.5. В частности имеет место следующий аналог теорем 1.3.1 и 1.4.1. Пусть $Z_{m(n)}=\max\{Z_{m1},...,Z_{mn}\}$, $m=1,2$.

Теорема 2.4.1. Для всех $(s;t)\in\left(-\infty;Z_{1(n)}\right)\times\left(-\infty;Z_{2(n)}\right)$:

(I) $0\le F_{1n}(s;t)-F_{2n}(s;t)\overset{п.н.}{=}O\left(\frac{1}{n}\right)$,

(II) $\left|F_{1n}(s;t)-F_{3n}(s;t)\right|\le\pi_n(s;t)$; *п.н.*

(III) $\left|F_{3n}(s;t)-F_{2n}(s;t)\right|\le\pi_n(s;t)+O\left(\frac{1}{n}\right)$; *п.н.*

где $\pi_n(s;t)=\left|-\log H_n(s;t)-\Lambda_n(s;t)\right|$. $\blacksquare$

Пусть $G^{(n)}(s;t)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}G_{(k)}(s;t)$ и $H^{(n)}$, $N^{(n)}$, $M^{(n)}$, $\tilde{N}^{(n)}$, $\tilde{M}^{(n)}$ означают математические ожидания соответствующих эмпирических полей $H_n,N_n,M_n,\tilde{N}_n,\tilde{M}_n$. Суть условий (C1)-(C6) из § 2.4 заключается в том, что все эти шесть средние арифметические функции имеют соответствующие пределы $G,H,N,M,\tilde{N},\tilde{M}$ из отрезка [0;1] на носителях предельных функций. Пусть для носителей имеется условие $Q=Supp(N)\bigcap Supp(M)\bigcap Supp(\tilde{N})\bigcap$
$\bigcap Supp(\tilde{M})\ne\varnothing$. Также пусть $\tilde{\Lambda}(s;t),\Lambda(s;t)$ и $R(s;t)$ соответствующие предельные функции для $\tilde{\Lambda}_n(s;t),\Lambda_n(s;t)$ и $R_n(s;t)$.

Теорема 2.4.2. (I)В условиях (C2), (C5) и (C6) при $m=1,2$:

$$P\left(\lim_{n\to\infty}\sup_{(s;t)\in Q}\left|F_{mn}(s;t)-\exp\left(-\tilde{\Lambda}(s;t)\right)\right|=0\right)=1;$$

(II) В условиях (C2)-(C6):

$$P\left(\lim_{n\to\infty}\sup_{(s;t)\in Q}\left|F_{3n}(s;t)-\left[H(s;t)\right]^{R(s;t)}\right|=0\right)=1. \qquad \blacksquare$$

В следующей теореме найдены условия, при которых все три оценки стремятся к оцениваемой функций $F(s;t)$.

Теорема 2.4.3. Пусть последовательности с. векторов $\{X_i, i\geq 1\}$ и $\{Y_i; i\geq 1\}$ независимы. Тогда: (I) $\exp\left(-\tilde{\Lambda}(s;t)\right)\equiv F(s;t),(s;t)\in Q;$ (II) В условиях (C1) и (C2), где $G(s;t)$-непрерывная функция: $\left[H(s;t)\right]^{R(s;t)}\equiv F(s;t),(s;t)\in Q$. ■

В следующей теореме определены условия равномерной строгой состоятельности оценок, когда цензоры являются одинаково распределенными, однако не обязательно независимыми от цензурируемых с. векторов.

Теорема 2.4.5. Пусть пары $\{(X_i;Y_i), i\geq 1\}$ одинаково распределены и для случая $m=3$ функция $G(s;t)=P(Y_{11}>s;Y_{21}>t)$ непрерывна. Равенства

$$P\left(\lim_{n\to\infty}\sup_{(s;t)\in Q}\left|F_{mn}(s;t)-F(s;t)\right|=0\right)=1, m=1,2,3;$$

имеют место тогда и только тогда, когда для всех $(s;t)\in Q$:

$$\begin{cases} P\left(Y_{11}\geq s/X_{11}=s\right)=P\left(Y_{11}\geq s/X_{11}>s\right), \\ P\left(Y_{11}>s, Y_{21}\geq t/X_{11}>s, X_{21}=t\right)=P\left(Y_{11}>s, Y_{21}\geq t/X_{11}>s, X_{21}>t\right) \end{cases}. \qquad \blacksquare$$

В § 2.4. доказаны также и результаты о слабой сходимости оценок к гауссовским полям (теорема 2.4.13) в случае, когда пары $\{(X_i,Y_i), i\geq 1\}$ распределены одинаково, а последовательности $\{X_i, i\geq 1\}$ и $\{Y_i, i\geq 1\}$ взаимонезависимы.

В § 2.5 доказана теорема 2.5.1, об аппроксимации последовательных оценок функции надёжности из § 1.7 сложных систем последовательностью остановленных мартингалов. Из этого результата в частности следует справедливость ЗПЛ для оценок.

В третьей главе исследуется свойства статистических оценок в информативных моделях цензурирования. В § 3.1 исследованы непараметрические оценки функции выживания в модели Кокса при случайном цензурировании с двух сторон. Пусть параметр регрессии β

одномерный $(p=1)$. В теореме 3.1.4 при выполнении условий (C1)-(C3) из § 1.6, а также

$$\sup_{t\in B(\varepsilon_\circ;\beta)} M\left[V\exp(tV)\right]^2 < K < \infty, \tag{18}$$

где $B(\varepsilon_\circ;\beta)$ окрестность β радиуса $\varepsilon_\circ > 0$, доказано существование сильно-состоятельной ОМП $\hat{\beta}_n$ для β. В теореме 3.1.6 установлено свойство асимптотической нормальности $\hat{\beta}_n$ при справедливости условий (C1)-(C3), (18), а также

(C4) Функции $\left\{\omega^{(k)}(u;t) = \int\limits_{[0;\infty)} v^k \cdot \exp(tv) P(L \le u \le Z \wedge Y/V = v)\, d\pi(v), k = 0,1,2\right\}$ - равномерно непрерывны по $(u;t)\in[0;T]\times B(\varepsilon_\circ;\beta) = \tau_{T,\beta}$ и ограничены на $\tau_{T,\beta}$.

Пусть $\zeta_{(n)} = \max\{\zeta_1,...,\zeta_n\}$ и $v_\circ$-фиксированная ковариата.

Теорема 3.1.10. Пусть выполнены условия (C1)-(C4), (18) и для случая $m=3$ ф.р. $K(x/v)$ и $G(x/v)$ непрерывны по $x\in[\tau;T]$. Тогда при каждом $m=1,2,3$:

(I) $\sup\limits_{\substack{\tau\le x\le T\\ x<\zeta_{(n)}}} \left|\hat{H}^{(n)}_{\tau m}(x/v) - H_\tau(x/v_\circ)\right| \xrightarrow[n\to\infty]{p} 0;$

(II) $n^{1/2}\left(H^{(n)}_{\tau m}(x/v_\circ) - H_\tau(x/v_\circ)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{D} \chi_{\tau v_\circ}(x)$ в $D[\tau;T]$,

где $\chi_{\tau v_\circ}(x)$- центрированный гауссовский процесс с ковариацией при $x,y\ge\tau$:

$$M\chi_{\tau v_\circ}(x)\chi_{\tau v_\circ}(y) = \left(1-H_\tau(x/v_\circ)\right)\left(1-H_\tau(y/v_\circ)\right)\Gamma_\tau(x,y/v_\circ),$$

$$\Gamma_\tau(x,y/v_\circ) = \exp(2\beta v_\circ)\left\{\int\limits_{[\tau;x\wedge y]} \frac{d\Lambda_\circ(u)}{\omega^{(\circ)}(u;\beta)} + \left(\Im(\beta)\right)^{-1}\cdot\left[\int\limits_{[\tau;x]}\left(\frac{\omega^{(1)}(u;\beta)}{\omega^{(\circ)}(u;\beta)} - v_\circ\right)\cdot d\Lambda_\circ(u)\right]\cdot\right.$$
$$\left.\cdot\left[\int\limits_{[\tau;y]}\left(\frac{\omega^{(1)}(u;\beta)}{\omega^{(\circ)}(u;\beta)} - v_\circ\right) d\Lambda_\circ(u)\right]\right\},$$

и $\Im(\beta)$-функция информации. ■

Результат теоремы 3.1.10 обобщен и на случай векторного параметра β.

В § 3.2 построена и исследована параметрическая – непараметрическая степенная оценка ф.р, когда МПИ подвергается неоднородному случайному цензурированию справа. Пусть $\{(L_k,Z_k,Y_k),k\ge1\}$ последовательность независимых с. векторов с независимыми в совокупности компонентами. Пусть ф.р. $H(x)=P(Z_k \le x)$, $G(x)=P(Y_k \le x)$ непрерывны, независят от k и $K^{(k)}(x)=P(L_k \le x)$, $k \ge 1$, $x \in \bar{R}$. Пусть пары $(H;G)$ отвечают МПИ: $1-G(x)=(1-H(x))^{\theta}$, $x \in \bar{R}$, где $\theta > 0$- неизвестный параметр. Наблюдается выборка $\tilde{V}^{(n)}=\left\{\left(L_k,\zeta_k,\delta_k^{(\circ)},\delta_k^{(1)},\delta_k^{(2)}\right),k=1,...,n\right\}$, $\zeta_k=\left(L_k \vee (Z_k \Lambda Y_k)\right)$, $\delta_k^{(\circ)}=\mathrm{I}(Z_k \Lambda Y_k < L_k)$, $\delta_k^{(1)}=\mathrm{I}(L_k \le Z_k \le Y_k), \delta_k^{(2)}=\mathrm{I}(L_k \le Y_k < Z_k)$. Задача состоит в оценивании ф.р. H по выборке $V^{(n)}$ при мешающих параметрах $\left\{\theta, K^{(k)}, k \ge 1\right\}$. Для $H(x)$ предлагается оценка $H_n(x)=1-\left[1-E_n(x)/K_n(x)\right]^{\gamma_n}$, где $\gamma_n=\tilde{\Delta}_n^{(\circ)}\cdot\left(1-\tilde{\Delta}_n^{(\circ)}\right)^{-1}$,

$\Delta_n^{(j)}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}, \delta_k^{(j)}$, $j=0,1$. В теореме 3.2.5 при обычных условиях, налагаемых при неполных данных на числа τ_n и T_n доказана аппроксимация

$$\sup_{\tau_n \le x \le T_n}\left|\frac{n^{1/2}\left(H_n(x)-H(x)\right)}{1-H(x)}-\tilde{U}_n(x)\right| \overset{п.н.}{=} O(\mu(n)),$$

где $\mu(n)=\left(1-H(T_n)\right)^{-(\theta+2)}\cdot\left(K(\tau_k;n)\right)^{-2}\cdot n^{-1/2}\cdot\log n, K(x;n)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}K^{(k)}(x)$, а процесс $\tilde{U}_n(x)$ является линейным функционалом от эмпирических процессов, которые в свою очередь являются мартингал-процессами. Из этого результата, в частности следует оптимальная аппроксимация порядка $O\left(n^{-1/2}\log n\right)$ и ЗПЛ на конечном отрезке $[\tau;T]$. В § 3.2 оценка $H_n(x)$ распространена и на модель $(L \vee (Z \wedge Y);D)$ с левосторонним неоднородным цензурированием.

В § 3.3, используя модифицированные оценки Каца для $H(x)$ и $\{H(x;i), i \in \Im\}$ введённые в § 1.9 в $(Z;A)$-модели, построены следующие оценки для $F(x;i)=1-\exp(-\Lambda(x;i)), i \in \Im$:

$$F_{1n}^{\circ}(x;i)=1-\exp\left(-\Lambda_n^{\circ}(x;i)\right), F_{2n}(x;i)=1-\prod_{u \le x}\left(1-\Delta\Lambda_n^{\circ}(u;i)\right),$$

$$F_{3n}^{\circ}(x;i)=1-\left(1-\tilde{H}_n(x)\right)^{R_n^{\circ}(x;i)}, \text{ где } R_n^{\circ}(x;i)=\Lambda_n^{\circ}(x;i)\left[\Lambda_n^{\circ}(x)\right]^{-1},$$

$$\Lambda_n^{\circ}(x;i)=\int_{(-\infty;x]}\left[1-\tilde{H}_n(u-)\right]^{-1}d\,\tilde{H}_n(u;i),\ \Lambda_n^{\circ}(x)=\int_{(-\infty;x]}\left[1-\tilde{H}_n(u-)\right]^{-1}d\,\tilde{H}_n(u)$$

$$\tilde{H}_n(x)=1-\left(1-H_n^*(x)\right)I\left(H_n^*(x)\le 1\right),\tilde{H}_n(x;i)=1-\left(1-H_n^*(x;i)\right)I\left(H_n^*(x;i)\le 1\right)$$

,

$$\tilde{H}_n^*(x)=\sum_{i=1}^{k}H_n^*(x;i),H_n^*(x;i)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{\nu_n}I\left(Z_j\le x,\delta_j^{(i)}=1\right),\ i\in\Im .$$

Здесь $\{\nu_n,n\ge 1\}$-последовательность пуассоновских с.в. с $M\nu_n=n$ и независит от $\left\{\left(Z_j;\delta_j^{(1)},...,\delta_j^{(k)}\right),j\ge 1\right\}$. Свойства статистик Каца H_n^* и $\left\{H_n^*(\cdot;i),i\in\Im\right\}$, а также их модификаций $\tilde{H}_n$ и $\left\{\tilde{H}_n(\cdot;i),\,i\in\Im\right\}$ исследованы в § 1.9. Отметим, что статистику Каца в случае полной выборки исследовали M. Кас, M.Csörgö, W.Stute, S.Csörgö, Я. Ю. Никитин, А.А.Абдушукуров, Т.А.Азларов (подробнее см. §1.9). В случае неполных наблюдений задачи непараметрического оценивания с использованием статистик Каца впервые рассматривается в данной монографии.

Пусть $Q_{mn}(t)=\left(Q_{mn}^{(1)}(t_1),\dots,Q_{mn}^{(k)}(t_k)\right)$ и $Q_n(t)=\left(Q_n^{(1)}(t_1),...,Q_n^{(k)}(t_k)\right)$, где $Q_{mn}^{(i)}(x)=n^{1/2}\left(F_{mn}^{\circ}(x;i)-F(x;i)\right)$, $m=1,2,3,$ $Q_n^{(i)}(x)=\exp\left(-\Lambda(x;i)\right)\cdot\varphi_n^{(i)}(x)$ и гауссовские процессы $\varphi_n^{(i)}(x)$ определяются как

$$\varphi_n^{(i)}(x)=\int\limits_{(-\infty;x]}\frac{W_n^{(\circ)}(u)\,dH(u;i)}{\left(1-H(u)\right)^2}+\frac{W_n^{(i)}(x)}{1-H(x)}-\int\limits_{(-\infty;x]}\frac{W_n^{(i)}(u)\,dH(u)}{\left(1-H(u)\right)^2},\ i\in\Im .$$

Здесь $W_n^{(\circ)}(x),W_n^{(1)}(x),...,W_n^{(k)}(x)$ гауссовские процессы винеровского типа с нулевыми средними и с заданной ковариационной структурой.

Теорема 3.3.5. Пусть последовательность чисел $\{T_n,n\ge 1\}$ такова, что

$$\frac{n}{\log n}\ge\left(32\varepsilon w^2\vee\frac{r}{2w}b_n^{\,2}\vee\frac{3\varepsilon}{w}b_n^{\,2}\right),\ n\ge 2,$$

где $\varepsilon>0,\ r\ge 2, w=\left(16\left(1+e/3\right)\right)^{-1}$ и $b_n=\left(1-H(T_n)\right)^{-1}$. Тогда для всех $m=1,2,3$:

$$P\left(\sup_{t\in\left(-\infty;T_n\right]^k}\left\|Q_{mn}(t)-Q_n(t)\right\|^{(k)}>r_m(n)\right)\le k\cdot R_m\cdot n^{-\beta},$$

где $\beta=(r\wedge w\varepsilon)$, $r_1(n)=\left\{r(n)+\frac{1}{2}n^{-1/2}\left(r(n)+6b_n^2(\varepsilon\log)^{1/2}\right)^2\right\}$, $r_2(n)=r_3(n)=$ $=r_1(n)+b_n^2\cdot n^{-1/2}$, $r(n)=\Phi_\circ\cdot b_n^2\cdot n^{-1/2}\cdot\log n$, $\Phi_\circ=\Phi_\circ(\varepsilon,r)$, R_m -положительные постоянные. ■

Заметим, что аппроксимационные процессы в теореме 3.3.5 являются линейными функционалами от процессов винеровского типа. При этом скорость аппроксимации при $T_n \equiv T < \infty$ является оптимальной. В § 3.3 в случае, когда $(Z;A)$-модель является МПИ для функционалов $\{F(x;i), i \in \Im\}$ предложены параметрические-непараметрические степенные оценки с использованием модифицированных оценок Каца. Для них также установлен соответствующий результат аппроксимации (теорема 3.3.6).

В § 3.4 для функционалов $\{F(x;i) = 1 - \exp(-\Lambda(x;i)), i \in \Im\}$ в $(Z;A)$-модели предлагаются и исследуются три класса оценок, построенные с использованием байесовских оценок для распределений H и $\{H(\cdot;i), i \in \Im\}$. Эти оценки построены по методу Фергюсона [170], используя априорные распределения Дирихле [92]. Отметим, что в случае случайного цензурирования справа байесовские оценки с использованием распределения Дирихле построили и исследовали J.Rai, V.Susarla, J.Van Ryzin, T.S. Ferguson, E.G. Phadia, A.Földes, L. Rejtö и другие (см. обзор в [88], а также [182,188,230-232,234]). Рассмотренные этими авторами байесовские оценки являются по структуре сложными и обладают некоторыми преимуществами над оценкой Каплана-Мейера. Предлагаемые в § 3.4 оценки строго говоря не являются байесовскими в классическом смысле этого понятия. Нами получены оценки методам подстановки вместо распределений $H, \{H(\cdot;i) i \in \Im\}$ их байесовских оценок. Оценки, получаемые сочетанием байесовского метода с методом подстановки часто используются в статистике (см. [88]). Построенные нами оценки в $(Z;A)$-модели обладают некоторыми преимуществами по сравнению с их небайесовскими аналогами из § 1.3. Например, байесовские оценки сглаживают их эмпирических аналогов и крайний элемент $Z_{(n)}$ вариационного ряда не является «опасной» за счёт присутствия априорного представления через меры $\{\alpha^{(i)}, i \in \Im\}$, являющиеся параметром распределения Дирихле. В § 3.4 доказаны результаты типа ЗПЛ и сильной аппроксимации последовательностями гауссовских процессов для трёх классов оценок с оптимальными скоростями.

§ 3.5 посвящен вопросам аппроксимации СОП в $(Z;A)$-модели, установлением сильного варианта свойства ЛАН. Предельные свойства СОП в случае полной выборки исследованы И.А.Ибрагимовым и Р.З. Хасьмынским [72]. Нами установлены обобщенные аналоги этих результатов в $(Z;A)$-модели для СОП и её усеченного варианта через результаты сильной аппроксимации стохастическими интегралами от двухпараметрических винеровских процессов. Эти результаты могут быть использованы при исследовании ОМП и байесовского типа.

Глава 1. Базовые функционалы и их оценивание по неполным наблюдениям

§ 1.1. Об особенностях непараметрического статистического оценивания по неполным выборкам

В экспериментальных ситуациях, примеры которых перечислены во введении к книге, наблюдению будет доступна одномерная или многомерная неоднородная выборка, состоящая как из представляющих интерес с. в-н, так и от мешающих с. в-н. Основной характеристикой подлежащей к оцениванию по таким неполным данным является ф.р. (или ВеБР) продолжительности жизни одного или нескольких одновременно испытываемых объектов. Исследования в этом направлении показывают, что в отличие от случая полных наблюдений, в случае неполных наблюдений структуры предлагаемых статистических оценок зависят от степени сложности схемы наблюдений. Другими словами, для одной и той же оцениваемой характеристики могут быть предложены различные «модельные» оценки. Как правило, это сложные оценки содержащие в своей структуре также параметрические и непараметрические оценки. По степени сложности задачи непараметрического оценивания по неполным наблюдениям выдвигаются на передний план. Они обладают специфическими трудностями по сравнению с их аналогами для случая полных наблюдений. Естественно, по степени сложности и оригинальности решаемых задач математической статистики следует особо выделить модели случайного цензурирования. Так, хотя бы на прямой различают модели (однократного, многократного и неоднородного) случайного цензурирования с одной стороны (слева или справа), с двух сторон, интервалами наблюдения или ненаблюдения и т.д. Для демонстрации особенностей непараметрического оценивания на простых статистических моделях, рассмотрим оценивание ф.р. при полноте и случайном цензурировании справа наблюдений.

а) **Полная выборка.** Пусть $X^{(n)} = (X_1,...,X_n)$ независимая повторная выборка наблюдений над с.в. X с неизвестной ф.р. $F(x) = P(X \le x)$. Тогда апробированной непараметрической оценкой для $F(x)$ является э.ф.р.

$$F_n^э(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} I(X_k \le x), \quad x \in \overline{R}.$$

Э.ф.р. обладает рядом хороших свойств. Она несмещенная и достаточная ОМП. Более того, э.ф.р. является минимаксной оценкой в классе $\left\{\varphi_n(x) = a + \sum_{k=1}^{n} I(X_k \le x) b_k, \quad a, b_k \ge 0, \quad a + \sum_{k=1}^{n} b_k \le 1\right\}$ относительно функции потерь (см. [264]): $L(F;\varphi_n)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(F(x)-\varphi_n(x)\right)^2\left[F(x)(1-F(x))\right]^{-1}dW(x)$. При этом минимальный риск не зависит от выбора весовой функции $W(x)$. Известны также и многие асимптотические свойства (при $n\to\infty$) эмпирического процесса $\left\{e_n(x)=n^{\frac{1}{2}}\left(F_n^э(x)-F(x)\right),\quad x\in\overline{R}\right\}$. Перечислим ряд основных из этих свойств э.ф.р. (подробно см. § 1.9.), которые широко применяются в асимптотической теории статистического оценивания:

- равномерна сильная состоятельность (теорема Гливенко-Кантелли) [62,116,140,158,277,313];
- принцип инвариантности Дуба-Донскера [56,143,162,180];
- ЗПЛ в форме Чжуна-Смирнова [180], Кифера [62,229], Финкельштейна [162] и Штрассена [222,279];
- сильная аппроксимация Комлоша-Майора-Тушнади [233], различные её обобщения [124,143,180,145,267];
- результаты Чибисова [137], О'Рейли [260] и других о слабой сходимости в равномерной метрике с весом [142,276];
- асимптотическая оптимальность в смысле Берана [111];

и многие другие.

Ряд из перечисленных результатов обобщены на случай неоднородных, слабозависимых наблюдений, а также для выборок случайного объема [84,85,104,119,141,144,250,300]. Э.ф.р. от многомерных наблюдений, а также от случайных элементов со значениями в произвольных пространствах исследована в работах [59-61,103,162].

Отметим также фундаментальную роль э.ф.р. при построении и исследовании оценок для широкого класса функционалов от неизвестной ф.р.. Э.ф.р. очень полезна и в прикладных областях научных исследований. Теперь рассмотрим одну из моделей неполных данных на прямой.

б) **Случайное цензурирование справа.** Наблюдается следующая двумерная выборка объёма n: $C^{(n)}=\{(Z_1,\delta_1),...,(Z_n,\delta_n)\}$, где $Z_i=X_i\wedge Y_i$ и $\delta_i=I(Z_i=X_i)$. Интересующие нас с.в. $X_1,...,X_n$ с общей ф.р. $F(x)$ цензурируются справа с.в-нами $Y_1,...,Y_n$ с общей ф.р. $G(y)$. В этом случае X_i наблюдаются лишь в том случае, когда $\delta_i=1$ (т.е. $X_i\le Y_i$). Тогда числом наблюдаемых X_i будет с.в. $\nu_n=\delta_1+...+\delta_n$. Покажем, что э.ф.р., построенная лишь по наблюденным X_i не является состоятельной оценкой для F. Пусть обе совокупности $\{X_i\}$ и $\{Y_i\}$ взаимонезависимы и состоят из независимых с.в.. Определим с.в. $\psi(m)=\inf\{e:\ \nu_e=m\},\quad m\ge 1$. Полагая $Z_0^*=Z_0=-\infty$, определим с.в. $Z_m^*=Z_{\psi(m)}$ для $m=0,1,...,\nu_n$. Тогда Z_m^* является m-

нецензурированным наблюдением среди $Z_0, Z_1, ..., Z_n$. Образуем э.ф.р. со случайным объёмом

$$S_n(x) = \frac{1}{\nu_n} \sum_{m=0}^{\nu_n} I(Z_m^* \le x), \quad x \in \overline{R}. \tag{1.1.1}$$

Пусть ф.р. F и G и

$$S(x) = P(Z_i \le x / \delta_i = 1) = \int_{-\infty}^{x} (1 - G(u)) dF(u) \left(\int_{-\infty}^{\infty} (1 - G(u)) dF(u) \right)^{-1}, \quad x \in \overline{R}$$

-непрерывны. Согласно лемме 2.1 в [244] при $\nu_n \ge 1$ с.в. $Z_1^*, ..., Z_{\nu_n}^*$ -н.о.р. с ф.р. $S(x)$. Поскольку $\frac{\nu_n}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{P} \nu_0$, где ν_0-биномиальная с.в. с $M\nu_0 = \int_{-\infty}^{\infty} (1 - G(u)) dF(u)$, то согласно следствию из теоремы 2.6.1 в [180] (см. п.III в § 1.9 данной монографии) имеем $\sup_{x \in R} |S_n(x) - S(x)| \xrightarrow[n \to \infty]{P} 0$. Однако, $S \ne F$. Следовательно, э.ф.р. S_n, построенная только по наблюденным X_i (при $\nu_n \ge 1$) не является состоятельной оценкой F. В данной ситуации задача оценивания F по $C^{(n)}$ сложна. Построение хорошей оценки для F на базе неполных данных, которая обладала бы аналогичными свойствами, что и э.ф.р. $F_n^э$, было предметом исследования многих статистиков. Существующие в литературе оценки для F в вышеуказанной простой модели цензурирования имеют более сложную структуру чем S_n. Ряд новых оценок в более общих моделях предлагаются и исследуются в данной монографии. Они обобщают такие известные оценки как PL (-product-limit) оценку Каплана-Мейера, экспоненциальную оценку Альтшулера-Бреслоу, а также степенную оценку Абдушукурова-Ченга-Лина в простой МПИ.

Исследуемые в данной книге работе модели включают в себя как модели случайного цензурирования так и МКР. Следующие простые примеры показывают целесообразность рассмотрения именно таких смесей моделей.

Пример 1.1.1. Рассмотрим техническую систему с последовательной структурой, состоящую из k элементов (подсистем) (рис.1).

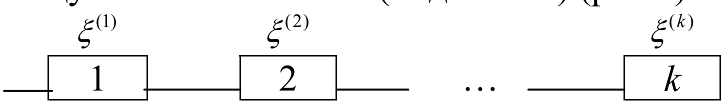


Рис. 1

Пусть $\xi^{(i)}$-ВрБР i-элемента. Тогда ВрБР всей системы является с.в. $\eta = \bigwedge_{i \in \Im} \xi^{(i)}$. Здесь с.в. $\xi^{(i)}$ наблюдаема лишь в случае $\eta = \xi^{(i)}$, а с.в.

$\eta^{(i)} = \underset{j\in\Im(i)}{\wedge}\xi^{(j)}$ цензурирует $\xi^{(i)}$ справа. Если нас интересуют все $\{\xi^{(i)},\ i\in\Im\}$, то мы имеем дело с МКР, где одновременно интересующие нас с.в. являются также и цензорами. В этом случае наблюдается случайно-цензурированная (конкурирующими рисками) выборка $k^{(n)} = \{(\eta_j, \delta_j^{(i)},...,\delta_j^{(k)}),\ j=1,...,n\}$, образованная в результате наблюдения за n однотипными элементами с последовательной структурой, где $\eta_j = \underset{i\in\Im}{\wedge}\xi_j^{(i)}$ и $\delta_j^{(i)} = I(\eta_j = \xi_j^{(i)})$. ■

Пример 1.1.2. Теперь рассмотрим систему с параллельной структурой (рис. 2) с ВрБР $\eta = \underset{i\in\Im}{\vee}\xi^{(i)}$, где $\xi^{(i)}$ цензурируется слева с.в. $\eta^{(i)} = \underset{j\in\Im(i)}{\vee}\xi^{(j)}$. В этом случае нас также могут интересовать все с.в. $\{\xi^{(i)},\ i\in\Im\}$. Выборка $k^{(n)}$ теперь состоит из с.в. $\eta_j = \underset{i\in\Im}{\vee}\xi_j^{(i)}$ и $\delta_j^{(i)} = I(\eta_j = \xi_j^{(i)}),\ j=1,...n,\ \ i\in\Im$. ■

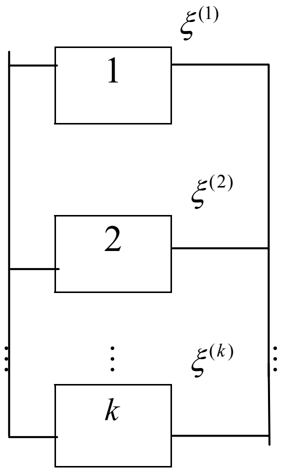


Рис. 2.

Эти два примера показывают, что цезурирование может произойти с.в-нами, зависящими от структуры наблюдаемого объекта. Однако, часто происходит, что вдобавок могут быть и внешние цензоры, мешающие наблюдению самого объекта, скажем некий интервал $[Y_1;Y_2]$ наблюдения или ненаблюдения, со случайными границами с неизвестной совместной ф.р. $Q(x;y) = P(Y_1 \le x; Y_2 \le y),\ \ (x;y)\in\overline{R}^2$. К тому же таких интервалов может быть несколько с различно распределенными границами. Такое цензурирование называется прогрессивным (многократным) неоднородным цензурированием. Такие схемы наблюдения могут встречаться в космических исследованиях. В настоящей книге за основу исследуемых моделей взята модель $(Z;A)$ (см. § 1.3). Предлагаемые и исследуемые оценки в этих моделях строятся при помощи базовых функционалов из § 1.2. ■

§ 1.2. Базовые функционалы и их свойства

Многие характеристики генеральной совокупности являются функционалами от неизвестной ф.р. и поэтому свойства статистических оценок этих характеристик существенно зависят от качества используемой оценки для ф.р.. Пример из § 1.1 показывает, что э.ф.р., построенная на основе лишь наблюденных с.в. и являющаяся по структуре как среднее арифметическое индикаторов не является хотя бы состоятельной оценкой в простой модели случайного цензурирования справа. В связи с этим возникает необходимость построения других оценок для ф.р., более сложных по структуре, чем э.ф.р..

Исследуемые в настоящей книге функционалы и их статистические оценки могут быть названы биометрическими («биометрия»-от лат. bios-жизнь, metron-мера [78, стр. 7]). К таким функционалам относится и ВеБР $1-F$. По свидетельству Б.Шейнина [55, стр.85] терминология «вероятный срок жизни» и методологическое использование распределения $1-F$ этой величины восходит ещё к работам Гюйгенса. Рассматриваемые в данной монографии функционалы представляют собой именно различные обобщенные варианты функции выживания (т.е. ВеБР) в моделях неполных наблюдений.

В настоящем параграфе будут исследованы и далее использованы при построении непараметрических оценок в основном три типа функционалов. Рассматриваемые функционалы и их непараметрические статистические оценки имеют структуру: - экспоненциального типа (обобщение оценок Альтшулера-Бреслоу); - множительного типа (обобщение PL-оценок Каплана-Мейера); - степенного (показательного) типа обобщение ACL оценок Абдушукурова-Ченга-Лина, основанные на отношении к.ф.и.. Первые два типа функционалов основываются на представление ф.р. через к.ф.и.. Такое представление впервые встречалось в работах [191,192]. Обозначим множество скачков $D_F(x)=\{s\in D(F): s\le x\}$распределения F на множестве $(-\infty;x]$.

Лемма 1.2.1. [191,192]. Пусть X-с.в. с ф.р. $F(x)=P(X\le x)$ и к.ф.и.

$$\Lambda_F(x)=\int\limits_{(-\infty;x]}\frac{dF(u)}{1-F(u-)}. \tag{1.2.1}$$

Тогда справедливо представление (при $0/0=0$)

$$1-F(x)=\exp\left(-\Lambda_F^c(x)\right)\prod_{u\in D_F(x)}\left(1-\Delta\Lambda_F(u)\right), \tag{1.2.2}$$

где $\Lambda_F^c(x)=\Lambda_F(x)-\sum\limits_{u\in D_F(x)}\Delta\Lambda_F(u)$ и бесконечное произведение сходится абсолютно. ■

Отметим, что функциональное представление (1.2.2) ф.р. F через к.ф.и. Λ_F получается также и как специальный случай экспоненциальной формулы Долеан-Дед для семимартингалов [98,246,315]. Гилл (см. [197]) отметил, что представление (1.2.2) в случае неотрицательной с.в. X эквивалентно следующему интеграл - произведению:

$$1 - F(x) = \mathop{\pi}_{u=0+}^{u=x} \left(1 - \Lambda_F(du)\right). \qquad (1.2.2)'$$

Напомним [64,65,194-197], что интеграл – произведение $\pi\,(1 + d\,\psi\,)$ cáglág функции ψ ограниченной вариации определяется следующим пределом:

$$\mathop{\pi}_{s=0+}^{s=x} \left(1 + d\psi(s)\right) = \lim_{\substack{\max \\ 0 \le i \le m} |s_i - s_{i-1}| \to 0} \prod \left(1 + \psi(s_i) - \psi(s_{i-1})\right),$$

где $0 = s_0 < s_1 < ... < s_m = x$ - разбиение $(0; x]$.

Далее для экспоненциального представления (1.2.2) введём обозначение $1 - F(x) = \mathcal{E}(\Lambda_F)(x)$. Представление (1.2.2) показывает роль к.ф.и. (1.2.1) при исследовании свойств ф.р.. С учётом этого приведём некоторые свойства к.ф.и. [191]. Пусть $T_F = \inf\{x \in R : F(x) = 1\}$. Для $x \in [T_F, \infty)$, $F(x)$ и $\Lambda_F(x)$ постоянны. Если $F(T_F -) < 1$, то $\Lambda_F(T_F) < \infty$. Нетрудно видеть, что

$$\Delta\Lambda_F(x) = \begin{cases} \dfrac{\Delta F(x)}{1 - F(x-)}, & \textit{если} \quad F(x-) < 1, \\ 0, & \textit{в противном случае.} \end{cases}$$

Следовательно, $\Delta\Lambda_F(T_F) = 1$ или 0, в зависимости от того, $T_F < \infty$ или $T_F = \infty$. Отметим, что Λ_F - неубывающая и непрерывная справа функция. Если же $F(T_F -) = 1$, то $\lim_{x \uparrow T_F} \Lambda_F(T_F -) = \infty$. Как отметил Гилл [191], правая часть представления (1.2.2) является непрерывным функционалом от F и Λ_F. Дискретную часть правой стороны равенства (1.2.2) можно выразить как

$$\prod_{u \in D_F(x)} (1 - \Delta\Lambda_F(u)) = \prod_{u \in D_F(x)} \left(\frac{1 - F(u)}{1 - F(u-)}\right) = \exp\left\{\sum_{u \in D_F(x)} \Delta \log(1 - F(u))\right\}.$$

Тогда (1.2.2) примет вид

$$1 - F(x) = \mathcal{E}\ (\Lambda_F)(x) = \exp\left(\mathrm{A}_F^c(x) + \mathrm{A}_F^d(x)\right), \qquad (1.2.3)$$

где

$$\mathrm{A}_F^c(x) = -\int_{(-\infty; x]} I\{u \in C(F) \cap (-\infty; T_F]\} \frac{dF(u)}{1 - F(u)},$$

$$\mathrm{A}_F^d(x) = \sum_{u \in D(F)} I\{u \in (-\infty; x] \cap (-\infty; T_F]\} \cdot \Delta \log(1 - F(u)),$$

- соответственно дискретная и непрерывная компоненты $-\Lambda_F(x)$. В частности, если F дискретное распределение, то из (1.2.2)

$$1 - F(x) = \prod_{u \in D_F(x)} (1 - \Delta\Lambda_F(u)), \qquad (1.2.4)$$

если же F непрерывное, то $\Lambda_F(x) = -\log(1 - F(x))$ и

$$1 - F(x) = \exp(-\Lambda_F(x)). \qquad (1.2.5)$$

Из (1.2.4) для э.ф.р. $F_n^э$ будем иметь также и представление множительного типа

$$1 - F_n^э(x) = \prod_{u \in D_{F_n^э}(x)} \left(1 - \frac{\Delta F_n^э(u)}{1 - F_n^э(u-)}\right) = \exp\left\{\sum_{u \in D_{F_n^э}(x)} \log\left(\frac{1 - F_n^э(u)}{1 - F_n^э(u-)}\right)\right\}. \qquad (1.2.6)$$

Учитывая представление (1.2.5) для F по полной выборке $X^{(n)}$ кроме э.ф.р. $F_n^э$ можно рассматривать и оценку $1 - F_n^*(x) = \exp(-\Lambda_F^{(n)}(x))$, где $\Lambda_F^{(n)}(x) = \int\limits_{(-\infty;x]} \frac{dF_n^э(u)}{1 - F_n^э(u-)}$ - оценка для к.ф.и. Λ_F. Однако, F_n^* практически не используется в статистике, так как $F_n^э$ проще и лучше чем F_n^*. С другой стороны, экспоненциальная оценка Альтшулера – Бреслоу, являющаяся обобщённым аналогом F_n^* при случайном цензурировании справа считается одной из хороших оценок для F, по видимому ввиду отсутствия других, более простых оценок.

Замечание 1.2.2. В работах [191,196,315] показано, что ф.р. F, удовлетворяющая представлению (1.2.2) является единственным решением интегрального уравнения $F(x) = \int\limits_{(-\infty;x]} (1 - F(u-)) d\Lambda_F(u)$. ■

Заметим, что это уравнение является уравнением типа Вольтерра. В лемме 1.2.1 далее будет установлено обобщение этого факта для более общих функционалов, включающих в себя и ф.р. F.

Для построения непараметрических оценок для ф.р. по неполным выборкам нами будут рассмотрены функционалы, являющиеся обобщенными аналогами правой части равенства (1.2.2). С целью построения этих функционалов, введём $\mathcal{Y} = \{(G_1, ..., G_k)\}$ - класс функций $\{G_i(x),\ (x;i) \in \overline{R} \times \Im\}$, где G_i ограничены, не убывают, непрерывны справа на $\overline{R}$ и $G_i(-\infty) = 0$ для всех $i \in \Im$. Пусть $G(x) = \sum_{i=1}^{k} G_i(x), \quad x \in \overline{R}$,

$$L_i(x) = \int\limits_{(-\infty;x]} \frac{dG_i(u)}{G(\infty) - G(u-)},\ (x;i) \in \overline{R} \times \Im, \quad \text{и}$$

$$L(x) = \int\limits_{(-\infty;x]} \frac{dG(u)}{G(\infty) - G(u-)} = \sum_{i=1}^{k} L_i(x),\ x \in \overline{R}.$$

Заметим, что L_i и L представляют собой обобщения к.ф.и. и являются неубывающими и непрерывными справа функциями, $\Delta L_i(x) \le 1$, $\Delta L(x) \le 1$, $(x;i) \in \overline{R} \times \Im$. Для этих функций также имеет место следующее представление Жордана для cádlág функций ограниченной вариации: $L(x) = L^c(x) + L^d(x)$, $L_i(x) = L_i^c(x) + L_i^d(x)$, $i \in \Im$, где

$$L_i^c(x) = \int\limits_{(-\infty;x]} \frac{dG_i^c(u)}{G(\infty) - G(u-)},$$

$$L_i^d(x) = \sum_{u \in D_{G_i}(x)} \Delta L_i(u) = \sum_{u \le x} \frac{\Delta G_i(u)}{G(\infty) - G(u-)},$$

При этом $\Delta G_i(x) \le G(\infty) - G(x-)$ и $\Delta G(x) \le G(\infty) - G(x-)$. Введём в рассмотрение следующие функционалы на $\mathcal{Y}$:

$$\Phi_i(G_1,...,G_k)(x) = \exp\left(-L_i^c(x)\right) \prod_{u \le x} (1 - \Delta L_i(u)),\ (x;i) \in \overline{R} \times \Im. \tag{1.2.7}$$

Функционалы (1.2.7) при $k = 2$ рассмотрены Гиллом [192]. Согласно лемме 2 в [192], функционалы Φ_i непрерывны по всем G_j и L_j ($j \in \Im$) при $x \le T_G = \sup\{x \in \overline{R} : G(x-) < G(\infty)\}$ и непрерывны справа, неотрицательны, не возрастают по $x \in \overline{R}$ и $\Phi_i(\bullet)(-\infty) = 1$. Функционалы (1.2.7) далее обозначим также через $\mathcal{E}(L_i)(x)$. Для $a \ge -\infty$ введём следующую усеченную версию при $x \ge a$ и $i \in \Im$:

$$\Phi_i(G_1,...,G_k)(x) = \Phi_i(G_1,...,G_k)(a) \cdot \exp\left\{-\left(L_i^c(x) - L_i^c(a)\right)\right\} \cdot \prod_{a < u \le x} (1 - \Delta L_i(u)). \tag{1.2.8}$$

Рассмотрим также и следующие неоднородные интегральные уравнения типа Вольтерра:

$$\Phi_i(G_1,...,G_k)(x) = \Phi_i(G_1,...,G_k)(a) - \int\limits_{(a;x]} \Phi_i(G_1,...,G_k)(u-) dL_i(u), \quad (x;i) \in [a;\infty) \times \Im. \tag{1.2.9}$$

Покажем, что интегральное уравнение (1.2.9) при каждом $i \in \Im$ имеет единственное решение, представляемое в виде (1.2.8). При этом нами будут использованы доказательства лемм 18.7 и 18.8 из [246] и предложения А.4.1 из [191] (см. также [299]).

Лемма 1.2.3. При заданном L_i интегральное уравнение (1.2.9) имеет единственное локально – ограниченное решение Φ_i, представляемое в виде (1.2.8). ■

Доказательство леммы 1.2.3. Используем следующую формулу интегрирования по частям в интеграле Лебега – Стилтьеса для двух непрерывных справа и имеющих ограниченные вариации на $\overline{R}$ функций $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$:

$$Q_1(x)\cdot Q_2(x) = Q_1(a)\cdot Q_2(a) + \int\limits_{(a;x]} Q_1(u-)dQ_2(u) + \int\limits_{(a;x]} Q_2(u)dQ_1(u), \quad x \ge a \ge -\infty; \qquad (1.2.10)$$

что эквивалентно

$$d\big(Q_1(x)\cdot Q_2(x)\big) = Q_1(x-)dQ_2(x) + Q_2(x)dQ_1(x). \qquad (1.2.10)'$$

Из [191, стр. 154] при $m = 1,2,...$ имеем

$$mQ_1^{m-1}(u-)dQ_1(u) \le d\big(Q_1^m(u)\big) \le mQ_1^{m-1}(u)dQ_1(u). \qquad (1.2.11)$$

Пусть при каждом $i \in \Im$:

$$Q_1(x) = Q_{1i}(x) = \Phi_i(G_1,...,G_k)(a)\prod_{a<u\le x}\big(1-\Delta L_i(u)\big), \qquad Q_2(x) = Q_{2i}(x) = \exp\big(L_i^c(x) - L_i^c(a)\big).$$

Тогда из (1.2.8) и (1.2.10) получаем следующую цепочку равенств:

$$\Phi_i(G_1,...,G_k)(x) = \Phi_i(G_1,...,G_k)(a) - \int\limits_{(a;x]} Q_{1i}(u-)Q_{2i}(u)dL_i^c(u) + \sum_{a<u\le x} Q_{2i}(u-)\big(Q_{1i}(u) - Q_{1i}(u-)\big) =$$

$$= \Phi_i(G_1,...,G_k)(a) - \int\limits_{(a;x]} Q_{1i}(u-)Q_{2i}(u)dL_i^c(u) - \sum_{a<u\le x} Q_{1i}(u-)Q_{2i}(u)\Delta L_i(u) = \Phi_i(G_1,...,G_k)(a) -$$

$$- \int\limits_{(a;x]} Q_{1i}(u-)Q_{2i}(u)dL_i(u) = \Phi_i(G_1,...,G_k)(a) - \int\limits_{(a;x]} \Phi_i(G_1,...,G_k)(u-)dL_i(u),$$

где использовано также и равенство $Q_{2i}(u) = Q_{2i}(u-)$, $(u;i) \in (a;x] \times \Im$. Отсюда получается правая часть уравнения (1.2.9). Теперь покажем единственность решения. Пусть $\Phi_i^*(\bullet)(x),\ x \ge a$,- другое, отличное от $\Phi_i(\bullet)(x)$ решение (1.2.9).

Положим $\widetilde{\Phi}_i(\bullet)(x) = \Phi_i(\bullet)(x) - \Phi_i^*(\bullet)(x),\ x \ge a$. Тогда из (1.2.9) при $\alpha_i(x) = \sup\limits_{a<u\le x}\big|\widetilde{\Phi}_i(\bullet)(u)\big|$, для всех $u \in (a;x]$ будем иметь неравенство

$$\big|\widetilde{\Phi}_i(\bullet)(u)\big| \le \int\limits_{(a;u]} \big|\widetilde{\Phi}_i(\bullet)(s-)\big| dL_i(s) \le \alpha_i(x)(L_i(u) - L_i(a)) \le \alpha_i(x)L_i(u).$$

Используя верхнюю границу в последнем неравенстве под интегралом для $\widetilde{\Phi}_i(\bullet)(s-)$, получаем оценку

$$\left|\widetilde{\Phi}_i(\bullet)(u)\right| \le \int\limits_{(a;u]} \alpha_i(x) L_i(s-) dL_i(s) \le \alpha_i(x) \int\limits_{(a;u]} L_i(s) dL_i(s) =$$

$$= \frac{1}{2}\alpha_i(x)(L_i^2(u) - L_i^2(a)) \le \frac{1}{2}\alpha_i(x) L_i^2(u),$$

где воспользовались также и неравенством (1.12.11) при $m=2$. Повторяя эту процедуру m раз приходим к последовательности неравенств $\left|\widetilde{\Phi}_i(\bullet)(u)\right| \le \frac{1}{m!}\alpha_i(x) L_i^m(u),\ \ m = 1,2,\ldots;\ \ u \in (a;x]$. Переходя к пределу при $m \to \infty$, получаем, что $\widetilde{\Phi}_i = \Phi_i - \Phi_i^* \equiv 0$, что означает единственность решения Φ_i уравнения (1.2.9). Лемма 1.2.3 доказана. ■

Согласно (1.2.7) следующее представление функционала Φ_i является обобщенным аналогом (1.2.3):

$$\Phi_i(G_1,\ldots,G_k)(x) = \mathcal{E}(L^{(i)})(x) = \exp(A_i^c(x) + A_i^d(x)), \qquad (1.2.7)'$$

где

$$A_i^c(x) = -\int\limits_{(-\infty;x]} I\{u \in C(G_i) \cap (-\infty;T_G]\} dL_i(u),$$

$$A_i^d(x) = \sum_{u \in D(G_i)} I\{u \in (-\infty;x] \cap (-\infty;T_G]\} \cdot \log(1 - \Delta L_i(u)).$$

Отметим, что Φ_i не являются единственными функционалами, исследуемыми и используемыми нами в данной монографии. На $\mathcal{Y}$ рассмотрим ещё одно семейство функционалов, используемых далее для построения непараметрических оценок в различных моделях неполных наблюдений. Впервые функционалы такой степенной структуры в моделях случайного цензурирования справа (включая и МПИ) для построения непараметрических оценок для ф.р. были использованы автором настоящей книги [1-3,15,16,17,18,26,31,32,38,46]. Для $(G_1,\ldots,G_k) \in \mathcal{Y}$ определим класс функционалов степенной структуры

$$\Psi_i(G_1,\ldots,G_k)(x) = [G(\infty) - G(x-)]^{R^{(i)}(x)}, \quad (x;i) \in \overline{R} \times \Im, \qquad (1.2.12)$$

где $R^{(i)}(x) = L_i(x)/L(x)$ - функция отношения к.ф.и. (рисков) определена при $\infty/\infty = 1$. Легко видеть, что для всех $(x;i) \in \overline{R} \times \Im$: $0 \le R^{(i)}(x) \le 1,\ \sum_{i=1}^{k} R^{(i)}(x) = 1$. Отсюда следует, что

$$\prod_{i=1}^{k} \Psi_i(G_1,\ldots,G_k)(x) = G(\infty) - G(x-), \quad x \in \overline{R}. \qquad (1.2.13)$$

Свойства функционалов Ψ_i будут установлены на носителе $Sp(G) = [\tau_G; T_G]$ функции $G(x)$, где $\tau_G = \inf\{x \in \overline{R} :\ G(x) > 0\}$ и $T_G = \sup\{x \in \overline{R} :\ G(x-) < G(\infty)\}$.

Далее предполагается, что $Sp(G) \neq \varnothing$. Для функции $a(x)$, пусть $\|a(x)\|_{\tau_G}^{T_G} = \sup_{x \in Sp(G)} |a(x)|$.

Лемма 1.2.4. Для любых $(G_1,...,G_k) \in \mathcal{Y}$ и $(x;i) \in Sp(G) \times \Im$:

а). $0 < \Psi_i(G_1,...,G_k)(x) \leq 1 \vee G(\infty)$;

б). Ψ_i является непрерывными функционалами по $G_1,...,G_k$ G, L, L_i и $R^{(i)}$;

Доказательство леммы 1.2.4. Левая часть (а) очевидна. Если $G(\infty) - G(x-) \leq 1$, то имеет место и правая часть, так как $\Psi_i \leq 1$. При $G(\infty) - G(x-) > 1$ для всех $(x;i) \in Sp(G) \times \Im$: $\Psi_i(\bullet)(x) \leq G(\infty) - G(x-) \leq G(\infty) = \Psi_i(\bullet)(x)\big|_{x=-\infty}$.

Докажем (б). Фиксируя $(G_1,...,G_k) \in \mathcal{Y}$, выбираем $(G^*{}_1,...,G^*{}_k) \in \mathcal{Y}$ так, чтобы при $G(\infty) - G(T_G-) = \delta > 0$ и $0 < \varepsilon < \dfrac{\delta}{2k}$ имели места неравенства $\sup_{x \in \overline{R}} \left| G_i(x) - G_i^*(x) \right| < \varepsilon, \quad i \in \Im$. Тогда справедливы соотношения:

$$\sup_{x \in \overline{R}} \left| G(x) - G^*(x) \right| \leq \sum_{i=1}^{k} \sup_{x \in \overline{R}} \left| G_i(x) - G_i^*(x) \right| < k\varepsilon;$$

$$G^*(\infty) - G^*(T_G-) = (G^*(\infty) - G(\infty)) - (G^*(T_G-) - G(T_G-)) + (G(\infty) - G(T_G-)) > \delta - 2k\varepsilon > 0;$$

$$G^*(\tau_G) \leq \left| G^*(\tau_G) - G(\tau_G) \right| + G(\tau_G) < k\varepsilon + G(\tau_G);$$

$$G^*(\infty) - G^*(\tau_G-) = (G^*(\infty) - G^*(T_G-)) - (G^*(T_G-) - G^*(\tau_G-)) > (G^*(\infty) - G^*(T_G-)) > \delta - 2k\varepsilon > 0.$$

С учетом свойств (а) функционалов Ψ_i, нам достаточно доказать непрерывность $\log \Psi_i$. Пусть $\Psi_i^* = \Psi_i(G_1^*,...,G_k^*)(\bullet), \ i \in \Im$. Тогда

$$\left\| \log \Psi_i - \log \Psi_i^* \right\|_{\tau_G}^{T_G} \leq \left\| R^{(i)}(x) - R^{(i)*}(x) \right\|_{\tau_G}^{T_G} \cdot \left\| \log(G(\infty) - G(x-)) \right\|_{\tau_G}^{T_G} +$$
$$+ \left\| R^{(i)}(x) \right\|_{\tau_G}^{T_G} \cdot \left\| \log(G(\infty) - G(x-)) - \log(G^*(\infty) - G^*(x-)) \right\|_{\tau_G}^{T_G}.$$

Теперь используем неравенство $\left| \log a - \log b \right| = \int_{a \wedge b}^{a \vee b} \dfrac{du}{u} \leq \dfrac{|a-b|}{a \wedge b}$, а также и следующие

$$\left\| R^{(i)}(x) - R^{(i)*}(x) \right\|_{\tau_G}^{T_G} \leq \left\| \frac{L_i(x) - L_i^*(x)}{L(x)} \right\|_{\tau_G}^{T_G} + \left\| L_i(x) \right\|_{\tau_G}^{T_G} \cdot \left\| \frac{L(x) - L^*(x)}{L(x) L^*(x)} \right\|_{\tau_G}^{T_G};$$

$$\left[\left\| L(x) \right\|_{\tau_G}^{T_G} \right]^{-1} \leq \left(\frac{G(\tau_G)}{G(\infty) - G(\tau_G-)} \right)^{-1} < \frac{\delta + \left(G(T_G) - G(\tau_G-) \right)}{G(\tau_G)};$$

$$\left[\left\|L^*(x)\right\|_{\tau_G}^{T_G}\right]^{-1} \le \left(\frac{G^*(\tau_G)}{G^*(\infty)-G^*(\tau_G-)}\right)^{-1} < \frac{\delta-2k}{G(\tau_G)-k\varepsilon};$$

$$\left[\left\|L_i^*(x)\right\|_{\tau_G}^{T_G}\right]^{-1} \le \left(\frac{G_i^*(T_G)}{G^*(\infty)-G^*(T_G-)}\right)^{-1} < \frac{G(T_G)+\varepsilon}{\delta-2k\varepsilon};$$

$$\left\|\log(G(\infty)-G(x-))\right\|_{\tau_G}^{T_G} \le \left|\log(G(\infty)-G(T_G-))\right|, \qquad \left\|R^{(i)*}(x)\right\|_{\tau_G}^{T_G} \le 1.$$

Тогда получаем

$$\left\|\log\Psi_i - \log\Psi_i^*\right\|_{\tau_G}^{T_G} < \left\{\left\|L_i(x)-L_i^*(x)\right\|_{\tau_G}^{T_G} \cdot \frac{\delta-(G(T_G)-G(\tau_G-))}{G(\tau_G)} + \frac{(G(T_G)+\varepsilon)(\delta+(G(T_G)-G(\tau_G-)))}{(\delta-2k\varepsilon)G(\tau_G)}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\frac{(\delta-2k\varepsilon)}{(G(\tau_G)-k\varepsilon)}\cdot\left\|L(x)-L^*(x)\right\|_{\tau_G}^{T_G}\right\}\cdot\left|\log(G(\infty)-G(T_G-))\right| + \omega(G;G^*);$$

где

$$\omega(G;G^*) = \frac{\left|G(\infty)-G^*(\infty)\right| + \left\|G(x-)-G^*(x-)\right\|_{\tau_G}^{T_G}}{(G(\infty)-G(T_G-))\wedge(G^*(\infty)-G^*(T_G-))} < \frac{2k\varepsilon}{(\delta\wedge(\delta-2k\varepsilon))} < \frac{2k\varepsilon}{\delta-2k\varepsilon};$$

Непрерывность отображения $(G_1,...,G_k)\to L$ показана в доказательстве леммы 2 в работе [192]. Аналогично устанавливается и непрерывность $(G_1,...,G_k)\to L_i$, $i\in\Im$. Следовательно, для ранее определённого $\varepsilon>0$ существуют также числа $\varepsilon_m=\varepsilon_m(\varepsilon)>0,\ m=1,2$, такие, что $\left\|L(x)-L^*(x)\right\|_{\tau_G}^{T_G}<\varepsilon_1$, $\left\|L_i(x)-L_i^*(x)\right\|_{\tau_G}^{T_G}<\varepsilon_2$, $i\in\Im$, причём $\varepsilon_m\to 0,\ m=1,2$ при $\varepsilon\to 0$. Таким образом, $\left\|\log\Psi_i-\log\Psi_i^*\right\|_{\tau_G}^{T_G}=O(\max(\varepsilon,\varepsilon_1,\varepsilon_2))$, что указывает на справедливость и части (б). Лемма 1.2.4 доказана. ■

Остановимся теперь на некоторых специальных вариантах функционалов Ψ_i, $i\in\Im$. Для $x_1,x_2\in Sp(H)$ таких, что $x_1\le x_2$ рассмотрим при каждом $i\in\Im$ отношения:

$$\frac{\Psi_i(G_1,...,G_k)(x_2)}{\Psi_i(G_1,...,G_k)(x_1)} = (G(\infty)-G(x_2-))^{\chi^{(i)}(x_1;x_2)}\left(1-\frac{(G(x_2-)-G(x_1-))}{G(\infty)-G(x_1-)}\right)^{R^{(i)}(x_1)}, \qquad (1.2.14)$$

где $\chi^{(i)}(x_1;x_2)=R^{(i)}(x_2)-R^{(i)}(x_1)=\dfrac{1}{L(x_1)}\big((L_i(x_2)-L_i(x_1))-R^{(i)}(x_2)(L(x_2)-L(x_1))\big)$.

Замечание 1.2.5. Легко видеть, что $L(-\infty)=L_i(-\infty)=0$, а также $L, L_i, i\in\Im$, - непрерывны справа и неубывают по x. Из (1.2.14) видно, что непрерывность Ψ_i по x следует из соответствующих свойств G, L и L_i:

$$\left|\log\left(\frac{\Psi_i(G_i,...,G_k)(x_2)}{\Psi_i(G_i,...,G_k)(x_1)}\right)\right|\leq\frac{1}{L(x_1)}\left(\left|L_i(x_2)-L_i(x_1)\right|+\left|L(x_2)-L(x_1)\right|\cdot\left|\log(G(\infty)-G(x_2-))\right|\right).$$

В частности, при $x_1=x-,\ x_2=x+\in Sp(H)$ из (1.2.14) получаем

$$\log\left(\frac{\Psi_i(G_1,...,G_k)(x+)}{\Psi_i(G_1,...,G_k)(x-)}\right)=\frac{\log(G(\infty)-G(x-))}{L(x-)(G(\infty)-G(x-))}\cdot\left(\Delta G_i(x)-R^{(i)}(x)\Delta G(x)\right).$$

Отсюда $D(\Psi_i)=D(G_i)\cup D(G)$, $i\in\Im$. Очевидно, в случае непрерывности всех $\{G_i,\ i\in\Im\}$: $C(\Psi_i)=C(G)$, $i\in\Im$. ■

Замечание 1.2.6. а). В формулах функционалов $\{\Psi_i,\ i\in\Im\}$ функции $\{G_j,\ j\in\Im\}$ заменим на нормированные функции $\{G_j^0(x)=G_j(x)/G(\infty),\ j\in\Im\}$. Тогда соответствующие функционалы

$$\Psi_i^0\left(G_1^0,...,G_k^0\right)(x)=\left[1-G^0(x-)\right]^{R_0^{(i)}(x)},\quad (x;i)\in\overline{R}\times\Im, \tag{1.2.15}$$

сохраняют все свойства Ψ_i. При этом ф.р. $G^0(x)=G(x)/G(\infty)$ и субраспределения $G_j^0(x)$ $\left(G_j^0(\infty)\leq 1\right)$ $j\in\Im$, непрерывны справа, $R_0^{(i)}(x)=L_i^0(x)/L^0(x)$, $L^0(x)=\sum_{i=1}^{k}L_i^0(x)=\int_{(-\infty;x]}\frac{dG^0(u)}{1-G^0(u-)}$, $L_i^0(x)=\int_{(-\infty;x]}\frac{dG_i^0(u)}{1-G^0(u-)}$.

Функционалы (1.2.15) далее будут играть ключевую роль при построении и исследовании степенных оценок функций выживания в различных моделях неполных наблюдений.

б) Остановимся на одном из важных частных случаев. Если существуют числа $0<\alpha_i<1$, такие, что $\alpha_1+...+\alpha_k=1$ и для $i\in\Im$ и всех $x\in\overline{R}$: $G_i(x)=\alpha_i G(x)$, то $R^{(i)}(x)\equiv\alpha_i,\ x\in\overline{R},\ i\in\Im$. В этом случае, согласно (1.2.14)

$$\log\left(\frac{\Psi_i(G_1,...,G_k)(x_2)}{\Psi_i(G_1,...,G_k)(x_1)}\right)=\alpha_i\cdot(\log(G(\infty)-G(x_2-))-\log(G(\infty)-G(x_1-))),$$

следовательно свойства Ψ_i будут определятся соответствующими свойствами функций G. Следующий вариант представления (1.2.15) в данном случае также будет полезным далее неоднократно:

$$\Psi_i^0(G^0)(x)=(1-G^0(x-))^{\alpha_i},\ x\in\overline{R},\ i\in\Im; \tag{1.2.16}$$

в) Рассмотрим ещё один частный случай, когда в (1.2.15) $G_1^0 = F$ - непрерывная справа ф.р. и для всех $m \in \Im(1): G_m^0 \equiv 0$. Тогда $\Psi_i(F,0,...,0)(x) = 1 - F(x-)$, $(x;i) \in \overline{R} \times \Im$, в то время как $\Phi_i(F,0,...,0)(x) = 1 - F(x)$, $(x;i) \in \overline{R} \times \Im$, т.е. Ψ_i и Φ_i могут быть трактованы как ВеБР на $(-\infty;x)$ и $(-\infty;x]$ соответственно. Это ещё раз подтверждает различие между функционалами Ψ_i и Φ_i и в этом частном случае. ■

Помимо вышерассмотренных функционалов, введём в также и следующий:

$$\Phi_0(G)(x) = \exp(-L(x)) = \exp(-L^c(x))\prod_{u \le x}(1 - \Delta L(u)).$$

Пусть $L^+(x) = \int\limits_{(-\infty;x]} \frac{dG(u)}{G(\infty) - G(u)}$,

$$L_i^+(x) = \int\limits_{(-\infty;x]} \frac{dG_i^c(u)}{G(\infty) - G(u-)} + \sum_{u \le x} \frac{\Delta G_i(u)}{G(\infty) - G(u-) - \Delta G_i(u)}, \quad i \in \Im. \tag{1.2.17}$$

Очевидно, если все $\{G_i,\ i \in \Im\}$, а следовательно и G непрерывны, то

$$L_i^+(x) = L_i(x) = \int\limits_{(-\infty;x]} \frac{dG_i(u)}{G(\infty) - G(u)}, \quad i \in \Im, \tag{1.2.18}$$

и следовательно $L_1^+(x) + ... + L_k^+(x) = L^+(x)$, для $x \in Sp(G)$:

$$\Phi_0(G) = \prod_{i=1}^k \Phi_i(G_1,...G_k)(x) = \prod_{i=1}^k \Psi_i(G_1,...G_k)(x) = G(\infty) - G(x). \tag{1.2.19}$$

В конце настоящего параграфа докажем одно утверждение, в котором установлены двусторонние неравенства для функционалов Φ_i и Φ_0.

Лемма 1.2.7. Для всех $(G_1,...,G_k) \in \mathcal{Y}$, $x \in Sp(G)$ и $i \in \Im$ справедливы неравенства:

$$\begin{gathered} \exp\left(-L_i^+(x)\right) \le \Phi_i(G_1,...,G_k)(x) \le \exp(-L_i(x)), \quad i \in \Im, \\ \exp\left(-L^+(x)\right) \le \Phi_0(G)(x) \le \exp(-L(x)), \end{gathered} \tag{1.2.20}$$

где L^+ и L_i^+ определены формулами (1.2.17).

Доказательство леммы 1.2.7. Используем элементарные неравенства

$$C \le -log(1-C) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{C^m}{m!} \le \frac{C}{1-C},\ 0 \le C < 1. \qquad (1.2.21)$$

Положим $C=\Delta L_i(u)/(G(\infty)-G(u-)$, где $u \in Sp(G)$. Тогда $0 \le C < 1$ и согласно (1.2.21)

$$L_i(x) = \int_{(-\infty:x]} \frac{dG_i^c(u)}{G(\infty)-G(u-)} + \sum_{u \le x} \frac{\Delta G_i(u)}{G(\infty)-G(u-)} \le \int_{(-\infty:x]} \frac{dG_i^c(u)}{G(\infty)-G(u-)} -$$

$$-\sum_{u \le x} \log\left(1 - \frac{\Delta G_i(u)}{G(\infty)-G(u-)}\right) = -log\Phi_i(G_1,\dots,G_\kappa)(x) \le \int_{(-\infty:x]} \frac{dG_i(u)}{G(\infty)-G(u-)} +$$

$$+\sum_{u \le x}\left(\frac{\Delta G_i(u)}{G(\infty)-G(u-)} \cdot \left(1 - \frac{\Delta G_i(u)}{G(\infty)-G(u-)}\right)^{-1}\right) = L_i^+(x),$$

тем самым верхние неравенства в (1.2.20) установлены. Нижние доказываются вполне аналогично. Лемма 1.2.7 доказана. ■

Следствие 1.2.8. Из (1.2.20) следует, что в случае непрерывности всех $\{G_i,\ i \in \Im\}$: $\Psi_i = \Phi_i$, $i \in \Im$. В этом случае в неравенствах (1.2.20) достигаются равенства с обеих сторон. Кроме того, если непрерывна только функция G (но не обязательно все G_i, $i \in \Im$), то согласно верхнему правостороннему неравенству:

$$\Psi_i(G_1,\dots,G_k)(x) = \exp\{\log \Psi_i(G_1,\dots,G_k)(x)\} = \exp\left\{-\int_{(-\infty;x]} \frac{dG_i(u)}{G(\infty)-G(u)}\right\} \ge \Phi_i(G_1,\dots,G_k)(x) =$$

$$= \exp\left\{-\int_{(-\infty;x]} \frac{dG_i^c(u)}{G(\infty)-G(u)}\right\} \cdot \prod_{u \le x}\left(1 - \frac{\Delta G_i(u)}{G(\infty)-G(u)}\right). \quad ■$$

Функционалы Φ_i, Ψ_i и $\exp(-L_i)$ по ходу изложения материала настоящей книги будут применены для построения непараметрических оценок в различных моделях неполных наблюдений, включающих в себя как частный случай и модель полных наблюдений. ■

§ 1.3. Основные модели неполных данных. Представления для функционалов от распределений

В настоящем параграфе будут приведены некоторые полезные свойства функционалов от распределений в моделях неполных наблюдений. «Отправной точкой» при построении моделей неполных наблюдений является МКР из работ [123, 125, 127, 152, 212]. Для удобства изложения материала книги введём обозначения для моделей.

I. Модель *(Z;A)*. Следуя [123, 125, 127] опишем МКР. На вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ рассмотрим с.в. Z, с непрерывной справа ф.р. $H(x)=P(Z \le x)$, $x \in \overline{R}$. Для фиксированного натурального числа k, пусть $\mathrm{A}^{(1)}, \mathrm{A}^{(2)}, \ldots, \mathrm{A}^{(k)}$ - попарно несовместные события (или хотя бы $P\left(A^{(i)} \cap A^{(j)}\right)=0, \quad i \ne j, \quad i, j \in \Im$), такие, что $P\left(\bigcup\limits_{i\in\Im} A^{(i)}\right)=1$. Для статистика интерес представляют не только с.в. Z, но и совместные свойства пар $\left\{\left(Z; A^{(i)}\right),\ i \in \Im\right\}$. Определим супраспределения $\left\{H(x,i)=P\left(Z \le x, A^{(i)}\right),\ (x;i) \in \overline{R} \times \Im\right\}$, для которых $\sum\limits_{i=1}^{k} H(x;i)=H(x),\ x \in \overline{R}$. Введём также и к.ф.и. $\Lambda(x;i)=\int\limits_{(-\infty;x]} \dfrac{dH(u;i)}{1-H(u-)},\ (x;i) \in R \times \Im$ и $\Lambda_H(x)=\int\limits_{(-\infty;x]} \dfrac{dH(u)}{1-H(u-)}=\sum\limits_{i=1}^{k} \Lambda(x;i),\ x \in R$. Пусть $S_o^{(n)}=\left\{\left(Z_j, \delta_j^{(1)}, \ldots, \delta_j^{(k)}\right)^T,\ j=1,\ldots,n\right\}$ - независимая повторная выборка объёма n, где $\delta_j^{(i)}=I\left(A_j^{(i)}\right)$ и $\left\{\left(Z_j, A_j^{(1)}, \ldots, A_j^{(k)}\right),\ j \ge 1\right\}$ - последовательность независимых копий совокупности $\left(Z\,; A^{(1)}, \ldots, A^{(k)}\right)$. В данной модели $(Z;A)$ основная задача непараметрической статистики состоит в одновременном оценивании к.ф.и. $\left\{\Lambda(x;i),\ i \in \Im^*\right\}$ или функционалов от них. Здесь $\Im^*$-непустое подмножество $\Im$. В данной книге исследованы три типа функционалов от к.ф.и. и построенные на их основе непараметрические оценки. Ряд свойств этих функционалов следуют из результатов § 1.2 с учетом особенностей МКР. В статистической литературе в основном рассматривают два подхода к описанию МКР. В рассматриваемой нами $(Z;A)$ - модели требование попарной несовместимости событий $A^{(1)}, \ldots, A^{(k)}$ является в ряде случаях ограничительным. В примере 1.1.1 отказ всей системы может случится в результате одновременного отказа нескольких её элементов. В медико – биологических исследованиях это означает смерть пациента по причине одновременного осуществления нескольких событий. В этой связи, следуя Хорват [212] отметим следующее: в случае произвольных событий $A^{(1)}, \ldots, A^{(k)}$ рассмотрим разбиение Ω на попарно несовместимые события $C_1, \ldots, C_e, \quad e \le 2^k+1$, (или хотя бы $P(C_i \cap C_j)=0, \quad i \ne j$), такие, что $P\left(\bigcup\limits_{j=\overline{1,e}} C_j\right)=1$ и при каждом $i \in \Im$ положим $A^{(i)}=\bigcup\limits_{m=\overline{1,i}} C_{j_m}$. Введём субраспределения $Q_j(x)=P(Z \le x; C_j), \quad j=1,\ldots,e$, для которых $H(x;i)=Q_{j_1}(x)+\ldots+Q_{j_i}(x), \quad x \in \overline{R}$. Тогда задача оценивания $H(x;i)$ сводится к оцениванию $\left\{Q_{j_m}(x),\ m=1,\ldots,i\right\}$, $i \in \Im$, т.е. субраспределений, соответствующих случаю попарно несовместимых событий. Теперь рассмотрим другое описание МКР. Для

фиксированного натурального числа k, пусть $\left\{ \left(Y_j^{(1)}, Y_j^{(2)}, ..., Y_j^{(k)}\right),\ j \geq 1 \right\}$ - последовательность н.о.р. случайных векторов с совместной функцией выживания $L(y_1, y_2, ..., y_k) = P\left(Y_j^{(1)} > y_1, Y_j^{(2)} > y_2, ..., Y_j^{(k)} > y_k\right),\ (y_1, ..., y_k) \in \overline{R}^k$. Наблюдается выборка $\left\{ \left(Z_j, \delta_j^{(1)}, ..., \delta_j^{(k)}\right)^T,\ j = 1, ..., n \right\}$, где $Z_j = \underset{i \in \Im}{\wedge} Y_j^{(i)}$ и $\delta_j^{(i)} = I(Z_j = Y_j^{(i)})$, $i \in \Im$. Здесь с.в. (риски) $\left\{ Y_j^{(1)}, ..., Y_j^{(k)} \right\}$ для каждого j могут быть и зависимыми, а с.в. Z_j имеют общую ф.р. $H(x) = 1 - L(x, ..., x),\quad x \in \overline{R}$. Иногда на практике удобно работать с логарифмически преобразованными временами жизни и поэтому в данной МКР $Y_j^{(i)}$ могут быть и отрицательными. В случае, когда $Y_j^{(i)}$ означают время жизни j-индивидума, умершего по i-причине, Z_j будет означать смерть того же индивидума. Как и выше, смерть может наступать из-за одновременно наступающих нескольких причин. В подобной ситуации задача состоит в одновременном оценивании всех $2^k - 1$ маргинальных вероятностей выживания
$L_{\Im^*}(x) = P\left(\underset{i \in \Im^*}{\wedge} Y_j^{(i)} > x \right),\ \Im^* \in \pi$, $x \in \overline{R}$, где π - совокупность всех непустых подмножеств $\Im$. Типичными условиями рассматриваемыми в литературе являются следующие:

(У1) С. в. $\{ Y_j^{(i)}, i \in \Im \}$ при каждом j - независимы в совокупности;

(У2) Отказ (смерть) не является результатом одновременного осуществления нескольких причин (событий) $\left(P\left(Y_j^{(i)} = Y_j^{(l)}\right) = 0,\ i \neq l,\ i, l \in \Im,\ j \geq 1 \right)$;

(У3) Маргинальные распределения с.в. $\{ Y_j^{(i)}, i \in \Im \}$ не имеют общих точек разрыва;

(У4) Совместное распределение $\{ Y_j^{(i)}, i \in \Im \}$ абсолютно непрерывно;

Эти условия (или часть из них) используются при оценивании в МКР. Так Петерсон ([240]), в условиях (У1)-(У3) обобщил оценку Каплана-Мейера для оценивания $L_{\Im^*}(x)$. Он же рассматривал и случай зависимых рисков, когда (У1) не имеет место. Аналогичные задачи рассмотрены Лангбергом, Прошан и Куинзи [239,240]. Они ослабили условие (У3) и предложили следующее:

(У3)' Функции $\left\{ \widetilde{H}(t; \Im^*) = P(Z_j \leq t; \varepsilon_j = \Im^*),\ \Im^* \in \pi \right\}$ не имеют общих точек скачка, где

$$\varepsilon_j = \begin{cases} \Im^*, \ \textit{если} \ Z_j = Y_j^{(i)} \ \textit{для каждого} \ i \in \Im^* \ \textit{и} \ Z_j \neq Y_j^{(i)} \ \textit{для каждого} \ i \notin \Im^*; \\ O, \ \textit{в противном случае.} \end{cases}$$

Авторы [239,240] исследовали свойства маргинальных распределений $L_{\Im^*}(x)$ при выполнении условия (У3)' и установили состоятельность оценок Каплана-Мейера для них. В ряде работ [3,123,127] рассматривается также следующее, более слабое условие чем (У3):

(У3)'' $\int\limits_{(-\infty;x]} \frac{dP\left(Y_j^{(i)} \le u\right)}{P\left(Y_j^{(i)} \ge u\right)} = \int\limits_{(-\infty;x]} \frac{dP\left(Z_j \le u,\, \delta_j^{(i)} = 1\right)}{P\left(Z_j^{(i)} \ge u\right)}, \quad (x;i) \in R \times \Im$.

Бюрк [123], Бюрк, Хорват [127] и Абдушукуров [3] рассматривали задачи оценивания плотностей в МКР при условиях (У3)'' и (У4). Отметим [74], где авторы рассматривают следующее условие, являющееся специальным случаем (У3)'' и названное условием «квазинезависимости»:

$$\lim_{\Delta\downarrow 0}\frac{P\left(x \le Y_j^{(i)} < x+\Delta; \delta_j^{(i)} = 1 / Y_j^{(1)} \ge x, \dots, Y_j^{(k)} \ge x\right)}{\Delta} = \lim_{\Delta\downarrow 0}\frac{P\left(x \le Y_j^{(i)} < x+\Delta / Y_j^{(i)} \ge x\right)}{\Delta}, \quad (x;i) \in R \times \Im. \quad (1.3.1)$$

Таким образом, к описанию МКР имеются два подхода:
- подход, основанный на введении с.в. Z и несовместимых k событий ($(Z;A)$-модель);
- подход, основанный на введении k с.в. (рисков), которые могут быть и зависимыми.

Отметим в связи с этим одно важное обстоятельство. В работах [239,240] Лангберг, Прошан и Куинзи установили эквивалентность этих двух подходов к описанию МКР. Они показали, что в $(Z;A)$-модели можно построить последовательность независимых случайных векторов $\left\{(L_j^{(1)},\dots,L_j^{(k)}),\ j \ge 1\right\}$ с независимыми компонентами, такие, что если $Z_j^* = \bigwedge_{i\in\Im} L_j^{(i)}$, $\delta_j^{(i)*} = I(Z_j^* = L_j^{(i)})$, то справедливо следующее равенство по распределению:

$$\left\{Z_j^*; \delta_j^{(i)*}; i \in \Im\right\} \overset{D}{=} \left\{Z_j; \delta_j^{(i)}; i \in \Im\right\}.$$

Таким образом, конструкция [239,240] позволяет получить МКР с независимыми рисками, хотя совпадение $L_j^{(i)}$ с $Y_j^{(i)}$-не обязательно. Отсюда в свою очередь следует, что при рассмотрении МКР с зависимыми рисками достаточно потребовать выполнения условия (У3)'', чтобы можно было использование результатов имеющих место и в $(Z;A)$-модели. Более того, ряд результатов $(Z;A)$-модели могут быть перенесены и на случай совместимых событий $\left\{A^{(i)}, i \in \Im\right\}$. Как показал Хорват [212], результаты сильной аппроксимации для процессов эмпирической структуры, доказанные в $(Z;A)$-модели остаются справедливыми и в случае совместимых событий. Исходя из вышеизложенного, в дальнейшем нами для построения более сложных моделей неполных наблюдений будет использована в основном $(Z;A)$-модель (см. также замечание 1.9.13 главы 1).

Зададимся теперь базовыми функционалами, подлежащими к оцениванию в модели $(Z;A)$ при помощи выборки $S_0^{(n)}$. Они являются вариантами функционалов $\exp(-L_i)$, Φ_i и Ψ_i из § 1.2 специально в модели $(Z;A)$ и определяются при $(x;i)\in\overline{R}\times\Im$ формулами:

$$1-F_1(x;i)=\exp(-\Lambda(x;i))=\exp(-\Lambda^c(x;i))\prod_{u\le x}\exp(-\Delta\Lambda(u;i)),$$

$$1-F_2(x;i)=\Phi_i(H(\bullet;1),...,H(\bullet;k))=\exp(-\Lambda^c(x;i))\prod_{u\le x}(1-\Delta\Lambda(u;i)),$$

$$1-F_3(x;i)=\Psi_i(H(\bullet;1),...,H(\bullet;k))=\left[1-H(x-)\right]^{R(x;i)}.$$

Здесь $\Lambda^c(x;i)=\int\limits_{(-\infty;x]}\frac{dH^c(u;i)}{1-H(u-)}=\Lambda(x;i)-\Lambda^d(x;i)$; $\Delta\Lambda(u;i)=\Lambda(u;i)-\Lambda(u-;i)$;

$\Lambda^d(x;i)=\sum\limits_{u\le x}\Delta\Lambda(u;i)$; $\quad R(x;i)=\frac{\Lambda(x;i)}{\Lambda_H(x)}$; $\Lambda_H(x)=\int\limits_{(-\infty;x]}\frac{dH(u)}{1-H(u-)}=\sum\limits_{i=1}^{k}\Lambda(x;i)$.

Далее будем предполагать выполненным условие

$$\bigcap_{i\in\Im}\mathit{\Gamma}^{(i)}\ne\varnothing, \tag{1.3.2}$$

где $\mathit{\Gamma}^{(i)}=\{x\in R:0<\Lambda(x;i)<\infty\}$, $i\in\Im$. Отметим, что для функционалов $\{F_m(\bullet;i),\ m=1,2,3;\ i\in\Im\}$ справедливы все утверждения из § 1.2. Здесь мы укажем ещё некоторые из их свойств более подробно в модели $(Z;A)$. Легко видеть, что для всех $(x;i)\in\overline{R}\times\Im$: $0\le F_m(x;i)\le 1$, $m=1,2,3$ (для F_3 см. лемму 1.2.4). Из леммы 1.2.7 в случае произвольных распределений $\{H(\bullet;i),\ i\in\Im\}$ и всех $(x;i)\in Sp(H)\times\Im$ следует неравенство

$$F_2(x;i)\ge F_1(x;i), \tag{1.3.3}$$

в частности, если ф.р. H-непрерывна, то согласно следствию 1.2.8:

$$F_2(x;i)\ge F_1(x;i)\equiv F_3(x;i), \tag{1.3.4}$$

и наконец, в случае непрерывности всех субраспределений $\{H(\bullet;i),\ i\in\Im\}$ будем иметь только одно представление

$$F_m(x;i)=1-\exp\left\{-\int\limits_{(-\infty;x]}\frac{dH(u;i)}{1-H(u)}\right\},\quad m=1,2,3. \tag{1.3.5}$$

В следующей теореме собраны ряд полезных неравенств, сравнивающие функционалы F_m, $m=1,2,3$. Первое из этих неравенств, как частный случай включает в себя и (1.3.3). Введём обозначения:

$$\omega_1(x;i)=\frac{1}{2}\exp(-\Lambda^c(x;i))\sum_{u\le x}\left[\Delta\Lambda(u;i)\right]^2; \qquad \omega_2(x;i)=\sum_{u\le x}\frac{\left[\Delta\Lambda(u;i)\right]^2}{(1-\Delta\Lambda(u;i))};$$

$$\omega_3(x)=\sum_{u\le x}\frac{\left[\Delta\Lambda_H(u)\right]^2}{(1-\Delta\Lambda_H(u))}-\Delta\Lambda_H(x); \qquad \omega_4(x;i)=\omega_2(x;i)+\omega_3(x).$$

Теорема 1.3.1. Для произвольных субраспределений $\{H(\bullet;i), i\in\Im\}$ при всех $(x;i)\in Sp(H)\times\Im$ справедливы следующие неравенства:

(I) $0\le F_2(x;i)-F_1(x;i)\le\omega_1(x;i)$;
(II) $0<-\log(1-F_2(x;i))+\log(1-F_1(x;i))<\omega_2(x;i)$;
(III) $0<-\log(1-F_3(x;i))+\log(1-F_1(x;i))<\omega_3(x)$;
(IV) $\left|-\log(1-F_2(x;i))+\log(1-F_3(x;i))\right|<\omega_4(x;i)$;
(V) $0\le F_3(x;i)-F_1(x;i)<\omega_3(x)$;
(VI) $\left|F_2(x;i)-F_3(x;i)\right|<\omega_4(x;i)$.

Доказательство теоремы 1.3.1. Для доказательства неравенств (I) – (VI) нами будут использованы следующие элементарные неравенства:

$$\begin{aligned}
&\left|\prod_i c_i-\prod_i d_i\right|\le\sum_i\left|c_i-d_i\right|,\quad 0\le c_i,\ d_i\le 1;\\
&0\le\exp(-a)-(1-a)\le\frac{a^2}{2},\quad 0\le a<1;\\
&0<-\log(1+(1+s)^{-1})+(1+s)^{-1}<(s(s+1))^{-1};\quad s>0;\\
&|u-v|\le\left|\log u-\log v\right|,\ 0<u,\ v\le 1.
\end{aligned}\tag{1.3.6}$$

Согласно второму неравенству в (1.3.6), с одной стороны:

$$F_2(x;i)-F_1(x;i)=(1-F_2(x;i))\left[\prod_{u\le x}\frac{\exp(-\Delta\Lambda(u;i))}{1-\Delta\Lambda(u;i)}-1\right]\ge 0,$$

и с другой стороны, используя сначала первое, а затем второе из неравенств (1.3.6), имеем

$$F_2(x;i)-F_1(x;i)=\exp(-\Lambda^c(x;i))\left[\prod_{u\le x}\exp(-\Delta\Lambda(u;i))-\prod_{u\le x}(1-\Delta\Lambda(u;i))\right]\le$$

$$\le\exp(-\Lambda^c(x;i))\sum_{u\le x}[\exp(-\Delta\Lambda(u;i))-(1-\Delta\Lambda(u;i))]\le\omega_1(x;i),$$

что доказывает (I). Для доказательства (II) рассмотрим разницу

$$-\log\bigl(1-F_2(x;i)\bigr)+\log\bigl(1-F_1(x;i)\bigr)=\sum_{u\le x}\bigl[-\log\bigl(1-\Delta\Lambda(u;i)\bigr)-\Delta\Lambda(u;i)\bigr].$$

Положим $s=\bigl(1-\Delta\Lambda(u;i)\bigr)/\Delta\Lambda(u;i)$. Из третьего неравенства (1.3.6) следует (II). Легко проверить, что

$$-\log\bigl(1-F_3(x;i)\bigr)+\log\bigl(1-F_1(x;i)\bigr)=R(x;i)\bigl(-\log(1-H(x-))-\Lambda_H(x)\bigr)=$$

$$=R(x;i)\bigl[-\log(1-H(x))-\Lambda_H(x)+\log(1-\Delta\Lambda_H(x))\bigr]=$$

$$=R(x;i)\left[\sum_{u\le x}\bigl(-\log(1-\Lambda_H(u))-\Delta\Lambda_H(u)\bigr)+\log(1-\Delta\Lambda_H(x))\right], \tag{1.3.7}$$

где последнее равенство получается применением представления (1.2.2) для $1-H$ и разложения $\Lambda_H=\Lambda_H^c+\Lambda_H^d$. Теперь воспользуемся третьим неравенством (1.3.6) для слагаемых внутри суммы в последнем выражении в (1.3.7) при $s=\bigl(1-\Delta\Lambda_H(u)\bigr)/\Delta\Lambda_H(u)$, а также и левой частью (1.2.21), что даёт $\log\bigl(1-\Delta\Lambda_H(x)\bigr)\le-\Delta\Lambda_H(x)$. Тогда, учитывая и то, что $R(x;i)<1$, получаем (III). (IV) следует из (II), (III) и неравенства треугольника. Наконец, (V) и (VI) являются результатами применения следующего, а также и четвертого из неравенств (1.3.6) соответственно:

$$F_3(x;i)-F_1(x;i)=(1-F_3(x;i))\left(\frac{1-F_1(x;i)}{1-F_3(x;i)}-1\right)=(1-F_3(x;i))\bigl\{\exp\bigl[\log(1-F_1(x;i))-\log(1-F_3(x;i))\bigr]-1\bigr\}\ge 0.$$

При этом необходимо учесть также и неравенства (III) и (IV). Теорема 1.3.1 доказана. ■

Отметим, что правые части неравенств (I) – (VI) ещё будут уточнены при их применении к непараметрическим оценкам, рассматриваемым в различных моделях неполных наблюдений.

Замечание 1.3.2. В утверждении теоремы 1.3.1 говорится, что неравенства (I) – (VI) справедливы для произвольных субраспределений. На самом деле, случай непрерывности всех субраспределений здесь исключается, так как в этом случае имеет место (1.3.5). ■

Введём в рассмотрение следующие множительные функционалы от распределения H:

$$\Phi_0(H)(x)=1-H(x)=\exp(-\Lambda_H^c(x))\prod_{u\le x}(1-\Delta\Lambda_H(u)),$$

$$\Phi_1(H)(x)=\prod_{i=1}^{k}(1-F_1(x;i))=\exp(-\Lambda_H(x))=\exp(-\Lambda_H^c(x))\prod_{u\le x}\exp(-\Delta\Lambda_H(u)),$$

$$\Phi_2(H)(x) = \prod_{i=1}^{k}(1 - F_2(x;i)) = \exp(-\Lambda^c_H(x))\prod_{i=1}^{k}\prod_{u\le x}(1-\Delta\Lambda(u;i)),$$

$$\Phi_3(H)(x) = \prod_{i=1}^{k}(1 - F_3(x;i)) = 1 - H(x-) = \frac{1-H(x)}{1-\Delta\Lambda_H(x)}.$$

В следующем утверждении приведены аналоги неравенств (I) – (VI) теоремы 1.3.1 для функционалов $\Phi_m(H)(x),\ m=\overline{0,3}$.

Теорема 1.3.3. В случае произвольного распределения H при всех $x \in Sp(H)$ справедливы неравенства:

(I) $0 \le \Phi_1(H)(x) - \Phi_2(H)(x) \le \omega_5(x)$;

(II) $0 < -\log\Phi_2(H)(x) + \log\Phi_1(H)(x) < \sum_{i=1}^{k}\omega_2(x;i)$;

(III) $0 < -\log\Phi_3(H)(x) + \log\Phi_1(H)(x) < k\omega_3(x)$;

(IV) $\left|-\log\Phi_2(H)(x) + \log\Phi_3(H)(x)\right| < \sum_{i=1}^{k}\omega_2(x;i) + k\omega_3(x)$;

(V) $0 < \Phi_1(H)(x) - \Phi_3(H)(x) < k\omega_3(x)$;

(VI) $\left|\Phi_3(H)(x) - \Phi_2(H)(x)\right| < \sum_{i=1}^{k}\omega_2(x;i) + k\omega_3(x)$;

(VII) $0 \le \Phi_1(H)(x) - \Phi_0(H)(x) < \omega_6(x)$;

(VIII) $\left|\Phi_2(H)(x) - \Phi_0(H)(x)\right| < \omega_6(x)$;

(IX) $0 \le \Phi_3(H)(x) - \Phi_0(H)(x) = \Delta H(x)$;

где $\omega_2(x;i)$, $\omega_3(x)$ из теоремы 1.3.1 и

$$\omega_5(x) = \frac{1}{2}\exp(-\Lambda^c_H(x))\sum_{u\le x}\sum_{i=1}^{k}\left[\Delta\Lambda(u;i)\right]^2;\ \omega_6(x) = \frac{1}{2}\exp(-\Lambda^c_H(x))\sum_{u\le x}\left[\Delta\Lambda_H(u)\right]^2.$$

Доказательство теоремы 1.3.3. Дважды используя первое, а затем второе неравенство в (1.3.6) получаем (I):

$$0 \le \Phi_1(H)(x) - \Phi_2(H)(x) = \exp(-\Lambda^c_H(x))\left[\prod_{u\le x}\prod_{i=1}^{k}\exp(-\Delta\Lambda(u;i)) - \prod_{u\le x}\prod_{i=1}^{k}(1-\Delta\Lambda(u;i))\right] \le$$
$$\le \exp(-\Lambda^c_H(x))\sum_{u\le x}\sum_{i=1}^{k}\left[\exp(-\Delta\Lambda(u;i)) - (1-\Delta\Lambda(u;i))\right] \le \omega_5(x).$$

Аналогичным образом, учитывая неравенства (II) – (VI) теоремы 1.3.1 получаем доказательства неравенств (II) – (VI) в утверждении теоремы 1.3.3. Далее, (VII) доказывается по тому же пути, что и (I). И наконец, (VIII) и (IX) следуют из следующих соотношений:

$$\left|\Phi_2(H)(x)-\Phi_0(H)(x)\right| \le \Phi_1(H)(x)-\Phi_0(H)(x) < \omega_6(x)\,;$$

$$0 \le \Phi_3(H)(x)-\Phi_0(H)(x) = H(x)-H(x-) = \Delta H(x)\,.$$

Теорема 1.3.3 доказана. ■

До настоящего времени функционалы $\{F_m(\bullet;i),\ m=1,2,3;\ i\in\Im\}$ были исследованы вместе и для них установлены различные неравенства. Теперь продолжим подробное исследование этих функционалов в отдельности при каждом $m=1,2,3$.

Для функционалов $\{F_m(\bullet;i),\ m=1,2,3;\ i\in\Im\}$ справедливы равенства:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\downarrow-\infty} F_m(x;i)=0;\\ \lim\limits_{x\uparrow\infty} F_m(x;i)=1.\end{cases} \tag{1.3.8}$$

Первое равенство в (1.3.8) – очевидно. С учётом (1.3.3), второе равенство достаточно установить при $m=1$ и $m=3$. Поскольку для всех $(x;i)\in\overline{R}\times\Im$: $0\le R(x;i)\le 1$ и кроме того $\lim\limits_{x\uparrow\infty}(1-H(x-))=\lim\limits_{x\uparrow\infty}P(Z\ge x)=0$, то для $m=3$ второе равенство (1.3.8) также верно. Заметим, что условие (1.3.2) эквивалентно

$$\Gamma=\bigcap_{i\in\Im} Sp(F_1(\bullet;i))\ne\varnothing, \tag{1.3.9}$$

где $Sp(F_1(\bullet;i))=\left\{x\in\overline{R}:\ 0<F_1(x;i)<1\right\}$. Для $(x;i)\in\left(\Gamma\cap Sp(H)\right)\times\Im$, ввиду монотонной неубываемости $F_1(x;i)$ по x, можно найти число $\tau^*\in[x;\infty)\cap\Gamma$, такое, что имеют место неравенства

$$0\le 1-F_1(x;i)=\frac{\exp(-\Lambda_H(x))}{\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{k}(1-F_1(x;j))}\le\frac{\exp(-\Lambda_H(x))}{\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{k}(1-F_1(\tau^*;j))}\,. \tag{1.3.10}$$

Поскольку $\lim\limits_{x\uparrow\infty}\Lambda_H(x)=\infty$, то из (1.3.10) следует требуемое равенство при $m=1$. Более, того функционалы $\{F_m(\bullet;i),\ m=1,2;\ i\in\Im\}$ непрерывны справа по x, при этом если $x\in D(H(\bullet;i))$, то

$$\begin{aligned}&0\le\frac{1-F_1(x;i)}{1-F_1(x-;i)}=\exp(-\Delta\Lambda(x;i))\le 1,\quad i\in\Im,\\ &0\le\frac{1-F_2(x;i)}{1-F_2(x-;i)}=1-\Delta\Lambda(x;i)\le 1,\quad i\in\Im.\end{aligned} \tag{1.3.11}$$

Следует напомнить, что функционалы $\{1-F_2(\bullet;i),\ i\in\Im\}$ и $\{\Phi_i,\ i\in\Im\}$ одинаковы по структуре и поэтому для $1-F_2$ справедливо представление (1.1.7)’. Вполне аналогично, для $\{F_1(\bullet;i),\ i\in\Im\}$ также можем записать представление:

$$1-F_1(x;i)=\exp\left(B_1^c(x;i)+B_1^d(x;i)\right),\quad (x;i)\in(-\infty;T(i)]\times\Im, \tag{1.3.12}$$

где

$$B_1^c(x;i)=-\int\limits_{(-\infty;x]} I\{u\in C(F_1(\bullet;i))\cap(-\infty;T(i)]\}\frac{dF_1^c(u;i)}{1-F_1(u;i)},$$

$$B_1^d(x;i)=\sum_{u\in D(F_1(\bullet;i))} I\{u\in(-\infty;T(i)]\cap(-\infty;x]\}\log\left(\frac{1-F_1\ (u;i)}{1-F_1(u-;i)}\right),$$

и $T(i)=\sup\{x\in\overline{R}:\ 0<F_1(x;i)<1\}$. С учётом (1.3.11) для $1-F_1$ вместо (1.3.12) можно записать также и функциональное представление:

$$1-F_1(x;i)=\exp\left(B_H^c(x;i)+B_H^d(x;i)\right),\quad (x;i)\in(-\infty;T_H]\times\Im, \tag{1.3.13}$$

где $T_H=\sup\{x\in\overline{R}:\ H(x)<1\}=\bigwedge_{i\in\Im}T(i)$,

$$B_H^c(x;i)=-\int\limits_{(-\infty;x]} I\{u\in C(H(\bullet;i))\cap(-\infty;T_H]\}\frac{dH^c(u;i)}{1-H(u-)},$$

$$B_H^d(x;i)=-\sum_{u\in D(H(\bullet;i))} I\{u\in(-\infty;T_H]\cap(-\infty;x]\}\frac{\Delta H(u;i)}{1-H(u-)}.$$

Заметим, что правая часть (1.3.13) не является функционалом вида Φ_i по $H(\bullet;1),\dots,\ H(\bullet;k)$. Однако, непрерывные составляющие $F_1(\bullet;i)$ и $F_2(\bullet;i)$ идентичны. Кроме того, из доказательства неравенства (I) теоремы 1.3.1, а также из (1.3.1) для всех $(x;i)\in\left((-\infty;\mathrm{T}_H]\cap D(H(\bullet;i))\right)\times\Im$ имеем следующую оценку для скачков

$$0\le\frac{1-F_1(x;i)}{1-F_1(x-;i)}-\frac{1-F_2(x;i)}{1-F_2(x-;i)}\le\frac{1}{2}[\Delta\Lambda(x;i)]^2. \tag{1.3.14}$$

Теперь подробнее остановимся на свойствах функционалов $\{F_3(\bullet;i),i\in\Im\}$. Отметим, что ввиду леммы 1.2.4 $F_3(\bullet;i)$ является непрерывным функционалом по $H,\Lambda_H,\Lambda(\bullet;i)$ и $R(\bullet;i)$. Исследуем эти функционалы как функции от x:

(A) Пусть $a(x) = -\log(1 - H(x-)) / \Lambda_H(x-), b_i(x) = 1 - R(x;i)$, $c_i(x) = a(x) \cdot b_i(x)$, $i \in \Im$. Так как для всех $x \in Sp(H)$ и $i \in \Im$: $a(x) \geq 0,\ b_i(x) \geq 0$, следовательно $c_i(x) \geq 0$. Из замечания 1.2.5 имеем

$$\log\left(\frac{1 - F_3(x+;i)}{1 - F_3(x-;i)}\right) = -a(x)\big(\Delta\Lambda(x;i) - R(x;i)\Delta\Lambda_H(x)\big) =$$

$$= -\frac{a(x)}{\Lambda_H(x)} \cdot \big(\Lambda(x;i)\Lambda_H(x-) - \Lambda(x-;i)\Lambda_H(x)\big). \qquad (1.3.15)$$

Таким образом, свойства $F_3(x;i)$ в точке x зависят от свойств к.ф.и $\Lambda(x;i)$ и $\Lambda_H(x)$. Из (1.3.15) нетрудно получить и неравенства

$$\frac{\log(1 - H(x-))}{\Lambda_H(x-)} \cdot \Delta\Lambda(x;i) \leq \log\left[\frac{1 - F_3(x+;i)}{1 - F_3(x-;i)}\right] \leq -\frac{R(x;i)}{\Lambda_H(x-)} \cdot \log(1 - H(x-)) \cdot \Delta\Lambda_H(x).$$

В частности, когда $F_3(x;i)$ определяется формулой (1.2.16), то из (1.3.15) следует, что

$$\log\left(\frac{1 - F_3(x+;i)}{1 - F_3(x-;i)}\right) = 0, \text{ т.е. } F_3(x+;i) = F_3(x-;i). \ \blacksquare$$

(B) Пусть H непрерывная ф.р.. В этом случае $\Lambda_H(x) = -\log(1 - H(x))$ и следовательно для любых чисел $x_1, x_2 \in Sp(H),\ x_1 < x_2$ и $i \in \Im$

$$\log\left(\frac{1 - F_3(x_2;i)}{1 - F_3(x_1;i)}\right) = R(x_2;i)\log(1 - H(x_2)) - R(x_1;i)\log(1 - H(x_1)) = \Lambda(x_1;i) - \Lambda(x_2;i) \leq 0$$

.

Последнее, в свою очередь эквивалентно неравенству $F_3(x_2;i) - F_3(x_1;i) \geq 0$. В частности,

$$0 \leq \frac{1 - F_3(x+;i)}{1 - F_3(x-;i)} = \exp(-\Delta\Lambda(x;i)) \leq 1, \quad (x;i) \in Sp(H) \times \Im,$$

т.е. $F_3(x+;i) - F_3(x-;i) \geq 0,\ \ (x;i) \in Sp(H) \times \Im$ и функции $F_3(x;i)$ и $H(x;i)$ имеют скачки в одних и тех же точках. ■

(C) Пусть субраспределения $H(\bullet;1),...,H(\bullet;k)$ не имеют общих точек скачка на $Sp(H)$ (условие $(У3)'$):

$$Sp(H) \cap \Big\{\bigcap_{i \in \Im} D(H(\bullet;i))\Big\} = \varnothing.$$

Тогда для $x \in S(H) \cap D(H(\bullet;i))$ при каждом $i \in \Im$, $\Delta H(x;i) = \Delta H(x)$, $\Delta\Lambda(x;i) = \Delta\Lambda_H(x)$ и из (1.3.15) $\log\left(\frac{1-F_3(x+;i)}{1-F_3(x-;i)}\right) = -c_i(x)\Delta\Lambda_H(x) \le 0$, т.е. $F_3(x+;i) - F_3(x-;i) \ge 0$ и в этом случае $F_3(x;i)$ и $H(x)$ имеют скачки в одних и тех же точках. ■

(D) Пусть в $(Z;A)$-модели $Z_j = \underset{i\in\Im}{\wedge} Y_j^{(i)}$, $\delta_j^{(i)} = I(Z_j = Y_j^{(i)})$ и интерес представляют маргинальные функции выживания рисков $\left\{F^{(i)}(x) = P(Y_j^{(i)} > x),\ i \in \Im\right\}$ с соответствующими к.ф.и. $\Lambda^{(i)}(x) = \int\limits_{(-\infty;x]} \frac{dF^{(i)}(u)}{1-F^{(i)}(u-)}$, $i \in \Im$. Очевидно, в общей ситуации $\Lambda(x;i) \ne \Lambda^{(i)}(x)$, $i \in \Im$. Пусть $H(x) = 1 - L(x,...,x)$, $H(x;i) = P(Z_j \le x, \delta_j^{(i)} = 1)$, $(x;i) \in \overline{R} \times \Im$ и совместное распределение рисков $\left\{Y^{(i)}, i \in \Im\right\}$ таково, что имеет место условие $(У3)''$, т.е. для всех $(x;i) \in R \times \Im$: $\Lambda(x;i) = \Lambda^{(i)}(x)$, которое автоматически выполняется для независимых рисков [31]. Тогда согласно лемме 1.2.1 (см. также (1.2.1) и (1.2.2)) для всех $(x;i) \in \overline{R} \times \Im$: $F^{(i)}(x) = F_2(x;i)$, т.е. функционал $F_2(x;i)$ может быть использован для оценивания $F^{(i)}(x)$.

Однако, ввиду теоремы 1.3.1 для этой же цели могут быть использованы также и функционалы $F_1(x;i)$ и $F_3(x;i)$ так как при условии близости к нулю $\Delta\Lambda(u;i)$ и $\Lambda_H(u)$ для всех $(u;i) \in (-\infty;x] \times \Im$, $x \in \overline{R}$, $F_m(x;i) \approx F_2(x;i)$, $m = 1,3$. Отметим, что для эмпирических аналогов к.ф.и. эти скачки имеют порядок $O(n^{-1})$. В случае независимости рисков $\left\{Y^{(i)}, i \in \Im\right\}$ легко получит выражения

$$
\begin{aligned}
H(x) &= 1 - \prod_{i=1}^{k}(1 - F^{(i)}(x)), \quad x \in \overline{R}, \\
H(x;i) &= \int\limits_{(-\infty;x]} \prod_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{k} (1 - F^{(j)}(u-)) dF^{(i)}(u), \quad (x;i) \in \overline{R} \times \Im.
\end{aligned}
\tag{1.3.17}
$$

Более того, если $\left\{H(\bullet;i), i \in \Im\right\}$ непрерывны, то для всех $m = 1,2,3$; $F^{(i)}(x) = F_m(x;i)$, $(x;i) \in \overline{R} \times \Im$, что ещё раз подтверждает актуальность исследования и использования трех классов функционалов. ■

Задаче оценивания различных биометрических функционалов в МКР посвящены работы [112,122,123,125-127,152,239,240,318,319,], среди которых особо выделим цикл работ Бюрка, Чёрге и Хорват [122,123,125-127,152], где исследуются асимптотические свойства оценок типа Каплана-Мейера и Альтшулера-Бреслоу. При этом основным методом исследования в этих работах является метод сильной аппроксимации Комлоша-Майора-Тушнади, адаптированный специально для $(Z;A)$-модели (см. теоремы А и М из § 1.9 монографии). Однако, в этих работах не велись исследования функциональных свойств оценок. В данной книге наряду с исследованием трех классов функционалов и их статистических оценок в $(Z;A)$-модели, рассмотрены также и задачи ЛАН для СОП. Аналогичные задачи рассмотрены также и в более общих моделях неполных наблюдений включающих в себя и $(Z;A)$-модель. При этом используются методы сильной аппроксимации, мартингалов, а также U-статистик. Следует отметить, что некоторые авторы рассматривают модель случайного цензурирования справа как частный случай МКР при $k=2$ и независимости рисков. Однако мы не будем придерживаться такой точки зрения, так как в МКР интерес представляют все с.в. $\{Y^{(i)}, i \in \Im\}$ (или события $\{A^{(i)}, i \in \Im\}$), тогда как при случайном цензурировании справа одна из с.в., скажем $Y^{(1)}$ представляет интерес, а с.в. $Y^{(2)}$ считается мешающей. Вводимая в данной монографии обобщённая модель включает в себя не только модель случайного цензурирования справа, но и с двух сторон, а также и $(Z;A)$-модель (следовательно и МКР).

Теперь остановимся на одном важном частном случае $(Z;A)$-модели, а именно МПИ, относящейся к числу информативных моделей [102].

Определение 1.3.4 [31]. Модель $(Z;A)$ называется МПИ, если для всех $(x;i) \in \overline{R} \times \Im$:

$$H(x;i) = p^{(i)} H(x), \tag{1.3.19}$$

где $p^{(i)} = P(A^{(i)}) \in (0,1)$, $i \in \Im$ и $p^{(1)} + ... + p^{(k)} = 1$. ■

Заметим, что из (1.3.19) следует равенство

$$\Lambda(x;i) = p^{(i)} \Lambda_H(x), \quad (x;i) \in \left(-\infty; T_H\right] \times \Im. \tag{1.3.20}$$

В МПИ функционалы $\{F_m(\bullet;i), \ \ i \in \Im; \ m = 1,2,3\}$ могут быть представлены как

$$\begin{aligned} &1 - F_1(x;i) = \exp(-p^{(i)} \Lambda_H(x)), \\ &1 - F_2(x;i) = \exp(-p^{(i)} \Lambda_H^c(x)) \prod_{u \le x} (1 - p^{(i)} \Lambda_H(u)), \\ &1 - F_3(x;i) = \left[1 - H(x-)\right]^{p^{(i)}}, \end{aligned} \tag{1.3.21}$$

(см. также (1.2.16)). Заметим, что представления (1.3.20) и (1.3.21) следуют из независимости с.в. Z и событий $\{A^{(i)}, i \in \Im\}$. В работе автора [31] установлено, что если H-непрерывная ф.р., то верно и обратное, т.е. из (1.3.20) следует и независимость. Это свойство и характеризует МПИ. Очевидно, в случае непрерывности ф.р. H

$$1 - F_m(x;i) = 1 - F^{(i)}(x) = \left[1 - H(x)\right]^{p^{(i)}}, \quad m = 1,2,3; \quad (x;i) \in \overline{R} \times \Im. \tag{1.3.22}$$

Таким образом справедлива

Лемма 1.3.5. [31]. Если H-непрерывная ф.р., то равенства (1.3.22) и (1.3.19) эквивалентны. ■

По представлению (1.3.22) автором [31] была введена и исследована новая статистика в МПИ (см. [147-151] и обзоры в них). МПИ является полезной параметрической - непараметрической моделью неполных данных [147], обладающей также и интересными парадоксальными свойствами (подробнее см. [151]).

Пример 1.3.6. Пусть $Z = Y^{(1)} \wedge Y^{(2)}$, $k = 2$, где $Y^{(1)}$ и $Y^{(2)}$ независимы и при $i = 1,2$:

$$F^{(i)}(x) = P(Y^{(i)} \leq x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - \exp(-\lambda_i x), & x \geq 0, \lambda_i > 0. \end{cases}$$

Тогда в (1.3.22), $p^{(i)} = \lambda_i / (\lambda_1 + \lambda_2)$, $i = 1,2$. ■

В настоящей монографии будут рассмотрены также и некоторые разновидности и обобщения моделей. Построение и исследование параметрических–непараметрических оценок функционалов $\{F_m(\bullet;i),\ i \in \Im;\ m = 1,2,3\}$ в таких информативных моделях неполных данных также составляет часть исследований данной книги. До настоящего момента нами в основном были приведены представления и свойства оцениваемых функционалов трёх типов в модели $(Z;A)$, являющейся аналогом МКР. Далее рассмотрим аналогичные вопросы, когда и с.в. Z и события $\{A^{(i)}, i \in \Im\}$ подвергаются случайному цензурированию (с одной стороны или с двух сторон).

II. Модель *(Z$\wedge$Y;B)*. Пусть в модели $(Z;A)$ совокупность $\{Z; A^{(1)},...,A^{(k)}\}$ подвергается случайному цензурированию справа, независящей от Z с.в-ой Y с непрерывной справа ф.р. $G(y) = P(Y \leq y),\ \ y \in \overline{R}$. Наблюдению доступна совокупность $\{Z \wedge Y; B^{(0)}, B^{(1)},...,B^{(k)}\}$, где $B^{(0)} = \{\omega : Y(\omega) < Z(\omega)\}$ и $B^{(i)} = A^{(i)} \cap \{\omega : Z(\omega) \leq Y(\omega)\}$, $i \in \Im$. С учётом свойств событий $\{A^{(i)}, i \in \Im\}$ легко видеть, что события $\{B^{(0)}, B^{(1)},...,B^{(k)}\}$-также попарно несовместны (или хотя бы $P(B^{(i)} \cap B^{(j)}) = 0,\ i \neq j;\ i,j \in \overline{\Im}$) и $P\left(\bigcup_{i \in \overline{\Im}} B^{(i)}\right) = 1$. Обозначим эту модель через $(Z \wedge Y; B)$. В ней и с.в. Y и ф.р. G считаются мешающими. Интерес представляют с.в. Z, события $\{A^{(i)}, i \in \Im\}$ и рассматривается задача оценивания функционалов $\{F_m(\bullet;i),\ i \in \Im;\ m = 1,2,3\}$ по выборке $S_1^{(n)} = \left\{(\xi_j; \Delta_j^{(0)}, \Delta_j^{(1)},...,\Delta_j^{(k)})^T,\ \ j = 1,..,n\right\}$, где $\xi_j = Z_j \wedge Y_j$, $\Delta_j^{(i)} = I(B_j^{(i)}),\ i \in \overline{\Im}$ и $\{Z_j; Y_j; B_j^{(0)}, B_j^{(1)},...,B_j^{(k)},\ \ j \geq 1\}$ - последовательность независимых и одинаково распределенных копий совокупности $\{Z \wedge Y; B^{(0)}, B^{(1)},...,B^{(k)}\}$. Из-за присутствия цензурирования нам необходимо найти представления для оцениваемых функционалов $\{F_m(\bullet;i),\ \ i\in\Im;\ m=1{,}2{,}3\}$ в данной модели. В связи с этим введём субраспределения

$$M(x;i)=P(\xi_j\le x;\ B_j^{(i)}),\ \ (x;i)\in\overline{R}\times\overline{\Im},$$

где

$$M(x;0)=P(Y_j\le x;\ Y_j<Z_j)=\int\limits_{(-\infty;x]}(1-H(u))dG(u),$$

$$M(x;i)=P(Z_j\le Y_j\wedge x;\ A_j^{(i)})=\int\limits_{(-\infty;x]}(1-G(u-))dH(u;i),\ i\in\Im.$$

Далее, так как $N(x)=P(\xi_j\le x)=1-(1-G(x))(1-H(x)),\ x\in\overline{R}$, то к.ф.и. $\Lambda(x;i)$, $i\in\Im$ могут быть представлены как

$$\Lambda(x;i)=\int\limits_{(-\infty;x]}\frac{dM(u;i)}{1-N(u-)},\ (x;i)\in\overline{R}\times\Im. \tag{1.3.23}$$

в данной модели $(Z\wedge Y;B)$ будем предполагать выполненным следующий аналог условия (1.3.2):

$$\bigcap_{i\in\overline{\Im}}\Gamma_G^{(i)}\ne\varnothing, \tag{1.3.24}$$

где $\Gamma_G^{(i)}=\{x\in R:\ 0<\Lambda(x;i)<\infty\},\ i\in\overline{\Im}$, при этом для $i\in\Im$, $\Lambda(x;i)$ определяются формулами (1.3.23) и для $i=0$ и $x\in\Gamma_G^{(0)}$:

$$\Lambda(x;0)=\int\limits_{(-\infty;x]}\frac{dM(u;0)}{1-N(u-)}=\int\limits_{(-\infty;x]}\frac{(1-H(u))dG(u)}{(1-G(u-))(1-H(u-))}=\Lambda_G(x)-\int\limits_{(-\infty;x]}\Delta\Lambda_H(u)d\Lambda_G(u) \tag{1.3.25}$$

- к.ф.и., соответствующая $M(x;0)$. Очевидно

$$M(x;0)+\sum_{i=1}^{k}M(x;i)=N(x),\ \ x\in\overline{R}. \tag{1.3.26}$$

Легко заметить, что равенство (1.3.26) следует также из формулы (1.2.10) – интегрирования по частям для интеграла Лебега – Стильтеса при $Q_1(u)=1-G(u)$, $Q_2(u)=1-H(u)$ и $a=-\infty$. Следует отметить, что функционалы $\{F_m(\bullet;i),\ \ i\in\Im;\ m=1{,}2{,}3\}$ в данной модели будут представлены через к.ф.и. $\{\Lambda(\bullet;i),\ \ i\in\Im\}$, используя формулы (1.3.23). Утверждения из § 1.2, а следовательно и из предыдущего пункта I настоящего параграфа остаются в силе. При этом следует лишь помнить, что при $x\in Sp(N)$:

$$\Lambda^c(x;i) = \int\limits_{(-\infty;x]} \frac{dM^c(u;i)}{1-N(u-)} = \int\limits_{(-\infty;x]} \frac{(1-G(u-))dH^c(u;i)}{1-N(u-)}, \quad i \in \Im,$$

$$\Delta\Lambda(x;i) = \frac{\Delta M(x;i)}{1-N(x-)} = \frac{(1-G(x-))\Delta H(x;i)}{1-N(x-)}, \quad i \in \Im,$$

$$\sum_{i=1}^{k} \Lambda(x;i) = \int\limits_{(-\infty;x]} \frac{(1-G(u-))dH(u)}{1-N(u-)} = \Lambda_H(x),$$

$$\sum_{i=0}^{k} \Lambda(x;i) = \int\limits_{(-\infty;x]} \frac{dN(u)}{1-N(u-)} = \Lambda_N(x).$$

Функционалы $\{F_m(\bullet;i),\ i \in \Im;\ m = 1,2,3\}$ в данной модели $(Z \wedge Y;B)$ могут быть представлены следующими тремя формулами при $(x;i) \in Sp(N) \times \Im$:

$$1 - F_1(x;i) = \exp\left(-\int\limits_{(-\infty;x]} \frac{dM^c(u;i)}{1-N(u-)}\right) \prod_{u \le x} \exp\left(-\frac{\Delta M(u;i)}{1-N(u-)}\right),$$

$$1 - F_2(x;i) = \exp\left(-\int\limits_{(-\infty;x]} \frac{dM^c(u;i)}{1-N(u-)}\right) \prod_{u \le x} \left(1-\frac{\Delta M(u;i)}{1-N(u-)}\right), \tag{1.3.27}$$

$$1 - F_3(x;i) = [1 - N(x-)]^{\overline{R}(x;i)},$$

где $\overline{R}(x;i) = \dfrac{\Lambda(x;i)}{\Lambda_N(x)}$, $i \in \Im$. В рассматриваемой модели при оценивании функционалов $\{F_m(\bullet;i),\ i \in \Im;\ m = 1,2,3\}$ в качестве мешающих выступают функционалы $\{F_m(\bullet;0),\ m = 1,2,3\}$, соответственно, определяемые формулами, аналогичными (1.3.27), где вместо $\{M(x;i);\ i \in \Im\}$ будет присутствовать $M(x;0)$. При этом, в частности, если H-непрерывная ф.р., то $\Lambda(x;0) = \Lambda_G(x)$ и тогда все три функционала $\{F_m(\bullet;0),\ m = 1,2,3\}$ будут зависеть только от Λ_G. Если же вдобавок и G-непрерывная ф.р., тогда $\Lambda_G(x) = -\log(1 - G(x))$ и при всех $m = 1,2,3$: $F_m(x;0) \equiv G(x),\ x \in \overline{R}$. ■

Замечание 1.3.7. Легко видеть, что рассматриваемая модель $(Z \wedge Y;B)$ включает в себя модели случайного цензурирования справа и конкурирующих рисков (т.е. $(Z;A)$-модель), получаемые соответственно при $k = 1$ $\left(A^{(1)} = \Omega\right)$ и $P(Y = +\infty) = 1$. ■

Замечание 1.3.8. В модели $(Z \wedge Y; B)$ также можно ввести МПИ, полагая (см. (1.3.19))

$$M(x;i) = \widetilde{p}^{(i)} N(x), \qquad (x;i) \in \overline{R} \times \overline{\Im}, \tag{1.3.28}$$

где $\widetilde{p}^{(i)} = P(B^{(i)}) \in (0,1),\ i \in \overline{\Im}$ и $\widetilde{p}^{(0)} + \widetilde{p}^{(1)} + ... + \widetilde{p}^{(k)} = 1$. В частности, если ф.р. N и G непрерывны, то (1.3.28) равносильно (согласно лемме 1.3.5) представлению функционалов в следующем виде для всех $m = 1,2,3$:

$$1 - F_m(x;i) = [1 - N(x)]^{\widetilde{p}^{(i)}}, \qquad (x;i) \in \overline{R} \times \Im.$$

В свою очередь, это равенство является необходимым и достаточным условием для независимости ξ_j и $\Delta_j^{(i)},\ j \geq 1$. ■

Таким образом, представления (1.3.27) для функционалов $\{F_m(\bullet;i),\ i \in \Im;\ m = 1,2,3\}$ являются ключевыми для построения непараметрических оценок для них в модели $(Z \wedge Y; B)$.

III. Модель *(Z$\vee$L;C)*. Теперь рассмотрим случай, когда пары $\{(Z; A^{(i)}),\ i \in \Im\}$ модели $(Z; A)$ подвергаются случайному цензурированию слева с.в-ой L с непрерывной справа ф.р. $K(s) = P(L \leq s),\ s \in \overline{R}$. При этом Z и L независимы. Наблюдению доступна совокупность $\{Z \vee L; C^{(0)}, C^{(1)}, ..., C^{(k)}\}$, где $C^{(0)} = \{\omega : Z(\omega) < L(\omega)\}$ и $C^{(i)} = A^{(i)} \cap \{\omega : L(\omega) \leq Z(\omega)\},\ i \in \Im$. При этом $P\left(\bigcup_{i \in \overline{\Im}} C^{(i)}\right) = 1$ и $C^{(i)} \bigcap_{i \neq j} C^{(j)} = \varnothing,\ i,j \in \overline{\Im}$ (или хотя бы $P(C^{(i)} \cap C^{(j)}) = 0,\ i,j \in \overline{\Im}$). В данной модели также интерес представляют с.в. Z и события $\{A^{(i)}, i \in \Im\}$, а с.в. L и её ф.р. K считаются мешающими. Наблюдается выборка $S_2^{(n)} = \{(\eta_j; \varepsilon_j^{(0)}, \varepsilon_j^{(1)}, ..., \varepsilon_j^{(k)})^T,\ j = 1,...,n\}$, где $\eta_j = Z_j \vee L_j$, $\varepsilon_j^{(i)} = I(C_j^{(i)}),\ i \in \overline{\Im}$ и $\{Z_j; L_j; C_j^{(0)}, C_j^{(1)}, ..., C_j^{(k)},\ j \geq 1\}$-последовательность независимых и одинаково распределенных копий совокупности $\{Z; L; C^{(0)}, C^{(1)}, ..., C^{(k)}\}$. Поскольку для нас интерес представляют функционалы $\{F_m(\bullet;i),\ i \in \Im;\ m = 1,2,3\}$, то с целью построения для них непараметрических оценок найдём соответствующие представления в данной модели $(Z \vee L; C)$. Введём вспомогательные распределения: $B(x) = P(\eta_j \leq x) = K(x)H(x),\ x \in \overline{R}$, - ф.р. с.в. η_j, субраспределения, определяемые равенствами $Q(x;i) = P(\eta_j \leq x, C^{(i)})$, $(x;i) \in \overline{R} \times \overline{\Im}$. Здесь

$$Q(x;0) = P(Z < L,\ L \leq x) = \int_{(-\infty;x]} H(u-)dK(u),\ \ x \in \overline{R},$$

и для всех $(x;i) \in \overline{R} \times \Im$:

$$Q(x;i) = P(L \leq Z \leq x;\ A^{(i)}) = \int_{(-\infty;x]} K(u)dH(u;i).$$

Как и в пункте II (см. (1.3.26)) согласно формуле (1.2.10) (естественно, предполагая $\cap_{i \in \overline{\Im}} Sp(Q(\bullet;i)) \neq \varnothing$), имеем

$$\sum_{i=0}^{k} Q(x;i) = \int_{(-\infty;x]} H(u-)dK(u) + \int_{(-\infty;x]} K(u)dH(u) = B(x), \quad x \in \overline{R}.$$

Данная модель характерна и тем, что нам приходится иметь дело с усеченными слева версиями к.ф.и. $\{\Lambda(\bullet;i);\ i \in \Im\}$, а следовательно и функционалов $\{F_m(\bullet;i),\ i \in \Im;\ m = 1,2,3\}$. Выберем число $\tau = \tau(K;H)$ из условий:

$$\begin{cases} \inf\limits_{x \in [\tau;\infty) \cap Sp(H)} K(x)(1 - H(x-)) > 0, \\ \bigcap\limits_{i \in \overline{\Im}} \Gamma_{K,\tau}^{(i)} \neq Щ \end{cases} \qquad (1.3.29)$$

где $\Gamma_{K,\tau}^{(i)} = \{x \in R : 0 < \Lambda_\tau(x;i) < \infty\},\ \ i \in \overline{\Im}$,

$$\Lambda_\tau^*(x;i) = \int_{[\tau;x]} \frac{dH(u;i)}{1 - H(u-)} = \int_{[\tau;x]} \frac{dQ(u;i)}{K(u)(1 - H(u-))}, \quad i \in \Im, \qquad (1.3.30)$$

$$\Lambda_\tau^*(x;0) = \int_{[x;\infty)} \frac{dK(u)}{K(u-)} = \int_{[x;\infty)} \frac{dQ(u;0)}{K(u-)H(u-)} = \int_{[x;\infty)} \frac{dQ(u;0)}{B(u-)}, \quad x \geq \tau.$$

в данной модели рассмотрим следующие усеченные версии функционалов при $(x;i) \in ([\tau;\infty) \cap Sp(H)) \times \Im$:

$$1 - F_{1\tau}^*(x;i) = \exp(-\Lambda_\tau^*(x;i)) = \exp(-\Lambda_\tau^{*c}(x;i)) \prod_{\tau \leq u \leq x} \exp(-\Delta\Lambda_\tau^*(u;i)),$$

$$1 - F_{2\tau}^*(x;i) = \exp(-\Lambda_\tau^{*c}(x;i)) \prod_{\tau \leq u \leq x} (1 - \Delta\Lambda_\tau^*(u;i)), \qquad (1.3.31)$$

$$1 - F_{3\tau}^*(x;i) = \left[\frac{K(x)(1 - H(x-))}{K(\tau)(1 - H(\tau-))}\right]^{R_\tau^*(x;i)},$$

где $R_\tau^*(x;i) = \Lambda_\tau^*(x;i)\left\{-\int\limits_{[\tau;x]} \frac{d[K(u)(1 - H(u-))]}{K(u)(1 - H(u-))}\right\}^{-1} \in [0,1]$.

Отметим ещё одну, на наш взгляд существенную особенность данной модели. Вероятность

$$K(u)(1 - H(u-)) = P(L \leq u \leq Z) \qquad (1.3.32)$$

не является монотонной функцией по $u \in R$. Поэтому, правая часть представления для к.ф.и. $\{\Lambda(\bullet;i);\ i \in \Im\}$ (т.е. (1.3.30)) в данной модели может и не обладать свойствами функционалов $\{L(\bullet;i);\ i \in \Im\}$ из § 1.2. Заметим, что структуры оценок функционалов (1.3.31) существенно зависят от вида оценок для вероятности (1.3.32). В этой связи следует различать следующие два случая: а) Пусть вместо выборки $S_2^{(n)}$ наблюдается более богатая выборка $\widetilde{S}_2^{(n)}$, в которой параллельно с η_j наблюдается и L_j: $\widetilde{S}_2^{(n)} = \{(\eta_j; L_j; \varepsilon_j^{(0)}, \varepsilon_j^{(1)}, ..., \varepsilon_j^{(k)}),\ j = 1,...,n\}$. Тогда вероятность (1.3.32) можно оценить либо следующей эмпирической функцией

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} I(L_j \le u \le Z_j)\,, \tag{1.3.33}$$

либо, используя представление

$$K(u)(1 - H(u-)) = K(u) - B(u-) - \Delta Q(u;0)\,, \tag{1.3.34}$$

в правую часть которого входят функции, допускающие обычное эмпирическое оценивание по выборке $\widetilde{S}_2^{(n)}$. Представление (1.3.34) следует из формулы $Q(u;i)$ и равенства $\sum_{i=0}^{k} \Delta Q(u;i) = H(u-)\Delta K(u) + K(u)\Delta H(u) = \Delta B(u)$.

б) В общей ситуации, когда наблюдаема лишь выборка $\widetilde{S}_2^{(n)}$, ф.р. $K(u)$ будет мешающей и вероятность (1.3.32) можно будет оценивать по формуле (1.3.34). При этом функции $B(u)$ и $\Delta Q(u;i)$ допускают эмпирическое оценивание, однако ф.р. $K(u)$ может быть оценена с использованием следующих функционалов (аналогов (1.3.31)) при $x \ge \tau$:

$$F_{1\tau}(x;0) = \exp(-\Lambda_\tau^*(x;0)) = \exp(-\Lambda_\tau^c(x;0)) \prod_{u \ge x \ge \tau} \exp(-\Delta\Lambda_\tau^*(u;0)),$$

$$F_{2\tau}(x;0) = \exp(-\Lambda_\tau^{*c}(x;0)) \prod_{u \ge x \ge \tau} (1 - \Delta\Lambda_\tau^*(u;0)), \tag{1.3.35}$$

$$F_{3\tau}(x;0) = [B(x)]^{r(x)}, \quad r(x) = \Lambda_\tau^*(x;0) / \Lambda_B^*(x) \in [0,1],$$

где,

$$\Lambda_\tau^*(x;0) = \int_{[x;\infty)} \frac{dK(u)}{K(u-)} = \int_{[x;\infty)} \frac{dQ(u;0)}{B(u-)}\,,$$

$$\Lambda_B^*(x) = \Lambda_\tau^*(x;0) + \sum_{i=1}^{k} \int_{[x;\infty)} \frac{dQ(u;i)}{B(u-)} = \int_{[x;\infty)} \frac{dB(u)}{B(u-)}\,.$$

В частности, если $K(x)$ дискретная ф.р., то оценку для неё можно построить по $F_{2\tau}(x;0)$. В случае же непрерывного распределения $K(x)$, для этих целей можно использовать $F_{1\tau}(x;0)$ и $F_{3\tau}(x;0)$. Нетрудно убедится в том, что если $K(x)(1 - H(x-))$ и $\{\Lambda(x;i);\ i \in \Im\}$ непрерывные функции для всех $x \ge \tau$, то $F_{1\tau}(x;i) \equiv F_{2\tau}(x;i) \equiv F_{3\tau}(x;i)$ для всех $(x;i) \in [\tau;\infty) \times \Im$. Вполне аналогично, если для всех $x \ge \tau$ функции $K(x)$ и $H(x)$ непрерывны, то $F_{1\tau}(x;0) \equiv F_{2\tau}(x;0) \equiv F_{3\tau}(x;0)$, $x \ge \tau$.

IV. Модель *$(L \vee (Z \wedge Y);D)$*. Рассмотрим более общую модель, в которой интересующая нас с.в. Z с ф.р. H и события $\{A^{(i)}, i \in \Im\}$ подвергаются случайному цензурированию справа и слева с.в-нами Y и L соответственно с ф.р. G и K. Все распределения считаются непрерывными справа. Предполагается также, что с.в.-ны $\{Z, Y, L\}$ независимы в совокупности. В данной модели наблюдается выборка $S_3^{(n)} = \left\{\left(\zeta_j; \chi_j^{(0)}, \chi_j^{(1)}, ..., \chi_j^{(k)}\right)^T, \ j = 1,...,n\right\}$, где $\zeta_j = L_j \vee (Z_j \wedge Y_j)$, $\chi_j^{(i)} = I(D_j^{(i)}),\ i \in \overline{\Im}$, $D_j^{(0)} = \{\omega: Z_j(\omega) \wedge Y_j(\omega) < L_j(\omega)\} \cup \{\omega: L_j(\omega) \le Y_j(\omega) < Z_j(\omega)\}$, $D_j^{(i)} = A_j^{(i)} \cap \{\omega: L_j(\omega) \le Z_j(\omega) \le Y_j(\omega)\}$, $i \in \Im$ и $\{Z_j; L_j; Y_j; D_j^{(0)}, D_j^{(1)}, ..., D_j^{(k)}, \ j \ge 1\}$-последовательность независимых и одинаково распределенных копий совокупности $\{Z; L; Y; D^{(0)}, D^{(1)}, ..., D^{(k)}\}$, где $D^{(0)} = \{\omega: Z(\omega) \wedge Y(\omega) < L(\omega)\} \cup \{\omega: L(\omega) \le Y(\omega) < Z(\omega)\}$, $D^{(i)} = A^{(i)} \cap \{\omega: L(\omega) \le Z(\omega) \le Y(\omega)\}$, $i \in \Im$. Таким образом, в данной модели интерес представляют с.в. Z и события $\{A^{(i)}; i \in \Im\}$, а с.в-ны Y и L с ф.р. G и K соответственно считаются мешающими. Легко видеть, что события $\{D^{(i)}; i \in \Im\}$ также обладают свойствами событий $\{A^{(i)}; i \in \Im\}$. Рассматриваемая модель является обобщением моделей $(Z \wedge Y; B)$ и $(Z \vee L; C)$, получаемых соответственно при $P(L = -\infty) = 1$ и $P(Y = +\infty) = 1$. Легко видеть, что с.в. $\zeta = L \vee (Z \wedge Y)$ имеет ф.р. $E(x) = P(\zeta \le x) = K(x) \cdot (1 - (1 - G(x)) \cdot (1 - H(x)))$. В этой модели пары $(Z_j; A_j^{(i)})$ наблюдаемы лишь в случае $\chi_j^{(i)} = 1,\ i \in \Im$. Учитывая это обстоятельство введём вспомогательные субраспределения: $T(x;0) = T_1(x;0) + T_2(x;0),\ x \in \overline{R}$, где

$$T_1(x;0) = P(Z \wedge Y < L; L \le x) = \int_{(-\infty;x]} (1 - (1 - G(u))(1 - H(u)))DK(u),$$

$$T_2(x;0) = P(L \le Y < Z; Y \le x) = \int_{(-\infty;x]} K(u)(1 - H(u))dG(u),$$

а также для всех $(x;i) \in \overline{R} \times \Im$:

$$T(x;i) = P(L \le Y \le Z;\ Z \le x,\ A^{(i)}) = \int_{(-\infty;x]} K(u)(1 - G(u-))dH(u;i).$$

Используя формулы (1.2.10) и (1.2.10)' получаем

$$\sum_{i=0}^{k} T(x;i) = \int_{(-\infty;x]} (1 - (1 - G(u-))(1 - H(u-)))dK(u) + \int_{(-\infty;x]} K(u)(1 - H(u))dG(u) +$$

$$+ \int_{(-\infty;x]} K(u)(1 - G(u-))dH(u) = \int_{(-\infty;x]} (1 - (1 - G(u-))(1 - H(u-)))dK(u) +$$

$$+\int_{(-\infty;x]} K(u)d(1-(1-G(u))\cdot(1-H(u))) = E(x), \qquad x\in\overline{R}, \qquad (1.3.36).$$

т.е. требуемое свойство субраспределений имеет место. В данной модели представления для усеченных слева версий к.ф.и. имеют вид:

$$\Lambda_\tau(x;i)=\int_{[\tau;x]}\frac{d\mathrm{H}(u;i)}{1-\mathrm{H}(u-)}=\int_{[\tau;x]}\frac{dT(u;i)}{K(u)\cdot(1-G(u-))\cdot(1-H(u))}$$
$$=\int_{[\tau;x]}\frac{dT(u;i)}{P(L\le u\le Z\wedge Y)}, \qquad (x;i)\in[\tau;x)\times\Im, \qquad (1.3.37)$$

$$\Lambda_{1\tau}(x;0)=\int_{[x;\infty)}\frac{dK(u)}{K(u-)}=\int_{[x;\infty)}\frac{dT_1(u;0)}{E(u-)}, \quad x\ge\tau\ .$$

Здесь число $\tau=\tau(K,G,H)$ удовлетворяет условиям:

$$\begin{cases}\inf\limits_{x\in[\tau;\infty)\times Sp(\gamma)}\{K(x)(1-\gamma(x-))\}>0,\\ \bigcap\limits_{i\in\overline{\Im}}\Gamma^{(i)}_{K,G,\tau}\ne Ш,\end{cases} \qquad (1.3.38)$$

где $\gamma(x)=1-(1-G(x))(1-H(x))$, $\Gamma^{(i)}_{K,G,\tau}=\{x\in R: 0<\Lambda_\tau(x;i)<\infty\}$, $i\in\Im$, $\Gamma^{(0)}_{K,G,\tau}=\{x\in R: 0<\Lambda_{1\tau}(x;0)<\infty\}$. Легко видеть, что в представлении $\Lambda_{1\tau}(x;0)$ функции $T_1(x;0)$ и $E(x)$ допускают эмпирическое оценивание. В представлении $\Lambda_\tau(x;i)$ функции $T(x;i)$ также оцениваются эмпирически. Однако, вероятность $q(u)=P(L\le u\le Z\wedge Y)$ допускает различные оценки. Как и в предыдущем пункте рассмотрим два случая: (A) Наблюдается следующая более богатая выборка, чем $S_3^{(n)}$: $\widetilde{S}_3^{(n)}=\{(\zeta_j;L_j;\chi_j^{(0)},\chi_j^{(1)},...,\chi_j^{(k)}),\ j=1,...,n\}$, где наряду с ζ_j одновременно наблюдаются и L_j. Тогда вероятность $q(u)$ можно оценить эмпирической функцией

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}I(L_j\le u\le Z_j\wedge Y_j)=q_n(u)\,. \qquad (1.3.39)$$

Однако, есть и другой способ оценки рассматриваемой вероятности, основанный на следующее, легко проверяемое равенство: $P(L\le u\le Z\wedge Y)=$ $=K(u)\cdot(1-\gamma(u-))=K(u)-E(u)+K(u)\Delta\gamma(u)$. Так как $\Delta E(u)=\Delta T_1(u;0)+\Delta T_2(u;0)+$ $+\sum_{i=1}^{k}\Delta T(u;0)=\Delta T_1(u;0)+K(u)\Delta\gamma(u)$, следовательно,

$$P(L\le u\le Z\wedge Y)=K(u)+E(u-)-\Delta T_1(u;0)\,. \qquad (1.3.40)$$

Все функции, входящие в правую часть равенства (1.3.40) могут быть оценены эмпирическими функциями по выборке $\widetilde{S}_3^{(n)}$ (см. § 1.4). (В) Представление (1.3.40) может быть использовано при оценивании той же вероятности и по выборке $S_3^{(n)}$. Разница с предыдущим случаем будет лишь в том, что ф.р. $K(u)$ теперь невозможно оценить эмпирически. Для этой цели могут быть использованы следующие аналоги функционалов (1.3.34) при $x \geq \tau$:

$$F_{1\tau}^{(1)}(x;0) = \exp(-\Lambda_{1\tau}^c(x;0))\prod_{x\leq u}\exp(-\Delta\Lambda_{1\tau}(x;0)),$$

$$F_{2\tau}^{(1)}(x;0) = \exp(-\Lambda_{1\tau}^c(x;0))\prod_{x\leq u}(1-\Delta\Lambda_{1\tau}(x;0)), \tag{1.3.41}$$

$$F_{3\tau}^{(1)}(x;0) = \left[E(x)\right]^{d(x)},$$

где $d(x) = \Lambda_{1\tau}(x;0)/\Lambda_E^*(x) \in [0;1]$;

$$\Lambda_E^*(x) = \Lambda_{1\tau}(x;0) + \int_{[x;\infty)}\frac{dT_2(u;0)}{E(u-)} + \sum_{i=1}^{k}\int_{[x;\infty)}\frac{dT(u;i)}{E(u-)} = \sum_{i=0}^{k}\int_{[x;\infty)}\frac{dT(u;i)}{E(u-)} = \int_{[x;\infty)}\frac{dE(u)}{E(u-)}.$$

Правые части функционалов (1.3.41) могут быть оценены по выборке $S_3^{(n)}$. Теперь введем представления функционалов от к.ф.и. $\Lambda_\tau(x;i)$ следующими формулами при $(x;i) \in \left([\tau;\infty)\cap Sp(\gamma)\right)\times\Im$:

$$1 - F_{1\tau}(x;i) = \exp(-\Lambda_\tau(x;i)) = \exp(-\Lambda_\tau^c(x;i))\cdot\prod_{\tau\leq u\leq x}\exp(-\Delta\Lambda_\tau(u;i)),$$

$$1 - F_{2\tau}(x;i) = \exp(-\Lambda_\tau^c(x;i))\cdot\prod_{\tau\leq u\leq x}(1-(-\Delta\Lambda_\tau(u;i))), \tag{1.3.42}$$

$$1 - F_{3\tau}(x;i) = \left[\frac{P(L\leq x\leq Z\wedge Y)}{P(L\leq\tau\leq Z\wedge Y)}\right]^{R_\tau(x;i)},$$

где

$$R_\tau(x;i) = \Lambda_\tau(x;i)\cdot\left\{-\int_{[\tau;x]}\frac{dP(L\leq u\leq Z\wedge Y)}{P(L\leq u\leq Z\wedge Y)}\right\}^{-1} \in [0,1].$$

В функционалах (1.3.42) вероятность (1.3.40) (а следовательно и $\Lambda_\tau(x;i)$ можно будет оценить двумя способами, как это было отмечено в пунктах (А) и (В) соответственно по выборкам $\widetilde{S}_3^{(n)}$ и $S_3^{(n)}$.

В заключении настоящего параграфа сделаем несколько замечаний общего характера:

а) Непараметрические оценки для функционалов, определенных в различных моделях цензурирования будут построены в § 1.4. ■

б) До сих пор нами были рассмотрены модели однородного цензурирования, когда интересующие нас с.в.-ны были одинаково распределенными. Некоторые обобщения на случай неоднородного цензурирования с исследованием свойств оценок приведены в § 2.2. ■

с) Аналогичные результаты для моделей пропорциональных интенсивностей, а также многомерного цензурирования приведены в § § 3.2.и 2.4 соответственно. ■

д) Если вероятность (1.3.40) и $\{\Lambda_\tau(\bullet;i), i \in \Im\}$ непрерывные функции для всех $x \geq \tau$, то функционалы (1.3.42) становятся идентичными. Вполне аналогично, если таковыми являются ф.р. K, G и H, то совпадают и функционалы (1.3.41). ■

е) Отметим, что если базовая $(Z;A)$-модель есть МКР с $Z = \underset{i\in\Im}{\wedge} Y^{(i)}$ и $A^{(i)} = \{\omega : Z(\omega) = Y^{(i)}(\omega)\}$, $i \in \Im$, где с.в. $\{Y^{(i)},\ i \in \Im\}$ могут быть зависимыми и удовлетворяют условию $(У3)''$ настоящего параграфа, т.е. для всех $(x;i) \in R \times \Im$:

$$\Lambda(x;i) = \int\limits_{(-\infty;ч]} \frac{dP(Y^{(i)} \leq u)}{P(Y^{(i)} \geq u)}, \tag{1.3.43}$$

то доказанные все свойства функционалов $\{F_m(\bullet;i),\ i \in \Im;\ m = 1,2,3\}$ остаются в силе. Более того, аналог условия (1.3.43) можно ввести и в общей $(L \vee (Z \wedge Y); D)$-модели, отказавшись от условия независимости с.в. $\{L,\ Y^{(i)},\ i \in \Im\}$ и рассмотрев следующее равенство для всех $(x;i) \in [\tau;\infty) \times \Im$:

$$\Lambda_\tau(x;i) = \int\limits_{[\tau;x]} \frac{dT(u;i)}{P(L \leq u \leq Z \wedge Y)} = \int\limits_{[\tau;x]} \frac{dP(Y^{(i)} \leq u)}{P(Y^{(i)} \geq u)}. \tag{1.3.44}$$

Ряд свойств оценок рассматриваемых трёх классов функционалов остаются в силе и при зависимой модели с условием (1.3.44). ■

к) В настоящей книге будет рассмотрена ещё одна разновидность зависимой $(L \vee (Z \wedge Y); D)$-модели, в которой с.в. $\{L, Z, Y\}$ будут независимыми в совокупности при заданном векторе ковариат $V = (V_1, \ldots, V_p)$. Специальный случай такой модели, т.е. модель Кокса рассматривается в § 1.6. ■

§ 1.4. Построение непараметрических оценок для базовых функционалов по неполным выборкам

В настоящем параграфе нами будут построены непараметрические оценки для функционалов, введённых в § 1.2. При этом будут использованы представления для них, введенные в § 1.3 в различных моделях неполных данных.

I. Модель *(Z;A)*. Рассмотрим следующие функционалы из § 1.3, при $i \in \Im$:

$$F_1(x;i) = 1 - \exp(-\Lambda^c(x;i))\prod_{u\le x}\exp(-\Delta\Lambda(u;i)),$$

$$F_2(x;i) = 1 - \exp(-\Lambda^c(x;i))\prod_{u\le x}(1-\Delta\Lambda(u;i)), \tag{1.4.1}$$

$$F_3(x;i) = 1 - \left[1 - H(x-)\right]^{R(x;i)}.$$

Пусть $H_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} I(Z_j \le x) = \sum_{i=1}^{k} H_n(x;i), \quad H_n(x;i) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} I(Z_j \le x, \delta_j^{(i)} = 1), i \in \Im,$ - эмпирические оценки $H(x)$ и $H(x;i)$, построенные по выборке $S_0^{(n)}$. Методом подстановки оценим и функционалы (1.4.1):

$$F_{1n}(x;i) = 1 - \prod_{u\le x}\exp(-\Delta\Lambda_n(u;i)) = 1 - \exp(-\Lambda_n(x;i)),$$

$$F_{2n}(x;i) = 1 - \prod_{u\le x}(1-\Delta\Lambda_n(u;i)), \tag{1.4.2}$$

$$F_{3n}(x;i) = 1 - \left[1 - H(x-)\right]^{R_n(x;i)},$$

где

$R_n(x;i) = \frac{\Lambda_n(x;i)}{\Lambda_n(x)}, \quad \Lambda_n(x) = \int_{(-\infty;x]} \frac{dH_n(u)}{1-H_n(u-)}, \quad \Lambda_n(x;i) = \int_{(-\infty;x]} \frac{dH_n(u;i)}{1-H_n(u-)}$, -оценки для $R(x;i)$, $\Lambda_H(x)$ и $\Lambda(x;i)$ соответственно.

Следует отметить, что экспоненциальная оценка $F_{1n}(x;i)$ является обобщенным аналогом оценки Альтшулера-Бреслоу [106,117] в модели $(Z;A)$. Эта оценка в непараметрической теории оценивания по неполным данным была использована в качестве вспомогательной при исследовании известной оценки Каплана-Мейера [228], которая представляет собой специальный случай оценки $F_{2n}(x;i)$. В свою очередь, обе эти оценки в модели $(Z;A)$ довольно подробно были исследованы в работах [125, 126, 152, 153, 212]. Имеется огромное количество работ, среди которых следует отметить [118,126,149,152,177-179,193,249,282], где множительная оценка F_{2n} (или некоторые её модификации) в специальной модели случайного цензурирования справа исследованы в основном с асимптотической точки зрения. Отметим, что при довольно общих условиях обе оценки являются равномерно строго состоятельными и при соответствующих нормировках асимптотически гауссовыми с одним и тем же предельным законом. Оценка же $F_{3n}(x;i)$ впервые предложена автором настоящей монографии. Эта оценка также асимптотически эквивалентна первым двум. Однако, она обладает и некоторыми преимуществами по сравнению с предыдущими двумя. Поскольку оценки $\{F_{mn}, m=1,2,3\}$ являются специальными случаями функционалов (1.4.1), то для них справедливы ряд утверждений, доказанные в § 1.3. В частности, из теоремы 1.3.1 получаем утверждение, очень полезное для сравнения оценок (1.4.1). Сперва заметим, что

$$\sup_{-\infty\langle x\langle\infty} \Delta \mathrm{H}_n(x)=\frac{1}{n}, \quad п.н.; \qquad \sup_{-\infty\langle x\langle\infty} \Delta \mathrm{H}_n(x;i)=\frac{1}{n}, \quad п.н.; \qquad i\in\Im. \tag{1.4.3}$$

Пусть $Z_{(n)}=\max\{Z_1,\ldots,Z_n\}$.

Теорема 1.4.1. При $(x;i)\in(-\infty;Z_{(n)})\times\Im$ неравенства (I)-(VI) из §1.3 остаются справедливыми, если функционалы $\{F_m(x;i), m=1,2,3\}$ заменить на их оценки (1.4.1), а функционалы $\{\omega_k(x;i),\ k=1,2;\ \omega_3(x)\}$ на $\varphi_n(x)$, где

$$\varphi_n(x)\overset{п.н.}{=}O\left(\left(n(1-\mathrm{H}_n(x))^2\right)^{-1}\right). \tag{1.4.4}$$

Доказательство теоремы 1.4.1. Нам остаётся лишь показать, что при каждом $x<Z_{(n)}$:

$$\max\{\omega_3(x),\ \omega_{kn}(x;i),\ k=1,2;\ i\in\Im\}\le\varphi_n(x), \tag{1.4.5}$$

где ω_{kn}-оценки для ω_k, получаемые заменой H и $H(\bullet;i)$ на их оценки. Легко установить, что согласно (1.4.3):

$$\omega_{1n}(x;i)=\frac{1}{2}\sum_{u\le x}[\Delta\Lambda_n(x;i)]^2=\frac{1}{2}\sum_{u\le x}\left[\frac{\Delta\mathrm{H}_n(u;i)}{1-\mathrm{H}_n(u-)}\right]^2<\varphi_n(x),$$

$$\omega_{2n}(x;i)=\sum_{u\le x}\frac{[\Delta\Lambda_n(u;i)]^2}{[1-\Delta\Lambda_n(u;i)]}=\sum_{u\le x}\frac{[\Delta\mathrm{H}_n(u;i)]^2}{(1-\mathrm{H}_n(u;i))(1-H_n(u-;i))}<\sum_{u\le x}\left[\frac{\Delta H_n(u;i)}{1-H_n(u)}\right]^2<\varphi_n(x),$$

$$\omega_{3n}(x)=\sum_{u\le x}\frac{[\Delta\Lambda_n(u)]^2}{[1-\Delta\Lambda_n(u)]}-\Delta\Lambda_n(x)\le\sum_{u\le x}\left[\frac{\Delta H_n(u)}{1-H_n(u)}\right]^2<\varphi_n(x),$$

этим и завершается доказательство теоремы 1.4.1. ■

Из только, что доказанный теоремы следует «грубая» асимптотическая эквивалентность трёх оценок. Однако, согласно неравенствам (I) и (V) при конечном объёме выборки n справедливы также и следующие интересные соотношения: $F_{3n}(x;i) > F_{1n}(x;i)$; $F_{2n}(x;i) \geq F_{1n}(x;i)$. Следует отметить, что оценки F_{1n} и F_{2n} (согласно лемме 2 в [192]), а также F_{3n} (согласно лемме 1.2.4) являются непрерывными функционалами от эмпирических оценок. Далее, наряду с оценкой F_{3n} рассмотрим также и следующую её модификацию:

$$F_{3n}^{+}(x;i) = 1 - [1 - H_n(x)]^{R_n(x;i)}, \qquad (x;i) \in R \times \Im. . \tag{1.4.6}$$

Согласно четвёртому неравенству (1.3.6), формуле Тейлора и первому из равенств (1.4.3) для $(x;i) \in (-\infty; Z_{(n)}) \times \Im$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} &\left| F_{3n}^{+}(x;i) - F_{3n}(x;i) \right| \leq R_n(x;i) \left| \log(1 - H_n(x-)) - \log(1 - H_n(x)) \right| \leq \\ &\leq \frac{\Delta H_n(x)}{\theta_n(x)} \overset{п.н.}{=} O\left(\left(n(1 - H_n(x)) \right)^{-1} \right), \end{aligned} \tag{1.4.7}$$

где $\theta_n(x) \in [1 - H_n(x);\ 1 - H_n(x-)]$. ■

С учётом этой близости оценок F_{3n}^{+} и F_{3n} в дальнейшем будем иметь дело с одной из них. Через F_{3n}^{+} обозначим функционал (аналог F_{3n}), получаемый из F_3 заменой $H(x\text{-})$ на $H(x)$. Теперь остановимся на одном из важных преимуществ оценки F_{3n}^{+}. При помощи трех классов оценок образуем следующие множительные оценки:

$$\begin{aligned} &\prod_{i=1}^{k} (1 - F_{1n}(x;i)) = \exp(-\Lambda_n(x)) = \Phi_1(H_n)(x), \\ &\prod_{i=1}^{k} (1 - F_{2n}(x;i)) = \prod_{i=1}^{k} \prod_{u \leq x} (1 - \Delta\Lambda_n(u;i)) = \Phi_2(H_n)(x), \\ &\prod_{i=1}^{k} (1 - F_{3n}^{+}(x;i)) = \Phi_0(H_n)(x) = 1 - H_n(x), \end{aligned} \tag{1.4.8}$$

где функционалы Φ_m, m=0,1,2 были исследованы в § 1.2. Аналогично теореме 1.4.1, ввиду теоремы 1.3.3 легко установить соответствующие оценки и для функционалов (1.4.8). Однако, мы покажем достоинства F_{3n}^{+} при произвольном объёме выборки n. Рассмотрение множительных оценок (1.4.8) представляет интерес, если функционалы $\{1 - F_m(x;i); m = 1,2,3; i \in \Im\}$, например, могут быть истолкованы в качестве

ВеБР k независимо испытываемых объектов (подсистем). Тогда $\Phi_o(H)(x)=\prod_{i=1}^{k}\left(1-F_3^+(x;i)\right)=1-H(x)$ более подходит в качестве ВеБР некоего основного объекта (системы), чем функционалы

$$\Phi_1(H)(x)=\prod_{i=1}^{k}(1-F_1(x;i))=\exp(-\Lambda_H(x)),$$

$$\Phi_1(H)(x)=\prod_{i=1}^{k}(1-F_2(x;i))=\prod_{i=1}^{k}\left\{\prod_{u\le x}(1-\Delta\Lambda(u;i))\right\}\exp\left(-\Lambda_H^c(u)\right).$$

С другой стороны, в случае непрерывности всех субраспределений $\{H(\bullet;i),i\in\Im\}$ $\Phi_o(H)(x)=\Phi_1(H)(x)=\Phi_2(H)(x)=1-H(x)$, т.е. Φ_o остается прежним. Однако, в этом случае, согласно (1.4.8) $\Phi_1(H_n)(x)\neq 1-H_n(x)$ и $\Phi_2(H_n)(x)\neq 1-H_n(x)$, т.е. только оценка F_{3n}^+ остаётся отвечающей модели $(Z;A)$ ввиду свойства идентифицируемости функционала $F_{3n}^+(x;i)$ с рассматриваемой моделью. Поскольку встречающиеся в испытаниях на выживаемость распределения в основном являются непрерывными, то целесообразно использование 1-F_{3n}^+ в качестве оценки для ВеБР. С другой стороны, множительная оценка F_{2n} определяется через скачки к.ф.и. $\Lambda(\bullet;i)$ и поэтому она подходящая оценка для случая дискретных распределений. Отметим ещё одно достоинство F_{3n}^+. Пусть $\delta_{(n)}^{(i)}$ индикатор, соответствующий $Z_{(n)}$. Нетрудно заметить, что $F_{1n}\left(Z_{(n)};i\right)<1,\forall i\in\Im$; $F_{2n}\left(Z_{(n)};i\right)=1$ или 0 в зависимости от того, $\delta_{(n)}^{(i)}$=1 или $\delta_{(n)}^{(i)}$=0. Однако, $F_{3n}^+\left(Z_{(n)};i\right)=1,\forall i\in\Im$.

В приложении 1 к данной книге приведены численные примеры, иллюстрирующие достоинства оценки F_{3n}^+. Как нами было отмечено в § 1.3 модель $(Z;A)$ и функционалы $\{F_m(\bullet;i),m=1,2,3;i\in\Im\}$ являются базовыми и далее они будут использованы при построении и исследовании более сложных по структуре оценок, чем рассмотренные здесь. При этом чаще всего будут рассмотрены множительные и степенные оценки. Стоит отметить, что в МПИ (см. определение 1.3.4) могут быть рассмотрены функционалы (1.3.21) и соответствующие им оценки. Такие оценки будут исследованы в § 2.7 главы 2. ■

II. Модель ($Z\wedge Y;B$). Как следует из описания этой модели (§1.3), при наличии мешающего распределения G, для функционалов (1.4.1) имеют место представления (1.3.27). Тогда аналогами оценок (1.4.2) являются

$$\overline{F}_{1n}(x;i)=1-\prod_{u\le x}\exp\left(-\frac{\Delta M_n(u;i)}{1-N_n(u-)}\right)=1-\exp\left(-\overline{\Lambda}_n(x;i)\right),$$

$$\overline{F}_{2n}(x;i)=1-\prod_{u\le x}\left(1-\frac{\Delta M_n(u;i)}{1-N_n(u-)}\right)=1-\prod_{u\le x}\left(1-\Delta\overline{\Lambda}_n(u;i)\right), \qquad (1.4.9)$$

$$\overline{F}_{3n}(x;i)=1-[1-N_n(x-)]^{\overline{R}_n(x;i)}, \qquad \overline{F}^{+}_{3n}(x;i)=1-[1-N_n(x)]^{\overline{R}_n(x;i)},$$

где

$$N_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}I(\xi_j\le x)=\sum_{i=0}^{k}M_n(x;i),$$

$$M_n(x;i)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}I\left(Z_j\le Y_j\wedge x;A_j^{(i)}\right)=\sum_{i=0}^{k}\left(\xi_j\le x,\Delta_j^{i}=1\right), \quad i\in\Im,$$

$$M_n(x;o)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}I\left(Y_j\le x,\,Y_j<Z_j\right)=\sum_{i=0}^{k}\left(\xi_j\le x,\Delta_j^{o}=1\right),$$

$$\overline{\Lambda}_n(x;i)=\int\limits_{(-\infty;x]}\frac{dM_n(u;i)}{1-N_n(u-)},\ \ i\in\Im,\ \overline{R}_n(x;i)=\frac{\overline{\Lambda}_n(x;i)}{\overline{\Lambda}_n(x)},\ \overline{\Lambda}_n(x)=\int\limits_{(-\infty;x]}\frac{dN_n(u)}{1-N_n(u-)},$$

оценки, построенные по выборки $S_1^{(n)}$. Легко видеть, что по структуре оценки (1.4.9) в $(Z\wedge Y;B)$- модели аналогичны оценкам (1.4.2) в $(Z;A)$-модели. При их исследовании приходиться учесть наличие мешающей с.в. Y и ф.р.G. В частности, имеет место аналог теоремы 1.4.1 и соотношения (1.4.7), с той лишь разницей, что вместо э.ф.р. $H_n(x)$ в этих соотношениях будет находится э.ф.р. $N_n(x)$ и $x<\xi_{(n)}$, $\xi_{(n)}=\bigvee_{i=\overline{1,n}}\xi_i$. Экспоненциальные и множительные оценки довольно подробно исследованы в МКР и при случайном цензурировании справа. Модель $(Z\wedge Y;B)$ включает в себя обе эти модели и результаты аппроксимации из [149] в § 2.3 будут доказаны и для оценок (1.4.9). При этом отметим, что оценки (1.4.9) в целом обладают всеми теми свойствами, что и их аналоги в $(Z;A)$-модели и в частности, степенные оценки сохраняют свои достоинства перед двумя остальными. Оценки для ф.р. G могут быть построены при помощи функционалов $\{F_m(x;o),m=1,2,3\}$. Если в частности, ф.р. H и G непрерывны, то для этих целей более подходящим является функционал $F_3(x;o)$, так как он идентифицируем с $(Z\wedge Y;B)$-моделью и $F_3(x;o)=1-G(x)$, $x\in\overline{R}$. ■

Теперь рассмотрим более общую модель, включающую в себя $(Z\wedge Y;B)$- и $(Z\vee L;G)$-модели.

III. Модель (*L*$\vee$(*Z*$\wedge$*Y*);*D*). В этой модели основная задача состоит в оценивании функционалов (1.3.42) по выборке $S_3^{(n)}$ (или $\widetilde{S}_3^{(n)}$). Сначала оценим субраспределения $\{T(x;i), i \in \overline{\Im}\}$ по выборке $S_3^{(n)}$ эмпирическими функциями $\{T_n(x;i), i \in \overline{\Im}\}$, где

$$T_n(x;o) = T_{1n}(x;o) + T_{2n}(x;o),$$

$$T_{1n}(x;o) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} I\left(Z_j \wedge Y_j < L_j, L_j \le x\right) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} I\left(\zeta_j \le x, \chi_{1j}^{(o)} = 1\right),$$

$$T_{2n}(x;o) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} I\left(L_j \le Y_j < Z_j, Y_j \le x\right) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} I\left(\zeta_j \le x, \chi_{2j}^{(o)} = 1\right),$$

$$T_n(x;i) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} I\left(L_j \le Z_j \le Y_j, Z_j \le x,\ A_j^{(i)}\right) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} I\left(\zeta_j \le x, \chi_j^{(i)} = 1\right), \quad i \in \Im,$$

и $\chi_{1j}^{(o)} = \chi_j^{(o)} - \chi_{2j}^{(o)} = I\left(Z_j \wedge Y_j < L_j\right)$. Пусть $E_n(x) = \sum_{i=1}^{k} T_n(x;i) = \frac{1}{n}\sum_{j=i}^{n} I\left(\zeta_j \le x\right)$. Для оценивания к.ф.и. (1.3.37) рассмотрим два случая:

а) Наблюдению доступна выборка $\widetilde{S}_3^{(n)}$. Тогда вероятность $q(u) = P(L \le u \le Z \wedge Y)$ можно оценить оценкой (1.3.29) или же по формуле (1.3.40) через $q_n^э(u) = K_n^э(u) - E_n(u-) - \Delta T_{1n}(u;o)$, где $K_n^э(u) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} I\left(L_j \le u\right)$. Однако,

$$q_n(u) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} I\left(L_j \le u \le Z_j \wedge Y_j\right) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} I\left(L_j \le u\right)(1 - I(Z_j \wedge Y_j < u)) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} I\left(L_j \le u\right) -$$

$$-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} I(\left(L_j \vee (Z_j \wedge Y_j)\right) < u) - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} I\left(Z_j \wedge Y_j < L_j\right) I(L_j = u) = q_n^э(u), \qquad u \in \overline{R}.$$

Далее в наших исследованиях непараметрических оценок функционалов более предпочтительной является оценка $q_n^э$. Через $\widetilde{\Lambda}_{эn}(x;i)$ обозначим оценку для к.ф.и. по выборке $\widetilde{S}_3^{(n)}$, где $q(u)$ оценивается через $q_n^э(u)$:

$$\widetilde{\Lambda}_{эn}(x;i) = \int\limits_{[\tau;x]} \frac{dT_n(u;i)}{q_n^э(u)}, \quad i \in \Im. \tag{1.4.10}$$

Тогда функционалы (1.3.42) оцениваются соответственно через:

$$1-\widetilde{F}_{1\tau n}(x;i)=\prod_{\tau\le u\le x}\exp(-\Delta\widetilde{\Lambda}_{\tau n}(u;i))=\exp(-\widetilde{\Lambda}_{\tau n}(x;i)),$$

$$1-\widetilde{F}_{2\tau n}(x;i)=\prod_{\tau\le u\le x}(1-\Delta\widetilde{\Lambda}_{\tau n}(u;i)), \tag{1.4.11}$$

$$1-\widetilde{F}_{3\tau n}(x;i)=\left[\frac{q_n^э(x)}{q_n^э(\tau)}\right]^{\widetilde{R}_{\tau n}(x;i)},$$

где

$$\widetilde{R}_{\tau n}(x;i)=\widetilde{\Lambda}_{\tau n}(x;i)\left[-\int\limits_{[\tau;x]}\frac{dq_n^э(u)}{q_n^э(u)}\right]^{-1},\qquad (x;i)\in[\tau;\infty)\times\Im .$$

б) Теперь рассмотрим более общую ситуацию, когда наблюдается выборка $S_3^{(n)}$. Согласно (1.3.40) к.ф.и. $\Lambda_\tau(x;i)$ оценим статистикой

$$\Lambda_{m\tau n}(x;i)=\int\limits_{[\tau;x]}\frac{dT_n(u;i)}{q_{mn}(u)},\ \ m=1,2,3;\qquad (x;i)\in[\tau;\infty)\times\Im . \tag{1.4.12}$$

где $q_{mn}(x)=K_{mn}(x)-E_n(x-)-\Delta T_{1n}(x;0)$ и $K_{mn}(x)$ оценка для ф.р. $K(x)$, построенная с использованием функционалов (1.3.41) (при $m=2$ оценка модифицирована):

где $\Lambda_{1\tau n}(x;0)=\int\limits_{[x;\infty)}\frac{dT_{1n}(u;0)}{E_n(u-)}$, $\Lambda^{+}{}_{1\tau n}(x;0)=\int\limits_{[x;\infty)}\frac{dT_{1n}(u;0)}{E_n(u)}$, и $d_n(x)=\Lambda_{1\tau n}(x;0)\left[-\int\limits_{[x;\infty)}\frac{dE_n(u)}{E_n(u-)}\right]^{-1}$. Тогда оценками функционалов (1.3.42) являются соответственно:

$$1-F^{(m)}{}_{1\tau n}(x;i)=\prod_{\tau\le u\le x}\exp(-\Delta\Lambda_{m\tau n}(u;i))=\exp(-\Lambda_{m\tau n}(x;i)),$$

$$1-F^{(m)}{}_{2\tau n}(x;i)=\prod_{\tau\le u\le x}(1-\Delta\Lambda_{m\tau n}(u;i)), \tag{1.4.13}$$

$$1-F^{(m)}{}_{3\tau n}(x;i)=\left[\frac{q_{mn}(x)}{q_{mn}(\tau)}\right]^{R_{m\tau n}(x;i)},$$

где $m=1,2,3;\ (x;i)\in[\tau;\infty)\times\Im$ и $R_{m\varpi n}(x;i)=\Lambda_{m\varpi n}(x;i)\left[-\int\limits_{[\tau;x]}\frac{dq_{mn}(u)}{q_{mn}(u)}\right]^{-1}$. ■

Замечание 1.4.2. 1) Формулами (1.4.13) предложены по три оценок к каждому из функционалов (1.3.42). Поскольку ф.р. K в рассматриваемой модели присутствует в качестве мешающего распределения, то для нее мы будем использовать далее только оценку K_{1n}, так как она относительно легко исследуема. Следовательно, из совокупности оценок (1.4.13) будут использованы только те, которые соответствуют случаю $m=1$. Далее в главе 2 мы их обозначим без верхнего индекса, как $\{F_{m\varpi n}(x;i),\ \ m=1,2,3;\ i\in\Im\}$. ■

Замечание 1.4.3. При исследовании непараметрических оценок (1.4.13) могут быть требованы условия непрерывности ф.р. K и E (§ 2.1). В этих условиях $\Delta E(x)=\Delta T_1(x;0)\equiv 0$ и следовательно в оценках вероятности $q(x)$ можно отбросить слагаемые $\Delta E_n(x)$ и $\Delta T_{1n}(x;0)$, которые согласно УЗБЧ при $n\to\infty$ стремятся к нулю п.н.. Однако в этих случаях всё таки мы будем исследовать оценки общего вида (1.4.13). ■

В следующем утверждении установлено одно из важных свойств оценок к.ф.и. $\widetilde{\Lambda}_{\varpi n}(x;i)$ и $\Lambda_{m\varpi n}(x;i),\ m=1,2,3;\ i\in\Im$. Пусть $\zeta_{(n)}=\underset{i=\overline{1,n}}{\vee}\zeta_i$.

Лемма 1.4.4. Для всех $(x;i)\in[\tau;\zeta_{(n)}]\times\Im$ и $m=1,2,3$:

$$0\le\Delta\widetilde{\Lambda}_{\varpi n}(x;i),\quad \Delta\Lambda_{m\varpi n}(x;i)\le 1. \tag{1.4.14}$$

Доказательство леммы 1.4.4. Поскольку $\Delta\widetilde{\Lambda}_{\varpi n}(x;i)=\dfrac{\Delta T_n(x;i)}{q_n^э(x)},\ \ i\in\Im$, то (1.4.14) эквивалентно

$$0\le\Delta T_n(x;i)\le K_n^э(x)-E_n(x-)-\Delta T_{1n}(x;0),\ \ i\in\Im. \tag{1.4.15}$$

Левая часть (1.4.15) очевидна, а правая часть эквивалентна

$$\Delta T_n(x;i)+\Delta T_{1n}(x;0)-\sum_{m=0}^{k}\Delta T_n(x;m)\le K_n^э(x)-E_n(x),\ \ i\in\Im,$$

т.е.

$$-\left(\Delta T_{2n}(x;0)+\sum_{\substack{m=1\\ m\ne i}}^{k}\Delta T_n(x;m)\right)\le K_n^э(x)-E_n(x),\quad i\in\Im. \tag{1.4.16}$$

Выражение в левой части (1.4.16) отрицательное. С другой стороны, для всех $x\in\overline{R}$:

$$K_n^э(x)-E_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}I(L_j\le x)(1-I(Z_j\wedge Y_j\le x))\ge 0, \tag{1.4.17}$$

т.е. (1.4.16), а потому и (1.4.15) очевидны. Для доказательства (1.4.14) для $\Lambda_{m\tau n}$ нам остаётся показать справедливость аналога (1.4.17), где вместо $K_n^э$ будет находится одна из оценок K_{mn}, $m=1,2,3$. Используя неравенства (I) и (V) из теоремы 1.3.1 для оценок K_{mn}, $m=1,2,3$, для всех $x \ge \tau$ будем иметь соотношения: $K_{2n}(x) \le K_{1n}(x);\ K_{3n} \le K_{1n}(x);\ n \ge 1$. Следовательно, нам остаётся доказать аналог (1.4.17) только для K_{2n} и K_{3n}. Поскольку $d_n(x) \le 1$ для всех $n \ge 1$ и $x \ge \tau$, то для K_{3n} имеем

$$K_{3n}(x) - E_n(x) = [E_n(x)]^{d_n(x)}\left(1 - [E_n(x)]^{1-d_n(x)}\right) \ge 0 .$$

Так как

$$E_n(x) = \prod_{u \ge x}\left(1 - \frac{\Delta E_n(u)}{E_n(u)}\right) = \prod_{u \ge x}\frac{E_n(u-)}{E_n(u)}, \qquad K_{2n}(x) = \prod_{u \ge x}\left(1 - \frac{\Delta T_{1n}(u;0)}{E_n(u)}\right),$$

а также для всех $u \in \overline{R}$: $\Delta E_n(u) - \Delta T_{1n}(u;0) = \Delta T_{2n}(u;0) + \sum_{m=1}^{k}\Delta T_n(u;m) \ge 0$, что эквивалентно, $E_n(u) - \Delta T_{1n}(u;0) \ge E_n(u-)$, то для $x \ge \tau$

$$K_{2n}(x) - E_n(x) = K_{2n}(x)\left(1 - \frac{E_n(x)}{K_{2n}(x)}\right) = K_{2n}(x)\left\{1 - \prod_{u \ge x}\frac{E_n(u-)}{\left(E_n(u) - \Delta T_{1n}(u;0)\right)}\right\} \ge 0,$$

что и треболось доказать. Лемма 1.4.4. доказана. ■

Только, что доказанная лемма нам позволяет применять теорему 1.3.1 для оценок (1.4.11) и (1.4.13). В частности, справедливо утверждение.

Теорема 1.4.5. Для оценок (1.4.13) при $(x;i) \in \lfloor \tau; \zeta_{(n)} \rfloor \times \Im$ справедливы соотношения:

$$0 \le F_{2\tau n}^{(m)}(x;i) - F_{1\tau n}^{(m)}(x;i) \le \frac{2}{n}\sup_{\tau \le u \le x}\left\{[q_{mn}(u)]^{-2}\right\}, \quad п.н.$$

$$0 < F_{3\tau n}^{(m)}(x;i) - F_{1\tau n}^{(m)}(x;i) \le \frac{2}{n}\sup_{\tau \le u \le x}\left\{[q_{mn}(u)]^{-2}\right\}, \quad п.н.$$

$$\left|F_{2\tau n}^{(m)}(x;i) - F_{3\tau n}^{(m)}(x;i)\right| \le \frac{4}{n}\sup_{\tau \le u \le x}\left\{[q_{mn}(u)]^{-2}\right\}, \quad п.н. \quad ■$$

Замечание 1.4.6. Модель ($L \vee (Z \wedge Y);D$) содержит в себе и $(Z \vee L;C)$-модель, которая получается при $P(Y=+\infty)=1$. Учитывая это в § 1.3, а также и в настоящем параграфе мы отдельно не рассматривали $(Z \vee L;C)$-модель, которая в свою очередь содержит в себе простую модель случайного цензурирования слева, получаемую при $k=1$ и $A^{(1)}=\Omega$. Результаты установленные в ($L \vee (Z \wedge Y);D$)-модели, следовательно будут верными и в

$(Z \vee L;C)$-модели и поэтому мы не будем отдельно их доказывать для этой частной модели. ■

Замечание 1.4.7. Легко видеть, что для вероятности $P(L \le u \le Z \wedge Y)$ кроме представления (1.3.40), играющей ключевую роль при построении в данной монографии непараметрических оценок, справедливо и следующее: $P(L \le u \le Z \wedge Y) = K(u)(1-G(u-))(1-H(u-))$. В правую часть этого равенства входят ф.р. G и H, не допускающие обычное эмпирическое оценивание по выборкам $S_3^{(n)}$ и $\widetilde{S}_3^{(n)}$. По этой причине предпочтительной является формула (1.3.40). ■

Замечание 1.4.8. Пусть базовая модель $(Z;A)$ есть МКР с $Z_j = \bigwedge_{i \in \Im} Y_j^{(i)}$, $A_j^{(i)} = \{\omega: \ Z_j(\omega) = Y_j^{(i)}(\omega)\}$, где $\{(Y_j^{(1)},...,Y_j^{(k)}), \ j \ge 1\}$-последовательность н.о.р. с. векторов, удовлетворяющих условию (У3)". Пусть $F^{(i)}(x) = P(Y_1^{(i)} \le x)$, $\Lambda(x;i) = \int\limits_{(-\infty;x]} (1-F^{(i)}(u-))^{-1} dF^{(i)}(u)$, $\Lambda_\tau(x;i) = \Lambda(x;i) - \Lambda(\tau-;i)$. Задача состоит в одновременном оценивании функционалов $\{F_\tau(x;i) = P(Y_1^{(i)} \le x / Y_1^{(i)} \ge \tau) = \exp(-\Lambda_\tau(x;i)), i \in \Im\}$, $x \ge \tau$. Тогда для этой цели могут быть использованы статистики (1.4.11) и (1.4.13), построенные по выборкам $\widetilde{S}_3^{(n)}$ и $S_3^{(n)}$ соответственно. ■

Замечание 1.4.9. Пусть $H(x)$-непрерывная ф.р. и задача состоит в оценивании условной ф.р. $H_\tau(x) = P(Z \le x / Z \ge \tau)$, $x \ge \tau$. Тогда учитывая равенство $H_\tau(x) = 1 - \prod\limits_{i=1}^{k} \exp(-\Lambda_\tau(x;i))$ для этого могут быть использованы оценки $H_{m\tau n}(x) = 1 - \prod\limits_{i=1}^{k}(1 - F_{m\tau n}(x;i))$, $m = 1,2,3$; а также $\widetilde{H}_{m\tau n}(x) = 1 - \prod\limits_{i=1}^{k}(1 - \widetilde{F}_{m\tau n}(x;i))$, $m = 1,2,3$; - построенные по выборкам $S_3^{(n)}$ и $\widetilde{S}_3^{(n)}$ соответственно. ■

§ 1.5. Непараметрическое оценивание двумерной функции выживания при неоднородном цензурировании наблюдений

В настоящем параграфе используя методы построения оценок из § 1.4. предлагаются три типа оценок для двумерной функции выживания при неоднородном цензурировании наблюдений справа. Рассмотрение нами двумерного случая и цензурирования справа объясняется лишь упрощением довольно громоздких формул и технических выкладок, возникающих при рассмотрении многомерных схем.

Пусть $\{X_i = (X_{1i}, X_{2i})\}_{i=1}^{\infty}$-последовательность независимых и одинаково распределенных двумерных случайных векторов с общей непрерывной функцией выживания $F(s;t)=P(X_{11}>s,\ X_{21}>t)$, $(s,t)\in R^2$. Эта последовательность цензурируется справа последовательностью $\{Y_i=(Y_{1i},Y_{2i})\}_{i=1}^{\infty}$ - независимых двумерных случайных векторов с функциями выживания $\{G_{(i)}(s;t)=P(Y_{1i}>s,Y_{2i}>t)\}_{i=1}^{\infty}$, $(s;t)\in R^2$. Через $(\Omega,\mathcal{A},P)$ обозначим вероятностное пространство, в котором определены обе последовательности случайных векторов. Статистическая модель такова, что в $n-$шаге испытаний наблюдается выборка $V^{(n)}=\{(Z_i,\Delta_i),\ \ 1\le i\le n\}$, где $Z_i=(Z_{1i},Z_{2i})$, $\Delta_i=(\delta_{1i},\delta_{2i})$, $Z_{ki}=X_{ki}\wedge Y_{ki}$ и $\delta_{ki}=I(Z_{ki}=X_{ki})$, $k=1,2$. Задача состоит в оценивании F по выборке $V^{(n)}$, при мешающих функциях $G_{(1)},G_{(2)}\dots$. Пусть $H_{(i)}(s;t)=P(Z_{1i}>s,Z_{2i}>t)$, $(s;t)\in R^2$. Рассматриваемая модель является обобщенной моделью двумерного неоднородного случайного цензурирования справа, где векторы X_i и Y_i могут быть и зависимыми. Анализ имеющейся литературы по исследованиям в этом направлении показывает, что такая модель обобщенного двумерного случайного цензурирования ранее никем не рассматривалась.

Предлагаемые нами оценки для F будут построены посредством оценивания двумерной к.ф.и. $-\log F(s;t)=L(s;t)$. Определим усредненные функции

$$G^{(n)}(s;t)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}G_{(i)}(s;t),\qquad H^{(n)}(s;t)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}H_{(i)}(s;t),$$

$$M^{(n)}(s;t)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M_{(i)}(s;t),\qquad N^{(n)}(s;t)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}N_{(i)}(s;t),$$

$$\widetilde{M}^{(n)}(s;t)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\widetilde{M}_{(i)}(s;t),\qquad \widetilde{N}^{(n)}(s;t)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\widetilde{N}_{(i)}(s;t),$$

где

$$M_{(i)}(s;t)=P(Z_{1i}\le s,Z_{2i}>t),\ N_{(i)}(s;t)=P(Z_{1i}>s,Z_{2i}\le t),$$

$$\widetilde{M}_{(i)}(s;t)=P(Z_{1i}\le s,Z_{2i}>t,\delta_{1i}=1),\ \widetilde{N}_{(i)}(s;t)=P(Z_{1i}>s,Z_{2i}\le t,\delta_{2i}=1).$$

Введём следующие аналоги к.ф.и.:

$$\Lambda_1^{(n)}(s;t)=\int\limits_{(-\infty;s]}\frac{M^{(n)}(du;t)}{H^{(n)}(u-;t)},\qquad \Lambda_2^{(n)}(s;t)=\int\limits_{(-\infty;t]}\frac{N^{(n)}(s;dv)}{H^{(n)}(s;v-)},$$

$$\widetilde{\Lambda}_1^{(n)}(s;t)=\int\limits_{(-\infty;s]}\frac{\widetilde{M}^{(n)}(du;t)}{H^{(n)}(u-;t)},\qquad \widetilde{\Lambda}_2^{(n)}(s;t)=\int\limits_{(-\infty;t]}\frac{\widetilde{N}^{(n)}(s;dv)}{H^{(n)}(s;v-)}.$$

и их оценки по выборке $V^{(n)}$:

$$\Lambda_{1n}(s;t) = \int\limits_{(-\infty;s]} \frac{M_n(du;t)}{H_n(u-;t)}, \qquad \Lambda_{2n}(s;t) = \int\limits_{(-\infty;t]} \frac{N_n(s;dv)}{H_n(s;v-)},$$

$$\widetilde{\Lambda}_{1n}(s;t) = \int\limits_{(-\infty;s]} \frac{\widetilde{M}_n(du;t)}{H_n(u-;t)}, \qquad \widetilde{\Lambda}_{2n}(s;t) = \int\limits_{(-\infty;t]} \frac{\widetilde{N}_n(s;dv)}{H_n(s;v-)}.$$

Здесь

$$M_n(s;t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(Z_{1i} \le s, Z_{2i} > t), \qquad N_n(s;t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(Z_{1i} > s, Z_{2i} \le t),$$

$$\widetilde{M}_n(s;t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(Z_{1i} \le s, Z_{2i} > t, \delta_{1i} = 1), \qquad \widetilde{N}_n(s;t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(Z_{1i} > s, Z_{2i} \le t, \delta_{2i} = 1)$$

- эмпирические аналоги вышеопределённых усредненных функций $M^{(n)}(s;t)$, $N^{(n)}(s;t)$, $\widetilde{M}^{(n)}(s;t)$ и $\widetilde{N}^{(n)}(s;t)$. Пусть $\Lambda^{(n)}(s;t) = \Lambda_1^{(n)}(s;-\infty) + \Lambda_2^{(n)}(s;t)$, $\widetilde{\Lambda}^{(n)}(s;t) = \widetilde{\Lambda}_1^{(n)}(s;-\infty) + \widetilde{\Lambda}_2^{(n)}(s;t)$, $\Lambda_n(s;t) = \Lambda_{1n}(s;-\infty) + \Lambda_{2n}(s;t)$, $\widetilde{\Lambda}_n(s;t) = \widetilde{\Lambda}_{1n}(s;-\infty) + \widetilde{\Lambda}_{2n}(s;t)$. Для функции двух аргументов $\psi(s;t)$, пусть: $\psi(\Delta s;t) = \psi(s;t) - \psi(s-;t)$, $\psi(s;\Delta t) = \psi(s;t) - \psi(s;t-)$. Введём функционалы трех типов

$$F_1^{(n)}(s;t) = \exp(-\widetilde{\Lambda}^{(n)}(s;t)) = \exp\left(-\left(\widetilde{\Lambda}_1^{(n)}(s;-\infty) + \widetilde{\Lambda}_2^{(n)}(s;t)\right)\right),$$

$$F_2^{(n)}(s;t) = \exp\left(-\left(\widetilde{\Lambda}_1^{(n)^c}(s;-\infty)\right)\right)\prod_{u\le s}\left(1 - \widetilde{\Lambda}_1^{(n)}(\Delta u;-\infty)\right) \cdot \exp\left(-\left(\widetilde{\Lambda}_2^{(n)^c}(s;t)\right)\right)\prod_{v\le t}\left(1 - \widetilde{\Lambda}_2^{(n)}(s;\Delta v)\right), \qquad (1.5.1)$$

$$F_3^{(n)}(s;t) = \left[H^{(n)}(s;t)\right]^{R^{(n)}(s;t)},$$

где $R^{(n)}(s;t) = \dfrac{\widetilde{\Lambda}^{(n)}(s;t)}{\Lambda^{(n)}(s;t)}$. Тогда соответствующими оценками функционалов (1.5.1) являются

$$F_{1n}(s;t) = \exp(-\widetilde{\Lambda}_n(s;t)) = \exp\left(-\left(\widetilde{\Lambda}_{1n}(s;-\infty) + \widetilde{\Lambda}_{2n}(s;t)\right)\right),$$

$$F_{2n}(s;t) = \prod_{u\le s}\left(1 - \widetilde{\Lambda}_{1n}(\Delta u;-\infty)\right)\prod_{v\le t}\left(1 - \widetilde{\Lambda}_{2n}(s;\Delta v)\right), \qquad (1.5.2)$$

$$F_{3n}(s;t) = \left[H_n(s;t)\right]^{R_n(s;t)},$$

где $R_n(s;t) = \dfrac{\widetilde{\Lambda}_n(s;t)}{\Lambda_n(s;t)}$.

Легко проверить следующее представление для F :

$$F(s;t) = \exp(-L(s;t)) = \exp\left(-\left(L_1(s;-\infty) + L_2(s;t)\right)\right), \qquad (1.5.3)$$

где $L_1(s;-\infty) = -\log P(X_{11} > s), \quad L_2(s;t) = -\log P(X_{21} > t / X_{11} > s)$.

Формулу (1.5.3) согласно (1.2.2) можно представить также и в виде

$$F(s;t) = \exp\left(-\left(L_1^c(s;-\infty)\right)\right)\prod_{u\le s}(1 - L(\Delta u;-\infty))\exp\left(-\left(L_2^c(s;t)\right)\right)\prod_{v\le t}(1 - L_2(s;\Delta v)). \qquad (1.5.6)$$

Последнее выражение играет ключевую роль при установлении свойств сходимости оценок (1.5.2) к $F(s;t)$. Отметим, что идея оценивания к.ф.и. в настоящей работе взаиметвована из [172]. Однако, как выше отмечалось, нами рассматривается более общий случай зависимых компонент наблюдаемого вектора, предлагается новая степенная оценка для функции $F(s;t)$ и установлены свойства асимптотической нормальности введенных оценок. Эти результаты нами доказываются в § 2.4.

§ 1.6. Модель Кокса при случайном цензурировании наблюдений с двух сторон. Оценки для функции выживания

В анализе данных типа времени жизни одной из широко применяемых регрессионных моделей является модель пропорциональных интенсивностей Кокса [138,139]. Согласно этой модели, условная функция интенсивности отказа испытываемого на выживаемость объекта с временем жизни Z удовлетворяет представлению

$$\Lambda(x/v) = \Lambda_0(x)\exp((\beta^T, v)), \qquad x \ge 0, \qquad (1.6.1)$$

где базовая к.ф.и. $\Lambda_0(x) = \Lambda(x/0)$ - непрерывна,

$$\Lambda(x/v) = \lim_{h\downarrow 0} P(Z \le x + h / Z \ge x, V = v),$$

$V = (V_1,...,V_p)$-вектор ковариат (величин регрессии или предсказывающих факторов) и $\beta = (\beta_1,...,\beta_n)$-вектор параметров регрессии. В модели Кокса основная задача заключается в оценивании базовой функции выживания

$$1 - H_0(x) = \exp(-\Lambda_0(x)), \qquad x \ge 0, \qquad (1.6.2)$$

соответствующей начальному состоянию объекта при $V = O = (0,\ldots,0)$, по независимым наблюдениям над вектором $(Z;V)$. К настоящему времени имеется обширная литература по исследованиям в модели Кокса [110,117,219,252,258,268,269,294,295]. В частности, при исследовании вышеизложенной задачи оценивания рассмотрены только те случаи, когда с.в. Z либо наблюдается полностью, либо подвергается только цензурированию справа [110,268,294]. Нами рассматривается более общая схема, когда Z подвергается случайному цензурированию слева и справа с.в. нами L и Y соответственно. Заметим, что данную модель при заданном векторе ковариат можно рассматривать как специальный случай модели $(L \vee (Z \wedge Y); D)$ при $k = 1$ ($A^{(1)} = \Omega$) и поэтому вышеупомянутая задача сводится к оцениванию условной функции выживания $1 - H_{\tau 0}(x)$, где

$$H_{\tau 0}(x) = P(Z \le x / Z \ge \tau, V = o), \quad x \ge \tau, \tag{1.6.3}$$

где число $\tau \in [0;\infty)$ выбирается надлежащим образом. В рассматриваемой модели предполагаются выполненными следующие условия:

(C1) Совместное распределение вектора (Z, L, Y, V), заданного на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ таково, что компоненты случайного вектора (Z, L, Y) условно независимы при заданном векторе ковариант V. ■

Пусть

$$\pi(v) = P(V \le v) = P(V_1 \le v_1, \dots, V_p \le v_p), \quad v = (v_1, \dots, v_p) \in \overline{R}^{+p},$$

$$H(x/v) = P(Z \le x / V = v), \quad K(x/v) = P(L \le x / V = v), \quad G(x/v) = P(Y \le x / V = v), \quad x \in \overline{R}^{+},$$

- соответственно совместное распределение вектора V и маргинальные условные распределения Z, L и Y. Легко видеть, что согласно (1.6.1) и (1.6.2):

$$H(x/v) = 1 - (1 - H_o(x)) \exp((\beta^T, v)) = \exp\{-\exp((\beta^T, v)) \Lambda_o(x)\}. \tag{1.6.4}$$

(C2) совместное распределение вектора (Z, L, Y, V) таково, что для чисел τ и T, $\tau < T$, $\Lambda_o(T) < \infty$, и

$$\inf_{\tau \le x \le T} \int_{R^{+p}} P(L \le x \le Z \wedge Y / V = v) d\pi(v) > 0. \tag{1.6.5}$$

Условие (1.6.5) согласно (C1) эквивалентно

$$\inf_{\tau \le x \le T} \int_{R^{+p}} K(x/v)(1 - G(x-/v))(1 - H(x-/v)) d\pi(v) > 0. \qquad ■$$

(C3) Наблюдению доступен вектор $\lambda = (\xi, L, \chi_1, \chi_2, \chi_3, V)$, где $\zeta = L \vee (Z \wedge Y)$, $\chi_1 = I(Z \wedge Y < L)$, $\chi_2 = I(L \le Y < Z)$ и $\chi_3 = I(L \le Z \le Y)$. ■

Заметим, что с.в. Z наблюдается лишь в случае $\chi_3 = 1$. Легко видеть, что данная модель включает в себя цензурирование случайным интервалом (так как $P(Y < L) \ge 0$).

Пример 1.6.1. 1) Пусть с.в. L и Y при заданной ковариате V имеют равномерные распределения на $[0;1]$ и $[1;2]$ соответственно. Тогда $P(L \le Y / V = v) = 1$, т.е. модель является моделью случайного цензурирования интервалом наблюдения $[L;Y]$ и для любого $\varepsilon = \varepsilon(v) \in (0;2)$: $\inf\limits_{\varepsilon \le x \le 2-\varepsilon} P(L \le x \le Y / V = v) = \varepsilon > 0$, следовательно, $\tau_k = 0, T_G = 2, \tau = \varepsilon$ и $T = 2 - \varepsilon$. ■

2) Пусть L и Y при заданном $V = v$ отвечают простой МПИ, т.е. существует число $\alpha = \alpha(v) \in (0,\infty)$ и $1 - G(x/v) = (1 - K(x/v))^{\alpha}$, для всех $(x;v) \in R^{+(p+1)}$. Тогда $\tau_k = \tau_G, T_k = T_G$ и $p(v) = P(L \le Y / V = v) = \int\limits_{[0;\infty)} (1 - G(x - /v)) dK(x/v)$ и в частности, если ф.р. $G(x/v)$ и $K(x/v)$ непрерывны, то $p(v) = \frac{1}{1+\alpha} \in (0,1)$. ■

Пусть $S^{(n)} = \{(\zeta_j, L_j, \chi_{1j}, \chi_{2j}, \chi_{3j}, V_j), j = 1,\ldots,n\}$ независимая повторная выборка наблюдений над вектором λ. Аналогами распределений, введенных в модели $(L \vee (Z \wedge Y); D)$ в § 1.3 являются:

$$E(x/v) = P(\zeta \le x / V = v) = K(x/v) \cdot (1 - (1 - G(x/v))(1 - H(x/v))) = T_1(x/v) + T_2(x/v) + T_3(x/v), \quad (1.6.6)$$

где

$$T_1(x/v) = \int\limits_{[o;x]} (1 - (1 - G(u - /v))(1 - H(u/v))) dK(u/v) = P(\zeta \le x, \chi_1 = 1 / V = v),$$

$$T_2(x/v) = \int\limits_{[o;x]} K(u/v) \cdot (1 - H(u/v)) dG(u/v) = P(\zeta \le x, \chi_2 = 1 / V = v),$$

$$T_3(x/v) = \int\limits_{[o;x]} K(u/v) \cdot (1 - G(u/v)) \cdot dH(u/v) = P(\zeta \le x, \chi_3 = 1 / V = v),$$

Пусть $\pi(t) = P(V < t) = P(V_1 \le t_1, \ldots, V_p \le t_p), t = (t_1, \ldots, t_p) \in \overline{R}^{+p}$, -ф.р. вектора V и согласно (1.6.6) $E(x) = \int\limits_{\overline{R}^{+p}} E(x/v) d\pi(v) = P(\zeta \le x) = T_1(x) + T_2(x) + T_3(x)$ -безусловная ф.р. с.в. ζ, где

$$T_m(x) = \int\limits_{R^{+p}} T_m(x/v) \cdot d\pi(v), \; m = 1,2,3. \quad (1.6.7)$$

Введём соответствующие эмпирические оценки для $E(x)$, $T_m(x)$, $m = 1,2,3$ и $\pi(t)$:

$$E_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} I(\zeta_j \le x) = \sum_{m=1,2,3} T_{mn}(x), \; x \in \overline{R}^{+},$$

$$T_{mn}(x)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}I(\zeta_j\le x,\chi_{mj}=1),\ m=1,2,3;\ \ x\in\overline{R}^{+},$$

$$\pi_n(t)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}I(V_{1j}\le t_1,...,V_{pj}\le t_p),\ \ t\in\overline{R}^{+^p}.$$

Сначала рассмотрим случай одномерной ковариаты $(p=1)$. Пусть
$$\omega^{(s)}(u;\beta)=\int\limits_{[0;\infty)}v^s\exp(\beta v)P(L\le u\le Z\wedge Y/V=v)d\pi(v),\qquad s=0,1,2.$$
Легко проверить, что по определению $T_3(x/v)$ и согласно (1.6.1):

$$T_3(x/v)=\int\limits_{[0;x]}P(L\le u\le Z\wedge Y/V=v)d\Lambda(u/v)=$$
$$=\exp(\beta v)\int\limits_{[0;x]}P(L\le u\le Z\wedge Y/V=v)d\Lambda_0(u) \qquad (1.6.8)$$

Интегрируя равенство (1.6.8) по $\pi(v)$, и затем разрешив полученное интегральное уравнение относительно $\Lambda_0(x)$, будем иметь следующее выражение для $\Lambda_{\tau 0}(x)=\Lambda_0(x)-\Lambda_0(\tau-)$:

$$\Lambda_{\tau 0}(x)=\Lambda_{\tau 0}(x;\beta)=\int\limits_{[\tau;x]}\frac{dT_3(u)}{\omega^{(0)}(u;\beta)}. \qquad (1.6.9)$$

Введём следующую, промежуточную оценку для к.ф.и. (1.6.9), зависящую от β:
$$\Lambda^{(n)}{}_{\tau 0}(x)=\Lambda^{(n)}{}_{\tau 0}(x;\beta)=\int\limits_{[\tau;x]}\frac{dT_{3n}(u)}{\omega_n^{(0)}(u;\beta)}. \qquad (1.6.10)$$
Здесь $\omega_n^{(0)}(u;\beta)$ соответствующая оценка $\omega^{(0)}(u;\beta)$, определяемая при $s=0$ из формулы $\omega_n^{(s)}(u;\beta)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}v_j^s\exp(\beta v_j)I(L_j\le u\le Z_j\wedge Y_j),\quad s=0,1,2$.

По аналогии со случаем цензурирования справа введём усечённую функцию частичного правдоподобия

$$L_n(\beta)=\prod_{\substack{i=1\\ \zeta_i\le T}}^{n}\left\{\frac{\exp(\beta v_i)}{\sum_{j=1}^{n}\exp(\beta v_j)I(L_j\le\zeta_i\le Z_j\wedge Y_j)}\right\}^{\chi_{3i}},$$

где $T = \sup\{x : E(x) < 1\}$. Параметр β будем оценивать решением следующего уравнения частичного правдоподобия:

$$U_n^T(\beta) = \frac{d \log L_n(\beta)}{d\beta} = \sum_{i=1}^{n} \int_{[0;T]} \left(v_i - \frac{\omega_n^{(1)}(u;\beta)}{\omega_n^{(0)}(u;\beta)} \right) dN_i(u) = 0, \tag{1.6.11}$$

где $N_i(u) = I(L_i \le Z_i \le Y_i \wedge u)$-считающий процесс.

Пусть $\hat{\beta}_n$ есть решение уравнения (1.6.11). Тогда соответствующую оценку для $\Lambda_{\tau 0}(x)$ получим методом подстановки: $\hat{\Lambda}_{\tau 0}^{(n)}(x) = \Lambda_{\tau 0}^{(n)}(x;\hat{\beta}_n)$, $x \ge \tau$. Используя функционалы (1.3.42) для $1 - H_{\tau 0}(x)$ предложим следующие три типа оценок:

$$1 - \hat{H}_{\tau 0}^{(n)}(x;m) = \psi_{nm}(x;\hat{\beta}_n), \quad m = 1,2,3; \quad x \ge \tau, \tag{1.6.12}$$

где

$$\psi_{n1}(x;\beta) = \exp\left(-\Lambda_{\tau 0}^{(n)}(x;\beta)\right),$$

$$\psi_{n2}(x;\beta) = \prod_{\tau \le u \le x} \left(1 - \Delta\Lambda_{\tau 0}^{(n)}(u;\beta)\right), \tag{1.6.13}$$

$$\psi_{n3}(x;\beta) = \left[\frac{\omega_n^{(0)}(x;\beta)}{\omega_n^{(0)}(\tau;\beta)} \right]^{R_n(x;\beta)},$$

и $R_n(x;\beta) = \Lambda_{\tau 0}^{(n)}(x;\beta) \left(- \int_{[\tau;x]} \frac{d\omega_n^{(0)}(u;\beta)}{\omega_n^{(0)}(u;\beta)} \right)^{-1}$. Свойства оценок (1.6.12) будут исследованы в § 3.1. ■

§ 1.7. Непараметрическое оценивание функции выживания сложных систем по зависящим от времени цензурированным данным

В теории надёжности приходится иметь дело с техническими системами более сложной структуры, чем параллельная и последовательная. Рассмотрим системы, надёжность которых зависить от надёжности её элементов. Пусть имеется совокупность n независимых систем с одной и той же структурной функцией φ и k статистически независимыми компонентами. Пусть i-компонента каждой системы характеризуется случайным состоянием u_j так, что $u_j = 1$ или $u_j = 0$ в зависимости от того, j-компонента в рабочем состоянии или нет. Следовательно, каждая система сама может находится в рабочем состоянии или состоянии отказа. Тогда известно (см. [50,51]), что функция надёжности (ВеБР) системы $1-F$ удовлетворяет выражению $1-F(x)=h_{\varphi}(p_1,...,p_k), \quad x\ge 0$, где

$$h_{\varphi}(p_1,...,p_k)=\sum_{U\in\{0,1\}^k}\varphi(U)\prod_{j=1}^{k}p_j^{U_j}(1-p_j)^{1-U_j} . \tag{1.7.1}$$

Здесь $U=(U_1,...,U_k)$, $p_j=1-F_j(x)$-функция надежности j-компоненты и будем считать, что $0^0=1$. Далее индекс i будет означать номер системы, а j-номер компоненты той же системы. Так пусть X_{ij}-ВрБР j-компоненты i-системы. Следовательно, $X_{1j},X_{2j},...,X_{nj}$-независимые и одинаково распределенные с.в.-ны с общей ф.р. $F_j(x)$. Через T_i и L_i обозначим соответственно ВрБР и момент входа под наблюдение i-системы. Предполагается, что с.в.-ны T_i и L_i взаимонезависимы и имеют ф.р. $F(x)=P(T_i\le x)$ и $K(x)=P(L_i\le x)$. Таким образом, $\{X_{ij},T_i,L_i;\ 1\le i\le n;\ 1\le j\le k\}$-совокупность неотрицательных с.в., где с.в. X_{ij} цензурируется справа с.в.-ой T_i. Заметим, что в данной схеме с.в. X_{ij} и T_i зависимы. Так например, для системы с последовательной или параллельной структуры $T_i=\overset{k}{\underset{j=1}{\wedge}}X_{ij}$ или $T_i=\overset{k}{\underset{j=1}{\vee}}X_{ij}$. Примеры более сложных систем смотрите [50,51]. Схема наблюдений такова, что испытание системы на надежность проводится в промежутке времени $[0;t]$. Тогда в календарный момент времени t наблюдению будет доступна выборка $C^{(n)}(t)=\{Z_1^{(n)}(t),...,Z_k^{(n)}(t)\}$,где $Z_j^{(n)}(t)=\{(\xi_{ij}(t),\delta_{ij}(t)),\ 1\le i\le n\}$, $\quad \xi_{ij}(t)=0\vee\{X_{ij}\wedge(t-L_i)\wedge T_i\}$, $\quad \delta_{ij}(t)=I(X_{ij}\le T_i\wedge(t-L_i))$. Таким образом, для каждой компоненты под номером j системы под номером i наблюдается либо время отказа $(\delta_{ij}(t)=1)$ либо цензурирования $(\delta_{ij}(t)=0)$. Мы оценим $1-F$ по выборке $C^{(n)}(t)$ с учётом формулы (1.7.1).

Как правило, для решения поставленной задачи, зададимся к.ф.и. j-компоненты по формуле

$$\Lambda_j(x)=\int_{[0;x]}\frac{dF_j(u)}{1-F_j(u-)}, \qquad x\ge 0 . \tag{1.7.2}$$

Тогда, согласно формуле (1.2.2):

$$1-F_j(x)=\exp\left(-\Lambda_j^c(x)\right)\prod_{u\in D_{F_j}(x)}(1-\Delta\Lambda_j(u)), \qquad x\ge 0 . \tag{1.7.3}$$

Для $0\le x\le t$ определим считающие процессы

$$N_{jn}(x;t)=\sum_{i=1}^{n} I(\xi_{ij}(t)\ge x), \qquad M_{jn}(x;t)=\sum_{i=1}^{n} I(\xi_{ij}(t)\le x, \delta_{ij}(t)=1).$$

Считая $0/0=0$, в каждый календарный момент времени t для функционалов (1.7.2) и (1.7.3) введём соответствующие оценки

$$\Lambda_{jn}(x;t)=\int_{[0;x]}\frac{dM_{jn}(u;t)}{N_{jn}(u;t)}, \qquad 0\le x\le t,$$

$$1-F_{jn}(x;t)=\prod_{u\le x}(1-\Delta\Lambda_{jn}(u;t)), \qquad 0\le x\le t, \tag{1.7.4}$$

где $dM_{jn}(u;t)=M_{jn}(u;t)-M_{jn}(u-;t)$ и $\Delta\Lambda_{jn}(u;t)=\Lambda_{jn}(u;t)-\Lambda_{jn}(u-;t)$. Тогда при каждом фиксированном t, оценку для $1-F(x)$ получаем по формуле (1.7.1):

$$1-F_n(x;t)=h_\varphi(1-F_{1n}(x;t),...,1-F_{kn}(x;t)), \qquad 0\le x\le t. \tag{1.7.5}$$

Следует отметить, что авторы [161] также рассматривали оценивание ВеБР вида (1.7.1) в частном случае, когда $t=+\infty$ и $P(L_i=0)=1, \quad 1\le i\le n$. Оценка (1.7.5) и рассматриваемая далее её модификация обобщает оценку из [161]. Модификация оценки (1.7.5) заключается в её дискретизации по переменной t. Этот процесс нами взаимствован из [201]. Авторы статьи [161] переопределили схему цензурирования с целью обойти трудности, возникающие из-за зависимости с.в. X_{ij} и T_i. Центральным результатом этой работы является установление следующего равенства: для каждого j существует с.в. Y_{ij} такая, что

$$\left(X_{ij}\wedge T_i, I(X_{ij}\le T_i)\right)=\left(X_{ij}\wedge Y_i, I(X_{ij}\le Y_{ij})\right),$$

где X_{ij} и Y_{ij} независимы и

$$G_j(x)=P(Y_{ij}\le x)=1-h_\varphi\left(1-F_1(x),...,1-F_{j-1}(x),1,1-F_{j+1}(x),...,1-F_k(x)\right).$$

Далее необходимы условия:

(CI). $M\left(X_{1j}\wedge Y_{1j}\right)^l<\infty$ для некоторого $l>0; \quad 1\le j\le k$;

(CII). Пусть число $\tau>0, \quad F_j(\tau)<1$ и $\int_{[0;\tau]}\frac{dF_j(u)}{1-G_j(u-)}<\infty, \quad 1\le j\le k$;

Определим число $a>\tau_k=\inf\{x\ge 0: K(x)>0\}$ так, что $K(a-)>0$. Оценивание $F_j(x)$ (а следовательно и $F(x)$) осуществим для $t\ge a$ и $x\le t-a$.

(CIII). а) Пусть разбиение $[a;\infty)$ такое, что $a=t_n^{(0)}<t_n^{(1)}<...<t_n^{(k_n)}<t_n^{(k_n+1)}=\infty$ и при $n\to\infty$ $\bigvee_{m=1}^{\infty}\left(t_n^{(m)}-t_n^{(m-1)}\right)\to 0$;

б) $t_n^{(k_n)}\to\infty$ так, что $n^b=O\left(t_n^{(k_n)}\right)$ для некоторого $b>1/l$;

c) $k_n = O(n^r)$ для некоторого $r > b$;

Теперь для заданного $t \in [a;\infty)$, определим $t_n = t_n^{(m)}$, если $t_n^{(m)} \le t < t_n^{(m+1)}$, $m = 0,1,...,k_n$.

(CIV). Пусть $c > 0$ и $\frac{1}{3} < \alpha < \frac{1}{2}$ и $\varepsilon_n > 0$ выберем так, что для некоторого $\gamma < \frac{\alpha}{2}$ при $n \to \infty$, $\varepsilon_n \to 0$ и $\varepsilon_n n^\gamma \to \infty$;

Теперь модифицированную оценку для ВеБР (1.7.1) получаем из (1.7.4) и (1.7.5) следующим образом:

$$1 - \tilde{F}_n(x;t) = h_\varphi\left(1 - \tilde{F}_{1n}(x;t),...,1 - \tilde{F}_{kn}(x;t)\right), \tag{1.7.6}$$

где $(x;t) \in [0;t-a] \times [a;\infty)$,

$$1 - \tilde{F}_{jn}(x;t) = I(B_{jn})F_{jn}\left(x \wedge x^*_{(n-[Cn^\alpha]),j}(t_n)\right) + (1 - I(B_{jn}))F_{jn}(x;t_n), \quad 1 \le j \le k, \tag{1.7.7}$$

$B_{jn} = \left\{F_{jn}\left(x^*_{(n-[Cn^\alpha]),j}(t_n);t_n\right) < 1 - \varepsilon_n\right\}$ и $x^*_{(1),j}(t) \le x^*_{(2),j}(t) \le ... \le x^*_{(n),j}(t)$-вариационный ряд, построенный по выборке $\{\xi_{1j}(t), \xi_{2j}(t),...,\xi_{nj}(t)\}$ в момент времени t.

Исследование свойств оценок (1.7.6), (1.7.7) проводится в § 2.5.

Наряду с множительными оценками вида (1.7.4) мы можем рассматривать также и следующие оценки экспоненциального и степенного типов:

$$\begin{gathered} 1 - F^0_{jn}(x;t) = \exp(-\Lambda_{jn}(x;t)), \quad 0 \le x \le t, \\ 1 - F^*_{jn}(x;t) = \left[\frac{1}{n} N_{jn}(x;t)\right]^{R_{jn}(x;t)}, \quad 0 \le x \le t, \end{gathered} \tag{1.7.8}$$

где

$$R_{jn}(x;t) = \frac{\Lambda_{jn}(x;t)}{\Lambda^*_{jn}(x;t)}, \quad \Lambda^*_{jn}(x;t) = -\int_{[0;x]} \frac{dN_{jn}(u-;t)}{N_{jn}(u;t)}.$$

Затем по оценкам (1.7.8) аналогично (1.7.6) и (1.7.7) строятся их модификации. Однако, мы ограничимся исследованием лишь оценок множительной структуры. ■

§ 1.8. Вспомогательные результаты для считающих процессов и мартингалов

Свойства непараметрических оценок, построенных по неполным данным в значительной степени будут основываться на мартингальные свойства процессов, входящих в структуры самих оценок. В настоящем параграфе приведём некоторые фундаментальные понятия и утверждения из стохастического анализа. Основное внимание будет уделено на мартингалы с непрерывным временем, образованные считающими процессами.

Пусть $(\Omega,\mathcal{A},P)$-полное вероятностное пространство, что в свою очередь означает, что σ-алгебра $\mathcal{A}$ является полной: для события $A\in\mathcal{A}$, такого, что $P(A)=0$ из $B\subset A$ следует, что $B\in\mathcal{A}$. На измеримой паре $(\Omega,\mathcal{A})$ выделим семейство σ-подалгебр (поток) $□=\{\mathcal{A}_x;\ \ x\in \mathrm{X}\}$ полной σ-алгебры $\mathcal{A}$, обладающее свойствами:

(I) □-неубывает: $\mathcal{A}_s\subseteq\mathcal{A}_x$, для всех $s\le x$;

(II) □-непрерывно справа: $\mathcal{A}_s=\mathcal{A}_{s+}=\bigcap\limits_{x>s}\mathcal{A}_s$;

(III) □-является полным: □ содержит P-нулевые события из $\mathcal{A}$, совокупность которых обозначим через $\mathcal{N}_0$;

Поток □, удовлетворяющий условиям (I)-(III) называется фильтрацией, а четвёртка $(\Omega,\mathcal{A},□,P)$-стохастическим базисом [80,98,191]. Поток □ описывает историю некоторого явления и $\mathcal{A}_x$ является совокупностью всех событий, предшествующих моменту x. С.в. $\tau=\tau(\omega):\Omega\to R$ называется моментом остановки, если для каждого $x\in\mathrm{X}$ событие $\{\omega:\ \tau(\omega)\le x\}\in\mathcal{A}_x$, $x\in\mathrm{X}\subseteq\overline{R}$. Если τ-момент остановки, то случайный процесс $\{\xi^*(x)=\xi(x\wedge\tau);\ x\in\mathrm{X}\}$ называется «остановленным» в момент τ. Напомним, что $\xi^*(x)=\xi(x)I(x<\tau)+\xi(\tau)I(x\ge\tau)$. В частности, если $P(\tau=x)=1$, то τ будет моментом остановки. Поток □ можно построить различными способами. В частности, его можно порождать процессами, заданными на $(\Omega,\mathcal{A},P)$.

Процесс $\{\xi(x);x\in\mathrm{X}\}$, заданный на $(\Omega,\mathcal{A})$ называется $\mathcal{A}_x$-адаптированным (или $\mathcal{A}_x$-согласованным), если для всех фиксированных $x\in\mathrm{X}$, с.в. $\xi(x;\omega)$ является $\mathcal{A}_x$-измеримым: $\{\omega:\ \xi(x;\omega)\in B\}\in\mathcal{A}_x$ для любого борелевского множества B. $\mathcal{A}_x$-адаптированность процесса $\xi(x)$ обозначим записью $(\xi(x),\mathcal{A}_x)_{x\in\mathrm{X}}$. С каждым случайным процессом $\xi(x)$ можно связать поток σ-алгебр, с которым он согласован. Минимальный поток получится, если считать, что ничего, кроме $\xi(x)$ не наблюдается. При этом $\xi(x)$ может быть и векторзначным случайным процессом.

Пусть $\mathcal{A}_x^{\xi}$-σ-алгебра, порожденная событиями вида $\{\omega: \xi(s;\omega)\in B\},\quad s\le x$. Совокупность таких событий обозначим $\Box^{\xi}=\{\mathcal{A}_x^{\xi}=\sigma(\xi(s);\, s\le x);\ \ x\in \mathrm{X}\}$. Эта совокупность удовлетворяет лишь условию (I) монотонности и поэтому не является фильтрацией. Однако, если $\Box^{\xi}$ пополним совокупностью $\mathcal{N}_0$-P-нулевых событий из $\mathcal{A}$, то $\Box_p^{\xi}=\mathcal{N}_0\cup\Box^{\xi}$ будет фильтрацией, а $(\Omega,\mathcal{A},\ \Box_p^{\xi},P)$-стохастическим базисом, порожденным процессом $\{\xi(x);\, x\in\mathrm{X}\}$ до момента x включительно.

Далее наше внимание будет сосредоточено на двух важных классах адаптированных случайных процессов – на мартингалах с непрерывным параметром и считающих процессах. Действительнозначный случайный процесс $(\xi(x),\mathcal{A}_x)_{x\in\mathrm{X}}$ называется мартингалом относительно фильтрации $\Box$, если

$$\sup_{x\in\mathrm{X}} M\left|\xi(x)\right| < \infty\,; \tag{1.8.1}$$

и

$$M(\xi(x)/\mathcal{A}_s)=\xi(s)\,,\text{ - } P\text{-п.н.} \tag{1.8.2}$$

где $s\le x$. Здесь условие (1.8.1) означает интегрируемость, а (1.8.2) – мартингальность процесса $\xi(x)$.

Пример 1. а) Пусть $\{\xi(x)=W(x);\, x\in\mathrm{X}=[0;\infty)\}$-винеровский процесс. Покажем, что этот процесс является мартингалом относительно фильтрации $\Box_p^{W}=\{\mathcal{N}_0\cup\mathcal{A}_x^{W};\ x\in\mathrm{X}\}$, где $\mathcal{A}_x^{W}=\sigma(W(s);\, s\le x)$. Условие (1.8.1) очевидно. Далее $M(W(x)/\mathcal{A}_s^{W})=M(W(s)/\mathcal{A}_s^{W})+M(W(x)-W(s)/\mathcal{A}_s^{W})=$ $=W(s)+M(W(x)-W(s))=W(s),\ s\le x$. Здесь воспользовались свойством условного математического ожидания, а также и тем, что $W(x)-W(s)$ не зависит от всех событий σ-алгебры $\mathcal{A}_s^{W}$, порождённой любыми конечными наборами с.в. $\{W(u_i),\dots,W(u_k),\ 0\le u_1\le\dots\le u_k\le s\}$.

б) Мартингальность $\{W^0(x),\ x\in\mathrm{X}=[0;1]\}$ стандартного винеровского процесса относительно $\Box_p^{W^0}=\{\mathcal{N}_0\cup\sigma(W^0(s),\ s\le x),\ \ x\in[0,1]\}$, устанавливается вполне аналогично. ■

Пример 2. Рассмотрим случайный процесс $\left\{W^*(x)=\dfrac{B(x)}{1-x},\ \ x\in\mathrm{X}=[0;1]\right\}$, где $\{B(x),\ x\in[0;1]\}$-броуновский мост. Легко проверить, что $W^*(x)\overset{D}{=}W\!\left(\dfrac{x}{1-x}\right),\ \ x\in[0;1]$,

где $\{W(s),\, s\in[0;\infty)\}$ винеровский процесс из примера 1 а). Таким образом, $\{W^*(x),\ x\in[0;1]\}$ также является мартингалом относительно $\Box_p^{W^*}$. ■

Если $\{\xi^2(x),\ x\in\mathrm{X}\}$ удовлетворяет условию (1.8.1), то процесс $\{\xi(x),\ x\in\mathrm{X}\}$ называется квадратично-интегрируемым. Мартингал

$(\xi(x), \mathcal{A}(x))_{x\in \mathrm{X}}$ называется квадратично-интегрируемым, если $\xi^2(x)$ является интегрируемым.

Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, \square, P)$-стохастический базис. В пространстве $\mathrm{X}\times\Omega$ выделим минимальную σ-алгебру $\pi(\square)$, порождённую случайными множествами $\{(x;\omega):\ x\le\tau\}$, где $\tau=\tau(\omega)$-момент остановки. Случайный процесс $\{\xi(x),\ x\in \mathrm{X}\}$ называется предсказуемым, если функция $\xi(x;\omega)$ на $\mathrm{X}\times\Omega$ является $\pi(\square)$-измеримой. Далее нами будут рассмотрены только адаптированные процессы, и поэтому их предсказуемость будем понимать относительно $\pi(\square)$.

Рассмотрим также класс процессов, обладающих тем или иным свойством (мартингальность, ограниченность и т.д.)-локально. Пусть $\{\tau_n,\ n\ge 1\}$-локализируящая последовательность моментов остановки, таких, что при $n\to\infty$, $P(\tau_n\uparrow\infty)=1$ и для каждого n, остановленный процесс $\{\xi_n^*(x)=\xi^*(x\wedge\tau_n);\ x\in \mathrm{X}\}$ обладает требуемым свойством. Следовательно, процесс $\xi(x)$ называется локально-квадратично интегрируемым мартингалом, если соответствующий остановленный процесс является квадратично интегрируемым мартингалом. Класс локально-квадратично интегрируемых мартингалов относительно фильтрации $\square$ обозначим $\square^2_{loc}(\square)$ (см. [80]).

Случайный процесс $(\xi(x), \mathcal{A}_x)_{x\in \mathrm{X}}$, $\mathrm{X}=\overline{R}$, называется считающим, если для почти всех $\omega\in\Omega$ траектории $\xi(x)$ является неубывающими непрерывными справа целочисленными функциями, $\xi(x)<\infty$, с вероятностью 1 и имеют скачки величиною +1. Например, если X-с.в., то адаптированный процесс $\left(\xi(x)=I(X\le x); \mathcal{A}^{\xi}_x=\sigma(\xi(s); s\le x)\right)_{x\in \mathrm{X}}$ является считающим процессом. Далее считающие процессы обозначим как $\{N(x), x\in \mathrm{X}\}$. Вектор $N(x)=\left(N_1(x),...,N_k(x)\right)$, где каждая компонента $\{N_i(x), x\in \mathrm{X}\}$ является считающим и при $i\ne j,\ i,j\in\Im,\ N_i(x)$ и $N_j(x)$ не имеют скачков в одних и тех же точках, называется многомерным считающим процессом. Другими словами, k-мерный считающий процесс указывает осуществление k типов случайных явлений, которые не могут произойти одновременно. Для одномерного считающего процесса $N(x)$ очевидно $\sup\limits_{x\in\overline{R}}|N(x)|=\lim\limits_{x\uparrow+\infty}|N(x)|=N(+\infty)$. Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, \square, P)$-стохастический базис и $(N(x), \mathcal{A}^N_x)_{x\in \mathrm{X}}$-$k$-мерный считающий процесс, $\mathcal{A}^N_x=\sigma(N_i(s);\ s\le x;\ i\in\Im)$, $x\in \mathrm{X}$. Для каждого считающего процесса $N_i(x)$ существует непрерывный справа неубывающий предсказуемой процесс $A_i(x)$, $A_i(-\infty)=0$, с локально ограниченной вариацией, называемой компенсатором (или дуально предсказуемой проекцией), такой что согласно разложению Дуба-Мейера [80,98]: $m_i(x)=N_i(x)-A_i(x)\in\square_{loc}(\square^N_p)$, $x\in \mathrm{X}$, где $\square_{loc}(\bullet)$-класс локально-интегрируемых мартингалов. В условиях регулярности (см. [100,191]) $A(x)=\left(A_1(x),...,A_k(x)\right)$ будет абсолютно непрерывным вектор-процессом, т.е. $A_i(x)=\int\limits_{(-\infty;x]}\alpha_i(s)ds,\quad (x;i)\in\overline{R}\times\Im$, где $\alpha_i(x)$ процесс интенсивности для $N_i(x)$, является предсказуемым и

$$\alpha_i(x+)=\lim_{\Delta x\downarrow 0}\frac{1}{\Delta x}M(N_i(x+\Delta x)-N_i(x)/\mathcal{A}_x^N)=$$

$$=\lim_{\Delta x\downarrow 0}\frac{1}{\Delta x}P(N_i(x+\Delta x)-N_i(x)=1/\mathcal{A}_x^N). \qquad (1.8.3)$$

Модели считающих процессов $N(x)$, для которых справедливы представления

$$\alpha_i(x)=\lambda_i(x)\nu_i(x),\quad (x;i)\in \mathrm{X}\times\Im, \qquad (1.8.4)$$

где $\lambda_i(x)$-неотрицательные, неслучайные, неизвестные функции, а $\nu_i(x)$ случайные процессы наблюдаемые на R, называются мультипликативными моделями Аалена [100,191].

Пример 3. Пусть X-с.в. с абсолютно непрерывной ф.р. $H(x)$ с плотностью $h(x)=H'(x)$. Тогда для считающего процесса $\left\{N(x)=I(X\le x),\ x\in\overline{R}\right\}$ согласно леммы 4.1 в [100] компенсатором является случайный процесс $A(x)=\Lambda_H(x\wedge X)=-\log(1-H(x\wedge X))$ и $m(x)=N(x)-A(x)\in\square^2_{loc}(\square^N_p),\quad x\le T_H$, где $T_H=\sup\left\{x\in R:\ H(x)<1\right\}$. Поскольку при $\lambda=h(1-H)^{-1}$:

$$A(x)=\int\limits_{(-\infty;x]}\lambda(s)I(s\le X)ds=\int\limits_{(-\infty;x]}\lambda(s)(1-N(s-))ds,$$

то рассматриваемая модель является мультипликативной с $v(x)=1-N(x-)$. ■

Замечание 1.8.1. Если X-с.в. с непрерывной справа ф.р. H, то повторив доказательство леммы 4.1 в [100] можно установить, что $m(x)=I(X\le x)-\Lambda_H(x\wedge X)\in\square^2_{loc}(\square^N_p),\ x\le T_H$, где $\Lambda_H(x\wedge X)=\int\limits_{(-\infty;x]}I(X\ge s)\frac{dH(s)}{1-H(s-)}$. ■

Следует отметить, что при помощи считающего процесса $N(x)=I(X\le x)$ можно образовать мартингалы других структур, чем в примере 3.

Лемма 1.8.2. Пусть X-с.в. с непрерывной справа ф.р. H. Тогда при $N(x)=I(X\le x)$: $m^*(x)=\dfrac{N(x)-H(x)}{1-H(x)}\in\square^2_{loc}(\square^N_p),\ x\le T_H$.

Доказательство леммы 1.8.2. очевидно, $Mm^*(x)=0$ и $\left|m^*(x)\right|\le 2\left(1-H(T_H)\right)^{-1}$ для всех $x\le T_H$. Пусть $A_1=\{\omega:\ X(\omega)>s\}$ и

$A_2 = \{\omega:\ X(\omega) = r\}$, где $-\infty \le r \le s < x \le T_H$. Тогда свойство (1.8.2) достаточно показать для A_1 и A_2. Оно следует из равенств

$$M\left(m^*(x)/A_1\right) = -\frac{H(s)}{1-H(s)} = m^*(s), \quad P\text{-п.н.},$$

$$M\left(m^*(x)/A_2\right) = -\frac{P(X \le x / X = r) - H(x)}{1-H(x)} = 1 = m^*(r), \quad P\text{-п.н..}$$

остальные свойства мартингала очевидны. Лемма 1.8.2 доказана. ■

Другие примеры мартингалов, образованных считающими процессами можно найти в работах [191,193,278].

Пусть $\{N(x) = N_1(x),\dots,N_k(x);\ x \in R\}$-многомерный считающий процесс, для которого справедливо разложение Дуба-Мейера: $\mu(x) = N(x) - A(x) \in \square_{loc}(\square_p^N)$ (теорема 5 в [80]). Тогда согласно теореме 2.3.1. в [193]: $0 \le \Delta\Lambda_i(x) \le 1,\ (x;i) \in R \times \Im,\ \mu(x) \in \square_{loc}^2(\square_p^N)$ и для компонент $m_i(x) = N_i(x) - A_i(x)$ предсказуемые ковариационные процессы определяются при $x \in R$ и $i,j \in \Im$ равенствами

$$< m_i; m_j > (x) = \begin{cases} \int\limits_{(-\infty;x]} (1 - \Delta A_i(s)) dA_i(s), & i = j, \\ -\int\limits_{(-\infty;x]} \Delta A_i(s)) dA_j(s), & i \ne j. \end{cases} \tag{1.8.5}$$

В качестве локализирующей последовательности моментов остановки может быть взята любая неубывающая последовательность $\{\tau_n,\ n \ge 1\}$ моментов остановки такая, что $P\left(\lim\limits_{n\to\infty} \tau_n = \infty\right) = 1$ и для каждого n: $M\left[\sum_{j=1}^k N_j(\tau_n)\right] < \infty$. Например, τ_n можно определить формулой $\tau_n = \inf\left\{x:\ \sum_{j=1}^k N_j(x) \ge n\right\},\ n \ge 1$, при этом для некоторого $j = j^* \in \Im$, $\Delta N_{j^*}(\tau_n) = 1$.

На некотором стохастическом базисе $(\Omega, \mathcal{A}, \square_p, P)$ нами будут рассмотрены также и случайные процессы вида

$$\square(x) = \int\limits_{(-\infty;x]} L(u) d\xi(u), \quad x \in R, \tag{1.8.6}$$

являющиеся стохастическими интегралами, т.е. интегралами Лебега-Стильтеса от L по ξ по интервалу $(-\infty; x]$ при каждом x [98,191]. Здесь $\{L(x),\ x \in R\}$ измеримый случайный процесс и $\{\xi(x),\ x \in R\}$-случайный процесс ограниченной вариации. В рассматриваемых нами стохастических интегралах как правило $\xi(x)$-мартингал. Так, пусть $\xi_i(x) \in \square_{loc}^2(\square_p)$, $\xi_i(x)$

имеют траектории локально-ограниченной вариации, $\xi_i(-\infty)=0$ и $L_i(x),\ i=1{,}2,$ -предсказуемы и локально-ограничены. Тогда известно [98,191], что интегралы $\square_i(x)=\int\limits_{(-\infty;x]} L_i(u)d\xi_i(u)$ существуют, $\square_i(x)\in\square^2_{loc}(\square_p)$ и их предсказуемые ковариационные процессы определяются равенством

$$<\square_1;\square_2>(x)=\int\limits_{(-\infty;x]} L_1(u)L_2(u)d<\xi_1;\xi_2>(u). \tag{1.8.7}$$

Более того,

$$M(\square_1(x)\cdot\square_2(x))=M\ (<\square_1;\square_2>(x)). \tag{1.8.8}$$

При $i=1{,}2$: $\square_i^2(x)-<\square_i;\square_i>(x)\in\square_{loc}(\square_p)$ и если τ-момент остановки, то $M\ \square_i^2(\tau)=M\ (<\square_i;\square_i>(\tau))$.

При исследовании предельных свойств непараметрических оценок по неполным выборкам нами будет использован многомерный аналог центральной предельной теоремы для мартингалов с непрерывным временем. Приводимая ниже теорема А из [191] является обобщением на k-мерный случай результатов Реболледо [272]. Пусть $\left\{\zeta^{(n)}(x)=\left(\zeta_{1n}(x),...,\zeta_{kn}(x)\right),\ x\in R,\ n\geq 1\right\}$ - последовательность случайных процессов, для которой справедливо ε-разложение при каждом $n\geq 1$:

$$\zeta_{1n}(x)=\underline{\zeta}^{\varepsilon}_{in}(x)+\overline{\zeta}^{\varepsilon}_{in}(x),\qquad (x;i)\in R\times\Im, \tag{1.8.9}$$

где

(A) $\sup\limits_{x\in R}\left|\Delta\underline{\zeta}_{in}(x)\right|\leq\varepsilon$, п.н.

(B) $\overline{\zeta}^{\varepsilon}_{in}(x)$ имеет траектории локально-ограниченной вариации и для каждого $i,j\in\Im$: $P\left(\exists x\in R:\ \ \Delta\underline{\zeta}^{\varepsilon}_{in}(x)\neq 0\quad u\quad \Delta\overline{\zeta}^{\varepsilon}_{jn}(x)\neq 0\right)=0$.

Теорема А. [191]. Пусть $\left\{\zeta^{(n)}(x),\ x\in R\right\}$ допускает ε-разложение (1.8.9) и $\left\{\zeta^{(\infty)}(x)=\left(\zeta_1(x),...,\zeta_k(x)\right),\ x\in R\right\}$-гауссовский вектор-процесс, компоненты которого независимы, имеют непрерывные выборочные траектории, некоррелированные приращения, при $i\in\Im,\ \ \zeta_i(-\infty)=0,\ \ M\zeta_i(x)=0$ и $M\zeta_i(x_1)\zeta_i(x_2)=A_i(x_1\wedge x_2)$, где $\left\{A_i(x),\ \ x\in R,\ \ i\in\Im\right\}$-неубывающие непрерывные функции с $A_i(-\infty)=0$. Далее, если при каждом $(x;i)\in R\times\Im$

$$<\overline{\zeta}^{\varepsilon}_{in};\overline{\zeta}^{\varepsilon}_{in}>(x)\xrightarrow[n\to\infty]{P}0, \tag{1.8.10}$$

и для каждого $x\in R$ и $i,j\in\Im$

$$<\zeta_{in};\zeta_{jn}>(x)\xrightarrow[n\to\infty]{P}\begin{cases}A_i(x), & i=j,\\ 0, & i\neq j,\end{cases} \tag{1.8.11}$$

то в $D^{(k)}(R),\ \ \zeta^{(n)}(x)\underset{n\to\infty}{\overset{D}{\Rightarrow}}\zeta^{(\infty)}(x)$. Кроме того, если $\zeta_{in}(x)$ имеет траектории локально-ограниченной вариации для всех $i\in\Im$ и $n\geq 1$, то

$$\sum_{s\le x}\Delta\zeta_{in}(s);\Delta\zeta_{jn}(s)\xrightarrow[n\to\infty]{P}\begin{cases}A_i(x), & i=j,\\ 0, & i\ne j,\end{cases}$$

для всех $x\in R$ и $i,j\in\Im$. ■

Приведённую теорему можно применять также и для одномерных интегральных мартингалов структуры (см. [278])

$$\zeta_n(x)=n^{-\frac{1}{2}}\sum_{k=1}^{n}\int_{(-\infty;x]}h_k(s)dm_k(s),\quad n=1,2,...;\tag{1.8.12}$$

где $\{m_k(x),\ k=\overline{1,n},\ x\in R\}$-взаимоортогональные мартингалы с нулевыми средними и $\{h_k(x),\ k=\overline{1,n},\ x\in R\}$-измеримые функции.

Замечание 1.8.3. Нами далее будут рассмотрены случайные процессы также и следующих структур: $\zeta_n^{*}(x)=n^{-\frac{1}{2}}\sum_{k=1}^{n}h_k(x)m_k(x),\quad n=1,2,...$; и $\zeta_n^{**}(x)=n^{-\frac{1}{2}}\sum_{k=1}^{n}\int_{(-\infty;x]}m_k(s)dh_k(s),\quad n=1,2,...$; где h_k и m_k определяются как в (1.8.12). для таких последовательностей будут использованы аналоги теоремы А для мартингалов с весами из работы [278]. ■

При исследовании предельных свойств последовательности мартингалов очень полезным является следующее неравенство Ленгляра-Реболледо.

Теорема 1.8.4. [98,191,244]. Пусть $\xi(x)$ и $\eta(x)$ являются $\square$-адаптированными, непрерывными справа неотрицательными случайными процессами на $[0;\infty)$, при этом $\eta(x)$ также и неубывает, $\eta(0)=0$, а также предсказуем. Предположим также, что $\eta(x)$ доминирует процесс $\xi(x)$, т.е. для любого момента остановки τ $M\xi(\tau)\le M\eta(\tau)$. Тогда для любого марковского момента τ и чисел $a,b>0$ $P\left(\sup_{x\le\tau}|\xi(x)|\ge a\right)\le\frac{1}{a}M(\eta(\tau)\wedge b)+P(\eta(\tau)>b)$. ■

Следствие 1.8.5. 1) Пусть $\xi(x)\in\square^{2}_{loc}(\square_p)$ и τ-локализирующий $\square_p$-измеримый момент остановки. Тогда

$$P\left(\sup_{u\le x\wedge\tau}|\xi(u)|\ge a\right)\le\frac{b}{a}+P(<\xi;\xi>(x\wedge\tau)>b).\ ■$$

2) Пусть $\xi(x)=\int_{[0;x]}L(u)dN(u)$ и $\eta(x)=\int_{[0;x]}L(u)dA(u)$, где $N(x)$-считающий процесс, $A(x)$-соответствующий компенсатор, $\mu(x)=N(x)-A(x)\in\square^{2}_{loc}(\square^{N}_{p})$ и $L(u)$-неотрицательный, ограниченный, предсказуемый процесс. Тогда

$\square(x) = \xi(x) - \eta(x) = \int\limits_{[0;x]} L(u)d\mu(u) \in \square^2_{loc}(\square^N_p)$, для любого момента остановки τ,

$M\,\square(\tau) = 0$ и $P\left(\int\limits_{[0;\tau]} L(u)dN(u) \geq a \right) \leq \dfrac{b}{a} + P\left(\int\limits_{[0;\tau]} L(u)dA(u) > a \right)$. ■

Замечание 1.8.6. Как известно, стохастические интегралы, применяемые в теории точечных процессов имеют форму (1.8.6). Однако, если $\xi(x)$ мартингал и $L(x)$ непредсказуем, то интеграл (1.8.6) теперь не будет мартингалом и следовательно мы не можем вычислить дисперсию таких интегралов через предсказуемую вариацию. ■

§ 1.9. Результаты аппроксимации для эмпирических и связанных сними случайных процессов

I. На основе многих результатов, доказываемых в настоящей монографии лежат свойства эмпирических и связанных сними случайных процессов. Пусть $\{X_1, X_2, ...\}$-последовательность н.о.р.с.в. с непрерывной справа ф.р. $F(x)$, $x \in \overline{R}$, определена на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Эмпирический процесс, основанный на с.в. $\{X_1, ..., X_n\}$ определяется как (см. § 1.1.) $\left\{ e_n(x) = n^{\frac{1}{2}}\left(F_n^э(x) - F(x)\right),\ x \in R \right\}$, где $F_n^э(x) = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} I(X_k \leq x)$, $x \in \overline{R}$, -соответствующая э.ф.р. Со свойствами $e_n(x)$ тесно связаны определяемые далее случайные процессы.

Броуновский мост $\{B(y); 0 \leq y \leq 1\}$ является сепарабельным гауссовским процессом с $M\,B(y) = 0$ и $MB(y_1)B(y_2) = (y_1 \wedge y_2) - y_1 y_2$, т.е. $B(y) = W^*(y) - yW^*(1)$, где $\{W^*(y);\ \ 0 \leq y \leq 1\}$-стандартный процесс Винера (см. пример 2 из § 1.8).

Процесс Кифера $\{K(y;t);\ 0 \leq y \leq 1,\ \ 0 \leq t < \infty\}$ является двухпараметрическим действительнозначным сепарабельным гауссовским процессом с $MK(y;t) = 0$ и $MK(y_1;t_1) \cdot K(y_2;t_2) = (t_1 \wedge t_2)((y_1 \wedge y_2) - y_1 y_2)$. Для фиксированного $T > 0$ легко видеть, что

$$\left\{ T^{-\frac{1}{2}} \cdot K(y;T);\ \ 0 \leq y \leq 1 \right\} \overset{D}{=} \{B(y);\ \ 0 \leq y \leq 1\}. \qquad (1.9.1)$$

Согласно классической теореме Дуба –Донскера (принцип инвариантности):

$$e_n(\cdot) \underset{n \to \infty}{\overset{D}{\Rightarrow}} B(F(\cdot)) \qquad \text{в} \quad D(R). \qquad (1.9.2)$$

Для $e_n(x)$ справедливы и более сильные результаты, чем (1.9.2).

В следующей теореме Комлоша-Майора-Тушнади эмпирический процесс аппроксимируется последовательностями броуновских мостов и процессов Кифера.

Теорема А. [143,233]. Если основное вероятностной пространство достаточно богато, то можно определить для каждого n броуновский мост $\{B_n(y);\ 0 \le y \le 1\}$ и процесс Кифера $\{K(y;t);\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le t < \infty\}$ так, что

$$P\left(\sup_{-\infty<x<\infty}|e_n(x) - B_n(F(x))| > n^{-\frac{1}{2}}((A_1 \log n) + Z)\right) \le A_2 \exp(-A_3 Z), \qquad (1.9.3)$$

$$P\left(\sup_{1\le k\le n}\sup_{-\infty<x<\infty}\left|k^{\frac{1}{2}}e_k(x) - K(F(x);k)\right| > ((A_4 \log n) + Z)\log n\right) \le A_5 \exp(-A_6 Z), \qquad (1.9.4)$$

для всех n и действительного Z, где $A_1,\ldots,A_6$-положительные абсолютные постоянные.

Замечание 1.9.1. Здесь фраза «если вероятностное пространство достаточно богато» подразумевает, что на вероятностном пространстве $(\Omega,\mathcal{A},P)$ можно будет построить последовательность независимых винеровских процессов, которая независить от последовательности н.о.р. с. в. $\{X_k,\ k \ge 1\}$. ■

Замечание 1.9.2. В соотношениях (1.9.3) и (1.9.4) процесс $e_j(x)$ есть либо оригинальный процесс, определяемый выше равенством, когда вероятностное пространство $(\Omega,\mathcal{A},P)$ достаточна богато, либо является версией оригинального процесса на новом вероятностном пространстве. ■

Замечание 1.9.3. На самом деле теорема Комлоша-Майора-Тушнади [233] доказана в случае, когда F является равномерным распределением на (0,1). Для случая, когда F является вполне произвольным распределением соотношения (1.9.3) и (1.9.4) доказал Ш.Чёрге [145]. Более того, по свидетельству автора [145], Тушнади установил новое доказательство (1.9.2) и получил следующие значения постоянных: $A_1 = 100,\ A_2 = 10,\ A_3 = \frac{1}{50}$. Таким образом, из (1.9.4) также следует обобщение результата Дуба-Донскера (1.9.2) для случая **произвольного** F**.** ■

Следующие следствия соответственно из (1.9.3) и (1.9.4), получаемые по лемме Бореля-Кантелли при подходящем выборе Z (т.е $Z = \frac{1}{A_k}(1+b)\log n,\quad k = 3,6;\quad b > 0$) также нами будут использованы далее:

$$\sup_{-\infty<x<\infty} \left| e_n(x) - B_n(F(x)) \right| \overset{п.н.}{=} O\left(n^{-\frac{1}{2}} \log n \right), \tag{1.9.5}$$

$$\sup_{-\infty<x<\infty} \left| n^{\frac{1}{2}} e_n(x) - K(F(x); n) \right| \overset{п.н.}{=} O\left(\log^2 n\right), \tag{1.9.6}$$

Более того, из (1.9.5) для многих известных функционалов $\psi(\bullet)$ (см. [143,145]) также имеем:

$$\sup_{-\infty<s<\infty} \left| P(\psi(e_n(\bullet) < s)) - P(\psi(B(F(\bullet)) < s)) \right| = O\left(n^{-\frac{1}{2}} \log n \right). \tag{1.9.7}$$

Объединив теорему 2. С в [125] и лемму 5.3 в [142], сформулируем результаты об оценивании приращения броуновского моста.

Теорема B. 1) Если $h \in (0,1)$ и $\nu, \varepsilon > 0$, тогда

$$P\left(\sup_{0\le s\le 1-h} \sup_{0\le t\le h} \left| B_n(s+t) - B_n(s) \right| > \nu h^{\frac{1}{2}} \right) \le \frac{C(\varepsilon)}{h} \exp\left(-\frac{\nu^2}{2+\varepsilon} \right), \tag{1.9.8}$$

где $C(\varepsilon) = 8 + \dfrac{32}{\varepsilon^2}$.

2) Почти наверное

$$\limsup_{n\to\infty} (\log n)^{-\frac{1}{2}} \sup_{0\le s\le 1-h} \sup_{0\le t\le h} \left| B_n(s+t) - B_n(s) \right| \le (2h)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.9.9}$$

■

Следующий результат Гливенко-Кантелли (1933) устанавливает равномерную сильную состоятельность э.ф.р. для произвольной ф.р. F

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \sup_{-\infty<x<\infty} \left| F_n^{э}(x) - F(x) \right| = 0 \right) = 1. \tag{1.9.10}$$

Известны результаты, при помощи которых могут быть оценены скорости сходимости $F_n^{э}$ к F. Одним из таких является теорема Дворецкого-Кифера-Вольфовитца.

Теорема С. [164]. Пусть F непрерывная ф.р.. Тогда для всех действительных $z > 0$ и $n = 1,2,...$

$$P\left(\sup_{-\infty<x<\infty} \left| e_n(x) \right| > z \right) \le D \exp(-2z^2), \tag{1.9.11}$$

где D-абсолютная постоянная. ■

В частности, из (1.9.11) могут быть получены следующие полезные неравенства:

(C1) [178,313]. Пусть $1-F(T)>\delta>0$. Тогда

$$P\left(\sup_{-\infty<x\le T}\frac{1-F(x)}{1-F_n^э(x)}\ge 2\right)\le \exp(-n\delta c_1)\,, \tag{1.9.12}$$

где c_1-абсолютная постоянная.

(C2) [125]. Пусть $\{T_n,\ n\ge 1\}$-числовая последовательность, удовлетворяющая условиям

$$\lim_{n\to\infty}T_n=T_F=\inf\{x\in\overline{R}:\ F(x)=1\} \tag{1.9.13}$$

и для некоторого $\varepsilon>0$

$$\frac{n}{\log n}\ge 2\varepsilon\big(1-F(T_n)\big)^{-2}\,. \tag{1.9.14}$$

Тогда

$$P\left(\sup_{-\infty<x\le T_n}\big(1-F_n^э(x)\big)^{-1}>2\big(1-F(T_n)\big)^{-1}\right)\le Dn^{-\varepsilon}\,. \tag{1.9.15}$$

(C3) Из (1.9.11) при $z=\left(\frac{\varepsilon}{2}\log n\right)^{\frac{1}{2}}$ и $\varepsilon>0$ получаем

$$P\left(\sup_{-\infty<x<\infty}\left|F_n^э(x)-F(x)\right|>\left(\frac{\varepsilon}{2}n^{-1}\log n\right)^{\frac{1}{2}}\right)\le Dn^{-\varepsilon}\,, \tag{1.9.16}$$

откуда, в свою очередь, при $\varepsilon>1$ также

$$\sup_{-\infty<x<\infty}\left|F_n^э(x)-F(x)\right|\overset{п.н.}{=}O\left(\left(\frac{\log n}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\right). \tag{1.9.17}$$

■

Для $F_n^э$ справедливы и более точные скорости о равномерной сильной состоятельности $F_n^э$, чем (1.9.16) и (1.9.17), а именно различные формы законов типа повторного логарифма. Сформулируем результат Кифера.

Теорема Д. [62.229]. Если F-непрерывная ф.р., то

$$P\left(\limsup_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{\log\log n}\right)^{\frac{1}{2}}\sup_{-\infty<x<\infty}\left|F_n^э(x)-F(x)\right|=1\right)=1\,. \tag{1.9.18}$$

■

Следует отметить, что результат (1.9.18) Кифера справедлив и в случае многомерного эмпирического распределения. На основе этого результата лежит неравенство, являющееся многомерным аналогом (1.9.11) и доказанное в [229] в случае **произвольной ф.р.** F. На самом деле, в рассматриваемом нами одномерном случае имеет место следующий ЗПЛ Чжуна-Смирнова, являющийся более точным, чем (1.9.18) и получаемый из известного ЗПЛ Хартмана-Винтнера для частичных сумм [180]:

$$P\left(\limsup_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{\log\log n}\right)^{\frac{1}{2}}\sup_{-\infty<x<\infty}\left|F_n^{э}(x)-F(x)\right|=\lambda(F)\right)=1, \qquad (1.9.19)$$

где $\lambda(F)=\sup\limits_{-\infty<x<\infty}\left[F(x)(1-F(x))\right]^{\frac{1}{2}}\le\frac{1}{2}$. Для наших целей в дальнейшем более приемлемым является результат (1.9.18).

Функциональные законы повторного логарифма тесно связаны с принципами инвариантности (в частности результатами аппроксимации вида (1.9.6)). Пусть $B(\overline{R})$-пространство ограниченных и непрерывных действительнозначных функций на действительной прямой $\overline{R}$ с супремум нормой $\|f\|=\sup\{|f(x)|:\ -\infty\le x\le\infty\}$. Выделим класс Штрассена функций f из

$$B(\overline{R}):\ K=\left\{f\in B(\overline{R}):\ f:[0,1]\to\overline{R},\ \ f(0)=f(1)=0,\ \int_0^1\left[f'(t)\right]^2dt\le 1\right\}.$$

Пусть $K_F=\{f(F):\ \ f\in K\}$ и $V_n(x)=\dfrac{e_n(x)}{(2\log\log n)^{\frac{1}{2}}},\ \ x\in\overline{R},\ \ n\ge 3$.

Приведём ЗПЛ Финкельштейна в форме Штрассена.

Теорема Е. [180,222]. Последовательность $\{V_n(\bullet),\ n\ge 3\}$ почти наверное относительно компактна в $B(\overline{R})$ со множеством предельных точек K_F. ■

Следует обратить внимание на то, что теорема Е справедлива и для произвольной ф.р. F [180].

II. Теперь остановимся на некоторых свойствах эмпирического процесса, когда последовательность с.в. является разнораспределенной. Пусть $F^{(k)}(x)=P(X_k\le x),\ \ k=1,2,...;\ \ x\in\overline{R}$. Э.ф.р. $F_n^{э}(x)$ будем рассматривать в сопровождении со средним арифметическим $F(x;n)=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}F^{(k)}(x),\ \ x\in\overline{R}$.

Пусть $d_n(x)=\left(F_n^{э}(x)-F(x;n)\right)$. Аналог неравенства (1.9.11) доказал Бретагнолли [119] (см. Доказательство леммы в [153]).

Теорема А*. [119,153]. Для действительного $z>0$ и всех $n\ge 1$, существует абсолютная постоянная $C^*>0$, такая, что

$$P\left(\sup_{-\infty<x<\infty} n^{\frac{1}{2}}\left|d_n(x)\right| \geq z\right) \leq C^* \exp(-2z^2)\,. \qquad (1.9.30)$$

■

Используя неравенство (1.9.30) авторы [153] установили ЗПЛ.

Теорема В*. [153]. Справедливо равенство

$$P\left(\limsup_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{\log\log n}\right)^{\frac{1}{2}} \sup_{-\infty<x<\infty}\left|d_n(x)\right| \leq 1\right) = 1\,. \qquad (1.9.31)$$

Кроме того, если при достаточно больших n: $\sup\limits_{-\infty<x<\infty} F(x;n)(1-F(x;n)) = \frac{1}{4}$ (что возможно когда все $F^{(k)}$-непрерывны), то в (1.9.31) достигается равенство. Результат имеет место и для э.ф.р. k-мерных случайных векторов, где супремум берётся по R^k $(k>1)$. ■

Следует отметить, что результаты типа (1.9.30) и (1.9.31) для эмпирических процессов с весом были доказаны Маркусом и Зинном [250].

Некоторые полезные неравенства для э.ф.р. разнораспределенных с.в. установил Ван Зьюижлен [300]. Для формулировки этих результатов введём модифицированную э.ф.р. $\tilde{F}_n^э(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} I(X_k \leq x) = \frac{n}{n+1}F_n^э(x)$.

Теорема С*. [300]. Для любых $\varepsilon>0,\ \delta>0$, существуют постоянные $K_i = K_i(\varepsilon;\delta),\ \ i=1{,}2$ такие, что $0<K_1<K_2<\infty$ и для фиксированного n и всех x:

$$P\Big(K_1F(x;n) \leq \tilde{F}_n^э(x) \leq K_2F(x;n),\ \text{для}\ x:\ \tilde{F}_n^э(x)>0\Big) \geq 1-\delta\,,$$

$$P\Big(K_1(1-F(x;n)) \leq 1-\tilde{F}_n^э(x) \leq K_2(1-F(x;n)),\ \text{для}\ x:\ \tilde{F}_n^э(x) < n/(n+1)\Big) \geq 1-\delta\,,$$

$$P\left(n^{\frac{1}{2}}\left|\tilde{F}_n^э(x)-F(x;n)\right| \leq K_2\left[F(x;n)(1-F(x;n))\right]^{\frac{1}{2}-\varepsilon}\right) \geq 1-\delta\,. \ ■$$

Заметим, что первые два неравенства в этой теореме являются аналогами (1.9.12).

Легко представить $n^{\frac{1}{2}}\left(F_n^э(x)-F(x;n)\right)$ в виде (см. замечание 1.8.3) $\zeta_n^*(x) = n^{-\frac{1}{2}}\sum_{k=1}^{n} h_k(x)m_k(x)$, где $h_k(x) = 1-F^{(k)}(x)$ и $m_k(x) = (I(X_k \leq x)-F^{(k)}(x))(1-F^{(k)}(x))^{-1}$. Следовательно, согласно лемме 1.8.2 $\zeta_n^*(x)$ является нормированной суммой квадратично-интегрируемых мартингалов с весами. Поэтому для $\zeta_n^*(x)$ можно применять центральную предельную теорему из работы Сринивасана и Зоу [278]. Далее нами неоднократно будут использованы некоторые полезные неравенства для разнораспределенных случайных величин.

Теорема Д*. [86]. Пусть $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$-независимые случайные величины со средним 0, $S_n = \xi_1 + ... + \xi_n$ и U, $\lambda_1, ..., \lambda_n$ положительные действительные числа, такие, что

$$M\left(e^{t\xi_k}\right) \le e^{\frac{1}{2}\lambda_k t^2} \quad \text{для} \quad k = 1, ..., n; \ -U \le t \le U. \tag{1.9.32}$$

Пусть $\Lambda = \lambda_1 + ... + \lambda_n$. Тогда

$$P\left(|S_n| > z\right) \le \begin{cases} 2\exp\left(-\dfrac{z^2}{2\Lambda}\right), & \text{если} \quad 0 \le z \le \Lambda U. \\ 2\exp\left(-\dfrac{Uz}{2}\right), & \text{если} \quad z > \Lambda U. \end{cases} \quad \blacksquare$$

Используя это утверждение теперь докажем неравенства для последовательности бернуллиевских с.в.

Следствие 1.9.10. Пусть $\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n$-независимые бернуллиевские с.в. с $P(\delta_i = 1) = \alpha_i$, $P(\delta_i = 0) = 1 - \alpha_i$ и $A_n = \alpha_1 + ... + \alpha_n$. Тогда для $\Delta_n = \delta_1 + ... + \delta_n$ и произвольного числа $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство

$$P\left(|\Delta_n - A_n| > (\varepsilon n \log n)^{\frac{1}{2}} \right) \le 2n^{-\varepsilon}, \tag{1.9.33}$$

и при $A_n \ge 2(\varepsilon n \log n)^{\frac{1}{2}}$

$$P\left(\Delta_n^{-1} > 2A_n^{-1}\right) \le 2n^{-\varepsilon}. \tag{1.9.34}$$

Доказательство следствия 1.9.10. Поскольку $\alpha_k = M\delta_k$, тогда для $|t| < \frac{1}{2}$, используя элементарное неравенство $1 + t \le e^t \le 1 + t + t^2$ имеем

$$M\exp\{t(\delta_k - M\delta_k)\} \le M\left\{1 + t(\delta_k - M\delta_k) + t^2(\delta_k - M\delta_k)^2\right\} = 1 + t^2 M(\delta_k - M\delta_k)^2 \le \exp\left\{t^2/4\right\},$$

где очевидно $|\delta_k - M\delta_k| \le 1$ и $M(\delta_k - M\delta_k)^2 = M\delta_k(1 - M\delta_k) \le \frac{1}{4}$. Следовательно (1.9.32) имеет место при $\lambda_k = \frac{1}{2}$ и $U = \frac{1}{2}$. Теперь (1.9.33) следует из теоремы Д* при $z = (\varepsilon n \log n)^{\frac{1}{2}}$. Неравенство (1.9.34) является следствием следующих соотношений: $P\left(\Delta_n^{-1} > 2A_n^{-1}\right) \le P\left(|\Delta_n - A_n| > \frac{A_n}{2} \right) \le P\left(|\Delta_n - A_n| > (\varepsilon n \log n)^{\frac{1}{2}} \right) \le 2n^{-\varepsilon}$. ■

Теперь докажем аналогичное утверждение для пуассоновских с.в..

Следствие 1.9.11. Пусть $\nu_1,...,\nu_n,...$ последовательность пуассоновских с.в. с $M\nu_n = n$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ при выполнении условия

$$\frac{n}{\log n} \geq \frac{\varepsilon}{8\left(1+\frac{e}{3}\right)^2}, \quad e = \exp(1), \tag{1.9.35}$$

справедливо неравенство

$$P\left(|\nu_n - n| > \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{2} n \cdot \log n\right)^{1/2}\right) \leq 2n^{-\frac{\varepsilon}{16\left(1+\frac{\varepsilon}{3}\right)}}. \tag{1.9.36}$$

Доказательство следствия 1.9.11. Пусть $\gamma_1, \gamma_2,...$ последовательность пуассоновских с. в. с $M\gamma_k = 1$ для всех $k = 1,2,...$. Тогда очевидно

$$S_n = \nu_n - n = \sum_{k=1}^{n} (\gamma_k - 1) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k ,$$

при этом $Me^{t\xi_k} = e^{-t} Me^{t\gamma_1} = e^{-t} e^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(e^t\right)^k}{k!} = \exp(e^t - (t+1))$. Используя разложение Тейлора для e^t имеем

$$Me^{t\xi_k} = \exp\left(1 + t + \frac{t^2}{2} + \psi(t) - (t+1)\right) = \exp\left(\frac{t^2}{2} + \psi(t)\right),$$

где $\psi(t) = \frac{t^3}{6} \exp(\theta t), \ \ 0 < \theta < 1$.

Оценим $\psi(t)$ учитывая, что $t^3 \leq t^2$ при $0 \leq t \leq 1$: $\psi(t) \leq \frac{t^3}{6} \cdot e \leq e \cdot \frac{t^2}{6}$ при $0 \leq t \leq 1$: Таким образом $Me^{t\xi_k} = \exp\left(\frac{t^2}{2}\left(1 + \frac{e}{3}\right)\right)$, $0 \leq t \leq 1$. Теперь в теореме Д* полагая $\lambda_k = 1 + e/3$, $U = 1$ и $z = \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{2} n \log n\right)^{1/2}$ получаем (1.9.36). Следует отметить, что условие (1.3.35) означает $0 \leq z = \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{2} \cdot n \cdot \log n\right)^{1/2} \leq \left(1 + \frac{e}{3}\right) n = \Lambda U$, т.е. условие теоремы Д* на z справедливо. ■

III. Теперь остановимся на свойствах э.ф.р., когда число слагаемых n (или объём выборки) заменяется на некоторую с.в.. Пусть $F_n^э(x)$-э.ф.р., построенная по независимым и одинаково распределенным с.в.-нам $X_1,...,X_n$ с ф.р. $F(x)$ (см. п.I данного параграфа) и $\{\nu_n, \ n \geq 1\}$-некоторая последовательность положительных целочисленных с.в., таких, что $\nu_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} \infty$. Рассмотрим эмпирический процесс, когда n заменяется на ν_n:

$$\left\{ e_{\nu_n}(x) = \nu_n^{\frac{1}{2}}\left(F_{\nu_n}^{э}(x) - F(x)\right), \quad x \in \overline{R} \right\}.$$

Свойства слабой сходимости $e_{\nu_n}(x)$ исследовали M.Csörgö. S. Csörgö [141] и M.Csörgö [140]. В частности установлено, что если F-непрерывная ф.р. и

$$\frac{\nu_n}{n} \xrightarrow{P} \nu, \tag{1.9.37}$$

где ν-некоторая положительная с.в., то имеет место принцин инвариантности вида (1.9.2):

$$e_{\nu_n}(\bullet) \underset{n\to\infty}{\overset{D}{\Rightarrow}} B(F(\bullet)) \qquad \text{в} \quad D(\overline{R}). \tag{1.9.38}$$

(По поводу ослабления условия (1.9.37) до слабой сходимости см. [84]). M.Csörgö заметил [180], что при общем условии (1.9.37) строгая версия теоремы Гливенко-Кантелли не может иметь место, хотя из него следует, что

$$\nu_n^{-\frac{1}{2}} \sup_{-\infty<x<\infty} \left| e_{\nu_n}(x) \right| \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0.$$

Далее нами будет использована следующая э.ф.р. Каца [226] и некоторые её обобщённые модификации:

$$F_n^*(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{\nu_n} I(X_k \le x), & \text{если} \quad \nu_n \ge 1, \ \text{с вер. } 1, \\ \qquad 0, & \text{если} \quad \nu_n = 0, \ \text{с вер. } 1, \end{cases}$$

где последовательность пуассоновских с.в. $\{\nu_n, \ n \ge 1\}$ с $M\nu_n = n$, независит от последовательности $\{X_n, \ n \ge 1\}$-н.о.р. с.в. с ф.р. $F(x)$. Заметим, что статистика F_n^* может удовлетворять и неравенству $F_n^*(x) > 1$ и, в частности $\lim\limits_{x\to\infty} F_n^*(x) = F_n^*(\infty) = \dfrac{\nu_n}{n}$, $\quad P\left(\dfrac{\nu_n}{n} > 1\right) = \sum\limits_{m=n+1}^{\infty} \dfrac{n^m e^{-n}}{m!} = o(1), \ n \to \infty$ и по формуле Стирлинга $P\left(F_n^*(\infty) = 1\right) = P(\nu_n = n) = \dfrac{n^n e^{-n}}{n!} = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi n}}(1 + o(1)), \ n \to \infty$. С другой стороны, F_n^* является несмещённой оценкой для F:

$$MF_n^*(x) = \frac{1}{n} M\left\{ \sum_{m=1}^{\infty} M\left[\sum_{k=1}^{m} I(X_k \le x) \right], \quad \nu_n = m \right\} = \frac{1}{n} M\left\{ \sum_{m=1}^{\infty} M\left[\left(\sum_{k=1}^{m} I(X_k \le x) \right) \Big/ \nu_n = m \right] P(\nu_n = m) \right\} =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{\infty} F(x) m P(\nu_n = m) = \frac{1}{n} F(x) \sum_{m=1}^{\infty} m \frac{n^m}{m!} e^{-n} = F(x).$$

Более того, так как $\{nF_n^*(x), \ x \in \overline{R}\}$ является пуассоновским процессом с параметром $nF(x)$, то $nF_n^*(x)$ имеет независимые приращения. Поэтому, естественно ожидать, что эмпирический процесс Каца $\left\{e_n^*(x) = n^{\frac{1}{2}}\left(F_n^*(x) - F(x)\right), \quad x \in \overline{R}\right\}$ при $n \to \infty$ стремится (в отличие от $e_n(x)$) к винеровскому процессу:

$$e_n^*(x) \underset{n\to\infty}{\overset{D}{\Rightarrow}} W^*(F(x)) \qquad \text{в} \quad D(\overline{R}), \tag{1.9.38*}$$

где $\{W^*(y), \ y \in [0,1]\}$-стандартный процесс Винера. Этот факт впервые эвристическими рассуждениями был установлен Кацом [226]. Предельные и точные распределения некоторых функционалов от $e_n^*(\bullet)$ исследованы в работах [85,140,141,144,180], среди которых отметим более глубокие результаты Никитина [85]. Остановимся на результате Штута-Чёрге [144,180] об сильной аппроксимации $e_n^*(\bullet)$ последовательностью винеровских процессов.

Теорема E*. [144,180]. На достаточно богатом вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ существует последовательность винеровских процессов $\{W_n(y), \ 0 \le y \le 1\}$, такая, что

$$P\left(\sup_{-\infty<x<\infty}\left|e_n^*(x) - W_n^*(F(x))\right| > A_7 n^{-\frac{1}{2}} \log n\right) \le A_8 n^{-r}, \tag{1.9.39}$$

где $r \ge 2$ произвольное целое и A_7 зависит только от r. ■

Таким образом, из (1.9.39) согласно лемме Бореля-Кантелли

$$\sup_{-\infty<x<\infty}\left|e_n^*(x) - W_n^*(F(x))\right| \overset{п.н.}{=} O\left(n^{-\frac{1}{2}} \log n\right), \tag{1.9.40}$$

причём этот порядок не может быть улучшен. ■

Далее наряду со статистикой F_n^* рассмотрим также и следующую её «усеченную» модификацию, свободную от вышеупомянутых недостатков:

$$\widetilde{F}_n(x) = 1 - \left(1 - F_n^*(x)\right) I\left(F_n^*(x) \le 1\right) = \begin{cases} F_n^*(x), & \text{если} \quad F_n^*(x) \le 1, \\ 1, & \text{если} \quad F_n^*(x) > 1. \end{cases}$$

Введём соответствующий эмпирический процесс $\left\{\widetilde{e}_n(x) = n^{\frac{1}{2}}\left(\widetilde{F}_n(x) - F(x)\right), \ x \in \overline{R}\right\}$. Докажем ряд результатов для F_n^* и $\widetilde{F}_n$. Следующая теорема утверждает результаты о равномерной состоятельности.

Теорема E.** Пусть $\{\nu_n,\ n \ge 1\}$ последовательность пуассоновских с.в. с $M\nu_n = n$. Тогда при условии (1.9.35)

$$P\left(\sup_{-\infty<x<\infty}\left|F_n^*(x)-F(x)\right| > \left(\frac{\varepsilon \log n}{2n}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \le Ln^{-w\varepsilon}, \tag{1.9.41}$$

и

$$P\left(\sup_{-\infty<x<\infty}\left|\widetilde{F}_n(x)-F(x)\right| > \left(\frac{\varepsilon \log n}{2n}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \le Ln^{-w\varepsilon}, \tag{1.9.42}$$

где $w = \dfrac{1}{16(1+e/3)}$, $L = D+2$ и D из теоремы C.

*Доказательство теоремы E**.* Используя формулу полной вероятности и неравенство треугольника, имеем:

$$P\left(\sup_{-\infty<x<\infty}\left|F_n^*(x)-F(x)\right| > \left(\frac{\varepsilon\log n}{2n}\right)^{\frac{1}{2}}\right) = P\left(\sup_{-\infty<x<\infty}\left|F_n^э(x)-F(x)+\frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{\nu_n} I(X_k \le x)\right| > \left(\frac{\varepsilon\log n}{2n}\right)^{\frac{1}{2}} \Big/ \nu_n > n\right)P(\nu_n > n)+$$

$$+P\left(\sup_{-\infty<x<\infty}\left|\left(F_n^э(x)-F(x)\right)-\frac{1}{n}\sum_{k=\nu_n+1}^{n} I(X_k \le x)\right| > \left(\frac{\varepsilon\log n}{2n}\right)^{\frac{1}{2}} \Big/ \nu_n \le n\right)P(\nu_n \le n) \le$$

$$\le P\left(\sup_{-\infty<x<\infty}\left|F_n^э(x)-F(x)\right| > \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon\log n}{2n}\right)^{\frac{1}{2}}\right) + P\left(\sup_{-\infty<x<\infty}\left|\frac{1}{n}\sum_{k=(n\wedge\nu_n)+1}^{(n\vee\nu_n)} I(X_k \le x)\right| > \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon\log n}{2n}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \le$$

$$\le D\exp\left(-2\frac{\varepsilon\log n}{8n}n\right) + P\left(\left|\frac{\nu_n - n}{n}\right| > \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon\log n}{2n}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \le Dn^{-\frac{\varepsilon}{4}} + 2n^{-w\varepsilon} \le Ln^{-w\varepsilon},$$

где использовали также (1.9.11), (1.9.36) и то, что $w < \dfrac{1}{4}$. Тем самым (1.9.41) верно. Докажем (1.9.42). Пусть $\widetilde{T}_n = \inf\{x:\ \widetilde{F}_n(x) = 1\}$. Если $x \ge \widetilde{T}_n$ и $\nu_n > n$, то $\widetilde{F}_n(x) = 1$ и $F_n^*(x) - F(x) \ge F_n^*(x) - \widetilde{F}_n(x) \ge 0$. Тогда в предположении, что $\nu_n > n$, справедливы соотношения

$$\sup_{-\infty<x<\infty}\left|\widetilde{F}_n(x)-F(x)\right| = \left\{\sup_{-\infty<x<\widetilde{T}_n}\left|F_n^*(x)-F(x)\right| \vee \sup_{x\ge\widetilde{T}_n}\left|\widetilde{F}_n(x)-F(x)\right|\right\} \le$$

$$\leq \left\{ \sup_{-\infty<x<\widetilde{T}_n} \left| F_n^*(x) - F(x) \right| \vee \sup_{x\geq\widetilde{T}_n} \left| F_n^*(x) - F(x) \right| \right\} = \sup_{-\infty<x<\infty} \left| F_n^*(x) - F(x) \right|.$$

Учитывая полученное неравенство, а также то, что при $\nu_n \leq n$ очевидно $\widetilde{F}_n(x) = F_n^*(x), \quad \forall x \in \overline{R}$, используя формулу полной вероятности и (1.9.41) получаем (1.9.42). Теорема E** доказана. ■

Пусть $\{T_n, \ n \geq 1\}$ числовая последовательность, удовлетворяющая условиям (1.9.13) и

$$1 - F(T_n) \geq \left(\frac{2\varepsilon \log n}{wn} \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{1.9.43}$$

где w из теоремы E**.

Теорема F*. Пусть последовательность $\{T_n, \ n \geq 1\}$ удовлетворяет условию (1.9.43), тогда для любого числа $\varepsilon > 0$

$$P\left(\sup_{-\infty<x\leq T_n} \left(1 - F_n^*(x)\right)^{-1} > 2(1 - F(T_n))^{-1} \right) \leq Ln^{-w\varepsilon}, \tag{1.9.44}$$

$$P\left(\sup_{-\infty<x\leq T_n} \left(1 - \widetilde{F}_n(x)\right)^{-1} > 2(1 - F(T_n))^{-1} \right) \leq Ln^{-w\varepsilon}. \tag{1.9.45}$$

Доказательство (1.9.44) и (1.9.45) полностью повторяет доказательство леммы 4.1 в [125], используя соответственно (1.9.41) и (1.9.42), а также то, что (1.9.43) влечет (1.9.35). Поэтому нет необходимости её приводить. ■

Пусть $\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n$-независимые и одинаково распределенные бернуллиевские с.в. с $P(\delta_k = 1) = p$, $P(\delta_k = 0) = 1 - p$, $\nu_1, \nu_2, ..., \nu_n$-пуассоновские с.в. с $M\nu_n = n$ и обе последовательности взаимонезависимы. Введём в рассмотрение средние величины $p_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \delta_k$, $p_n^* = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\nu_n} \delta_k$, $\widetilde{p}_n = 1 - (1 - p_n^*) I(p_n^* \leq 1)$. Для p_n из следствия 1.9.10, в частности будем иметь

Следствие 1.9.12. Для произвольного числа $\varepsilon > 0$

$$P\left(|p_n - p| > \left(\frac{\varepsilon \log n}{n} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \leq 2n^{-\varepsilon} \tag{1.9.46}$$

и при $\frac{n}{\log n} \geq 4\varepsilon p^{-2}$

$$P\left(p_n^{-1} > 2p^{-1}\right) \leq 2n^{-\varepsilon}. \quad ■ \tag{1.9.47}$$

Теперь установим аналоги (1.9.46) и (1.9.47) для $p^*{}_n$ и $\widetilde{p}_n$. Отметим, что в нижеприводимых утверждениях постоянная w из теоремы E*.

Теорема G*. Пусть $\dfrac{n}{\log n} \ge 64w^2\varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ произвольное число. Тогда

$$P\left(\left|p_n{}^* - p\right| > \left(\frac{\varepsilon \log n}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \right) \le 2n^{-2w\varepsilon}, \tag{1.9.48}$$

и

$$P\left(\left|\widetilde{p}_n - p\right| > \left(\frac{\varepsilon \log n}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \right) \le 2n^{-2w\varepsilon}. \tag{1.9.49}$$

*Доказательство теоремы G**. Используя неравенства $\left|p_n^* - p\right| \le \left|p_n - p\right| + \left|p_n^* - p_n\right|$, (1.9.46) и (1.9.36) получает следующую цепочку:

$$P\left(\left|p_n^* - p\right| > \left(\frac{\varepsilon \log n}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \right) \le P\left(\left|p_n - p\right| > \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon \log n}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \right) + P\left(\left|p_n^* - p_n\right| > \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon \log n}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \right) \le 2\exp\left(-\frac{\varepsilon}{4}\log n\right) +$$

$$+P\left(\frac{1}{n}\sum_{k=n\wedge\nu_n}^{n\vee\nu_k} \delta_k > \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon \log n}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \right) \le 2n^{-\frac{\varepsilon}{4}} + P\left(\left|\nu_n - n\right| > \frac{1}{2}(\varepsilon n \log n)^{\frac{1}{2}} \right) \le 2\left(n^{-\frac{\varepsilon}{4}} + n^{-\frac{\varepsilon}{8\left(1+\frac{e}{3}\right)}} \right) \le 2n^{-2w\varepsilon}.$$

Тем самым неравенство (1.9.48) установлено. Доказательство (1.9.49) полностью повторяет доказательство неравенства (1.9.42) и поэтому оно опускается. ■

Теперь установим аналоги оценок (1.9.47) для p_n^* и $\widetilde{p}_n$.

Теорема H*. Пусть для $\varepsilon > 0$ и $0 < p \le 1$, $\dfrac{n}{\log n} \ge \dfrac{2\varepsilon}{wp^2}$. Тогда

$$P\left(p_n^{*-1} > 2p^{-1}\right) \le 2n^{-\varepsilon}, \tag{1.9.50}$$

$$P\left(\widetilde{p}_n^{\,-1} > 2p^{-1}\right) \le 4n^{-\varepsilon}. \tag{1.9.51}$$

*Доказательство теоремы H**. Поскольку $P\left(p_n^{*-1} > 2p^{-1}\right) = P\left(p_n^* < \dfrac{p}{2}\right) =$

$= P\left(p - p_n^* > \dfrac{p}{2}\right) \le P\left(\left|p_n^* - p\right| > \dfrac{p}{2}\right)$, то полагая $\dfrac{p}{2} > \left(\dfrac{\varepsilon \log n}{2wn}\right)^{\frac{1}{2}}$, что возможно в силу условия теоремы, и затем используя (1.9.48), получаем (1.9.50). Далее (1.9.51) следует из следующих соображений:

$$P\left(\widetilde{p}_n^{-1} > 2p^{-1}\right) = P\left(\widetilde{p}_n^{-1} > 2p^{-1}, p_n^* \le 1\right) + P\left(\widetilde{p}_n^{-1} > 2p^{-1}, p_n^* > 1\right) \le P\left(p_n^{*-1} > 2p^{-1}, p_n^* \le 1\right) +$$

$$+ P\left(p_n^{-1} > 2p^{-1}, p_n^* > 1\right) \le P\left(p_n^{*-1} > 2p^{-1}\right) + P\left(p_n^{-1} > 2p^{-1}\right) \le 2n^{-\varepsilon} + 2n^{-\varepsilon} = 4n^{-\varepsilon},$$

где использованы также (1.9.50) и (1.9.47). Остается показать выполнение условия теоремы для (1.9.50) и (1.9.51):

$$\frac{n}{\log n} \ge \left(64w^2 \frac{\varepsilon}{2w^2} \vee \frac{2\varepsilon}{wp^2}\right) = \left(\frac{2\varepsilon}{1 + e/3} \vee 32\left(1 + e/3\right)\frac{\varepsilon}{p^2}\right) = 32\left(1 + e/3\right)\frac{\varepsilon}{p^2} = \frac{2\varepsilon}{wp^2},$$

а также

$$\frac{n}{\log n} \ge \left(\frac{3\varepsilon}{wp^2} \vee \frac{4\varepsilon}{p^2}\right) = = \frac{4\varepsilon}{p^2}\left(8\left(1 + e/3\right) \vee 1\right) = 32\left(1 + e/3\right)\frac{\varepsilon}{p^2} = \frac{2\varepsilon}{wp^2}.$$

Теорема Н* доказана. ■

Эту часть параграфа завершим доказательством утверждений об аппроксимации вида (1.9.39) для $\widetilde{F}_n$ и $\widetilde{p}_n$.

Теорема К*. Пусть последовательность $\{\widetilde{T}_n;\ n \ge 1\}$ удовлетворяет условиям

$$1 - F\left(\widetilde{T}_n\right) \ge \left(\frac{r}{2w}\frac{\log n}{n}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{1.9.52}$$

а также

$$\lim_{n\to\infty} \widetilde{T}_n = T_F = \inf\{x:\ F(x) = 1\}. \tag{1.9.53}$$

Тогда при выполнении условия (1.9.35) на вероятностном пространстве теоремы Е* существует последовательность винеровских процессов $\{W_n^*(y):\ 0 \le y \le 1\}$, такая, что

$$P\left(\sup_{-\infty < x \le \widetilde{T}_n} \left|\widetilde{e}_n(x) - W_n^*(x)\right| > A_7 n^{-\frac{1}{2}} \log n\right) \le A_8^* n^{-r}, \tag{1.9.54}$$

где $A_8^* = A_8 + L$.

Доказательство теоремы К.* С учётом того, что $\forall x \in \left(-\infty, \widetilde{T}_n\right]$, $F_n^*(x) \le F_n^*(\widetilde{T}_n)$ и если $F_n^*(\widetilde{T}_n) \le 1$, то $\widetilde{e}_n(x) = e_n^*(x)$ и по формуле полной вероятности

$$P\left(\sup_{-\infty < x \le \widetilde{T}_n} \left|\widetilde{e}_n(x) - W_n^*(F(x))\right| > A_7 n^{-\frac{1}{2}} \log n\right) \le P\left(\sup_{-\infty < x \le \widetilde{T}_n} \left|\widetilde{e}_n(x) - W_n^*(F(x))\right| > A_7 n^{-\frac{1}{2}} \log n \Big/ F_n^*(\widetilde{T}_n) \le 1\right) +$$

$$+P\left(F_n^*(\widetilde{T}_n)>1\right)\le P\left(\sup_{-\infty<x\le\widetilde{T}_n}\left|e_n^*(x)-W_n^*(F(x))\right|>A_7 n^{-\frac{1}{2}}\log n\right)+P\left(F_n^*(\widetilde{T}_n)>1\right)\le A_8 n^{-r}+P\left(F_n^*(\widetilde{T}_n)>1\right),$$

где воспользовались (1.9.39). Оценим вторую вероятность так:

$$P\left(F_n^*(\widetilde{T}_n)>1\right)=P\left(F_n^*(\widetilde{T}_n)-F(\widetilde{T}_n)>1-F(\widetilde{T}_n)\right)\le P\left(\sup_{-\infty<x<\infty}\left|F_n^*(x)-F(x)\right|>\left(\frac{r}{2w}\frac{\log n}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\right)\le Ln^{-r}.$$

.

Последняя оценка является следствием (1.9.41). Тем самым неравенство (1.9.54) установлено. Теорема K* доказана. ■

Таким образом, согласно (1.9.54)

$$\sup_{-\infty<x\le\widetilde{T}_n}\left|\widetilde{e}_n(x)-W_n^*(F(x))\right|\overset{п.н.}{=}O\left(n^{-\frac{1}{2}}\log n\right). \tag{1.9.55}$$

Аппроксимацию для $n^{\frac{1}{2}}(\widetilde{p}_n-p)$ можно установить непосредственно или же получить из (1.9.54). Второй способ доказательства является коротким и поэтому мы его и используем.

Теорема L. Пусть

$$\frac{n}{\log n}\ge\left(\frac{r}{2w(1-p)^2}\vee\frac{r}{8(1+e/3)^2}\right). \tag{1.9.56}$$

Тогда для последовательности винеровских процессов $\{W_n^*(y):\ 0\le y\le 1\}$ из теоремы K*

$$P\left(\left|n^{\frac{1}{2}}(\widetilde{p}_n-p)-W_n^*(p)\right|>A_7 n^{-\frac{1}{2}}\log n\right)\le A_8^* n^{-r}. \tag{1.9.57}$$

Доказательство теоремы L. С. в.-ны δ_k и $1-\delta_k$, где δ_k слагаемое в определении p_n^*, имеют ф.р.

$$\psi^0(t)=\begin{cases}0, & t\le 0,\\ 1-p, & 0<t\le 1,\\ 1, & t>1,\end{cases}\qquad \psi(t)=\begin{cases}0, & t\le 0,\\ p, & 0<t\le 1,\\ 1, & t>1,\end{cases}$$

соответственно. Введём в рассмотрение также и функцию

$$
\psi^*(t)=\begin{cases}0, & t\le 0,\\ p, & 0<t\le \dfrac{1}{2},\\ 2(1-p)t+(2p-1), & \dfrac{1}{2}<t\le 1,\\ 1, & t>1.\end{cases}
$$

Нетрудно заметить, что $\psi^*(t)$ также является ф.р.. Пусть $\psi_n(t)$ и $\psi_n^*(t)$ - оценки типа Каца для $\psi(t)$ и $\psi^*(t)$ соответственно. Поскольку при $t\le\frac{1}{2}$, $\psi(t)=\psi^*(t)$, то $\psi_n^*\left(\frac{1}{2}\right)=\psi_n\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{n}\left\{\text{Количество}\,\delta_k:\ 1-\delta_k\le\frac{1}{2},\ \ 1\le k\le\nu_n\right\}=\frac{1}{n}\{\text{Количество}\,\delta_k:\ \delta_k=1,$ $1\le k\le\nu_n\}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\nu_n}\delta_k=p_n^*$. Следовательно $\tilde\psi_n^*\left(\frac{1}{2}\right)=\tilde\psi_n\left(\frac{1}{2}\right)=\tilde p_n$. Определим числовую последовательность $\{T_n^*,\ n\ge 1\}$ следующим образом: $1-\psi^*(T_n^*)=\mu(n)$, где $\mu(n)=\left(\frac{r}{2w}\frac{\log n}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$. Отсюда $\psi^*(T_n^*)=1-\mu(n)$. Теперь очевидно, что определение T_n^* будет корректным, если $p\le 1-\mu(n)\le 1$, так как на отрезке $[p;1]$ определена функция $\left(\psi^*(t)\right)^{-1}$. Это неравенство справедливо ввиду условия теоремы, т.е. $\frac{n}{\log n}\ge\frac{r}{2w(1-p)^2}$. Исходя из выше изложенного запишем следующую цепочку неравенств:

$$
P\left(\left|n^{\frac{1}{2}}(\tilde p_n-p)-W_n^*(p)\right|>A_7n^{-\frac{1}{2}}\log n\right)=P\left(\left|n^{\frac{1}{2}}\left(\hat\psi_n^*\left(\frac{1}{2}\right)-\psi^*\left(\frac{1}{2}\right)\right)-W_n^*\left(\psi^*\left(\frac{1}{2}\right)\right)\right|>A_7n^{-\frac{1}{2}}\log n\right)\le
$$

$$
\le P\left(\sup_{-\infty<x\le T_n^*}\left|n^{\frac{1}{2}}\left(\hat\psi_n^*\left(\frac{1}{2}\right)-\psi^*(x)\right)-W_n^*\left(\psi^*(x)\right)\right|>A_7n^{-\frac{1}{2}}\log n\right)\le A_8^*n^{-r},
$$

- согласно теоремы К*, так как определенная выше последовательность $\{T_n\ ,\ n\ge 1\}$ удовлетворяет условию (1.9.52). Таким образом, (1.9.52) установлено. ■

В конце настоящего пункта III рассмотрим случай разнораспределённых независимых с.в. X_n с непрерывными ф.р. $F^{(n)}(x)=P(X_n\le x),\ n=1,2,\ldots$. Наряду с ранее определенными функциями $F_n^э(x),\ \hat F_n^э(x),\ F(x;n),\ F_n^*(x),\ \tilde F_n(x)$, определим также $\hat F_n^*(x)=\frac{n}{n+1}F_n^*(x)$,

$F^0(x;n)=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{\nu_n}F^{(k)}(x)$, $\quad F^{\Delta}(x;n)=1-(1-F^0(x;n))I(F^0(x;n)\le 1)$. Следующее утверждение обобщает теоремы С* и Е**.

Теорема L*. В условиях теоремы Е** справедливы неравенства:

$$P\left(n^{\frac{1}{2}}\left|\hat{F}_n^*(x)-F(x;n)\right|>K_2\left[F(x;n)(1-F(x;n))\right]^{\frac{1}{2}-\varepsilon}+\frac{1}{2}(\varepsilon\log n)^{\frac{1}{2}}\right)\le\delta+2n^{-w\varepsilon},$$

$$P\left(\sup_{-\infty<x<\infty}\left|F_n^*(x)-F(x;n)\right|>\left(\frac{\varepsilon\log n}{2n}\right)^{\frac{1}{2}}\right)\le Nn^{-w\varepsilon},$$

$$P\left(\sup_{-\infty<x<\infty}\left|F_n^*(x)-F^0(x;n)\right|>\left(\frac{\varepsilon\log n}{2n}\right)^{\frac{1}{2}}\right)\le Mn^{-w\varepsilon},$$

$$P\left(\sup_{-\infty<x<\infty}\left|\widetilde{F}_n(x)-F^0(x;n)\right|>\left(\frac{\varepsilon\log n}{2n}\right)^{\frac{1}{2}}\right)\le Mn^{-w\varepsilon},$$

$$P\left(\sup_{-\infty<x<\infty}\left|\widetilde{F}_n(x)-F^{\Delta}(x;n)\right|>\left(\frac{\varepsilon\log n}{2n}\right)^{\frac{1}{2}}\right)\le Mn^{-w\varepsilon},$$

где K_2 и δ из теоремы С*, *N=C*+2*, *M=N+2* и С* из теоремы А*.

Доказательство теоремы L.* Первое неравенство следует из $\hat{F}_n^*(x)=$ $=\hat{F}_n^{э}(x)+\dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{k=(n\wedge\nu_n)+1}^{k=(n\vee\nu_n)}I(X_k\le x)<\hat{F}_n^{э}(x)+\dfrac{|\nu_n-n|}{n}$, теоремы С* и следствия 1.9.11. Второе неравенство устанавливается повторив доказательство (1.9.41), используя при этом неравенство (1.9.30). Для доказательства третьего неравенства достаточно использовать соотношения

$$\left|F_n^*(x)-F^0(x;n)\right|\le\left|F_n^*(x)-F^0(x;n)\right|+\left|F(x;n)-F^0(x;n)\right|,$$

$$\left|F(x;n)-F^0(x;n)\right|\le\frac{1}{n}\sum_{k=(n\wedge\nu_n)+1}^{n\vee\nu_n}F^{(k)}(x)\le\frac{|\nu_n-n|}{n},$$

второе неравенство, (1.9.36) и $w=\frac{1}{4}$. Четвёртое и пятое неравенства являются следствиями $\left|\widetilde{F}_n(x)-F^0(x;n)\right|\le\left|F_n^*(x)-F^0(x;n)\right|$, $\left|\widetilde{F}_n(x)-F^{\Delta}(x;n)\right|\le\left|F_n^*(x)-F^0(x;n)\right|$, и третьего неравенства. Теорема L* доказана. ■

IV. Модель (*Z;A*). Рассмотрим модель, описанную в п.I § 1.3. Напомним, что в этой модели наблюдается независимая выборка $S^{(n)}=\left\{\left(Z_j;\delta_j^{(1)},...,\delta_j^{(k)}\right),\ j=1,...,n\right\}$, где $\delta_j^{(i)}=I\left(A_j^{(i)}\right)$ и $\left\{\left(Z_j,A_j^{(1)},...,A_j^{(k)}\right),\ j\ge 1\right\}$- последовательность независимых и одинаково распределённых копий совокупности $\left(Z; A^{(1)},...,A^{(k)}\right)$. Для ф.р. $H(x)$ и субраспределений $H(x;i) = P(Z \le x, A^{(i)}),\quad (x;i) \in \overline{R} \times \Im$ сперва рассмотрим обычные эмпирические оценки $H_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} I(Z_j \le x)$, $H_n(x;i) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} I\left(Z_j \le x; \delta_j^{(i)} = 1\right)$, $i \in \Im$, и образуем векторзначный эмпирический процесс

$$\left\{a_n(t) = \left(a_n^{(0)}(t_0), a_n^{(1)}(t_1),...a_n^{(k)}(t_k)\right),\ t = (t_0, t_1,...t_k) \in \overline{R}^{k+1}\right\},$$

где

$$a_n^{(0)}(x) = n^{\frac{1}{2}}(H_n(x) - H(x)),\ a_n^{(i)}(x) = n^{\frac{1}{2}}(H_n(x;i) - H(x;i)),\quad i \in \Im.$$

Далее $H(x)$ и $H(x;i)$, $(x;i) \in \overline{R} \times \Im$, предполагаются непрерывными. Следующая теорема Бюрка-Чёрге-Харват является обобщённым аналогом результата (1.9.3) Комлоша-Майора-Тушнади.

Теорема М. [125]. Если вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ достаточно богато, то можно определить $k+1$ последовательностей гауссовских процессов $B_n^{(0)}(x), B_n^{(1)}(x),..., B_n^{(k)}(x)$ таких, что для $a_n(t)$ и $B_n(t) = \left(B_n^{(0)}(t_0), B_n^{(1)}(t_1),..., B_n^{(k)}(t_k)\right)$, $t \in \overline{R}^{k+1}$, имеем:

$$P\left(\sup_{t \in R^{k+1}} \left\| a_n(t) - B_n(t) \right\|^{(k+1)} > n^{-\frac{1}{2}}\left(M(\log n) + Z\right)\right) \le K \exp(-\lambda Z), \tag{1.9.58}$$

- для всех действительных Z, где $M = (2k+1)A_1$, $K = (2k+1)A_2$, $\lambda = A_3/(2k+1)$, а абсолютные постоянные A_1, A_2, A_3-из теоремы А (см. 1.9.3). Более того, $B_n(t)$ является $(k+1)$-мерным векторзначным гауссовским процессом с такой же ковариационной структурой как у $a_n(t)$, т.е.

$$MB_n^{(i)}(x) = 0,\quad x \in \overline{R},\quad i \in \overline{\Im}, \tag{1.9.59}$$

и для любых $i, j \in \Im,\ i \ne j,\ x, y \in \overline{R}$:

$$\begin{aligned} &MB_n^{(0)}(x)B_n^{(0)}(y) = H(x) \wedge H(y) - H(x)H(y), \\ &MB_n^{(i)}(x)B_n^{(i)}(y) = H(x;i) \wedge H(y;i) - H(x;i)H(y;i), \\ &MB_n^{(i)}(x)B_n^{(j)}(y) = -H(x;i)H(y;j), \\ &MB_n^{(i)}(x)B_n^{(0)}(y) = H(x;i) \wedge H(y;i) - H(x;i)H(y). \end{aligned} \tag{1.9.60}$$

■

Если в неравенстве (1.9.58) для $\varepsilon > 0$ положим $Z = \left(\frac{1+\varepsilon}{\lambda}\right)\log n$, то получаем результат, который далее нами будет использован неоднократно:

$$P\left(\sup_{t\in R^{k+1}}\left\|a_n(t) - B_n(t)\right\|^{(k+1)} > Cn^{-1/2}\log n\right) \le Kn^{-(1+\varepsilon)}, \tag{1.9.61}$$

где $C = (2k+1)(A_1 + (1+\varepsilon)/A_3)$. Теперь из (1.9.61) легко следует аналог (1.9.5),

$$\left\|a_n(t) - B_n(t)\right\|^{(k+1)} \overset{п..н}{=} O\left(n^{-1/2}\log n\right). \tag{1.9.62}$$

На самом деле, в доказательстве теоремы 31 в $[125]$ (т.е. теоремы M здесь) конструируются последовательности двухпараметрических гауссовских процессов $Q^{(o)}(x;n), Q^{(1)}(x;n), \ldots, Q^{(k)}(x;n)$ таких, что для $a_n(t)$ и $Q(t;n) = \left(Q^{(o)}(t_o;n), Q^{(1)}(t_1;n), \ldots, Q^{(k)}(t_k;n)\right)$, $t \in \overline{R}^{k+1}$,

$$\left\|a_n(t) - n^{-1/2}Q(t;n)\right\|^{(k+1)} \overset{п.н}{=} O\left(n^{-1/2}\log^2 n\right), \tag{1.9.63}$$

где $Q(t;n)$ является $(k+1)$-мерным векторзначным гауссовским процессом, имеющем такую же ковариационную структуру, что и $n^{1/2}a_n(t)$, т.е.

$$M\,Q^{(i)}(x;n) = 0, \quad i \in \overline{\Im}, \quad x \in \overline{R}, \tag{1.9.64}$$

и для любых $i, j \in \Im, \quad i \ne j, \quad x, y \in \overline{R}$:

$$\begin{gathered} MQ^{(o)}(x;n)Q^{(o)}(y;m) = (n \wedge m)\{H(x) \wedge H(y) - H(x)H(y)\}, \\ MQ^{(i)}(x;n)Q^{(i)}(y;m) = (n \wedge m)\{H(x;i) \wedge H(y;i) - H(x;i)H(y;i)\}, \\ MQ^{(i)}(x;n)Q^{(j)}(y;m) = (n \wedge m)\{-H(x;i)\cdot H(y;j)\}, \\ MQ^{(i)}(x;n)Q^{(o)}(y;m) = (n \wedge m)\{H(x;i) \wedge H(y;i) - H(x;i)H(y)\}. \end{gathered} \tag{1.9.65}$$

Легко видеть, что $\{Q^{(i)};\ i \in \overline{\Im}\}$ являются процессами Кифера. Они имеют следующие представления:

$$Q^{(i)}(x;n) \overset{D}{=} W^{(i)}(H(x;i);n) - H(x;i)\cdot W^{(i)}(1;n), \quad i \in \overline{\Im}, \tag{1.9.66}$$

где, в свою очередь $\{W^{(i)}(y;n);\ \ 0 \le y \le 1,\ \ n \ge 0,\ \ i \in \Im\}$ - двухпараметрические винеровские процессы с $MW^{(i)}(y;n) = 0$ и $MW^{(i)}(y;n)MW^{(i)}(u;m) = (n \wedge m)(y \wedge u),\ i \in \Im$. Следует отметить одно важное обстоятельство, что хотя процессы Кифера $\{Q^{(i)};\ i \in \Im\}$ зависимы, соответствующие им винеровские процессы $\{W^{(i)};\ i\in\Im\}$ является независимыми. Действительно, из доказательства теоремы 3.1 в [125] следует справедливость следующих представлений:

$$Q^{(1)}(x;n)\overset{D}{=}\widetilde{K}(H(x;1);n),$$

$$Q^{(1)}(x;n)\overset{D}{=}\widetilde{K}(H(x;2)-H(\infty;1);n)-\widetilde{K}(H(\infty;1);n,),$$

$$\vdots$$

$$Q^{(i)}(x;n)\overset{D}{=}\widetilde{K}(H(x;i)+H(\infty;1)+...+H(\infty;i-1);n)-\widetilde{K}(H(\infty;1)+...+H(\infty;i-1);n),\ i\in\Im,$$

где $H(\infty;i)=\lim_{x\uparrow\infty}H(x;i),\ H(\infty;1)+...+H(\infty;k)=1,$ а процесс Кифера $\{\widetilde{K}(y;n);\ 0\le y\le 1;\ n\ge 0\}$ выражается через двухпараметрический винеровский процесс $\{W(y;n);\ 0\le y\le 1;\ n\ge 0\}$ равенством

$$\{\widetilde{K}(y;n);\ 0\le y\le 1;\ n\ge 0\}\overset{D}{=}\{W(y;n)-yW(1;n);\ 0\le y\le 1;\ n\ge 0\}. \tag{1.9.67}$$

Следовательно, согласно (1.9.66) и (1.9.67) винеровские процессы $\{W^{(i)};\ i\in\Im\}$ также допускают представления для всех $x\in\overline{R}$:

$$W^{(1)}(H(x;1);n)\overset{D}{=}W(H(x;1);n)$$

$$W^{(2)}(H(x;2);n)\overset{D}{=}W(H(x;2)+H(\infty;1);n)-W(H(\infty;1);n,),$$

$$\vdots$$

$$W^{(i)}(H(x;i);n)\overset{D}{=}W(H(x;i)+H(\infty;1)+...+H(\infty;i-1);n)-W(H(\infty;1)+...+H(\infty;i-1);n),\ i\in\Im,$$

Теперь непосредственным подсчётом ковариаций процессов $\{W^{(i)};\ i\in\Im\}$ легко убедится в их независимости.

Следует ещё отметить, что в специальной модели $(Z;A)$, т.е. МПИ процессы $B_n^{(0)}(x)$ и $\{B_n^{(i)}(\infty);\ i\in\Im\}$ (а следовательно $Q^{(0)}(x;n)$ и $\{Q^{(i)}(\infty;n);\ i\in\Im\}$) согласно равенству (1.3.19) также будут независимыми.

Теперь введём в рассмотрение статистики типа Каца для $H(x)$ и $H(x;i),\ i\in\Im$: $H_n^*(x)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{\nu_n}I(Z_j\le x)$, $H_n^*(x;i)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{\nu_n}I(Z_j\le x);\delta_j^{(i)}=1),\ i\in\Im,$ где $\{\nu_n,\ n\ge 1\}$-последовательность пуассоновских с.в. с $M\nu_n=n$, независит от $\{(Z_j;\delta_j^{(1)},...,\delta_j^{(k)}),\ j\ge 1\}$.

Пусть $a_n^{(0)*}(x)=n^{\frac{1}{2}}\left(H_n^*(x)-H(x)\right)$, $a_n^{(i)*}(x)=n^{\frac{1}{2}}\left(H_n^*(x;i)-H(x;i)\right),\ i\in\Im$,- соответствующие эмпирические процессы. Аналогом теоремы E* является

Теорема М*. Если вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ достаточно богато, то можно определить $(k+1)$ последовательность гауссовских процессов $W_n^{(0)}(x), W_n^{(1)}, \ldots, W_n^{(k)}(x)$ таких, что для $a_n^*(t) = \left(a_n^{(0)*}(t_0), a_n^{(1)*}(t_1), \ldots, a_n^{(k)*}(t_k)\right)$ и $W_n^*(t) = \left(W_n^{(0)}(t_0), W_n^{(1)}(t_1), \ldots, W_n^{(k)}(t_k)\right)$, $t \in \overline{R}^{k+1}$, имеем

$$P\left(\sup_{t \in \overline{R}^{k+1}} \left\| a^*{}_n(t) - W_n^*(t) \right\|^{(k+1)} > C^* n^{-1/2} \log n\right) \le K^* n^{-r}, \qquad (1.9.68)$$

где $r \ge 2$ произвольная постоянная, C^* зависит только от r, K^*-абсолютное постоянное. Более того, $W_n^*(t)$ есть $(k+1)$-мерный векторзначный гауссовский процесс с $MW_n^{(i)}(x) = 0,\ i \in \overline{\Im},\ x \in R$ и для любых $i, j \in \Im,\ \ i \ne j,\ \ x, y \in \overline{R}$:

$$MW_n^{(0)}(x) W_n^{(0)}(y) = H(x) \wedge H(y),\ MW_n^{(i)}(x) W_n^{(i)}(y) = H(x;i) \wedge H(y;i),$$

$$MW_n^{(i)}(x) W_n^{(j)}(y) = H(x;i) \wedge H(y;j),\ MW_n^{(i)}(x) W_n^{(0)}(y) = H(x;i) \wedge H(y). \qquad (1.9.69)$$

Доказательство теоремы М.* Согласно представления (7) в [144]:

$$a_n^{(i)*}(x) = \left(\frac{\nu_n}{n}\right)^{\frac{1}{2}} a_{\nu_n}^{(i)}(x) + H(x;i)\frac{\nu_n - n}{n^{\frac{1}{2}}},\ \ i \in \Im. \qquad (1.9.70)$$

Следовательно аппроксимационная последовательность имеет вид $W_n^{(i)}(x) = B_{\nu_n}^{(i)}(x) + H(x;i)\dfrac{W^*(n)}{n^{1/2}}$, где $B_{\nu_n}^{(i)}(x)$-гауссовский процесс из теоремы М с индексом, замененным на ν_n, а $W^*(x)$-процесс Винера на $[0;\infty)$. Теперь утверждение (1.9.68) теоремы следует из доказательства теоремы 1 в [144] с учётом теоремы М. Нам остается лишь заметить, что для всех $n \ge 1$:

$$\left\{W_n^{(i)}(x);\ x \in \overline{R};\ i \in \overline{\Im}\right\} \overset{D}{=} \left\{W^*(H(x;i));\ x \in \overline{R};\ i \in \overline{\Im}\right\}.$$

Отсюда и следуют равенства (1.9.69). Теорема М* доказана. ■

В [125] установлен следующий аналог неравенства (1.9.11): для $i \in \Im,\ \ n \ge 1$ и всех действительных $z > 0$,

$$P\left(\sup_{-\infty < x < \infty} \left|H_n(x;i) - H(x;i)\right| > z\right) \le 2D \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right). \quad ■ \qquad (1.9.71)$$

■

Пусть $\widetilde{H}_n(x) = 1 - \left(1 - H_n^*(x)\right) I\left(H_n^*(x) \le 1\right)$ и
$\widetilde{H}_n(x;i) = 1 - \left(1 - H_n^*(x;i)\right) I\left(H_n^*(x;i) \le 1\right)$ $(x;i) \in \overline{R} \times \Im$. При справедливости условия (1.9.35), с учётом (1.9.71), повторив доказательства неравенств (1.9.41) и (1.9.42) нетрудно установить справедливость следующих оценок при $i \in \Im$:

$$P\left(\sup_{-\infty<x<\infty}\left|H_n^*(x;i)-H(x;i)\right|>2\left(\frac{\varepsilon\log n}{2n}\right)^{\frac{1}{2}}\right)\le 2(D+1)n^{-w\varepsilon}, \qquad (1.9.72)$$

$$P\left(\sup_{-\infty<x<\infty}\left|\widetilde{H}_n(x;i)-H(x;i)\right|>2\left(\frac{\varepsilon\log n}{2n}\right)^{\frac{1}{2}}\right)\le 2(D+1)n^{-w\varepsilon}. \quad \blacksquare \qquad (1.9.73)$$

Пусть $\widetilde{a}_n(t)=\left(\widetilde{a}_n^{(0)}(t_0),\widetilde{a}_n^{(1)}(t_1),...,\widetilde{a}_n^{(k)}(t_k)\right)$, где $\widetilde{a}_n^{(0)}(x)=n^{\frac{1}{2}}\left(\widetilde{H}_n(x)-H(x)\right)$, $\widetilde{a}_n^{(i)}(x)=n^{\frac{1}{2}}\left(\widetilde{H}_n(x;i)-H(x;i)\right)$, $(x;i)\in\overline{R}\times\Im$. Аппроксимируем $\widetilde{a}_n(t)$ вектор-последовательностью $W_n^*(t)$ гауссовских процессов.

Теорема M.** Пусть имеет место условие (1.9.35). Тогда на достаточно богатом вероятностном пространстве $(\Omega,\mathcal{A},P)$ можно определить $(k+1)$ последовательность гауссовских процессов $W_n^{(0)}(x),W_n^{(1)}(x),...,W_n^{(k)}(x)$ с нулевыми средними и ковариационной структурой (1.9.69) таких, что для векторов $\widetilde{a}_n(t)$ и $W_n^*(t)=\left(W_n^{(0)}(t_0),W_n^{(1)}(t_1),...,W_n^{(k)}(t_k)\right)$, $t\in\overline{R}^{k+1}$, имеем

$$P\left(\sup_{t\in\overline{R}^{k+1}}\left\|\widetilde{a}_n(t)-W_n^*(t)\right\|^{(k+1)}>\widetilde{C}n^{-1/2}\log n\right)\le\widetilde{K}n^{-\beta}, \qquad (1.9.74)$$

где $\widetilde{K}$-абсолютная постоянная, $\widetilde{C}=\widetilde{C}(\varepsilon)$ и $\beta=(r\wedge w\varepsilon)$.

*Доказательство теоремы M**.* Пусть $\left\{T_n^*;\widetilde{T}_n;\ n\ge 1\right\}$-две последовательности чисел, удовлетворяющие условиям

$$\bigwedge_{i\in\Im}\left(P\left(A^{(i)}\right)-H\left(T_n^*;i\right)\right)\ge 1-H\left(\widetilde{T}_n\right)\ge 2\left(\frac{r\log n}{2wn}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Вероятность в (1.9.74) оценивается следующей цепочкой неравенств, получаемой использованием доказательства теоремы К* и результатов теорем Е**, М*:

$$P\left(\sup_{x\le T_n^*}\left|\widetilde{a}_n^{(0)}(x)-W_n^{(0)}(x)\right|>Cn^{-1/2}\log n\right)+\sum_{i=1}^{k}P\left(\sup_{x\le T_n^*}\left|\widetilde{a}_n^{(i)}(x)-W_n^{(i)}(x)\right|>Cn^{-1/2}\log n\right)\le$$

$$\le P\left(\sup_{-\infty<x<\infty}\left|a_n^{(0)*}(x)-W_n^{(0)}(x)\right|>Cn^{-1/2}\log n\right)+P\left(\sup_{-\infty<x<\infty}\left|H_n^*(x)-H(x)\right|>\left(\frac{r\log n}{2wn}\right)^{\frac{1}{2}}\right)+$$

$$+\sum_{i=1}^{k}P\left(\sup_{-\infty<x<\infty}\left|a_n^{(i)*}(x)-W_n^{(i)}(x)\right|>Cn^{-1/2}\log n\right)+\sum_{i=1}^{k}P\left(H_n^*\left(T_n^*;i\right)>P\left(A^{(i)}\right)\right)\le \tag{1.9.75}$$

$$\le (k+1)K^*n^{-r}+Ln^{-w\varepsilon}+q_n,$$

где согласно (1.9.72)

$$q_n=\sum_{i=1}^{k}P\left(H_n^*\left(T_n^*;i\right)>P\left(A^{(i)}\right)\right)=\sum_{i=1}^{k}P\left(H_n^*\left(T_n^*;i\right)-H\left(T_n^*;i\right)>P\left(A^{(i)}\right)-H\left(T_n^*;i\right)\right)\le$$

$$\le\sum_{i=1}^{k}P\left(\sup_{-\infty<x<\infty}\left|H_n^*(x;i)-H(x;i)\right|>2\left(\frac{r\log n}{2wn}\right)^{\frac{1}{2}}\right)\le\sum_{i=1}^{k}P\left(\sup_{-\infty<x<\infty}\left|H_n(x;i)-H(x;i)\right|>\left(\frac{r\log n}{2wn}\right)^{\frac{1}{2}}\right)+ \tag{1.9.76}$$

$$+kP\left(\frac{\left|\nu_n-n\right|}{n}>\frac{1}{2}\left(\frac{4r\log n}{2wn}\right)^{\frac{1}{2}}\right)\le 2kDn^{-\frac{r}{w}}+2kn^{-4r}.$$

Теперь (1.9.74) следует из (1.9.75) и (1.9.76). Теорема М** доказана. ■

Замечание 1.9.13. Результат аппроксимации (1.9.58) теоремы М является основным при исследовании свойств непараметрических оценок. Хотя этот результат требует попарную несовместимость событий $\{A_i,\ i\in\Im\}$, а также непрерывность распределений $H(x)$ и $H(x;i),\ i\in\Im$, как показал Хорват [212], он остаётся в силе, если мы откажемся от этих условий. При формулировке соответствующего результата разница будет лишь в ковариационной структуре (1.9.60), т.е. появится дополнительное слагаемое в формуле

$$MB_n^{(i)}(x)B_n^{(j)}(x)=H^{ij}(x)\wedge H^{ij}(y)-H(x;i)H(x;j),\ \ i,j\in\Im,\ \ i\ne j,$$

где $H^{ij}(x)=P\left(Z\le x,\ \ A^{(i)}\cap A^{(j)}\right)$ (см. также § 1.3 главы 1). ■

В заключении настоящего параграфа приведём одно полезное неравенство Гофдинга для широкого класса ограниченных случайных величин.

Лемма 1.9.14. [208]. Пусть $X_1, X_2, ..., X_n$ независимые с.в., $0 \le X_i \le 1$, $MX_i^2 < \infty,\ i = \overline{1,n}$. Тогда для $\gamma \in (0;1-\mu)$; $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j$ и $\mu = M\overline{X}_n$:

$$P\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| \ge \gamma\right) \le 2\exp(-2n\gamma^2)\ .\ \blacksquare$$

Выводы

Исследования в области статистики неполных наблюдений показало необходимость рассмотрения более общих моделей, построения и исследования в них непараметрических оценок функционалов от распределений. В главе 1 предложены и исследованы базовые функционалы, найдены представления для этих функционалов в различных моделях неполных наблюдений и по этим представлениям для них построены непараметрические оценки (§§ 1.2-1.4). Эти оценки обобщают ранее известные оценки Каплана-Мейера и Альтшулера-Бреслоу в частной модели случайного цензурирования справа. Для функционалов и их оценок установлены ряд полезных неравенств, далее используемых в главах 2 и 3. Задачи непараметрического оценивания различных функционалов от распределений, называемых биометрическими функциями в случае многомерного цензурирования рассмотрены в [64,65,128,129,156,157,206, 214,216,217]. Следует отметить, что в многомерном случае аналоги известных множительных оценок определяются неоднозначно, так как в этом случае нет однозначного определения интеграл - произведения, на которого основаны сами оценки. В § 1.5 на основе функционалов из § 1.2 построены три класса оценок для двумерной функции выживания, рассматривая при этом общую модель зависимого и неоднородного случайного цензурирования справа. В § 1.6, в случае случайного цензурирования с двух сторон в модели Кокса предлагаются три класса параметрических-непараметрических оценок для функции выживания. При этом экспоненциальная оценка обобщает оценку Тсиатис [294], а две остальные являются новыми. В § 1.7, в общей, зависимой модели случайного цензурирования, когда выборка сама также зависит от времени, предлагаются оценки для функции надежности сложных систем. § 1.8 является вспомогательным, в нем приведены известные результаты для считающих процессов и связанных с ними мартингалов с непрерывным временем. Хотя § 1.9 также является вспомогательным, в нём наряду с известными результатами, доказан и ряд новых результатов для эмпирических процессов для разнораспределенных данных и выборок случайного объема. Эти результаты представляют также и самостоятельный интерес.

Все предложенные новые оценки для функционалов будут исследованы в главах 2 и 3 данной монографии. ■

Глава 2. Асимптотическая теория для непараметрических оценок базовых функционалов

§ 2.1. Гауссовские аппроксимации непараметрических оценок в модели случайного цензурирования с двух сторон

Сначала рассмотрим модель $(L \vee (Z \wedge Y); D)$, в которой наблюдается выборка $S_3^{(n)}$ (см. § 1.3, § 1.4). В качестве оценок для функционалов (1.3.42) рассмотрим статистики (1.4.13), в которых оценками к.ф.и. $\Lambda_\tau(x;i)$, $(x;i) \in [\tau;\infty) \times \Im$ являются (1.4.12) при $m = 1$. С целью исследования всех этих оценок образуем векторзначный эмпирический процесс от $t = (t_0, t_1, ..., t_{k+1}) \in \overline{R}^{k+2}$: $\alpha_n(t) = \left(\alpha_n^{(0)}(t_0), \alpha_n^{(1)}(t_1), ..., \alpha_n^{(k)}(t_k), \alpha_n^{(k+1)}(t_{k+1})\right)$, где $\alpha_n^{(k+1)}(x) = n^{\frac{1}{2}}(E_n(x) - E(x))$, $\alpha_n^{(i)}(x) = n^{\frac{1}{2}}(T_n(x;i) - T(x;i))$, $i \in \Im$. В дальнейшем для упрощения изложения материала книги мы предполагаем, что распределения $E(x)$ и $T(x;i)$, $(x;i) \in \overline{R} \times \overline{\Im}$ являются непрерывными (по поводу этого условия см. замечание 1.9.13). Согласно теореме М процесс $\alpha_n(t)$ аппроксимируется гауссовским векторзначным процессом $\beta_n(t) = \left(B_n^{(0)}(t_0), B_n^{(1)}(t_1), ..., B_n^{(k)}(t_k), B_n^{(k+1)}(t_{k+1})\right)$, имеющим такую же ковариационную структуру, что и $\alpha_n(t)$, т.е.

$$MB_n^{(i)}(x) = 0, \quad x \in \overline{R}, \quad i \in \overline{\Im} \cup \{k+1\}, \tag{2.1.1}$$

и для любых $i, j \in \overline{\Im}, \ i \neq j, \ x, y \in \overline{R}$:

$$\begin{aligned} &MB_n^{(i)}(x)B_n^{(i)}(y) = T(x;i) \wedge T(y;i) - T(x;i)T(y;i), \\ &MB_n^{(i)}(x)B_n^{(j)}(y) = -T(x;i)T(y;j), \\ &MB_n^{(k+1)}(x)B_n^{(k+1)}(y) = E(x) \wedge E(y) - E(x)E(y), \\ &MB_n^{(i)}(x)B_n^{(k+1)}(y) = T(x;i)T(y;i) - T(x;i)E(y). \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

Здесь предполагается, что распределения $E(x)$ и $\{T(x;i), \ i \in \overline{\Im}\}$-непрерывны. Тогда для достаточного богатого основного вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ имеем аппроксимацию (см. (1.9.61)):

$$P\left(\sup_{t \in R^{k+2}} \|\alpha_n(t) - \beta_n(t)\|^{(k+2)} > C^0 n^{-\frac{1}{2}} \log n\right) \leq K^0 n^{-(1+\varepsilon)}, \tag{2.1.3}$$

где $C^0 = (2k+3)\left(A_1 + \dfrac{(1+\varepsilon)}{A_3}\right)$, $K^0 = (2k+3)A_2$-абсолютные постоянные и $\varepsilon > 0$ произвольное число. ■

Таким образом, в данной модели справедливыми являются также и соотношения (1.9.62)-(1.9.67). Ясно, что свойства оценок (1.4.13) следуют из соответствующих свойств оценок к.ф.и. (1.4.12). В связи с этим введём также и следующие векторзначные процессы: $M_n(v) = \left(M_n^{(1)}(v_1), ..., M_n^{(k)}(v_k)\right)$,

$V_{mn}(v) = \left(V_{mn}^{(1)}(v_1),...,V_{mn}^{(k)}(v_k)\right)$, где $v = (v_1,...,v_k) \in R^k$, $M_n^{(i)}(x) = n^{\frac{1}{2}}\left(\Lambda_{\tau n}(x;i) - \Lambda_\tau(x;i)\right)$, $V_{mn}^{(i)}(x) = n^{\frac{1}{2}}\left(F_{m\tau n}(x;i) - F_{m\tau}(x;i)\right)$, $m = 1,2,3$; $(x;i) \in [\tau;\infty) \times \Im$. Мы аппроксимируем вектор-процесс $M_n(v)$ гауссовским вектор-процессом $N_n(v) = \left(N_n^{(1)}(v_1),...,N_n^{(k)}(v_k)\right)$, где $(x;i) \in [\tau;\infty) \times \Im$

$$N_n^{(i)}(x) = \int\limits_{[\tau;x]} \frac{\left(B_n^{(k+1)}(u) - \lambda_n(u)\right)dT(u;i)}{(K(u)-E(u))^2} + \frac{B_n^{(i)}(x)}{K(x)-E(x)} - \frac{B_n^{(i)}(\tau)}{K(\tau)-E(\tau)} - \int\limits_{[\tau;x]} \frac{B_n^{(i)}(u)d(K(u)-E(u))}{(K(u)-E(u))^2}.$$

При этом гауссовский процесс

$$\lambda_n(x) = -K(x)\left\{\int\limits_{[x;\infty)} \frac{B_n^{(k+1)}(u)dT_1(u;0)}{E^2(u)} + \frac{B_{1n}^{(0)}(x)}{E(x)} - \int\limits_{[x;\infty)} \frac{B_{1n}^{(0)}(u)dE(u)}{E^2(u)}\right\}$$

является аппроксимирующим для процесса $\lambda_n^*(x) = n^{\frac{1}{2}}(K_n(x) - K(x))$, $x \ge \tau$, где гауссовский процесс $B_{1n}^{(0)}(x)$ определяется из соотношений (при каждом $n \ge 1$):

$$\begin{aligned} &B_n^{(0)}(x) = B_{1n}^{(0)}(x) + B_{2n}^{(0)}(x), \quad x \in \overline{R}, \\ &\left\{B_{mn}^{(0)}(x),\ x \in \overline{R}\right\} \overset{D}{=} \left\{B(T_m(x;0)),\ x \in \overline{R}\right\}, \quad m = 1,2. \end{aligned} \tag{2.1.4}$$

Напомним, что $\{B(y),\ y \in [0,1]\}$-броуновский мост.

Аппроксимацию вектор-процессов $M_n(v)$ и $V_{mn}(v)$, $m = 1,2,3$ осуществим на фиксированном кубе $[\tau;T)^k = \{v = (v_1,...,v_k):\ \tau \le v_i < T,\ i \in \Im\}$, где числа τ, T таковы, что $\tau < T$,

$$\begin{cases} \tau, T \in \{x:\ 0 < K(x) < 1\} \cap \{x:\ 0 < E(x) < 1\}, \\ \inf\limits_{\tau \le x < T} (K(x) - E(x)) > 0. \end{cases} \tag{2.1.5}$$

Легко видеть, что согласно (2.1.5) при $\gamma(x) = 1 - (1-G(x))(1-H(x))$ $0 < r^{-1} = \sup\limits_{\tau \le T}(K(x)-E(x))^{-1} = (K(\tau)(1-\gamma(T)))^{-1} < \infty$ (см. также пример 1 из § 1.6). Таким образом, для $x \in [\tau;T]$ процессы $\left\{N_n^{(i)}(x),\ i \in \Im\right\}$ являются вполне определёнными линейными функционалами от гауссовских процессов типа броуновского моста. Сперва аппроксимируем процесс $M_n(v)$.

Теорема 2.1.1. Пусть K, E, $\{H(\bullet;i),\ i \in \Im\}$ непрерывны и выполнено условие (2.1.5). Более того, для $\gamma_0 = E(\tau)$, заданного $\varepsilon > 0$ справедливы неравенства при $n \ge 2$:

$$\gamma_0 \ge \left(2(1+\varepsilon)\frac{\log n}{n} \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{2.1.6}$$

$$\gamma_0^2 r \ge 64\left((1+\varepsilon)\frac{\log n}{2n} \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.1.7}$$

тогда на вероятностном пространстве теоремы М

$$P\left(\sup_{v\in[\tau;T)^k} \left\| M_n(v) - N_n(v) \right\|^{(k)} > R_0 n^{-\frac{1}{2}} \log n \right) \le kQ_0 n^{-(1+\varepsilon)}, \tag{2.1.8}$$

где $R_0 = R_0(r,\varepsilon,\gamma_0)$ и Q_0 положительные постоянные. ■

Теперь мы введём аппроксимирующий векторзначный гауссовский процесс для $V_{mn}(v)$, а именно $W_{mn}(v) = \left(W_{mn}^{(1)}(v_1),...,W_{mn}^{(k)}(v_k)\right)$, где $W_{mn}^{(i)}(x) = -\left(1 - F_{m\tau}(x;i)\right)N_n^{(i)}(x)$, $m = 1,2,3$ и $(x;i) \in [\tau;\infty) \times \Im$.

Используя теорему 2.1.1 докажем следующее утверждение.

Теорема 2.1.2. В условиях теоремы 2.1.1, при $m = 1,2,3$:

$$P\left(\sup_{v\in[\tau;T)^k} \left\| V_{mn}(v) - W_{mn}(v) \right\|^{(k)} > R_m n^{-\frac{1}{2}} \log n \right) \le kQ_m n^{-(1+\varepsilon)}, \tag{2.1.9}$$

где $R_m = R_m(r,\varepsilon,\gamma_0)$ и Q_m положительные постоянные. ■

Для доказательства теорем 2.1.1 и 2.1.2 будем использовать несколько лемм. Во-первых напомним, что согласно (1.9.11) и (1.9.71), для всех $z > 0$, $n \ge 1$ и $i \in \overline{\Im}$:

$$P\left(\sup_{-\infty<x<\infty} \left| \alpha_n^{(k+1)}(x) \right| > z \right) \le D\exp(-2z^2), \tag{2.1.10}$$

$$P\left(\sup_{-\infty<x<\infty} \left| \alpha_n^{(i)}(x) \right| > z \right) \le 2D\exp\left(-\frac{z^2}{2} \right). \tag{2.1.11}$$

■

Аналогичное неравенство справедливо и для процесса $\lambda_n^*(x)$. ■

Лемма 2.1.3. Пусть ф.р. K, E непрерывны, справедливо (2.1.5) и $\gamma_0 = E(\tau) > 0$. Тогда для всех $z > 0$,

$$P\left(\sup_{x\ge\tau} \left| \lambda_n^*(x) \right| > z \right) \le D\left\{ \exp\left(-\frac{\gamma_0^2 n}{2} \right) + 3\exp\left(-\frac{\gamma_0^4 z^2}{128} \right) \right\}. \quad ■ \tag{2.1.12}$$

Следствие 2.1.4. В (2.1.12) при $n \geq 2$ положим $z = z^* = \frac{16}{\gamma_0^2}\left(\frac{(1+\varepsilon)\log n}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$, где γ_0 удовлетворяет (2.1.6). Тогда

$$P\left(\sup_{x \geq \tau}\left|\lambda_n^*(x)\right| > z^*\right) \leq 4Dn^{-(1+\varepsilon)}. \quad \blacksquare \tag{2.1.13}$$

В следующей лемме случайный процесс $\lambda_n^*(x)$ аппроксимируется гауссовским процессом $\lambda_n(x)$ на интервале $[\tau;\infty)$.

Лемма 2.1.5. Пусть ф.р. K, E непрерывны и справедливы условия (2.1.5), (2.1.6). Тогда на вероятностном пространстве теоремы М,

$$P\left(\sup_{x \geq \tau}\left|\lambda_n^*(x) - \lambda_n(x)\right| > A\gamma_0^{-4} n^{-\frac{1}{2}} \log n\right) \leq Bn^{-(1+\varepsilon)},$$

где $A = A(\varepsilon)$ и B положительные постоянные. При этом $M\lambda_n(x) = 0$ и для $x \geq y \geq \tau$, $\quad M\lambda_n(x)\lambda_n(y) = K(x)K(y)\int\limits_{[x;\infty)} \frac{dT_1(u;0)}{E^2(u)}$. $\blacksquare$

Далее нам понадобится также и результат (более точный, чем теорема 1.4.3), показывающий близость оценок (1.4.13).

Лемма 2.1.6. Пусть $\tau \leq x < \zeta_{(n)}$. Тогда при каждом $i \in \Im$:

$$0 \leq F_{2\varpi}(x;i) - F_{1\varpi}(x;i) \leq \frac{1}{2n}\int\limits_{[\tau;x]}\left(K_n(u) - E_n(u) + \Delta E_n(u) - \Delta T_{1n}(u;0)\right)^{-2} dT_n(u;i). \ \blacksquare$$

В следующем утверждении мы показываем, что знаменатель у $\Lambda_{\varpi}(x;i)$ также может быть конечным на интервале $[\tau;T)$.

Лемма 2.1.7. В условиях теоремы 2.1.1

$$P\left(\sup_{\tau \leq u \leq T}(K_n(u) - E_n(u) + \Delta E_n(u) - \Delta T_{1n}(u;0))^{-1} > 2r^{-1}\right) < 5Dn^{-(1+\varepsilon)}. \quad \blacksquare$$

Наконец в следующей основной лемме мы оцениваем уклонения интегральных эмпирических процессов, играющих ключевую роль при установлении оптимальной скорости аппроксимации в теоремах 2.1.1 и 2.1.2.

Лемма 2.1.8. Пусть ф.р. K, E-непрерывны и справедливо (2.1.5). Тогда для каждого $i \in \Im$:

$$(I) \quad P\left(\sup_{x \geq \tau}\left|\int\limits_{[x;\infty)} \frac{\alpha_n^{(k+1)}(u)d\alpha_n^{(0)}(u)}{E^2(u)}\right| > A_1(1+\varepsilon)\gamma_0^{-2}\log n\right) \leq B_1 n^{-(1+\varepsilon)},$$

$$(II) \quad P\left(\sup_{\tau \leq x < T}\left|\int\limits_{[\tau;x]} \frac{\alpha_n^{(k+1)}(u)d\alpha_n^{(i)}(u)}{(K(u) - E(u))^2}\right| > A_2(1+\varepsilon)r^{-2}\log n\right) \leq B_2 n^{-(1+\varepsilon)},$$

$$(III)\ P\left(\sup_{\tau\le x<T}\left|\int_{[\tau;x]}\frac{\alpha_n^{(i)}(u)d\alpha_n^{(0)}(u)}{\gamma(u)(K(u)-E(u))^2}\right|>A_3(1+\varepsilon)\gamma_0^{-1}\cdot r^{-2}\log n\right)\le B_3 n^{-(1+\varepsilon)}.$$

Более того, если $\gamma_0 = E(\tau)$ удовлетворяет также и (2.1.6), то

$$IV)\ P\left(\sup_{\tau\le x<T}\left|\int_{[\tau;x]}\frac{\lambda_n^*(u)d\alpha_n^{(i)}(u)}{(K(u)-E(u))^2}\right|>A_4(1+\varepsilon)\log n\right)\le B_4 n^{-(1+\varepsilon)},$$

$$(V)\ P\left(\sup_{\tau\le x<T}\left|\int_{[\tau;x]}\frac{n^{1/2}(q_n(u)-q(u))dn^{1/2}(q_n(u)-q(u))}{(K(u)-E(u))^2}\right|>A_5(1+\varepsilon)\cdot\log n\right)\le B_5 n^{-(1+\varepsilon)}$$

где A_m и $B_m, m=\overline{1,5}$, некоторые положительные постоянные, причём $A_k = A_k(r;\gamma_o), k=4,5$ ■

Теперь мы приступим к доказательству основных теорем.

Доказательство теоремы 2.1.1. Достаточно установить, что для каждого $i\in\Im$:

$$P\left(\sup_{\tau\le x<T}\left|M_n^{(i)}(x)-N_n^{(i)}(x)\right|>R_0 n^{-1/2}\cdot\log n\right)<Q_0 n^{-(1+\varepsilon)}. \tag{2.1.14}$$

После некоторых несложных преобразований получаем выражение $M_n^{(i)}(x)-N_n^{(i)}(x)=\sum_{m=1}^{5}A_{mn}^{(i)}(x), i\in\Im,$ где

$$A_{1n}^{(i)}(x)=\int_{[\tau;x]}\frac{\left(\left((\alpha_n^{(k+1)}(u)-B_n^{(k+1)}(u)\right)-(\lambda_n^*(u)-\lambda_n(u))-n^{1/2}(\Delta E_n(u)-\Delta T_{1n}(u;0))\right)dT(u;i)}{(K(u)-E(u))^2},$$

$$A_{2n}^{(i)}(x)=\frac{\alpha_n^{(i)}(x)-B_n^{(i)}(x)}{K(x)-E(x)}-\frac{\alpha_n^{(i)}(\tau)-B_n^{(i)}(\tau)}{K(\tau)-E(\tau)},$$

$$A_{3n}^{(i)}(x)=\int_{[\tau;x]}\frac{(\alpha_n^{(i)}(u)-B_n^{(i)}(u))d(K(u)-E(u))}{(K(u)-E(u))^2},$$

$$A_{4n}^{(i)}(x) = n^{-1/2} \int_{[\tau;x]} \frac{\left(\alpha_n^{(i)}(u) - \lambda_n^*(u) - n^{1/2}(\Delta E_n(u) - \Delta T_{1n}(u;0))\right)^2 dT(u;i)}{(K_n(u) - E_n(u) + \Delta E_n(u) - \Delta T_{1n}(u;0))(K(u) - E(u))^2},$$

$$A_{5n}^{(i)}(x) = n^{-1/2} \int_{[\tau;x]} \frac{\left(\alpha_n^{(i)}(u) - \lambda_n^*(u) - n^{1/2}(\Delta E_n(u) - \Delta T_{1n}(u;0))\right) d\alpha_n^{(i)}(u)}{(K_n(u) - E_n(u) + \Delta E_n(u) - \Delta T_{1n}(u;0)(K(u) - E(u))}.$$

Согласно (1.4.3), при каждом $i \in \Im$,

$$\sup_{-\infty<x<\infty} \Delta E_n(x) = \frac{1}{n}, \qquad \sup_{-\infty<x<\infty} \Delta T_n(x;i) = \frac{1}{n}, \text{ п.н.} \tag{2.1.15}$$

Учитывая (2.1.3), лемму 2.1.5 и (2.1.15), имеем

$$P\left(\sup_{\tau \le x < T} \left|A_{1n}^{(i)}(x)\right| > r^{-2}\left(C^0 + A\gamma_0^{-4} + 2n^{-1/2}\right)n^{-1/2} \log n\right) \le (K^0 + B)n^{-(1+\varepsilon)}, \tag{2.1.16}$$

$$P\left(\sup_{\tau \le x < T} \left|A_{2n}^{(i)}(x)\right| > 2r^{-1}C^0 n^{-1/2} \log n\right) \le K^0 n^{-(1+\varepsilon)}, \tag{2.1.17}$$

и

$$P\left(\sup_{\tau \le x < T} \left|A_{3n}^{(i)}(x)\right| > r^{-2}C^0 n^{-1/2} \log n\right) \le K^0 n^{-(1+\varepsilon)}, \tag{2.1.18}$$

Используя оценки (2.1.10), (2.1.13), (2.1.15), лемму 2.1.7, условие (2.1.5) и неравенство

$$\Delta E_n(u) - \Delta T_{1n}(u;0) = \Delta T_{2n}(u;0) + \sum_{m=1}^{k} \Delta T_n(u;m) \ge 0, \quad x \in \overline{R}, \tag{2.1.19}$$

оценим четвертое выражение следующим образом:

$$\begin{aligned} &P\left(\sup_{\tau \le x < T} \left|A_{4n}^{(i)}(x)\right| > 2r^{-3}\left[\left(1 + 16\gamma_0^{-2}\right)\frac{(1+\varepsilon)}{2} n^{-1/2} \log n + 2n^{-1/2}\right]\right) \le \\ &\le P\left(\sup_{\tau \le x < T} (K_n(x) - E_n(x) + \Delta E_n(x) - \Delta T_{1n}(x;0)) > 2r^{-1}\right) + 5Dn^{-(1+\varepsilon)} < 10Dn^{-(1+\varepsilon)}. \end{aligned} \tag{2.1.20}$$

Прежде, чем оценить $A_{5n}^{(i)}(x)$, заметим, что

$$\begin{aligned} A_{5n}^{(i)}(x) = n^{-1/2} \int_{[\tau;x]} &\frac{\left(\alpha_n^{(k+1)}(u) - \lambda_n^*(u) - n^{1/2}(\Delta E_n(u)) - \Delta T_{1n}(u;0))\right) d\alpha_n^{(i)}(u)}{(K(u) - E(u))^2} + \\ + n^{-1/2} \int_{[\tau;x]} &\frac{\left(\alpha_n^{(k+1)}(u) - \lambda_n^*(u) - n^{1/2}(\Delta E_n(u)) - \Delta T_{1n}(u;0))\right)^2 d(T_n(u;i) - T(u;i))}{(K_n(u) - E_n(u) + \Delta E_n(u) - \Delta T_{1n}(u;0)(K(u) - E(u))^2}. \end{aligned}$$

Первое слагаемое в $A_{5n}^{(i)}(x)$ оценим используя неравенства (II) и (IV) леммы 2.1.8, а для оценки второго дважды используем оценку $A_{4n}^{(i)}(x)$. Таким образом,

$$P\left(\sup_{\tau\le x<T}\left|A_{5n}^{(i)}(x)\right| > \left[A_2 r^{-2} + A_4 + 4r^{-3}(1+16\gamma_0^{-2})\right]\left(\frac{(1+\varepsilon)}{2}n^{-1/2}\log n\right) + 8r^{-3}n^{-1/2}\right) < \\ < (B_2 + B_4 + 10D)n^{-(1+\varepsilon)}. \tag{2.1.21}$$

Теперь складывая оценки (2.1.16)-(2.1.21), получаем (2.1.14). Теорема 2.1.1 доказана. ■

Доказательство теоремы 2.1.2. Сперва заметим, что в условиях теоремы

$$1 - F_{m\tau}(x;i) \equiv \exp(-\Lambda_\tau(x;i)), \quad m = 1,2,3; \quad i \in \Im. \tag{2.1.22}$$

Поэтому доказательство осуществим сначала для случая $m = 1$. Согласно разложению Тейлора, для каждого $i \in \Im$:

$$V_{1n}^{(i)}(x) = -\exp(-\Lambda_\tau(x;i))M_n^{(i)}(x) + \frac{n^{-1/2}}{2}\exp(-\Theta_n^{(i)}(x))(M_n^{(i)}(x))^2,$$

где $(\Lambda_{\tau n}(x;i) \wedge \Lambda_\tau(x;i) \le \Theta_n^{(i)}(x) \le (\Lambda_{\tau n}(x;i) \vee \Lambda_\tau(x;i))$. Следовательно,

$$\left|V_{1n}^{(i)}(x) - W_{1n}^{(i)}(x)\right| \le \left|M_n^{(i)}(x) - N_n^{(i)}(x)\right| + \frac{n^{-1/2}}{2}(M_n^{(i)}(x))^2, \tag{2.1.23}$$

где

$$\left|M_n^{(i)}(x)\right| \le \left|M_n^{(i)}(x) - N_n^{(i)}(x)\right| + \left|N_n^{(i)}(x)\right|. \tag{2.1.24}$$

С другой стороны, по определению $\lambda_n(x)$,

$$\sup_{\tau\le x<T}\left|\lambda_n(x)\right| \le \gamma_0^{-2}\left\{\sup_{\tau\le x<T}\left|B_n^{(k+1)}(x)\right| + 2\sup_{\tau\le x<T}\left|B_{1n}^{(0)}(x)\right|\right\}.$$

Подставив последнюю оценку в $\left|N_n^{(i)}(x)\right|$, для $i \in \Im$ получаем

$$\sup_{\tau\le x<T}\left|N_n^{(i)}(x)\right| \le r^{-2}\left\{(1+\gamma_0^{-2})\sup_{\tau\le x<T}\left|B_n^{(k+1)}(x)\right| + 2\gamma_0^{-2}\sup_{\tau\le x<T}\left|B_{1n}^{(0)}(x)\right| + 3\sup_{\tau\le x<T}\left|B_n^{(i)}(x)\right|\right\}. \tag{2.1.25}$$

Отметим, что (см. также (2.1.4)) для всех $n \ge 1$:

$$\left\{B_n^{(i)}(x),\ x \in R\right\} \overset{D}{=} \left\{B(T(x;i)),\ x \in R\right\}, \quad i \in \Im,$$

$$\left\{B_n^{(k+1)}(x),\ x \in R\right\} \overset{D}{=} \left\{B(E(x)),\ x \in R\right\}.$$

Тогда, используя в (2.1.25) следующее неравенство для броуновского моста ([125], стр. 98):

$$P\left(\sup_{0\le y\le 1}\left|B(y)\right| > z\right) \le 2\exp(-2z^2), \quad z>0\,, \tag{2.1.26}$$

при $z=\left(((1+\varepsilon)/2)\log n\right)^{1/2}$, $n\ge 2$, установим, что

$$P\left(\sup_{\tau\le x<T}\left|N_n^{(i)}(x)\right| > r^{-2}\left(4+3\gamma_0^{-2}\right)\left(\frac{(1+\varepsilon)}{2}\log n\right)^{\frac{1}{2}}\right) \le 6n^{-(1+\varepsilon)}\,. \tag{2.1.27}$$

Теперь, учитывая (2.1.14), (2.1.24) и (2.1.27) получаем

$$P\left(\sup_{\tau\le x<T}\frac{n^{-1/2}}{2}\left(M_n^{(i)}(x)\right)^2 > \frac{n^{-1/2}}{2}\left(R_0 n^{-1/2}\log n + r^{-2}\left(4+3\gamma_0^{-2}\right)\left(\frac{(1+\varepsilon)}{2}\log n\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2\right) \le$$

$$\le (Q_0+6)n^{-(1+\varepsilon)} \tag{2.1.28}$$

Тогда (2.1.9) при $m=1$ следует из соотношений (2.1.14), (2.1.23) и (2.1.28). Для доказательства (2.1.9) при $m=2$, мы используем лемму 2.1.6, равенство (2.1.22) и тогда

$$\left|V_{2n}^{(i)}(x)-W_{2n}^{(i)}(x)\right| \le \left|V_{1n}^{(i)}(x)-W_{1n}^{(i)}(x)\right| + \frac{n^{-1/2}}{2}\int_{[\tau;x]}\left(K_n(u)-E_n(u)+\Delta E_n(u)-\Delta T_{1n}(u;0)\right)^2 dT_n(u;i)$$

, где $(x;i)\in[\tau;\infty)\times\Im$. Следовательно, из (2.1.14) и леммы 2.1.7

$$P\left(\sup_{\tau\le x<T}\left|V_{2n}^{(i)}(x)-W_{2n}^{(i)}(x)\right| > R_1 n^{-1/2}\log n + 2r^{-2}n^{-1/2}\right) < (Q_1+5D)n^{-(1+\varepsilon)} = Q_2 n^{-(1+\varepsilon)}\,,$$

т.е. (2.1.9) верно и при $m=2$. Доказательство (2.1.9) для случая $m=3$ довольно рутинное. Далее для удобства введём обозначения

$$\sigma(x) = -\int_{[\tau;x]}\frac{dq(u)}{q(u)} = -\log\left(\frac{q(x)}{q(\tau)}\right); \quad \sigma_n(x) = -\int_{[\tau;x]}\frac{dq_n(u)}{q_n(u)}, \quad \sigma_n^*(x) = -\log\left(\frac{q_n(x)}{q_n(\tau)}\right).$$

Используя разложение Тейлора имеем

$$V_{3n}^{(i)}(x) = -\sqrt{n}\left(\exp\left(-R_{\tau n}(x;i)\sigma_n^*(x)\right)-\exp\left(-R_\tau(x;i)\sigma(x)\right)\right) = -\left(1-F_{3\tau}(x;i)\right)\mu_n^{(i)}(x)+l_n^{(i)}(x)\,,$$

$(x;i)\in[\tau;\infty)\times\Im,$ (2.1.29)

где $\mu_n^{(i)}(x)=n^{1/2}\left(R_{\tau n}(x;i)\sigma_n^*(x)-R_n(x;i)\sigma(x)\right),\quad l_n^{(i)}(x)=\dfrac{n^{-1/2}}{2}\exp\left(-\nu_n^{(i)}(x)\right)\left(\mu_n^{(i)}(x)\right)^2,$ и $\left(\left(-\log\left(1-F_{3\tau n}(x;i)\right)\right)\wedge\left(-\log\left(1-F_{3\tau}(x;i)\right)\right)\right)\le\nu_n^{(i)}(x)\le\left(-\log\left(1-F_{3\tau n}(x;i)\right)\right)\vee\left(-\log\left(1-F_{3\tau}(x;i)\right)\right)$. С учетом равенства $\Lambda_\tau(x;i)=R_\tau(x;i)\sigma(x)$, легко установить следующее разложение для $\mu_n^{(i)}(x)$:

$$\mu_n^{(i)}(x)=M_n^{(i)}(x)\frac{\sigma(x)}{\sigma_n(x)}-n^{1/2}(\sigma_n(x)-\sigma(x))\frac{\Lambda_\tau(x;i)}{\sigma_n(x)}+n^{1/2}(\sigma_n^*(x)-\sigma(x))R_{\tau n}(x;i).$$

Далее будут использованы оценки

$$\sup_{\tau\le x<T}\sigma(x)\le 2\sup_{\tau\le x<T}(q(x))^{-1}=2r^{-1};\quad \sup_{\tau\le x<T}\Lambda_\tau(x;i)\le 2\sup_{\tau\le x<T}(q(x))^{-1}=2r^{-1},\quad i\in\Im;$$

$$\sup_{\tau\le x<T}(\sigma_n(x))^{-1}\le\sup_{\tau\le x<T}(q_n(x)-q_n(\tau))^{-1};\ \text{п.н.}\qquad \sup_{\tau\le x<T}R_{\tau n}(x;i)\le 1,\quad i\in\Im;\ \text{п.н.} \tag{2.1.30}$$

Покажем, что процесс $\mu_n^{(i)}(x)$ аппроксимируется процессом $M_n^{(i)}(x)$. Для этого сперва запишем соотношение

$$\mu_n^{(i)}(x)-M_n^{(i)}(x)=M_n^{(i)}(x)\left(-\sum\nolimits_n(x)\right)\frac{n^{-1/2}}{\sigma_n(x)}+\left(-\sum\nolimits_n(x)\right)\frac{\Lambda_\tau(x;i)}{\sigma_n(x)}+,$$

$$+\sum\nolimits_n^*(x)R_{\tau n}(x;i)=\sum_{m=1,2,3}\psi_{mn}^{(i)}(x) \tag{2.1.31}$$

где

$$\sum\nolimits_n(x)=n^{1/2}(\sigma_n(x)-\sigma(x)),\ \sum\nolimits_n^*(x)=n^{1/2}(\sigma_n^*(x)-\sigma(x)).$$

Теперь, для $\sum_n(x)$ используем разложение Тейлора, а для $\sum_n^*(x)$ разложение, получаемое прообразованием интегралов. Тогда в (2.1.31)

$$\psi_{1n}^{(i)}(x)=\frac{n^{-1/2}}{\sigma_n(x)}M_n^{(i)}(x)\left\{\frac{n^{1/2}\left(q_n(x)q(\tau)-q(x)q_n(\tau)\right)}{q_n(x)q_n(\tau)}+\sum_{m=1}^{4}\omega_{mn}(x)\right\}, \tag{2.1.32}$$

и $\psi_{2n}^{(i)}(x)+\psi_{3n}^{(i)}(x)=\dfrac{\Lambda_\tau(x;i)}{\sigma_n(x)}\displaystyle\sum_{m=1}^{4}\omega_{mn}(x)+\omega_{5n}^{(i)}(x)+\omega_{6n}^{(i)}(x)$, где

$$\omega_{1n}(x)=-\int_{[\tau;x]}\frac{n^{1/2}\left(q_n(u)-q(u)\right)^2dq_n(u)}{q_n^2(u)q(u)};\qquad \omega_{2n}(x)=-\int_{[\tau;x]}\frac{n^{1/2}\left(q_n(u)-q(u)\right)^2}{q_n(u)q(u)}dq_n(u);$$

$$\omega_{3n}(x)=-\int_{[\tau;x]}\frac{n^{1/2}\left(q_n(u)-q(u)\right)^2dq(u)}{q_n(u)q(u)};\quad \omega_{4n}(x)=\int_{[\tau;x]}\frac{n^{1/2}\left(q_n(u)-q(u)\right)d(q_n(u)-q(u))}{q^2(u)};$$

$$\omega_{5n}(x) = -\frac{n^{1/2}\big(q_n(x)q(\tau) - q(x)q_n(\tau)\big)}{\sigma_n(x)q_n(\tau)}\left(\frac{\Lambda_{\tau n}(x;i)}{q(x)} - \frac{\Lambda_\tau(x;i)}{q_n(x)}\right);$$

$$\omega_{6n}(x) = \frac{n^{1/2}\big(q_n(x)q(\tau) - q(x)q_n(\tau)\big)^2 R_{\tau n}(x;i)}{q_n^2(\tau)q^2(x)\theta_n^2(x;\tau)};$$

и

$$\left(\left(\frac{q_n(x)}{q_n(\tau)}\right)\wedge\left(\frac{q(x)}{q(\tau)}\right)\right) \le \theta_n(x;\tau) \le \left(\left(\frac{q_n(x)}{q_n(\tau)}\right)\vee\left(\frac{q(x)}{q(\tau)}\right)\right).$$

Поскольку $n^{1/2}(q_n(x) - q(x)) = \lambda_n^*(x) - \alpha_n^{(k+1)}(x) + \big(\Delta E_n(x) - \Delta T_{1n}(x;0)\big)$, то согласно (2.1.10), (2.1.13) и (2.1.15),

$$P\left(\sup_{\tau\le x<T} n^{1/2}\left|q_n(x) - q(x)\right| > \left(\frac{16}{\gamma_0^2}+1\right)\left(\frac{(1+\varepsilon)}{2}\log n\right)^{1/2} + 2n^{-1/2}\right) \le 5Dn^{-(1+\varepsilon)}. \qquad (2.1.33)$$

Так как $\sup\limits_{\tau\le x<T}\left|q_n(x)q(\tau) - q(x)q_n(\tau)\right| \le 2\sup\limits_{\tau\le x<T}\left|q_n(x) - q(x)\right|$ и согласно (2.1.30), (2.1.10), (2.1.12)

$$P\left(\sup_{\tau\le x<T}\big(\sigma_n(x)\big)^{-1} > 2r^{-1}\right) \le P\left(\sup_{\tau\le x<T}\big(q_n(x) - q_n(\tau)\big)^{-1} > 2r^{-1}\right) \le$$

$$\le P\left(\inf_{\tau\le x<T}\big(q_n(x) - q(x)\big) + \inf_{\tau\le x<T}\big(q(x) - q(\tau)\big) + \big(q(\tau) - q_n(\tau)\big) < \frac{r}{2}\right) \le$$

$$\le P\left(\sup_{\tau\le x<T} n^{1/2}\big(q_n(x) - q(x)\big) > \frac{n^{1/2}r}{4}\right) \le 2P\left(\sup_{\tau\le x<T}\left|\lambda_n^*(x)\right| > \frac{n^{1/2}r}{8}\right) + 2P\left(\sup_{\tau\le x<T}\left|\alpha_n^{(k+1)}(x)\right| > \frac{n^{1/2}r}{8} - 2n^{-1/2}\right) \le$$

$$\le 2\left(D\left(\exp\left(-\frac{\gamma_0^2 n}{2}\right)\right) + \exp\left(-2\left(\frac{n^{1/2}r}{8} - 2n^{-1/2}\right)^2\right) + 3\exp\left(\frac{-\gamma_0^4 nr}{8192}\right)\right) \le (2D+8)e^{-\chi n}, \quad (2.1.34)$$

где $\chi = \chi(\gamma_0; r)$-положительная постоянная, то и с учётом (2.1.28) и (2.1.33) имеем следующую оценку в (2.1.32):

$$P\left(\sup_{\tau\le x<T}\frac{n^{-1/2}}{\sigma_n(x)}\left|M_n^{(i)}(x)\frac{n^{1/2}\big(q_n(x)q_n(\tau) - q(x)q_n(\tau)\big)}{q_n(x)q_n(\tau)}\right| > 16r^{-3}n^{-1/2}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\left(R_0 n^{-1/2}\log n + r^{-2}(4+3\gamma_0^{-2})\left(\frac{(1+\varepsilon)}{2}\log n\right)^{1/2}\right)\left(\big(16\gamma_0^{-2}+1\big)\left(\frac{(1+\varepsilon)}{2}\log n\right)^{1/2} + 2n^{-1/2}\right)\right) <$$

$$< (Q_0 + 6 + 10D)n^{-(1+\varepsilon)} + (2D+8)e^{-\gamma n} < (Q_0 + 12D + 14)n^{-(1+\varepsilon)}. \qquad (2.1.35)$$

Вполне аналогично,

$$P\left(\sup_{\tau \le x < T} \frac{n^{-1/2}}{\sigma_n(x)} \left| M_n^{(i)}(x)\omega_{1n}(x) \right| > 8r^{-3}n^{-1}\left(R_0 n^{-1/2}\log n + r^{-2}(4+3\gamma_0^{-2})\left(\frac{(1+\varepsilon)}{2}\log n \right)^{1/2} \right) \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \left((16\gamma_0^{-2}+1)\left(\frac{(1+\varepsilon)}{2}\log n \right)^{1/2} + 2n^{-1/2} \right)^2 \right) < (Q_0 + 12D + 14)n^{-(1+\varepsilon)}, \qquad (2.1.36)$$

$$P\left(\sup_{\tau \le x < T} \frac{n^{-1/2}}{\sigma_n(x)} \left| M_n^{(i)}(x)\omega_{2n}(x) \right| > 4r^{-3}n^{-1}\left(R_0 n^{-1/2}\log n + r^{-2}(4+3\gamma_0^{-2})\left(\frac{(1+\varepsilon)}{2}\log n \right)^{1/2} \right) \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \left((16\gamma_0^{-2}+1)\left(\frac{(1+\varepsilon)}{2}\log n \right)^{1/2} + 2n^{-1/2} \right)^2 \right) < (Q_0 + 12D + 14)n^{-(1+\varepsilon)}, \qquad (2.1.37)$$

и

$$P\left(\sup_{\tau \le x < T} \frac{n^{-1/2}}{\sigma_n(x)} \left| M_n^{(i)}(x)\omega_{3n}(x) \right| > 4r^{-3}n^{-1}\left(R_0 n^{-1/2}\log n + r^{-2}(4+3\gamma_0^{-2})\left(\frac{(1+\varepsilon)}{2}\log n \right)^{1/2} \right) \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \left((16\gamma_0^{-2}+1)\left(\frac{(1+\varepsilon)}{2}\log n \right)^{1/2} + 2n^{-1/2} \right)^2 \right) < (Q_0 + 12D + 14)n^{-(1+\varepsilon)}, \qquad (2.1.38)$$

Согласно неравенства (V) леммы 2.1.8,

$$P\left(\sup_{\tau \le x < T} \frac{n^{-1/2}}{\sigma_n(x)} \left| M_n^{(i)}(x)\omega_{4n}(x) \right| > 2r^{-1}A_5(1+\varepsilon)n^{-1}\log n \left(R_0 n^{-1/2}\log n + r^{-2}(4+3\gamma_0^{-2})\left(\frac{(1+\varepsilon)}{2}\log n \right)^{1/2} \right) \right.$$

$$\left. < (Q_0 + 2D + B_5 + 14)n^{-(1+\varepsilon)}. \right. \qquad (2.1.39)$$

Тогда из второго неравенства в (2.1.30), а также из (2.1.36)-(2.1.39) будем иметь

$$P\left(\sup_{\tau \le x < T} \frac{\Lambda_\tau(x;i)}{\sigma_n(x)} \left| \sum_{m=1}^{4} \omega_{mn}(x) \right| > 32r^{-4}\left((16\gamma_0^{-2}+1)\left(\frac{(1+\varepsilon)}{2}\log n \right)^{1/2} + 2n^{-1/2} \right)^2 + 4r^{-2}A_5(1+\varepsilon)n^{-1}\log n \cdot \right.$$

$$\cdot\left(R_0 n^{-1/2}\log n + r^{-2}(4+3\gamma_0^{-2})\left(\frac{(1+\varepsilon)}{2}\log n\right)^{1/2}\right)\Bigg) < (4Q_0+38D+B_5+56)n^{-(1+\varepsilon)}, \qquad (2.1.40)$$

Поскольку $-\left(\dfrac{\Lambda_{\tau n}(x;i)}{q(x)}-\dfrac{\Lambda_\tau(x;i)}{q_n(x)}\right)=\dfrac{\Lambda_\tau(x;i)}{q_n(x)q(x)}\left(q_n(x)-q(x)\right)+\dfrac{M_n^{(i)}(x)n^{-1/2}}{q(x)}$, то согласно лемме .1.7, соотношений (2.1.28), (2.1.30), (2.1.33) и (2.1.34) для $\omega_{5n}^{(i)}(x)$ имеем оценку

$$P\left(\sup_{\tau\le x<T}\left|\omega_{5n}^{(i)}(x)\right| > 8r^{-3}n^{-1/2}\left(\left(16\gamma_0^{-2}+1\right)\left(\frac{(1+\varepsilon)}{2}\log n\right)^{1/2}+2n^{-1/2}\right)\left(2r^{-2}\left(16\gamma_0^{-2}+1\right)\left(\frac{(1+\varepsilon)}{2}\log n\right)^{1/2}+2n^{-1/2}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(R_0 n^{-1/2}\log n + r^{-2}(4+3\gamma_0^{-2})\left(\frac{(1+\varepsilon)}{2}\log n\right)^{1/2}\right)\right) < (Q_0+12D+14)n^{-(1+\varepsilon)}. \qquad (2.1.41)$$

Наконец, с учетом последнего неравенства в (2.1.30 аналогично имеем)

$$P\left(\sup_{\tau\le x<T}\left|\omega_{6n}^{(i)}(x)\right| > 32r^{-6}\left(\left(16\gamma_0^{-2}+1\right)\left(\frac{(1+\varepsilon)}{2}\log n\right)^{1/2}+2n^{-1/2}\right)\right) < 10Dn^{-(1+\varepsilon)}. \qquad (2.1.42)$$

Поскольку согласно (2.1.29)

$$\left|V_{3n}^{(i)}(x)-W_{3n}^{(i)}(x)\right| \le \left|\mu_n^{(i)}(x)-N_n^{(i)}(x)\right|+n^{-1/2}\left|\mu_n^{(i)}(x)\right|^2 \le \left|\mu_n^{(i)}(x)-M_n^{(i)}(x)\right|+$$

$$+\left|M_n^{(i)}(x)-N_n^{(i)}(x)\right|+\left[\left|\mu_n^{(i)}(x)-M_n^{(i)}(x)\right|+\left|M_n^{(i)}(x)\right|\right]^2 n^{-1/2},$$

то требуемый результат (2.1.9) при $m=3$ следует из соотношений (2.1.14), (2.1.28), (2.1.31), (2.1.32), (2.1.36)-(2.1.42). Теорема 2.1.2 доказана. ■

Следствие 2.1.9. Из (2.1.9) при каждом $m=1,2,3$ и $i\in\Im$, согласно лемме Бореля-Кантелли

$$\sup_{\tau\le x<T}\left|V_{mn}^{(i)}(x)-W_{mn}^{(i)}(x)\right| \overset{п.н.}{=} O\left(n^{-\frac{1}{2}}\log n\right). \qquad (2.1.43)$$

■

Следствие 2.1.10. Согласно (2.1.43)

$$\rho\left(\nu_{mn}^{(i)};\nu_{mn}^{(i)0}\right)=O\left(n^{-\frac{1}{2}}\log n\right),\ m=1,2,3,$$

где $\rho(\cdot;\cdot)$ расстояние Леви-Прохорова между двумя мерами $\nu_{mn}^{(i)}$ и $\nu_{mn}^{(i)0}$, индуцированными процессами $V_{mn}^{(i)}$, $W_{mn}^{(i)}$, определенными в пространстве Скорохода $D[\tau;T]$. ■

Следствие 2.1.11. Из теорем 2.1.1 и 2.1.2 соответственно при $P(Y=+\infty)=1$ и $P(L=-\infty)=1$ получаем результаты аппрокстмации для моделей $(Z\vee L;C)$ и $(Z\wedge Y;B)$. Однако более глубокие результаты для этих моделей будут доказаны в последующих параграфах. ■

Замечание 2.1.12. Как видно из (2.1.43) скорость аппроксимации в теоремах 2.1.1 и 2.1.2 является оптимальной, т.е. такой же как в теореме Комлоша-Майора-Тушнади (см. теорему А в § 1.9) для обычного эмпирического процесса. Отметим, что такие окончательные результаты впервые установлены в настоящей монографии. В частном случае, когда $k=1$, $A^{(1)}=\Omega$, $P(L\le Y)=1$ и с.в. L также наблюдается, т.е. наблюдаема выборка $\widetilde{S}_3^{(n)}$ для специальных оценок множительного типа результаты аппроксимации впервые были установлены Хорватом [213]. Однако скорости аппроксимации в соответствующих теоремах были порядка $O(n^{-\lambda})$, где $\lambda=\dfrac{1}{45000}$, т.е. очень слабыми. Методы доказательства аппроксимационных результатов в настоящей книге основываются на свойства эмпирических процессов структуры U-статистики и отличны от метода Хорвата [213], основанного на результаты Филлипа-Пинцура [267] об аппроксимации многомерного эмпирического процесса. Полностью повторив доказательства теорем 2.1.1 и 2.1.2 для оценок (1.4.11), построённых по выборке $\widetilde{S}_3^{(n)}$, мы можем установить аппроксимационные результаты с оптимальной скоростью (см. теорему 2.1.13 далее). ■

По выборке $\widetilde{S}_3^{(n)}$ рассмотрим оценки (1.4.11) с $q_n^*(u)=q_n^э(u)=K_n^э(u)-E_n(u-)-\Delta T_{1n}(u;0)$ и образуем процессы при $m=1,2,3,$ $\widetilde{V}_{mn}(v)=\left(\widetilde{V}_{mn}^{(1)}(v_1),\dots,\widetilde{V}_{mn}^{(k)}(v_k)\right)$, $\widetilde{W}_{mn}(v)=\left(\widetilde{W}_{mn}^{(1)}(v_1),\dots,\widetilde{W}_{mn}^{(k)}(v_k)\right)$, где $v=(v_1,\dots,v_k)\in R^k$, $\widetilde{V}_{mn}^{(i)}(x)=n^{1/2}\left(\widetilde{F}_{m\tau n}(x;i)-F_{m\tau}(x;i)\right)$, $\widetilde{W}_{mn}^{(i)}(x)=-(1-F_{m\tau}(x;i))\cdot\widetilde{N}_n^{(i)}(x)$ и $\widetilde{N}_n^{(i)}(x)$ имеет такую же структуру, что и $N_n^{(i)}(x)$, с той лишь разницей, что вместо $\lambda_n(u)$ будет находится гауссовский процесс $\widetilde{\lambda}_n(u)$: $\left\{\widetilde{\lambda}_n(u),\ -\infty<u<\infty\right\}\overset{D}{=}\left\{B(K(u)),\ -\infty<u<\infty\right\}$. Следующее утверждение является аналогом теоремы 2.1.2.

Теорема 2.1.13. Пусть K, E, $\{H(\bullet;i),\ i\in\Im\}$ непрерывны и выполнено условие (2.1.5). Более того, для числа $\varepsilon>0$ и $n\ge 2$, $r\ge 8\left(\dfrac{(1+\varepsilon)\log n}{2n}\right)^{\frac{1}{2}}$. Тогда при $m=1,2,3$:

$$P\left(\sup_{v\in[\tau;T)^k}\left\|\widetilde{V}_m(v)-\widetilde{W}_m(v)\right\|^{(k)}>\widetilde{R}_m n^{-\frac{1}{2}}\log n\right)<k\widetilde{Q}_m n^{-(1+\varepsilon)}, \qquad (2.1.44)$$

где $\widetilde{R}_m=\widetilde{R}_m(r,\varepsilon,\gamma_0)$ и $\widetilde{Q}_m$ положительные постоянные. ■

Доказательство теоремы 2.1.13 полностью повторяет доказательство теоремы 2.1.2, с той лишь разницей, что вместо экспоненциальной оценки (2.1.12) будет использована теорема С (из § 1.9) Дворецкого-Кифера-Вольфовитца для эмпирического процесса $n^{1/2}\left(K_n^{э}(x)-K(x)\right)$. Поэтому оно опускается. Результат (2.1.44) оптимален по сравнению с результатами Хорвата [213] по скорости аппроксимации. ■

Теперь переходим к доказательствам вспомогательных утверждений.

Доказательство леммы 2.1.3. Используя четвертое неравенство (1.3.6), а затем интегрируя по частям имеем

$$\begin{aligned}\left|K_n(x)-K(x)\right| &\le \left|\int\limits_{[x;\infty)}\frac{dT_{1n}(u;0)}{E_n(u-)}-\int\limits_{[x;\infty)}\frac{dT_1(u;0)}{E(u)}\right|\le\int\limits_{[x;\infty)}\frac{\left|E_n(u-)-E(u)\right|dT_{1n}(u;0)}{E_n(u-)E(u)}+\\ &+\left|T_{1n}(\infty;0)-T_1(\infty;0)\right|+\frac{\left|T_{1n}(x;0)-T_1(x;0)\right|}{E(x)}.\end{aligned} \qquad (2.1.45)$$

Отсюда для всех $z>0$

$$\begin{aligned}&P\left(\sup_{x\ge\tau}\left|\lambda_n^*(x)\right|>z\right)\le P\left(\inf_{x\ge\tau}E_n(x-)<\frac{\gamma_0}{2}\right)+\\ &+P\left(\sup_{x\ge\tau}\left|\alpha_n^{(k+1)}(x)\right|>\frac{\gamma_0^2 z}{4}\right)+P\left(\sup_{x\ge\tau}\left|\alpha_{1n}^{(0)}(x)\right|>\frac{\gamma_0^2 z}{8}\right)\end{aligned}, \qquad (2.1.46)$$

где $\alpha_{1n}^{(0)}(x)=n^{1/2}\left(T_{1n}(x;0)-T_1(x;0)\right)$ и

$$\begin{aligned}&P\left(\inf_{x\ge\tau}E_n(x-)<\frac{\gamma_0}{2}\right)\le P\left(\inf_{x\ge\tau}(E_n(x-)-E(x))+\inf E(x)<\frac{\gamma_0}{2}\right)\le\\ &\le P\left(\sup_{x\ge\tau}\left|\alpha_n^{(k+1)}(x)\right|>\frac{\gamma_0 n^{1/2}}{2}\right)\end{aligned}. \qquad (2.1.47)$$

Теперь, используя (2.1.10) и (2.1.11) для $\alpha_{1n}^{(0)}(x)$ в (2.1.46) и (2.1.47) из (2.1.45) получаем (2.1.12). Лемма 2.1.3. доказана. ■

Доказательство леммы 2.1.5. Заметим, что с.в. L цензурируется слева с.в.-ой $Z\wedge Y$, и следовательно $K_n(x)$ является левосторонним вариантом экспоненциальной оценки для $K(x)$. Тогда лемму можно доказывать двумя независимыми способами. Первый способ подразумевает полное повторение доказательства теоремы 1 Бюрка-Чёрге-Хорват [126]. Для осуществления второго способа, сперва мы должны правостороннее цензурирование преобразовывать в левостороннюю , а затем использовать теорему 1 из [126]. Этот второй способ является относительно коротким. Детали доказательства опускаются. Лемма 2.1.5 доказана. ■

Доказательство леммы 2.1.6. Оценки $F_{m\varpi}(x;i),\ m=1,2;\ i\in\Im$ допускают представления

$$1-F_{1\varpi}(x;i)=\prod_{\{j:\ \tau\le\zeta_j\le x\}}\exp\left(-\pi_{jn}^{(i)}\right),\quad x\ge\tau, \qquad 1-F_{2\varpi}(x;i)=\prod_{\{j:\ \tau\le\zeta_j\le x\}}\left(1-\pi_{jn}^{(i)}\right),\quad x\ge\tau,$$

где при $i\in\Im$ и $j=1,\dots,n$

$\pi_{jn}^{(i)}=\Delta\Lambda_{\varpi}(\zeta_j;i)=\chi_j^{(i)}\left[n\left(K_n(\zeta_j)-E_n(\zeta_j)\right)+1-n\Delta T_{1n}(\zeta_j;0)\right]^{-1}$. Согласно (1.4.14), $0\le\pi_{jn}^{(i)}<1$ и $0<\exp\left(-\pi_{jn}^{(i)}\right)\le 1$, $i\in\Im$, $j=1,\dots,n$. Тогда, используя первые два неравенства в (1.3.6), для $(x;i)\in\left[\tau;\zeta_{(n)}\right]\times\Im$ имеем

$$F_{2\varpi}(x;i)-F_{1\varpi}(x;i)=\left(\frac{1-F_{1\varpi}(x;i)}{1-F_{2\varpi}(x;i)}-1\right)\left(1-F_{1\varpi}(x;i)\right)=\left(\prod_{\{j:\ \tau\le\zeta_j\le x\}}\left(\frac{\exp\left(-\pi_{jn}^{(i)}\right)}{1-\pi_{jn}^{(i)}}-1\right)\right)\left(1-F_{1\varpi}(x;i)\right)\ge 0$$

и с другой стороны,

$$F_{2\varpi}(x;i)-F_{1\varpi}(x;i)\le\sum_{\{j:\ \tau\le\zeta_j\le x\}}\left(\exp\left(-\pi_{jn}^{(i)}\right)-\left(1-\pi_{jn}^{(i)}\right)\right)\le\frac{1}{2}\sum_{\{j:\ \tau\le\zeta_j\le x\}}\left(\pi_{jn}^{(i)}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{2n}\int_{[\tau;x]}\left(K_n(u)-E_n(u)+\Delta E_n(u)-\Delta T_{1n}(u;0)\right)^{-2}dT_n(u;i).$$

Лемма 2.1.6 доказана. ■

Доказательство леммы 2.1.7. Подобно доказательству (2.1.46) и (2.1.47) с учётом (2.1.7) и (2.1.13):

$$P\left(\sup_{\tau\le u<T}\left(K_n(u)-E_n(u)+\Delta E_n(u)-\Delta T_{1n}(u;0)\right)^{-1}>2r^{-1}\right)\le P\left(\sup_{\tau\le u<T}\left(K_n(u)-E_n(u)\right)^{-1}>2r^{-1}\right)\le$$

$$\le P\left(\sup_{\tau\le u<T}\left|\lambda_n^*(u)\right|>\frac{n^{1/2}r}{4}\right)+P\left(\sup_{\tau\le u<T}\left|\alpha_n^{(k+1)}(u)\right|>\frac{n^{1/2}r}{4}\right)\le 4Dn^{-(1+\varepsilon)}+Dn^{-\frac{(1+\varepsilon)256}{\gamma_0^4}}<5Dn^{-(1+\varepsilon)}.$$

Тем самым лемма 2.1.7 доказана. ■

Доказательство леммы 2.1.8. Мы воспользуемся частично доказательством леммы из [126]. Сперва выразим эмпирические процессы $\{\alpha^{(i)}(x),\ x \in \overline{R},\ i \in \overline{\Im} \cup \{k+1\}\}$ через равномерный эмпирический процесс $\{u_n(t),\ 0 \le t \le 1\}$ (см. § 1.9). Это, в свою очередь нам даёт возможность представить интегральные эмпирические процессы из леммы 2.1.8 через вырожденную U-статистику с соответствующими остаточными членами. Сперва для доказательства соотношений (I) и (II) для фиксированного $i \in \overline{\Im}$ определим события $E_j^{(1)} = \{\omega :\ \chi_j^{(i)}(\omega) = 1\}$, $E_j^{(2)} = \left\{\omega :\ \sum_{m \ne j} \chi_j^{(m)}(\omega) = 1\right\}$ и соответствующие им субраспределения $S^{(e)}(x) = P\left(\zeta_1 \le x, E_1^{(e)}\right)$, $e = 1,2$. Очевидно события $E_j^{(1)}$ и $E_j^{(2)}$ при каждом $j = 1,\dots,n$ образуют разбиение Ω, $S^{(1)}(x) = T(x;i)$, $S^{(2)}(x) = \sum_{m \ne i} T(x;m)$, $i \in \Im$, и $S^{(1)}(x) + S^{(2)}(x) = E(x)$. Используя равенство по распределению из [125] для $i \in \overline{\Im}$ будем иметь

$$\left\{\left(\alpha_n^{(k+1)}(x), \alpha_n^{(i)}(y)\right),\ -\infty < x, y < \infty\right\} \stackrel{D}{=}$$

$$\stackrel{D}{=} \left\{\left(u_n(S^{(1)}(x)) + u_n(S^{(1)}(\infty) - S^{(2)}(x)) - u_n(S^{(1)}(\infty)), u_n(S^{(1)}(y))\right),\ -\infty < x, y < \infty\right\}. \tag{2.1.48}$$

Пусть $i = 0$. Тогда $S^{(1)}(x) = T(x;0)$, $S^{(2)}(x) = T(x;1) + \dots + T(x;k)$ и

$$\left\{\int_{[x;\infty)} \frac{\alpha_n^{(k+1)}(u)\,d\alpha_n^{(0)}(u)}{E^2(u)},\quad \tau \le x < \infty\right\} \stackrel{D}{=} \left\{\frac{1}{n} \sum_{1 \le e, m \le n} h_x^{(0)}(X_e; X_m),\quad \tau \le x < \infty\right\}, \tag{2.1.49}$$

где $X_1,\dots,X_n$-независимы и одинаково-равномерно распределены на [0;1],

$$h_x^{(0)}(s;t) = \frac{I(Q^{(0)}(t) \ge x)}{E^2(Q^{(0)}(t))}\left\{I(s < t) + I\left(T(\infty;0) \le s < T(\infty;0) + S^2(Q^{(0)}(t))\right)\right\} - \frac{E(Q^{(0)}(t)) I(Q^{(0)}(t) \ge x)}{E^2(Q^{(0)}(t))} -$$

$$- \int_{[x;\infty)} \left\{I(s < T(u;0)) + I\left(T(\infty;0) \le s < T(\infty;0) + S^2(u)\right)\right\} \frac{dT(u;0)}{E^2(u)} + \int_{[x;\infty)} \frac{dT(u;0)}{E(u)}.$$

Здесь $Q^{(o)}(t) = \sup\{x : T(x;0) < t\}$-функция, обратная для $T(x;0)$. Легко видеть, что для $x \ge \tau$: $\left|h_x^{(o)}(s;t)\right| \le 6\gamma_o^{-2}$, $0 \le s, t \le 1$ и

$$\int_{[0,1]} h_x^o(s;t)\,ds = 0,\ \ 0 \le t \le 1, \qquad \int_{[0,1]} h_x^o(s;t)\,dt = 0,\ \ 0 \le s \le 1. \tag{2.1.50}$$

Таким образом, правая часть равенства (2.1.49) выражается через вырожденную U-статистику $U_n(x)$ с ядром $\widetilde{h}_x^{(o)}(s;t)$ (см.[159]) и с остаточным членом $D_n(x)$:

$$\sum_{1\le e,m\le n} h_x^{(0)}(X_e;X_m) = \sum_{1\le e,m\le n} \widetilde{h}_x^{(0)}(X_e;X_m) + \sum_{e=1}^{n} h_x^{(0)}(X_e;X_e) = U_n(x) + D_n(x), \qquad (2.1.51)$$

где $\widetilde{h}_x^{(0)}(s;t) = h_x^{(0)}(s;t) + h_x^{(0)}(t;s)$. Далее для доказательства неравенства (I) нам остаётся воспользоваться ходом доказательства леммы из [126]. Аналогично для соотношений (II) и (III) мы укажем ядра соответствующих U-статистик. Для каждого $i \in \Im$:

$$\left\{ \int_{[x;\infty)} \frac{\alpha_n^{(k+1)}(u)d\alpha_n^{(i)}(u)}{(K(u)-E(u))^2}, \quad \tau \le x < T \right\} \stackrel{D}{=} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{1\le e,m\le n} h_x^{(i)}(X_e;X_m), \quad \tau \le x < T \right\},$$

где

$$h_x^{(i)}(s;t) = \frac{I(\tau \le Q^{(i)}(t) < x)}{\left(K(Q^{(i)}(t)) - E(Q^{(i)}(t))\right)^2} \left\{ I(s<t) + I\left(T(\infty;i) \le s < T(\infty;i) + S^2(Q^{(i)}(t))\right) \right\} - \frac{E(Q^{(i)}(t)) I(\tau \le Q^{(i)}(t) < x)}{\left(K(Q^{(i)}(t)) - E(Q^{(i)}(t))\right)^2} -$$

$$- \int_{[\tau;x]} \left\{ I(s < T(u;i)) + I\left(T(\infty;i) \le s < T(\infty;i) + S^2(u)\right) \right\} \frac{dT(u;i)}{(K(u)-E(u))^2} + \int_{[\tau;x]} \frac{E(u)dT(u;i)}{(K(u)-E(u))^2}.$$

Здесь $Q^{(i)}(t) = \sup\{x : T(x;i) < t\}$-обратная функция для $T(x;i)$, теперь $S^{(1)}(x) = T(x;i)$ и $S^{(2)}(x) = T(x;0) + \sum_{m\in\Im(i)} T(x;m)$. Нетрудно видеть, что для всех $x \in [\tau;T)$ $\left|h_x^{(i)}(s;t)\right| \le 6r^{-2}$, $0 \le s,\ t \le 1,\ i \in \Im$ и равенства вида (2.1.50), (2.1.51) для $h_x^{(i)}$ также верны. Для доказательства (III), мы должны ввести следующие три субраспределения при каждом $i \in \Im$: $S^{(1)}(x) = T(x;0)$, $S^{(2)}(x) = T(x;i)$ и $S^{(3)}(x) = \sum_{m\in\Im(i)} T(x;m)$, где $S^{(1)}(x) + S^{(2)}(x) + S^{(3)}(x) = E(x)$. Тогда для каждого $i \in \Im$, имеем

$$\left\{ \left(\alpha_n^{(0)}(x), \alpha_n^{(i)}(y)\right), \ -\infty < x, y < \infty \right\} \stackrel{D}{=} \left\{ \left(u_n(S^{(1)}(x)), u_n(S^{(1)}(\infty) + S^{(2)}(y)) - u_n(S^{(1)}(\infty))\right), \ -\infty < x, y < \infty \right\}.$$

Отсюда для каждого $i \in \Im$:

$$\left\{ \int_{[\tau;x]} \frac{\alpha_n^{(i)}(u)d\alpha_n^{(0)}(u)}{\gamma(u)(K(u)-E(u))^2}, \quad \tau \le x < T \right\} \stackrel{D}{=} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{1\le e,m\le n} h_x^{(i)^*}(X_e;X_m), \quad \tau \le x < T \right\},$$

где

$$h_x^{(i)^*}(s;t)=\frac{I(\tau\le Q^{(0)}(t)<x)}{\gamma(Q^{(0)}(t))\big(K(Q^{(0)}(t))-E(Q^{(0)}(t))\big)^2}\Big\{I\big(T(\infty;0)\le s<T(\infty;0)+E(Q^{(0)}(t);i)\big)\Big\}-$$

$$-\frac{T(Q^{(0)}(t);i)I(\tau\le Q^{(0)}(t)<x)}{\gamma(Q^{(0)}(t))\big(K(Q^{(0)}(t))-E(Q^{(0)}(t))\big)^2}-\int\limits_{[\tau;x]}\frac{\big\{I\big(T(\infty;0)\le s<T(\infty;0)+T(u;i)\big)\big\}dT(u;i)}{\gamma(u)(K(u)-E(u))^2}+$$

$$+\int\limits_{[x;\infty)}\frac{T(u;i)dT(u;0)}{\gamma(u)(K(u)-E(u))^2}.$$

В данном случае для всех $\tau\le x<T,\ 0\le s,t\le 1$ и $i\in\Im$, имеем $\left|h_x^{(i)^*}(s;t)\right|\le 4\gamma_o^{-1}r^{-2}$ и аналоги равенств (2.1.50), (2.1.51) также имеют место. Для доказательства (IV) введем функции $L_n(u)=-\log K_n(u)$, $L(u)=-\log K(u),\ u\ge\tau$. Тогда согласно разложению $K_n(u)$,

$$\lambda_n^*(u)=-K(u)n^{1/2}(L_n(u)-L(u))+\frac{n^{-1/2}}{2}\exp\big(-\Theta_n^*(u)\big)\big(n^{1/2}(L_n(u)-L(u))\big)^2,\ \ u\ge\tau,\quad (2.1.52)$$

где $\big(L_n(u)\wedge L(u)\big)\le\Theta_n^*(u)\le\big(L_n(u)\vee L(u)\big)$. Интегрированием по частям имеем

$$n^{1/2}(L_n(u)-L(u))=-\int\limits_{[u;\infty)}\frac{\alpha_n^{(k+1)}(v)dT(v;0)}{E^2(v)}+\int\limits_{[u;\infty)}\frac{\alpha_n^{(0)}(v)dE(v)}{E^2(v)}-\frac{\alpha_n^{(0)}(u)}{E(u)}+$$

$$+n^{-1/2}\int\limits_{[u;\infty)}\frac{\big(\alpha_n^{(k+1)}(v)\big)^2dT(v;0)}{E_n(v-)E^2(v)}-n^{-1/2}\int\limits_{[u;\infty)}\frac{\alpha_n^{(k+1)}(v)d\alpha_n^{(0)}(v)}{E_n(v-)E^2(v)}.$$

С другой стороны,

$$\int\limits_{[\tau;x]}\frac{\lambda_n^*(u)d\alpha_n^{(i)}(u)}{(K(u)-E(u))^2}=\int\limits_{[\tau;x]}\left(\int\limits_{[u;\infty)}\frac{\alpha_n^{(k+1)}(v)dT(v;0)}{E^2(v)}\right)\frac{K(u)d\alpha_n^{(i)}(u)}{(K(u)-E(u))^2}+$$

$$+\int\limits_{[\tau;x]}\frac{\alpha_n^{(0)}(u)d\alpha_n^{(i)}(u)}{\gamma(u)(K(u)-E(u))^2}-\int\limits_{[\tau;x]}\left(\int\limits_{[u;\infty)}\frac{\alpha_n^{(0)}(v)dE(v)}{E^2(v)}\right)\frac{K(u)d\alpha_n^{(i)}(u)}{(K(u)-E(u))^2}-$$

$$-\int\limits_{[\tau;x]}\left(\int\limits_{[u;\infty)}\frac{\alpha_n^{(k+1)}(v)\alpha_n^{(k+1)}(v-)dT(v;0)}{E_n(v-)E(v)}\right)\frac{K(u)d(T_n(u;i)-T(u;i))}{(K(u)-E(u))^2}+.$$

(2.1.53)

$$+\int\limits_{[\tau;x]}\left(\int\limits_{[u;\infty)}\frac{\alpha_n^{(k+1)}(v)d\alpha_n^{(0)}(v)}{E_n(v-)E(v)}\right)\frac{K(u)d(T_n(u;i)-T(u;i))}{(K(u)-E(u))^2}+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{[\tau;x]}\frac{\exp\left(-\Theta_n^*(u)\right)n^{\frac{1}{2}}(L_n(u)-L(u))d(T_n(u;i)-T(u;i))}{(K(u)-E(u))^2}=\sum_{m=1}^{6}I_{mn}^{(i)}(x),\ \ i\in\Im.$$

Оценим каждый из интегралов в (2.1.53) отдельно. Нетрудно видеть, что

$$I_{1n}^{(i)}(x)=\frac{\alpha_n^{(i)}(u)K(u)}{(K(u)-E(u))^2}\int\limits_{[u;\infty)}\frac{\alpha_n^{(k+1)}(v)dT(v;0)}{E^2(v)}\Bigg|_{u=\tau}^{u=x}-\int\limits_{[\tau;x]}\frac{\alpha_n^{(i)}(u)\alpha_n^{(k+1)}(u)K(u)dT(u;0)}{(K(u)-E(u))^2E^2(u)}+$$

$$+\int\limits_{[\tau;x]}\left(\int\limits_{[u;\infty)}\frac{\alpha_n^{(k+1)}(v)dT(v;0)}{E^2(v)}\right)\left\{\frac{dK(u)}{(K(u)-E(u))^2}-\frac{2K(u)d(K(u)-E(u))}{(K(u)-E(u))^3}\right\}.$$

Согласно (2.1.10) и (2.1.11) для всех $i\in\Im$

$$P\left(\sup_{\tau\le x<T}\left|I_{1n}^{(i)}(x)\right|>\gamma_0^{-2}r^{-2}(4+r^{-1})(1+\varepsilon)\log n\right)\le 5P\left(\sup_{\tau\le x<T}\left|\alpha_n^{(i)}(x)\right|>2\left(\frac{(1+\varepsilon)}{2}\log n\right)^{\frac{1}{2}}\right)+$$

$$+5P\left(\sup_{\tau\le x<T}\left|\alpha_n^{(k+1)}(x)\right|>\left(\frac{(1+\varepsilon)}{2}\log n\right)^{\frac{1}{2}}\right)\le 15Dn^{-(1+\varepsilon)}. \qquad (2.1.54)$$

Аналогично, сперва интегрируя по частям, а затем используя неравенства (2.1.10), (2.1.11) и (III) из леммы (2.1.8) для $i\in\Im$ имеем

$$P\left(\sup_{\tau\le x<T}\left|I_{2n}^{(i)}(x)\right|>2\gamma_0^{-1}r^{-2}(1+A_3+\gamma_0^{-1}+2r^{-1})(1+\varepsilon)\log n\right)\le$$

$$\le 3P\left(\sup_{\tau\le x<T}\left|\alpha_n^{(0)}(x)\right|\left|\alpha_n^{(i)}(x)\right|>2(1+\varepsilon)\log n\right)+B_3n^{-(1+\varepsilon)}\le(B_3+12D)n^{-(1+\varepsilon)}. \qquad (2.1.55)$$

Интеграл $I_{3n}^{(i)}$ имеет такую же структуру, что и $I_{1n}^{(i)}$. Следовательно, для $i\in\Im$

$$P\left(\sup_{\tau\le x<T}\left|I_{3n}^{(i)}(x)\right|>2\gamma_0^{-2}r^{-2}(4+r^{-1})(1+\varepsilon)\log n\right)\le 20Dn^{-(1+\varepsilon)}. \qquad (2.1.56)$$

Учитывая также и оценку (2.1.47),

$$P\left(\sup_{\tau\le x<T}\left|I_{4n}^{(i)}(x)\right|>2\gamma_0^{-3}r^{-2}(1+\varepsilon)\log n\right)\le 2Dn^{-(1+\varepsilon)},\quad i\in\Im. \qquad (2.1.57)$$

Для внутреннего интеграла в формуле $I_{5n}^{(i)}$, мы имеем

$$\int\limits_{(u;\infty)} \frac{\alpha_n^{(k+1)}(v)d\alpha_n^{(0)}(v)}{E_n(v-)E(v)} = -\int\limits_{[u;\infty)} \frac{\alpha_n^{(k+1)}(v)\alpha_n^{(k+1)}(v-)d(T_n(v;0)-T(v;0))}{E_n(v-)E^2(v)} + \qquad . \qquad (2.1.58)$$

$$+\int\limits_{[u;\infty)} \frac{\alpha_n^{(k+1)}(v)d\alpha_n^{(0)}(v)}{E^2(v)}$$

Аналогично (2.1.57), используя неравенство (I), имеем

$$P\left(\sup_{\tau\le x<T}\left|I_{5n}^{(i)}(x)\right| > 2\gamma_0^{-2}r^{-2}(2\gamma_0^{-1}+A_4)(1+\varepsilon)\log n\right) \le (B_1+2D)n^{-(1+\varepsilon)}, \quad i\in\Im . \qquad (2.1.59)$$

Наконец, для $n^{1/2}(L_n(u)-L(u)),\ u\ge\tau$, используя неравенство в (1.3.6) и (2.1.13) получаем

$$P\left(\sup_{\tau\le x<T}\left|I_{6n}^{(i)}(x)\right| > 32\gamma_0^{-4}(1+\varepsilon)\log n\right) \le 4Dn^{-(1+\varepsilon)}, \quad i\in\Im . \qquad (2.1.60)$$

Теперь, комбинируя (2.1.52)-(2.1.60) мы установим и оценку (IV). Для доказательства (V) соответствующий интеграл представим так:

$$\int\limits_{[\tau;x]} \frac{n^{1/2}(q_n(u)-q(u))dn^{1/2}(q_n(u)-q(u))}{(K(u)-E(u))^2} = \beta_{1n}(x)+\beta_{2n}(x)+\beta_{3n}(x),$$

где ввиду равенства $n^{1/2}(q_n(u)-q(u)) = \lambda_n^*(u)-\alpha_n^{(k+1)}(u)+n^{1/2}(\Delta E_n(u)-\Delta T_{1n}(u;0))$,

$$\beta_{1n}(x) = \int\limits_{[\tau;x]} \frac{n^{1/2}(q_n(u)-q(u))d\lambda_n^*(u)}{(K(u)-E(u))^2}; \qquad \beta_{2n}(x) = -\int\limits_{[\tau;x]} \frac{n^{1/2}(q_n(u)-q(u))d\alpha_n^{(k+1)}(u)}{(K(u)-E(u))^2};$$

и

$$\beta_{3n}(x) = n^{1/2}\int\limits_{[\tau;x]} \frac{n^{1/2}(q_n(u)-q(u))d(\Delta E_n(u)-\Delta T_{1n}(u;0))}{(K(u)-E(u))^2};$$

Оценим каждое из этих процессов. Согласно разложению (2.1.52)

$$\sup_{\tau\le x<T}\left|\beta_{1n}(x)\right| = \sup_{\tau\le x<T}\left|\int\limits_{[\tau;x]} \frac{n^{1/2}(q_n(u)-q(u))d\left[-K(u)n^{\frac{1}{2}}(L_n(u)-L(u))+\frac{n^{-1/2}}{2}\exp\left(-\Theta_n^*(u)\right)\left(n^{\frac{1}{2}}(L_n(u)-L(u))\right)^2\right]}{(K(u)-E(u))^2}\right| \le$$

$$\le 2r^{-2}\sup_{\tau\le x<T}\left|n^{1/2}(q_n(x)-q(x))\right|\sup_{\tau\le x<T}\left|n^{1/2}(L_n(x)-L(x))\right|+\sup_{\tau\le x<T}\left|\int_{[\tau;x]}\frac{K(u)\left(n^{1/2}(q_n(u)-q(u))\right)dn^{1/2}(L_n(u)-L(u))}{(K(u)-E(u))^2}\right|+$$

$$+r^{-2}n^{-1/2}\sup_{\tau\le x<T}\left|n^{1/2}(q_n(x)-q(x))\right|\sup_{\tau\le x<T}\left(n^{1/2}(L_n(x)-L(x))\right)^2+$$

$$+\sup_{\tau\le x<T}\left|\int_{[\tau;x]}\frac{\exp\left(-\Theta_n^*(u)\right)\left(n^{1/2}(q_n(u)-q(u))\right)\left(n^{1/2}(L_n(u)-L(u))\right)dL_n(u)}{(K(u)-E(u))^2}\right|+$$

$$+\sup_{\tau\le x<T}\left|\int_{[\tau;x]}\frac{\exp\left(-\Theta_n^*(u)\right)\left(n^{1/2}(q_n(u)-q(u))\right)\left(n^{1/2}(L_n(u)-L(u))\right)dL(u)}{(K(u)-E(u))^2}\right|=\sum_{j=1}^{5}b_j. \qquad (2.1.61)$$

Слагаемые в (2.1.61) могут быть оценены с использованием всего арсенала неравенств и разложений, которые были применены при доказательстве соотношений (I)-(IV). В частности надо учесть (2.1.33), (2.1.53)-(2.1.60), а также

$$\left|dL_n(u)\right|\le\left|-\frac{dK_n(u)}{K_n(u)}\right|\le\frac{dK_n(u)}{K_n(u)-E_n(u)}, \qquad \left|dL(u)\right|\le\left|-\frac{dK(u)}{K(u)}\right|\le\frac{dK(u)}{K(u)-E(u)}.$$

При этом довольно рутинным является оценивание b_2, для которого надо использовать разложение (2.1.33) и методы доказательства неравенств (I)-(IV). Опуская эти детали имеем

$$P\left(\sup_{\tau\le x<T}\left|\beta_{1n}(x)\right|>A_5^{(1)}(1+\varepsilon)\log n\right)\le B_5^{(1)}n^{-(1+\varepsilon)} \quad . \qquad (2.1.62)$$

Процесс $\beta_{2n}(x)$ по структуре почти такой же, что и $A_{5n}^{(i)}(x)$ из доказательства теоремы 2.1.1. Следовательно,

$$P\left(\sup_{\tau\le x<T}\left|\beta_{2n}(x)\right|>A_5^{(2)}(1+\varepsilon)\log n\right)\le B_5^{(2)}n^{-(1+\varepsilon)} \quad . \qquad (2.1.62)$$

Так как $n^{1/2}(\Delta E_n(u)-\Delta T_{1n}(u;0))=\alpha_n^{(k+1)}(u)-\alpha_n^{(k+1)}(u-)-\left(\alpha_{1n}^{(0)}(u)-\alpha_{1n}^{(0)}(u-)\right)$, то

$$\left|\beta_{3n}(x)\right|\le\left|\beta_{2n}(x)\right|+\left|\int_{[\tau;x]}\frac{n^{1/2}(q_n(u)-q(u))d\alpha_n^{(k+1)}(u-)}{(K(u)-E(u))^2}\right|+\left|\int_{[\tau;x]}\frac{n^{1/2}(q_n(u)-q(u))d\alpha_{1n}^{(0)}(u)}{(K(u)-E(u))^2}\right|+$$

$$+\left|\int_{[\tau;x]}\frac{n^{1/2}(q_n(u)-q(u))d\alpha_{1n}^{(0)}(u-)}{(K(u)-E(u))^2}\right|, \qquad (2.1.63)$$

где $\alpha_{1n}^{(0)}(u)=n^{1/2}\left(T_{1n}(u;0)-T_1(u;0)\right)$-субэмпирический процесс. Таким образом, последние три процесса в правой части неравенства (2.1.63) такой же структуры, что и $\beta_{2n}(x)$. Следовательно, согласно (2.1.62):

$$P\left(\sup_{\tau\le x<T}\left|\beta_{3n}(x)\right|>A_5^{(3)}(1+\varepsilon)\log n\right)\le B_5^{(3)}n^{-(1+\varepsilon)}. \qquad (2.1.64)$$

Теперь из (2.1.62)-(2.1.64) при $A_5=A_5^{(1)}+A_5^{(2)}+A_5^{(3)}$ и $B_5=B_5^{(1)}+B_5^{(2)}+B_5^{(3)}$ следует и неравенство (V). Тем самым лемма 2.1.8 доказана полностью.

Следствие 2.1.14. Из доказательства теорем 2.1.2 и 2.1.13 легко следует следующая аппроксимация надлежащим образом центрированных и нормированных оценок (1.4.11) и (1.4.13) через соответствующие кумулятивные процессы при $m=1,2,3$ и равномерно по всем $(x;i)\in[\tau;T)\times\Im$:

$$\left(F_{m\tau n}(x;i)-F_\tau(x;i)\right)\exp\left(\Lambda_\tau(x;i)\right)=\left(\Lambda_{m\tau n}(x;i)-\Lambda_\tau(x;i)\right)+R_n(x),$$

$$\left(\widetilde{F}_{m\tau n}(x;i)-F_\tau(x;i)\right)\exp\left(\Lambda_\tau(x;i)\right)=\left(\widetilde{\Lambda}_{m\tau n}(x;i)-\Lambda_\tau(x;i)\right)+\widetilde{R}_n(x),$$

где $F_\tau(x;i)$ определяется равенством (2.1.22) и

$$\sup_{\tau\le x<T}\left|R_n(x)\right|\overset{п.н.}{=}O(n^{-1}\log n), \qquad \sup_{\tau\le x<T}\left|\widetilde{R}_n(x)\right|\overset{п.н.}{=}O(n^{-1}\log n). \ \blacksquare$$

Следствие 2.1.16. Из (2.1.9) и (2.1.44) мы можем вывести также и свойства равномерной сильной состоятельности оценок (аналог (1.9.17)) при каждом $m=1,2,3$ и $i\in\Im$:

$$\sup_{\tau\le x<T}\left|F_{m\tau n}(x;i)-F_\tau(x;i)\right|\overset{п.н.}{=}O\left(\left(\frac{\log n}{n}\right)^{1/2}\right),$$

$$\sup_{\tau\le x<T}\left|\widetilde{F}_{m\tau n}(x;i)-F_\tau(x;i)\right|\overset{п.н.}{=}O\left(\left(\frac{\log n}{n}\right)^{1/2}\right). \qquad (2.1.65)$$

Известно, что для всех действительных $z>0$ и $n\ge1$:

$$P\left(\sup_{0\le y<1}\left|B_n(y)\right|>z\right)\le 2\exp(-2z^2), \qquad (2.1.66)$$

где $\{B_n(y),\ 0\le y\le1,\ n\ge1\}$-последовательности броуновских мостов, которые согласно структуре $N_n^{(i)}(x)$ и равенств (2.2.30) при $z^0=\left(\frac{(1+\varepsilon)\log n}{2}\right)^{1/2}$, $\varepsilon>0$, обеспечивают оценку

$$P\left(\sup_{\tau\le x<T}\left|N_n^{(i)}(x)\right|>\lambda_1 z^0\right)\le\lambda_2 n^{-(1+\varepsilon)},\quad i\in\Im. \qquad (2.1.67)$$

Здесь λ_1 и λ_2-положительные постоянные. Теперь первое соотношение (2.1.65) следует из (2.1.43), (2.1.67) и неравенства

$$\left|F_{m\tau n}(x;i)-F_\tau(x;i)\right|\le n^{-1/2}\left(\left|V_{mn}^{(i)}(x)-W_{mn}^{(i)}(x)\right|+\left|N_n^{(i)}(x)\right|\right).$$

Второе равенство в (2.1.65) устанавливается вполне аналогично. ■

В § 2.2 будут установлены более точные результаты о равномерной сильной состоятельности оценок, а именно законы типа повторного логарифма. ■

Теперь обсудим одно из важных свойств оценок (1.4.11), в которых для вероятности $q(u)$, будет использована частотная оценка $\hat{q}_n(u)$, определяемая формулой (1.3.39) (хотя из §1.4 известно, что $\hat{q}_n(u)=q_n^э(u)$). Тогда ввиду (1.4.40):

$$\widetilde{\Lambda}_{\tau n}(x;i)=\int_{[\tau;x]}\frac{dT_n(u;i)}{\hat{q}_n(u)},i\in\Im. \qquad (2.1.68)$$

В ниже приводимой теореме оценки (1.4.11) аппроксимируются мартингалами и найден слабый предел. В связи с этим отметим, что слабая сходимость здесь понимается в пространстве Скорохода $D^{(k)}[\tau;T)$ k-мерных cádlág функций. Заметим, что это топология сильнее, чем продукт-топология на $D[\tau;T)\times\ldots\times D[\tau;T)$ для топологии Скорохода на каждом экземпляре. Однако, используемый нами достаточный критерий слабой компактности и сходимости применим к топологии Скорохода на $D^{(k)}[\tau;T)$.

Теорема 2.1.17. В условиях теоремы 2.1.13:

(а) для всех $m=1,2,3$ и $i\in\Im$:

$$\sup_{\tau\le x<T}\left|\left(\widetilde{F}_{m\tau n}(x;i)-F_\tau(x;i)\right)\exp(\Lambda_\tau(x;i))-\int_{[\tau;x]}\frac{I\left(n\hat{q}_n(u)>0\right)}{n\hat{q}_n(u)}dm_n^{(i)}(u)\right|\overset{п.н.}{=}O\left(n^{-1}\log n\right), \quad (2.1.69)$$

где $m_n^{(i)}(u)=\sum_{j=1}^{n}\left(I\left(\zeta_j\le u,\chi_j^{(i)}=1\right)-\int_{(-\infty;u]}I\left(L_j\le s\le Z_j\wedge Y_j\right)d\Lambda(s;i)\right).$

(б) при $n\to\infty$, $m=1,2,3$ и $v=(v_1,\ldots,v_k)\in[\tau;T)^k$:

$$\left(n^{1/2}\left(\widetilde{F}_{m\tau n}(v_i;i)-F_\tau(v_i;i)\right),\ i\in\Im\right)\overset{D}{\Rightarrow}\left(\omega_1(v_1),\ldots,\omega_k(v_k)\right), \qquad (2.1.70)$$

где $\{\omega_i(x),\ i\in\Im\}$ независимые гауссовские процессы с нулевыми средними и ковариационной структурой при $x,y\in[\tau;T)$ и $i\in\Im$ $M\omega_i(x)\omega_i(y)=(1-F_\tau(x;i))(1-F_\tau(y;i))d^{(i)}(x\wedge y)$, где

$$d^{(i)}(x)=\int\limits_{[\tau;x]}\frac{d\Lambda(u;i)}{q(u)}=\int\limits_{[\tau;x]}\frac{dH(u;i)}{K(u)(1-G(u-))(1-H(u))^2}.$$

Доказательство теоремы 2.1.17. Поскольку для всех $i\in\Im$

$$\widetilde{\Lambda}_{\tau n}(x;i)-\Lambda_\tau(x;i)=\int\limits_{[\tau;x]}\frac{I(nY_n(u)>0)dm_n^{(i)}(u)}{nY_n(u)},\qquad(2.1.71)$$

то (2.1.69) получается из второй части следствия 2.1.14 и равенства (2.1.71). Для доказательства (2.1.70) сначала установим свойство мартингальности интеграла в правой части (2.1.71). Введём считающий процесс $n_j^{(i)}(x)=I(\zeta_j\le x,\chi_j^{(i)}=1)=I(L_k\le Z_k\le Y_k\wedge x,A_k^{(i)})$, где $i\in\Im$ и $1\le j\le n$. Определим пополненные потоки σ-алгебр, порожденные считающими процессами $n_j^{(i)}(x)$: $\square_x^{i,j}=\mathcal{N}_0\cup\sigma(n_j^{(i)}(u),\ u\le x)$, $\square_x^{i}=\mathcal{N}_0\cup\sigma(n_j^{(i)}(u),\ u\le x,\ 1\le j\le n)$, $\square_x=\mathcal{N}_0\cup\sigma(n_j^{(i)}(u),\ u\le x,\ 1\le j\le n,\ i\in\Im)$, где $\mathcal{N}_0$-совокупность всех P-нулевых событий из σ-алгебры $\mathcal{A}$ основного вероятностного пространства $(\Omega,\mathcal{A},P)$. Тогда (см. § 1.8) $\square_x$ является фильтрацией, порожденной совокупностью считающих процессов $\{n_j^{(i)}(u),\ u\le x,\ 1\le j\le n,\ i\in\Im\}$, а $(\Omega,\mathcal{A},\square_x,P)$-стохастическим базисом. Тогда согласно разложению Дуба-Мейера случайные процессы

$$\mu_j^{(i)}(u)=n_j^{(i)}(u)-\int\limits_{(-\infty;u]}I(L_j\le s\le Z_j\wedge Y_j)d\Lambda(s;i)=n_j^{(i)}(u)-\int\limits_{[L_j;Y_j\wedge u]}I(Z_j\ge s)d\Lambda(s;i)=n_j^{(i)}(u)-a_j^{(i)}(u)$$

являются мартингалами, причем $\mu_j^{(i)}(u)\in\square_{loc}^2(\square_x^{i,j})$. Согласно (1.8.5) и условий непрерывности субраспределений предсказуемые ковариационные процессы этих мартингалов определяются равенствами при $i,j\in\Im$:

$$<\mu_k^{(i)};\mu_k^{(j)}>(u)=\begin{cases}\int\limits_{(-\infty;u]}I(L_k\le s\le Z_k\wedge Y_k)(1-\Delta\Lambda(s;i))d\Lambda(s;j),\ i=j\\ \int\limits_{(-\infty;u]}I(L_k\le s\le Z_k\wedge Y_k)\Delta\Lambda(s;i)d\Lambda(s;j),\ i\ne j\end{cases}=$$

$$(2.1.72)$$

$$=\begin{cases}\int\limits_{(-\infty;u]}I(L_k\le s\le Z_k\wedge Y_k)d\Lambda(s;i),\ i=j\\ 0,\ i\ne j\end{cases}=\begin{cases}a_k^{(i)}(u),\ i=j,\\ 0,\ i\ne j.\end{cases}$$

Учитывая независимость $\{\zeta_k,\ 1 \le k \le n\}$, получаем $\mu_j^{(i)}(u) \in \square^2_{loc}(\square^{(i)}_x)$, а также $m_n^{(i)}(u) = \sum_{k=1}^n \mu_k^{(i)}(u) \in \square^2_{loc}(\square^{(i)}_x)$. Так как при каждом x, процесс $\left\{ nT_n(u;i) = \sum_{k=1}^n n_k^{(i)}(u),\ u \le x,\ i \in \Im \right\}$ является k-мерным $\square_x$-адаптированным считающим процессом с компенсатором при $(u;i) \in (-\infty; x] \times \Im$ $A_n^{(i)}(u) = \sum_{k=1}^n a_k^{(i)}(u) = \int\limits_{(-\infty;u]} n\bar{Y}_n(s) d\Lambda(s;i)$, то $m_n(u) = \left(m_n^{(1)}(u),...,m_n^{(k)}(u)\right) \in \square^2_{loc}(\square_x)$ и согласно (2.1.72) компоненты $m_n(u)$ ортогональны:

$$< m_n^{(i)}; m_n^{(j)} > (u) = \begin{cases} A_n^{(i)}(u),\ i = j, \\ \qquad 0,\ i \ne j,\ \ i,j \in \Im. \end{cases} \tag{2.1.73}$$

Поскольку $I\left(n\bar{Y}_n(u) > 0\right)\left(n\bar{Y}_n(u)\right)^{-1}$ является ограниченным предсказуемым случайным процессом на $[\tau; x]$ (так как является непрерывным слева адаптированным процессом), то согласно рассуждениям из [100, стр. 703], [191, стр. 10] и (2.1.71) $\left\{ n^{1/2}\left(\tilde{\Lambda}_{\tau n}(x;i) - \Lambda_\tau(x;i)\right),\ i \in \Im \right\} \in \square^2_{loc}(\square_x)$ причем ввиду (2.1.73) и (1.8.7) квадратическая характеристика равна

$$\left\langle \left(\tilde{\Lambda}_{\tau n}(x;i) - \Lambda_\tau(x;i)\right), \left(\tilde{\Lambda}_{\tau n}(x;j) - \Lambda_\tau(x;j)\right) \right\rangle = \begin{cases} \int\limits_{[\tau;x]} \dfrac{I\left(n\bar{Y}_n(u) > 0\right)}{n\bar{Y}_n(u)} d\Lambda(u;i),\ \ i = j, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0,\ \ i \ne j,\ \ i,j \in \Im. \end{cases} \tag{2.1.74}$$

Ввиду следствия 2.1.14 сходимость (2.1.70) эквивалентно

$$\left(n^{1/2}\left(\tilde{\Lambda}_{\tau n}(x;i) - \Lambda_\tau(x;i)\right),\ \ i \in \Im \right) \overset{D}{\Rightarrow} \left(\omega_1^*(x),...,\omega_k^*(x)\right), \tag{2.1.75}$$

где гауссовские процессы $\left\{ \omega_i^*(x) = (1 - F_\tau(x;i))^{-1}\omega_i(x),\ \ i \in \Im,\ \ x \in [\tau; T) \right\}$. Теперь в свою очередь, для доказательства (2.1.75) (см. теорему А в § 1.8 или [278, стр. 501]) достаточно показать, что при каждом $i \in \Im$ и $x \in [\tau; T)$ согласно (2.1.74) при $n \to \infty$

$$\left\langle n^{1/2}\left(\tilde{\Lambda}_{\tau n}(x;i) - \Lambda_\tau(x;i)\right), n^{1/2}\left(\tilde{\Lambda}_{\tau n}(x;j) - \Lambda_\tau(x;j)\right) \right\rangle = \int\limits_{[\tau;x]} \frac{I\left(\bar{Y}_n(u) > 0\right)}{\bar{Y}_n(u)} d\Lambda(u;i) \xrightarrow{P} d^{(i)}(x)$$

и $\forall \varepsilon > 0$ имеет место условие Линдеберга

$$\int\limits_{[\tau;x]} \frac{I\left(\bar{Y}_n(u) > 0\right)}{\bar{Y}_n(u)} I\left(\frac{I\left(\bar{Y}_n(u) > 0\right)}{\bar{Y}_n(u)} > \varepsilon n^{1/2} \right) d\Lambda(u;i) \xrightarrow{P} 0.$$

Однако, последние две сходимости являются следствием теоремы Гливенко-Кантелли для эмпирической оценки $\bar{Y}_n(u)$. Теперь (2.1.75), а следовательно и (2.1.70) следуют из теоремы А Реболледо (§ 1.8). Теорема 2.1.17 доказана. ■

Следствие 2.1.18. Из соотношений (2.1.44) и (2.1.70) следует, что для всех $m = 1,2,3$ и $n \geq 1$: $\left(\widetilde{W}_{mn}^{(1)}(v_1),...,\widetilde{W}_{mn}^{(k)}(v_k)\right) \overset{D}{=} \left(\omega_1(v_1),...,\omega_k(v_k)\right)$, и следовательно для $x, y \in [\tau;T)$ и $i \in \Im$: $M\widetilde{W}_{mn}^{(i)}(x) = 0$, $M\widetilde{W}_{mn}^{(i)}(x)\widetilde{W}_{mn}^{(i)}(y) = \left(1 - F_\tau(x;i)\right)\left(1 - F_\tau(y;i)\right)d^{(i)}(x \wedge y)$. ■

Замечание 2.1.19. Из теоремы 2.1.17 следует, что оценки $\left\{\widetilde{F}_{m\tau n}(\bullet;i),\ i \in \Im,\ m = 1,2,3\right\}$ при подходящей центровке и нормировке могут быть аппроксимированы одной и той же последовательностью квадратично-интегрируемых мартингалов. Учитывая это свойство оценок, полностью повторив доказательство теоремы из [308], о состоятельности оценки Каплана-Мейера, мы можем записать следующий её аналог: для всех $i \in \Im$ и $m = 1,2,3$ при $n \to \infty$,

$$\sup_{\tau \leq x \leq \zeta_{(n)}} \left|\widetilde{F}_{m\tau n}(x \wedge \zeta_{(n)};i) - F_{m\tau}(x;i)\right| = o_p(1). \tag{2.1.76}$$

Результат (2.1.76) показывает максимально возможный интервал, в котором «остановленные» оценки являются равномерно состоятельными. Строгая состоятельность этих оценок будет установлена в § 2.2. ■

Замечание 2.1.20. При доказательстве мартингальной аппроксимации (2.1.69) представление (2.1.71), в котором $m_n^{(i)}(u)$ являются мартингалами, сыграло ключевую роль. Формально аналогичное представление можно записать и для оценок $\Lambda_{\tau n}(x;i)$:

$$\Lambda_{\tau n}(x;i) - \Lambda_\tau(x;i) = \int_{[\tau;x]} \frac{I(nq_n(u) > 0)}{nq_n(u)} dk_n^{(i)}(u), \quad i \in \Im, \tag{2.1.77}$$

где $k_n^{(i)}(u) = \sum_{j=1}^{n} I\left(\zeta_j \leq u, \chi_j^{(i)} = 1\right) - n\left(K_n(u) - E_n(u-) - \Delta T_{1n}(u;0)\right)$. Однако наличие оценки $K_n(u)$ экспоненциальной структуры в последнем выражении затрудняет что либо сказать о свойствах $k_n^{(i)}(u)$, а следовательно и о полезности представления (2.1.77). ■

§ 2.2. Строгая состоятельность непараметрических оценок функционалов от распределений при случайном цензурировании с двух сторон

В модели $\left(L \vee (Z \wedge Y); D\right)$ рассмотрим оценки (1.4.13) для функционалов (1.3.42). Здесь мы докажем законы типа повторного логарифма. Отметим, что различные формы ЗПЛ для обычной э.ф.р. были установлены Кифером, Чжуном-Смирновым, Финкельштейном, Джеймсом, а также для случая разнораспределенных с.в. Ш.Чёрге-Хорват (см. § 1.9). Аналогичные резултаты для множительных оценок Каплана-

Мейера при случайном цензурировании справа доказаны в работах [153,177-179,266], а в частной модели цензурирования с двух сторон (см. § 2.1) в [213]. Поскольку в рассматриваемой нами общей модели с.в. L ненаблюдаема полностью, то для её ф.р. мы (как в § 2.1) рассмотрим экспоненциальную оценку $K_n(x) = \exp(-\Lambda_{1\tau n}(x;0))$ (см. замечание 1.4.2). Прежде чем привести закон типа повторного логарифма, сперва приведём соответствующий результат для $K_n(x)$.

Лемма 2.2.1. Пусть ф.р. $K,\ E$-непрерывны и $\gamma_0 = E(\tau) > 0$. Тогда

$$\limsup_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{\log\log n}\right)^{1/2} \sup_{x\ge\tau}\left|K_n(x) - K(x)\right| = M^0, \text{ п.н.}$$

где M^0-положительная постоянная. ■

Теорема 2.2.2. Пусть распределения $K,\ E$, $\{H(\bullet;i),\ i\in\Im\}$ непрерывны и выполнены условия (2.1.5). Тогда для $m = 1,2,3$ и $i\in\Im$

$$\limsup_{n\to\infty}\sup_{x\ge\tau}\frac{\left|F_{m\tau n}(x;i) - F_{m\tau}(x;i)\right|}{1 - F_{m\tau}(\lambda(n);i)} = L_m, \text{ п.н.} \tag{2.2.1}$$

где $L_m = L_m\big(G,K,E,T(\bullet;0),...,T(\bullet;k)\big)$-положительные постоянные, последовательность $\lambda(n) = \lambda(n;\alpha_m) \ge \tau$ определяется как

$$\lambda(n) = \sup\left\{x\in R:\ 1-\gamma(x) \ge \frac{\alpha_m}{\gamma_0}\left(\frac{\log\log n}{2n}\right)^{1/2}\right\},\quad n\ge 2.$$

Здесь числа α_m при $m = 1,2$ удовлетворяют неравенству

$$\frac{3}{\alpha_m}\left[\frac{4}{\alpha_m}(2+M^0)+4+M^0\right]<1,$$

а также при $m = 3$, $\dfrac{6}{\alpha_3}\left[\dfrac{8}{r^2}(4+M^0)(2+M^0)+\dfrac{2}{r^2}(7+3M^0)+1\right]<1$.

Доказательство теоремы 2.2.2. Пусть $m = 1$. Ясно, что для каждого $i\in\Im$

$$\sup_{x\le\tau}\left|F_{1\tau n}(x;i) - F_{1\tau}(x;i)\right| \le \sup_{\tau\le x<\lambda(n)}\left|F_{1\tau n}(x;i) - F_{1\tau}(x;i)\right| + 1 - F_{1\tau}(\lambda(n);i). \tag{2.2.2}$$

Теперь пользуясь разложением из доказательства теоремы 2.1.2 для $x\in[\tau;\lambda(n))$ имеем

$$\left|F_{1\tau n}(x;i) - F_{1\tau}(x;i)\right| \le \left(1 - F_{1\tau}(x;i)\right)\left|\Lambda_{\tau n}(x;i) - \Lambda_{\tau}(x;i)\right| + \frac{1}{2}\left(1 - F_{1\tau}(x;i)\right)\cdot$$
$$\cdot\exp\left\{\left|\Lambda_{\tau n}(x;i) - \Lambda_{\tau}(x;i)\right|\right\}\left(\left|\Lambda_{\tau n}(x;i) - \Lambda_{\tau}(x;i)\right|\right)^2. \tag{2.2.3}$$

Поскольку

$$\left|\Lambda_{\tau n}(x;i)-\Lambda_{\tau}(x;i)\right| \le \int\limits_{[\tau;x]} \frac{\left(\left|E_n(u-)-E(u)\right|+\left|K_n(u)-K(u)\right|+\Delta T_{1n}(u;0)\right)dT_n(u;i)}{\left(K_n(u)-E_n(u-)-\Delta T_{1n}(u;0)\right)\left(K(u)-E(u)\right)}+$$
$$+\frac{\left|T_n(x;i)-T(x;i)\right|}{K(x)-E(x)}+\frac{\left|T_n(\tau;i)-T(\tau;i)\right|}{K(\tau)-E(\tau)}+\int\limits_{[\tau;x]}\left|T_n(u;i)-T(u;i)\right|d\left(\frac{1}{K(u)-E(u)}\right). \quad (2.2.4)$$

Для $u\in[\tau;x]$ для почти всех элементарных событий ω, существует число $n_0=n_0(\omega)$ такое, что для $x<\lambda(n)$ и $n>n_0(\omega)$

$$\frac{1}{K_n(u)-E_n(u-)-\Delta T_{1n}(u;0)}<\frac{1}{K_n(u)-E_n(u)}\le\frac{1}{K(u)-E(u)}+\frac{\left|K_n(u)-E_n(u)-\left(K(u)-E_n(u)\right)\right|}{\left(K_n(u)-E_n(u)\right)\left(K(u)-E(u)\right)}\le$$
$$\le\frac{1}{K(u)-E(u)}\le\frac{2}{K(\tau)(1-\gamma(x))}\le\frac{2}{\gamma_0(1-\gamma(x))}. \quad (2.2.5)$$

Заметим, что $T(u;i)$ есть значение распределения двумерного случайного вектора $\left(\zeta_1,\chi_1^{(i)}\right)$ в точке $(u;1)$. Применим в (2.2.4) ЗПЛ Чжуна-Смирнова к $E_n(u)-E(u)$, Кифера (двумерный) к $T_n(u;i)-T(u;i)$ и лемму 2.2.1. Тогда с учётом и (2.2.5), для почти всех ω, можем указать число $n_1=n_1(\omega)\ge n_0(\omega)$ и для всех $n\ge n_1$ и $x<\lambda(n)$:

$$\left|\Lambda_{\tau n}(x;i)-\Lambda_{\tau}(x;i)\right|<2\left(\mu(n)(1+M^0)+\frac{1}{n}\right)\int\limits_{[\tau;x]}\frac{dT_n(u;i)}{(K(u)-E(u))^2}+4\mu(n)(\gamma_0(1-\gamma(x)))^{-1}, \quad (2.2.6)$$

где $i\in\Im$, $\mu(n)=(\log\log n/2n)^{1/2}$. Поскольку

$$\int\limits_{[\tau;x]}\frac{dT_n(u;i)}{(K(u)-E(u))^2}=\int\limits_{[\tau;x]}\frac{d(T_n(u;i)-T(u;i))}{(K(u)-E(u))^2}+\int\limits_{[\tau;x]}\frac{dT(u;i)}{(K(u)-E(u))^2}, \quad (2.2.7)$$

то интегрированием по частям имеем

$$\left|\int\limits_{[\tau;x]}\frac{d(T_n(u;i)-T(u;i))}{(K(u)-E(u))^2}\right|\le 4\mu(n)(\gamma_0(1-\gamma(x)))^{-2}, \quad (2.2.8)$$

а второе слагаемое оценим так:

$$\int\limits_{[\tau;x]} \frac{dT(u;i)}{(K(u)-E(u))^2} = \int\limits_{[\tau;x]} \frac{dH(u;i)}{K(u)(1-G(u-))(1-H(u))^2} = \int\limits_{[\tau;x]} \frac{d\Lambda(u;i)}{K(u)(1-G(u-))(1-H(u))} =$$

$$= \int\limits_{[\tau;x]} \frac{dF(u;i)}{K(u)(1-G(u-))\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k}(1-F(u;j))(1-F(u;i))^2} \leq \left(\gamma_0(1-G(x-))\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k}(1-F(x;j))\right)^{-1} \cdot \qquad (2.2.9)$$

$$\cdot \int\limits_{(-\infty;x]} \frac{dF(u;i)}{(1-F(u;i))^2} = \left(\gamma_0(1-G(x-))\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k}(1-F(x;j))\right)^{-1}\left(\frac{1}{1-F(x;i)}-1\right) \leq (\gamma_0(1-\gamma(x)))^{-1}.$$

Из соотношений (2.2.6)-(2.2.9) для $n \geq n_1(\omega)$ и $x \in [\tau; \lambda(n))$ получаем

$$\begin{gathered}|\Lambda_{\tau n}(x;i)-\Lambda_\tau(x;i)| < 8\mu(n)(\gamma_0(1-\gamma(x)))^{-2}\left[\mu(n)(1+M^0)+\frac{1}{n}\right]+ \\ +2(\gamma_0(1-\gamma(x)))^{-1}\left[\mu(n)(3+M^0)+\frac{1}{n}\right]\end{gathered}. \qquad (2.2.10)$$

Согласно выбору последовательности $\lambda(n)$:

$$\sup_{\tau \leq x < \lambda(n)} |\Lambda_{\tau n}(x;i)-\Lambda_\tau(x;i)| < \frac{2}{\alpha_1}\left[\frac{4}{\alpha_1}(2+M^0)+4+M^0\right] < \frac{2}{3}. \qquad (2.2.11)$$

Тогда ввиду неравенства

$$\frac{1}{2}a^2\exp(a) < a \text{ при } 0 < a < \frac{2}{3}, \qquad (2.2.12)$$

из (2.2.3) и (2.2.11) при $n \geq n_1(\omega)$ получим

$$\sup_{\tau \leq x < \lambda(n)} |F_{1\tau n}(x;i)-F_{1\tau}(x;i)| < \sup_{\tau \leq x < \lambda(n)} 2(1-F_{1\tau}(x;i))|\Lambda_{\tau n}(x;i)-\Lambda_\tau(x;i)|. \qquad (2.2.13)$$

Поскольку при каждом $i \in \Im$:

$$\sup_{\tau \leq x < \lambda(n)}\left[\frac{1-F_{1\tau}(x;i)}{1-\gamma(x)}\right] = \sup_{\tau \leq x < \lambda(n)}\left[\frac{1-F_1(x;i)}{(1-G(x-))(1-H(x))}\right] \leq$$

$$\leq \sup_{\tau \leq x < \lambda(n)}\left\{\left[(1-G(\lambda(n)-))\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k}(1-F_1(\lambda(n);j))\right]\right\}^{-1} = \frac{1-F_1(\lambda(n);i)}{1-\gamma(\lambda(n))} \leq \frac{1-F_{1\tau}(\lambda(n);i)}{1-\gamma(\lambda(n))},$$

то из (2.2.10) и (2.2.13) следует

$$\sup_{\tau \le x < \lambda(n)} \left| F_{1\tau n}(x;i) - F_{1\tau}(x;i) \right| < 2(1 - F_{1\tau}(\lambda(n);i)) \cdot$$

$$\cdot \left[\frac{8}{\alpha_1^2} \left(1 + M^0 + \frac{1}{n\mu(n)} \right) + \frac{2}{\alpha_1} \left(3 + M^0 + \frac{1}{n\mu(n)} \right) \right] \overset{п.н.}{=} O\left(1 - F_{1\tau}(\lambda(n);i)\right). \qquad (2.2.14)$$

Теперь из (2.2.2) и (2.2.14) получим (2.2.1) при $m = 1$ и $L_1 \le \left[\frac{4}{\alpha_1^2} \left(M^0 (\alpha_1 + 1) + 2(2\alpha_1 + 1) \right) + 1 \right]$. Для доказательства (2.2.1) при $m = 2$, используем лемму 2.1.6, неравенства (2.2.5), (2.2.7) и (2.2.8). Тогда, имея ввиду (2.1.22) получим:

$$\sup_{\tau \le x < \lambda(n)} \left[\frac{F_{2\tau n}(x;i) - F_{2\tau}(x;i)}{1 - F_{2\tau}(\lambda(n);i)} \right] \le \sup_{\tau \le x < \lambda(n)} \frac{2}{n\left(1 - F_{2\tau}(\lambda(n);i)\right)} \int_{[\tau;x]} \frac{dT_n(u;i)}{(K(u) - E(u))^2} \le$$

$$\le \frac{8\mu(n)}{\gamma_0^2 n (1 - \gamma(\lambda(n)))^3} + \frac{2}{\gamma_0 n (1 - \gamma(\lambda(n)))^2} \le \frac{8\gamma_0}{\alpha_1^3 n \mu^2(n)} + \frac{2\gamma_0}{\alpha_1^2 n \mu^2(n)} \overset{п.н.}{=} O\left((\log\log n)^{-1} \right). \qquad (2.2.15)$$

Теперь для завершения доказательства для случая $m = 2$, используем аналог (2.2.2), а также соотношения (2.2.14) и (2.2.15). Для доказательства (2.2.1) при $m = 3$ запишем аналог (2.2.2) и (2.2.3), используя (2.1.29):

$$\sup_{x \ge \tau} \left| F_{3\tau n}(x;i) - F_{3\tau}(x;i) \right| < \sup_{\tau \le x < \lambda(n)} \left| F_{3\tau n}(x;i) - F_{3\tau}(x;i) \right| + 1 - F_{3\tau}(\lambda(n);i), \ i \in \Im, \qquad (2.2.16)$$

и для $x \in [\tau; \lambda(n))$

$$\left| F_{3\tau n}(x;i) - F_{3\tau}(x;i) \right| < \left(1 - F_{3\tau}(\lambda(n);i)\right) \left[\left| \pi_n(x;i) \right| + \frac{1}{2} \exp\left(\left| \pi_n(x;i) \right| \right) \left[\left| \pi_n(x;i) \right| \right]^2 \right],$$

$$i \in \Im, \qquad (2.2.17)$$

где $\pi_n(x;i) = R_{\tau n}(x;i)\sigma_n^*(x) - R_\tau(x;i)\sigma(x) = n^{-1/2} \mu_n^{(i)}(x)$. Согласно представлению $\mu_n^{(i)}(x)$ из § 2.1, а также (2.1.30) и (2.1.34) для почти всех элементарных событий ω, можно указать число $n_2 = n_2(\omega)$ такое, что для всех $n \ge n_2$ будем иметь цепочку неравенств при $x \in [\tau; \lambda(n))$:

$$\left| \pi_n(x;i) \right| \le \left| \Lambda_{\tau n}(x;i) - \Lambda_\tau(x;i) \right| \frac{\sigma(x)}{\sigma_n(x)} + \left| \sigma_n(x) - \sigma(x) \right| \frac{\Lambda_\tau(x;i)}{\sigma_n(x)} +$$

$$+ \left| \sigma_n^*(x) - \sigma(x) \right| R_{\tau n}(x;i) \le 2\left[\left| \Lambda_{\tau n}(x;i) - \Lambda_\tau(x;i) \right| + \left| \sigma_n(x) - \sigma(x) \right| \right] \left(r(q_n(x) - q_n(\tau)) \right)^{-1} + \qquad (2.2.18)$$

$$+ \left| \sigma_n^*(x) - \sigma(x) \right| \le r_n^{(1)}(x) + r_n^{(2)}(x) + r_n^{(3)}(x),$$

где $r_n^{(1)}(x) = 4r^{-2}\left|\Lambda_{\tau n}(x;i) - \Lambda_\tau(x;i)\right|$, $r_n^{(2)}(x) = 4r^{-2}\left|\sigma_n(x) - \sigma(x)\right|$, $r_n^{(3)}(x) = \left|\sigma_n^{*}(x) - \sigma(x)\right|$.
Оценим каждое из слагаемых в правой части (2.2.18). Для $r_n^{(1)}(x)$ имеем оценку (2.2.10). Интегрируя по частям, учитывая и (2.2.5) получим для $x \in [\tau;\lambda(n))$ и $n \ge n_2(\omega)$:

$$r_n^{(2)}(x) = \left| \int\limits_{[\tau;x]} \frac{dq_n(u)}{q_n(u)} - \int\limits_{[\tau;x]} \frac{dq(u)}{q(u)} \right| \le \left\{ 2\sup_{\tau \le u \le x} \left|q_n(u) - q(u)\right| \left[\int\limits_{[\tau;x]} q^{-2}(u) dK_n(u) + \right.\right.$$

$$\left. + \int\limits_{[\tau;x]} q^{-2}(u) dE_n(u-) + \int\limits_{[\tau;x]} q^{-2}(u) dT_n(u;0) + \int\limits_{[\tau;x]} q^{-2}(u) dT_n(u-;0) \right] + \frac{\left|q_n(x) - q(x)\right|}{q(x)} + \tag{2.2.19}$$

$$\left. + \frac{\left|q_n(\tau) - q(\tau)\right|}{q(\tau)} + \int\limits_{[\tau;x]} \left|q_n(u) - q(u)\right| d\left(\frac{1}{q(u)} \right) \right\} 4r^{-2}.$$

По аналогии с (2.2.7)-(2.2.9) имеем

$$\int\limits_{[\tau;x]} q^{-2}(u) dK_n(u) \le 4\left(\gamma_0(1-\gamma(x))\right)^{-2} M^0 \mu(n),$$

$$\int\limits_{[\tau;x]} q^{-2}(u) dE_n(u-) \le 4\left(\gamma_0(1-\gamma(x))\right)^{-2} \mu(n), \tag{2.2.20}$$

$$\int\limits_{[\tau;x]} q^{-2}(u) d\left[T_n(u;0) + T_n(u-;0)\right] \le 8\left(\gamma_0(1-\gamma(x))\right)^{-2} \mu(n).$$

А также

$$\sup_{\tau \le u \le x} \left|q_n(u) - q(u)\right| \le \left(\mu(n)(1+M^0) + \frac{1}{n} \right). \tag{2.2.21}$$

Тогда из (2.2.19)-(2.2.21) для $x \in [\tau;\lambda(n))$ имеем

$$\begin{aligned} r_n^{(2)}(x) \le 4r^{-2} \Bigg[& 8\left(\gamma_0(1-\gamma(x))\right)^{-2} (3+M^0)\mu(n) \left(\mu(n)(1+M^0) + \frac{1}{n} \right) + \\ & + 4\left(\gamma_0(1-\gamma(x))\right)^{-1} \left(\mu(n)(1+M^0) + \frac{1}{n} \right) \Bigg]. \end{aligned} \tag{2.2.22}$$

Для оценки $r_n^{(3)}(x)$ используем теорему о среднем:

$$r_n^{(3)}(x)=\left|\log\left(\frac{q_n(x)}{q_n(\tau)}\right)-\log\left(\frac{q(x)}{q(\tau)}\right)\right|\le\left|\log q_n(x)-\log q(x)\right|+\left|\log q_n(\tau)-\log q(\tau)\right|\le$$

$$\le\frac{\left|q_n(x)-q(x)\right|}{q_n^*(x)}+\frac{\left|q_n(\tau)-q(\tau)\right|}{q_n^*(\tau)},\tag{2.2.23}$$

где $\left(q_n^*(x)\vee q(x)\right)\le q_n^*(x)\le\left(q_n(x)\wedge q(x)\right)$. Согласно (2.2.5) и (2.2.21), для $x\in[\tau;\lambda(n))$ из (2.2.23) следует

$$r_n^{(3)}(x)\le 4\left(\gamma_0(1-\gamma(x))\right)^{-1}\mu(n)\,.\tag{2.2.24}$$

Теперь из (2.2.18), (2.2.10), (2.2.22), (2.2.24) окончательно получим при $x\in[\tau;\lambda(n))$ и каждом $i\in\Im$

$$\left|\pi_n(x;i)\right|\le 32r^{-2}(4+M^0)\mu(n)\left(\mu(n)(1+M^0)+\frac{1}{n}\right)\left(\gamma_0(1-\gamma(x))\right)^{-2}+$$

$$+\left[8r^{-2}\left(\mu(n)(5+3M^0)+\frac{2}{n}\right)+4\mu(n)\right]\left(\gamma_0(1-\gamma(x))\right)^{-1}.\tag{2.2.25}$$

Согласно выбора последовательности $\lambda(n)=\lambda(n;\alpha_3)$ из (2.2.25) с целью обеспечения неравенства (2.2.12) запишем оценку

$$\sup_{\tau\le x<\lambda(n)}\left|\pi_n(x;i)\right|<32\alpha_3^{-1}r^{-2}(4+M^0)(2+M^0)+\left(8r^{-2}(7+3M^0)+4\right)\alpha_3^{-1}<\frac{2}{3},\tag{2.2.26}$$

по условию выбора α_3. Тогда согласно (2.2.12) и (2.2.17)

$$\sup_{\tau\le x<\lambda(n)}\left|F_{3\tau n}(x;i)-F_{3\tau}(x;i)\right|\le\sup_{\tau\le x<\lambda(n)}2\left(1-F_{3\tau}(x;i)\right)\left|\pi_n(x;i)\right|.\tag{2.2.27}$$

Так как в условиях теоремы справедливо равенство (2.1.22), то аналогом (2.2.14) является согласно (2.2.25) и (2.2.27):

$$\sup_{\tau\le x<\lambda(n)}\left|F_{3\tau n}(x;i)-F_{3\tau}(x;i)\right|<2\left(1-F_{3\tau}(\lambda(n);i)\right)\left\{32\alpha_3^{-1}r^{-2}(4+M^0)\left(1+M^0+\frac{1}{n\mu(n)}\right)+\right.$$

$$\left.+\alpha_3^{-1}\left[\left(8r^{-2}(5+3M^0)+\frac{2}{n\mu(n)}\right)+4\right]\right\}\overset{п.н.}{=}O\left(\left(\left(1-F_{3\tau}(\lambda(n);i)\right)\right)\right).\tag{2.2.28}$$

Теперь из (2.2.26) и (2.2.28) следует (2.2.1) при $m = 3$ и $L_3 \le 8\alpha_3^{-1}\left[8r^{-2}(4+M^0)(2+M^0)+2r^{-2}(7+3M^0)+\alpha_3+1\right]$. Тем самым теорема 2.2.2 доказана полностью. ■

Доказательство леммы 2.2.1. Согласно четвертого неравенства (1.3.6), (2.1.45), формулы интегрирования по частям и ЗПЛ будем иметь следующую цепочку соотношений:

$$\left|K_n(x)-K(x)\right| \le 2\mu(n)\int\limits_{[x;\infty)}\frac{dT_{1n}(u;0)}{E^2(u)}+\mu(n)\left(1+\frac{1}{E(x)}\right)\le 2\mu(n)\left[\left|\int\limits_{[x;\infty)}\frac{d(T_{1n}(u;0)-T_1(u;0))}{E^2(u)}\right|+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{[x;\infty)}\frac{dT_{1n}(u;0)}{E^2(u)}\right]+\mu(n)\left(1+\frac{1}{E(x)}\right)\le 2\mu(n)\left[\mu(n)\left(1+\frac{1}{E^2(x)}\right)+\frac{2}{E(x)}\right]+\mu(n)\left(1+\frac{1}{E(x)}\right).$$

Следовательно, утверждение леммы верно с $M^0 \le 1+5\gamma_0^{-1}$. ■

Методами доказательства теоремы 2.2.2 параллельный результат можно установить и для оценок (1.4.11) в которых вероятность $q(u)$ оценивается $q_n^э(u)$. Поскольку в этом случае ф.р. $K(x)$ оценивается $K_n^э(x)$, то вместо леммы 2.2.1 используя ЗПЛ Кифера мы имеем следующий результат.

Теорема 2.2.3. Пусть распределения $K,\ E,\ \{H(\bullet;i),\ i\in\Im\}$ непрерывны и выполнены условия (2.1.5). Тогда для $m = 1,2,3$ и $i\in\Im$

$$\limsup_{n\to\infty}\sup_{x\ge\tau}\frac{\left|\widetilde{F}_{m\tau n}(x;i)-F_{m\tau}(x;i)\right|}{1-F_{m\tau}(\widetilde{\lambda}(n);i)}=\widetilde{L}_m\text{, п.н.} \qquad (2.2.29)$$

где $\widetilde{L}_m=\widetilde{L}_m(G,K,E,T(\bullet;0),\ldots,T(\bullet;k))$-положительные постоянные, последовательность $\widetilde{\lambda}(n)=\widetilde{\lambda}(n;\widetilde{\alpha}_m)\ge\tau$ определяется как

$$\widetilde{\lambda}(n)=\sup\left\{x\in R:\ 1-\gamma(x)\ge\frac{\widetilde{\alpha}_m}{\gamma_0}\left(\frac{\log\log n}{2n}\right)^{1/2}\right\},\quad n\ge 2.$$

Здесь числа $\widetilde{\alpha}_m$ при $m = 1,2$ удовлетворяют неравенству $3\widetilde{\alpha}_m^{-2}(12+5\widetilde{\alpha}_m)<1$, а также при $m = 3$, $6\widetilde{\alpha}_3^{-1}r^{-2}(140+r^2)<1$. ■

Отметим, что условия выбора чисел $\widetilde{\alpha}_m$ следуют из условий теоремы 2.2.2 заменой M^0 на 1 (согласно использования ЗПЛ для обычной э.ф.р.).

До сих пор мы исследовали и установили законы типа повторного логарифма для непараметрических оценок, используя соответствующие ЗПЛ для эмпирических оценок, входящих в структуру функционалов.

Однако, аналогичные результаты могут быть установлены и с использованием результатов аппроксимаций из § 2.1. Заметим, что последовательности случайных процессов $\left\{N_n^{(i)}(x),\ x\in[\tau,T),\ n\geq 1\right\}$ при каждом $i\in\Im$ являются линейными функционалами от гауссовских процессов:

$$\left\{B_{1n}^{(0)}(x),\ x\in\overline{R}\right\}\overset{D}{=}\left\{B_n(T_1(x;0)),\ x\in\overline{R}\right\},\ \left\{B_n^{(i)}(x),\ x\in\overline{R}\right\}\overset{D}{=}\left\{B_n(T(x;i)),\ x\in\overline{R}\right\},$$
$$\left\{B_n^{(k+1)}(x),\ x\in\overline{R}\right\}\overset{D}{=}\left\{B_n(E(x)),\ x\in\overline{R}\right\}, \tag{2.2.30}$$

где $\left\{B_n(y), y\in[0;1], n\geq 1\right\}$-последовательность броуновских мостов. Следовательно, $MN_n^{(i)}(x)=0\ \ i\in\Im$. Пусть

$$\sum{}^{(i)}(x;y)=MN_n^{(i)}(x)N_n^{(i)}(y),\ \ x,y\in[\tau;T),\ i\in\Im.$$

Теорема 2.2.4. Пусть в условиях теоремы 2.1.1 для каждого $i\in\Im$: $\sup\limits_{\tau\leq x<T}\sum{}^{(i)}(x;x)<\infty$. Тогда при каждом $m=1,2,3$ и $i\in\Im$:

$$\limsup_{n\to\infty}\left(\frac{n}{\log\log n}\right)^{1/2}\sup_{\tau\leq x<T}\left|F_{m\tau n}(x;i)-F_{m\tau}(x;i)\right|=e,\ \text{ п.н.}$$

где $e=e(K,E)$ универсальная (по i) положительная постоянная.

Доказательство теоремы 2.2.4. Согласно аппроксимации (1.9.63), гауссовские процессы, входящие в структуру $N_n^{(i)}(x)$ могут быть заменены соответствующими двухпараметрическими процессами киферовского типа следующим образом. Ввиду (1.9.1):

$$\left\{B_n(y),\ \ 0\leq y\leq 1,\ \ n\geq 1\right\}\overset{D}{=}\left\{n^{-1/2}K(y;n),\ \ 0\leq y\leq 1,\ \ n\geq 1\right\}. \tag{2.2.31}$$

Тогда, следуя (2.2.30) и (2.2.31) имеем $\left\{N_n^{(i)}(x),\ \tau\leq x<T,\ n\geq 1\right\}\overset{D}{=}\left\{\Gamma^{(i)}(x;n),\ \tau\leq x<T,\ n\geq 1\right\}$, где $\Gamma^{(i)}(x;n)$ -гауссовские процессы. Согласно (1.9.63) и (2.1.43)

$$\sup_{\tau\leq x<T}\left|V_{mn}^{(i)}-\Gamma_m^{(i)}(x;n)\right|\overset{п.н.}{=}O(n^{-1/2}\log^2 n), \tag{2.2.32}$$

где $\Gamma_m^{(i)}(x;n)=-(1-F_{m\tau}(x;i))\cdot\Gamma^{(i)}(x;n),\ \ M\Gamma_m^{(i)}(x;n)=0,$

$$M\Gamma_m^{(i)}(x;t)\Gamma_m^{(i)}(y;s)=t^{-1/2}\cdot s^{-1/2}\cdot(t\wedge s)(1-F_{m\tau}(x;i))(1-F_{m\tau}(y;i))\sum{}_{(x;y)}^{(i)}$$

и $x, y, \in [\tau; T)$, $t, s \geq 0$, $m = 1,2,3$; $i \in \Im$. Теперь разделив двухпараметрический гауссовский процесс $\Gamma_m^{(i)}(x;n)$ на $(2\log\log n)^{1/2}$, применив к каждому процессу Кифера $\frac{\widetilde{K}(\bullet;n)}{(2n\log\log n)^{1/2}}$ функциональный ЗПЛ Финкельштейна (см.§1.9)

$$\limsup_{n\to\infty} \sup_{0\leq y\leq 1} \frac{\left|\widetilde{K}(y;n)\right|}{(2n\log\log n)^{1/2}} = \frac{1}{2}, \text{ п.н.}$$

учитывая (2.2.32) при каждом $m = 1,2,3$ и $i \in \Im$ будем иметь

$$\limsup_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2\log\log n}\right)^{1/2} \sup_{\tau\leq x<T}\left|F_{m\tau n}(x;i) - F_{m\tau}(x;i)\right| = \limsup_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2\log\log n}\right)^{1/2} \sup_{\tau\leq x<T}\left|\Gamma_m^{(i)}(x;n)\right| = e,$$

где постоянная e определяется неравенством $e \leq 2r^{-1} + r^{-2}(4\gamma_0^{-2} + \gamma_0^{-1})$, правая часть которого оценивает процесс $\Gamma_m^{(i)}(x;n)$. Теорема 2.2.4 доказана. ■

Вполне аналогично, учитывая теорему 2.1.13 имеем следующий результат и для оценок (1.4.11). Пусть

$$\sum\nolimits_1^{(i)}(x;y) = M\widetilde{N}_n^{(i)}(x)\widetilde{N}_n^{(i)}(y), \quad x, y \in [\tau;T), \ i \in \Im.$$

Теорема 2.2.5. Пусть в условиях теоремы 2.1.13 для каждого $i \in \Im$ $\sup\limits_{\tau\leq x<T} \sum\nolimits_1^{(i)}(x;x) < \infty$. Тогда при каждом $m = 1,2,3$ и $i \in \Im$

$$\limsup_{n\to\infty}\left(\frac{n}{\log\log n}\right)^{1/2} \sup_{\tau\leq x<T}\left|\widetilde{F}_{m\tau n}(x;i) - F_{m\tau}(x;i)\right| = \widetilde{e}, \text{ п.н.}$$

где $\widetilde{e} = \widetilde{e}(K;E)$ - универсальная положительная постоянная. ■

Теперь рассмотрим случай неоднородного случайного цензурирования с двух сторон. Пусть векторы $\{(L_k, Y_k),\ k \geq 1\}$ разнораспределены, имеют независимые компоненты и $K^{(k)}(x) = P(L_k \leq x)$, $G^{(k)}(x) = P(Y_k \leq x)$, $E^{(k)}(x) = P(\zeta_k \leq x)$. Введём усреднённые распределения

$$K(x;n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} K^{(i)}(x), \qquad G(x;n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} G^{(k)}(x),$$

$$\gamma(x;n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} P(Z_k \wedge Y_k \leq x) = 1 - (1 - G(x;n))(1 - H(x)),$$

$$E(x;n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E^{(k)}(x) = K(x;n)\cdot\gamma(x;n),$$

$$T(x;n;i) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} P(\zeta_k \le x, \chi_k^{(i)} = 1) = \int\limits_{(-\infty;x]} K(u;n)(1 - G(u-;n))dH(u;i),\ i \in \Im,$$

$$T_1(u;n;0) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} P(Z_k \wedge Y_k < L_k, L_k \le x) = \int\limits_{(-\infty;x]} (1 - (1 - G(u-;n))(1 - H(u)))\cdot dK(u;n)$$

и соответствующие к.ф.и. $\Lambda_\tau(x;n;i) = \int\limits_{[\tau;x]} \frac{dT(u;n;i)}{K(u;n) - E(u-;n) - \Delta T_1(u;n;0)}$, $i \in \Im$. В нижеприводимой теореме объединим аналоги результатов (2.2.1) и (2.2.29).

Теорема 2.2.6. Пусть распределения $K^{(k)}, E^{(k)}$ и $\{H(\bullet;i),\ i \in \Im\}$ непрерывны и $\liminf\limits_{n\to\infty} \inf\limits_{\tau \le x < T} (K(x;n) - E(x;n)) > 0$. Тогда при каждом $m = 1,2,3$ и $i \in \Im$:

$$\limsup_{n\to\infty} \sup_{\tau \le x < T} \left(\frac{n}{\log\log n}\right)^{1/2} \left|F_{m\tau n}(x;i) - F_{m\tau}(x;i)\right| = L_m^*, \quad п.н.$$

$$\limsup_{n\to\infty} \sup_{\tau \le x < T} \left(\frac{n}{\log\log n}\right)^{1/2} \left|\widetilde{F}_{m\tau n}(x;i) - F_{m\tau}(x;i)\right| = \widetilde{L}_m^*, \quad п.н. \qquad (2.2.33)$$

где L_m^* и $\widetilde{L}_m^*$-положительные постоянные. ■

Доказательство теоремы 2.2.6 проводится в основном по методу доказательство теоремы 2.2.2. При этом вместо ЗПЛ (1.9.18) необходимо использовать следующие ЗПЛ, вытекающие из теоремы B^* (§ 1.9):

$$\limsup_{n\to\infty} \sup_{-\infty < x < \infty} \left(\frac{2n}{\log\log n}\right)^{1/2} \left|E_n(x) - E(x;n)\right| \le 1,\ п.н.$$

$$\limsup_{n\to\infty} \sup_{-\infty < x < \infty} \left(\frac{2n}{\log\log n}\right)^{1/2} \left|K_n^э(x) - K(x;n)\right| \le 1,\ п.н.$$

$$\limsup_{n\to\infty} \sup_{-\infty < x < \infty} \left(\frac{2n}{\log\log n}\right)^{1/2} \left|T_n(x;i) - T(x;n;i)\right| \le 1,\ п.н.\ , i \in \Im,$$

$$\limsup_{n\to\infty} \sup_{-\infty < x < \infty} \left(\frac{2n}{\log\log n}\right)^{1/2} \left|T_{1n}(x;0) - T_1(x;n;0)\right| \le 1,\ п.н.$$

Детали доказательства опускаются. ■

§ 2.3. Обобщенные гауссовские аппроксимации непараметрических оценок в модели случайного цензурирования справа

Рассмотрим модель $(Z \wedge Y; B)$, включающую в себя и МКР и случайное цензурирование справа (см. § 1.3, § 1.4). В данной модели непараметрическими оценками функционалов (1.3.27) являются статистики (1.4.9). Хотя эти оценки являются частными случаями оценок (1.4.13), и следовательно для них могут быть получены соответствующие результаты из §§ 2.1-2.2 как следствие, там не для них справедливы более сильные результаты, доказываемые с учётом особенностей модели $(Z \wedge Y; B)$. Как известно из §1.3, модель $(Z \wedge Y; B)$ является обобщенным аналогом модели $(Z; A)$ (т.е. МКР), в которой довольно подробно исследованы экспоненциальные и множительные оценки. Эти результаты без особых трудностей могут быть переформулированы для оценок $\{\overline{F}_{1n}(\bullet; i)\ и\ \overline{F}_{2n}(\bullet; i),\ i \in \Im\}$, которые имеют аналогичные структуры. В настоящем параграфе нами довольно подробно будут исследованы оценки $\{\overline{F}_{3n}(\bullet; i); \overline{F}^{+}_{3n}(\bullet; i), i \in \Im\}$-степенной структуры (см. (1.4.9)). Эти оценки впервые были предложены и исследованы автором настоящей работы в статьях [15,16,18,26]. Теорема 1.4.1 показывает “грубую” асимптотическую эквивалентность трёх классов оценок в модели $(Z; A)$. Аналогичный результат верен и для оценок (1.4.9), однако учитывая преимущества и особенности степенных оценок нами будут установлены более точные, собственные результаты аппроксимации и строгой состоятельности.

По аналогии с (1.4.7) оценки $\overline{F}_{3n}$ и $\overline{F}^{+}_{3n}$ асимптотически эквивалентны. Однако для практических целей для оценивания непрерывных ф.р. более подходящим является оценка $\overline{F}^{+}_{3n}$, вычисляемая по формуле

$$\overline{F}^{+}_{3n}(x; i) = 1 - [1 - N_n(x)]^{\overline{R}_n(x;i)} = \begin{cases} 0, \quad x < \xi_{(1)}, \\ 1 - \left(\dfrac{n-m}{n}\right)^{\overline{R}_n(x;i)}, \xi_{(m)} \le x < \xi_{(m+1)},\ 1 \le m \le n-1, \\ 1, \quad x \ge \xi_{(n)}, \end{cases} \qquad (2.3.1)$$

где $\xi_{(1)} \le \xi_{(2)} \le ... \le \xi_{(n)}$-вариационный ряд, построенный по выборке $\{\xi_1, ..., \xi_n\}$. Следует отметить, что для $(x; i) \in (\xi_{(1)}; \xi_{(n)}) \times \Im,\ 0 < \overline{R}_n(x; i) < 1$, если с вероятностью 1:

$$0 < \sum_{j=1}^{n} \Delta_j^{(i)} < n, i \in \Im. \qquad (2.3.2)$$

В [149] Ш. Чёрге приводить универсальные гауссовские аппроксимации для кумулятивных и множительных процессов при случайном цензурировании справа. Особенности этих результатов заключаются в том, что аппроксимации осуществляются на некотором интервале, правой границей которого является порядковая статистика и поэтому соответствующая скорость аппроксимации зависит от порядка этой статистики. Мы здесь переформулируем результаты Ш.Чёрге для кумулятивных, экспоненциаль-ных и множительных процессов специально в $(Z \wedge Y; B)$- модели и отдельно докажем их аналоги для степенных процессов. Эти результаты являются сильными, чем их аналоги, получаемые как следствия из аппроксимацион-ных теорем § 2.1, доказанных на некотором конечном интервале.

В модели $(Z \wedge Y; B)$ рассмотрим оценки (1.4.9). Для этих оценок ввиду отсутствия случайного цензурирования слева, вместо усеченных функционалов $\{F_\tau(\bullet;i),\ i \in \Im\}$ рассматривая сами функционалы $\{F(\bullet;i),\ i \in \Im\}$, можем сформулировать гауссовскую аппроксимацию как следствие из теорем 2.1.1, 2.1.2 на кубе $[\tau;T)^k$. Однако, приводимые далее результаты показывают, что для экспоненциальных и множительных процессов $\tau = -\infty$, для степенного процесса $\tau > \tau_N = \sup\{x \in \overline{R} :\ N(x) = 0\}$ и для всех трех типов процессов вместо числа T можно будет рассматривать некоторую порядковую статистику из числа $\{\xi_i,\ i = \overline{1,n}\}$. Естественно, хотелось бы, чтобы это было $\xi_{(n)}$. Однако, как следует из [193] для доказательства подобного результата для множительного процесса от схемы цензурирования, т.е. от ф.р. G приходится требовать условия, практически не выполнимые. Поэтому, естественным является подход Штута [282] (см. также [193]), заключающееся в том, что «пусть данные сами говорят о себе». Другими словами, условия аппроксимации должны быть приемлемыми для возможно широкого класса распределений, участвующих в схеме цензурирования. Штут [282] установил интересные результаты представления кумулятивного и множительного процессов через сумму независимых и одинаково распределенных случайных процессов на интервале $\left(-\infty; \xi_{(n-k_n)}\right]$ с оценкой остаточного члена. Здесь последовательность целых чисел $\{k_n,\ n \ge 1\}$ такова, что $1 \le k_n < n$ и для утверждений с вероятностью 1 выполнено условие:

(S1) $k_n \ge \log n$ для всех достаточно больших n и последовательность $\left\{\frac{k_n}{n},\ n \ge 1\right\}$ асимптотически невозрастает (т.е. для невозрастающей последовательности чисел $\{a_n,\ n \ge 1\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{k_n}{n a_n} = 1$. Например, $k_n \equiv [\alpha n],\ k_n \equiv \left[n^\alpha\right]$ для некоторого числа $\alpha \in (0,1)$). ■

Теперь мы приведём результаты аппроксимации для $\overline{\Lambda}_n(\bullet;i)$ и $\overline{F}_{mn}(\bullet;i),\ \ m=1,2,3;\ i\in\Im$. Сперва определим функции $D(x;i)=\dfrac{d(x;i)}{1+d(x;i)}$, где

$$d(x;i)=\int\limits_{(-\infty;x]}\frac{dM(u;i)}{\left[1-N(u-)\right]^2}=\int\limits_{(-\infty;x]}\frac{dH(u;i)}{\left[1-N(u-)\right]^2\left[1-G(u-)\right]},\ i\in\Im.$$

Тогда естественной оценкой $d(x;i)$ (см. § 1.4) является

$$d_n(x;i)=\int\limits_{(-\infty;x]}\frac{dM_n(u;i)}{1-N_n(u-)}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\Delta_{(j)}^{(i)}I(\xi_{(j)}\le x)}{\left[1-N_n(\xi_{(j)}-)\right]^2},\ i\in\Im,$$

где индикатор $\Delta_{(j)}^{(i)}$ соответствует $\xi_{(j)}$ (т.е. $\Delta_{(j)}^{(i)}=\Delta_k^{(i)}$, если $\xi_{(j)}=\xi_k$). Из теоремы 1 в [149] следует, что для всех $i\in\Im$:

$$\sup_{x\le\xi_{(n-k_n)}}\left|d_n(x;i)-d(x;i)\right|=\begin{cases}O_p\left(k_n^{-3/2}n\right),\\ O\left(k_n^{-3/2}n(\log n)^{1/2}\right),\ \ \textit{п.н.}\end{cases}$$

Далее пусть $\{W(s);\ 0\le s<\infty\}$-стандартный винеровский процесс, $\{B(y);\ 0\le y\le 1\}$-броуновский мост, $\{W(s;u);\ 0\le s,u<\infty\}$-винеровский лист, $\{K(y;u);\ 0\le y\le 1;\ 0\le u<\infty\}$-киферовский лист и $\{K_n(y)=n^{-1/2}K(y;n);\ 0\le y\le 1;\ n=1,2,..\}$. Все эти процессы гауссовские, с нулевыми средними и $MW(s)W(t)=(s\wedge t)$; $MW(s;u)W(t;v)=(s\wedge t)(u\wedge v)$, $MB(y)B(z)=(y\wedge z)-yz$; $MK(y;u)K(z;v)=[(y\wedge z)-yz](u\wedge v)$, где $0\le y,z\le 1,\ 0\le s,t,u,v<\infty$.

Следующая теорема представляет собой переформулированный в модели $(Z\wedge Y;B)$ вариант теоремы 1 и предложения 5 из [149]. В ней собраны все результаты аппроксимации оценок к.ф.и. Пусть $\{C_n,\ n\ge 1\}$-неубывающая последовательность положительных чисел, таких, что $\sum_{k=1}^{\infty}\left(kC_{2^k}\right)^{-1}<\infty$. (Например, $C_n=(\log\log n)^{1+\varepsilon}$, $C_n=(\log\log n)(\log\log\log n)^{1+\varepsilon}$, $C_n=(\log\log n)(\log\log\log n)(\log\log\log\log n)^{1+\varepsilon}$ и т.д., где число $\varepsilon>0$ достаточно малое).

Теорема S. Для всех $i\in\Im$:

$$\sup_{x\le\xi_{(n-k_n)}}\left|\overline{\Lambda}_n(x;i)-\Lambda(x;i)\right|=\begin{cases}O_p\left(k_n^{-1/2}\right),\\ O\left(\left(k_{2n}^{-1}n\log n\right)^{1/2}\right),\ \ \textit{п.н.}\end{cases}\tag{2.3.3}$$

$$\sup_{x\le\xi_{(n-k_n)}}\left|n^{\frac{1}{2}}\left(\overline{\Lambda}_n(x;i)-\Lambda(x;i)\right)-n^{-\frac{1}{2}}\sum_{j=1}^{n}e_j(x;i)\right|=\begin{cases}O_p\left(k_n^{-1}n^{1/2}\right),\\ o\left(k_{2n}^{-1}\left(nC_n\log n\right)^{1/2}\right), & п.н.\end{cases}\qquad(2.3.4)$$

где при каждом $i\in\Im$, $\{e_j(x;i),\ j\ge 1\}$-последовательность независимых и одинаково распределённых случайных процессов, таких, что

$$e_j(x;i)=\frac{I\left(\xi_j\le x,\Delta_j^{(i)}=1\right)-M(x;i)}{1-N(x-)}-\int\limits_{(-\infty;x]}\frac{\left(I\left(\xi_j\le u,\Delta_j^{(i)}=1\right)-M(u;i)\right)dN(u-)}{\left[1-N(u-)\right]^2}+$$

$$+\int\limits_{(-\infty;x]}\frac{\left(I\left(\xi_j<u\right)-N(u-)\right)dM(u;i)}{\left[1-N(u-)\right]^2},$$

$Me_j(x;i)=0$ и $e_j(x;i)\in\square^2_{loc}(\square^{(i)}_x)$, $\square^{(i)}_x=\mathcal{N}_0\cup\sigma\left(I(\xi_j\le u),I(\xi_j\le u)\Delta_j^{(i)},I(\xi_j\le u)\xi_j,\ u\le x,\ j\ge 1\right)$, $x<T_N=\sup\{x:\ N(x)<1\}$. Более того, на достаточно богатом вероятностном пространстве $(\Omega,\mathcal{A},P)$ существуют последовательности винеровских процессов $\{W_n^{(i)}(\bullet),\ i\in\Im,\ n\ge 1\}$ стандартные винеровские листы $\{W^{(i)}(\bullet;\bullet),\ i\in\Im\}$, последовательности броуновских мостов $\{B_n^{(i)}(\bullet),\ i\in\Im\}$, а также киферовские листы $\{K^{(i)}(\bullet;\bullet),\ i\in\Im\}$, такие, что для векторов

$$\overline{\alpha}_n(\nu)=n^{\frac{1}{2}}\left(\left(\overline{\Lambda}_n(\nu_1;1)-\Lambda(\nu_1;1)\right),\ldots,\left(\overline{\Lambda}_n(\nu_k;k)-\Lambda(\nu_k;k)\right)\right),$$

$$\overline{\gamma}_n(\nu)=n^{\frac{1}{2}}\left(\left(\overline{\Lambda}_n(\nu_1;1)-\Lambda(\nu_1;1)\right)\left(1+d_n(\nu_1;1)\right)^{-1},\ldots,\left(\overline{\Lambda}_n(\nu_k;k)-\Lambda(\nu_k;k)\right)\left(1+d_n(\nu_k;k)\right)^{-1}\right),$$

$\nu=(\nu_1,\ldots,\nu_k)\in\overline{R}^{(k)}$ при непрерывности субраспределений $\{H(\bullet;i),\ i\in\Im\}$ справедливы аппроксимации:

$$\sup_{\nu\in\left(-\infty;\xi_{(n-k_n)}\right]^k}\left\|\overline{\alpha}_n(\nu)-\left(W_n^{(1)}(d(\nu_1;1)),\ldots,W_n^{(k)}(d(\nu_k;k))\right)\right\|^{(k)}=\begin{cases}O_p\left(k_n^{-1}n^{1/2}\log n\right),\\ O\left(k_{2n}^{-1}n^{1/2}\log n\right), & п.н.\end{cases}\qquad(2.3.5)$$

$$\sup_{\nu\in\left(-\infty;\xi_{(n-k_n)}\right]^k}\left\|\overline{\alpha}_n(\nu)-n^{-1/2}\left(W_n^{(1)}(d(\nu_1;1);n),\ldots,W_n^{(k)}(d(\nu_k;k);n)\right)\right\|^{(k)}\overset{п.н.}{=}O\left(k_{2n}^{-1}n^{1/2}\log^2 n\right),\quad(2.3.6)$$

$$\sup_{\nu\in\left(-\infty;\xi_{(n-k_n)}\right]^k}\left\|\overline{\gamma}_n(\nu)-\left(B_n^{(1)}(D(\nu^{(1)};1)),\ldots,B_n^{(k)}(D(\nu^{(k)};k))\right)\right\|^{(k)}=O_p\left(k_n^{-3/2}n+k_n^{-1}n^{1/2}\log n\right),\quad(2.3.7)$$

$$\begin{aligned}&\sup_{\nu\in\left(-\infty;\xi_{(n-k_n)}\right]^k}\left\|\overline{\gamma}_n(\nu)-\left(K_n^{(1)}(D(\nu_1;1)),\ldots,K_n^{(k)}(D(\nu_k;k))\right)\right\|^{(k)}=\\&=O_p\left(k_{2n}^{-3/2}n(\log n)^{1/2}(\log\log n)^{1/2}+k_{2n}^{-1}n^{1/2}\log^2 n\right)\end{aligned}.\qquad(2.3.8)$$

■

Ш.Чёрге [149] в модели случайного цензурирования справа доказал также аналоги аппроксимаций (2.3.3)-(2.3.8) для множительной (PL) оценки Каплана-Мейера. Эти результаты без особых трудностей могут быть сформулированы и для оценок $\{\overline{F}_{2n}(\bullet;i),\ i\in\Im\}$. Приведём эти результаты, включая и их аналоги для оценок $\{F_{1n}(\bullet;i),\ i\in\Im\}$ в теореме 2.3.1, а затем для оценок $\{F_{3n}(\bullet;i),\ i\in\Im\}$ отдельно в теореме 2.3.2. В этой связи определим вектор-процессы при $m=1,2,3$:

$$\overline{\beta}_{mn}(\nu)=n^{\frac{1}{2}}\Big(\big(\overline{F}_{mn}(\nu_1;1)-F_m(\nu_1;1)\big)\big(1-F_m(\nu_1;1)\big)^{-1},\dots,\big(\overline{F}_{mn}(\nu_k;k)-F_m(\nu_k;k)\big)\big(1-F_m(\nu_k;k)\big)^{-1}\Big),$$

$$\overline{\beta}_{mn}(\nu)=n^{\frac{1}{2}}\Big(\big(\overline{F}_{mn}(\nu_1;1)-F_m(\nu_1;1)\big)\big[\big(1-F_m(\nu_1;1)\big)\big(1+d_n(\nu_1;1)\big)\big]^{-1},\dots$$

$$\dots,\big(\overline{F}_{mn}(\nu_k;k)-F_m(\nu_k;k)\big)\big[\big(1-F_m(\nu_k;k)\big)\big(1+d_n(\nu_k;k)\big)\big]^{-1}\Big).$$

Теорема 2.3.1. Пусть субраспределения $\{H(\bullet;i),\ i\in\Im\}$ непрерывны. Тогда при $m=1,2$ и всех $i\in\Im$:

$$\sup_{x\le\xi_{(n-k_n)}}\frac{\left|\overline{F}_{mn}(x;i)-F_m(x;i)\right|}{1-F_m(x;i)}=\begin{cases}O_p\left(k_n^{-1/2}\right),\\ O\left(\left(k_{2n}^{-1}\log n\right)^{1/2}\right), & п.н.\end{cases}\tag{2.3.9}$$

Более того, на вероятностном пространстве теоремы S при $m=1,2$:

$$\sup_{\nu\in(-\infty;\xi_{(n-k_n)}]^k}\left\|\overline{\beta}_{mn}(\nu)-\left(W_n^{(1)}(d(\nu_1;1)),\dots,W_n^{(k)}(d(\nu_k;k))\right)\right\|^{(k)}=\begin{cases}O_p\left(k_n^{-1}n^{1/2}\log n\right),\\ O\left(k_{2n}^{-1}n^{1/2}\log n\right), & п.н.\end{cases}\tag{2.3.10}$$

$$\sup_{\nu\in(-\infty;\xi_{(n-k_n)}]^k}\left\|\overline{\beta}_{mn}(\nu)-n^{-1/2}\left(W^{(1)}(d(\nu_1;1);n),\dots,W^{(k)}(d(\nu_k;k);n)\right)\right\|^{(k)}\overset{п.н.}{=}O\left(k_{2n}^{-1}n^{1/2}\log^2 n\right),\tag{2.3.11}$$

$$\sup_{\nu\in(-\infty;\xi_{(n-k_n)}]^k}\left\|\overline{\sigma}_{mn}(\nu)-\left(B_n^{(1)}(D(\nu_1;1)),\dots,B_n^{(k)}(D(\nu_k;k))\right)\right\|^{(k)}=O_p\left(k_n^{-3/2}n+k_n^{-1}n^{1/2}\log n\right),\tag{2.3.12}$$

$$\begin{aligned}&\sup_{\nu\in(-\infty;\xi_{(n-k_n)}]^k}\left\|\overline{\sigma}_{mn}(\nu)-\left(K_n^{(1)}(D(\nu_1;1)),\dots,K_n^{(k)}(D(\nu_k;k))\right)\right\|^{(k)}\overset{п.н.}{=}\\ &=O\left(k_{2n}^{-3/2}n(\log n)^{1/2}(\log\log n)^{1/2}+k_{2n}^{-1}n^{1/2}\log^2 n\right).\end{aligned}\tag{2.3.13}$$

Доказательство теоремы 2.3.1. Пусть $m=1$. Для экспоненциальных оценок из (1.4.9), согласно разложению Тейлора запишем неравенство при всех $(x;i)\in(-\infty;\xi_{(n)})\times\Im$:

$$\left|\frac{\overline{F}_{1n}(x;i)-F_1(x;i)}{1-F_1(x;i)}-\psi(x;i)\right|\le\left|\left[\Lambda_n(x;i)-\Lambda(x;i)\right]-\psi(x;i)\right|+r_n(x;i),\tag{2.3.14}$$

где $r_n(x;i)=\frac{1}{2}\left[\overline{\Lambda}_n(x;i)-\Lambda(x;i)\right]^2\exp\left(\left|\overline{\Lambda}_n(x;i)-\Lambda(x;i)\right|\right)$, $\psi(x;i)$-измеримая функция, специальным образом выбираемая в соотношениях (2.3.9)-(2.3.13). Ввиду (2.3.3) для всех $i\in\Im$,

$$\sup_{x\le\xi_{(n-k_n)}} r_n(x;i)=\begin{cases}O_p\left(k_n^{-1}\right),\\ O\left(\left(k_{2n}^{-1}\log n\right)\right), & п.н.\end{cases} \tag{2.3.15}$$

Учитывая (2.3.15), в (2.3.14) полагая $\psi(x;i)\equiv 0$, из (2.3.3) получаем (2.3.9). Пусть $\psi(x;i)=W_n^{(i)}(d(x;i))n^{-1/2}$, тогда (2.3.10) следует из (2.3.5), (2.3.14) и (2.3.15). Аналогично, при $\psi(x;i)=W^{(i)}(d(x;i);n)n^{-1}$ из (2.3.6) следует (2.3.11). Следуя доказательству теоремы 2 в [149] легко установить, что (2.3.7) влечёт (2.3.12) и (2.3.8) влечёт (2.3.13). Для случая $m=2$ доказательство повторяет доказательство теоремы 2 в [149]. Теорема 2.3.1 доказана. ■

Пусть $\tau>\tau_N=\sup\{x\in R:\ N(x)=0\}$.

Теорема 2.3.2. Если в условиях теоремы 2.3.1 вдобавок непрерывным является и ф.р. G, то для всех $i\in\Im$

$$\sup_{\tau\le x\le\xi_{(n-k_n)}}\frac{\left|\overline{F}_{3n}(x;i)-F_3(x;i)\right|}{1-F_3(x;i)}=O_p\left(k_n^{-1/2}\right), \tag{2.3.16}$$

$$\sup_{\nu\in[\tau;\xi_{(n-k_n)}]^k}\left\|\overline{\beta}_{3n}(\nu)-\left(W_n^{(1)}(d(\nu_1;1)),\dots,W_n^{(k)}(d(\nu_k;k))\right)\right\|^{(k)}=O_p\left(k_n^{-1}n^{1/2}\log n\right), \tag{2.3.17}$$

$$\sup_{\nu\in[\tau;\xi_{(n-k_n)}]^k}\left\|\overline{\beta}_{3n}(\nu)-n^{-1/2}\left(W^{(1)}(d(\nu_1;1);n),\dots,W^{(k)}(d(\nu_k;k);n)\right)\right\|^{(k)}=O\left(k_{2n}^{-1}n^{1/2}\log^2 n\right), \tag{2.3.18}$$

$$\sup_{\nu\in[\tau;\xi_{(n-k_n)}]^k}\left\|\overline{\sigma}_{3n}(\nu)-\left(B_n^{(1)}(D(\nu_1;1)),\dots,B_n^{(k)}(D(\nu_k;k))\right)\right\|^{(k)}=O_p\left(k_n^{-1}n^{1/2}\log n+k_n^{-3/2}n\right), \tag{2.3.19}$$

$$\begin{aligned}&\sup_{\nu\in[\tau;\xi_{(n-k_n)}]^k}\left\|\overline{\sigma}_{3n}(\nu)-\left(K_n^{(1)}(D(\nu_1;1)),\dots,K_n^{(k)}(D(\nu_k;k))\right)\right\|^{(k)}=\\ &=O_p\left(k_{2n}^{-1}n^{1/2}\log^2 n+k_{2n}^{-3/2}n(\log n)^{1/2}(\log\log n)^{1/2}\right)\end{aligned}. \tag{2.3.13}$$

Доказательство теоремы 2.3.2. Аналогом соотношения (2.3.14) для степенных оценок из (1.4.9) при всех $(x;i)\in[\tau;\xi_{(n)})\times\Im$ является

$$\left|\frac{\overline{F}_{3n}(x;i)-F_3(x;i)}{1-F_3(x;i)}-\psi(x;i)\right|\le\left|\left[\overline{\Lambda}_n(x;i)-\Lambda(x;i)\right]-\psi(x;i)\right|+\sum_{e=1}^{5}\left|L_{en}(x;i)\right|, \tag{2.3.21}$$

где

$$L_{1n}(x;i)=R(x;i)\left[-\left(\overline{\Lambda}_n(x)-\Lambda_H(x)\right)+\left(-\log(1-N_n(x-)))+\log(1-N(x))\right];$$

$$L_{2n}(x;i)=-\frac{1}{\overline{\Lambda}_n(x)}\left(\overline{\Lambda}_n(x;i)-\Lambda(x;i)\right)\left(\overline{\Lambda}_n(x)-\Lambda_H(x)\right);$$

$$L_{3n}(x;i)=\frac{R(x;i)}{\overline{\Lambda}_n(x)}\left(\Lambda_n(x)-\Lambda_H(x)\right)^2;$$

$$L_{4n}(x;i)=\left(\overline{R}_n(x;i)-R(x;i)\right)\left(-\log(1-N_n(x-))+\log(1-N(x))\right);$$

$$L_{5n}(x;i)=\left(1-F_3(x;i)\right)^{-1}\left[\overline{\Lambda}_n(x;i)-\Lambda(x;i)+\sum_{e=1}^{4}L_{en}(x;i)\right]^2\frac{1}{2}\exp\left(-\theta_n^*(x;i)\right);$$

и

$$\theta_n^*(x;i)\in\left[\left(-\log\left(1-\overline{F}_3(x;i)\right)\right)\wedge\left(-\log\left(1-F_3(x;i)\right)\right);\left(-\log\left(1-\overline{F}_3(x;i)\right)\right)\vee\left(-\log\left(1-F_3(x;i)\right)\right)\right].$$

Оценим по отдельности случайные процессы $L_{en}(x;i)$. Очевидно, что аналоги (2.3.3) и (2.3.4) для $\overline{\Lambda}_n(x)$ также имеют место:

$$\sup_{x\le\xi_{(n-k_n)}}\left|\overline{\Lambda}_n(x)-\Lambda_H(x)\right|=\begin{cases}O_p\left(k_n^{-1/2}\right),\\ O\left(\left(k_{2n}^{-1}\log n\right)^{1/2}\right), & п.н.\end{cases}\tag{2.3.22}$$

$$\sup_{x\le\xi_{(n-k_n)}}\left|n^{\frac{1}{2}}\left(\overline{\Lambda}_n(x)-\Lambda_H(x)\right)-n^{-\frac{1}{2}}\sum_{j=1}^{n}e_j^*(x)\right|=\begin{cases}O_p\left(k_n^{-1}n^{1/2}\right),\\ o\left(k_{2n}^{-1}\left(nc_n\log n\right)^{1/2}\right), & п.н.\end{cases}\tag{2.3.23}$$

где с учётом непрерывности $N(x)$

$$e_j^*(x)=\frac{I(\xi_j\le x)-N(x)}{1-N(x-)}-\int_{(-\infty;x]}\frac{\left(I(\xi_j\le u)-N(u)\right)dN(u-)}{\left(1-N(u-)\right)^2}+\int_{(-\infty;x]}\frac{\left(I(\xi_j<u)-N(u-)\right)dN(u)}{\left(1-N(u-)\right)^2}=$$

$$=\frac{I(\xi_j\le x)-N(x)}{1-N(x)}-\int_{(-\infty;x]}I(\xi_j=u)d\left(\frac{1}{1-N(u)}\right),$$

следовательно $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}e_j^*(x)=\frac{N_n(x)-N(x)}{1-N(x)}-\int_{(-\infty;x]}\Delta N_n(u)d\left(\frac{1}{1-N(u)}\right)$. Используя разложение Тейлора для второй скобки в $L_{1n}(x;i)$ будем иметь для всех $(x;i)\in(-\infty;\xi_{(n)})\times\Im$: $\left|L_{1n}(x;i)\right|\le A_n(x)+B_n(x)$, где $A_n(x)=\left|\left(\overline{\Lambda}_n(x)-\Lambda_H(x)\right)-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}e_j^*(x)\right|$ и ввиду (2.3.23)

$$\sup_{x\le\xi_{(n-k_n)}} A_n(x) = \begin{cases} O_p\left(k_n^{-1}\right), \\ O\left(k_{2n}^{-1}\left(c_n \log n\right)^{1/2}\right), \quad п.н. \end{cases} \qquad (2.3.24)$$

а также

$$B_n(x) = \frac{\Delta N_n(x)}{1-N(x)} + \int\limits_{(-\infty;x]} \Delta N_n(u) d\left(\frac{1}{1-N(u)}\right) + \frac{\left(\Delta N_n(x-)-N(x)\right)^2}{2\theta_n^2(x)} = B_{1n}(x)+B_{2n}(x)+B_{3n}(x)$$

и $\theta_n(x) \in \left[\left(\left(1-N_n(x-)\right)\wedge\left(1-N(x)\right)\right);\left(\left(1-N_n(x-)\right)\vee\left(1-N(x)\right)\right)\right]$. Пусть $N^{-1}(y)=\inf\{x\in R:\ N(x)\ge y\},\quad 0<y<1$, обратная функция для $N(x)$. Из [149, стр. 2760] следует, что $P\left(\xi_{(n-k_n)} \le N^{-1}\left(1-\frac{k_n}{7n}\right)\right) \ge 1-n^{-\frac{ck_n}{\log n}}$, где $c>1{,}08$. Тогда с вероятностью 1,

$$\sup_{x\le\xi_{(n-k_n)}} B_{1n}(x) \le \frac{1}{n} \sup_{x\le N^{-1}\left(1-\frac{k_n}{7n}\right)} (1-N(x))^{-1} = \frac{7}{k_n}, \qquad (2.3.25)$$

и

$$\sup_{x\le\xi_{(n-k_n)}} B_{2n}(x) \le \frac{1}{n} \sup_{x\le N^{-1}\left(1-\frac{k_n}{7n}\right)} N(x)(1-N(x))^{-1} \le \frac{7}{k_n}. \qquad (2.3.26)$$

Пусть для фиксированного $\gamma\in[0;1/2)$
$A_n^{(\gamma)} = \sup\limits_{x\le N^{-1}\left(1-\frac{k_n}{7n}\right)} (1-N(x-))^{\gamma-1}\left|N_n(x-)-N(x-)\right|$ и
$\Im_n = \sup\limits_{x\le N^{-1}\left(1-\frac{k_n}{7n}\right)} (1-N_n(x-))(1-N(x-))^{-1}$. Лемма 1 в [149] утверждает, что
$A_n^{(\gamma)} = O_p\left(n^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{n}{k_n}\right)^{\frac{1-2\gamma}{2}}\right)$ и $\Im_n = O_p(1)$. Тогда

$$\sup_{x\le\xi_{(n-k_n)}} B_{3n}(x) \le \frac{1}{2}\left(A_n^{(0)}\right)^2\left\{1\vee\left(\Im_n^{-1}\right)\right\} = O_p\left(k_n^{-1}\right). \qquad (2.3.27)$$

Из (2.3.25)-(2.3.27) получаем $\sup\limits_{x\le\xi_{(n-k_n)}} B_n(x) = O_p\left(k_n^{-1}\right)$, а учитывая и (2.3.24) имеем

$$\sup_{x\le\xi_{(n-k_n)}} \left|L_{1n}(x;i)\right| = O_p\left(k_n^{-1}\right). \qquad (2.3.28)$$

Так как $\overline{\Lambda}_n(x) \ge N_n(x)$, то согласно (2.1.10) и (2.1.47):

$$P\left(\sup_{x\ge\tau}\left(\overline{\Lambda}_n(x)\right)^{-1} \ge 2(N(\tau))^{-1}\right) \le P\left(\sup_{x\ge\tau}\left(N_n(x)\right)^{-1} \ge 2(N(\tau))^{-1}\right) \le Dn^{-\varepsilon}, \quad \varepsilon>0. \qquad (2.3.29)$$

Следовательно ввиду (2.3.3) и (2.3.22) при $e=2{,}3$ имеем

$$\sup_{\tau \le x \le \xi_{(n-k_n)}} |L_{en}(x;i)| = \begin{cases} O_p\left(k_n^{-1/2}\right), \\ O\left(k_{2n}^{-1}\log n\right), \quad п.н. \end{cases} \tag{2.3.30}$$

Легко установить, что для всех $(x;i) \in [\tau;\xi_{(n)}) \times \Im$

$$\left|\overline{R}_n(x;i) - R(x;i)\right| \le \frac{1}{\overline{\Lambda}_n(x)}\left[\left|\overline{\Lambda}_n(x;i) - \Lambda(x;i)\right| + R(x;i)\left|\overline{\Lambda}_n(x) - \Lambda_H(x)\right|\right] \le$$

$$\le \frac{1}{N_n(x-)}\left[\left|\overline{\Lambda}_n(x;i) - \Lambda(x;i)\right| + \left|\overline{\Lambda}_n(x) - \Lambda_H(x)\right|\right]$$

Тогда согласно (2.3.3), (2.3.22) и (2.3.29)

$$\sup_{\tau \le x \le \xi_{(n-k_n)}} \left|\overline{R}_n(x;i) - R(x;i)\right| = \begin{cases} O_p\left(k_n^{-1/2}\right), \\ O\left(\left(k_{2n}^{-1}\log n\right)^{1/2}\right), \quad п.н. \end{cases} \tag{2.3.31}$$

Используя тейлоровское разложение имеем

$$\sup_{x \le \xi_{(n-k_n)}} \left|-\log(1-N_n(x-)) + \log(1-N(x))\right| \le A_n^{(0)} + \frac{1}{2}\left(A_n^{(0)}\right)^2\left\{1 \vee \left(\Im_n^{-1}\right)\right\} = O_p\left(k_n^{-1/2}\right). \tag{2.3.32}$$

Таким образом, из (2.3.31) и (2.3.32) следует

$$\sup_{\tau \le x \le \xi_{(n-k_n)}} |L_{4n}(x;i)| = O_p\left(k_{2n}^{-1}(\log n)^{1/2}\right). \tag{2.3.33}$$

Легко видеть, что для $x < \xi_{(n)}$:

$$L_{5n}(x;i) \le \frac{1}{2}\exp\left(|e_n(x;i)|\right)\left[L_{5n}^*(x;i)\right]^2, \tag{2.3.34}$$

где

$$e_n(x;i) = \left[-\log\left(1 - F_{3n}(x;i)\right) + \log\left(1 - F_{3n}(x;i)\right)\right],$$

$$L_{5n}^*(x;i) = \left|\overline{\Lambda}_n(x;i) - \Lambda(x;i)\right| + \sum_{e=1}^{4}|L_{en}(x;i)|.$$

Так как $|e_n(x;i)| \le \left(1 - N_n(x-)\right)^{-1}\left|\overline{R}_n(x;i) - R(x;i)\right| + \left|\log\left(1 - N_n(x-)\right) + \log(1 - N(x))\right|$, где

$\sup_{x \le \xi_{(n-k_n)}} \left(1 - N_n(x-)\right)^{-1} \le \sup_{x \le N^{-1}\left(1 - \frac{k_n}{7n}\right)} (1 - N_n(x))^{-1} = \dfrac{n}{k_n}$, то согласно (2.3.31) и (2.3.32)

$$\sup_{\tau \le x \le \xi_{(n-k_n)}} |e_n(x;i)| = O_p\left(k_n^{-3/2}n + k_n^{-1/2}\right). \tag{2.3.35}$$

Ввиду (2.3.3), (2.3.28), (2.3.30) и (2.3.31)

$$\sup_{\tau\le x\le\xi_{(n-k_n)}}\left|L_{5n}^*(x;i)\right| = O_p\left(k_n^{-1/2}\right). \tag{2.3.36}$$

Из соотношений (2.3.34)-(2.3.36) окончательно имеем

$$\sup_{\tau\le x\le\xi_{(n-k_n)}}\left|L_{5n}(x;i)\right| = O_p\left(k_n^{-1}\right). \tag{2.3.37}$$

Таким образом ввиду (2.3.28), (2.3.30), (2.3.33) и (2.3.37)

$$\sup_{\tau\le x\le\xi_{(n-k_n)}}\left\{\sum_{e=1}^{5}\left|L_{en}(x;i)\right|\right\} = O_p\left(k_{2n}^{-1}(\log n)^{1/2}\right). \tag{2.3.38}$$

Теперь поочередно выбирая в неравенстве (2.3.21) функцию $\psi(x;i)$ как в доказательстве теоремы 2.3.1, затем используя теорему S и оценки (2.3.38) получаем соотношения (2.3.16)-(2.3.20). Теорема 2.3.2 доказана. ■

Замечание 2.3.3. В отличие от теоремы 2.3.1 в утверждениях теоремы 2.3.2 отсутствуют сильные аппроксимации. Это объясняется использованием в неравенствах (2.3.27) и (2.3.32) слабых, т.е. вероятностных оценок для с.в. $A_n^{(0)}$ и $\Im_n$. Более того, в этих результатах супремумы рассматриваются на отрезках $\left[\tau;\xi_{(n-k_n)}\right]$ и соответствующих кубах, где число τ зависит от ф.р. N. В следующей теореме 2.3.4 доказываются аналогичные утверждения, в которых отсутствуют эти недостатки, однако в соответствующих аппроксимациях происходит неулучшение в скоростях (см. замечание 2.3.5). ■

Для удобства изложения следующего утверждения через $\Pi_{mn}(\nu),\ \nu=(\nu_1,\ldots\nu_k),\quad m=1,\ldots,4$ обозначим вектор-процессы, находящиеся под нормами $\|\bullet\|^{(k)}$ в левых частях соотношений (2.3.17)-(2.3.20) соответственно.

Теорема 2.3.4. В условиях теоремы 2.3.2

$$\sup_{x\le\xi_{(n-k_n)}}\frac{\left|\overline{F}_{3n}(x;i)-F_3(x;i)\right|}{1-F_3(x;i)} = \begin{cases} O_p\left(k_n^{-1/2}+k_n^{-2}n\right), \\ O\left(\left(k_{2n}^{-1}\log n\right)^{1/2}+k_n^{-2}n\right), \quad п.н. \end{cases} \tag{2.3.39}$$

$$\sup_{\nu\in(-\infty;\xi_{(n-k_n)}]^k}\left\|\Pi_{1n}(\nu)\right\|^{(k)} = \begin{cases} O_p\left(k_n^{-1}n^{1/2}\log n+k_n^{-2}n^{3/2}\right), \\ O\left(k_{2n}^{-1}n^{1/2}\log n+k_n^{-2}n^{3/2}\right), \quad п.н. \end{cases} \tag{2.3.40}$$

$$\sup_{\nu\in(-\infty;\xi_{(n-k_n)}]^k}\left\|\Pi_{2n}(\nu)\right\|^{(k)} \overset{п.н.}{=} O\left(k_{2n}^{-1}n^{1/2}\log^2 n+k_n^{-2}n^{3/2}\right), \tag{2.3.41}$$

$$\sup_{\nu\in(-\infty;\xi_{(n-k_n)}]^k} \left\|\Pi_{3n}(\nu)\right\|^{(k)} = O_p\left(k_n^{-3/2}n + k_n^{-1}n^{1/2}\log n + k_n^{-2}n^{3/2}\right), \tag{2.3.42}$$

$$\sup_{\nu\in(-\infty;\xi_{(n-k_n)}]^k} \left\|\Pi_{4n}(\nu)\right\|^{(k)} \overset{п.н.}{=} O\left(k_{2n}^{-3/2}n(\log n)^{1/2}(\log\log n)^{1/2} + k_{2n}^{-1}n^{1/2}\log^2 n + k_n^{-2}n^{3/2}\right). \tag{2.3.43}$$

Доказательство теоремы 2.3.4. Согласно неравенству (IV) теоремы 1.3.1, а также доказательству теоремы 1.4.1 для всех $(x;i)\in(-\infty;\xi_{(n)})\times\Im$ имеем

$$\left|\overline{F}_{2n}(x;i)-\overline{F}_{3n}(x;i)\right| \le \sum_{u\le x}\left\{\frac{\left[\Delta\overline{\Lambda}_n(u;i)\right]^2}{\left[1-\Delta\Lambda_n(u;i)\right]}+\frac{\left[\Delta\overline{\Lambda}_n(u)\right]^2}{\left[1-\Delta\Lambda_n(u)\right]}\right\} \le \sum_{u\le x}\left\{\left[\frac{\Delta M_n(u;i)}{1-M_n(u;i)}\right]^2+\right.$$

$$\left.+\left[\frac{\Delta N_n(u)}{1-N_n(u)}\right]^2\right\} \le \frac{2}{n}\sum_{u\le x}\frac{\Delta N_n(u)}{\left[1-N_n(u)\right]^2} = \frac{2}{n}\int_{(-\infty;x]}\frac{dN_n(u)}{\left[1-N_n(u)\right]^2}. \tag{2.3.44}$$

Ввиду равенства $\xi_{(n-k_n)} = N_n^{-1}\left(1-\frac{k_n}{n}\right)$ и оценки (4.1) из [149] для всех $i\in\Im$ из (2.3.44) получаем

$$\sup_{x\le\xi_{(n-k_n)}}\left|\overline{F}_{2n}(x;i)-\overline{F}_{3n}(x;i)\right| \le \frac{2}{n}\int\limits_{\left(-\infty;N_n^{-1}\left(1-\frac{k_n}{n}\right)\right]}\left[1-N_n(u)\right]^{-2}dN_n(u) \le \frac{2}{n}\frac{2n}{k_n} = \frac{4}{k_n}. \tag{2.3.45}$$

В условиях теоремы ввиду непрерывности всех распределений, для всех $(x;i)\in(-\infty;T_N]\times\Im$: $\Lambda(x;i)=\int\limits_{(-\infty;x]}\frac{dM(u;i)}{1-N(u)} \le \int\limits_{(-\infty;x]}\frac{dN(u)}{1-N(u)} = -\log(1-N(x))$ и при $m=2{,}3$ $\quad 1-F_m(x;i)=1-F_1(x;i)=\exp(-\Lambda(x;i))\ge 1-N(x)$. Следовательно, ввиду (2.3.45) и неравенства (4.3) из [149] для всех $i\in\Im$ имеем

$$\sup_{x\le\xi_{(n-k_n)}}\frac{\left|\overline{F}_{2n}(x;i)-\overline{F}_{3n}(x;i)\right|}{1-F_2(x;i)} \le \frac{4}{k_n}\sup_{x\le N^{-1}\left(1-\frac{k_n}{7n}\right)}\left[1-N(x)\right]^{-1} = \frac{28n}{k_n^2}. \tag{2.3.46}$$

Поскольку

$$\left|\frac{\overline{F}_{3n}(x;i)-F_3(x;i)}{1-F_3(x;i)}-\psi(x;i)\right| \le \left|\frac{\overline{F}_{2n}(x;i)-F_2(x;i)}{1-F_2(x;i)}-\psi(x;i)\right| + \frac{\left|\overline{F}_{2n}(x;i)-\overline{F}_{3n}(x;i)\right|}{1-F_2(x;i)}, \tag{2.3.47}$$

то теперь утверждение теоремы следует из соотношений (2.3.46), (2.3.47) при соответствующих выборах $\psi(x;i)$ и теоремы 2.3.1. Теорема 2.3.4 доказана. ■

Замечание 2.3.5. Автор [149] показал, что скорости аппроксимации в теореме S, а следовательно и в теореме 2.3.1 неулучшаемы. Аналогично можно показать и неулучшаемость слабых аппроксимаций и в теореме 2.3.2. Что же касается аппроксимаций в теореме 2.3.4, то по порядку они также несомненно неулучшаемы, однако наличие в скоростях аппроксимаций слагаемых $k_n^{-2}n$ и $k_n^{-2}n^{3/2}$ иногда может привести к «ухудшению» аппроксимаций по сравнению с соответствующими результатами теоремы 2.3.1. Так, например, если положим $k_n=[pn]$, где число $p\in(0;1)$, то во всех выше упомянутых теоремах правые части в результатах аппроксимаций стремятся к нулю (в том числе наличие вышеупомянутых двух слагаемых в теореме 2.3.4 не ухудшают аппроксимацию). Теперь, если $k_n=[n^{\alpha}]$, где число $\alpha\in(0;1)$, то для того, чтобы все скорости аппроксимации в теоремах S, 2.3.1 и 2.3.2 стремились к нулю достаточно брать число $\alpha\in(2/3;1)$. Однако, в аппроксимациях теоремы 2.3.4 теперь слагаемые $k_n^{-2}n$ и $k_n^{-2}n^{3/2}$ становятся главными и общее число α обеспечивающее стремление к нулю правых частей должно быть из интервала $(3/4;1)$. ■

Замечание 2.3.6. Результаты теорем 2.3.1, 2.3.2 и 2.3.4 при подходящем выборе последовательности k_n так, чтобы скорости аппроксимации стремились к нулю (например, как в замечании 2.3.5), могут быть использованы для слабых сходимостей нормированных «остановленных» процессов к предельным гауссовским процессам, а также при построении доверительных интервалов для оцениваемых функционалов, как это было проделано автором [149] для оценки Каплана-Мейера. ■

§ 2.4. Исследования оценок многомерной функции выживания

В настоящем параграфе будут исследованы свойства статистик (1.5.2). Через $\{(Z_{m(j)};\delta_{m(j)}),\ m=1,2;\ 1\le j\le n\}$ обозначим упорядоченные пары, где $Z_{m(1)}\le\ldots\le Z_{m(n)}$-вариационный ряд, построенный по Z_{mj}, $1\le j\le n$ и $\delta_{m(j)}$-индикатор, соответствующий $Z_{m(j)}$. Пусть

$$q_{1j}^{(n)}(s;t)=\frac{\delta_{1(j)}I\big(Z_{1(j)}\le s;Z_{2(j)}>t\big)}{nH_n\big(Z_{1(j)}-;t\big)},\qquad q_{2j}^{(n)}(s;t)=\frac{\delta_{2(j)}I\big(Z_{1(j)}>s;Z_{2(j)}\le t\big)}{nH_n\big(s;Z_{2(j)}-\big)}.$$

Тогда $\widetilde{\Lambda}_{1n}(s;-\infty)=\sum_{j=1}^{n}q_{1j}^{(n)}(s;-\infty)$, $\widetilde{\Lambda}_{2n}(s;t)=\sum_{j=1}^{n}q_{2j}^{(n)}(s;t)$,

$\prod_{u\le s}\left(1-\widetilde{\Lambda}_{1n}(\Delta u;-\infty)\right)=\prod_{j=1}^{n}\left(1-q_{1j}^{(n)}(s;-\infty)\right)$, $\quad \prod_{v\le t}\left(1-\widetilde{\Lambda}_{2n}(s;\Delta v)\right)=\prod_{j=1}^{n}\left(1-q_{2j}^{(n)}(s;t)\right)$. Сперва для оценок (1.5.2) установим аналоги неравенств (I), (V), (VI) из теоремы 1.3.1.

Теорема 2.4.1. Для всех $(s;t)\in\left(-\infty;Z_{1(n)}\right)\times\left(-\infty;Z_{2(n)}\right)$:

(I) $0\le F_{1n}(s;t)-F_{2n}(s;t)\overset{п.н.}{=}O\left(\frac{1}{n}\right)$;

(II) $\left|F_{1n}(s;t)-F_{3n}(s;t)\right|\le\pi_n(s;t)$; п.н.

(III) $\left|F_{3n}(s;t)-F_{2n}(s;t)\right|\le\pi_n(s;t)+O\left(\frac{1}{n}\right)$, п.н.

где $\pi_n(s;t)=\left|-\log H_n(s;t)-\Lambda_n(s;t)\right|$.

Доказательство теоремы 2.4.1. Обозначим

$$A=\prod_{j=1}^{n-1}\frac{\exp\left(-q_{1j}^{(n)}(s;-\infty)\right)}{1-q_{1j}^{(n)}(s;-\infty)},\qquad B=\prod_{j=1}^{n-1}\frac{\exp\left(-q_{2j}^{(n)}(s;t)\right)}{1-q_{2j}^{(n)}(s;t)}.$$

Тогда $F_{1n}(s;t)-F_{2n}(s;t)=\left(\frac{F_{1n}(s;t)}{F_{2n}(s;t)}-1\right)F_{2n}(s;t)=(AB-1)F_{2n}(s;t)$. Согласно второму из неравенств (1.3.6), $A\ge1,\ B\ge1,\ (A-1)+(B-1)\ge0$ и $(AB-1)\ge(AB-1)-(A-1)-(B-1)=(A-1)(B-1)\ge0$. Поскольку $F_{2n}(s;t)\ge0$, то

$$F_{1n}(s;t)-F_{2n}(s;t)\ge0. \tag{2.4.1}$$

С другой стороны, для тех же $(s;t)$ ввиду первого неравенства и правой части второго неравенства (1.3.6):

$$F_{1n}(s;t)-F_{2n}(s;t)=\left[\exp\left(-\widetilde{\Lambda}_{1n}(s;-\infty)\right)-\prod_{u\le s}\left(1-\widetilde{\Lambda}_{1n}(\Delta u;-\infty)\right)\right]\exp\left(-\widetilde{\Lambda}_{2n}(s;t)\right)+$$

$$+\left[\exp\left(-\widetilde{\Lambda}_{2n}(s;t)\right)-\prod_{v\le t}\left(1-\widetilde{\Lambda}_{2n}(s;\Delta v)\right)\right]\prod_{u\le s}\left(1-\widetilde{\Lambda}_{1n}(\Delta u;-\infty)\right)\le\left[\prod_{j=1}^{n-1}\exp\left(-q_{1j}^{(n)}(s;-\infty)\right)-\right.$$

$$\left.-\prod_{j=1}^{n-1}\left(1-q_{1j}^{(n)}(s;-\infty)\right)\right]+\left[\prod_{j=1}^{n-1}\exp\left(-q_{2j}^{(n)}(s;t)\right)-\prod_{j=1}^{n-1}\left(1-q_{2j}^{(n)}(s;t)\right)\right]\le$$

$$\le\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1}\left[\left(q_{1j}^{(n)}(s;-\infty)\right)^2+\left(q_{2j}^{(n)}(s;t)\right)^2\right]=\frac{1}{2n}\left\{\int\limits_{(-\infty;s\wedge Z_{1(n)})}\frac{\widetilde{M}_n(du;-\infty)}{(H_n(u-;-\infty))^2}+\int\limits_{(-\infty;t\wedge Z_{2(n)})}\frac{\widetilde{N}_n(s;dv)}{(H_n(s;v-))^2}\right\}\le$$

$$\le\left(n\left(H_n\left(Z_{1(n)}-;Z_{2(n)}-\right)\right)^2\right)^{-1}\overset{п.н.}{=}O\left(\frac{1}{n}\right), \tag{2.4.2}$$

где последнее равенство следует из соотношений

$$\frac{1}{H_n(s;t)} \le \frac{\left|H_n(s;t)-H^{(n)}(s;t)\right|}{H_n(s;t)H^{(n)}(s;t)} + \frac{1}{H^{(n)}(s;t)} \overset{п.н.}{=} \frac{1}{H^{(n)}(s;t)} + O\left(\left(\frac{\log\log n}{n}\right)^{1/2}\right). \tag{2.4.3}$$

и ЗПЛ

$$P\left(\limsup_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{\log\log n}\right)^{1/2} \sup_{(s;t)\in R^2}\left|H_n(s;t)-H^{(n)}(s;t)\right| \le 3\right) = 1, \tag{2.4.4}$$

получаемого применением теоремы В* из § 1.9 трижды в соотношении

$$\left|H_n(s;t)-H^{(n)}(s;t)\right| \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\{\left|I(Z_{1i}\le s; Z_{2i}\le t)-P(Z_{1i}\le s; Z_{2i}\le t)\right| + \left|I(Z_{1i}\le s)-P(Z_{1i}\le s)\right| + \left|I(Z_{2i}\le t)-P(Z_{2i}\le t)\right|\right\}$$

.

Из (2.4.1) и (2.4.2) следует (I). Теперь (II) следует из последнего неравенства (1.3.6) и того, что $R_n(s;t)\le 1$ для $(s;t)\in\left(-\infty; Z_{1(n)}\right)\times\left(-\infty; Z_{2(n)}\right)$ и :

$$\left|F_{1n}(s;t)-F_{3n}(s;t)\right| \le \left|-\widetilde{\Lambda}_n(s;t)-R_n(s;t)\log H_n(s;t)\right| \le \pi_n(s;t).$$

Для доказательства (III) достаточно применить (I), (II) и неравенство треугольника. Теорема 2.4.1 доказана. ■

Далее будут установлены условия, при которых $\pi_n(s;t)$ сходится к нулю. Это, в свою очередь обеспечит близость оценок $F_{mn}(s;t),\ m=1,2$ с $F_{3n}(s;t)$. Для функции $K(s;t)\in[0,1],\ (s;t)\in R^2$, обозначим $Supp(K)=\{(s;t)\in R^2 : 0<K(s;t)<1\}$. Исследования дальнейших свойств оценок (1.5.2) требуют рассмотрения следующих условий:

(C1) Существует предел $\lim_{n\to\infty} G^{(n)}(s;t)=G(s;t)\in[0;1]$ для $(s;t)\in Supp(G)$, где $G(s;t)$ не возрастает и непрерывна слева по обеим аргументам;

(C2) Существует предел $\lim_{n\to\infty} H^{(n)}(s;t)=H(s;t)\in[0;1]$ для $(s;t)\in Supp(H)$, где $H(s;t)$ не возрастает и непрерывна слева по обеим аргументам;

(C3) Существует предел $\lim_{n\to\infty} N^{(n)}(s;t)=N(s;t)\in[0;1]$ для $(s;t)\in Supp(N)$;

(C4) Существует предел $\lim_{n\to\infty} M^{(n)}(s;t)=M(s;t)\in[0;1]$ для $(s;t)\in Supp(M)$;

(C5) Существует предел $\lim_{n\to\infty} \widetilde{N}^{(n)}(s;t)=\widetilde{N}(s;t)\in[0;1]$ для $(s;t)\in Supp(\widetilde{N})$;

(C6) Существует предел $\lim_{n\to\infty} \widetilde{M}^{(n)}(s;t)=\widetilde{M}(s;t)\in[0;1]$ для $(s;t)\in Supp(\widetilde{M})$;

Пусть $Q=Supp(N)\cap Supp(M)\cap Supp(\widetilde{N})\cap Supp(\widetilde{M})\ne\varnothing$. Введём функции $\Lambda(s;t)=\Lambda_1(s;-\infty)+\Lambda_2(s;t)$, $\widetilde{\Lambda}(s;t)=\widetilde{\Lambda}_1(s;-\infty)+\widetilde{\Lambda}_2(s;t)$, где

$$\Lambda_1(s;t)=\int\limits_{(-\infty;s]}\frac{M(du;t)}{H(u-;t)}, \qquad \Lambda_2(s;t)=\int\limits_{(-\infty;t]}\frac{N(s;dv)}{H(s;v-)},$$

$$\widetilde{\Lambda}_1(s;t)=\int\limits_{(-\infty;s]}\frac{\widetilde{M}(du;t)}{H(u-;t)}, \qquad \widetilde{\Lambda}_2(s;t)=\int\limits_{(-\infty;t]}\frac{\widetilde{N}(s;dv)}{H(s;v-)}.$$

В следующей теореме найдены равномерно-сильные пределы трёх классов статистик (1.5.2).

Теорема 2.4.2. (I) В условиях (С2), (С5) и (С6) при $m=1,2$:

$$P\left(\lim_{n\to\infty}\sup_{(s;t)\in Q}\left|F_{mn}(s;t)-\exp\left(-\widetilde{\Lambda}(s;t)\right)\right|=0\right)=1; \tag{2.4.5}$$

(II) В условиях (С2)-(С6):

$$P\left(\lim_{n\to\infty}\sup_{(s;t)\in Q}\left|F_{3n}(s;t)-\Gamma(s;t)\right|=0\right)=1, \tag{2.4.6}$$

где $\Gamma(s;t)=\left[H(s;t)\right]^{R(s;t)}$, $R(s;t)=\widetilde{\Lambda}(s;t)[\Lambda(s;t)]^{-1}$.

Доказательство теоремы 2.4.2. Сперва покажем, что

$$\begin{aligned}&P\left(\lim_{n\to\infty}\sup_{(s;t)\in Q}\left|\widetilde{\Lambda}_n(s;t)-\widetilde{\Lambda}(s;t)\right|=0\right)=1,\\&P\left(\lim_{n\to\infty}\sup_{(s;t)\in Q}\left|\Lambda_n(s;t)-\Lambda(s;t)\right|=0\right)=1.\end{aligned} \tag{2.4.7}$$

Имеем

$$\sup_{(s;t)\in Q}\left|\widetilde{\Lambda}_n(s;t)-\widetilde{\Lambda}(s;t)\right|\le\sup_{(s;t)\in Q}\left|\widetilde{\Lambda}_{1n}(s;t)-\widetilde{\Lambda}_1^{(n)}(s;t)\right|+\sup_{(s;t)\in Q}\left|\widetilde{\Lambda}_{2n}(s;t)-\widetilde{\Lambda}_2^{(n)}(s;t)\right|+$$
$$+\sup_{(s;t)\in Q}\left|\widetilde{\Lambda}_1^{(n)}(s;t)-\widetilde{\Lambda}_1(s;t)\right|+\sup_{(s;t)\in Q}\left|\widetilde{\Lambda}_2^{(n)}(s;t)-\widetilde{\Lambda}_2(s;t)\right|.$$

Поскольку $\widetilde{\Lambda}_{kn}(s;t)$ и $\widetilde{\Lambda}_k^{(n)}(s;t)$ при $k=1,2$, выражаются через однократные интегралы, то используя элементарные преобразования этих интегралов, а затем ЗПЛ (2.4.4) и аналогично для эмпирических субраспределений $\widetilde{M}_n(s;t)$, $\widetilde{N}_n(s;t)$ будем иметь

$$\sup_{(s;t)\in Q}\left|\widetilde{\Lambda}_{kn}(s;t)-\widetilde{\Lambda}_k^{(n)}(s;t)\right|\overset{п.н.}{=}O\left(\left(\frac{\log\log n}{n}\right)^{1/2}\right),\ k=1,2. \tag{2.4.8}$$

С другой стороны, так как к.ф.и. являются непрерывными функционалами от соответствующих распределений, то

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{(s;t)\in Q}\left|\Lambda_k^{(n)}(s;t)-\Lambda_k(s;t)\right|=0\,,\ k=1,2\,. \tag{2.4.9}$$

Теперь первое соотношение в (2.4.7) следует из (2.4.8) и (2.4.9). Второе доказывается совершенно аналогично. Тогда (2.4.5) при $m=1$ следует из (2.4.7) и при $m=2$ из соотношения (I) теоремы 2.4.1. Для доказательства (2.4.6) запишем следующее неравенство, получаемое также, как и в доказательстве леммы 1.2.4, используя при этом четвёртое неравенство (1.3.6):

$$\left|F_{3n}(s;t)-[H(s;t)]^{R(s;t)}\right|\le\left[\left|R_n(s;t)-R^{(n)}(s;t)\right|+\left|R^{(n)}(s;t)-R(s;t)\right|\right][H_n(s;t)]^{-1}+$$

$$+\left([H_n(s;t)]^{-1}\vee\left[H^{(n)}(s;t)\right]^{-1}\right)\left|H_n(s;t)-H^{(n)}(s;t)\right|+$$

$$+\left(\left[H^{(n)}(s;t)\right]^{-1}\vee[H(s;t)]^{-1}\right)\left|H^{(n)}(s;t)-H(s;t)\right|. \tag{2.4.10}$$

Поскольку

$$\left|R_n(s;t)-R^{(n)}(s;t)\right|\le\frac{\left|\widetilde{\Lambda}_n(s;t)-\widetilde{\Lambda}^{(n)}(s;t)\right|\Lambda^{(n)}(s;t)+\left|\Lambda^{(n)}(s;t)-\Lambda_n(s;t)\right|\widetilde{\Lambda}^{(n)}(s;t)}{\Lambda_n(s;t)\Lambda^{(n)}(s;t)}\le$$

$$\le\frac{1}{\Lambda_n(s;t)}\left[\left|\widetilde{\Lambda}_n(s;t)-\widetilde{\Lambda}^{(n)}(s;t)\right|+\left|\Lambda_n(s;t)-\Lambda^{(n)}(s;t)\right|\right], \tag{2.4.11}$$

а также $\dfrac{1}{\Lambda_n(s;t)}\le\dfrac{1}{\Lambda_{1n}(s;-\infty)}+\dfrac{1}{\Lambda_{2n}(s;t)}\le\dfrac{1}{M_n(s;-\infty)}+\dfrac{1}{N_n(s;t)}$, (так как для чисел a, b, таких, что $ab\ge0$, всегда $\dfrac{1}{a+b}\le\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$, что в свою очередь эквивалентно очевидному неравенству $(a+b)^2\ge ab$), то из соотношений (2.4.3), (2.4.4), ЗПЛ для $M_n(s;t)$ и $N_n(s;t)$, а также (2.4.7)-(2.4.9) получаем (2.4.6). Теорема 2.4.2 доказана. ■

Теорема 2.4.2 показывает, что пределами статистик (1.5.2) могут быть функционалы, вообще говоря различные и несовпадающие с оцениваемой функцией $F(s;t)$.

В следующей теореме перечислены условия, при которых имеет место требуемый результат.

Теорема 2.4.3. Пусть последовательности случайных векторов $\{X_i,\ i\ge1\}$ и $\{Y_j,\ j\ge1\}$ независимы. Тогда

(I) $\exp\left(-\widetilde{\Lambda}(s;t)\right)\equiv F(s;t),\quad (s;t)\in Q$;

(II) В условиях (C1), (C2), где $G(s;t)$-непрерывная функция,

$$\left[H(s;t)\right]^{R(s;t)} \equiv F(s;t), \quad (s;t) \in Q;$$

Доказательство теоремы 2.4.3. В условиях независимости, $H_i(s;t) = F(s;t)G_i(s;t)$ и следовательно, для всех n: $H^{(n)}(s;t) = F(s;t)G^{(n)}(s;t)$,

$$\widetilde{M}_{(i)}(s;-\infty) = P\left(X_{1i} \le s, X_{2i} > t, Y_{2i} > t, X_{1i} \le Y_{1i}\right)\Big|_{t=-\infty} = P\left(X_{1i} \le s, Y_{1i} \ge X_{1i}\right) = \int\limits_{(-\infty;s]} P(Y_{1i} \ge u) dP(X_{1i} \le u),$$

$$\widetilde{\Lambda}_1^{(n)}(s;-\infty) = \int\limits_{(-\infty;s]} \frac{\widetilde{M}^{(n)}(du;-\infty)}{F(u;-\infty)G^{(n)}(u-;-\infty)} = \int\limits_{(-\infty;s]} \frac{dP(X_{11} \le u)}{P(X_{11} > u)} = -\log P(X_{11} > s) = L_1(s;-\infty),$$

$$\widetilde{N}_{(i)}(s;t) = P\left(X_{1i} > s, X_{2i} \le t, Y_{1i} > s, X_{2i} \le Y_{2i}\right),$$

$$\widetilde{\Lambda}_2^{(n)}(s;t) = \int\limits_{(-\infty;t]} \frac{\widetilde{N}^{(n)}(s;dv)}{F(s;v-)G^{(n)}(s;v-)} = \int\limits_{(-\infty;t]} \frac{d_v P(X_{11} > s; X_{2i} \le v)}{P(X_{11} > s; X_{21} > v)} = -\log P(X_{21} > t / X_{11} > s) = L_2(s;t),$$

т.е. $\widetilde{\Lambda}(s;t) \equiv L(s;t)$. Таким образом, согласно (1.5.3) часть (I) верна. В условиях второй части теоремы $R(s;t) \equiv \dfrac{-\log F(s;t)}{-\log H(s;t)}$, $(s;t) \in Q$, а это и есть требуемое тождество. Теорема 2.4.3 доказана. ■

Замечание 2.4.4. Из условий части (II) теоремы 2.4.3 следует равномерно строгая сходимость оценок $F_{mn}(s;t)$ к одному и тому же пределу $F(s;t)$. Однако, в этих же условиях мы можем установить сходимость к нулю функции $\pi_n(s;t)$ при $n \to \infty$. Действительно, ввиду непрерывности $H(s;t)$, для всех $(s;t) \in Q \cap \left((-\infty; Z_{1(n)}) \times (-\infty; Z_{2(n)})\right) = Q_n$:

$$\pi_n(s;t) \le \left|-\log H_n(s;t) + \log H^{(n)}(s;t)\right| +$$

$$+\left|-\log H^{(n)}(s;t) + \log H(s;t)\right| + \left|-\log H(s;t) - \Lambda^{(n)}(s;t)\right| + \left|\Lambda^{(n)}(s;t) - \Lambda_n(s;t)\right| \xrightarrow[n\to\infty]{п.н.} 0$$

,

что следует из ЗПЛ и из условий (C1)-(C4). Если вдобавок предполагать и одинаковую распределенность последовательности $\{Y_i,\ i \ge 1\}$, то

$$\sup_{(s;t)\in Q_n} \pi_n(s;t) \le \sup_{(s;t)\in Q_n} \left|-\log H_n(s;t) + \log H(s;t)\right| + \sup_{(s;t)\in Q_n} \left|-\log H(s;t) - \Lambda_n(s;t)\right| \overset{п.н.}{=} O\left(\left(\frac{\log\log n}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

. ■

В следующей теореме найдены условия равномерной строгой состоятельности оценок (1.5.2), когда цензоры являются одинаково распределенными, однако необязательно независимыми от цензурируемых случайных векторов.

Теорема 2.4.5. Пусть пары $\{(X_i;Y_i),\ i\geq 1\}$ одинаково распределены и для случая $m=3$ функция $G(s;t)=P(Y_{11}>s,Y_{21}>t)$ непрерывна. Равенства

$$P\left(\lim_{n\to\infty}\sup_{(s;t)\in Q}\left|F_{mn}(s;t)-F(s;t)\right|=0\right)=1,\ m=1,2,3. \qquad (2.4.12)$$

имеют место тогда и только тогда, когда для всех $(s;t)\in Q$:

$$\begin{cases} P(Y_{11}\geq s/X_{11}=s)=P(Y_{11}\geq s/X_{11}>s), \\ P(Y_{11}>s,Y_{21}\geq t/X_{11}>s,X_{21}=t)=P(Y_{11}>s,Y_{21}\geq t/X_{11}>s,X_{21}>t). \end{cases} \qquad (2.4.13)$$

Доказательство теоремы 2.4.5. Нам достаточно установить, что условия (C1)-(C6) выполняются и равенства (2.4.13) соответственно эквивалентны

$$\begin{cases} L_1(s;-\infty)=\widetilde{\Lambda}_1(s;-\infty), \quad s\in Supp\left(\widetilde{M}(\bullet;-\infty)\right), \\ L_2(s;t)=\widetilde{\Lambda}_2(s;t), \quad (s;t)\in Supp\left(\widetilde{N}\right). \end{cases} \qquad (2.4.14)$$

Пусть $H(s;t)=H_1(s;t)$, $\widetilde{M}(s;t)=\widetilde{M}_{(1)}(s;t)$, $\widetilde{N}(s;t)=\widetilde{N}_{(1)}(s;t)$, $M(s;t)=M_{(1)}(s;t)$, $N(s;t)=N_{(1)}(s;t)$. Тогда условия (C1)-(C6) выполняются очевидным образом. Сперва докажем эквивалентность первых двух соотношений в (2.4.13) и (2.4.14). Поскольку

$$\widetilde{\Lambda}_1(s;t)=\int\limits_{(-\infty;s]}\frac{\widetilde{M}(du;t)}{H(u-;t)}=\int\limits_{(-\infty;s]}\frac{P(Y_{11}\geq u,X_{21}\wedge Y_{21}>t/X_{11}=u)dP(X_{11}\leq u)}{P(X_{11}\wedge Y_{11}\geq u,X_{21}\wedge Y_{21}>t)}$$

и $L_1(s;-\infty)=-\log P(X_{11}>s)=\int\limits_{(-\infty;s]}\frac{dP(X_{11}\leq u)}{P(X_{11}>u)}$, то согласно первому равенству (2.4.14), при $s\in Supp\left(\widetilde{M}(\bullet;-\infty)\right)$,

$$\widetilde{\Lambda}_1(s;-\infty)=\int\limits_{(-\infty;s]}\frac{P(Y_{11}\geq u/X_{11}=u)dP(X_{11}\leq u)}{P(X_{11}\wedge Y_{11}\geq u)}=\int\limits_{(-\infty;s]}\frac{dP(X_{11}\leq u)}{P(X_{11}>u)}.$$

Отсюда имеем

$$P(Y_{11}\geq s/X_{11}=s)=\frac{P(X_{11}\wedge Y_{11}\geq s)}{P(X_{11}>s)}=P(Y_{11}\geq s/X_{11}>s),$$

т.е. первое равенство (2.4.13) верно. Докажем обратное. Для $(s;t) \in Supp(\widetilde{M})$ из (2.4.13) следует

$$\widetilde{M}(s;-\infty) = P(X_{11} \le s, Y_{11} \ge X_{11}, X_{21} \wedge Y_{21} > t)\Big|_{t=-\infty} = \int_{(-\infty;s]} \widetilde{M}(du;t)\Bigg|_{t=-\infty} =$$

$$= \int_{(-\infty;s]} P(Y_{11} \ge u / X_{11} = u) dP(X_{11} \le u) = \int_{(-\infty;s]} P(Y_{11} \ge u / X_{11} > u) dP(X_{11} \le u) =$$

$$= \int_{(-\infty;s]} \frac{P(X_{11} \wedge Y_{11} \ge u)}{P(X_{11} > u)} dP(X_{11} \le u) = \int_{(-\infty;s]} H(u-;-\infty) dL_1(u;-\infty).$$

Отсюда, для $s \in Supp(\widetilde{M}(\bullet;-\infty))$, решая интегральное уравнение, получаем

$$L_1(s;-\infty) = \int_{(-\infty;s]} \frac{\widetilde{M}(du;-\infty)}{H(u-;-\infty)} = \widetilde{\Lambda}_1(s;-\infty),$$

т.е. получаем первое равенство (2.4.14). Докажем эквивалентность вторых равенств. Так как для $(s;t) \in Supp(\widetilde{N})$

$$\widetilde{\Lambda}_2(s;t) = \int_{(-\infty;s]} \frac{\widetilde{N}(s;dv)}{H(s;v-)} = \int_{(-\infty;s]} \frac{P(X_{11} \wedge Y_{11} > s, Y_{21} \ge v / X_{11} > s, X_{21} = v) d_v P(X_{11} > s, X_{21} \le v)}{P(X_{11} \wedge Y_{11} > s, X_{21} \wedge Y_{21} \ge v)}$$

а также

$$L_2(s;t) = -\log P(X_{21} > t / X_{11} > s) = \int_{(-\infty;t]} \frac{d_v P(X_{11} > s, X_{21} \le v)}{P(X_{11} > s, X_{21} > v)},$$

то ввиду (2.4.14)

$$\int_{(-\infty;t]} \frac{P(Y_{11} > s, Y_{21} \ge v / X_{11} > s, X_{21} = v) d_v P(X_{11} > s, X_{21} \le v)}{P(X_{11} \wedge Y_{11} > s, X_{21} \wedge Y_{21} \ge v)} = \int_{(-\infty;t]} \frac{d_v P(X_{11} > s, X_{21} \le v)}{P(X_{11} > s, X_{21} > v)}.$$

Отсюда получаем равенства

$$P(Y_{11} > s, Y_{21} \ge t / X_{11} > s, X_{21} = t) = \frac{P(X_{11} \wedge Y_{11} > s, X_{21} \wedge Y_{21} \ge t)}{P(X_{11} > s, X_{21} > t)} = P(Y_{11} > s, Y_{21} \ge t / X_{11} > s, X_{21} > t)$$

,

что влечёт и справедливость второго равенства (2.4.13). Докажем обратное. Так как для $(s;t) \in Supp(\widetilde{N})$ из (2.4.13)

$$\widetilde{N}(s;t)=P(X_{11}\wedge Y_{11}>s,X_{21}\le t,Y_{21}\ge X_{21})=\int\limits_{(-\infty;t]}\widetilde{N}(s;dv)=\int\limits_{(-\infty;t]}P(Y_{11}>s,Y_{21}\ge v/X_{11}>s,X_{21}=v)\cdot$$

$$\cdot\, d_vP(X_{11}>s,X_{21}\le v)=\int\limits_{(-\infty;t]}\frac{P(X_{11}\wedge Y_{11}>s,X_{21}\wedge Y_{21}\ge v)}{P(X_{11}>s,X_{21}>v)}d_vP(X_{11}>s,X_{21}\le v)=\int\limits_{(-\infty;t]}H(s;v-)dL_2(s;v).$$

Теперь разрешив последнее интегральное уравнение относительно $L_2(s;t)$ получаем и второе равенство (2.4.14). Эквивалентность (2.4.13) и (2.4.14) установлено. Справедливость (2.4.12) при $m=1{,}2$ следует из (2.4.5) и части (I) теоремы 2.4.3. Легко проверить, что ввиду непрерывности функции $G(s;t)$, $-\log H(s;t)=\Lambda(s;t)=\Lambda_1(s;-\infty)+\Lambda_2(s;t)$, $(s;t)\in Supp(M)\cap Supp(N)$, где

$$\Lambda_1(s;-\infty)=\int\limits_{(-\infty;s]}\frac{M(du;-\infty)}{H(u-;-\infty)}=\int\limits_{(-\infty;s]}\frac{dP(Z_{11}\le u)}{P(Z_{11}>u)}=-\log P(Z_{11}>s)\,,$$

$$\Lambda_2(s;t)=\int\limits_{(-\infty;t]}\frac{N(s;dv)}{H(s;v-)}=\int\limits_{(-\infty;t]}\frac{d_vP(Z_{11}>s,Z_{21}\le v)}{P(Z_{11}>s,Z_{21}>v)}=-\log P(Z_{21}>t/Z_{11}>s)\,.$$

Пусть $R(s;t)=\dfrac{L_1(s;-\infty)+L_2(s;t)}{\Lambda(s;t)}$. Теперь равенство (2.4.12) для $m=3$ следует из (2.4.6) и части (II) теоремы 2.4.3. Тем самым теорема 2.4.5 доказана полностью. ■

Замечание 2.4.6. Легко видеть, что если пара первых компонент $(X_{11};Y_{11})$ векторов $X_1=(X_{11};X_{21})$ и $Y_1=(Y_{11};Y_{21})$ независит от пары вторых компонент $(X_{21};Y_{21})$, то систему (2.4.13) можно записать следующим образом:

$$\begin{cases}P(Y_{11}\ge s/X_{11}=s)=P(Y_{11}\ge s/X_{11}>s),\\ \\ P(Y_{21}\ge t/X_{21}=t)=P(Y_{21}\ge t/X_{21}>t).\end{cases}\qquad(2.4.15)$$

■

Пример 2.4.7. Пусть пары $\{(X_{k1},Y_{k1}),\ k=1{,}2\}$ имеют двумерные экспоненциальные функции выживания Маршалла-Олкина с параметрами $\{(\lambda_{1,k};\lambda_{2,k};\lambda_{1,2,k}),\ k=1{,}2\}$ соответственно: $P(X_{k1}>s,Y_{k1}>t)=\exp\{-\lambda_{1,k}s-\lambda_{2,k}t-\lambda_{1,2,k}(s\vee t)\}$, где $(s;t)\in[0;\infty)\times[0;\infty)$. Заметим, что маргинальные распределения X_{k1} и Y_{k1} являются непрерывными. Простые вычисления показывают, что вероятности в системе (2.4.5) с обеих сторон равенств равны соответственно $\exp(-\lambda_{2,1}s)$ и $\exp(-\lambda_{2,2}t)$. Следовательно (2.4.12) имеет место. ■

Теперь переходим к задачам о сходимости последовательности оценок (1.5.2) при подходящей центровке и нормировке к предельному двухпараметрическому гауссовскому процессу. Поскольку свойства оценок (1.5.2) существенно зависят от свойств оценок к.ф.и., то мы сперва приведём некоторые утверждения для оценок к.ф.и., опираясь на результаты Ферманяна [172]. Сформулируем два утверждения относительно $\widetilde{\Lambda}_n(s;t)$.

Предложение 2.4.8. Пусть пары $\{(X_i, Y_i), \ i \ge 1\}$ одинаково распределены и вектора $\{X_i, \ i \ge 1\}$ и $\{Y_i, \ i \ge 1\}$ взаимонезависимы. Тогда для всех $(s;t) \in Q(H) = Supp(H)$ справедливо представление

$$\widetilde{\Lambda}_n(s;t) - L(s;t) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \eta_k(s;t) + r_n(s;t), \tag{2.4.16}$$

где $\eta_k(s;t) = \eta_{1k}(s;-\infty) + \eta_{2k}(s;t)$, $L(s;t) = L_1(s;-\infty) + L_2(s;t)$,

$$\eta_{1k}(s;t) = \frac{I(Z_{1k} \le s, Z_{2k} > t, \delta_{1k} = 1)}{H(Z_{1k}-;t)} - \int_{(-\infty;Z_{1k}\wedge s]} I(Z_{2k} > t)\frac{\widetilde{M}(du;t)}{(H(u-;t))^2},$$

$$\eta_{2k}(s;t) = \frac{I(Z_{1k} > s, Z_{2k} \le t, \delta_{2k} = 1)}{H(s;Z_{2k}-)} - \int_{(-\infty;Z_{2k}\wedge t]} I(Z_{1k} > s)\frac{\widetilde{N}(s;dv)}{(H(s;v-))^2},$$

и $\sup\limits_{(s;t)\in Q(H)} |r_n(s;t)| \overset{п.н.}{=} O\left(\dfrac{\log n}{n}\right)$.

Доказательство предложения 2.4.8. Согласно теореме 2.1 в [172] при $m = 1,2$ имеем

$$\widetilde{\Lambda}_{mn}(s;t) - \widetilde{\Lambda}_m(s;t) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \eta_{mk}(s;t) + r_{mn}(s;t), \tag{2.4.17}$$

где $\sup\limits_{(s;t)\in Q(H)} |r_{mn}(s;t)| \overset{п.н.}{=} O\left(\dfrac{\log n}{n}\right)$, $\widetilde{\Lambda}_1(s;-\infty) = L_1(s;-\infty)$, $\widetilde{\Lambda}_2(s;t) = L_2(s;t)$. Теперь из (2.4.17) при $r_n(s;t) = (r_{1n}(s;t) \vee r_{2n}(s;t))$ следует (2.4.16). Предложение 2.4.8 доказано. ■

Замечание 2.4.9. Результат вида (2.4.16) имеет место и для оценок $\Lambda_n(s;t)$ без участия индикаторов δ_{mk}, где вместо $\widetilde{M}$ и $\widetilde{N}$ будут находится соответственно M и N. Следовательно его можно получить из (2.4.17). ■

Замечание 2.4.10. В [172], в формулах функционалов $\{\eta_{mn}(s;t), \ m = 1,2\}$ под интегралами дифференцирование осуществляется по аргументам функций $\{S_m(s;t) = P(Z_{11} > s, Z_{21} > t, \delta_{m1} = 1), \ m = 1,2\}$ вместо $\widetilde{M}$ и $\widetilde{N}$ соответственно. Легко видеть, что $\widetilde{M}(s;t) = P(Z_{21} > t, \delta_{11} = 1) - S_1(s;t)$ и

$\widetilde{N}(s;t)=P(Z_{11}>s,\delta_{21}=1)-S_2(s;t)$ и следовательно, $\widetilde{M}(ds;t)=-S_1(ds;t)$, $\widetilde{N}(s;dt)=-S(s;dt)$.
■

Пусть $D_2(Q(H))$ пространство Скорохода двумерных cádlág функций на $Q(H),\rho(\bullet;\bullet)$-соответствующая метрика и $\overset{D}{\Rightarrow}$ сходимость в $\Im$-топологии. Введём эмпирическое вектор-поле $\{\gamma_n(s;t)=(\gamma_{0n}(s;t),\gamma_{1n}(s;t),\gamma_{2n}(s;t)),(s,t)\in R^2\}$, где $\gamma_{0n}(s;t)=n^{1/2}(H_n(s;t)-H(s;t))$, $\gamma_{1n}(s;t)=n^{1/2}(\widetilde{M}_n(s;t)-\widetilde{M}(s;t))$, $\gamma_{2n}(s;t)=n^{1/2}(\widetilde{N}_n(s;t)-\widetilde{N}(s;t))$. В [172] установлено, что в $D_2(Q(H))$ при каждом $m=1,2$ и $n\to\infty$ в условиях предложения 2.4.8:

$$n^{1/2}\cdot(\widetilde{\Lambda}_{mn}(s;t)-\widetilde{\Lambda}_m(s;t))\overset{D}{\Rightarrow}W_m(s;t), \tag{2.4.18}$$

где $\{W_m(s;t),(s;t)\in Q(H),\ m=1,2\}$-гауссовские поля, определяемые равенствами

$$W_1(s;t)=-\int_{(-\infty;s]}\frac{\gamma_1(du;t)}{H(u-;t)}+\int_{(-\infty;s]}\frac{\gamma_0(u;t)\widetilde{M}(du;t)}{(H(u-;t))^2},$$

$$W_2(s;t)=-\int_{(-\infty;t]}\frac{\gamma_2(s;dv)}{H(s;v-)}+\int_{(-\infty;t]}\frac{\gamma_0(s;v)\widetilde{N}(s;dv)}{(H(s;v))^2},$$

где $\gamma(s;t)=(\gamma_0(s;t),\gamma_1(s;t),\gamma_2(s;t))$- слабый предел $\gamma_n(s;t)$, является гауссовским вектор-полем, с компонентами, имеющими почти всюду непрерывные траектории. При этом $MW_1(s;t)=MW_2(s;t)=0$,

$$Cov(W_1(s_1;t_1),W_1(s_2;t_2))=\int_{(-\infty;s_1\wedge s_2]}\frac{\widetilde{M}(du;t_1\vee t_2)}{H(u-;t_1)H(u-;t_2)}-\int_{(-\infty;s_1]}\int_{[u;s_2]}\frac{\widetilde{M}(du;t_1)\cdot\widetilde{M}(dv;t_1\vee t_2)}{(H(u-;t_1))^2\cdot H(v-;t_2)}-$$

$$-\int_{(-\infty;s_2]}\int_{[u;s_1]}\frac{\widetilde{M}(du;t_2)\cdot\widetilde{M}(dv;t_1\vee t_2)}{(H(u-;t_2))^2\cdot H(v-;t_1)}+\int_{(-\infty;s_1]}\int_{(-\infty;s_2]}\frac{H(u\vee v-;t_1\vee t_2)\widetilde{M}(du;t_1)\cdot\widetilde{M}(dv;t_2)}{(H(u-;t_1))^2\cdot(H(v-;t_2))^2}.$$

и аналогично определяются остальные элементы ковариационной структуры вектора (W_1,W_2), равного по распределению вектору (η_{11},η_{21}). В виду громоздкости формул, мы их не будем здесь приводить (см.[172]).
■

Предложение 2.4.11. В условиях предложения 2.4.8 при $n\to\infty$ в $D_2(Q(H))$:

$$n^{1/2}(\widetilde{\Lambda}_n(s;t)-L(s;t))\overset{D}{\Rightarrow}W(s;t), \tag{2.4.19}$$

где $W(s;t)=W_1(s;-\infty)+W_2(s;t)$.

Доказательство предложения 2.4.11. Следуя стандартным рассуждениям, а также лемме А.1 и предложения 2.1 в [172] в $D_4(Q(H)\times Q(H))$ при $n\to\infty$: $n^{1/2}((\widetilde{\Lambda}_{1n}(s;t)-\widetilde{\Lambda}_1(s;t));(\widetilde{\Lambda}_{2n}(s;t)-\widetilde{\Lambda}_2(s;t))\overset{D}{\Rightarrow}(W_1(s;t);W_2(s;t)$, причём $\rho(n^{1/2}(\widetilde{\Lambda}_n(\ s;t)-L(s;t);W(s;t))\le 2\max\limits_{m=1,2}\rho(n^{1/2}\widetilde{\Lambda}_{mn}(\ s;t)-\widetilde{\Lambda}_m(s;t);W_m(s;t))$. Требуемый результат теперь следует из (2.4.18). Предложение 2.4.11 доказано. ■

Замечание 2.4.12. Очевидно, аналог (2.4.19) имеет место и для последовательности $n^{1/2}(\Lambda_n(s;t)-\Lambda(s;t))$ с предельным гауссовским полем $W^*(s;t)=W_1^*(s;-\infty)+W_2^*(s;t)$, где $W_m^*(s;t)$ получаются из $W_m(s;t),\ m=1,2$, заменой функций $\widetilde{M}(s;t)$ и $\widetilde{N}(s;t)$ соответственно на $M(s;t)$ и $N(s;t)$. ■

Теперь докажем утверждение о слабой сходимости последовательностей $e_{mn}(s;t)=\dfrac{n^{1/2}(F_{mn}(s;t)-F_m(s;t))}{F_m(s;t)},\quad m=1,2,3$ к соответствующим предельным гауссовским полям при $n\to\infty$. В этой связи определим ещё одно гауссовское поле $W^0(s;t)=\dfrac{\gamma_0(s;t)}{H(s;t)}$. Легко видеть, что $W^0(\bullet;\bullet)$ имеет нулевое среднее и ковариацию

$$Cov(W^0(s_1;t_1),W^0(s_2;t_2))=\frac{H(s_1\vee s_2;t_1\vee t_2)-H(s_1;t_1)H(s_2;t_2)}{H(s_1;t_1)\cdot H(s_2;t_2)}.$$

Далее нами будет использовано следующее неравенство из [172, стр. 292] для двумерной эмпирической функции выживания $H_n(s;t)$ для каждого числа $z>0$:

$$P\left(\sup_{(s;t)\in Q(H)}\left|H_n(s;t)-H(s;t)\right|>z\right)\le 4\exp(4z(1+z))\cdot(1+n^2)^2\exp(-2nz^2),\tag{2.4.20}$$

и, в частности, при $z=\left(\dfrac{(4+\varepsilon)}{2}\cdot\dfrac{\log n}{n}\right)^{1/2},\varepsilon>0,$

$$P\left(\sup_{(s;t)\in Q(H)}\left|H_n(s;t)-H(s;t)\right|>\left(\frac{(4+\varepsilon)}{2}\frac{\log n}{n}\right)^{1/2}\right)\le V\cdot n^{-\varepsilon},\tag{2.4.21}$$

где $V=V(\varepsilon)$-положительная постоянная.

Теорема 2.4.13. Пусть пары $\{(X_i;Y_i);\ i\ge 1\}$ распределены одинаково, последовательности $\{X_i;i\ge 1\}$ и $\{Y_i,i\ge 1\}$ взаимонезависимы. Тогда при $n\to\infty$
в $D_2(Q(H))$:

$$e_{mn}(s;t)\overset{D}{\Rightarrow}W(s;t),\quad m=1,2\tag{2.4.22}$$

и при непрерывности функции $G(s;t,)$

$$e_{3n}(s;t) \overset{D}{\Rightarrow} \widetilde{W}(s;t), \qquad (2.4.23)$$

где $\widetilde{W}(s;t) = W(s;t) - R(s;t)(W^*(s;t) + W^0(s;t))$.

Доказательство теоремы 2.4.13. Сперва заметим, что согласно теореме 2.4.3 $F_m(s;t) = F(s;t)$, $m = 1,2,3$. Пусть $m = 1$. Используя разложение экспоненциальной оценки, имеем

$$e_{1n}(s;t) = n^{1/2}(\widetilde{\Lambda}_n(s;t) - L(s;t)) + \omega_n(s;t), \quad (s;t) \in Q(H), \qquad (2.4.24)$$

где

$$\omega_n(s;t) = \frac{n^{1/2}}{2}\exp\{-(\theta_n(s;t) - L(s;t))\}(\widetilde{\Lambda}_n(s;t) - L(s;t))^2,$$

$$\left(\widetilde{\Lambda}_n(s;t) \wedge L(s;t)\right) \le \theta_n(s;t) \le (\widetilde{\Lambda}_n(s;t) \vee L(s;t)).$$

Ввиду (2.4.8)

$$\sup_{(s;t)\in Q(H)} \left|\omega_n(s;t)\right| \overset{п.н}{=} O(n^{-1/2}\log\log n). \qquad (2.4.25)$$

Требуемое утверждение (2.4.22) при $m = 1$ следует из (2.4.19), (2.4.24) и (2.4.25). Поскольку

$$e_{2n}(s;t) = e_{1n}(s;t) + \left[F(s;t)\right]^{-1} \cdot n^{1/2}(F_{2n}(s;t) - F_{1n}(s;t)), \qquad (2.4.26)$$

и $\sup_{(s;t)\in Q(H)} \left[F(s;t)\right]^{-1} \le \sup_{(s;t)\in Q(H)} \left[H(s;t)\right]^{-1} < \infty$, тогда второе слагаемое в правой части равенства (2.4.26) согласно (2.4.2) является $O(n^{-1/2}), п.н$. Отсюда и следует справедливость (2.4.22) и при $m = 2$. Докажем (2.4.23). Для степенной оценки запишем следующий аналог разложения (2.3.21)

$$e_{3n}(s;t) = \mu_n(s;t) + \omega_n^*(s;t), \qquad (2.4.27)$$

где

$$\mu_n(s;t) = n^{1/2}(R_n(s;t)\log H_n(s;t) - R(s;t)\log H(s;t)) = n^{1/2}(\widetilde{\Lambda}_n(s;t) - L(s;t)) + \sum_{i=1}^{4}\mu_{in}(s;t),$$

$$\mu_{1n}(s;t) = n^{1/2}R(s;t)\left[-(\Lambda_n(s;t) - \Lambda(s;t)) + (-\log H_n(s;t) + \log H(s;t))\right];$$

$$\mu_{2n}(s;t) = \frac{-n^{1/2}}{\Lambda_n(s;t)}(\Lambda_n(s;t) - \Lambda(s;t))(\widetilde{\Lambda}_n(s;t) - L(s;t));$$

$$\mu_{3n}(s;t) = n^{1/2}\frac{R(s;t)}{\Lambda_n(s;t)}(\Lambda_n(s;t)-\Lambda(s;t))^2;$$

$$\mu_{4n}(s;t) = n^{1/2}(R_n(s;t)-R(s;t))(-\log H_n(s;t)+\log H(s;t));$$

$$\omega_n^*(s;t) = n^{-1/2}\left[F(s;t)\right]^{-1}\exp\left\{-\theta_n^*(s;t)\right\}\mu_n^2(s;t),$$

и $\left(\left(-\log F_{3n}(s;t)\right)\wedge L(s;t)\right)\le\theta_n^*(s;t)\le\left(\left(-\log F_{3n}(s;t)\right)\vee L(s;t)\right)$. Поскольку для всех $(s;t)\in Q(H)$

$$-\log H_n(s;t)+\log H(s;t) = \frac{-\left(H_n(s;t)-H(s;t)\right)}{H(s;t)}-\frac{1}{2}\frac{\left(H_n(s;t)-H(s;t)\right)^2}{\alpha_n^2(s;t)}, \qquad (2.4.27)$$

где $\left(H_n(s;t)\wedge H(s;t)\right)\le\alpha_n(s;t)\le\left(H_n(s;t)\vee H(s;t)\right)$ и $\dfrac{1}{\alpha_n(s;t)}\le\dfrac{\left|\left(H_n(s;t)-H(s;t)\right)\right|}{\alpha_n(s;t)H(s;t)}+\dfrac{1}{H(s;t)}$, то согласно двумерного ЗПЛ Кифера (см. § 1.9)

$$\sup_{(s;t)\in Q(H)}\alpha_n^{-2}(s;t)\left(H_n(s;t)-H(s;t)\right)^2 \overset{п.н.}{=} O\left(\frac{\log\log n}{n}\right). \qquad (2.4.28)$$

Из соотношений (2.4.19), (2.4.27) и (2.4.28) следует, что при $n\to\infty$ в $D_2(Q(H))$

$$n^{1/2}\left(\widetilde{\Lambda}_n(s;t)-L(s;t)\right)+\mu_{1n}(s;t)\overset{D}{\Rightarrow}\widetilde{W}(s;t). \qquad (2.4.29)$$

В (2.4.29) использован и тот факт, что в $D_2(Q(H))$ при $n\to\infty$ (лемма А.1 в [172]) $n^{1/2}\left(H_n(s;t)-H(s;t)\right)\overset{D}{\Rightarrow}\gamma_0(s;t)$. Нам остается показать, что остальные слагаемые в правой части равенства (2.4.27) стремятся к нулю. Из доказательства теоремы 2.4.2 имеем

$$\frac{1}{\Lambda_n(s;t)}\le\frac{1}{M_n(s;-\infty)}+\frac{1}{N_n(s;t)}.$$

Применяя ЗПЛ для $M_n(s;-\infty)$, $N_n(s;t)$ и аналоги (2.4.3) имеем для $(s;t)\in Q(H)$

$$\frac{1}{\Lambda_n(s;t)}\le\frac{1}{M(s;-\infty)}+\frac{1}{N(s;t)}+O\left(\left(\frac{\log\log n}{n}\right)^{1/2}\right)\ \text{п.н.}$$

Тогда ЗПЛ (2.4.8.) и его аналог для $\Lambda_n(s;t)$ дают оценки

$$\sup_{(s;t)\in Q(H)} \left|\mu_{mn}(s;t)\right| \overset{п.н.}{=} O\left(n^{-\frac{1}{2}} \log\log n \right), \quad m = 2{,}3 . \qquad (2.4.30)$$

Поскольку для $(s;t) \in Q(H)$:

$$\left|R_n(s;t) - R(s;t)\right| \le \left[\Lambda_n(s;t)\right]^{-1} \left[\left|\Lambda_n(s;t) - \Lambda(s;t)\right| + \left|\widetilde{\Lambda}_n(s;t) - L(s;t)\right|\right],$$

то с учётом (2.4.27) и (2.4.28) также имеем

$$\sup_{(s;t)\in Q(H)} \left|\mu_{4n}(s;t)\right| \overset{п.н.}{=} O\left(n^{-\frac{1}{2}} \log\log n \right). \qquad (2.4.31)$$

Наконец оценим ω_n^*. Заметим, что

$$\sup_{(s;t)\in Q(H)} \omega_n^*(s;t) \overset{п.н.}{=} O\left(n^{-\frac{1}{2}} \left[\sup_{(s;t)\in Q(H)} \left|\mu_n(s;t)\right| \right]^2 \right).$$

Однако, по определению μ_n и из (2.4.30), (2.4.31) следует, что

$$\sup_{(s;t)\in Q(H)} \left|\mu_n(s;t)\right| \overset{п.н.}{=} \left((\log\log n)^{\frac{1}{2}} \right),$$

что даёт

$$\sup_{(s;t)\in Q(H)} \omega_n^*(s;t) \overset{п.н.}{=} O\left(n^{-\frac{1}{2}} (\log\log n) \right). \qquad (2.4.32)$$

Теперь (2.4.23) следует из (2.4.29)-(2.4.32). Теорема 2.4.13 доказана. ■

Замечание 2.4.14. Из (2.4.22) и (2.4.23) следует, что экспоненциальная и множительная оценки сходятся к одному и тому же предельному гауссовскому процессу. Однако, в отличие от одномерного случая, у нас нет оснований утверждать, что к тому же пределу стремится и степенная оценка. Другими словами, имеют ли одно и тоже распределение процессы $W(s;t)$ и $\widetilde{W}(s;t)$?. Проверять это посредством вычисления ковариаций становится невозможным ввиду громоздкости их выражений. ■

Замечание 2.4.15. Заметим, что в настоящем параграфе, в отличие от цензурирования на прямой, при исследовании многомерных оценок нами не был использован метод мартингалов. Как отмечено в работах [64,65], в случае пространственных наблюдений нет канонического способа определения понятий «прошлого», «настоящего» и «будущего», на которых основывается само понятие мартингал. Поэтому к настоящему времени нет универсальных методов построения и исследования оценок по многомерным цензурированным наблюдениям. ■

§ 2.5. Аппроксимации последовательных оценок функции выживания сложных систем

Рассмотрим оценки (1.7.6) и (1.7.7). Пусть

$$D_a = \{(x;t):\ 0 \le x \le t - a\ (< \tau),\ a \le t < a + \tau\} \cup \{(x;t):\ 0 \le x \le \tau,\ t > a + \tau\},$$

$$e_{ij}(x;t) = I\left(X_{ij} \le \left(x \wedge Y_{ij} \wedge (t - L_i)^+\right) - \int\limits_{[0;x]} I\left(\left(X_{ij} \wedge Y_{ij} \wedge (t - L_i)^+\right)\right) \ge u \right) d\Lambda_j(u),$$

$$(t - L_i)^+ = (t - L_i) I(t \ge L_i),\quad i = 1,\dots,n;\quad j = 1,\dots,k;$$

и

$$A_{ij}(x;t) = \Im_j(x)(1 - F_j(x)) \int\limits_{[0;x]} \frac{de_{ij}(u;t)}{K(t-u)(1 - F_j(u))(1 - G_j(u))},$$

где $\Im_j(x) = \left.\dfrac{\partial h_\varphi(p_1,\dots,p_k)}{\partial p_j}\right|_{p_j = 1 - F_j(x)}$, $j = 1,\dots,k$. Отметим, что h_φ непрерывна на $[0;1]^k$, частные производные первого и второго порядков также непрерывны и равномерно ограничены на $[0;1]^k$ единицей (см. лемму 2.1 в [161]).

Теорема 2.5.1. Пусть ф.р. $F_1,\dots,F_k$ непрерывны, K непрерывна на $[a;\infty)$ и $F(\tau) < 1$. Тогда при выполнении условий (CI)-(CIV) из § 1.7 при каждом $q \in (1 - 3\alpha/2; 1/2)$

$$\sup_{(x;t)\in D_a} \left| n\left(\hat{F}_n(x;t) - F(x)\right) - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} A_{ij}\left(\left(x \wedge x^*_{(n-[cn^\alpha]),j}(t_n)\right); t_n\right) \right| \overset{п.н.}{=} o\left(n^q\right) + O\left(n^\alpha\right). \tag{2.5.1}$$

Доказательство теоремы 2.5.1. Равномерная ограниченность частных производных до второго порядка и разложение Тейлора нам позволяют записывать следующее соотношение при каждом $(x;t) \in D_a$:

$$\hat{F}_n(x;t) - F(x) = \sum_{j=1}^{k} \Im_j(x)\left(\hat{F}_{jn}(x;t) - F_j(x)\right) + R_n(x;t), \tag{2.5.2}$$

где $\left|R_n(x;t)\right| \le \dfrac{1}{2}\sum\limits_{e=1}^{k}\sum\limits_{m=1}^{k}\left|\hat{F}_{en}(x;t) - F_e(x)\right|\left|\hat{F}_{mn}(x;t) - F_m(x)\right|$. Согласно части (II) теоремы 3 из [201], при каждом $j = 1,\dots,k$,

$$\sup_{(s;t)\in D_a} \left| n\left(\hat{F}_{jn}(x;t) - F_j(x)\right) - \sum_{i=1}^{n} A_{ij}\left(\left(x \wedge x^*_{(n-[cn^\alpha]),j}(t_n)\right); t_n\right) \right| \overset{п.н.}{=} o\left(n^q\right) + O\left(n^\alpha\right). \tag{2.5.3}$$

Пусть $D(D_a)$-пространство Скорохода функций, определенных на D_a. Из следствия 5 работы [201] имеем, что последовательности случайных процессов

$$\left\{\left(\frac{n}{2\log\log n}\right)^{1/2}\left(\hat{F}_{jn}(x;t)-F_j(x)\right),\ \ (x;t)\in D_a\right\},\quad j=1,\dots,k,$$

почти наверное относительно компактны в $D(D_a)$ и множествами их предельных точек являются единичные шары гильбертов пространств воспроизводящих ядер с ковариационными ядрами (см. также [75,237]):

$$\Gamma_j((x;t),(y;s))=(1-F_j(x))(1-F_j(y))g_j((x\wedge y);(t\vee s)),$$

где

$$g_j(x;t)=\int\limits_{[0;x]}\frac{d\Lambda_j(u)}{K(t-u)(1-F_j(u))(1-G_j(u-))}.$$

Следовательно, согласно ЗПЛ Штрассена (см. § 1.9)

$$\limsup_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2\log\log n}\right)^{1/2}\sup_{(x;t)\in D_a}\left|\hat{F}_{jn}(x;t)-F_j(x)\right|\overset{п.н.}{=}\sup_{(x;t)\in D_a}(1-F_j(x))g_j(x;t)\le$$

$$\le\frac{1}{K(a)(1-F_j(\tau))}\int\limits_{[0;\tau]}\frac{dF_j(u)}{(1-G_j(u-))}<\infty,$$

и отсюда

$$\sup_{(x;t)\in D_a}\left|R_n(x;t)\right|\overset{п.н.}{=}O\left(\frac{\log\log n}{n}\right). \qquad (2.5.4)$$

Теперь из (2.5.2)-(2.5.4) получаем (2.5.1). Теорема 2.5.1 доказана. ■

Следствие 2.5.2. Из доказательства теоремы 2.5.1 следует, что последовательность случайных процессов

$$\left\{\left(\frac{n}{2\log\log n}\right)^{1/2}\left(\hat{F}_n(x;t)-F(x)\right),\ \ (x;t)\in D_a\right\}$$

почти наверное относительна компактна в $D(D_a)$ и множеством предельных точек является единичный шар гильбертова пространства с воспроизводящим ядром ковариационного ядра

$$\Gamma((x;t);(y;s))=\sum_{j=1}^{k}\Im_j(x)\Im_j(y)\Gamma_j((x;t);(y;s)). \qquad (2.5.5)$$

Отсюда, в свою очередь, следует равномерно-сильная состоятельность оценок (1.7.6) с оценкой скорости сходимости:

$$\sup_{(x;t)\in D_a}\left|\tilde{F}_n(x;t)-F(x)\right| \overset{п.н.}{=} O\left(\left(\frac{\log\log n}{n}\right)^{1/2}\right). \ ■$$

Замечание 2.5.3. Следует отметить, что случайные процессы $\left\{A_{ij}(x;t),\ (x;t)\in D_a\right\}_{j=1}^{k}$ при каждом фиксированном $i=1,...,n$ и t являются квадратично-интегрируемыми ортогональными мартингалами (см. [161]). Следовательно, суммирование в (2.5.5) является следствием этой ортогональности. ■

Выводы

В первых двух параграфах главы 2 исследованы асимптотические свойства непараметрических оценок функционалов при случайном цензурировании с двух сторон. При этом в § 2.1 доказаны результаты сильной аппроксимации для оценок и для них установлены оптимальные скорости аппроксимации порядка $O\left(n^{-1/2}\log n\right)$. Эти результаты являются сильными чем результат Хорвата со скоростью аппроксимации $O\left(n^{-\lambda}\right)$ с $\lambda=\dfrac{1}{45000}$, доказанного в частной модели случайного цензурирования с двух сторон для оценки множительной структуры. При доказательстве этих результатов нами были использованы такие мощные методы асимптотической теории математической статистики как методы сильной аппроксимации, U-статистик и мартингалов. § 2.2 посвящен доказательству результатов строгой состоятельности непараметрических оценок с определением скорости сходимости порядка $O\left(\left(\dfrac{\log\log n}{n}\right)^{1/2}\right)$, т.е. законов типа повторного логарифма. Здесь случай разно-распределенных наблюдений также рассмотрен. В § 2.3 доказаны результаты сильной аппроксимации непараметрических оценок в обобщенной модели случайного цензурирования справа. При этом правая граница отрезка, где осуществляется аппроксимация является порядковой статистикой и поэтому скорости аппроксимации получены зависящими от номера этой статистики. Эти результаты, в частности содержат в себе также и свойства состоятельности оценок. В § 2.4 исследованы асимптотические свойства непараметрических оценок из § 1.5 для двумерной функции выживания при случайном цензурировании справа. § 2.5 посвящен исследованию асимптотических свойств последовательных оценок функции надёжности сложных систем и для них доказаны результаты аппроксимации последовательностью мартингалов. ■

Глава 3. Непараметрическое оценивание функционалов от распределений в моделях информативного цензурирования

§ 3.1. Асимптотические свойства трех классов оценок базовых функционалов в регрессионной модели Кокса при двустороннем цензурировании наблюдений

Классическая модель Кокса, описываемая представлением к.ф.и. по формуле (1.6.1) является полупараметрической (или параметрической-непараметрической), где неизвестными являются параметр регрессии β и базовая к.ф.и. Λ_0. Поэтому их оценивание проводится в двух этапах: сперва строятся промежуточные оценки $\Lambda_{\tau 0}^{(n)}(x;\beta)$ по формуле (1.6.10) для условной к.ф.и. $\Lambda_{\tau 0}(x)$ при фиксированном β, а затем решая уравнение (1.6.11) находится ОМП β_n и методом подстановки строится окончательная оценка $\Lambda_{\tau 0}^{(n)}(x;\beta)$ для к.ф.и.. Поэтому, для исследования оценок (1.6.12) для условных базовых функций выживания $1-H_{\tau 0}(x)$, сперва исследуем свойства оценок $\Lambda_{\tau 0}^{(n)}(x;\beta)$ и β_n, а затем и $\Lambda_{\tau 0}^{(n)}(x;\beta_n)$. Исследование $\Lambda_{\tau 0}^{(n)}(x;\beta)$ в основном будем проводить методом мартингалов, порожденных считающими процессами.

Обозначим $N_j(u) = \mathrm{I}(\zeta_j \le u, \chi_{3j} = 1)$. Пусть $\square_x^{(j)} = \mathcal{N}_0 \cup \sigma(L_j, Y_j, V_j, N_j(u),$ $\mathrm{I}(\mathrm{L}_j \le u \le Z_j \wedge Y_j),\ u \le x,\ j = 1,...,n)$ и $\square_x = \cap_{j=0}^{\infty} \square_x^{(j)}$ пополненные потоки $\sigma-$алгебр. Тогда с. в-ны L_j, Y_j и V_j являются измеримыми относительно $\square_0 = \cap_{x=0}^{\infty} \square_x$. Определим случайный процесс

$$M_n(x) = \mathrm{T}_{3n}(x) - \int_{[0;x]} \omega_n^{(0)}(u;\beta)d\Lambda_0(u) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(N_j(x) - A_j(x)) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mu_j(x),\ \text{где}$$

$$A_j(x) = \int_{[0;x]} \exp(\beta v_j) I(L_j \le u \le Z_j \wedge Y_j) d\Lambda_0(u) = \int_{[L_j;Y_j \wedge x]} I(Z_j \ge u) d\Lambda(u/v_j).$$

Поскольку $N_j(x) = I(\mathrm{L}_j \le Z_j \le Y_j \wedge x)$, то нетрудно видеть, что $\mu_j(x) \in \square_{loc}^2(\square_x^{(j)})$, следовательно $M_n(x) \in \square_{loc}^2(\square_x)$ и согласно (1.8.5), с учетом и взаимоортогональности μ_i и $\mu_j, i \ne j$, будем иметь

$$n < M_n; M_n > (x) = \int_{[0;x]} \omega_n^{(0)}(u;\beta)(1 - \Delta\Lambda_0(u))d\Lambda_0(u). \qquad (3.1.1)$$

Обозначим $\square_n(x) = \square_n(x;\beta) = \Lambda_{\tau 0}^{(n)}(x;\beta) - \Lambda_{\tau 0}(x;\beta)$.

Теорема 3.1.1. В условиях (C1)-(C3) при $n \to \infty$

$$\sup_{\tau \le x \le \mathrm{T} \wedge \zeta_{(n)}} |\square_n(x)| \xrightarrow{p} 0. \qquad (3.1.2)$$

Доказательство теоремы 3.1.1. Легко видеть, что

$$\square_n(x \wedge \zeta_{(n)}) = \int\limits_{[\tau; x\wedge\zeta_{(n)}]} \frac{\mathrm{I}(\omega_n^{(0)}(u;\beta) > 0)dM_n(u)}{\omega_n^{(0)}(u;\beta)}. \qquad (3.1.3)$$

Подынтегральный процесс в (3.1.1) является $\square_x$-предсказуемым. Следовательно (см. замечание 1.8.6), интеграл (3.1.3) также является локально-квадратично интегрируемым $\square_x$-мартингалом и, согласно формуле (1.8.7), предсказуемая квадратическая характеристика этого процесса вычисляется, с учетом (3.1.1), как

$$<\square_n;\square_n>(x\wedge\zeta_{(n)}) = \int\limits_{[\tau,x\wedge\zeta_{(n)}]} \frac{\mathrm{I}(\omega_n^{(0)}(u;\beta)>0)d<M_n;M_n>(u)}{(\omega_n^{(0)}(u;\beta))^2} = \frac{1}{n}\int\limits_{[\tau,x\wedge\zeta_{(n)}]} \frac{\mathrm{I}(\omega_n^{(0)}(u;\beta)>0)(1-\Delta\Lambda_0(u))d\Lambda_0(u)}{\omega_n^{(0)}(u;\beta)}$$

(3.1.4)

Используем неравенство Ленгляра-Реболледо из следствия 1.8.5 1), что согласно (3.1.1) дает следующую цепочку оценок для любого $\varepsilon > 0$:

$$P(\sup_{\tau\le x\le \mathrm{T}\wedge\zeta_{(n)}} |\square_n(x)| \ge \varepsilon) \le \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon} + P(<\square_n;\square_n>(\mathrm{T}\wedge\zeta_{(n)}) > \varepsilon^2) = \varepsilon +$$

$$+P\left(\frac{1}{n}\int\limits_{[\tau;\mathrm{T}\wedge\zeta_{(n)}]} \frac{\mathrm{I}(\omega_n^{(0)}(u;\beta)>0)(1-\Delta\Lambda_0(u))d\Lambda_0(u)}{\omega_n^{(0)}(u;\beta)} > \varepsilon^2\right) \le$$

$$\le \varepsilon + P\left(\int\limits_{[\tau;\mathrm{T}\wedge\zeta_{(n)}]} \frac{\mathrm{I}(\hat{q}_n(u)>0)d\Lambda_0(u)}{\hat{q}_n(u)} > n\varepsilon^2\left(\min_{1\le i\le n} e^{\beta v_i}\right)\right) \le$$

$$\le \varepsilon + P\left(\frac{\Lambda_{\tau 0}(\mathrm{T}\wedge\zeta_{(n)})}{\inf\limits_{\tau\le x\le \mathrm{T}\wedge\zeta_{(n)}}(\hat{q}_n(x))} > n\varepsilon^2(\min_{1\le i\le n} e^{\beta v_i})\right), \qquad (3.1.5)$$

где $\hat{q}_n(x)$ определяется формулой (1.3.39). Покажем, что при $n\to\infty$ вероятность справа в последнем неравенстве в (3.1.5) стремится к нулю, для чего, в свою очередь покажем конечность предела отношения в левой части неравенства внутри этой вероятности. Из условия (C2)

$$\Lambda_{\tau 0}(\mathrm{T}\wedge\zeta_{(n)}) = \int\limits_{[\tau;\mathrm{T}]} \mathrm{I}(u\le\zeta_{(n)})d\Lambda_0(u) \le \Lambda_{\tau 0}(\mathrm{T}) < \infty \text{ , п.н.}$$

$$\Lambda_{\tau 0}(\mathrm{T}) - \Lambda_{\tau 0}(\mathrm{T}\wedge\zeta_{(\mathrm{n})}) = (\Lambda_{\tau 0}(\mathrm{T}) - \Lambda_{\tau 0}(\zeta_{(\mathrm{n})}))\mathrm{I}(\zeta_{(n)} < \mathrm{T}) \to 0\text{, п.н.} \qquad (3.1.6)$$

так как существует число c>0 такое, что

$$P(\zeta_{(n)} < \mathrm{T}) = \int\limits_{[0;\infty)} P(\zeta_{(n)} < \mathrm{T}/V = v)d\pi(v) = \int\limits_{[0;\infty)} \left[K(\mathrm{T}-/v)(1-G(\mathrm{T}-/v))(1-H(\mathrm{T}-/v))\right]^n d\pi(v) \le$$

$$\le \int\limits_{[0;\infty)} \left[K(\mathrm{T}/v)(1-G(\mathrm{T}-/v))(1-H(\mathrm{T}-/v))\right]^n d\pi(v) = \mathrm{O}(e^{-cn}), \qquad (3.1.7)$$

Пусть $q(x) = M\hat{q}_n(x) = \int\limits_{[0;\infty)} P(\mathrm{L} \le x \le Z \wedge Y / V = v)d\pi(v)$. Тогда для любого числа $\gamma > 0$,

$$P\left(\left|\inf_{\tau\le x\le \mathrm{T}\wedge\zeta_{(n)}} |\hat{q}_n(x)| - \inf_{\tau\le x\le \mathrm{T}\wedge\zeta_{(n)}} |q(x)|\right| > \gamma\right) \le P\left(\sup_{\tau\le x\le \mathrm{T}\wedge\zeta_{(n)}} |\hat{q}_n(x) - q(x)| > \gamma, \zeta_{(n)} \ge \mathrm{T}\right) + P\left(\sup_{\tau\le x\le \mathrm{T}\wedge\zeta_{(n)}} |\hat{q}_n(x) - q(x)| > \gamma, \zeta_{(n)} < \mathrm{T}\right) \le$$

$$\le P\left(\sup_{\tau\le x\le \mathrm{T}} |\hat{q}_n(x) - q(x)| > \gamma\right) + \int\limits_{[0;\infty)} P(\zeta_{(n)} < \mathrm{T}/V = v)d\pi(v) = Q_n + \mathrm{O}(e^{-cn}), \qquad (3.1.8)$$

где использовали (3.1.7). Оценим вероятность Q_n. Рассмотрим следующее разбиение отрезка $[\tau;\mathrm{T}]$: а) $\tau = a_0 < a_1 < ... < a_{m(\gamma)} = \mathrm{T}$; б) $|q(a_{i-1}) - q(a_i)| \le \gamma/3$, $i = 1,...,m(\gamma)$; в) $m(\gamma) \le 6/\gamma$; Если $|\hat{q}_n(a_{i-1}) - q(a_{i-1})| \le \gamma/3$, $|\hat{q}_n(a_i) - q(a_i)| \le \gamma/3$ и $x \in [a_{i-1}; a_i)$, то $|\hat{q}_n(x) - q(x)| \le \gamma/3 + 2\gamma/3 = \gamma$. Следовательно, если $\sup|\hat{q}_n(x) - q(x)| > \gamma$, то для некоторого $0 \le i \le m(\gamma) : |\hat{q}_n(a_i) - q(a_i)| > \gamma/3$. Таким образом,

$$Q_n \le 2m(\gamma) \max_{0\le i\le m(\gamma)} P(|\hat{q}_n(a_i) - q(a_i)| \ge \gamma/3) \le 4m(\gamma)(m(\gamma)+1)\exp(-\tfrac{2}{9}n\gamma^2), \qquad (3.1.9)$$

где последняя экспоненциальная оценка получилась в результате применения неравенства Гофдинга (см. лемму 1.9.14) для средней вероятности в (3.1.9). Из соотношений (3.1.5)-(3.1.9) следует (3.1.2). Теорема 3.1.1 доказана. ■

Замечание 3.1.2. Из теоремы 3.1.1 мы можем получить соответствующий результат и при отсутствии случайного цензурирования слева. При этом необходимо полагать $\tau \equiv 0$. Сказанное относится и результатов, доказываемых далее. ■

Для исследования свойств ОМП $\hat{\beta}_n$, являющейся решением уравнения (1.6.11) нам необходимо ввести несколько вспомогательных функций. Пусть $Q(x) = \int\limits_{[0;\infty)} Q(x/v)d\pi(v)$, где $Q(x/v) = \mathrm{M}[\mathrm{I}(\mathrm{L} \le x \le Z \wedge Y, \chi_3 = 1)/V = v] =$
$= P(\mathrm{L} \le x \le Z \wedge Y, \chi_3 = 1/V = v)$.

Пусть $g(\cdot)$ непрерывная функция на $[0;\infty)$ и $E(g(v);x) = \mathrm{M}\{g(V)\mathrm{I}(\mathrm{L} \le x \le Z \wedge Y)\} =$

$= \mathrm{M}\{g(V)P(\mathrm{L} \le x \le Z \wedge Y / V)\} = \int\limits_{[0;\infty)} g(v)P(\mathrm{L} \le x \le Z \wedge Y / V = v)d\pi(v), \qquad E_1(g(v);x) =$ $= \mathrm{M}\{g(V)\mathrm{I}(\mathrm{L} \le x \le Z \wedge Y, \chi_3 = 1)\} = M\{g(V)Q(x/V)\}$. Определим также и эмпирические оценки этих функций:

$$\hat{Q}_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{I}(\mathrm{L}_i \le x \le Z_i \wedge Y_i, \chi_{3i} = 1), \qquad \hat{E}_n(g(v);x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(v_i)\mathrm{I}(\mathrm{L}_i \le x \le Z_i \wedge Y_i),$$

$$\hat{E}_{1n}(g(v);x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(v_i)\mathrm{I}(\mathrm{L}_i \le x \le Z_i \wedge Y_i, \chi_{3i} = 1).$$

Очевидно, $Q(x) = E_1(1;x)$ и $\hat{Q}_n(x) = \hat{E}_{1n}(1;x)$. Более того, $\hat{E}_n$ и $\hat{E}_{1n}$ являются несмещенными оценками соответственно для E и E_1. Равномерно-строгая состоятельность этих оценок следует из теоремы Гливенко-Кантелли (см. § 1.9), а также из леммы А.1 из [294].

Лемма 3.1.3 [294]. Пусть $g(v)$ непрерывная функция на $[0;\infty)$ и $\mathrm{M}g^2(V) < \infty$. Тогда при $n \to \infty$

$$\begin{aligned} &\sup_{0 \le x < \infty}\left|\hat{E}_n(g(v);x) - E(g(v);x)\right| \to 0, \ \textit{п.н.} \\ &\sup_{0 \le x < \infty}\left|\hat{E}_{1n}(g(v);x) - E_1(g(v);x)\right| \to 0, \ \textit{п.н.} \end{aligned} \tag{3.1.11}$$

■

Свойство состоятельности оценки $\hat{\beta}_n$ содержится в следующей теореме.

Теорема 3.1.4. Пусть выполнены условия (С1)-(С3). Кроме того, пусть ф.р. $\pi(v)$ абсолютно непрерывна и

$$\sup_{t \in B(\varepsilon_0;\beta)} \mathrm{M}[V\exp(tV)]^2 \le K < \infty, \tag{3.1.12}$$

где $B(\varepsilon_0;\beta)$ – интервал длины $2\varepsilon_0$ с центром в точке β(-истинное значение). Тогда уравнение (1.6.11) имеет решение $\{\hat{\beta}_n, n \ge 1\}$ и при $n \to \infty$

$$\hat{\beta}_n \to \beta \ \text{п.н.} \tag{3.1.13}$$

Доказательство теоремы 3.1.4. Нетрудно убедиться в том, что логарифм функции правдоподобия $\mathrm{L}_n(\beta)$ из §1.6 можно представить в виде

$$\log \mathrm{L}_n(\beta) = \beta\hat{E}_{1n}(v;0) - \int\limits_{[0;\infty)} (-\log \hat{E}_n(e^{\beta v};x))d\hat{Q}_n(x), \tag{3.1.14}$$

а соответствующее уравнение правдоподобия как

$$\frac{1}{n}U_n^{\mathrm{T}}(\beta) = \frac{d\log \mathrm{L}_n(\beta)}{d\beta} = \hat{E}_{1n}(v;0) + \int\limits_{[0;\infty)} \frac{\hat{E}_n(ve^{\beta v};x)}{\hat{E}_n(e^{\beta v};x)}d\hat{Q}_n(x) = 0\,. \tag{3.1.15}$$

Поскольку формулы (3.1.14) и (3.1.15) по структуре такие же, как формулы (3.3) и (3.4) в [294], то дальнейшее доказательство теоремы можно проводить по линии доказательства теоремы 3.1 в [294] и поэтому оно опускается. Теорема 3.1.4 доказана. ■

Замечание 3.1.5. Для дальнейших исследований функции $U_n^{\mathrm{T}}(\beta)$ пред-почтительным является ее представление (1.6.11) в терминах считающих процессов $N_i(x)$, по сравнению с (3.1.15), хотя легко видеть, что $n(-dQ_n(x)) = \sum_{i=1}^{n} dN_i(x)$, а также $\omega_n^{(k)}(x;\beta) = \hat{E}_n(v^k e^{\beta v};x),\ k = 0,1,2$. ■

Очевидно, свойства оценки $\hat{\beta}_n$ зависят от свойств функции $U_n^{\mathrm{T}}(\beta)$, которая в свою очередь выражается через $\omega_n^{(k)}(u;\beta), k = 0,1$. Заметим, что при справедливости (3.1.12)

$\omega^{(k+1)}(u;\beta) = \dfrac{d\omega^{(k)}(u;\beta)}{d\beta}, \quad \omega_n^{(k+1)}(u;\beta) = \dfrac{d\omega_n^{(k)}(u;\beta)}{d\beta}, \quad k = 0,1.$ Определим информационную функцию

$$\Im(\beta) = \int_{[0;\mathrm{T}]} \left[\frac{\omega^{(2)}(u;\beta)}{\omega^{(0)}(u;\beta)} - \left(\frac{\omega^{(1)}(u;\beta)}{\omega^{(0)}(u;\beta)} \right)^2 \right] d\mathrm{T}_3(u),$$

а также и ее эмпирическую оценку

$$\Im_n(\beta) = \int_{[0;\mathrm{T}]} \left[\frac{\omega_n^{(2)}(u;\beta)}{\omega_n^{(0)}(u;\beta)} - \left(\frac{\omega_n^{(1)}(u;\beta)}{\omega_n^{(0)}(u;\beta)} \right)^2 \right] d\mathrm{T}_{3n}(u).$$

Введем также и следующее условие:

(С4) Функции $\{\omega^{(k)}(u;t), k = 0,1,2\}$ являются равномерно непрерывными функциями по $u \in [0;\mathrm{T}]$ и $t \in B(\varepsilon_0;\beta)$, а также ограничены на $[0;\mathrm{T}] \times B(\varepsilon_0;\beta)$. ■

Теорема 3.1.6. Пусть выполнены условия (С1)-(С4) и (3.1.12). Тогда при $n \to \infty$

$$n^{1/2}(\hat{\beta}_n - \beta) \overset{D}{\Rightarrow} N(0;(\Im(\beta))^{-1}). \tag{3.1.16}$$

Доказательство теоремы 3.1.6. Так как функция $U_n^{\mathrm{T}}(t)$ непрерывна дифференцируема по $t \in B(\varepsilon_0;\beta)$, то согласно разложению Тейлора

$$-U_n^{\mathrm{T}}(\beta) = U_n^{\mathrm{T}}(\hat{\beta}_n) - U_n^{\mathrm{T}}(\beta) = (\hat{\beta}_n - \beta)\frac{dU_n^{\mathrm{T}}(\beta_n^*)}{d\beta},$$

где $\frac{dU_n^{\mathrm{T}}(\beta_n^*)}{d\beta} = \left.\frac{dU_n^{\mathrm{T}}(\beta)}{d\beta}\right|_{\beta=\beta_n{}^*}$ и $\beta_n^* \in ((\beta_n \wedge \beta);(\beta_n \vee \beta))$. Отсюда

$$n^{1/2}(\hat{\beta}_n-\beta)=\frac{n^{-1/2}U_n^{\mathrm{T}}(\beta)}{\frac{(-1)}{n}\cdot\frac{dU_n^{\mathrm{T}}(\beta_n^*)}{d\beta}}. \qquad (3.1.17)$$

Непосредственным вычислением (см. (1.6.11)) имеем $\Im_n(\beta)=\frac{(-1)}{n}\frac{dU_n^{\mathrm{T}}(\beta)}{d\beta}$. Согласно (3.1.17) и (C4) из леммы 3.1.3 имеем

$$\sup_{(u;t)\in[0;\mathrm{T}]\times B(\varepsilon_0;\beta)}\left|\omega_n^{(k)}(u;t)-\omega^{(k)}(u;t)\right|=o_p(1), n\to\infty; k=0,1,2, \qquad (3.1.18)$$

следовательно, $\Im_n(\beta)=\Im(\beta)+o_p(1), n\to\infty$. Таким образом, для завершения доказательства теоремы достаточно установить, что

$$n^{-1/2}U_n^{\mathrm{T}}(\beta)\underset{n\to\infty}{\overset{D}{\Rightarrow}}N(0;\Im(\beta)). \qquad (3.1.19)$$

Преобразуем функционал $U_n^{\mathrm{T}}(\beta)$, заменив считающие процессы в формуле (1.6.11) при помощи представления $N_i(u)=\mu_i(u)+A_i(u)$:

$$U_n^{\mathrm{T}}(\beta)=\sum_{i=1}^{n}\int_{[0;\mathrm{T}]}\left(v_i-\frac{\omega_n^{(1)}(u;\beta)}{\omega_n^{(0)}(u;\beta)}\right)d\mu_i(u), \qquad (3.1.20)$$

так как для всех β,

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{[0;\mathrm{T}]}\left(v_i-\frac{\omega_n^{(1)}(u;\beta)}{\omega_n^{(0)}(u;\beta)}\right)dA_i(u)=\int_{[0;\mathrm{T}]}\left(\omega_n^{(1)}(u;\beta)-\frac{\omega_n^{(1)}(u;\beta)}{\omega_n^{(0)}(u;\beta)}\cdot\omega_n^{(0)}(u;\beta)\right)d\Lambda_0(u)=0.$$

Поскольку подынтегральный процесс является $\square_0$-адаптированным процессом, то $\{U_n^{\mathrm{T}}(\beta),t\in[0;\mathrm{T}]\}$ является квадратично-интегрируемым мартингалом и ввиду ортогональности мартингалов μ_i, предсказуемая квадратическая вариация $n^{-1/2}U_n^{\mathrm{T}}(\beta)$ согласно (3.1.20) равна

$$<n^{-1/2}U_n^{t}(\beta);n^{-1/2}U_n^{t}(\beta)>=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_{[0;t]}\left(v_i-\frac{\omega_n^{(1)}(u;\beta)}{\omega_n^{(0)}(u;\beta)}\right)^2 e^{\beta v_i}\mathrm{I}(\mathrm{L}_i\le u\le Z_i\wedge Y_i)d\Lambda_0(u)=$$

$$=\int_{[0;\mathrm{T}]}\left[\frac{\omega_n^{(2)}(u;\beta)}{\omega_n^{(0)}(u;\beta)}-\left(\frac{\omega_n^{(1)}(u;\beta)}{\omega_n^{(0)}(u;\beta)}\right)^2\right]\omega_n^{(0)}(u;\beta)d\Lambda_0(u)=\int_{[0;t]}\lambda_n(u;\beta)d\Lambda_0(u)=\Im_{nt}^*(\beta),\ t\in[0;\mathrm{T}].$$

Поскольку в условиях теоремы (см. (3.1.18)) $\Im_{nT}^*(\beta)\xrightarrow[n\to\infty]{p}\Im(\beta)$, а также при каждом $\varepsilon>0$ и $t\in[0;\mathrm{T}]$ $\int_{[0;t]}\mathrm{I}(\lambda_n(u;\beta)>\varepsilon n^{1/2})\lambda_n(u;\beta)d\Lambda_0(u)\xrightarrow[n\to\infty]{p}0$, то согласно достаточному критерию мартингальной ЦПТ (теорема А из §1.9) получаем (3.1.19), а отсюда и (3.1.16). Теорема 3.1.6 доказана. ■

Замечание 3.1.7. Нетрудно видеть, что в качестве состоятельной оценки $\Im(\beta)$ в условиях теоремы 3.1.6 может быть использована $\Im_n(\hat{\beta}_n)$. ■

Замечание 3.1.8. Отметим, что решение $\hat{\beta}_n$ уравнения (1.6.11) является также и состоятельным по Фишеру, поскольку таковым является функционал $U_n^T(\beta)$. Это свойство легко устанавливается, повторяя рассуждения из [110]. ■

Теперь приступаем к исследованию основных оценок $\hat{\Lambda}_{\tau 0}^{(n)}(x) = \Lambda_{\tau 0}^{(n)}(x;\hat{\beta}_n)$, $x \ge \tau$, для к.ф.и. (1.6.9). Наряду с процессом $\square_n(x)$ рассмотрим также $\square_n^*(x) = \hat{\Lambda}_{\tau 0}^{(n)}(x) - \Lambda_{\tau 0}(x;\beta)$ и $\mathcal{L}_n(x) = \hat{\Lambda}_{\tau 0}^{(n)}(x) - \Lambda_{\tau 0}^{(n)}(x;\beta)$, $x \ge \tau$.

Теорема 3.1.9. В условиях теоремы 3.1.6:

$$\sup_{\tau \le x \le \mathrm{T} \wedge \zeta_{(n)}} |\square_n^*(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{p} 0. \tag{3.1.21}$$

$$n^{1/2} \square_n^*(x) \underset{n\to\infty}{\overset{D}{\Rightarrow}} \square_0(x) \text{ в } D[\tau;\mathrm{T}]. \tag{3.1.22}$$

Здесь гауссовский процесс $\{\square_0(x), x \ge \tau\}$ представляется по распределению как $\square_0(x) \overset{D}{=} \gamma_1(x) - V(x;\beta)\gamma_0$, где $\gamma_0 = N(0;(\Im(\beta))^{-1})$, $\gamma_1(x)$ - гауссовский процесс с независимыми приращениями, $\mathrm{M}\gamma_1(x) = 0$, для $x, y \in [\tau;\mathrm{T}]$

$$\mathrm{M}\gamma_1(x)\gamma_1(y) = \int\limits_{[\tau;x\wedge y]} \frac{d\Lambda_0(u)}{\omega^{(0)}(u;\beta)} \text{ и } V(x;\beta) = \int\limits_{[\tau;x]} \frac{\omega^{(1)}(u;\beta)}{\omega^{(0)}(u;\beta)} d\Lambda_0(u).$$

Доказательство теоремы 3.1.9. Справедливо равенство

$$\square_n^*(x) = \mathcal{L}_n(x) + \square_n(x), x \ge \tau, \tag{3.1.23}$$

где по формуле Тейлора

$$n^{1/2}\mathcal{L}_n(x) = \int\limits_{[\tau;x]} n^{1/2}\left(\frac{1}{\omega_n^{(0)}(u;\hat{\beta}_n)} - \frac{1}{\omega_n^{(0)}(u;\beta)}\right) d\mathrm{T}_{3n}(u) = -n^{1/2}(\hat{\beta}_n - \beta)\int\limits_{[\tau;x]} \frac{\omega_n^{(1)}(u;\beta_n^0)}{(\omega_n^{(0)}(u;\beta_n^0))^2} d\mathrm{T}_{3n}(u) =$$

$$= -n^{1/2}(\hat{\beta}_n - \beta)V(x;\beta) - \theta_n(x) n^{1/2}(\hat{\beta}_n - \beta), \tag{3.1.24}$$

$$\beta_n^0 \in [(\hat{\beta}_n \wedge \beta);(\hat{\beta}_n \vee \beta)] \text{ и } \theta_n(x) = \theta_n(x;\beta) = \int\limits_{[\tau;x]} \frac{\omega_n^{(1)}(u;\beta_n^0) d\mathrm{T}_{3n}(u)}{(\omega_n^{(0)}(u;\beta_n^0))^2} - \int\limits_{[\tau;x]} \frac{\omega^{(1)}(u;\beta) d\mathrm{T}_3(u)}{\left(\omega^{(0)}(u;\beta)\right)^2}.$$

Во втором интеграле в формуле $\theta_n(x)$ использовано равенство $d\Lambda_0(u) = \dfrac{d\mathrm{T}_3(u)}{\omega^{(0)}(u;\beta)}$ (см. (1.6.9)). В условиях теоремы

$$r_n = \sup_{x\in[\tau;\mathrm{T}]} \sup_{t\in B(\varepsilon_0;\beta)} \left|\theta_n(x;t)\right| \xrightarrow[n\to\infty]{p} 0,\ (\varepsilon_0(n)\downarrow 0). \tag{3.1.25}$$

Аналогично (3.1.8), для любого числа $\Delta > 0$

$$P\left(\sup_{\tau\le x\le \mathrm{T}\wedge\zeta_{(n)}} \sup_{t\in B(\varepsilon_0;\beta)} \left|\theta_n(x;t)\right| > \Delta \right) \le P(r_n > \Delta) + \mathrm{O}(e^{-cn}). \tag{3.1.26}$$

Теперь из (3.1.13), (3.1.24)-(3.1.26) имеем

$$\sup_{\tau\le x\le \mathrm{T}\wedge\zeta_{(n)}} |\mathcal{L}_n(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{p} 0. \tag{3.1.27}$$

Из (3.1.2) и (3.1.27) следует (3.1.21). Согласно (3.1.16), (3.1.24) и (3.1.25) $n^{1/2}\mathcal{L}_n(x) = -V(x;\beta)n^{1/2}(\hat{\beta}_n - \beta) + o_p(1),\ n\to\infty,\ x\in[\tau;\mathrm{T}]$. Отсюда

$$n^{1/2}\mathcal{L}_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{D}{\Rightarrow}} -V(x;\beta)\gamma_0 \qquad \text{в } D[\tau;\mathrm{T}]. \tag{3.1.28}$$

С другой стороны, согласно (3.1.4) для $x\in[\tau;\mathrm{T}]$

$$< n^{1/2}\square_n; n^{1/2}\square_n > (x) \xrightarrow[n\to\infty]{p} \int_{[\tau;x]} \frac{d\Lambda_0(u)}{\omega^{(0)}(u;\beta)}, \tag{3.1.29}$$

и при каждом $\varepsilon > 0$,

$$\int_{[\tau;x]} \mathrm{I}\left(\frac{\mathrm{I}(\omega_n^{(0)}(u;\beta) > 0)}{\omega_n^{(0)}(u;\beta)} > \varepsilon n^{1/2} \right) d\Lambda_0(u) \xrightarrow[n\to\infty]{p} 0. \tag{3.1.30}$$

Из (3.1.29), (3.1.30) и теоремы Реболледо (§ 1.8) будем иметь

$$n^{1/2}\square_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{D}{\Rightarrow}} \gamma_1(x) \qquad \text{в } D[\tau;\mathrm{T}], \tag{3.1.31}$$

где $\gamma_1(x)$ является винеровским процессом. Теперь слабая сходимость (3.1.22) является следствием (3.1.28) и (3.1.31). Теорема 3.1.9 доказана. ■

Рассмотрим три класса оценок, определяемые формулами (1.6.12) и (1.6.13) для усеченных функций выживания $1-H_{\tau 0}(x)$. В качестве промежуточных рассмотрим оценки $1-H_{\tau 0}^{(n)}(x;\beta;m) = \Psi_{nm}(x;\beta),\ m=1,2$, используя функционалы (1.6.13). Пусть $1-H_\tau(x/v_0) = P(Z\ge x/Z\ge\tau, V=v_0),\ x\ge\tau$, условная, усеченная слева функция выживания объекта с временем жизни Z и фиксированной ковариатой v_0. Ввиду (1.6.4)

$$1-H_\tau(x/v_0)=(1-H_{\tau 0}(x))^{\exp(\beta v_0)},\ x\ge\tau. \qquad (3.1.32)$$

Согласно представлению (3.1.32) построим оценки для $1-H_\tau(x/v_0)$ следующими тремя статистиками (см. (1.6.12)):

$$1-\hat H^{(n)}_{\tau\,\mathrm{m}}(x/v_0)=(\Psi_{nm}(x;\hat\beta_n))^{\exp(\hat\beta_n v_0)},\ x\ge\tau,\ m=1,2,3; \qquad (3.1.33)$$

Исследуем оценки (3.1.33).

Теорема 3.1.10. Пусть имеют место условия теоремы 3.1.6 и в случае *m=3* требуется непрерывность ф.р. $K(x/v)$ и $G(x/v)$ по $x\in[\tau;\mathrm{T}]$. Тогда при каждом m=1,2,3:

$$\text{(I)}\ \sup_{\substack{\tau\le x\le \mathrm{T}\\ x<\zeta_{(n)}}}\left|\hat H^{(n)}_{\tau\,\mathrm{m}}(x/v_0)-H_\tau(x/v_0)\right|\xrightarrow[n\to\infty]{p}0;$$

$$\text{(II)}\ n^{1/2}(\hat H^{(n)}_{\tau\,\mathrm{m}}(x/v_0)-H_\tau(x/v_0))\underset{n\to\infty}{\overset{D}{\Rightarrow}}\chi_{\tau v_0}(x)\ \text{в}\ D[\tau;\mathrm{T}],$$

где $\chi_{\tau v_0}(x)$–центрированный гауссовский процесс с ковариацией при $x,y\ge\tau$:

$$\mathrm{M}\chi_{\tau v_0}(x)\chi_{\tau v_0}(y)=(1-H_\tau(x/v_0))(1-H_\tau(y/v_0))\Gamma_\tau(x,y/v_0),$$

$$\Gamma_\tau(x,y/v_0)=\exp(2\beta v_0)\left\{\int\limits_{[\tau;x\wedge y]}\frac{d\Lambda_0(u)}{\omega^{(0)}(u;\beta)}+\right.$$

$$\left.+(\Im(\beta))^{-1}\left[\int\limits_{[\tau;x]}\left(\frac{\omega^{(1)}(u;\beta)}{\omega^{(0)}(u;\beta)}-v_0\right)d\Lambda_0(u)\right]\left[\int\limits_{[\tau;y]}\left(\frac{\omega^{(1)}(u;\beta)}{\omega^{(0)}(u;\beta)}-v_0\right)d\Lambda_0(u)\right]\right\}.$$

Доказательство теоремы 3.1.10. Докажем (I). Используя четвертое неравенство в (1.3.6) при каждом m=1,2,3 имеем $\left|\hat H^{(\mathrm{n})}_{\tau\,\mathrm{m}}(x/v_0)-H_\tau(x/v_0)\right|\le$ $\le\exp(\hat\beta_n v_0)\left|\log\Psi_{nm}(x;\hat\beta_n)-\log(1-H_{\tau 0}(x))\right|+\left|\exp(\hat\beta_n v_0)-\exp(\beta v_0)\right|(-\log(1-H_{\tau 0}(x))),$

где второе слагаемое правой части, согласно теореме 3.1.4, при всех $x\in[\tau;\mathrm{T}]\bigcap[0;\zeta_{(n)})$ и $n\to\infty$ стремится к нулю с вероятностью 1. Покажем, что

$$\sup_{\substack{\tau\le x\le \mathrm{T}\\ x<\zeta_{(n)}}}\left|\Psi_{nm}(x;\hat\beta_n)-\log(1-H_{\tau 0}(x))\right|\xrightarrow[n\to\infty]{p}0;\ m=1,2,3. \qquad (3.1.34)$$

Так как при $m=1,\ -\log\Psi_{n1}(x;\hat\beta_n)=\hat\Lambda^{(n)}_{\tau 0}(x),\ -\log(1-H_{\tau 0}(x))=\Lambda_{\tau 0}(x)$, то для этого случая (3.1.34) следует из (3.1.21). С другой стороны, из неравенства (II) теоремы 1.3.1 следует, что для $x\in[\tau;\mathrm{T}]\bigcap[0;\zeta_{(n)})$:

$$0<-\log\Psi_{n2}(x;\hat\beta_n)+\log\Psi_{n1}(x;\hat\beta_n)<\sum_{\tau\le u\le x}\frac{\left[\Delta\hat\Lambda^{(n)}_{\tau 0}(u)\right]^2}{(1-\Delta\hat\Lambda^{(n)}_{\tau 0}(u))}=$$

$$=\sum_{\tau\le u\le x}\left[\frac{\Delta\mathrm{T}_{3n}(u)}{\omega^{(0)}_n(u;\hat\beta_n)}\right]^2\left[1-\frac{\Delta\mathrm{T}_{3n}(u)}{\omega^{(0)}_n(u;\hat\beta_n)}\right]^{-1}\le$$

$$\le\frac{1}{n}\sum_{\tau\le u\le x}\frac{\Delta\mathrm{T}_{3n}(u)}{\omega^{(0)}_n(u;\hat\beta_n)(\omega^{(0)}_n(u;\hat\beta_n)-\frac{1}{n})}\le\frac{1}{n}\int\limits_{[\tau;x]}\frac{d\mathrm{T}_{3n}(u)}{\omega^{(0)}_n(u;\hat\beta_n)(\omega^{(0)}_n(u;\hat\beta_n)-\frac{1}{n})}\overset{\text{п.н.}}{=}\mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right),\quad(3.1.35)$$

Следовательно, (3.1.34) справедливо и при m=2. Рассмотрим случай m=3. В условиях теоремы в этом случае функция $\omega^{(0)}(u;\beta)$ непрерывна по u, а также $\forall t\in B(\varepsilon_0;\beta)$:

$$\int\limits_{[\tau;x]}\frac{d\omega^{(0)}(u;t)}{\omega^{(0)}(u;t)}=\log\left(\frac{\omega^{(0)}(x;t)}{\omega^{(0)}(\tau;t)}\right).\qquad(3.1.36)$$

Тогда

$$\left|\log\Psi_{n3}(x;\hat\beta_n)-\log(1-H_{\tau 0}(x))\right|\le\left|\log\Psi_{n3}(x;\hat\beta_n)-\log\Psi_{n1}(x;\hat\beta_n)\right|+$$

$$+\left|\log\Psi_{n3}(x;\hat\beta_n)-\log(1-H_{\tau 0}(x))\right|\le\left|R_n(x;\hat\beta_n)\right|\left|\log\left(\frac{\omega^{(0)}_n(x;\hat\beta_n)}{\omega^{(0)}_n(\tau;\hat\beta_n)}\right)-\log\left(\frac{\omega^{(0)}(x;\hat\beta_n)}{\omega^{(0)}(\tau;\hat\beta_n)}\right)\right|+$$

$$+\left|\int\limits_{[\tau;x]}\frac{d\omega^{(0)}(u;\hat\beta_n)}{\omega^{(0)}(u;\hat\beta_n)}-\int\limits_{[\tau;x]}\frac{d\omega^{(0)}_n(u;\hat\beta_n)}{\omega^{(0)}_n(u;\hat\beta_n)}\right|+\left|\log\Psi_{n1}(x;\hat\beta_n)-\log(1-H_{\tau 0}(x))\right|.\qquad(3.1.37)$$

Ввиду условия (C4), соотношения (3.1.18) нетрудно установить, что при $n\to\infty$

$$\sup_{\substack{\tau\le x\le\mathrm{T}\\ x<\zeta_{(n)}}}\left|R_n(x;\hat\beta_n)\right|\le 1+\sup_{(x;t)\in[\tau;\mathrm{T}]\times B(\varepsilon_0;\beta)}\left|R_n(x;t)-R(x;t)\right|=1+o_p(1),\qquad(3.1.38)$$

а также

$$\sup_{\substack{\tau\le x\le \mathrm{T}\\ x<\zeta_{(n)}}}\left|\log\left(\frac{\omega_n^{(0)}(x;\hat\beta_n)}{\omega_n^{(0)}(\tau;\hat\beta_n)}\right)-\log\left(\frac{\omega^{(0)}(x;\hat\beta_n)}{\omega^{(0)}(\tau;\hat\beta_n)}\right)\right|\le 2$$

$$. \qquad (3.1.39)$$

$$\sup_{(x;t)\in[\tau;\mathrm{T}]\times B(\varepsilon_0;\beta)}\left|\log\omega_n^{(0)}(x;t)-\log\omega^{(0)}(x;t)\right|=o_p(1)$$

Вполне аналогично, пользуясь элементарными преобразованиями, а также и интегрированием по частям, имеем

$$\sup_{\substack{\tau\le x\le \mathrm{T}\\ x<\zeta_{(n)}}}\left|\int_{[\tau;x]}\frac{d\omega^{(0)}(u;\hat\beta_n)}{\omega^{(0)}(u;\hat\beta_n)}-\int_{[\tau;x]}\frac{d\omega_n^{(0)}(u;\hat\beta_n)}{\omega_n^{(0)}(u;\hat\beta_n)}\right|\le\sup_{(x;t)\in[\tau;\mathrm{T}]\times B(\varepsilon_0;\beta)}\left|\int_{[\tau;x]}\frac{\omega_n^{(0)}(u;t)-\omega^{(0)}(u;t)}{\omega_n^{(0)}(u;t)\omega^{(0)}(u;t)}d\omega_n^{(0)}(u;t)\right|+$$

$$+\sup_{(x;t)\in[\tau;\mathrm{T}]\times B(\varepsilon_0;\beta)}\left|\int_{[\tau;x]}\frac{1}{\omega^{(0)}(u;t)}d(\omega_n^{(0)}(u;t)-\omega^{(0)}(u;t))\right|\le\sup_{(x;t)\in[\tau;\mathrm{T}]\times B(\varepsilon_0;\beta)}\int_{[\tau;x]}\frac{\left|\omega_n^{(0)}(u;t)-\omega^{(0)}(u;t)\right|}{\omega_n^{(0)}(u;t)\omega^{(0)}(u;t)}d\omega_n^{(0)}(u;t)+$$

$$+4\sup_{(x;t)\in[\tau;\mathrm{T}]\times B(\varepsilon_0;\beta)}\frac{\left|\omega_n^{(0)}(x;t)-\omega^{(0)}(x;t)\right|}{\omega^{(0)}(x;t)}=o_p(1),\ n\to\infty. \qquad (3.1.40)$$

Теперь требуемая сходимость (I) при m=3 следует из (3.1.34) при m=1 и из соотношений (3.1.36)-(3.1.40). Переходим к доказательству части (II) теоремы. При m=1 доказательство совпадает с доказательством леммы 6.1 работы [294]. Кроме того, (II) становится справедливым и при m=2, так как согласно неравенству (1.3.6), а также (3.1.35) для всех $\tau\le x\le \mathrm{T}$

$$n^{\frac12}\left|\hat H_{\tau2}^{(n)}(x/v_0)-\hat H_{\tau1}^{(n)}(x/v_0)\right|\le n^{\frac12}(-\log(1-\hat H_{\tau2}^{(n)}(x/v_0))+\log(1-\hat H_{\tau1}^{(n)}(x/v_0)))=$$

$$=\exp(\hat\beta_n v_0)n^{\frac12}(-\log\Psi_{n2}(x;\hat\beta_n)+\log\Psi_{n1}(x;\hat\beta_n))\overset{\text{п.н.}}{=}\mathrm{O}\left(n^{-\frac12}\right).$$

Доказательство (II) для случая m=3, т.е. для степенной оценки–рутинное. Пусть $\hat\Lambda_{\tau3}^{(n)}(x/v_0)=-\log(1-\hat H_{\tau3}^{(n)}(x/v_0))$. Определим функционал при $x\in[\tau;\mathrm{T}]$: $\Psi_3(x;\beta)=\left(\dfrac{\omega^{(0)}(x;\beta)}{\omega^{(0)}(\tau;\beta)}\right)^{R(x;\beta)}$, где $R(x;\beta)=\dfrac{\Lambda_{\tau0}(x;\beta)}{\left(-\displaystyle\int_{[\tau;x]}\frac{d\omega^{(0)}(u;\beta)}{\omega^{(0)}(u;\beta)}\right)}$. Очевидно, в условиях теоремы (см. (3.1.36)) $-\log\Psi_3(x;\beta)=\Lambda_{\tau0}(x;\beta)$. Промежуточной оценкой $\Psi_3(x;\beta)$ является статистика $\Psi_{n3}(x;\beta)$ из (1.6.13). Имеем

$$n^{1/2}\left(\widehat{H}^{(n)}_{\tau 3}(x/v_0)-H_\tau(x/v_0)\right)=(1-H_\tau(x/v_0))n^{1/2}\left[1-\frac{1-\widehat{H}^{(n)}_{\tau 3}(x/v_0)}{1-H_\tau(x/v_0)}\right]=$$

$$=(1-H_\tau(x/v_0))n^{1/2}\left\{1-\exp\left[-(-\log(1-\widehat{H}^{(n)}_{\tau 3}(x/v_0))+\log(1-H_\tau(x/v_0)))\right]\right\}=$$

$$=(1-H_\tau(x/v_0))n^{1/2}\left\{1-\exp\left[-(\widehat{\Lambda}^{(n)}_{\tau 3}(x/v_0)-\Lambda_\tau(x/v_0))\right]\right\}=(1-H_\tau(x/v_0))\times \qquad (3.1.41)$$

$$\times\left\{ n^{1/2}(\widehat{\Lambda}^{(n)}_{\tau 3}(x/v_0)-\Lambda_\tau(x/v_0))-\tfrac{1}{2}\exp(-\Lambda^{*}_{\tau n}(x/v_0))n^{1/2}(\widehat{\Lambda}^{(n)}_{\tau 3}(x/v_0)-\Lambda_\tau(x/v_0))^2\right\},$$

где $(\widehat{\Lambda}^{(n)}_{\tau 3}(x/v_0)\wedge\Lambda_\tau(x/v_0))\le\Lambda^{*}_{\tau n}(x/v_0)\le(\widehat{\Lambda}^{(n)}_{\tau 3}(x/v_0)\vee\Lambda_\tau(x/v_0))$. Для первого основного слагаемого в правой части равенства (3.1.41) имеет место следующая цепочка равенств:

$$n^{1/2}(\widehat{\Lambda}^{(n)}_{\tau 3}(x/v_0)-\Lambda_\tau(x/v_0))=n^{1/2}\left\{\exp(\widehat{\beta}_n v_0)[-\log\Psi_{n3}(x;\widehat{\beta}_n)]+\right.$$

$$\left.+\exp(\beta v_0)\log\Psi_3(x;\beta)\right\}=\exp(\widehat{\beta}_n v_0)n^{1/2}[-\log\Psi_{n3}(x;\widehat{\beta}_n)+\log\Psi_{n3}(x;\beta)]+$$

$$+[-\log\Psi_{n3}(x;\beta)]n^{1/2}(\exp(\widehat{\beta}_n v_0)-\exp(\beta v_0))+\exp(\beta v_0)n^{1/2}[-\log\Psi_{n3}(x;\beta)+$$

$$+\log\Psi_3(x;\beta)]=\exp(\beta v_0)\left\{n^{1/2}[-\log\Psi_{n3}(x;\beta)+\log\Psi_3(x;\beta)]+\right.$$

$$\left.+\exp((\widehat{\beta}_n-\beta)v_0)n^{1/2}[-\log\Psi_{n3}(x;\widehat{\beta}_n)+\log\Psi_3(x;\beta)]+\exp((\widehat{\beta}_n-\beta)v_0)(\widehat{\beta}_n-\beta)v_0[-\log\Psi_{n3}(x;\beta)]\right\}=$$

$$=\left\{Q_{n1}(x;\beta)+Q_{n2}(x;\beta)+Q_{n3}(x;\beta)\right\}\exp(\beta v_0). \qquad (3.1.42)$$

Исследуем слагаемые внутри скобки в (3.1.42) в отдельности. Нетрудно установить представление:

$$Q_{n1}(x;\beta)=n^{1/2}(\Lambda^{(n)}_{\tau 0}(x;\beta)-\Lambda_{\tau 0}(x;\beta))\left(\int\limits_{[\tau;x]}\frac{d\omega^{(0)}_n(u;\beta)}{\omega^{(0)}_n(u;\beta)}\right)^{-1}\log\left(\frac{\omega^{(0)}_n(x;\beta)}{\omega^{(0)}_n(\tau;\beta)}\right)+$$

$$+n^{1/2}\left[\int\limits_{[\tau;x]}\frac{d\omega^{(0)}_n(u;\beta)}{\omega^{(0)}_n(u;\beta)}-\log\left(\frac{\omega^{(0)}(x;\beta)}{\omega^{(0)}(\tau;\beta)}\right)\right]\Lambda_{\tau 0}(x;\beta)\left(-\int\limits_{[\tau;x]}\frac{d\omega^{(0)}_n(u;\beta)}{\omega^{(0)}_n(u;\beta)}\right)^{-1}+$$

$$+n^{1/2}\left[-\log\left(\frac{\omega^{(0)}_n(x;\beta)}{\omega^{(0)}_n(\tau;\beta)}\right)+\log\left(\frac{\omega^{(0)}(x;\beta)}{\omega^{(0)}(\tau;\beta)}\right)\right]R_n(x;\beta)=\ell^{(1)}_n(x;\beta)+\ell^{(2)}_n(x;\beta)+\ell^{(3)}_n(x;\beta). \qquad (3.1.43)$$

Из (3.1.18) и (3.1.36) следует, что $\ell_n^{(1)}(x;\beta)$ и $n^{1/2}\square_n(x)$ асимптотически эквивалентны и следовательно ввиду (3.1.31)

$$\ell_n^{(1)}(x;\beta)\underset{n\to\infty}{\overset{D}{\Rightarrow}}\gamma_1(x) \qquad \text{в } D[\tau;\mathrm{T}] \tag{3.1.44}$$

Покажем, что при $n\to\infty$

$$\sup_{\tau\le x\le \mathrm{T}}\left|\ell_n^{(2)}(x;\beta)+\ell_n^{(3)}(x;\beta)\right| = o_p(1). \tag{3.1.45}$$

Согласно (3.1.18) и (3.1.36) при $n\to\infty$

$$\sup_{\tau\le x\le \mathrm{T}}\left|\left(-\int\limits_{[\tau;x]}\frac{d\omega_n^{(0)}(u;\beta)}{\omega_n^{(0)}(u;\beta)}\right)^{-1}\Lambda_{\tau 0}(x;\beta)-R(x;\beta)\right| = o_p(1),$$

$$\sup_{\tau\le x\le \mathrm{T}}\left|R_n(x;\beta)-R(x;\beta)\right| = o_p(1).$$

Тогда (3.1.44) эквивалентно

$$\sup_{\tau\le x\le \mathrm{T}}\left|\widetilde{\ell}_n^{(2)}(x;\beta)+\widetilde{\ell}_n^{(3)}(x;\beta)\right| = o_p(1),\ n\to\infty, \tag{3.1.46}$$

где элементарными преобразованиями и разложениями в ряд, имеем

$$\widetilde{\ell}_n^{(2)}(x;\beta) = n^{1/2}\left[\int\limits_{[\tau;x]}\frac{d\omega_n^{(0)}(u;\beta)}{\omega_n^{(0)}(u;\beta)}-\log\left(\frac{\omega^{(0)}(x;\beta)}{\omega^{(0)}(\tau;\beta)}\right)\right] = \frac{n^{1/2}(\omega_n^{(0)}(x;\beta)-\omega^{(0)}(x;\beta))}{\omega^{(0)}(x;\beta)}-$$

$$-\frac{n^{1/2}(\omega_n^{(0)}(\tau;\beta)-\omega^{(0)}(\tau;\beta))}{\omega^{(0)}(\tau;\beta)}-\int\limits_{[\tau;x]}\frac{n^{1/2}(\omega_n^{(0)}(u;\beta)-\omega^{(0)}(u;\beta))^2}{\omega_n^{(0)}(u;\beta)}d\left(\frac{1}{\omega^{(0)}(u;\beta)}\right)-$$

$$-\int\limits_{[\tau;x]}\frac{n^{1/2}(\omega_n^{(0)}(u;\beta)-\omega^{(0)}(u;\beta))d(\omega_n^{(0)}(u;\beta)-\omega^{(0)}(u;\beta))}{\omega_n^{(0)}(u;\beta)\omega^{(0)}(u;\beta)},$$

а также

$$\widetilde{\ell}_n^{(3)}(x;\beta) = n^{1/2}\left[-\log\left(\frac{\omega_n^{(0)}(x;\beta)}{\omega_n^{(0)}(\tau;\beta)}\right)+\log\left(\frac{\omega^{(0)}(x;\beta)}{\omega^{(0)}(\tau;\beta)}\right)\right] =$$

$$= n^{1/2}\left[-\log\left(1+\frac{\omega_n^{(0)}(x;\beta)-\omega^{(0)}(x;\beta)}{\omega^{(0)}(x;\beta)}\right)+\log\left(1+\frac{\omega_n^{(0)}(\tau;\beta)-\omega^{(0)}(\tau;\beta)}{\omega^{(0)}(\tau;\beta)}\right)\right] =$$

$$= -\frac{n^{1/2}(\omega_n^{(0)}(x;\beta)-\omega^{(0)}(x;\beta))}{\omega^{(0)}(x;\beta)} + \frac{n^{1/2}(\omega_n^{(0)}(\tau;\beta)-\omega^{(0)}(\tau;\beta))}{\omega^{(0)}(\tau;\beta)} +$$

$$+\frac{n^{1/2}(\omega_n^{(0)}(x;\beta)-\omega^{(0)}(x;\beta))^2}{\omega^{(0)}(x;\beta)^2} - \frac{n^{1/2}(\omega_n^{(0)}(\tau;\beta)-\omega^{(0)}(\tau;\beta))^2}{\omega^{(0)}(\tau;\beta)^2} +$$

$$+o_p\left(\frac{n^{1/2}(\omega_n^{(0)}(x;\beta)-\omega^{(0)}(x;\beta))^2}{\omega^{(0)}(x;\beta)^2}\right) + o_p\left(\frac{n^{1/2}(\omega_n^{(0)}(\tau;\beta)-\omega^{(0)}(\tau;\beta))^2}{\omega^{(0)}(\tau;\beta)^2}\right).$$

Заметим, что главные члены в этих двух разложениях имеют противоположные знаки и в сумме (3.1.45) они сокращаются. Тогда в этой сумме остаются слагаемые стремящиеся к нулю по вероятности при $n \to \infty$, так как $\sup\limits_{\tau \le x \le \mathrm{T}} \left|\omega_n^{(0)}(x;\beta) - \omega^{(0)}(x;\beta)\right| \overset{\text{п.н.}}{=} \mathrm{O}\left(n^{-1/2}\right)$. Таким образом, (3.1.46) верно и ввиду (3.1.44) и (3.1.45) окончательно будем иметь для всех $x \in [\tau;\mathrm{T}]$

$$Q_{n1}(x;\beta) = n^{1/2} \square_n(x) + o_p(1), \quad n \to \infty. \tag{3.1.47}$$

Для $Q_{n2}(x;\beta)$ имеет место следующий аналог (3.1.43):

$$Q_{n2}(x;\beta) = \exp((\hat\beta_n - \beta)\nu_0)\Bigg\{n^{1/2}\, \mathcal{L}_n(x)\left(\int\limits_{[\tau;x]} \frac{d\omega_n^{(0)}(u;\hat\beta_n)}{\omega_n^{(0)}(u;\hat\beta_n)}\right)^{-1} \log\left(\frac{\omega_n^{(0)}(x;\beta)}{\omega_n^{(0)}(\tau;\beta)}\right) +$$

$$+n^{1/2}\left[\int\limits_{[\tau;x]} \frac{d\omega_n^{(0)}(u;\hat\beta_n)}{\omega_n^{(0)}(u;\hat\beta_n)} - \log\left(\frac{\omega_n^{(0)}(x;\beta)}{\omega_n^{(0)}(\tau;\beta)}\right)\right]\Lambda_{\tau 0}^{(n)}(x;\beta)\left(-\int\limits_{[\tau;x]} \frac{d\omega_n^{(0)}(u;\hat\beta_n)}{\omega_n^{(0)}(u;\hat\beta_n)}\right)^{-1} +$$

$$+n^{1/2}\left[-\log\left(\frac{\omega_n^{(0)}(x;\hat\beta_n)}{\omega_n^{(0)}(\tau;\hat\beta_n)}\right) + \log\left(\frac{\omega_n^{(0)}(x;\beta)}{\omega_n^{(0)}(\tau;\beta)}\right)\right]R_n(x;\hat\beta_n).$$

Тогда учитывая и (3.1.13), (3.1.24), а также (3.1.25) получаем для всех $x \in [\tau;\mathrm{T}]$

$$Q_{n2}(x;\beta) = -V(x;\beta)n^{1/2}(\hat\beta_n - \beta) + o_p(1), \; n \to \infty. \tag{3.1.48}$$

Очевидно, $Q_{n3}(x;\beta) = \nu_0 \Lambda_{\tau 0}(x;\beta) n^{1/2}(\hat\beta_n - \beta) + o_p(1)$, для всех $x \in [\tau;\mathrm{T}]$ при $n \to \infty$. Следовательно, учитывая и (3.1.47), а также (3.1.48) для всех $x \in [\tau;\mathrm{T}]$ при $n \to \infty$ имеем

$$Q_{n1}(x;\beta)+Q_{n2}(x;\beta)+Q_{n3}(x;\beta)=n^{1/2}\square_n(x)-\int\limits_{[\tau;x]}\left(\frac{\omega^{(1)}(u;\beta)}{\omega^{(0)}(u;\beta)}-v_0\right)d\Lambda_0(u)n^{1/2}(\hat{\beta}_n-\beta)+o_p(1). \quad (3.1.49)$$

Теперь утверждение теоремы для случая m=3 следует из соотношений (3.1.16), (3.1.31), (3.1.41), (3.1.42), (3.1.49), а также

$$\sup_{\tau\le x\le \mathrm{T}} n^{1/2}(\hat{\Lambda}^{(n)}_{\tau 3}(x/v_0)-\Lambda_\tau(x/v_0))^2=o_p(1),\ n\to\infty,$$

что следует из (3.1.42) и (3.1.49). Теорема 3.1.10 доказана. ■

Замечание 3.1.11. Отметим, что предельный гауссовский процесс $\square_0(x)$ из теоремы 3.1.9 такой же структуры, что и соответствующий процесс в случае цензурирования справа (см. [294]). Тогда повторяя выкладки из Приложения 2 в [294] можно показать, что с.в. γ_0 не зависит от процесса $\gamma_1(x), x\in[\tau;\mathrm{T}]$. ■

В заключении настоящего параграфа рассмотрим случай p>1, т.е. когда ковариата $V=(V_1,...,V_p)$ и параметр регрессии $\beta=(\beta_1,...,\beta_p)$ являются векторами размерности p. Все доказанные результаты автоматически остаются в силе и в случае p>1, так как в этом случае произведение βv везде, начиная с определения функций $\omega^{(s)}(u;\beta), s=0,1,2$ из § 1.6 заменяются на скалярное произведение (β^{T},v). Условие (3.1.12) заменяется на следующее:

«Ковариационная матрица $\Sigma(\beta)$ вектора $n^{1/2}(\hat{\beta}_n-\beta)$ невырождена.»(3.1.12)

Тогда результаты (3.1.16) и (3.1.22) выглядят так: $n^{1/2}(\hat{\beta}_n-\beta)\underset{n\to\infty}{\overset{D}{\Rightarrow}}N(0;\Sigma(\beta))$, и $n^{1/2}\square^*_n(x)\underset{n\to\infty}{\overset{D}{\Rightarrow}}\mathcal{L}_0(x)$ в $D[\tau;\mathrm{T}]$. Здесь $\mathcal{L}_0(x)$–центрированный гауссовский процесс с ковариацией при $x,y\in[\tau;\mathrm{T}]$:

$$M\ \mathcal{L}_0(x)\ \mathcal{L}_0(y)=\int\limits_{[\tau;x\wedge y]}\frac{d\Lambda_0(u)}{\omega^{(0)}(u;\beta)}+\lambda^{\mathrm{T}}(x)\Sigma(\beta)\lambda(y),$$

где $\lambda^{\mathrm{T}}(x)=(V_1(x;\beta),...,V_p(x;\beta))$, и $V_i(x;\beta)=\int\limits_{[\tau;x]}\frac{\partial}{\partial\beta_i}(\omega^{(0)}(u;\beta))\frac{d\Lambda_0(u)}{\omega^{(0)}(u;\beta)}, i=1,...,p.$ ■

§ 3.2. Параметрическое-непараметрическое оценивание функции распределения при информативном неоднородном цензурировании наблюдений

В § 1.3 была определена МПИ как специальный случай (Z;A)-модели. Она определялась свойством независимости с.в. Z от совокупности событий $\{A^{(i)}, i\in Z\}$. В настоящем параграфе рассматривается модель с частичной пропорциональностью ф.и.. Рассмотрим МПИ, подвергаемую левостороннему неоднородному случайному цензурированию.

Пусть $\{(\mathrm{L}_k, Z_k, Y_k), k \ge 1\}$–последовательность независимых случайных векторов с независимыми в совокупности компонентами. При этом с.в. Z_k и Y_k соответственно имеют одинаковые непрерывные ф.р. $H(x) = P(Z_k \le x)$ и $G(x) = P(Y_k \le x)$, а с.в. L_k разнораспределены с ф.р. $K^{(k)}(x) = P(\mathrm{L}_k \le x), k \ge 1$. Предполагается, что пары $(H;G)$ отвечают МПИ:

$$1 - G(x) = (1 - H(x))^{\theta}, \ x \in \overline{R}, \tag{3.2.1}$$

где $\theta > 0$ – неизвестный параметр. В данной статистической модели интерес представляют с.в. Z_k и задача состоит в оценивании ф.р. H при мешающих параметрах θ и $\{K^{(k)}, k \ge 1\}$ по следующей выборке объема n:

$$\widetilde{V}^{(n)} = \{(\mathrm{L}_k, \zeta_k, \delta_k^{(0)}, \delta_k^{(1)}, \delta_k^{(2)}), k = 1, ..., n\},$$

где $\zeta_k = (\mathrm{L}_k \vee (Z_k \wedge Y_k)), \delta_k^{(0)} = \mathrm{I}(\mathrm{Y}_k \wedge Z_k < L_k), \delta_k^{(1)} = \mathrm{I}(\mathrm{L}_k \le Z_k \le Y_k)$ и $\delta_k^{(2)} = \mathrm{I}(\mathrm{L}_k \le Y_k < Z_k)$. В данной параметрической-непараметрической модели с.в. Z_k наблюдаемы лишь в случае $\delta_k^{(1)} = 1$, где для всех $k \ge 1$, $\delta_k^{(0)} + \delta_k^{(1)} + \delta_k^{(2)} = 1$. Пусть $E^{(k)}(x) = P(\zeta_k \le x)$ и $\mathrm{L}(x) = P(Z_k \wedge Y_k \le x)$. Тогда очевидно, $\mathrm{L}(x) = 1 - (1 - H(x))^{\theta+1}$ и $E^{(k)}(x) = K^{(k)}(x)\mathrm{L}(x)$. Из последнего представления имеем $E(x;n) = \mathrm{L}(x)K(x;n)$, где $n \ge 1$ и

$$K(x;n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} K^{(k)}(x), \ x \in \overline{R}, \quad E(x;n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E^{(k)}(x), \ x \in \overline{R},$$

– усредненные ф.р.. Тогда для всех $n \ge 1$ и $x \in \overline{R}$ (полагая $\frac{0}{0} = 0$ и $\frac{\infty}{\infty} = 1$) будем иметь следующее представление для ф.р. $H(x)$:

$$H(x) = 1 - (1 - \mathrm{L}(x))^{\gamma}, \tag{3.2.2}$$

где $\gamma = \dfrac{1}{1+\theta}$, $\mathrm{L}(x) = E(x;n)/K(x;n)$. Легко вычислить

$$\mathrm{M}\delta_k^{(0)} = \int_{-\infty}^{\infty}(1 - K^{(k)}(u))d\mathrm{L}(u) = 1 - \int_{-\infty}^{\infty}K^{(k)}(u)d\mathrm{L}(u),$$

$$\mathrm{M}\delta_k^{(1)} = \int_{-\infty}^{\infty}P(L_k \le u \le Y_k)dH(u) = \int_{-\infty}^{\infty}K^{(k)}(u)(1 - H(u))^{\theta}dH(u) = \gamma\int_{-\infty}^{\infty}K^{(k)}(u)d\mathrm{L}(u) = \gamma(1 - \mathrm{M}\delta_k^{(0)}).$$

Отсюда $\gamma = \mathrm{M}\delta_k^{(1)}[1 - \mathrm{M}\delta_k^{(0)}]^{-1}$ для всех $k \ge 1$ и тогда для всех $n \ge 1$: $\gamma = \Delta_n^{(1)}(1 - \Delta_n^{(0)})^{-1}$, где $\Delta_n^{(j)} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{M}\delta_k^{(j)}, j = 0,1$. Заменим в (3.2.2) $E(x;n), K(x;n)$ и $\Delta_n^{(j)}$ на соответствующие оценки и получаем искомую оценку для $H(x)$ в виде:

$$H_n(x) = 1 - (1 - \mathrm{L}_n(x))^{\gamma_n}, x \in \overline{R}, \tag{3.2.3}$$

где $\mathrm{L}_n(x) = E_n(x)/K_n(x)$, $\gamma_n = \widetilde{\Delta}_n^{(1)}(1 - \widetilde{\Delta}_n^{(0)})$,

$$E_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}I(\zeta_k \le x), \ \ K_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}I(L_k \le x), \ \ \widetilde{\Delta}_n^{(j)} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\delta_k^{(j)}, j = 0,1.$$

Исследуем оценку (3.2.3). Пусть $Sp(H), Sp(G), Sp(K^{(k)})$ и $Sp(L)$ –носители соответствующих распределений. Тогда согласно (3.2.1): $Sp(H)=Sp(G)=Sp(\mathbf{L})$. Далее предположим выполненным условие :

(A) $Sp(H)\bigcap\left\{\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}Sp(K^{(k)})\right\}\neq\emptyset$.

Определим эмпирические процессы $\alpha_n(x)=n^{1/2}(E_n(x)-E(x;n))$, $\beta_n(x)= = n^{1/2}(K_n(x)-K(x;n))$ и $\mu_n(x)=n^{1/2}(\gamma_n-\gamma)$, а также

$$U_n(x)=\left\{\frac{\gamma[\alpha_n(x)-(1-(1-H(x))^{\frac{1}{\gamma}})\beta_n(x)]}{K_n(x)(1-H(x))^{\frac{1}{\gamma}}}-\frac{\mu_n}{\gamma}\log(1-H(x))\right\}.$$

Далее нам понадобятся также и условия:

(B) Пусть последовательности чисел $\{\tau_n, \mathrm{T}_n, n\geq 1\}$ таковы, что $\tau_n\leq \mathrm{T}_n$, $[\tau_n;\mathrm{T}_n]\to(-\infty;\infty)$, $\tau_n\geq\inf\{x\in R: K(x;n)>0\}$, $\mathrm{T}_n\leq \mathrm{T}_{\mathrm{L}}=\sup\{x\in R:\mathrm{L}(x)<1\}$, $P(K_n(\tau_n)>0)=1$ и для $\varepsilon>0$ $(2^{-5/2}\Delta_n^{(1)})\wedge K(\tau_n;n)\wedge(1-\mathrm{L}(\mathrm{T}_n))\geq\left(\frac{2\varepsilon\log n}{n}\right)^{1/2}$;

(C) Для всех $n\geq 1$: $P(0<\sum\limits_{k=1}^{n}\delta_k^{(0)}<n)=1$, $0<\Delta_n^{(0)}<1$ и $\Delta_n^{(1)}>0$; ■

Теорема 3.2.1. Пусть выполнены условия (A)-(C). Тогда

$$P\left(\sup_{\tau_n\leq x\leq \mathrm{T}_n}\left|\frac{n^{1/2}((H_n(x)-H(x))}{1-H(x)}-U_n(x)\right|>C_1\varepsilon(1-\Delta_n^{(0)})^{-1}(1-H(\mathrm{T}_n))^{-(1+\gamma)/\gamma}(K(\tau_n;n))^{-2}n^{-1/2}\log n\right)\leq C_2n^{-\varepsilon}, \quad (3.2.4)$$

где $C_1=C_1(\gamma)$ и C_2 (абсолютная) постоянные. ■

Для доказательства (3.2.4) нами будут использованы несколько вспомогательных утверждений. Из неравенства (1.9.30) Бретагнолли имеем

$$P\left(\sup_{-\infty<x<\infty}|\alpha_n(x)|>\left(\tfrac{\varepsilon}{2}\log n\right)^{1/2}\right)\leq C^*n^{-\varepsilon},\ n=1,2,...$$

$$(3.2.5)$$

$$P\left(\sup_{-\infty<x<\infty}|\beta_n(x)|>\left(\tfrac{\varepsilon}{2}\log n\right)^{1/2}\right)\leq C^*n^{-\varepsilon},\ n=1,2,...$$

Ввиду (1.9.33)

$$P\left(\left|\widetilde{\Delta}_n^{(j)}-\Delta_n^{(j)}\right|>\left(\frac{\varepsilon\log n}{n}\right)^{1/2}\right)\leq 2n^{-\varepsilon},\ j=0,1;\ n=1,2,... \quad (3.2.6)$$

и кроме того при $\frac{n}{\log n}\geq 4\varepsilon(1-\Delta_n^{(0)})^{-2}$,

$$P\left((1-\widetilde{\Delta}_n^{(0)})^{-1}>2\left(1-\Delta_n^{(0)}\right)^{-1}\right)\leq 2n^{-\varepsilon}. \quad (3.2.7)$$

Аналогичные неравенства справедливы и для γ_n.

Лемма 3.2.2. Пусть $\frac{n}{\log n} \geq 64\varepsilon(\Delta_n^{(1)})^{-2}$. Тогда

$$P\left(|\mu_n| > 4(1-\Delta_n^{(0)})^{-1}(\varepsilon \log n)^{1/2}\right) \leq 6n^{-\varepsilon}, \quad P\left(\gamma_n^{-1} > 2\gamma^{-1}\right) \leq 6n^{-\varepsilon}. \tag{3.2.8}$$

Доказательство леммы 3.2.2. Легко показать, что

$$|\gamma_n - \gamma| = \left|\frac{(\widetilde{\Delta}_n^{(1)} - \Delta_n^{(1)}) + \gamma(\widetilde{\Delta}_n^{(0)} - \Delta_n^{(0)})}{1-\widetilde{\Delta}_n^{(0)}}\right| \leq \frac{1}{1-\widetilde{\Delta}_n^{(0)}}\left(\left|\widetilde{\Delta}_n^{(0)} - \Delta_n^{(0)}\right| + \left|\widetilde{\Delta}_n^{(1)} - \Delta_n^{(1)}\right|\right).$$

Тогда

$$P\left(|\gamma_n - \gamma| > 4(1-\Delta_n^{(0)})^{-1}\left(\tfrac{\varepsilon \log n}{n}\right)^{1/2}\right) \leq P\left(\left|\widetilde{\Delta}_n^{(0)} - \Delta_n^{(0)}\right| > \left(\tfrac{\varepsilon \log n}{n}\right)^{1/2}\right) +$$

$$+ P\left(\left|\widetilde{\Delta}_n^{(1)} - \Delta_n^{(1)}\right| > \left(\tfrac{\varepsilon \log n}{n}\right)^{1/2}\right) + P\left(\left(1-\widetilde{\Delta}_n^{(0)}\right)^{-1} > 2\left(1-\Delta_n^{(0)}\right)^{-1}\right) \leq 6n^{-\varepsilon},$$

что следует из (3.2.6) и (3.2.7). При этом заметим, что условие леммы влечет условие неравенства (3.2.7) (так как $\Delta_n^{(1)} = \gamma\left(1-\Delta_n^{(0)}\right), n \geq 1$ и $64\varepsilon\left(\Delta_n^{(1)}\right)^{-2} > 4\varepsilon\left(1-\Delta_n^{(0)}\right)^{-2}$). Тем самым первое неравенство (3.2.8) установлено. Второе доказывается так:

$$P\left(\gamma_n^{-1} > 2\gamma^{-1}\right) \leq P\left(|\gamma_n - \gamma| > \tfrac{1}{2}\gamma\right) \leq P\left(|\mu_n| > 4\left(1-\Delta_n^{(0)}\right)^{-1}(\varepsilon \log n)^{1/2}\right) \leq 6n^{-\varepsilon}.$$

Лемма 3.2.2 доказана. ■

Пусть $a_n(x) = n^{1/2}\left(L_n(x) - L(x)\right),\ x \in R$.

Лемма 3.2.3. Если справедливы условия (A) и (B), то

$$P\left(\sup_{\tau_n \leq x \leq \mathrm{T}_n} |a_n(x)| > 4\left(\tfrac{\varepsilon}{2}\log n\right)^{1/2}\left(K(\tau_n; n)\right)^{-1}\right) \leq 3C^* n^{-\varepsilon},$$

$$P\left(\sup_{\tau_n \leq x \leq \mathrm{T}_n} \left(1-\mathrm{L}_n(x)\right)^{-1} > 2(1-\mathrm{L}(\mathrm{T}_n)^{-1})\right) \leq 3C^* n^{-\varepsilon}. \tag{3.2.9}$$

Доказательство леммы 3.2.3. Справедливо равенство

$$a_n(x) = \frac{1}{K_n(x)}(\alpha_n(x) - \mathrm{L}(x)\beta_n(x)).$$

Тогда первое неравенство (3.2.9) следует из (3.2.5) и левостороннего аналога (1.9.15) для $K_n(x)$, получаемого применением (1.9.30). Второе неравенство (3.2.9) является следствием первого. Лемма 3.2.3 доказана. ■

Доказательство теоремы 3.2.1. Разложим процесс $n^{1/2}(H_n(x) - H(x))$ по степеням $a_n(x)$ и μ_n: $\dfrac{n^{1/2}(H_n(x) - H(x))}{1-H(x)} = U_n(x) + R_{1n}(x) + R_{2n}(x) + R_{3n}(x)$, где

$$R_{1n}(x) = \frac{n^{-1/2}}{2}\gamma_n^*(1-\gamma_n^*)\frac{a_n^2(x)}{(1-\mathrm{L}_n^*(x))^{2-\gamma_n^*}(1-H(x))},$$

$$R_{2n}(x) = -\frac{n^{-1/2}(1+\gamma_n^*\log(1-\mathrm{L}_n^*(x)))}{(1-\mathrm{L}_n^*(x))^{1-\gamma_n^*}}\frac{a_n(x)\mu_n}{1-H(x)},$$

$$R_{3n}(x) = -\frac{n^{-1/2}}{2}\frac{(1-\mathrm{L}_n^*(x))^{\gamma_n^*}\log^2(1-\mathrm{L}_n^*(x)))}{1-H(x)}\mu_n^2,$$

$$\gamma_n^* \in [(\gamma_n \wedge \gamma);(\gamma_n \vee \gamma)] \text{ и } \mathrm{L}_n^*(x) \in [(\mathrm{L}_n(x) \wedge \mathrm{L}(x));(\mathrm{L}_n(x) \vee \mathrm{L}(x))].$$

Используя элементарное неравенство $0 \le z^\gamma |\log z|^\alpha \le \left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)e^{-\alpha}$, $0 < z \le 1,\ \alpha,\gamma > 0$ имеем для $x \in [\tau_n;\mathrm{T}_n]$:

$$|R_{1n}(x)| \le \frac{n^{-1/2}}{1-H(x)}\left[\frac{|a_n(x)|}{1-\mathrm{L}_n^*(x)}\right]^2,\quad |R_{2n}(x)| \le \frac{2n^{-1/2}}{1-H(x)}\frac{|a_n(x)||\mu_n|}{1-\mathrm{L}_n^*(x)},\quad |R_{3n}(x)| \le \frac{n^{-1/2}}{1-H(x)}\left[\frac{|\mu_n|}{\gamma_n^*}\right]^2.$$

Поскольку

$$\frac{|a_n(x)|}{1-\mathrm{L}_n^*(x)} \le \left(\frac{1-\mathrm{L}(x)}{1-\mathrm{L}_n(x)} \vee \frac{1-\mathrm{L}_n(x)}{1-\mathrm{L}(x)}\right),\ \frac{|\mu_n|}{\gamma_n^*} \le \left(\frac{\gamma}{\gamma_n} \vee \frac{\gamma_n}{\gamma}\right),$$

то, используя леммы 3.2.2 и 3.2.3, получаем (3.2.4). Теорема 3.2.1 доказана. ■

Замечание 3.2.4. Из (3.2.4) при $\varepsilon > 1$ по лемме Бореля-Кантелли, получаем, что скорость аппроксимации будет порядка $\mathrm{O}\left((1-H(\mathrm{T}_n))^{-(1+\gamma)/\gamma}(K(\tau_n;n))^{-2}n^{-1/2}\log n\right)$, п.н.. Более того, если повторить доказательство для процесса $n^{1/2}(H_n(x)-H(x))$, то аппроксимирующим является процесс $(1-H(x))U_n(x)$ со скоростью порядка $\mathrm{O}((1-H(\mathrm{T}_n))^{-1/\gamma} \times$ $\times (K(\tau_n;n))^{-2}n^{-1/2}\log n)$, п.н.. В частности, если $\mathrm{T}_n \equiv \mathrm{T}, \tau_n \equiv \tau < \mathrm{T}$ и с.в. L_k одинаково распределены, то выше упомянутые аппроксимации будут оптимальными по порядку, т.е. $\mathrm{O}(n^{-1/2}\log n)$, п.н.. ■

Через $\widetilde{U}_n(x)$ обозначим процесс, получаемый из $U(x)$ заменой $K_n(x)$ на $K(x;n)$. Тогда из теорем A* и C* из § 1.9, а также из (3.2.4) легко следует

Теорема 3.2.5. В условиях теоремы 3.2.1:

$$\sup_{\tau_n \le x \le \mathrm{T}_n}\left|\frac{n^{1/2}(H_n(x)-H(x))}{1-H(x)} - \widetilde{U}_n(x)\right| \overset{\text{п.н.}}{=} \mathrm{O}\left((1-H(\mathrm{T}_n))^{-(1+\gamma)/\gamma}(K(\tau_n;n))^{-2}n^{-1/2}\log n\right). \quad (3.2.10)$$

■

Из (3.2.10) в частности следует, что для всех $x \in [\tau; \mathrm{T}]$:

$$H_n(x) - H(x) = n^{-1/2}\widetilde{U}_n(x) + r_n(x), \tag{3.2.11}$$

где $r_n(x) \overset{\text{п.н.}}{=} \mathrm{O}(n^{-1}\log n)$. Тогда из (3.2.11), учитывая тот факт, что случайный процесс $\widetilde{U}_n(x)$ является линейным функционалом от $\alpha_n(x)$ и $\beta_n(x)$, согласно (1.9.31), получается

Теорема 3.2.6. В условиях теоремы 3.2.1 существует число M>0 такое, что имеет место ЗПЛ

$$P\left(\limsup_{n\to\infty}\left(\frac{n}{\log\log n}\right)^{1/2} \sup_{\tau \le x \le \mathrm{T}}\left|H_n(x) - H(x)\right| \le M\right) = 1. \qquad \blacksquare$$

Замечание 3.2.7. Поскольку в представлении (3.2.11) основными компонентами являются эмпирические процессы $\alpha_n(x)$ и $\beta_n(x)$, то мы отметим еще одну из важных их свойств. Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ основное вероятностное пространство, в котором определены все рассматриваемые нами последовательности с.в.. Определим пополненные потоки σ-алгебр $\square_p^{\zeta} = \{N_0 \cup \sigma(\mathrm{I}(\zeta_i \le u); u \le x; i = 1,...,n)\}$ и $\square_p^{\mathrm{L}} = \{N_0 \cup \sigma(\mathrm{I}(\mathrm{L}_i \le u); u \le x; i = 1,...,n)\}$. Эмпирические процессы представим в виде

$$\alpha_n(x) = n^{-1/2}\sum_{k=1}^{n}\frac{(\mathrm{I}(\zeta_k \le x) - E^{(k)}(x))}{1 - E^{(k)}(x)}(1 - E^{(k)}(x)) = n^{-1/2}\sum_{k=1}^{n} M_{\alpha k}(x) h_{\alpha k}(x)$$

$$\beta_n(x) = n^{-1/2}\sum_{k=1}^{n}\frac{(\mathrm{I}(\mathrm{L}_k \le x) - E^{(k)}(x))}{1 - E^{(k)}(x)}(1 - E^{(k)}(x)) = n^{-1/2}\sum_{k=1}^{n} M_{\beta k}(x) h_{\beta k}(x),$$

где $h_{\alpha k}(x) = 1 - E^{(k)}(x), h_{\beta k}(x) = 1 - K^{(k)}(x)$. Согласно лемме 1.8.2 $M_{\alpha k}$ и $M_{\beta k}$ являются мартингалами. Следовательно (см. замечание 1.8.3), пары $(\alpha_n(x); \square_p^{\zeta})$ и $(\beta_n(x); \square_p^{\mathrm{L}})$ также являются мартингалами. ЦПТ для последовательности такой структуры мартингальных случайных процессов доказаны в работе [278]. Следовательно, учитывая представление (3.2.11), структуру $\widetilde{U}_n(x)$ и представление μ_n линейно через $n^{1/2}(\widetilde{\Delta}_n^{(0)} - \Delta_n^{(0)})$ и $n^{1/2}(\widetilde{\Delta}_n^{(1)} - \Delta_n^{(1)})$ нетрудно установить слабую сходимость при $n \to \infty$ процесса $n^{1/2}(H_n(x) - H(x))$ в пространстве Скорохода $D[\tau; \mathrm{T}]$ к центрированному гауссовскому процессу. ■

Замечание 3.2.8. Если отказаться от условия наблюдаемости с.в. L_k и предполагать наблюдаемость лишь выборки $V^{(n)} = \{(\zeta_k, \delta_k^{(0)}, \delta_k^{(1)}, \delta_k^{(2)}), k = 1,...,n\}$, то для $K(x;n)$ мы уже не можем построить э.ф.р., а можем использовать одну из оценок $\{K_{mn}(x), m=1,2,3\}$ из § 1.4. Тогда для соответствующей оценки для $H(x)$ утверждение теоремы 3.2.1 остается в силе, если вместо экспоненциальной оценки (1.9.15) будет использовано неравенство (2.1.13) доказанное для $K_{1n}(x)$, хотя, как нетрудно видеть, согласно лемме 1.3.1, аналогичные неравенства справедливы и для оценок $K_{2n}(x)$ и $K_{3n}(x)$. ■

Замечание 3.2.9. Результаты настоящего параграфа могут быть распространены и на $(\mathrm{L} \vee (Z \wedge Y); D)$-модель с условием (3.2.1) и неоднородным случайным цензурированием слева. Задача по-прежнему состоит в оценивании ф.р. $H(x)$ по выборке $\widetilde{S}_3^{(n)}$ (см. § 1.4). В этом случае представление (3.2.2) остается в силе. Необходимо лишь оценить мешающий параметр $\gamma = \frac{1}{1+\theta}$. Из формул § 1.3 имеем

$$\mathrm{T}_1(x;n;0) = \tfrac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} P(Z_j \wedge Y_j < \mathrm{L}_j, \mathrm{L}_j \le x) = \int_{(-\infty;x]} \mathrm{L}(u)\,dK(u;n),$$

$$\mathrm{T}(x;n;i) = \tfrac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} P(Y_j \le Z_j \le \mathrm{L}_j, Z_j \le x, A_j^{(i)}) = \int_{(-\infty;x]} K(u;n)(1-H(u))^{\theta}\,dH(u;i) \;, i \in \Im,$$

$$\mathrm{T}(x;n) = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{T}(x;n;i) = \int_{(-\infty;x]} K(u;n)(1-H(u))^{\theta}\,dH(u) = \gamma \int_{(-\infty;x]} K(u;n)\,d\mathrm{L}(u).$$

Интегрированием по частям имеем $\mathrm{T}(+\infty;n;0) = 1 - \mathrm{T}(+\infty;n)/\gamma$. Отсюда $\gamma = \mathrm{T}(+\infty;n)/(1-\mathrm{T}(+\infty;n;0))$ для всех $n \ge 1$. Тогда искомая оценка для $H(x)$ будет вида (3.2.3) с $\hat{\gamma}_n = \hat{\Delta}_n^{(1)} \big/ \left(1 - \hat{\Delta}_n^{(0)}\right)$, где $\hat{\Delta}_n^{(0)} = \mathrm{T}_{1n}(+\infty;0)$ и $\hat{\Delta}_n^{(1)} = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{T}_n(+\infty;i)$. При этом $\mathrm{T}_{1n}(x;0)$ и $\mathrm{T}_n(x;0)$ определены в § 1.4. Так что утверждение теоремы 3.2.1 остается в силе и в данном случае. Если в данной модели не использовать информативность правостороннего цензурирования, выражаемую равенством (3.2.1), то мы бы не смогли оценить ф.р. $H(x)$, а пришлось бы оценить условную ф.р. $H_\tau(x) = P(Z_j \le x / Z_j \ge \tau), x \ge \tau$, довольно сложными методами как это отмечено в замечании 1.4.9. ■

§ 3.3. Непараметрические оценки при случайном объеме выборки

Рассмотрим модель $(Z;A)$ из п.IV § 1.9, где были установлены аппроксимации вектор-процессов $a_n^*(t)$ и $\widetilde{a}_n(t)$ последовательностью гауссовских вектор-процессов $W_n^*(t)$ с оптимальной скоростью порядка $\mathrm{O}(n^{-1/2}\log n)$ (см. теоремы M* и M**). В данном параграфе будут исследованы оценки экспоненциального, множительного и степенного типов для экспоненциального функционала $F(x;i)=1-\exp(-\Lambda(x;i)), i\in\Im$, так как ввиду непрерывности всех субраспределений $H(x;i)$ справедливо равенство (1.3.5). Пусть $\omega_n(t)=(\omega_n^{(1)}(t_1),...,\omega_n^{(k)}(t_k)), t=(t_1,...,t_k)\in R^k$, где $\omega_n^{(i)}(x)=n^{1/2}(\Lambda_n^0(x;i)-\Lambda(x;i)),\ i\in\Im$,-процесс к.ф.и., образованный оценкой типа Каца для $\Lambda(x;i)$:

$$\Lambda_n^0(x;i)=\int\limits_{(-\infty;x]}\frac{d\widetilde{H}_n(u;i)}{1-\widetilde{H}_n(u)}, i\in\Im .$$

Здесь оценки $\widetilde{H}_n(x)$ и $\widetilde{H}_n(x;i)$ для $H(x)$ и $H(x;i)$ определены в § 1.9. определим последовательность аппроксимирующих гауссовских вектор-процессов $Y_n(t)=(Y_n^{(1)}(t_1),...,Y_n^{(k)}(t_k))$ для $\omega_n(t)$, где для $n\ge 1$ и $i\in\Im$:

$$Y_n^{(i)}(x)=\int\limits_{(-\infty;x]}\frac{W_n^{(0)}(u)dH(u;i)}{(1-H(u))^2}+\frac{W_n^{(i)}(x)}{1-H(x)}-\int\limits_{(-\infty;x]}\frac{W_n^{(i)}(u)dH(u)}{(1-H(u))^2}$$

Теорема 3.3.1. Пусть последовательность чисел $\{\mathrm{T}_n, n\ge 1\}$ удовлетворяет условию

$$\frac{n}{\log n}\ge\left(32\varepsilon w^2\vee\frac{r}{2w}b_n^2\vee\frac{2\varepsilon}{w}b_n^2\right),\ n\ge 2, \tag{3.3.1}$$

где $\varepsilon>0,\ r\ge 2,\ w=(16(1+e/3))^{-1}$ и $b_n=(1-H(\mathrm{T}_n))^{-1}$. Тогда

$$P\left(\sup_{t\in(-\infty;\mathrm{T}_n]^k}\left\|\omega_n(t)-Y_n(t)\right\|^{(k)}>r(n)\right)\le k\Phi_1 n^{-\beta}, \tag{3.3.2}$$

где $r(n)=\Phi_0 b_n^2 n^{-1/2}\log n,\ \Phi_0=\Phi_0(\varepsilon;r),\ \Phi_1$-положительные постоянные и $\beta=(r\wedge w\varepsilon)$.

Доказательство теоремы 3.3.1. Достаточно показать, что для каждого $i\in\Im$:

$$P(\sup_{-\infty<x\le\mathrm{T}_n}|\,\omega_n^{(i)}(x)-Y_n^{(i)}(x)|>r_0(n))\le\Phi_1 n^{-\beta}. \tag{3.3.3}$$

Для $\omega_n^{(i)}(x)$ справедливо следующее представление:

$$\omega_n^{(i)}(x)=\int\limits_{(-\infty;x]}\frac{\widetilde{a}_n^{(0)}(u)dH(u;i)}{(1-H(u))^2}+\left(\frac{\widetilde{a}_n^{(i)}(x)}{1-H(x)}-\int\limits_{(-\infty;x]}\frac{\widetilde{a}_n^{(i)}(u)dH(u;i)}{(1-H(u))^2}\right)+$$

$$+n^{-1/2}\int\limits_{(-\infty;x]}\frac{(\widetilde{a}_n^{(0)}(u))^2dH(u;i)}{(1-H(u))^2(1-\widetilde{H}_n(u))}+n^{-1/2}\int\limits_{(-\infty;x]}\frac{\widetilde{a}_n^{(0)}(u)d\widetilde{a}_n^{(i)}(u)}{(1-H(u))(1-\widetilde{H}_n(u))}=\sum_{m=1}^{4}R_{mn}^{(i)}(x).$$

Как и в доказательстве неравенств (4.8)-(4.10) в [125], для суммы $R_{1n}^{(i)}(x)+$ $+R_{2n}^{(i)}(x)+R_{3n}^{(i)}(x)$, используя оценки (1.9.42), (1.9.45) и (1.9.74) будем иметь

$$P\left(\sup_{-\infty<x\le \mathrm{T}_n}\left|\sum_{m=1}^{3}R_{mn}^{(i)}(x)\right|>3\widetilde{C}n^{-1/2}b_n^2\log n+\varepsilon n^{-1/2}b_n^3\log n\right)\le 3\widetilde{K}n^{-\beta}+2\mathrm{L}n^{-w\varepsilon}\le(3\widetilde{K}+2\mathrm{L})n^{-\beta}. \quad (3.3.4)$$

$R_{4n}^{(i)}$ представим так:

$$R_{4n}^{(i)}(x)=n^{-1/2}\int\limits_{(-\infty;x]}\frac{(\widetilde{a}_n^{(0)}(u))^2\,d(\widetilde{H}_n(u;i)-H(u;i))}{(1-H(u))^2(1-\widetilde{H}_n(u))}+n^{-1/2}\int\limits_{(-\infty;x]}\frac{\widetilde{a}_n^{(0)}(u)d\widetilde{a}_n^{(i)}(u)}{(1-H(u))^2}=\overline{R}_{4n}^{(i)}(x)+\overline{\overline{R}}_{4n}^{(i)}(x). \quad (3.3.5)$$

Тогда согласно (1.9.42) и (1.9.45)

$$P(\sup_{-\infty<x\le \mathrm{T}_n}|\overline{R}_{4n}^{(i)}(x)|>2\varepsilon n^{-1/2}b_n^3\log n)\le 2\mathrm{L}n^{-w\varepsilon}\le 2\mathrm{L}n^{-\beta}. \quad (3.3.6)$$

Величину $\overline{R}_{4n}^{(i)}(x)$ оценим воспользовавшись рассуждениями из доказательства теоремы К*, что дает оценку

$$P(\sup_{-\infty<x\le \mathrm{T}_n}|\overline{\overline{R}}_{4n}^{(i)}(x)|>3An^{-1/2}b_n^2\log n)\le P(H_n^*(\mathrm{T}_n)>1)+$$

$$+P\left(\sup_{-\infty<x\le \mathrm{T}_n}n^{-1/2}\left|\int\limits_{(-\infty;x]}\frac{a_n^{(0)*}(u)da_n^{(i)*}(u)}{(1-H(u))^2}\right|>3An^{-1/2}b_n^2\log n\right)\le \mathrm{L}n^{-r}+p_n, \quad (3.3.7)$$

так как $\forall x\in(-\infty;\mathrm{T}_n]$, $H_n^*(x)\le H_n^*(\mathrm{T}_n)$ и если $H_n^*(\mathrm{T}_n)\le 1$, то $H_n^*(x;i)\le H_n^*(\mathrm{T}_n)$ и следовательно $\widetilde{a}_n^{(i)}(x)=a_n^{(i)*}(x)$ для всех $i\in\overline{\Im}$. Нам остается оценить p_{1n}. Аналогично доказательству теоремы 1 из [144], полагая $a_{\nu_n}^{(0)}(x)=\nu_n^{1/2}(H_{\nu_n}^*(x)-H(x))$ и $a_{\nu_n}^{(i)}(x)=\nu_n^{1/2}(H_{\nu_n}^*(x;i)-H(x;i))$, $i\in\Im$, и учитывая представление (1.9.70) имеем $p_n\le p_{1n}+p_{2n}+p_{3n}+p_{4n}$, где

$$p_{1n}=P\left(\frac{\nu_n}{n}\sup_{-\infty<x\le T_n} n^{-1/2}\left|\int\limits_{(-\infty;x]}\frac{a^{(0)}_{\nu_n}(u)da^{(i)}_{\nu_n}(u)}{(1-H(u))^2}\right|>3An^{-1/2}b_n^2\log n\right),$$

$$p_{2n}=P\left(\left(\frac{\nu_n}{n}\right)^{1/2}\frac{|\nu_n-n|}{n}\sup_{-\infty<x\le T_n}\left|\int\limits_{(-\infty;x]}\frac{a^{(0)}_{\nu_n}(u)dH(u;i)}{(1-H(u))^2}\right|>\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{1/2}n^{-1/2}b_n^2\log n\right),$$

$$p_{3n}=P\left(\left(\frac{\nu_n}{n}\right)^{1/2}\frac{|\nu_n-n|}{n}\sup_{-\infty<x\le T_n}\left|\int\limits_{(-\infty;x]}\frac{H(u)da^{(i)}_{\nu_n}(u)}{(1-H(u))^2}\right|>\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{1/2}n^{-1/2}b_n^2\log n\right),$$

$$p_{4n}=P\left(\frac{|\nu_n-n|^2}{n^{3/2}}\sup_{-\infty<x\le T_n}\left\{\int\limits_{(-\infty;x]}\frac{H(u)dH(u;i)}{(1-H(u))^2}\right\}>\frac{\varepsilon}{8}n^{-1/2}b_n^2\log n\right).$$

Из ([126], лемма на стр. 53) имеем

$$P\left(\sup_{-\infty<x\le T_n}\left|\int\limits_{(-\infty;x]}\frac{a^{(0)}_{n}(u)da^{(i)}_{n}(u)}{(1-H(u))^2}\right|>Ab_n^2\log n\right)\le Bn^{-\varepsilon}, \qquad (3.3.8)$$

где $A=A(\varepsilon)$ и B-положительные постоянные. Кроме того, из (1.9.36) имеем (более точная оценка, чем в [144])

$$P\left(\frac{|\nu_n-n|}{n}>\frac{1}{2}\right)\le 2n^{-w\frac{2n}{\log n}}. \qquad (3.3.9)$$

Согласно (3.3.8) и (3.3.9)

$$p_{1n}\le P\left(\sup_{-\infty<x\le T_n}\left|\int\limits_{(-\infty;x]}\frac{a^{(0)}_{\nu_n}(u)da^{(i)}_{\nu_n}(u)}{(1-H(u))^2}\right|>2Ab_n^2\log\nu_n\left(\frac{\log n}{\log\nu_n}\right),\frac{n}{2}\le\nu_n\le\frac{3n}{2}\right)+$$

$$+P\left(\frac{|\nu_n-n|}{n}>\frac{1}{2}\right)\le 2n^{-w\frac{2n}{\log n}}+P\left(\sup_{-\infty<x\le T_n}\left|\int\limits_{(-\infty;x]}\frac{a^{(0)}_{\nu_n}(u)da^{(i)}_{\nu_n}(u)}{(1-H(u))^2}\right|>Ab_n^2\log\nu_n\right)+2n^{-w\frac{2n}{\log n}}\le e^{-n}+$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}P\left(\sup_{-\infty<x\le T_n}\left|\int\limits_{(-\infty;x]}\frac{a^{(0)}_{m}(u)da^{(i)}_{m}(u)}{(1-H(u))^2}\right|>Ab_n^2\log m\right)P(\nu_n=m)+2n^{-w\frac{2n}{\log n}}\le e^{-n}+$$

$$+2n^{-w\frac{2n}{\log n}}+B\sum_{m=1}^{\infty}m^{-\varepsilon}\frac{n^m}{m!}e^{-n}\le e^{-n}+2n^{-w\frac{2n}{\log n}}+\widetilde{B}n^{-\varepsilon}. \qquad (3.3.10)$$

Аналогично, ввиду (1.9.16), (1.9.36) и (3.3.9)

$$p_{2n} = P\left(\left(\frac{\nu_n}{n}\right)^{1/2} \frac{|\nu_n - n|}{n} \sup_{-\infty < x \le T_n} \left| \int_{(-\infty;x]} \frac{a^{(0)}_{\nu_n}(u) dH(u;i)}{(1-H(u))^2} \right| > \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{1/2} n^{-1/2} b_n^2 \log n, \frac{n}{2} \le \nu_n \le \frac{3n}{2}\right) +$$

$$+ P\left(\frac{|\nu_n - n|}{n} > \frac{1}{2}\right) \le 2n^{-w\frac{2n}{\log n}} + 2n^{-w\varepsilon} + P\left(\sup_{|x|<\infty} |a^{(0)}_{\nu_n}(x)| > (\tfrac{\varepsilon}{2}\log\nu_n)^{1/2}\right) \le 2n^{-w\frac{2n}{\log n}} + 2n^{-w\varepsilon} + e^{-n} + \widetilde{D}n^{-\varepsilon}. \quad (3.3.12)$$

Интегрированием по частям, а также согласно (1.9.71) получаем

$$p_{3n} \le 2n^{-w\frac{2n}{\log n}} + 2n^{-w\varepsilon} + P\left(\sup_{|x|<\infty} | a^{(i)}_{\nu_n}(x) | > (2\varepsilon \log \nu_n)^{1/2}\right) \le$$

$$\le 2n^{-w\frac{2n}{\log n}} + 2n^{-w\varepsilon} + e^{-n} + 2\widetilde{D}n^{-\varepsilon}. \quad (3.3.13)$$

И, наконец, из (1.9.36)

$$p_{4n} \le P\left(\frac{|\nu_n - n|}{n^{1/2}} > \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{2}\log n\right)^{1/2}\right) \le 2n^{-w\varepsilon}. \quad (3.3.14)$$

Совокупность соотношений (3.3.4)–(3.3.7), (3.3.10)–(3.3.14) и дает оценку (3.3.3). Теорема 3.3.1 доказана. ■

Следствие 3.3.2. Из (3.3.2) при подходящем выборе $r \ge 2$ и $\varepsilon > 0$ будем иметь аппроксимацию на интервале $(-\infty; \mathrm{T}]^k$: $\sup_{t \in (-\infty;\mathrm{T}]^k} \left\|\omega_n(t) - Y_n(t)\right\|^{(k)} \overset{\text{п.н.}}{=} \mathrm{O}\left(n^{-1/2}\log n\right), n \ge 2,$ - с оптимальной скоростью, где T не зависит от n. ■

Далее для исследования степенной оценки нам понадобится также и оценка $\Lambda_n^0(x) = \int_{(-\infty;x]} \frac{d\widetilde{H}_n(u)}{1-\widetilde{H}_n(u)}$ для к.ф.и. $\Lambda_H(x) = -\log(1 - H(x))$. Пусть $\omega_n(x) = n^{1/2}(\Lambda_n^0(x) - \Lambda_H(x))$. Легко установить разложение

$$\omega_n^{(0)}(x) = \frac{\widetilde{a}_n^{(0)}(x)}{1-H(x)} + n^{-1/2} \int_{(-\infty;x]} \frac{(\widetilde{a}_n^{(0)}(u))^2 dH(u)}{(1-H(u))^2 (1-\widetilde{H}_n(u))} + n^{-1/2} \int_{(-\infty;x]} \frac{\widetilde{a}_n^{(0)}(u) d\widetilde{a}_n^{(0)}(u)}{(1-H(u))(1-\widetilde{H}_n(u))},$$

которое можно получить также и от $\omega_n^{(0)}(x)$ при i=0. Аппроксимирующим для $\omega_n^{(0)}(x)$ является гаусовский процесс $Y_n^{(0)}(x) = W_n^{(0)}(x)(1 - H(x))^{-1}$.

Теорема 3.3.3. При условии (3.3.1)

$$P\left(\sup_{-\infty<x\le T_n}\left|\omega_n^{(0)}(x)-Y_n^{(0)}(x)\right|>r_0(n)\right)\le\Psi_1 n^{-\beta}, \qquad (3.3.15)$$

где $r(n)=\Phi_0 b_n^2 n^{-1/2}\log n,\ \Phi_0=\Phi_0(\varepsilon;r),\ \Psi_1$-положительные постоянные и $\beta=(r\wedge w\varepsilon)$. ■

Доказательство теоремы 3.3.3 вполне аналогично доказательству теоремы 3.3.1 и поэтому оно опускается.

Оценим уклонения процессов $\omega_n^{(i)}(x),\ i\in\overline{\Im}$.

Теорема 3.3.4. При условии (3.3.1)

$$P\left(\sup_{-\infty<x\le T_n}\left|\omega_n^{(0)}(x)\right|>r_0(n)+2b_n(\varepsilon\log n)^{1/2}\right)\le\Psi_1 n^{-\beta}+n^{-\varepsilon}, \qquad (3.3.16)$$

и для всех $i\in\Im$:

$$P\left(\sup_{-\infty<x\le T_n}\left|\omega_n^{(i)}(x)\right|>r_0(n)+6b_n^2(\varepsilon\log n)^{1/2}\right)\le\Psi_1 n^{-\beta}+3n^{-\varepsilon}. \qquad (3.3.17)$$

Доказательство теоремы 3.3.4. Легко видеть, что $\forall n\ge1$: $W_n^{(0)}(x)\overset{D}{=}W(H(x))$ и $W_n^{(i)}(x)\overset{D}{=}W(H(x;i)),\ i\in\Im,\ x\in R$, где $\{W(y),0\le y\le1\}$ – стандартный процесс Винера. Тогда вероятность в (3.3.16) не превышает сумму

$$P\left(\sup_{-\infty<x\le T_n}\left|\omega_n^{(0)}(x)-Y_n^{(0)}(x)\right|>r_0(n)\right)+P\left(\sup_{-\infty<x\le T_n}\left|Y_n^{(0)}(x)\right|>2b_n(\varepsilon\log n)^{1/2}\right)\le\Psi_1 n^{-\beta}+$$

$$+P(|W(1)|>2(\varepsilon\log n)^{1/2})\le\Psi_1 n^{-\beta}+n^{-\varepsilon},$$

где использовали (3.3.15) и известное экспоненциальное неравенство для винеровского процесса (см. [89] неравенство (29.2)). (3.3.17) доказывается точно также. Теорема 3.3.4 доказана. ■

Введем оценки для $F_m(x;i)=1-\exp(-\Lambda(x;i)),\ m=1,2,3;\ i\in\Im$, при помощи функционалов из § 1.3 формулами, аналогичными (1.4.2):

$$F_{1n}^0(x;i)=1-\exp(-\Lambda_n^0(x;i)),\ F_{2n}^0(x;i)=1-\prod_{u\le x}(1-\Delta\Lambda_n^0(u;i)),\ F_{3n}^0(x;i)=1-[1-\tilde{H}_n(x)]^{R_n^0(x;i)},$$

где $R_n^0(x;i)=\Lambda_n^0(x;i)[\Lambda_n^0(x)]^{-1}$. Образуем вектор-процессы $Q_{mn}(t)=(Q_{mn}^{(1)}(t_1),...Q_{mn}^{(k)}(t_k))$ и $Q_n(t)=(Q_n^{(1)}(t_1),...,Q_n^{(k)}(t_k))$, где $Q_{mn}^{(i)}(x)=n^{1/2}(F_{mn}^0(x;i)-F_{mn}(x;i))$ и $Q_n^{(i)}(x)=\exp(-\Lambda(x;i))Y_n^{(i)}(x),\ m=1,2,3;\ i\in\Im$. Аппроксимируем последовательности $Q_{mn}(t)$ последовательностью гауссовских вектор-процессов $Q_n(t)$.

Теорема 3.3.5. Пусть выполнено условие (3.3.1). Тогда для всех m=1,2,3

$$P\left(\sup_{t\in(-\infty;\mathrm{T}_n]^k}\left\|Q_{mn}(t)-Q_n(t)\right\|^{(k)}>r_m(n)\right)\le kR_m n^{-\beta}, \tag{3.3.18}$$

где $r_1(n)=\{r(n)+\frac{1}{2}n^{-1/2}(r(n)+6b_n^2(\varepsilon\log n)^{1/2})^2\}, r_2(n)=r_3(n)=r_1(n)+b_n^2n^{-1/2}$ и R_m-положительные постоянные.

Доказательство теоремы 3.3.5. Пусть m=1. Разложим $F_{1n}^0(x;i)$ по $\Lambda_n^0(x;i)$ в ряд: $Q_{1n}^{(i)}(x)=\exp(-\Lambda(x;i))\omega_n^{(i)}(x)+\frac{1}{2}n^{-1/2}\exp(-\theta_n^{(i)}(x))(Y_n^{(i)}(x))$,
где $\theta_n^{(i)}\in[(\Lambda_n(x;i)\wedge\Lambda(x;i));(\Lambda_n(x;i)\vee\Lambda(x;i))]$. Тогда (3.3.18) для этого случая следует из (3.3.2) и (3.3.17). Согласно неравенствам (I) и (V), с учетом доказательства теоремы 1.4.1 имеем неравенства для $x<Z_{(n)}$ и всех $i\in\Im$ с вероятностью 1:

$$\begin{gathered}0\le F_{2n}^0(x;i)-F_{1n}^0(x;i)\le\frac{1}{2n}\int\limits_{(-\infty;x]}\frac{d\widetilde{H}_n(u;i)}{(1-\widetilde{H}_n(u))^2},\\ 0\le F_{3n}^0(x;i)-F_{1n}^0(x;i)<\frac{1}{n}\int\limits_{(-\infty;x]}\frac{d\widetilde{H}_n(u;i)}{(1-\widetilde{H}_n(u))^2}.\end{gathered} \tag{3.3.19}$$

Теперь оценки (3.3.18) для случаев m=2,3 следуют из (3.3.18) при m=1, неравенств (3.3.19), а также (1.9.45). Теорема 3.3.5 доказана. ■

В заключение этого параграфа рассмотрим МПИ из § 1.3 (определение 1.3.4, лемма 1.3.5). Учитывая непрерывность H, используя функционал $F_3(x;i)$ из (1.3.21) для $F(x;i)=1-\exp(-\Lambda(x;i))$ рассмотрим оценку $F_n^0(x;i)=1-[1-\widetilde{H}_n(x)]^{\widetilde{\mathrm{P}}_n^{(i)}}$, где $\widetilde{\mathrm{P}}_n^{(i)}=1-(1-\mathrm{P}_n^{*(i)})\mathrm{I}(\mathrm{P}_n^{*(i)}\le 1)$ и $\mathrm{P}_n^{*(i)}=H_n^*(+\infty;i)$. Следовательно, $\widetilde{\mathrm{P}}_n^{(i)}=\widetilde{H}_n(+\infty;i)$. Напомним, что эта модель характеризуется независимостью $\{Z_j, j\ge 1\}$ и вектора $\{(\delta_j^{(1)},...,\delta_j^{(k)}), j\ge 1\}$. Поэтому в МПИ обычные эмпирические оценки $H_n(x)$ и $H_n(\infty;i)$, определенные в п.IV § 1.9 являются независимыми и в системе (1.9.60) $\mathrm{M}B_n^{(i)}(\infty)B_n^{(0)}(y)=0,\forall n\ge 1$. Однако, этого нельзя сказать об оценках $\widetilde{H}_n(x)$ и $\widetilde{\mathrm{P}}_n^{(i)}$ так как в их определение входит последовательность пуассоновских с.в. $\{\nu_n, n\ge 1\}$. Пусть $\beta_n(t)=(\beta_n^{(1)}(t_1),\dots,\beta_n^{(k)}(t_k))$, $\Gamma_n(t)=(\Gamma_n^{(1)}(t_1),...,\Gamma_n^{(k)}(t_k))$, где $\beta_n^{(i)}(x)=n^{1/2}(F_n^0(x;i)-(F(x;i))$ и

$$\Gamma_n^{(i)}(x)=\exp(-\Lambda(x;i))\left[\mathrm{P}^{(i)}\frac{W_n^{(0)}(x)}{1-H(x)}-W_n^{(i)}(\infty)\log(1-H(x))\right].$$

Далее последовательность $\beta_n(t)$ аппроксимируется последовательностью гауссовских вектор-процессов.

Теорема 3.3.6. Пусть имеет место условие

$$\frac{n}{\log n} \geq \left(64w^2\varepsilon \vee \frac{2\varepsilon}{w}b_n^2 \vee \frac{2\varepsilon}{w\mathrm{P}^2}\right), n \geq 2,$$

где $\varepsilon > 0$, $r \geq 2$, $w = (16(1+e/3))^{-1}$ и $b_n = (1-H(\mathrm{T}_n))^{-1}$. Тогда

$$P\left(\sup_{t\in(-\infty;\mathrm{T}_n]^k} \left\|\beta_n(t) - \Gamma_n(t)\right\|^k > q(n)\right) \leq E_1 n^{-\beta}, \qquad (3.3.20)$$

где $q(n) = E_0 b_n^2 n^{-1/2}\log n, E_0 = E_0(\varepsilon; r), E_1$-положительные постоянные и $\beta = (r \wedge w\varepsilon)$.
■

Для доказательства теоремы 3.3.6 для процессов $\beta_n^{(i)}(x)$ используется разложение оценок $F_n^0(x;i)$ по степеням $\widetilde{H}_n(x)$ и $\widetilde{\mathrm{P}}_n^{(i)}$ как в доказательстве теоремы 3.2.1. При этом каждой из пяти компонент разложения применяются оценки (1.9.42), (1.9.45), (1.9.49), (1.9.51), а также (1.9.74) (или (1.9.54) и (1.9.57)). Детали опускаются. ■

§ 3.4. Непараметрическое оценивание с использованием байесовского подхода

Рассмотрим модель $(Z;A)$, где с.в. Z имеет выборочное пространство $(\aleph;\square)$, где $\aleph \subseteq R^1$ и $\square$-борелевская алгебра на $\aleph$. На $(\aleph;\square)$ определим вероятностные меры $\{Q^{(i)}(B) = P(Z \in B; A^{(i)}), B \in \square, i \in \Im\}$, для которых справедливо равенство $Q^{(1)}(B) + \cdots + Q^{(k)}(B) = Q(B) = P(Z \in B),\ \forall B \in \square$. Пусть $\{\alpha^{(i)}(\cdot), i \in \Im\}$ – неотрицательные конечно-аддитивные меры на $(\aleph;\square)$ и $\alpha(\cdot)$ их сумма: $\alpha(B) = \alpha^{(1)}(B) + \cdots + \alpha^{(k)}(B), \forall B \in \square$. Через $D(\alpha^{(1)},...,\alpha^{(k)})$ обозначим распределение Дирихле с параметром $(\alpha^{(1)},...,\alpha^{(k)})$ (подробно см. [92, 170]). Это распределение нами используется в качестве априорного для вектора $(Q^{(1)},... \ ...,Q^{(k)})$, предполагаемого случайным вектор-процессом на $(\aleph;\square)$. Распределение Дирихле является одним из очень подходящих и апробированных априорных распределений в статистике [88, 92, 170, 171, 182, 188, 230-232, 234]. Таким образом, пусть $(Q^{(1)},...,Q^{(k)})$ является k-мерным процессом Дирихле, что по определению означает, что для любых измеримых разбиений $\{(B_1^{(i)},...,B_{m_i}^{(i)}),\ i \in \Im\}$ пространства $\aleph$ совместное распределение с.в. $Q^{(1)}(B_1^{(1)}),...,Q^{(1)}(B_{m_1}^{(1)}),...,Q^{(k)}(B_1^{(k)}),...,Q^{(k)}(B_{m_k}^{(k)})$ есть распределение Дирихле $D(\alpha^{(1)}(B_1^{(1)}),...,\alpha^{(1)}(B_{m_1}^{(1)}),...,\alpha^{(k)}(B_1^{(k)}),...,\alpha^{(k)}(B_{m_k}^{(k)}))$. Так как

$H(x;i) = Q^{(i)}((-\infty;x]),\ \ i \in \Im$ и $H(x) = Q((-\infty;x]), x \in \overline{R}$, тогда (см. [170]) $H(x;i)$ имеет бета-распределение $\mathrm{B}e(\alpha^{(i)}(x);\alpha(R)-\alpha^{(i)}(x))$, где $\alpha^{(i)}(x) = \alpha^{(i)}((-\infty;x]),\ i \in \Im$. Через $\Box$ обозначим оператор математического ожидания относительно распределения Дирихле. Тогда (см. [170]) при $i, j \in \Im$:

$$\Box H(x;i) = \frac{\alpha^{(i)}(x)}{\alpha(R)},\ \Box (H(x;i))^2 = \frac{\alpha^{(i)}(x)(\alpha^{(i)}(x)+1)}{\alpha(R)(\alpha(R)+1)},$$

$$\Box H(x;i)H(x;j) = \frac{\alpha^{(i)}(x)\alpha^{(j)}(x)}{\alpha(R)(\alpha(R)+1)},\ i \neq j. \tag{3.4.1}$$

Тогда непосредственным вычислением имеем

$$\Box H(x) = \sum_{i=1}^{k} \Box H(x;i) = \frac{\alpha(x)}{\alpha(R)}, \alpha(x) = \alpha((-\infty;x]),$$

$$\Box H^2(x) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha^{(i)}(x)(\alpha^{(i)}(x)+1)}{\alpha(R)(\alpha(R)+1)} + \sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha^{(i)}(x)\alpha^{(j)}(x)}{\alpha(R)(\alpha(R)+1)} = \frac{\alpha(x)(\alpha(x)+1)}{\alpha(R)(\alpha(R)+1)}. \tag{3.4.2}$$

На множестве допустимых решений *D*, состоящем из распределений и субраспределений введем функцию потерь

$$\Box(\hat{H};K) = \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{H}(x) - K(x))^2 \, dW(x),\ \ \hat{H}, K \in D,$$

где $w(x)$ – заданная весовая функция. Как следует из [88,170], минимум риска $\Box\Box(\hat{H}(\cdot;i);H(\cdot;i))$ в случае отсутствия выборки достигается при $\hat{H}(x;i) = \Box H(x;i) = \frac{\alpha^{(i)}(x)}{\alpha(R)}$. Таким образом, согласно байесовскому решающему правилу функция $H_0(x;i) = \frac{\alpha^{(i)}(x)}{\alpha(R)}$ есть априорное представление о форме неизвестного распределения $H(x;i)$. Фергюсон [170] доказал, что для выборки $S_0^{(n)}$ (см. § 1.4) объема *n* будем иметь следующее решающее правило

$$H_n^{\alpha}((x;i)/S_0^{(n)}) = H_n^{\alpha}(x;i) = \frac{\alpha^{(i)}(x) + \sum_{k=1}^{n} \mathrm{I}(Z_k \le x, \delta_k^{(i)} = 1)}{\alpha(R)+n} = q_n H_0(x;i) +$$

$$+(1-q_n)H_n(x;i),\quad q_n = \frac{\alpha(R)}{\alpha(R)+n}$$

являющееся апостериорным средним значением $H(x;i),\ i\in\Im$. Тогда из вышеприведенных вычислений будем иметь следующие априорную и апостериорную средние значения для $H(x)$:

$$H_0(x)=\alpha(x)/\alpha(R);\ H_n^\alpha(x)=q_nH_0(x)+(1-q_n)H_n(x).$$

В частности, для $p^{(i)}=P(A^{(i)})=\lim_{x\to\infty}H(x;i),\ i\in\Im$, байесовскими оценками до и после эксперимента являются соответственно $p_0^{(i)}=\frac{\alpha^{(i)}(R)}{\alpha(R)}$ и $p_{n\alpha}^{(i)}=q_np_0^{(i)}+(1-q_n)\ p_n^{(i)}$, где $p_n^{(i)}=\frac{1}{n}(\delta_1^{(i)}+\cdots+\delta_n^{(i)}),\ i\in\Im$. Видим, что байесовские оценки являются сглаженными в отличие от их эмпирических аналогов и представляют собой смеси априорных представлений и эмпирических оценок с весами q_n и $1-q_n$. При этом меры $\alpha(R)$ и $\alpha(R)+n$ трактуются как априорная и апостериорная объемы выборок. Отметим, что если при фиксированном $x\in\overline{R}$ все $\alpha^{(i)}(x)\uparrow\infty$ так, что отношения $\alpha^{(i)}(x)/\alpha(R)$ остаются постоянными, то оценки $H_n^\alpha(x;i)$ и $H_n^\alpha(x)$ стремятся к $H_0(x;i)$ и $H_0(x)$ по вероятности. Следовательно, априорная информация велика и она определяет оценку. Если же $\alpha^{(i)}(x)$ фиксированы, но $n\to\infty$, то байесовские оценки в пределе совпадают с эмпирическими, т.е. информация имеющаяся в эмпирических оценках подавляет информацию, содержащуюся в априорном распределении.

Используя вышеприведенные оценки, методом подстановки оценим к.ф.и. $\Lambda(x;i)$ статистикой

$$\Lambda_n^\alpha(x;i)=\int\limits_{(-\infty;x]}\frac{dH_n^\alpha(u;i)}{1-H_n^\alpha(u)},\ i\in\Im, \tag{3.4.3}$$

а для функционалов (1.4.1) используем оценки при $i\in\Im$

$$F_{1n}^\alpha(x;i)=1-\exp(-\Lambda_n^\alpha(x;i)),\ F_{2n}^\alpha(x;i)=1-\prod_{u\le x}(1-\Delta\Lambda_n^\alpha(u;i)),\ F_{3n}^\alpha(x;i)=1-[1-H_n^\alpha(x)]^{R_n^\alpha(x;i)}, \tag{3.4.4}$$

где $R_n^\alpha(x;i)=\Lambda_n^\alpha(x;i)[\Lambda_n^\alpha(x)]^{-1}$, $\Lambda_n^\alpha(x)=\sum_{i=1}^k\Lambda_n^\alpha(x;i)$. Понятно, что оценки (3.4.3) и (3.4.4), строго говоря, не являются байесовскими в классическом значении этого понятия. Однако, нахождение байесовских оценок как апостериорное среднее значение оцениваемых функционалов в рассматриваемой модели довольно трудоемкая задача. С другой стороны, байесовская оценка типа Каплана-Мейера, вычисленная в частной модели Сусарлой и Ван Райзином [286], используя теорию Фергюсона, обладая некоторыми преимуществами над PL-оценкой, является асимптотически эквивалентной последней. Однако, специальная модификация байесовской оценки, сделанная Раем, Сусарлой и Ван Райзином [88] также дает оценку, уже не являющуюся байесовской. Она обладает преимуществами над оценкой Каплана-Мейера и для малого объема выборки. Такая модификация состоит в сочетании байесовской методологии с методом подстановки, как мы и поступили при построении оценок (3.4.3) и (3.4.4), которые пригодны и для общих моделей неполных данных. В этой связи отметим, что сочетание байесовского метода с методом подстановки используется в ряде работ [88, 254, 265, 270, 321]. Поскольку байесовость оценок $\{H_n^{\alpha}(x), H_n^{\alpha}(x;i), i \in \Im\}$ уже подразумевает их оптимальность, то естественно ожидать, что оценки (3.4.3) и (3.4.4) также являются не хуже, чем их эмпирические аналоги из §1.4. Например, последний элемент $Z_{(n)}$ вариационного ряда из $\{Z_1,...,Z_n\}$ уже не является «опасной» за счет присутствия априорного представления через меры $\{\alpha^{(i)}, i \in \Im\}$, чего мы не можем утверждать для эмпирических оценок. Учитывая, то, что при $n \to \infty$, априорная информация поглощается апостериорной, мы можем ожидать, что оценки (3.4.3) и (3.4.4) должны обладать всеми теми асимптотическими свойствами, которыми обладают их эмпирические аналоги. Поскольку для всех $i \in \Im$

$$\sup_{x \in R} | H_n^{\alpha}(x;i) - H(x;i) | \le \sup_{x \in R} | H_n(x;i) - H(x;i) | + \varepsilon_n,$$

где $\varepsilon_n = 3q_n = \mathrm{O}(n^{-1})$, то теоремы типа Гливенко-Кантелли и ЗПЛ типа Кифера справедливы для $\{H_n^{\alpha}(x;i), i \in \Im\}$, а следовательно, и для $H_n^{\alpha}(x;i)$ на всей прямой. Для оценок (3.4.3) справедлива

Теорема 3.4.1. Пусть все субраспределения $\{H(\cdot\,;i), i \in \Im\}$ непрерывны и $\mathrm{T} < \mathrm{T}_H = \inf\{x \in R : H(x) = 1\}$. Тогда

$$\sup_{-\infty < x \le \mathrm{T}} \left| \Lambda_n^{\alpha}(x;i) - \Lambda(x;i) \right| \overset{\text{п.н.}}{=} \mathrm{O}\left(\left(\frac{\log\log n}{n} \right)^{1/2} \right), \ i \in \Im. \tag{3.4.5}$$

Пусть последовательность $\{\mathrm{T}_n, n \ge 1\}$ такова, что $\mathrm{T}_n < \mathrm{T}_H$ и $\mathrm{T}_n \uparrow \infty$ при $n \to \infty$ так, что $1 - H(\mathrm{T}_n) \ge \left(\frac{\log\log n}{n} \right)^{1/2}$. Тогда

$$\sup_{-\infty < x \le \mathrm{T}} \left| (1 - H(x))(\Lambda_n^{\alpha}(x;i) - \Lambda(x;i)) \right| \overset{\text{п.н.}}{=} \mathrm{O}\left(\left(\frac{\log\log n}{n} \right)^{1/2} \right), \ i \in \Im. \tag{3.4.6}$$

Доказательство теоремы 3.4.1. Для всех $i \in \Im,\ \Lambda_n^{\alpha}(x;i) - \Lambda(x;i) = R_{1n}^{(i)}(x) + \ + R_{2n}^{(i)}(x) + R_{3n}^{(i)}(x)$, где

$$R_{1n}^{(i)}(x)=\int\limits_{(-\infty;x]}\left(\frac{1}{1-H_n^{\alpha}(u)}-\frac{1}{1-H_n(u)}\right)dH_n(u),$$

$$R_{1n}^{(i)}(x)=q_n\int\limits_{(-\infty;x]}\frac{d(H_0(u;i)-H_n(u;i))}{1-H_n^{\alpha}(u)},$$

$$R_{1n}^{(i)}(x)=\int\limits_{(-\infty;x]}\frac{dH_n(u;i)}{1-H_n(u)}-\int\limits_{(-\infty;x]}\frac{dH(u;i)}{1-H(u)}.$$

Так как $(\alpha(R)+n)(1-H_n^{\alpha}(x))\geq n(1-H_n(x)),\ x\in R$ и, согласно (1.9.12), $\sup\limits_{-\infty<x\leq \mathrm{T}}\{(1-H(x))/(1-H_n(x))\}\leq 2$, п.н., то

$$\sup_{-\infty<x\leq \mathrm{T}}|R_{1n}^{(i)}(x)|\leq\frac{2q_n}{(1-H_n^{\alpha}(\mathrm{T}))(1-H_n(\mathrm{T}))}\leq \qquad (3.4.7)$$

$$\leq\frac{2\alpha(R)}{n(1-H_n(\mathrm{T}))^2}\leq\frac{4\alpha(R)}{n(1-H(\mathrm{T}))^2}=\mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right),\ i\in\Im$$

Аналогично имеем

$$\sup_{-\infty<x\leq \mathrm{T}}|R_{2n}^{(i)}(x)|\leq\frac{4\alpha(R)}{n(1-H(T))^2}=\mathrm{O}\left(\tfrac{1}{n}\right),\ i\in\Im,\ \text{п.н.} \qquad (3.4.8)$$

Согласно неравенству (3.9) в [153], существуют числа *A,B>0* и п.н.

$$\sup_{-\infty<x\leq \mathrm{T}}|R_{3n}^{(i)}(x)|\leq\frac{A}{(1-H(T))}\left(\frac{\log\log n}{n}\right)^{1/2}+\frac{B}{(1-H(T))^2}\left(\frac{\log\log n}{n}\right),\ i\in\Im, \qquad (3.4.9)$$

Из (3.4.7)–(3.4.9) следует (3.4.5). Для доказательства (3.4.6) заметим, что п.н. справедливы равенства для всех $i\in\Im$

$$\sup_{-\infty<x\leq \mathrm{T}_n}|(1-H(x))R_{1n}^{(i)}(x)|=\mathrm{O}\left(\left(\frac{1}{n\log\log n}\right)^{1/2}\right),$$

$$\sup_{-\infty<x\leq \mathrm{T}_n}|(1-H(x))R_{2n}^{(i)}(x)|=\mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right),\quad \sup_{-\infty<x\leq \mathrm{T}_n}|(1-H(x))R_{3n}^{(i)}(x)|=\mathrm{O}\left(\left(\frac{\log\log n}{n}\right)^{1/2}\right).$$

Этим теорема 3.4.1 и доказана. ■

Аналогичное утверждение справедливо и для оценок (3.4.4).

Теорема 3.4.2. В условиях теоремы 3.4.1 при *m*=1,2,3 и $i\in\Im$

$$\sup_{-\infty<x\le T} |F_{mn}^{\alpha}(x;i)-F(x;i)| \overset{\text{п.н.}}{=} \mathrm{O}\left(\left(\frac{\log\log n}{n}\right)^{1/2}\right), \tag{3.4.9}$$

$$\sup_{-\infty<x\le T} |(1-H(x))(F_{mn}^{\alpha}(x;i)-F(x;i))| \overset{\text{п.н.}}{=} \mathrm{O}\left(\left(\frac{\log\log n}{n}\right)^{1/2} \vee \lambda^{(i)}(n)\right), \tag{3.4.10}$$

где $\lambda^{(i)}(n)=(1-H(T_n))(1-F(T_n;i))$ и $F(x;i)=1-\exp(-\Lambda(x;i))$.

Доказательство теоремы 3.4.2. В условиях непрерывности всех субраспределений $F_m(x;i)=F(x;i),\ m=1,2,3;\ i\in\Im$. При m=1 (3.4.9) получается применением последнего элементарного неравенства (1.3.6). Поскольку для всех $(x;i)\in\overline{R}\times\Im,\ \Delta H_n^{\alpha}(x;i)\le 2q_n+\frac{1}{n}=\mathrm{O}(\frac{1}{n})$ и $1-H_n^{\alpha}(x)\ge(1-q_n)(1-H_n(x))$, то, используя правые части неравенств (I) и (V) теоремы 1.3.1 и оценку (1.9.12), получаем неравенства для всех $i\in\Im$:

$$\begin{aligned}
&\sup_{-\infty<x\le T} |F_{2n}^{\alpha}(x;i)-F_{1n}^{\alpha}(x;i)| \le (1-H(T))^{-2}\left(\frac{2\alpha(R)}{n}+\frac{\alpha(R)+n}{n^2}\right)=\mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right), \text{ п.н.}\\
&\sup_{-\infty<x\le T} |F_{3n}^{\alpha}(x;i)-F_{1n}^{\alpha}(x;i)| \le (1-H(T))^{-2}\left(\frac{2\alpha(R)}{n}+\frac{\alpha(R)+n}{n^2}\right)=\mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right), \text{ п.н.}
\end{aligned} \tag{3.4.11}$$

Этими неравенствами справедливость (3.4.9) установлена. Пользуясь четвертым неравенством (1.3.6) и оценками (3.4.11), будем иметь при l=1,2,3 и m=2,3:

$$\begin{aligned}
&\sup_{x\in R} |(1-H(x))(F_{\ell n}^{\alpha}(x;i)-F(x;i))| \le \sup_{-\infty<x\le T_n} |(1-H(x))(F_{1n}^{\alpha}(x;i)-F(x;i))| +\\
&+\sup_{-\infty<x\le T_n} |(1-H(x))(F_{mn}^{\alpha}(x;i)-F(x;i))| + \sup_{T_n\le x<\infty} |(1-H(x))(F_{\ell n}^{\alpha}(x;i)-F(x;i))| \le\\
&\le \sup_{x\le T_n} |(1-H(x))(\Lambda_n^{\alpha}(x;i)-\Lambda(x;i))| + (1-H(T_n))^{-1}\left(\frac{2\alpha(R)}{n}+\frac{\alpha(R)+n}{n^2}\right)+\\
&+(1-H(T_n))(1-F(T_n;i)),
\end{aligned}$$

где для первого слагаемого в правой части неравенства имеем (3.4.6), а второе, согласно выбору последовательности $\{T_n, n\ge 1\}$, есть $\mathrm{O}((n\log\log n)^{-1/2})$. Этим и (3.4.10) также доказано. ■

Таким образом, оценки (3.4.3) и (3.4.4) являются равномерно сильно-состоятельными оценками для $\Lambda(x;i)$ и $F(x;i)$. Используя оценки из доказательства теорем 3.4.1 и 3.4.2, теорему M, а также и основной результат работы [126], нетрудно установить результаты об аппроксимации оценок (3.4.3) и (3.4.4) последовательностями гауссовских процессов. Пусть $M_n^{\alpha}(t)= \ =(M_{n1}^{\alpha}(t_1),...,M_{nk}^{\alpha}(t_k))$ и $N_{mn}^{\alpha}(t)=(N_{mn1}^{\alpha}(t_1),...,N_{mnk}^{\alpha}(t_k)), t=(t_1,...,t_k)\in R^k$, где при $i \in \Im$ и m=1,2,3 $M_{ni}^{\alpha}(x) = n^{1/2}(\Lambda_n^{\alpha}(x;i) - \Lambda(x;i))$ и $N_{mni}^{\alpha}(x) = n^{1/2}(F_{mn}^{\alpha}(x;i) - F(x;i))(1 - F_{mn}^{\alpha}(x;i))^{-1}$. Пусть $W_n^d(t) = (W_n^{(1)}(d^{(1)}(t_1)),\dots, W_n^{(k)}(d^{(k)}(t_k)))$, где $\{W_n^{(i)}(y), y \ge 0, i \in \Im\}$ последовательности стандартных винеровских процессов и $d^{(i)}(x) = \int\limits_{(-\infty;x]}[1-H(u)]^{-2} dH(u;i),\ i \in \Im.$

Теорема 3.4.3. Пусть все субраспределения $\{H(\cdot;i), i \in \Im\}$ непрерывны и $\mathrm{T} < \mathrm{T}_H$. Тогда

$$\sup_{t\in(-\infty;\mathrm{T}]^k}\left\|M_n^{\alpha}(t) - W_n^d(t)\right\|^{(k)} \overset{\text{п.н.}}{=} \mathrm{O}(n^{-1/2}\log n), \quad \sup_{t\in(-\infty;\mathrm{T}]^k}\left\|N_{mn}^{\alpha}(t) - W_n^d(t)\right\|^{(k)} \overset{\text{п.н.}}{=} \mathrm{O}(n^{-1/2}\log n),$$

Детали доказательства теоремы 3.4.3 опускаются. ■

Таким образом, для оценок (3.4.3) и (3.4.4) справедливы аппроксимации с оптимальной скоростью. ■

§ 3.5. Аппроксимации статистики отношения правдоподобия

Рассмотрим модель $(Z;A)$. Пусть $(\aleph, \square)$ выборочное пространство с.в. Z, где $\aleph \subseteq \overline{R}$ и $\square$-борелевская σ-алгебра на $\aleph$. Пусть $\delta^{(i)} = \mathrm{I}(A^{(i)}),\ i \in \Im$. Предположим, что совместное распределение вектора $\xi = (Z, \delta^{(1)},\dots,\delta^{(k)})$ задано с точностью до неизвестного (для простоты скалярного) параметра $\theta, \theta \in \Theta \subseteq R$:
$Q_\theta(x; y^{(1)},\dots,y^{(k)}) = P_\theta(Z \le x, \delta^{(1)} = y^{(1)},\dots,\delta^{(k)} = y^{(k)}),\ x \in \overline{R},\ y^{(i)} \in \{0,1\} = D,\ i \in \Im$. Пусть $H(x;\theta) = P_\theta(Z \le x)$ $H^{(i)}(x;\theta) = P_\theta(Z \le x, \delta^{(1)} = 1),\ i \in \Im,\ \theta \in \Theta$. Предполагая абсолютную непрерывность субраспределений $H^{(i)}$, имеем формулы для к.ф.и.:

$$\Lambda^{(i)}(x;\theta) = \int\limits_{(-\infty;x]} \frac{h^{(i)}(u;\theta)du}{1 - H(u;\theta)}, \qquad h^{(i)}(x;\theta) = \frac{\partial H^{(i)}(x;\theta)}{\partial x},$$

$$\Lambda(x;\theta) = \int\limits_{(-\infty;x]} \frac{h(u;\theta)du}{1 - H(u;\theta)}, \qquad h(x;\theta) = \frac{\partial H(x;\theta)}{\partial x} = \sum_{i=1}^{k} h^{(i)}(x;\theta),$$

где $1 - H(x;\theta) = \exp(-\Lambda(x;\theta)) = \prod_{i=1}^{k}(1 - F^{(i)}(x;\theta)),\ F^{(i)}(x;\theta) = 1 - \exp(-\Lambda^{(i)}(x))$. Пусть $(Y^{(n)}, U^{(n)}, Q_\theta^{(n)})$ –последовательность статистических экспериментов, соответствующая выборке $S_0^{(n)}$ из § 1.3, где $Y^{(n)} = \overbrace{\{\aleph \times D^{(k)}\} \times \cdots \times \{\aleph \times D^{(k)}\}}^{n}$, $D^{(k)} = \overbrace{D \times \cdots \times D}^{k}$, $U^{(n)}$– борелевская σ-алгебра на $Y^{(n)}$ и $Q_\theta^{(n)}$–распределение на $(Y^{(n)}; U^{(n)})$, являющееся «n-кратным произведением Q_θ». Пусть

$\frac{\partial F^{(i)}(x;\theta)}{\partial x} = f^{(i)}(x;\theta)$. Тогда $f^{(i)}(x;\theta) = (1 - F^{(i)}(x;\theta))h^{(i)}(x;\theta)$ и распределения $\{Q_\theta^{(n)}, \theta \in \Theta\}$ являются абсолютно непрерывными относительно меры ν_n, а плотность этого семейства на выборочном пространстве $Y^{(n)}$ задается формулой

$$\frac{dQ_\theta^{(n)}(Z^{(n)})}{d\nu^{(n)}(Z^{(n)})} = P_n(Z^{(n)};\theta) = \prod_{m=1}^{n}\prod_{i=1}^{k}\{f^{(i)}(x_m;\theta)\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k}(1 - F^{(i)}(x_m;\theta))\}^{y_m^{(i)}}, Z^{(n)} \in Y^{(n)},$$

где $d\nu^{(n)}(z^{(n)}) = d\nu(z_1) \times \cdots \times d\nu(z_n), d\nu(z_m) = \Delta_{y_m^{(i)}} \times dx_m$ и $\Delta_{y_m^{(i)}}$–считающая мера, сосредоточенная в точке $y_m^{(i)} \in D,\ i \in \Im,\ m = 1,...,n$. Пусть

$$1 - G^{(i)}(x;\theta) = \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k}(1 - F^{(j)}(x;\theta)),\ \ i \in \Im.$$

Тогда очевидно $h^{(i)}(x;\theta) = f^{(i)}(x;\theta)(1 - G^{(i)}(x;\theta))$. Пусть θ_0–истинное значение параметра θ и при каждом $u \in R,\ \theta_0 + n^{-1/2}u = \theta_n \in \Theta,\ n \geq 1$. Зададимся отношением правдоподобия при $\xi^{(n)} = (\xi_1,...,\xi_n)$:

$$\frac{dQ_{\theta_n}^{(n)}(\xi^{(n)})}{dQ_{\theta_0}^{(n)}(\xi^{(n)})} = \frac{P_n(\xi^{(n)};\theta_n)}{P_n(\xi^{(n)};\theta_0)} = \prod_{m=1}^{n}\prod_{i=1}^{k}\left[\frac{h^{(i)}(Z_m;\theta_n)}{h^{(i)}(Z_m;\theta_0)}\right].$$

Тогда

$$L_n(u) = \log\left\{\frac{dQ_{\theta_n}^{(n)}(\xi^{(n)})}{dQ_{\theta_0}^{(n)}(\xi^{(n)})}\right\} = n\sum_{i=1}^{k}\int_{-\infty}^{\infty}\log\left[\frac{h^{(i)}(x;\theta_n)}{h^{(i)}(x;\theta_0)}\right]dH_n^{(i)}(x),$$

где $H_n^{(i)}(x) = H_n(x;i), H_n^{(1)}(x) + \cdots + H_n^{(k)}(x) = H_n(x)$ (см. § 1.4). Сформулируем условия регулярности для установления ЛАН семейства $\{Q_\theta^{(n)}, \theta \in \Theta\}$ в точке $\theta = \theta_0$:

(У1). Пусть Θ–открытое множество в R, носители $N^{(i)} = \{x : f^{(i)}(x;\theta) > 0\},\ i \in \Im$, не зависят от θ и $\bigcap_{i\in\Im} N^{(i)} \neq \varnothing$;

(У2). Для любых двух точек $\theta_1, \theta_2 \in \Theta, \theta_1 \neq \theta_2$ и $x \in N^{(i)}, f^{(i)}(x;\theta_1) \neq f^{(i)}(x;\theta_2)$, $i \in \Im$;

(У3). Существуют и конечны для всех x производные $\frac{\partial^\ell f^{(i)}(x;\theta)}{\partial\theta^\ell},\ \ell = 1,2;\ i \in \Im$;

(У4). $\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\partial^\ell f^{(i)}(x;\theta)}{\partial\theta^\ell}\right|dx < \infty,\ \ell = 1,2;\ i \in \Im$;

(У5). Функции $\dfrac{\partial \log f^{(i)}(x;\theta)}{\partial\theta}$ и $\dfrac{\partial \log h^{(i)}(x;\theta)}{\partial\theta}$, $i\in\Im$, являются функциями ограниченной вариации по x.

(У6). Информации Фишера

$$\mathrm{I}^{(i)}(\theta)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial \log f^{(i)}(x;\theta)}{\partial\theta}\right)^2 dF^{(i)}(x;\theta),\ i\in\Im;\ \ \Im^{(i)}(\theta)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial \log h^{(i)}(x;\theta)}{\partial\theta}\right)^2 dH^{(i)}(x;\theta),\ i\in\Im;$$

соответствующие распределениям $F^{(i)}$ и $H^{(i)}$, конечны и положительны в точке $\theta=\theta_0$.

Пусть $\mathrm{I}(\theta)=\mathrm{I}^{(1)}(\theta)+\cdots+\mathrm{I}^{(k)}(\theta)$ и $\Im(\theta)=\Im^{(1)}(\theta)+\cdots+\Im^{(k)}(\theta)$. Отметим (см. [69]), что фишеровская информация, соответствующая выборке $S_0^{(n)}$ равна $n\Im(\theta)$. Обозначим $H(x;\theta_0)=H(x), H^{(i)}(x;\theta_0)=H^{(i)}(x), F^{(i)}(x;\theta_0)=F^{(i)}(x),\ i\in\Im$.

Теорема 3.5.1. Пусть выполнены условия (У1)–(У4), а также условия (У5), (У6) для плотностей $h^{(i)}, i\in\Im$. Тогда при каждом $u\in R$ для СОП имеет место представление

$$\frac{dQ_{\theta_n}^{(n)}(\xi^{(n)})}{dQ_{\theta_0}^{(n)}(\xi^{(n)})}=\exp\{u\omega_n-\frac{u^2}{2}\Im(\theta_0)+R_n(u)\},\tag{3.5.1}$$

где $\omega_n=\sum_{i=1}^{k}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial \log h^{(i)}(x;\theta_0)}{\partial\theta}d\left[n^{-1/2}W^{(i)}(H^{(i)}(x);n)\right]$, и $R_n(u)\to 0$ при $n\to\infty$ по $Q_{\theta_0}^{(n)}-$вероятности. Здесь $\{W^{(i)}(y;n);\ 0\le y\le 1;\ n\ge 1;\ i\in\Im\}-$двухпараметрические винеровские процессы из (1.9.66), являются независимыми. ■

Замечание 3.5.2. Отметим, что ω_n является суммой независимых стохастических интегралов Ито, каждый из которых по распределению совпадает со с.в. $N(0;\Im^{(i)}(\theta_0)), i\in\Im$. Следовательно, $\omega_n\overset{D}{=}N(0;\Im(\theta_0))$. ■

Замечание 3.5.3. При $k=1, A^{(1)}=\Omega$ и $(Z;A)-$модель становится обычной моделью полных наблюдений. Тогда из теоремы 3.5.1 следует ЛАН для СОП в терминах аппроксимаций. При k=2, если $Z=Y^{(1)}\wedge Y^{(2)}, A^{(1)}=\{Y^{(1)}\le Y^{(2)}\}$ и $A^{(2)}=\{Y^{(1)}>Y^{(2)}\}$, где $Y^{(1)}$ и $Y^{(2)}$ независимы, то $F^{(i)}(x;\theta)=P_\theta(Y^{(1)}\le x), i=1,2$. Пусть интерес представляет только с.в. $Y^{(1)}$. Тогда $F^{(2)}$ будет мешающим распределением и в определении $P_n(\cdot;\theta)$ выражения с участием $F^{(2)}$ отбросим. Интерес представляет установление ЛАН и для таких «урезанных» функций правдоподобия. Обобщив такую задачу в МКР и при k>2, можно считать, что для каждой ф.р. $F^{(i)}$ в качестве мешающего выступает $G^{(i)}$. ■

В связи с только что сделанным замечанием, рассмотрим следующий аналог L_n^*:

$$\mathrm{L}_n^*(u) = n\sum_{i=1}^{k} \int\limits_{(-\infty;\mathrm{T}_n]} \log\left[\frac{f^{(i)}(x;\theta_n)}{f^{(i)}(x;\theta_0)}\right] dF_n^{(i)}(x),$$

где $\mathrm{T}_n < \mathrm{T}_H = \inf\{x \in \overline{R} : H(x) = 1\}, \mathrm{T}_n \uparrow \infty$ при $n \to \infty$ с определенной скоростью и $F_n^{(i)}(x)$ одна из оценок (1.4.2), скажем $F_{2n}(x;i)$. Пусть $S^{(i)}(x) = 1 - F^{(i)}(x)$ и $N_n(t) = (S^{(1)}(t_1)W^{(1)}(d^{(1)}(t_1);n),...,S^{(k)}(t_k)W^{(k)}(d^{(k)}(t_k);n))$, где $\{W^{(i)}(x;n);\ x,n > 0; i \in \Im\}$ – двухпараметрические винеровские процессы на $(0;\infty)\times(0;\infty)$ с $\mathrm{M}W^{(i)}(x;n) = 0$ $\mathrm{M}W^{(i)}(x;n)W^{(i)}(y;m) = (n \wedge m)(x \wedge y), i \in \Im$.

Теорема 3.5.4. Пусть выполнены условия (У1)–(У4) и (У5), (У6) для плотностей $f^{(i)}(x;\theta), i \in \Im$. Последовательность $\{\mathrm{T}_n, n \geq 1\}$ такая, что для ε>0:

$$\mathrm{T}_n \leq H^{-1}\left(1 - \left(2(1+\varepsilon)\tfrac{\log n}{n}\right)^{1/2}\right), \qquad \lim_{n\to\infty}(1 - H(\mathrm{T}_n))^{-4}\tfrac{\log^2 n}{n^{1/2}} = 0, \tag{3.5.2}$$

где $H^{-1}(y)$ – функция, обратная к $H(x)$. Тогда при каждом $u \in R$:

$$\mathrm{L}_n^*(u) = u\omega_n^* - \tfrac{u^2}{2}\mathrm{I}(\theta_0) + R_n^*(u), \tag{3.5.3}$$

где $\omega_n^* = \sum_{i=1}^{k} \int\limits_{(-\infty;x]} \frac{\partial \log f^{(i)}(x;\theta_0)}{\partial\theta} d[S_{(x)}^{(i)} n^{-1/2} W^{(i)}(d^{(i)}(x);n)]$, и $R_n^*(u) \to 0$ при $n \to \infty$ по $Q_{\theta_0}^{(n)}$-вероятности. ■

Замечание 3.5.5. Если T_n выбирается из равенства $1 - H(\mathrm{T}_n) = n^{-c}$, где $0<c<1/8$, то, очевидно, условия (3.5.2) выполняются. ■

Замечание 3.5.6. Заметим, что ω_n^* является суммой зависимых стохастических интегралов с верхним пределом T_n. Пусть $\mathrm{I}_n^*(\theta_0) = \mathrm{M}_{\theta_0}(\omega_n^*)^2$ и существует предел $\lim_{n\to\infty}\mathrm{I}_n^*(\theta_0) = \mathrm{I}^*(\theta_0) + 2\sum_{i<j}\mathrm{I}_{ij}(\theta_0)$, где $\mathrm{I}_{ij}(\theta_0)$–предел ковариаций стохастических интегралов. Тогда из (3.5.3) при каждом $u \in R$

$$\mathrm{L}_n^*(u) \overset{D}{=} u[\mathrm{I}^*(\theta_0)]^{1/2} N_0 - \tfrac{u^2}{2}\mathrm{I}(\theta_0) + \widetilde{R}_n(u),$$

где $\widetilde{R}_n(u) \to 0$ при $n \to \infty$ по $Q_{\theta_0}^{(n)}$-вероятности, $N_0 = N(0;1)$. ■

В условиях (У1)–(У4) следующие соотношения очевидны:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\partial^l h^{(i)}(x;\theta)}{\partial\theta^l}\right| dx < \infty,\ \ l = 1,2;\ \ i \in \Im; \qquad \sum_{i=1}^{k}\int\limits_{-\infty}^{\infty} h^{(i)}(x;\theta)dx = 1. \tag{3.5.4}$$

Следующее утверждение является аналогом известной 2-леммы Ле Кама (см. [87]).

Лемма 3.5.7. В условиях теоремы 3.5.1 при каждом $u \in R$:

$$\mathrm{L}_n(u) = u\sum_{i=1}^{k} n^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial \log h^{(i)}(x;\theta_0)}{\partial\theta}dH_n^{(i)}(x) - \frac{u^2}{2}\Im(\theta_0) + o_p(1),\ n\to\infty \quad ■$$

Лемма 3.5.7 доказывается в основном по методу доказательства теоремы 1.1 главы II в [72] и поэтому ее доказательство опускается.

Доказательство теоремы 3.5.1. Из соотношений (3.5.4) имеем

$$\sum_{i=1}^{k}\mathrm{M}_\theta\left[\delta^{(i)}\frac{\partial \log h^{(i)}(x;\theta)}{\partial\theta}\right] = 0,\ \theta\in\Theta. \qquad (3.5.5)$$

Тогда, согласно лемме 3.5.7,

$$\mathrm{L}_n(u) = A_n(u) - \tfrac{u^2}{2}I(\theta_0) + o_p(1),\ n\to\infty, \qquad (3.5.6)$$

где $A_n(u) = u\sum_{i=1}^{k}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial \log h^{(i)}(x;\theta_0)}{\partial\theta}da_n^{(i)}(x)$ и $a_n^{(i)}, i\in\Im$ –субэмпирические процессы из теоремы М. Величину $A_n(u)$ представим так

$$A_n(u) = u\sum_{i=1}^{k}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial \log h^{(i)}(x;\theta_0)}{\partial\theta}d[n^{-1/2}Q^{(i)}(x;n)] + R_{0n}(u) = B_n(u) + R_{0n}(u), \qquad (3.5.7)$$

где

$R_{0n}(u) = u\sum_{i=1}^{k}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial \log h^{(i)}(x;\theta_0)}{\partial\theta}d[a_n^{(i)}(x) - n^{-1/2}Q^{(i)}(x;n)],\ \{Q^{(i)}(x;n), i\in\Im\}$ –гауссовские процессы из (1.9.63) и (1.9.66). Следовательно, $R_{0n}(u) = o_p(1),\ n\to\infty$ и

$$B_n(u) = u\sum_{i=1}^{k}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial \log h^{(i)}(x;\theta_0)}{\partial\theta}d[n^{-1/2}W^{(i)}(H^{(i)}(x);n)] - $$

$$-un^{-1/2}W^{(i)}(1;n)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial \log h^{(i)}(x;\theta_0)}{\partial\theta}dH^{(i)}(x) = u\omega_n, \qquad (3.5.8)$$

где последнее равенство получилось согласно (3.5.5) и того, что $n^{-1/2}W^{(i)}(1;n)\overset{D}{=}N(0;1),\ i\in\Im$. Из (3.5.6)-(3.5.8) следует (3.5.1). ■

Доказательство теоремы 3.5.4. Разложим $\eta_{ni}(x) = \log\left[f^{(i)}(x;\theta_n)/\right.$ $\left./f^{(i)}(x;\theta_0)\right] = 2\log(1+\zeta_{ni}(x))$ по степеням $\zeta_{ni}(x) = [f^{(i)}(x;\theta_n)/f^{(i)}(x;\theta_0)]^{1/2} - 1$. Тогда $\eta_{ni}(x) = 2\zeta_{ni}(x) - \zeta_{ni}^2(x) + \gamma_{ni}|\zeta_{ni}(x)|^3$, где $|\gamma_{ni}| < 1, i\in\Im$. Теперь функцию $\zeta_{ni}(x)$ в свою очередь разложим в ряд в окрестности $\theta = \theta_0$:

$$\zeta_{ni}(x)=\frac{u}{2n^{1/2}}\frac{\partial\log f^{(i)}(x;\theta_0)}{\partial\theta}-\frac{u^2}{8n}\left[\left(\frac{\partial\log f^{(i)}(x;\theta_0)}{\partial\theta}\right)^2+\frac{1}{f^{(i)}(x;\theta_0)}\frac{\partial^2 f^{(i)}(x;\theta_0)}{\partial\theta^2}\right]+o\left(\frac{1}{n}\right),\ n\to\infty,\ i\in\Im$$

.

Тогда $2n\sum_{i=1}^{k}\int_{(-\infty;\mathrm{T}_n]}\zeta_{ni}(x)dF_n^{(i)}(x)=A_n^*(u)-\frac{u^2}{4}(R_{1n}^*+R_{2n}^*)+o_p(1),\quad n\to\infty$, где

$$A_n^*(u)=u\sum_{i=1}^{k}n^{1/2}\int_{(-\infty;\mathrm{T}_n]}\frac{\partial\log f^{(i)}(x;\theta_0)}{\partial\theta}dF_n^{(i)}(x),$$

$$R_{1n}^*=\sum_{i=1}^{k}\int_{(-\infty;\mathrm{T}_n]}\left(\frac{\partial\log f^{(i)}(x;\theta_0)}{\partial\theta}\right)^2 dF_n^{(i)}(x),\qquad R_{2n}^*=\sum_{i=1}^{k}\int_{(-\infty;\mathrm{T}_n]}\frac{\partial^2 f^{(i)}(x;\theta_0)}{\partial\theta^2}\frac{dF_n^{(i)}(x)}{f^{(i)}(x;\theta_0)}.$$

Также имеем $B_n^*(u)=n\sum_{i=1}^{k}\int_{(-\infty;\mathrm{T}_n]}\zeta_{ni}^2(x)dF_n^{(i)}(x),\quad R_{3n}^*=n\sum_{i=1}^{k}\int_{(-\infty;\mathrm{T}_n]}\gamma_{ni}^*\,|\,\zeta_{ni}(x)|^3\,dF_n^{(i)}(x)$, где $|\gamma_{ni}^*|<1, i\in\Im$. Трижды воспользуемся Предложением 1 из [101] и имеем

$$|R_{1n}^*-\mathrm{I}(\theta_0)|=o_p(1),\quad |R_{2n}^*|=o_p(1),\quad |R_{3n}^*|=o_p(1),\quad n\to\infty .$$

Так как $\zeta_{ni}^2(x)=\frac{u^2}{4n}\left(\frac{\partial\log f^{(i)}(x;\theta_0)}{\partial\theta}\right)^2+o\left(\frac{1}{n}\right), n\to\infty$, тогда $|B_n^*(u)-\frac{u^2}{4}\mathrm{I}(\theta_0)|=o_p(1)$, $n\to\infty$. Таким образом,

$$L_n^*(u)=A_n^*(u)-\frac{u^2}{2}\mathrm{I}(\theta_0)+o_p(1),\ n\to\infty. \tag{3.5.9}$$

С другой стороны, $A_n^*(u)=u\omega_n^*+R_{0n}^*(u)$, где ввиду теоремы 2 из [126] имеем

$$R_{0n}^*(u)=u\sum_{i=1}^{k}\int_{(-\infty;\mathrm{T}_n]}\frac{\partial\log f^{(i)}(x;\theta_0)}{\partial\theta}d[\mathrm{M}_n^{(i)}(x)-S^{(i)}(x)n^{-1/2}W^{(i)}(d^{(i)}(x);n)]=o_p(1),\ n\to\infty\ .$$

Соотношения (3.5.9) и (3.5.10) дают (3.5.3). Теорема 3.5.1 доказана. ■

Выводы

В главе 3 рассматриваются в основном информативные модели неполных данных, в которых с.в-ны, выступающие в качестве цензоров в определенном смысле зависят от цензурируемых с.в.. В § 3.1 исследованы асимптотические свойства трех классов параметрических-непараметрических оценок базовой функции выживания, когда в модели Кокса присутствует цензурирование с двух сторон. Существенно опираясь на метод мартингалов, доказаны свойства состоятельности и асимптотической гауссовости оценок. В § 3.2 рассматривается МПИ, подвергаемая случайному неоднородному цензурированию слева и для степенной оценки установлены результаты об аппроксимации линейным функционалом от эмпирических процессов и типа ЗПЛ. § 3.3 посвящен результатам сильной аппроксимации трех классов оценок функционалов в $(Z;A)$-модели, когда эмпирические оценки являются модифицированными оценками Каца. Скорости аппроксимации в этих результатах являются оптимальными. В § 3.4 доказаны результаты сильной состоятельности и аппроксимации гауссовскими процессами для трех классов оценок в $(Z;A)$-модели, построенных с использованием байесовских оценок вместо эмпирических. Байесовские оценки построены с использованием априорных распределений Дирихле. В § 3.5 доказан сильный вариант свойства ЛАН в $(Z;A)$-модели. При этом установлены представления для СОП и ее усеченного варианта через стохастические интегралы от двухпараметрических винеровских процессов. Такие представления могут быть полезными при исследовании свойств оценок байесовского типа и ОМП для неизвестного параметра. ■

Заключение

Развитие исследований по статистике неполных наблюдений показало необходимость рассмотрения более общих моделей, построения и исследования в них непараметрических оценок характеристик, представляющих интерес с.в.. В монографии предложены и исследованы базовые функционалы от неизвестных распределений, и с их помощью построены непараметрические оценки в различных моделях неполных наблюдений, представляющих собой смеси схем цензурирования и МКР. Эти оценки имеют экспоненциальную, множительную и степенную структуры; первые две из них обобщают известные оценки Альтшулера-Бреслоу и Каплана-Мейера. Исследованы свойства оценок как при произвольном, так и при растущем объеме выборки. В частности, установлены свойства равномерной сильной состоятельности со скоростью сходимости (законы типа повторного логарифма), а также результаты аппроксимации последовательностями гауссовских процессов с оптимальной скоростью. Аналогичные оценки построены и исследованы при случайном пуассоновском объеме выборки, а также при байесовском оценивании с априорным распределением Дирихле. Непараметрические оценки исследованы также и в случае неоднородного случайного цензурирования. Аналогичные оценки предложены и исследованы, когда неполные данные получаются неоднородным, зависимым цензурированием случайного вектора. В модели Кокса при случайном цензурировании с двух сторон построены и исследованы три класса параметрических-непараметрических оценок для базовых функционалов. При помощи метода сильной аппроксимации найдены представления для СОП и для ее урезанного аналога через стохастические интегралы от двухпараметрических процессов Винера. Предлагаемые в монографии оценки построены по универсальному принципу метода подстановки. При исследовании свойств оценок наряду с аналитическими методами теории вероятности и математической статистики, комбинированно используются такие мощные методы, как метод мартингалов, сильной и слабой аппроксимации и U-статистик.

В целом результаты монографии являются существенным вкладом в теорию статистики неполных наблюдений. Они могут быть использованы при анализе данных типа времени жизни, встречающихся при контроле качества продукции, в страховании, в демографии, в почвоведении, в астрономии и т.д. ■

Литература

1. Абдушукуров А.А. Оценивание плотности вероятности и функции интенсивности в модели Козела-Грина. // Известия АН УзССР. 1987, №3, с.3-10.
2. Абдушукуров А.А. О некоторых вариантах статистик для двувыборочных критериев при случайном цензурировании: Сб. "Асимптотические методы в теории вероятностей и математической статистике"-Ташкент, Фан, 1988, с.3-18.
3. Абдушукуров А. А. Непараметрическое оценивание и проверка гипотез в модели конкуририрующих рисков : Сб. "Функционалы от случайных процессов и статистические выводы."-Ташкент, Фан, 1989, с.3-16.
4. Абдушукуров А.А. Байесовское оценивание биометрических характеристик по неполным данным. I.// Узб. мат. ж-л. 1993. №1. с.12-21.
5. Абдушукуров А.А. Байесовское оценивание биометрических характеристик по неполным данным. II.// Узб. мат. ж-л. 1993. №4. с.13-21.
6. Абдушукуров А.А. Модель случайного цензурирования с двух сторон и критерии независимости для неё. //Доклады АН РУз. 1994. №11. с.8-9
7. Абдушукуров А.А. Аппроксимационные теоремы для статистики отношения правдоподобия в модели конкурирующих рисков. I.// Узб. мат. ж-л. 1995. №1. с.3-10.
8. Abdushukurov A.A. Estimation of the reliability function of a coherent system by time-dependent censored data: // Proceedings of the International Conf. "Computer Data Analysis and Modeling". Minsk, 1995, v.1, p.6-10.
9. Абдушукуров А.А. Аппроксимационные теоремы для статистики отношения правдоподобия в модели конкурирующих рисков. II.// Узб. мат.ж-л. 1996. №2. с.3-11.
10. Абдушукуров А.А., Каримкулов Г.Д. Ядерное оценивание плотности вероятности при цензурировании наблюдений случайным интервалом.// Доклады АН РУз. 1996. №1-2. с.6-9.
11. Abdushukurov A.A. Competing risks model by random censoring from the left.// Pakistan J. Statist. 1996. v.12. №1. p.31-40.
12. Abdushukurov A.A., Karimkulov G.D. Nonparametric kernel estimation of density function under random censorship from both sides.// Pakistan J. Statist. 1996. v.12. №1. p.23-29.
13. Абдушукуров А.А. Непараметрическое оценивание функции распределения при случайном цензурировании с двух сторон : Сб. "Статистические методы оценивания и проверки гипотез". Пермский Гос. Ун-т.-Пермь. 1996. с.4-14.
14. Abdushukurov A.A. Competing risks model under random censoring on the left.// J. Italian Statist. Society. 1997. v.6. №1. p.1-21.

15. Abdushukurov A.A. Nonparametric estimation of the distribution function based on relative risk function.// Communications in Statistics : Theory and Methods. 1998. v.27. №8. p.1991-2012.
16. Абдушукуров А.А. О непараметрическом оценивании показателей надежности по цензурированным выборкам.// Теория вероятн. и её примен. 1998. т.43. вып.1. с.141-148.
17. Абдушукуров А.А., Недзведский Д.И. Асимптотические свойства эмпирических процессов, построенных по неполным выборкам случайного объёма: Сб. “Статистические методы оценивания и проверки гипотез”. Пермский Гос. Ун-т.-Пермь. 1999. с.4-15.
18. Abdushukurov A.A. On nonparametric estimation of reliability indices by censored samples. // Theory Probab. Appl. 1999. v.43. №1. p.3-11.
19. Abdushukurov A.A. An estimation of the reliability function of a coherent system by censored data: Сб.”Современные вопросы теор. вер. и мат. стат.” Фан.-Ташкент. 2000. с.14-20.
20. Форманов Ш.К., Абдушукуров А.А., Султанов М. Статистики типа хи-квадрат для проверки пропорциональности интенсивностей.// Известия вузов. 2000, №1-2, с.8-14.
21. Abdushukurov A.A. Nonparametric estimation of a distribution function under random two-sided censoring.// J. Math. Sciences. 2001. v.103. №4. p.437-443.
22. Абдушукуров А.А. ,Кадыров О. Методы характеристических функций в задачах статистического оценивания по цензурированным выборкам. Сб. “Статистические методы оценивания и проверки гипотез”.Пермский Гос. Ун-т.-Пермь. 2001.с. 4-12.
23. Абдушукуров А.А., Сагидуллаев К.С. Бутстреп ядерное оценивание функции среднего достаточного времени безотказной работы: Сб. “Статистические методы оценивания и проверки гипотез”. Пермский Гос. Ун-т.-Пермь. 2002. с. 4-12.
24. Абдушукуров А.А., Сагидуллаев К.С. Аппроксимации сглаженных эмпирических процессов.// Известия вузов. 2003. №1-2. с. 51-59.
25. Абдушукуров А.А., Сагидуллаев К.С. Ядерное оценивание функции среднего остаточного времени безотказной работы по полным наработкам до отказа.//Известия вузов. 2003. №1-2. с. 41-50.
26. Абдушукуров А.А. Базовые функционалы, используемые в теории непараметрической статистики неполных наблюдений.// Вестник НУУ. 2004. №3. с. 60-65 .
27. Азларов Т.А., Абдушукуров А.А. Эмпирические процессы Каца и их использование в статистике.// Доклады АН РУз 2004. №1. с.7-11.
28. Абдушукуров А.А. Непараметрические оценки функции выживания на плоскости по цензурированным наблюдениям.// Узб. мат. ж-л. 2004. №2. с. 3-11.
29. Абдушукуров А.А. Непараметрическое оценивание двумерной функции выживания при неоднородном цензурировании наблюдений. //

Материалы научн. конф. «Сираждиновские чтения»по теории вероятностей и математической статистике. Ташкент, 2004, с. 6-11.
30. Абдушукуров А.А. Оценивание условной функции распределения по не-полным данным при непараметрической регрессии с фиксированным ди-зайном. // Материалы научн. конф. «Сираждиновские чтения» по теории вероятностей и математической статистике. Ташкент, 2004, с. 11-15.
31. Абдушукуров А.А. Непараметрическое оценивание в модели пропорциональных интенсивностей.-М.:1987. 58с.-Деп в ВИНИТИ, №3448-В-87.
32. Абдушукуров А.А. О проверке пропорциональности интенсивностей.// V-Международная Вильнюсская конф. по теории вероятностей и математической статистике: Тез.докл.-Вильнюс, 1989. с.5-6.
33. Abdushukurov A.A. Nonparametric Bayesian estimation from incomplete data.// III-Islamic Countries Conf. on Statist. Sciences : Abstracts.-Rabat, Morocco. 1992. p.107.
34. Formanov Sh.K., Abdushukurov A.A. Local approximations for likelihood ratio statistics from incomplete observations.// International Congress of Mathematicians: Abstracts.-Zurich, Switzerland. 1994. p.147.
35. Abdushukurov A.A. Competing risks model by random censoring from the left.// IV-Islamic Countries Conf. on Statist. Sciences : Abstracts-Lahore, Pakistan. 1994. p.84
36. Абдушукуров А.А., Форманов Ш.К. Об аппроксимации непараметрических оценок функции распределения по цензурированным выборкам.// Межд. семинар “Предельные теоремы и смежные вопросы.”: Тез. докл.-Омск, 1995. с.6.
37. Абдушукуров А.А. О непараметрическом оценивании показателей надежности сложных систем по зависящим от времени неполным данным и результатах аппроксимации.// Конф. по теор. вероятн. и матем. статист. посв. 75-летию акад. С.Х. Сираждинова: Тез. докл.-Ташкент Фан. 1995. с.5-6.
38. Абдушукуров А.А. Об одном методе оценивания функции надежности по цензурированным выборкам.// Вторая Всероссийская школа-коллоквиум по стохастическим методам : Тез. докл.-М., ТВП. 1995. с.9-10.
39. Абдушукуров А.А. Об аппроксимации статистик отношения правдоподобия по неполным данным.// VII-Белорусская математическая конф.: Тез. докл.-Минск, 1996, часть 3. с.29.
40. Абдушукуров А.А. Оценивание показателей надежности по неполным данным.// Третья Всероссийская школа-коллоквиум по стохастическим методам : Тез. докл.-М., ТВП. 1996. с.10-11.
41. Абдушукуров А.А. Конкурирующие риски при случайном цензурировании слева.// Четвертая Всероссийская школа-коллоквиум по стохастическим методам : Тез. докл. В ж-ле “Обозрение прикладной

и промышленной математики”. Серия “Вероятность и статистика”.- ТВП :-М., 1997, т.4. вып.3. часть 1, с.312-313.

42. Abdushukurov A.A. A product-limit estimators with random sample size.// 22nd European meeting of statisticians and 7th Vilnius Conf. on Probab. Theory and Math. Statist : Abstracts of Communications.- Vilnius, Lithuania. 1998. p.107.
43. Абдушукуров А.А. Непараметрическое статистическое оценивание по цензурированным выборкам случайного объема.// Пятая Всероссийская школа-коллоквиум по стохастическим методам : Тез. докл. В ж-ле “Обозрение прикладной и промышленной математики”. Серия “Вероятность и статистика”. ТВП :-М., 1998, т.5. вып.2. часть 1, с.192.
44. Абдушукуров А.А. Аппроксимации оценок функции распределения в регрессионной модели Кокса.// Конф. по теор. вероятн. и матем. стат., посв. 80-летию акад. С.Х.Сираждинова : Тез. докл.-Ташкент, 2000. с.1-2.
45. Абдушукуров А.А. Модель Кокса при случайном цензурировании с двух сторон.// Первый Всероссийский симпозиум по прикладной и промышленной математике : Тез. докл. В ж-ле “Обозрение прикладной и промышленной математики”.ТВП :-М., 2000. т.7. вып.2. с.294.
46. Abdushukurov A.A. A relative risk estimators of the survival function by variable censored samples of random size.// 8th International Vilnius Conf. on Probability Theory and Math. Statist : Abstracts of Communications.- Vilnius, Lithuania. 2002. p.5-6.
47. Абдушукуров А.А. Оценивающие уравнения для неполных наблюдений.// Респ. научн. конф.”Сираждиновские чтения” по теор. вероятн. статист. : Тез. докл.-Ташкент, 2003. с.3.
48. Азларов Т.А., Абдушукуров А.А. Доверительные полосы, основанные на эмпирических оценках Каца.// Межд. Конф.”Колмогоров и современная математика”:Тез. докл.-М., 2003. с.607.
49. Абусев Р.А. Статистические байесовские оценки для некоторых функционалов в случае двухпараметрического экспоненциального распределения. Сб «Статистические методы оценивания и проверки гипотез.» Межвуз. сб. научн. тр. Пермский гос. ун-т. -Пермь. 1999. с.16-25.
50. Байхельт Ф., Франкен П. Надежность и техническое обслуживание. Математический подход.-М. : Радио и связь. 1988.-392с.
51. Барлоу Р., Прошан Ф. Математическая теория надежности. -М. : Сов. радио. 1969.-488с.
52. Беляев Ю.К. Множительные оценки вероятности безотказной работы.// Изв. АН СССР, Технич. киберн. 1985. №4. с.45-59.
53. Беляев Ю.К. Асимптотические свойства множительных оценок при накоплении данных.// ДАН СССР. 1987. т.294. №1. с.11-14.
54. Беляев Ю.К., Чистяков Н.В. О точности аддитивных оценок функции риска регенерирующих процессов пуассоновского типа.// Обозрение прикл. и промыш. матем.-М. : ТВП. 1997. т.4. вып.3. с.430-442.

55. Бернулли Я. О законе больших чисел. -М. : Наука. 1986.-175с.
56. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. -М. : Наука. 1977.-351с.
57. Благовещенский Ю.Н. Оценивание и проверка гипотез по неполным выборкам.: Дис. …доктора физ.-мат. наук. -Москва. 1987.-293с.
58. Благовещенский Ю.Н. Локальный анализ многомерных выборок. Сб «Статистические методы оценивания и проверки гипотез.» Межвуз. сб. научн. тр. Пермский гос. ун-т. –Пермь. 1999. с.83-100.
59. Борисов И.С. Аппроксимация эмпирических полей, построенных по векторным наблюдениям с зависимыми координатами.// Сибирский матем. ж-л. 1982. т.23. №5, с.31-41.
60. Борисов И.С. К вопросу о точности приближений в центральной предельной теореме для эмпирических мер.// Сибирский матем. ж-л. 1983. т.24. №6. с.14-25.
61. Борисов И.С. О сходимости в центральной предельной теореме для эмпирических мер.// Предельные теоремы для сумм случайных величин. Труды института математики СО АН СССР. Новосибирск. 1984. т.3. с.125-143.
62. Боровков А.А. Математическая статистика. Оценка параметров, проверка гипотез. –М. : Наука. 1984.-472с.
63. Воинов В.Г., Никулин М.С. Несмещенные оценки и их применения. –М. : Наука. 1989.-440с.
64. Гилл Р.Д. Анализ многомерных данных типа времени жизни. I.// Теория вероятн. и примен. –М. : “ТВП”. 1992. т.37. вып.1. с.19-35.
65. Гилл Р.Д. Анализ многомерных данных типа времени жизни. Часть 2. Методы.// Теория вероятн. и примен. –М. : “ТВП”. 1992. т.37. вып.2. с.307-328.
66. Гомес Г. Оценка распределения периодов индукции с двойным цензурированием данных и её применение к заболеваемости СПИД.// Теория вероятн. и примен. 1992. т.37. вып.1. с. 36-45
67. Деврой Л., Дьёрфи Л. Непараметрическое оценивание плотности : L_1-подход. –М. : Мир. 1988.-408с.
68. Дейвид Г. Порядковые статистики. –М. : Наука. 1979.-335с.
69. Закс Ш. Теория статистических выводов. –М. : Мир. 1975.-776с.
70. Золотарёв В.М. Одномерные устойчивые распределения. –М. : Наука. 1983.-303с.
71. Ившин В.В., Лумельский Я.П. Статистические задачи оценивания в модели “нагрузка-прочность”. –Пермь. ПГУ. 1995.-128с.
72. Ибрагимов И.А., Хасьминский Р.З. Асимптотическая теория оценивания. –М.: Наука. 1979.-527с.
73. Ким В.Л. Принцип самостоятельности и двустороннее случайное цензурирование. : Автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук. –Ташкент: Институт математики АН РУз. 1998.-20с.

74. Кокс Д.Р., Оукс Д. Анализ данных типа времени жизни. –М. : Финансы и статистика. 1988.-191с.
75. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. –М. : Наука. 1981.-542с.
76. Кокс Д., Хинкли Д. Теоретическая статистика. – М. : Мир.1978.-560с.
77. Кошевник Ю.А. Асимптотические свойства бутстреп-оценок. (обзор). //Заводская лаборатория. 1987. т.53. №10. с.76-82.
78. Лакин Г.Ф. Биометрия. Учебн. пособие для биологич. спец. вузов. –М.: Высшая школа. 1980.-293с.
79. Леман Э. Теория точечного оценивания. –М. : Наука. 1991.-444с.
80. Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Теория мартингалов. –М. : Наука. 1986.-512с.
81. Литтл Р.Дж.А., Рубин Д.В. Статистический анализ данных с пропусками. –М.: Финансы и статистика. 1991.-336с.
82. Лукач Е. Характеристические функции. –М. : Наука. 1979.-423с.
83. Мирвалиев М. Исследования по обобщенным статистикам типа хи-квадрат. : Автореф. дис. докт. физ.-мат. наук –Ташкент : Институт математики АН РУз. 2001.- 284 с.
84. Мирзахмедов М.А., Турсунов Г.Т. Непараметрическое оценивание по выборке случайного объёма: Сб «Предельные теоремы для случайных процессов и смежные вопросы.» - Ташкент, Фан, 1982, с. 139-154.
85. Никитин Я.Ю. Об асимптотическом поведении некоторых непараметрических статистик для выборки случайного объёма.// Вестник Ленинградского Ун-та. 1974. №13. с.34-42.
86. Петров В.В. Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. –М. : Наука. 1987.-318с.
87. Русас Дж. Контигуальность вероятностных мер. –М. : Мир. 1975.-254с.
88. Савчук В.П. Байесовские методы статистического оценивания : надежность технических объектов. –М. : Наука. 1989.-225с.
89. Скороход А.В. Случайные процессы с независимыми приращениями. –М. : Наука. 1964.-278с.
90. Тихов М.С. Построение и анализ статистических оценок для неполностью известных семейств распределений. : Автореф. дис. … доктора физ.-мат. наук. –С.Петербург. : С.Петербургский Гос. Ун-т. 1993.-30с.
91. Тихов М.С. Оценивание параметров распределений по прогрессивно цензурированным выборкам.// Обозрение прикладной и промышленной математики. : Тез. докл. Первого Всероссийского симпозиума по прикл. и промышл. матем. –М. : ТВП. 2000. т.7. вып.2. с.425-426.
92. Уилкс С. Математическая статистика. –М. : Наука. 1967.-632с.
93. Филиппова А.А. Теория Мизеса о предельном поведении функционалов от эмпирических функций распределения и её статистические применения.// Теория вероятн. и примен. 1962. т.7. вып.1. с.26-60.

94. Хампель Ф. и др. Робастность в статистике. Подход на основе функций влияния. –М. : Мир. 1989.-512с.
95. Харин Ю.С. Робастность в статистическом распознавании образов. –Минск. : Университетское. 1992.-232с.
96. Хьюбер П. Робастность в статистике. М. : Мир. 1984.-304с.
97. Чибисов Д.М. Об асимптотической мощности и эффективности критерия ω^2. // ДАН СССР.1961. т.138. №2. с.322-325.
98. Эллиот Р. Стахостический анализ и её приложения. –М. : Мир. 1986.-351с.
99. Aalen O. Nonparametric inference in connection to multiple decrement models.// Scand. J. Statist. 1976. v.3. p.15-27.
100. Aalen O. Nonparametric inference for a family of counting processes.// Ann. Statist. 1978. v.6. №4. p.701-726.
101. Akritas M.G. The central limit theorem under censoring.// Bernoulli. 2000. v.6. №6. p.1109-1120.
102. Allen W.R. A note on conditional probability of failure when hazards are proportional.// Oper. Res. 1963. v.11. p.658-659.
103. Alexander K.S. Probability inequalities for empirical processes and a law of the iterated logarithm.// Ann. Probab. 1984. v.12. №4. p.1041-1067.
104. Aly E.-E.A.A. On quantile processes for m-dependent r.v.'s.// Statistics. 1987. v.18. №3. p.423-435.
105. Aly E.-E.A.A., Csörgö M., Horváth L. Strong approximation of the quantile process of the product-limit estimation.// J. Multivar. Anal. 1985. v.16. p.185-210.
106. Altshuler B. Theory for the measurement for competing risks in animal experiments.// Math. Biosciences. 1970. v.6. p.1-11.
107. Andersen P.K., Borgan O., Gill R.D., Keiding N. Censoring, truncation and filtering in statistical models based on counting processes. –Report MS-R8803. 1988.-36p.
108. Andersen P.K., Gill R.D. Cox's regression model for counting processes: A large sample study. // Ann. Statist. 1982. v. 10. p.1100-1120.
109. Basu A.K., Bhattacharya D. On the speed of convergence in the central limit theorem of log-likelihood ratio process.// J. Theoretical Probab. 1993. v.6. №4. p.619-634.
110. Bednarski T. Robust estimation in Cox's regression model.// Scand. J. Statist. 1993. v.20. №3. p.213-225.
111. Beran R. Estimating a distribution function.// Ann. Statist. 1977. v.5. p.400-404.
112. Berman S.M. A note on extreme values, competing risks and semi-Markov processes.// Ann. Math. Statist. 1963. v.34. p.1104-1106.
113. Bickel P., Rozenblatt M. On some global measures of the deviations of density function estimates.// Ann. Statist. 1973. v.1. №6. p.1071-1095.
114. Bickel P.J., Freedman D.A. Some asymptotic theory for the bootstap.// Ann. Statist. 1981. v.9. №6. p.1196-1217.

115. Birnbaum Z.W., Marshal A.V. Some multivariate Chebyshev inequalities with extensions to continuous parameter processes.//Ann. Math. Statist. 1961. v.32. p.687-703.
116. Boos D.D. Rates of convergence of the distance between distribution function estimators.// Metrika. 1986. v.33. p.197-202.
117. Breslow N. Discussion on professor Cox's paper.// J. Royal Statist. Society. 1972. Ser. A. v.34. p.216-217.
118. Breslow N., Crowley J. A large sample study of the life table and product limit estimates under random censorship.// Ann. Statist. 1974. v.2. p.437-453.
119. Bretagnolle J. Statistique de Kolmogorov-Smirnov pour un' e'chantillon non e'quire' parti.// Aspects Statistiques et Aspects Physiques des Processus Gaussiennes (Saint-Flour 22-29 Juin 1980). E'ditions du CNRS. Paris. 1981. p.39-44.
120. Bryant J.L., Paulson A.S. Some comments on charachteristic function-based estimators.// Sankhyā : Indian J. Statist. Ser.A. Pts.1-2. 1979. v.41. p.109-116.
121. Buckley J., James I. Linear regression with censored data.// Biometrika. 1979. v.66. p.429-436.
122. Burke M.D. Tests for exponentiality based on randomly censored data.// Carleton Math. Lect. Note. 1981. №30. p.68-84.
123. Burke M.D. Approximations of some hazard rate estimators in a competing risks model.// Stoch. Proc. Appl. 1983. v.14. p.157-174.
124. Burke M.D., Csörgő M., Csörgő S., Révész P. Approximations of the empirical process when parameters are estimated.// Ann. Probab. 1978. v.7. №5. p.790-810.
125. Burke M.D., Csörgő S., Horváth L. Strong approximations of some biometric estimates under random censorship.// Z. Wahrscheinlich. verw. Gebiete. 1981. v.56. p.87-112.
126. Burke M.D., Csörgő S., Horváth L. A correction to and improvement of "Strong approximations of some biometric estimates under random censorship".// Probab. Th. Rel. Fields. 1988. v.79. p.51-57.
127. Burke M.D., Horváth L. Density and failure rate estimation in a competing risks model.// Sankhyā : Indian J. Statist. 1984. v.46. ser.A. Pt.1. p.135-154.
128. Campbell G. Nonparametric bivariate estimation with randomly censored data.// Biometrika. 1981. v.68. p.417-422.
129. Campbell G. Földes A. Lange sample properties of nonparametric bivariate estimators with censored data.// Colloquia Mathematica –Societatis János Bolyai. 1982. v.32. p.103-122. North -Holland. Amsterdam.
130. Campbell G. Földes A. A generalized product -limit estimators for weighted distribution functions based on censored data.// Statistics and Decisions. 1984. Supp. Issue. №1. p.87-109.

131. Chang M.N., Yang G.L. Strong consistency of a nonparametric estimator of the survival function with double censored data.// Ann. Statist. 1987. v.15. №4. p.1536-1547.
132. Chao M.-T., Lo S.-H. Some representations of the nonparametric maximum likelihood estimators with truncated data.// Ann. Statist. 1988. v.16. №2. p.661-668.
133. Chaubey Y.P., Sen P.K. A smooth estimation of survival and density functions.// Statistics and Decisions. 1996. v.14. p.1-22.
134. Chen Y.Y., Hollander M., Langberg N.A. Small sample results for the Kaplan –Meier estimator.// J. Amer. Statist. Assoc. 1982. v.77. p.141-144.
135. Cheng P.E., Lin G.D. Maximum likelihood estimation of a survival function under the Koziol –Green proportional hazards model.// Statist. Probab. Letters. 1987. v.5. p.75-80.
136. Chiang C.L. A stochastic study of the life table and its applications : I. Probability distributions of the biometric functions.// Biometrics. 1960. v.16. p.618-635.
137. Chibisov D. Some theorems on the limiting behaviour of empirical distribution functions.// Selected Translations Math. Statist. Probab. 1964.v.6. p.147-156.
138. Cox D.R. Regression models and life –tables. (with discussion).// J. Royal Statist. Soc. 1972. B.34. p.187-220.
139. Cox D.R. Partial likelihood.// Biometrica. 1975. v.62. p.269-276.
140. Csörgő M. Glivenko –Cantelli type theorems for distance functions based on the modified empirical distribution function of M.Kac and for the empirical process with random sample size in general.// Lecture Notes in Math. 1973. v.296. p.149-164.
141. Csörgő M., Csörgő S. An invariance principle for the empirical process with random sample size.// Bull. Amer. Math. Soc. 1970. v.76. №4. p.706-710.
142. Csörgő M., Csörgő S., Horváth L. An asymptotic theory for empirical reliability and concentration processes. –Lecture Notes in Statistics. 1986. v.33. Springer –Verlag. 171p.
143. Csörgő M., Révész P. Strong approximations in probability and Statistics. –Academic Press. New York –Akademiai Kiado. Budapest. 1981. 210 p.
144. Csörgő S. Strong approximation of empirical Kac processes.// Carleton Math. Lect. Note. 1980. №26. p.71-86.
145. Csörgő S. Limit behaviour of the empirical characteristic function.// Ann. Probab. 1981. v.9. p.130-144.
146. Csörgő S. Estimating characteristic functions under random censorship.// Carleton Math. Lect. Note. 1981. №30. p.301-315.
147. Csörgő S. Estimating in the proportional hazards model of random censorship.// Statistics. 1988. v.19. №3. p.437-463.

148. Csörgő S. Testing for the proportional hazards model of random censorship.// Proceedings of the fourth Prague Symp. Asymp. Statist. 1988. p.41-53. Charles Univ. Press, Prague. 1989.
149. Csörgő S. Universal Gaussian approximations under random censorship.// Ann. Statist. 1996. v.24. №6. p.2744-2778.
150. Csörgő S. Testing for the partial proportional hazards model. –Technical Report №315. 1998. 6p.
151. Csörgő S., Faraway J.J. The paradoxical nature of the proportional hazards model of random censorship.// Statistics. 1998. v.31. p.67-78.
152. Csörgő S., Horváth L. On random censorship from the right.// Acta Sci. Math. 1982. v.44. p.23-34.
153. Csörgő S., Horváth L. The rate of strong uniform consistency for the product –limit estimator.// Z. Warscheinlich. Verw. Gebiete. 1983. v.62. p.411-426.
154. Csörgő S., Horváth L. Confidence bands from censored samples.// Canadian J. Statist. 1986. v.14. №2. p.131-144.
155. Csörgő S., Mielniczuk J. Density estimating in the Simple proportional hazards model.// Statist. Probab. Letters. 1988. v.6. p.419-426.
156. Dabrowska D.M. Kaplan –Meier estimate on the plane.// Ann. Statist. 1988. v.16. №4. p.1475-1489.
157. Dabrowska D.M. Kaplan –Meier estimate on the plane : weak convergence, LIL and the bootstrap.// J. Multivar. Anal. 1989. v.29. p.308-325.
158. Degenhardt H.J.A. Strong limit theorems for the difference of the perturbed empirical distribution function and the classical empirical distribution function.// Scand. J. Statist. 1996. v.23. p.331-351.
159. Dehling H., Denker M., Philipp W. The almost sure invariance principle for the empirical process of U –statistic structure.// Ann. Inst. Henri Poincaré. 1987. v.23. p.121-134.
160. Diehl S., Stute W. Kernel dencity and hazard function estimation in the presence of censoring.// J. Multivar. Anal. 1988. v.25. p.299-310.
161. Doss H., Freitag S., Proschan F. Estimating jointly system and component reliabilities using a mutual censorship approach.// Ann. Statist. 1989. v.17. №2. p.764-782.
162. Dudley R.R.M. A course on empirical processes. –Lect. Notes in Math. 1982. 142p.
163. Dykstra R.L., Laud P. A Bayesian nonparametric approach to reliability.// Ann. Statist. 1981. v.9. №2. p.356-367.
164. Dvoretzky A., Kiefer J., Wolfowitz J. Asymptotic minimax character of the sample distribution function and of the multinomial estimator.// Ann. Math. Statist. 1956. v.27. p.642-669.
165. Ebragimi N. Nonparametric estimation of survival functions for incomplete observations when the life time distribution is proportionally related to the

censoring time distribution.// Communications in Statistics : Theory and Methods. 1985. v.14. №12. p.2887-2898.
166. Ebragimi N. On the identifiability of multivariate survival distribution functions.// J. Multivar. Anal. 1988. v.25. p.164-173.
167. Efron B. The two sample problem with censored data : Proceedings of fifth Berkeley Symp. on Math. Statist. Probab. Berkeley. 1967. v.4. p.831-852.
168. Efron B. Censored data and the bootstrap.// J.A.S.A. 1981. v.76. №374. p.312-319.
169. Efron B. The jackknife, the bootstrap and other resampling planes : SIAM –CBMS –NSF Monograph. 1982. №38. 92p.
170. Ferguson T.S. A Bayesian analysis of some nonparametric problems.// Ann. Statist. 1973. v.1. №2. p.209-230.
171. Ferguson T.S., Phadia E.G. Bayesian nonparametric estimation based on censored data.// Ann. Statist. 1979. v.7. №1. p.163-186.
172. Fermanian J.-D. Multivariate hazard rates under random censorship.// J. Multivar. Anal. 1997. v.62. p.273-309.
173. Feuerverger A., Mc Dunnougt Ph. On the efficiency of empirical characteristic function procedures.// J.Royal. Statist. Soc. Ser. B. 1981. v.43. №1. p.20-27.
174. Feuerverger A., Mc Dunnougt Ph. On some Fourier methods for inference.//J.A.S.A. 1981. v.76. №374. p.379-387.
175. Feuerverger A., Mc Dunnougt Ph. On statistical transform methods and their efficiency.// Canadian J. Statist. 1984. v.12. №4. p.303-317.
176. Fleming T.R., Harrington D.R. Nonparametric estimation of the survival distribution in censored data.// Communications in Statistics : -Theory and Methods. 1984. v.13. №20. p.2469-2486.
177. Földes A. Strong uniform consistency of the product-limit estimator under variable censoring.// Z. Wahrscheinlich. verw. Gebiete. 1981. v.58. p.95-107.
178. Földes A., Rejtö L. Strong uniform consistency for nonparametric survival curve estimators from randomly censored data.// Ann. Statistic. 1981. v.9. №1. p.122-129.
179. Földes A., Rejtö L. A LIL type result for the product limit estimator.// Z. Wahrscheinlich. verw. Gebiete. 1981. v.56. p.75-86.
180. Gaenssler P., Stute W. Empirical processes : a survey of results for independent and identically distributed random variables.//Ann. Probably. 1979. v.7. №2. p.193-243.
181. Gardiner J. Local asymptotic normality for progressively censored likelihood ratio statistics and applications.// J. Multivar. Anal. 1982. v.12. p.230-247.
182. Gasbarra D., Karia S.R. Analysis of competing risks by using Bayesian smoothing.// Scand. J. Statistic. 2000. v.27. p.605-617.

183. Gather U., Pawlitschko J. On Efron's and Gill's version of the Kaplan – Meier integral.// Communications in Statistics : Theory and Methods. 1998. v.27. №1. p.181-192.
184. Gather U., Pawlitschko J. Estimating the survival function under a generalized Koziol –Green model with partially informative censoring.// Metrika. 1998. v.48. p.189-207.
185. Gehan E. Estimating survival functions from the life table.// J. Chron. Dis. 1969. v.21. p.629-644.
186. Geurts J.H.J. Some small sample nonproportional hazards results for the Kaplan –Meier estimator.// J. Statistic. Neerl. 1985. v.39. №1. p.1-13.
187. Geurts J.H.J. On some small –sample performance of Efron's and Gill's version of the product limit estimator under nonproportional hazards.// Biometrics. 1987. v.43. p.683-692.
188. Ghorai J.K. Nonparametric Bayesian estimation of a survival function under the proportional hazards model.// Communications in Statistics : Theory and Methods. 1989. v.18. №5. p.1831-1842.
189. Gijbels I., Veraverbeke N. Quantile estimation in the proportional hazards model of random censorship.// Communications in Statistics : Theory and Methods. 1989. v.18. №5. p.1645-1663.
190. Gijbels I., Veraverbeke N. Almost sure asymptotic representation for a class of functionals of the Kaplan –Meier estimator.// Ann. Statistic. 1991. v.19. №3. p.1457-1470.
191. Gill R.D. Censoring and stochastic integrals. Math. Centre Tracts. №124 : Math. Centrum Amsterdam. 1980.-178p.
192. Gill R.D. Testing with replacement and the product limit estimator.// Ann. Statistic. 1981. v.9. №4. p.853-860.
193. Gill R.D. Large sample behaviour of the product –limit estimator on the whole line.// Ann. Statist. 1983. v.11. №3. p.49-58.
194. Gill R.D., Johansen S. Product –integrals and counting process. –Report MS-8709. Centre for Mathematics and Computer Science. Amsterdam. 1987.-27p.
195. Gill R.D. Non and semiparametric maximum likelihood estimators and the von –Mises method (Part I).// Scand. J. Statist. 1989. v.16. №1. p.97-128.
196. Gill R.D., Johansen S. A survey of product –integration with a view towards application in survival analysis.// Ann. Statist. 1990. v.18. p.1501-1555.
197. Gill R.D., Glivenko –Cantelli for Kaplan –Meier.// Math. Meth. Statistic. 1994. v.3. №1. p.76-87.
198. Gill R.D. Lectures ōn survival analysis -22nd Saint Flour École d'Éte de Probabilités. P. Bernarded. Lect. Notes Math. : Springer. 1994.-173p.
199. Gill R.D. Missing data.// 22nd European meeting of statisticians and 7th Vilnius Conf. on Probab. Theory and Math. Statist. : Abstracts of Communications. –Vilnius, Lithuania. 1998. p.8.

200. Gillespie M.J., Fisher L. Confidence bands for the Kaplan –Meier survival curve estimate.// Ann. Statistic. 1979. v.7. №1. p.920-924.
201. Gu M.G., Lai T.L. Functional laws of the iterated logarithm for the product –limit estimator of a distribution function under random censorship or truncation.// Ann. Probably. 1990. v.18. №1. p.160-189.
202. Habib M.G., Thomas D.R. Ch-square goodness-of-fit tests for randomly censored data.// Ann. Statist. 1986. v.14. №2. p.759-765.
203. Hald A. Statistical theory with engineering application : Wiley. New York. 1952.-180p.
204. Hall P. Theoretical comparison of bootstrap confidence intervals. (Cpecial Invited Paper).// Ann. Statist. 1980. v.16. №3. p.927-953.
205. Hall J.W., Wellner J.A. Confidence bands for a survival curve from censored data.// Biometrika. 1980. v.67. p.133-143.
206. Hanley J.A., Parnes M.N. Nonparametric estimation of a multivariate distribution in the presence of censoring.// Biometrica. 1983. v.39. №129-139.
207. Heathcote C.R. The integrated squared error estimation of parameters.// Biometrika. 1978. v.64. p.255-264.
208. Hoeffding W. Probability inequalities for sums of bounded random variables.// J.A.S.A. 1963. v.58. p.13-30.
209. Hollander M., Peňa E. Families of confidence bands for the survival function under the general random censorship model and the Koziol –Green model.// Canadian J. Statist. 1989. v.17. №1. p.59-74.
210. Hollander M., Proshan F. Tests for the mean residual life.// Biometrika. 1975. v.62. p.585-593.
211. Hollander M., Laird G., Song K. –Sh. Nonparametric inference for the proportionality function in the random censorship model.// Nonparam. Statist. 2003. v.15. №2. p.151-169.
212. Horváth L. Dropping continuity and independence asymption in random censorship models.// Carleton Math. Lect. Note. 1981. №30. p.225-239.
213. Horváth L. On random censorship from both sides. //Statistics. 1984. v. 15. №. 4. p. 581-594.
214. Horváth L. The rate of strong uniform consistency for the multivariate product-limit estimator.// J. Multivar. Anal. 1983. v.13. p.202-209.
215. Horváth L., Yandell B.S. Convergence rates for the bootstrapped product-limit process.// Ann. Statist. 1987. v.15. №3. p.1155-1173.
216. Huang Y. Two–sample multistate accelerated sojourn times model.// J.A.S.A. 2000. v.95. №450. p.619-627.
217. Huang Y., Louis T.A. Nonparametric estimation of the joint distribution of survival time and mark variables.// Biometrika. 1998. v.85. p.785-798.
218. Huang J., Wellner J.A. Estimating of a monotone density or monotone hazard under random censoring.// Scandinavian J. Statist. 1995. v.22. p.3-33.

219. Huber C. Regression models for failure-time data.// Proceedings of Interṅat. Conf. "Advances in Statistical Inferential Methods" : Almaty. Kazakhstan. 2003. (Late Communication) 26p.
220. Hyde J. Testing survival under right censoring and left truncation.// Biometrika. 1977. v.64. №2. p.225-230.
221. Inglot T., Ledwina T. Cramer type large deviations for some U–statistics.// Теория вероятн. примен. 1993. т.38. в.4. с.858-868.
222. James B.R. A functional law of iterated logarithm for weighted empirical distributions.// Ann. Probab. 1975. v.3. №5. p.762-772.
223. James I.R. On estimating equations with censored data.// Biometrika. 1986. v.73. №1. p.35-42.
224. James I.R., Smith P.J. Consistency results for linear regression with censored data.// Ann. Statist. 1984. v.12. №2. p.590-600.
225. Jensen Uwe, Wiedermann J. Estimation of a survival curve under dependent censoring.// MMR-2000. Second Intern. Conf. on Math. Meth. of Reliab : Bordeaux. France. Jule 4-7. 2000. Abstracts Book. v.2. p.571-574.
226. Kac M. On deviations between theoretical and empirical distributions.// Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 1949. v.35. p.252-257.
227. Kalbfleisch J.G., Prentice R.L. The statistical analysis of failure time data : Wiley. New York. 1980. 223p.
228. Kaplan E.L., Meier P. Nonparametric estimation from incomplete observations.// J.A.S.A. 1958. v.53. p.457-481.
229. Kiefer J. On large deviations of the identically distributed functions of vector chance variables and LIL.// Pacific, J. Math. 1961. v.11. №2. p.649-660.
230. Kim Y. On the posterior consistency of mixtures of Dirichlet process priors with censored data.// Scand. J. Statist. 2003. v.30. p.535-547.
231. Kim Y., Lee J. Bayesian analysis of proportional hazard models.// Ann. Statistic. 2003. v.31. №2. p.493-511.
232. Kim Y., Lee J. A Bernstein – von Mises theorem in the nonparametric right – censoring model. // Ann. Statist. 2004. v. 32. № 4.p.1492-1512.
233. Komlös J., Major P., Tysnady G. An approximation of partial sums of independent random variables and the sample d.f.// Z. Wahrscheinlich. verw. Gebiete. 1975. v.32. p.111-132.
234. Korwar R.M., Hollander M. Empirical Bayes estimation of a distribution function.// Ann. Statist. 1976. v.4. №3. p.581-588.
235. Koul H., Susarla V., Van Ryzin J. Regression analysis with randomly right-censored data.// Ann. Statist. 1982. v.9. №6. p.1276-1288.
236. Koziol J.A., Green S.B. A Cramer–von Miser statistic for randomly censored data.// Biometrika. 1976. v.63. №3. p.465-476.
237. Lai T.L. Reproducing kernel Hilbert spaces and the law of the iterated logarithm for Gaussian processes.// Z. Wahrschenlich. verw. Gebiete. 1974. v.29. p.7-19.

238. Lai T.L., Ying Z. Estimating a distribution function with truncated and censored data.// Ann. Statist. 1991. v.19. p.417-442.
239. Langberg N., Proshan F., Quinzi A.J. Converting dependent models into independents ones, preserving essential features.// Ann. Probab. 1978. v.6. p.174-181.
240. Langberg N., Proschan F., Quinzi A.J. Estimating dependent life length, with application to the theary of competing risks.// Ann. Statist. 1981. v.9. №1. p.157-167.
241. Le Cam L. On some asymptotic properties of the maximum likelihood estimates and related Bayes estimates.// Univ. California Publ. Statist. 1953. v.1. p.277-330.
244. Lenglart E. Relation de domination entre deux processus.// Ann. Inst. Henri Poincare. 1977. v.13. p.171-179.
243. Liu R.Y.C., Van Ryzin J. The maximal deviation of a hazard rate estimator under random censoring.// Colloquia Math. Soc. J. Bolyai. 1984. v.45. p.377-384.
244. Liu R.Y.C., Van Ryzin J. A histogram estimator of the hazard rate with censored data.// Ann. Statist. 1985. v.13. №2. p.592-605.
245. Liu R.Y., Van Ryzin J. The limiting distribution of the maximal deviation of a density estimate and a hazard rate estimate.// Probab. Th. Rel. Fields. 1986. v.72. p.505-516.
246. Liptser R.S., Shiryayev A.N. Statistics of random processes. II. Applications : Springer–Verlag. New York. 1978.-339p.
247. Lo Sh., Singh K. The product-limit estimator and the bootstrap : Some asymptotic representations.// Probab. Th. Rel. Fields. 1986. v.71. p.455-465.
248. Lynden–Bell D. A method of allowing known observational selection in small samples applied to 3CR quasars.// Monthly Notices Roy Astronom Soc. 1971. v.155. p.95-118.
249. Major P., Rejtö L. Strong embeeding of the estimator of the distribution function under random censorship.// Ann. Statist. 1988. v.16. №3. p.1113-1132.
250. Marcus M.B., Zinn J. The bounded law of iterated logarithm for the weighted empirical distribution process in the non identically distributed case.// Ann. Probab. v.12. №2. p.335-360.
251. Marron J.S., Padgett W.J. Asymptotically optimal bandwidth selection for kernel density estimators from randomly right-censored samples.// Ann. Statist. 1987. v.15. №4. p.1520-1535.
252. Marzec L., Marzec P. Goodness of fit inference based on stratification in Cox's regression model.// Scand. J. Statist. 1993. v.20. №3. p.227-238.
253. Mason D.M. A strong invariance theorem for the tail empirical process.// Ann. Inst. Henri Poincarē. 1988. v.24. №4. p.491-506.
254. Matē C. A nonparametric Bayesian model for accelerated life testing with censored data and parametric estimation.// MMR-2000, Second Intern. Conf.

Math. Meth. Reliab. Bordeaux. France. Abstracts Book. 2000. v.2. p.752-755.
255. Mi J. Asymptotic results for the Koziol–Green model.// Communications in Statistics: Theory and Methods. 1990. v.19. №8. p.2767-2779.
256. Mielniczuk J. Some asymptotic properties of kernel estimators of a density function in case of censored data.// Ann. Statist. 1986. v.14. №2. p.776-773.
257. Nair V.N. Confidence bands for survival functions with censored data : A comparative study.// Technometrics. 1984. v.26. p.265-275.
258. Nielsen B. Expected survival in the Cox model.// Scand. J. Statist. 1997. v.24. p.275-287.
259. Oakes D. An approximate likelihood procedure for censored data.// Biometrika. 1986. v.42. p.177-182.
260. O'Reilly N.E. On the weak convergence of empirical processes in sup-norm metrics.// Ann. Probab. 1974. v.2. Padgett W.J., Mc Nicols D.T. Nonparametric density estimations from censored data.// Biometrika. 1981. v.68. №1. p.99-103.4. p.642-651.
261. Padgett W.J., Mc Nicols D.T. Nonparametric density estimations from censored data.// Biometrika. 1981. v.68. №1. p.99-103.
262. Pawlitschko J. A comparison of survival function estimators in the Koziol–Green model.// Statistics. 1999. v.32. p.277-291.
263. Pawlitschko J. Estimating in the Koziol–Green model with left truncated observations.// Sankhyā : Indian J. Statist. 2000. v.62. Ser.A. pt.1. p.67-79.
264. Phadia E.G. Minimax estimation of a cumulative distribution function.// Ann. Statist. 1973. v.6. №1. p.1149-1157.
265. Phadia E.G. A note on empirical Bayes estimation of a distribution function based on censored data.// Ann. Statist. 1980. v.8. Padgett W.J., Mc Nicols D.T. Nonparametric density estimations from censored data.// Biometrika. 1981. v.68. №1. p.226-229.
266. Phadia E.G., Van Ryzin J. A note on convergence rates for the product limit estimator.// Ann. Statist. 1980. v.8. №3. p.673-678.
267. Philipp W., Pinzur L. Almost sure approximation theorems for the multivariate empirical process.// Z. Wahrscheinlich. verw. Gebiete. 1980. v.54. p.1-15.
268. Pons O. Nonparametric estimation in a varying-coefficient Cox model.// Math. Meth. Statist. 2000. v.9. №4. p.376-398.
269. Pons O. estimation in a Cox regression model with a chnge-point according to a threshold in a covariate.// Ann. Statist. 2003. v.31. №2. p.442-463.
270. Rao J.S., Tiwari R.S. Bayesian nonparametric estimation of failure rates with censored data.// Calcutta Statist. Assoc. Bull. 1983. v.32. №125-126. p.79-90.
271. Reid N. Influence functions for censored data.// Ann. Statist. 1981. v.9. №1. p.78-92.

272. Rebolledo R. Central limit theorems for local martingales.// Z. Wahrscheinlich. verw. Gebiete. 1980. Bd-51.-s. p.269-286.
273. Rukhin A.L. Influence of the prior distribution on the risk of the Bayes rule.// J. Theor. Probab. 1993. v.6. №1. p.71-87.
274. Schumacher M. Two-sample tests of Cramer–von Mises–and Kolmogorov–Smirnov –type for randomly crnsored data.// Internat. Statist. Review. 1984. v.53. №3. p.263-281.
275. Sen P.K Weak convergence of progressively censored likelihood ratio statistics and its role in asymptotic theory of life testing.// Ann. Statist. 1976. v.4. №6. p.1247-1257.
276. Shorack G.R., Wellner J.A. Empirical processes with application to statistics : Wiley. New York. 1986.
277. Singh R.S. On the Glivenko–Cantelly theorem for weighted empiricals based on independent random variables.// Ann. Probably. 1975. v.3. p.371-374.
278. Srinivasan C., Zhou M. A central limit theorem for weighted and integrated martingales.// Scand. J. Statist. 1995. v.22. p.493-504.
279. Strassen V. An invariance principle for the law of the iterated logarithm.// Z. Wahrscheinlich. verw. Gebiete. 1964. v.3. p.211-226.
280. Stute W. The oscillation behavior of empirical process.// Ann. Probab. 1982. v. 10. №1. p.86-107.
281. Stute W. The bias of Kaplan–Meier integrals.// Scand. J. Statist. 1994. v.21. p.475-484.
282. Stute W. Strong and weak representations of cumulative hazard functions and Kaplan – Meier estimators on increasing sets. // J. Statist. Plann. Inference. 1994. v. 42. p. 315-329.
283. Stute W. The central limit theorem under random censorship.// Ann. Statist. 1995. v.23. p.422-439.
284. Stute W. Distributional convergence under random censorship when covariable are present.// Scand. J. Statist. 1996. v.23. p.461-471.
285. Stute W., Wang J.-L. The strong law under random censorship.// Ann. Statist. 1993. v.21. p.1591-1607.
286. Susarla V., Van Ryzin J. Nonparametric Bayesian estimation of survival curves from incomplete observations.// J.A.S.A. 1976. v.71. №356. p.897-902.
287. Susarla V., Van Ryzin J. Large sample theory for a Bayesian nonparametric survival curve estimator based on censored samples.// Ann. Statist. 1978. v.6. №4. p.755-768.
288. Susarla V., Van Ryzin J. A large sample theory for an estimator of the mean survival time from censored samples.// Ann. Statist. 1980. v.8. №5. p.1002-1016.
289. Susarla V., Tsai W.Y., Van Ryzin J. A Buckley–James type estimator for the mean with censored data.// Biometrika. 1984. v.71. №3. p.624-625.

290. Tikhov M.S. Statistical estimation on the basis of interval – censored data. // J. Math. Sciences. 2004. v. 119. № 3. p. 321-335.
291. Tiwari R.C., Zalkikar J.N. Nonparametric Bayesian estimation of a distribution function under randomly censored data.// Far East J. Math. Sci. 1993. v.1. №1. p.93-102.
292. Tsai W.Y., Leurgans S., Crowley J. Nonparametric estimation of a bivariate survival function in the presence of censoring.// Ann. Statist. v.14. p.1351-1365.
293. Tsai W.-J., Jewell N.P., Wang M.-C. A note on the product-limit estimator under right censoring and left truncation.// Biometrika. 1987. v.74. №4. p.883-886.
294. Tsiatis A.A. A large sample study of a Cox's regression model.// Ann. Statist. 1981. v.9. №1. p.93-106.
295. Tsiatis A.A. Repeated significance testing for a general class of statistics used in censored survival analysis.// J.A.S.A. 1982. v.77. №380. p.855-861.
296. Turnbull B.W. Nonparametric estimation of a survivorship function with double censored data.// J.A.S.A. 1974. v.69. №345. p.169-173.
297. Uña–Álvares J., González–Manteiga W., Cadarso–Suárez C. Bootstrap selection of the smoothing parameter in density estimation under the Koziol–Green model. // L_1-Stat. Proc. Rel. Top.: IMS Lect. Notes – Monog. Ser. 1997. v.31.p. 385-398.
298. Van Keilegom I., Veraverbeke N. Weak convergence of the bootstrapped conditional Kaplan–Meier process and its quantile process.// Communications in Statistics : Theory and Methods. 1997. v.26. №4. p.853-869.
299. Van der Vecht D.P. Inequalities for stopped Brownian motion : CWI Tract №21. Mathematisch Centrum Amsterdam. 1986. 88p.
300. Van Zuijlen M.C.A. Properties of the empirical distribution function for independent non-identically distributed random variables.// Ann. Probab. 1978. v.6. №1. p.250-266.
301. Veraverbeke N. Cramer type large deviations for survival function estimators.// Nonparam. Statist. 1996. v.7. p.105-121.
302. Veraverbeke N. Bootstrapping in survival analysis.// South. African Statist. J. 1997. v.31. p.217-258.
303. Veraverbeke N., Cadarso–Suárez C. Estimation of the conditional distribution in a conditional Koziol–Green model.// Test. 2000. v.9. №1. p.97-122.
304. Voinov V., Naumov A., Pya N. Some recent advances in chi-squared testing.// Proceeding of Internat. Conf. "Advances in Statistical Inferential Methods" : Almaty. Kazakhstan. 2003. p.233-247.
305. Volf P. Estimation in linear model with censored data.// Proceedings of the 5th Pannonian Symp. on Math. Stat. Visegrād. Hungary. 1985. p.431-438.

306. Volf P. Estimation of the mean from randomly censored data.// Prob. Contr. Inform. Th. 1987. v.16. №3. p.233-241.
307. Volf P. Comparison of several homogeneity tests for samples with censored data.// Trans. 10th Praque Conf. on Inf. Th., Statist. Dedis Func., Random Processes : Praque. 1988. v.B. p.407-414.
308. Wang J.-G. A note on the uniform consistency of the Kaplan–Meier estimator.// Ann. Statist. 1987. v.15. №3. p.1313-1316.
309. Wang J.-L. M-estimators for censored data : strong consistency.// Scand. J. Statist. 1995. v.22. p.197-205.
310. Wang J.-L. Asymptotic properties of M-estimators based on estimating equations and censored data.// Scand. J. Statist. 1999. v.26. p.297-318.
311. Wang M.-C., Jewell N.P., Tsai W.-Y. Asymptotic properties of the product-limit estimate under random truncation.// Ann. Statist. 1986. v.14. p.1597-1605.
312. Wellner J.A. A martingale inequality for the empirical process.// Ann. Probab. 1977. v.5. №2. p.303-308.
313. Wellner J.A. Limit theorems for the ratio of the empirical distribution functions to the true distribution function.// Z. Wahrscheinlich. verw. Gebiete. 1978. v.45. p.73-88.
314. Wellner J.A. Asymptotic optimality of the product limit estimator.// Ann. Statist. 1982. v.10. №2. p.595-602.
315. Wellner J.A. A heary censoring limit theorem for the product limit estimator.// Ann. Statist. 1985. v.13. №1. p.150-162.
316. Wild C.J., Kalbfleisch J.D. A note on a paper by Ferguson and Phadia.// Ann. Statist. 1981. v.9. №5. p.1061-1065.
317. Woodroofe M. Estimating a distribution function with truncated data.// Ann. Statist. 1985. v.13. №1. p.163-177.
318. Yang G.L. Estimation of a biometric function.// Ann. Statist. 1978. v.6. №1. p.112-116.
319. Yang G. Life expectancy under random censorship.// Soch. Proces. Appl. 1977. v.6. p.33-39.
320. Yang S. Minimum Hellinger distance estimation of parameter in the random censorship model.// Ann. Statist. 1991. v.19. №2. p.579-602.
321. Zehnwirth B. A note on the asymptotic optimality of the empirical Bayes distribution function.// Ann. Statist. 1981. v.9. №1. p.221-224.
322. Zhou M. Two–sided bias bound of the Kaplan–Meier estimator.// Probab. Th. Rel. Fields. 1988. v.79. p.165-173.
323. Zhou Y. Smoth PL–estimator of distribution function under random truncation data.// System Sci. Math. Sci. 1996. v.9. №3. p.205-215.

Дополнительная литература

324. Абдушукуров А.А. Об эффективности статистических оценок при случайном цензурировании наблюдений и новые оценки в МПИ.: Дисс. канд.физ.-мат. наук.–Ташкент.1989.–151с.

325. Абдушукуров А.А. Непараметрические оценки функционалов от неизвестных распределений по неполным наблюдениям и их статистический анализ.:Дисс. докт. физ.-мат. наук.–Ташкент 2005. –304 с.

Приложение -1

Сравнение непараметрических оценок функции выживания

Исследования непараметрических оценок, экспоненциальной, множительной и степенной структур, проведенные в главах 2 и 3 (при $n \to \infty$) показывают их асимптотическую эквивалентность. Некоторые отличительные свойства этих оценок проявляются при фиксированном объёме выборки. Чтобы продемонстрировать эти особенности оценок рассмотрим $(Z \wedge Y; B)$ – модель при $k = 1$ и $A^{(1)} = \Omega$. Пусть $\{Z_j, j \geq 1\}$ и $\{Y_j, j \geq 1\}$ – взаимонезависимые последовательности н.о.р. с.в-н с непрерывными ф.р. H и G соответственно. Наблюдается выборка объёма n: $C^{(n)}=\{(\xi_j, \Delta_j), 1 \leq j \leq n\}$, где $\xi_j = Z_j \wedge Y_j$, $\Delta_j = I(Z_j \leq Y_j)$. Задача состоит в оценивании функции выживания $1 - H(x)$ по выборке $C^{(n)}$ при мешающей ф.р. G. Для $1 - H$ справедливо представление $1 - H(x) = exp(- \Lambda(x;1))$, где

$$\Lambda(x;1) = \int\limits_{(-\infty;x]} (1 - H(u-))^{-1} dH(u) = \int\limits_{(-\infty;x]} (1 - N(u-))^{-1} dM(u;1),$$

$$N(x) = P(\xi_j \leq x) = 1 - (1 - H(x))(1 - G(x)) = M(x;1) + M(x;0),$$

$$M(x,i) = P(\xi_j \leq x, \Delta_j = i), \quad i = 0; 1.$$

Тогда согласно (1.4.9) оценками $H(x)$ являются

$$H_{1n}(x) = 1 - \prod_{u \leq x} \exp\left\{ -\frac{M_n(u;1) - M_n(u-;1)}{1 - N_n(u-)} \right\} = 1 - \exp\left(-\Lambda_n(x;1)\right),$$

$$H_{2n}(x) = 1 - \prod_{u \leq x} \left\{ 1 - \frac{M_n(u;1) - M_n(u-;1)}{1 - N_n(u-)} \right\}, \tag{П-1.1}$$

$$H_{3n}(x) = 1 - \left(1 - N_n(x)\right)^{R_n(x)},$$

где $R_n(x) = \Lambda_n(x;1)(\Lambda_n(x))^{-1}$, $\quad \Lambda_n(x;1) = \int\limits_{(-\infty;x]} (1 - N_n(u-))^{-1} dM_n(u;1),$

$$\Lambda_n(x) = \int\limits_{(-\infty;x]} (1 - N_n(u-))^{-1} dN_n(u), \qquad N_n(x) = M_n(x;1) + M_n(x;0) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} I(\xi_j \leq x),$$

$$M_n(x;i) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} I(\xi_j \leq x, \Delta_j = i), \qquad i = 0, 1.$$

Таким образом, рассматриваемая модель является моделью случайного цензурирования справа, где Z_j наблюдаемые лишь при $\Delta_j = 1$.

Пусть $G_{1n}(x)$, $G_{2n}(x)$ и $G_{3n}(x)$ соответствующие оценки мешающей ф.р. $G(x)$, определяемые формулами (П-1.1) заменой $M_n(x;1)$ на $M_n(x;0)$. В рассматриваемой модели $1- N(x) = (1 - H(x))(1-G(x))$ для всех $x \in \overline{R}$.
Однако для трех классов оценок имеем:

I. $(1 - H_{1n}(x))(1-G_{1n}(x)) = exp(-\Lambda_n(x)) \neq 1 - N_n(x)$ и при $x \geq \xi_{(n)} = \bigvee_{j=1}^{n} \xi_j$,
$H_{1n}(x) \vee G_{1n}(x) < 1$;

II. $(1 - H_{2n}(x))(1-G_{2n}(x)) \neq 1 - N_n(x)$ и при $x \geq \xi_{(n)}$ оценки $H_{2n}(x)$ и $G_{2n}(x)$ неопределены;

III. $(1 - H_{3n}(x))(1-G_{3n}(x)) = 1 - N_n(x)$ и следовательно при $x \geq \xi_{(n)}$,
$H_{2n}(x) = G_{2n}(x) = 1$.

Таким образом, только оценки степенной структуры H_{3n} и G_{3n} являются идентифицируемыми с моделью для случая непрерывных распределений H и G. Для демонстрации свойств оценок (П-1.1) рассмотрим выборку объёма $n = 97$ из работ [147, 168]. Это данные из центра уединения Ченнинг Хаус (Channing House) в г. Пало Альто (Palo Alto) в Калифорнии (США). Вариационный ряд, построенный по этим данным есть: (777;1), (781;0), (843;0), (866;0), (869;1), (872;1), (876;1), (893;1), (894;1), (895;0), (898;1), (906;0), (907;1), (909;1), (911;1), (911;0), (914;0), (927;1), (932;1), (936;0), (940;0), (942,5;0), (943;0), (945;1), (945;0), (948;1), (951;0), (953;0), (956;0), (957;1), (957;0), (959;0), (960;0), (966;1), (966;0), (969;1), (970;0), (971;1), (972;0), (973;0), (977;0), (983;1), (984;0), (985;1), (989;1), (992,5;1), (993;1), (996;1), (998;1), (1001;0), (1002;0), (1005;0), (1006;0), (1009;1), (1011,5;1), (1012;1), (1012;0), (1013;0), (1015;0), (1016;0), (1018;0), (1022;1), (1023;0), (1025;1), (1027;0), (1029;1), (1031;1), (1031;0), (1031,5;0), (1033;1), (1036;1), (1043;1), (1043;0), (1044;1), (1044;0), (1045;0), (1047;0), (1053;1), (1055;1), (1058;0), (1059;1), (1060;1), (1060;0), (1064;0), (1070;0), (1073;0), (1080;1), (1085;1), (1093;0), (1093,5;1), (1094;1), (1106;0), (1107;0), (1118;0), (1128;1), (1139;1), (1153;0).

Здесь данные представлены в месяцах, причем число “1” в парах означает нецензурирование (т.е. смерть), а “0”- цензурирование. При этом 46 человек умерли с начала открытия центра в 1964 году по 1 июля 1975 года ко дню сбора данных. Эти нецензурированные данные. Из остальных 51 человек 5 были выписаны из центра, а 46 ещё были живы к 1 июля 1975 года. Эти цензурировананные данные. По этим 97 данным приведены графики оценок $H_{m;97}(x)$, m=1,2,3 на рисунках П.1.1-П.1.3 по отдельности и на рисунке П.1.4 вместе:

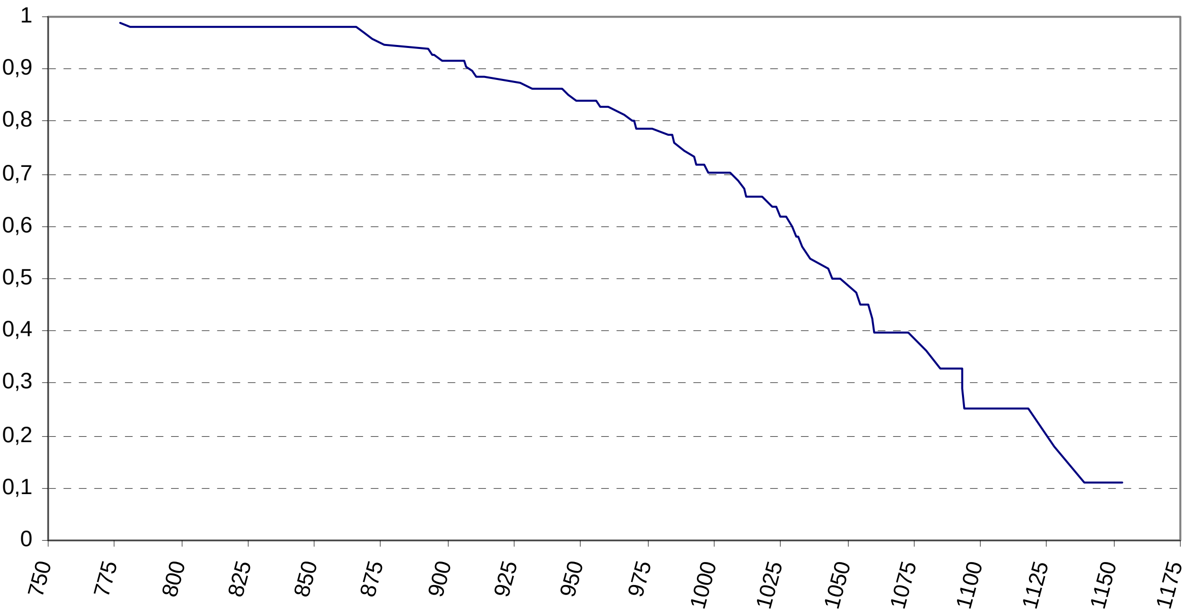


Рис. П.1.1. Оценка 1- $H_{1;97}(x)$.

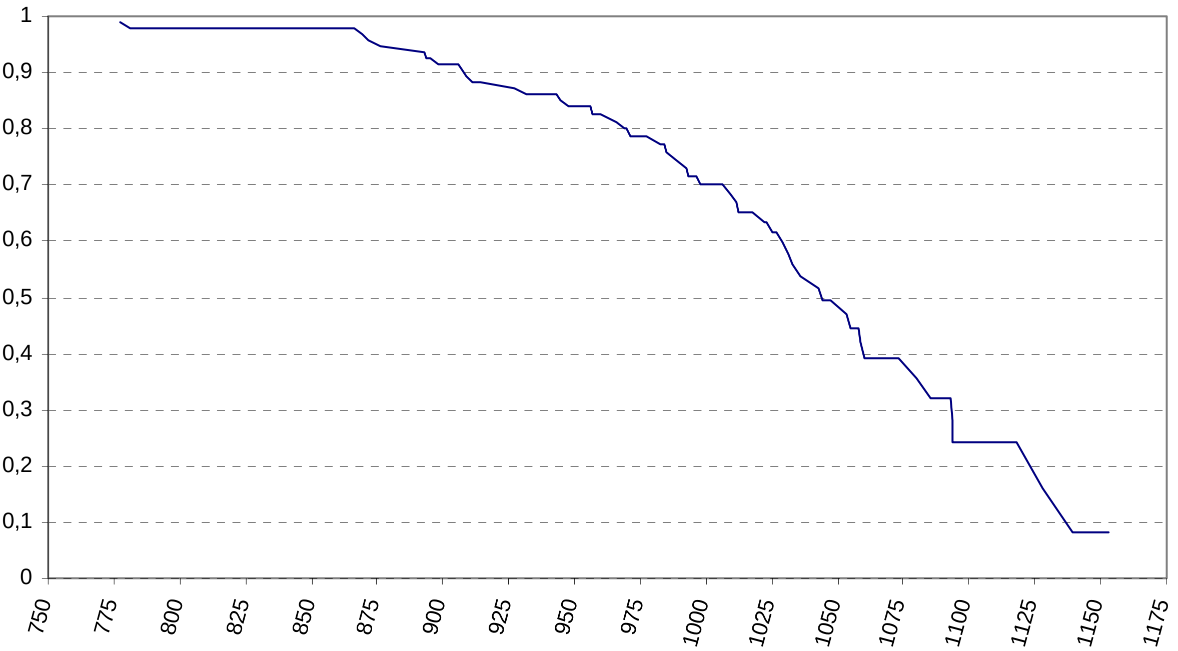


Рис. П.1.2. Оценка 1- $H_{2;97}(x)$.

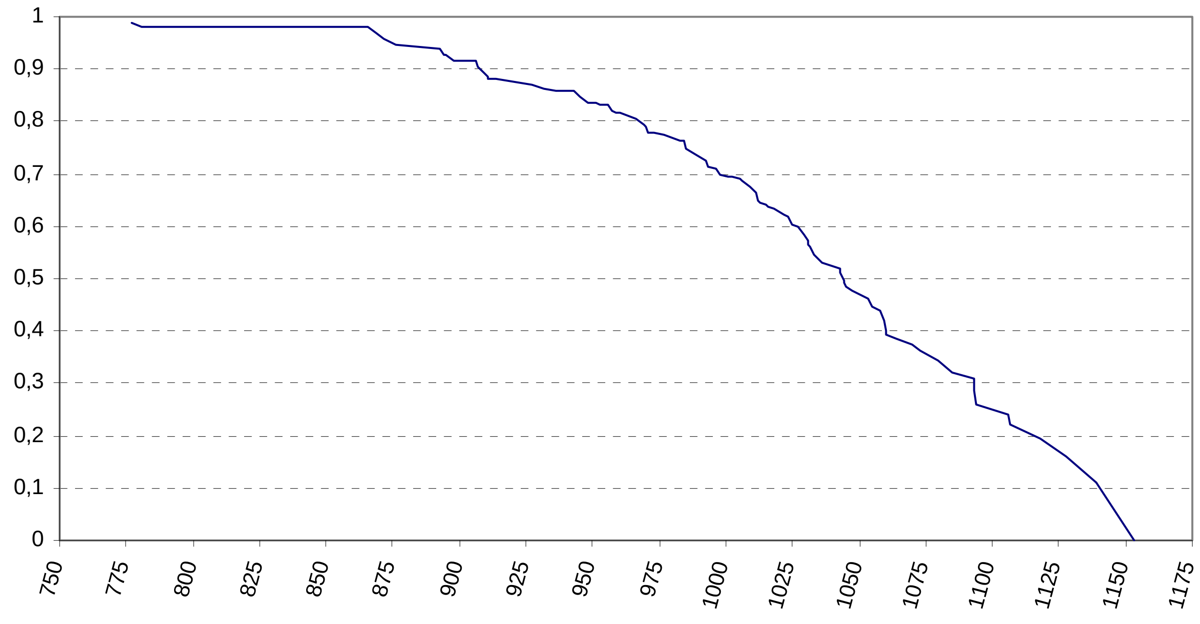


Рис. П.1.3. Оценка 1- $H_{3;97}(x)$.

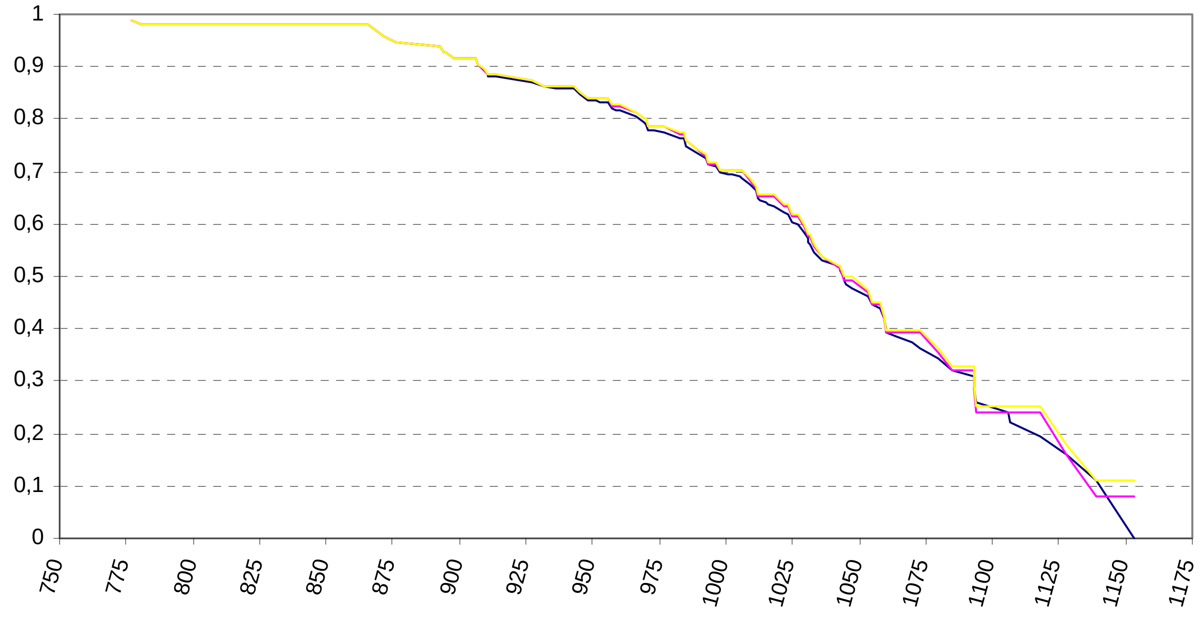


Рис. П.1.4. Оценки 1- $H_{m;97}(x)$, $m = 1,2,3$.

Теперь при помощи оценок (П-1.1) построим доверительные полосы для неизвестной функции $1 - H(x)$. Для этого будем следовать работам [147; 154] и используем доверительные полосы

$$M^*_{mn}(x;\mu_1;\mu_2) = \left[M^{(1)}_{mn}(x;\mu_1;\mu_2);\quad M^{(2)}_{mn}(x;\mu_1;\mu_2)\right],$$

где $m = 1,2,3$,

$$M_{mn}^{(1)}(x;\mu_1;\mu_2) = H_{mn}(x) - n^{-1/2}(1 - H_{mn}(x))\left(\mu_1 d_n^{1/2}(T) + \mu_2 \cdot \frac{d_n(x)}{d_n^{1/2}(T)}\right),$$

$$M_{mn}^{(2)}(x;\mu_1;\mu_2) = \frac{H_{mn}(x) + n^{-1/2}\left(\mu_1 d_n^{1/2}(T) + \mu_2 \cdot {d_n(x)}\big/{d_n^{1/2}(T)}\right)}{1 + n^{-1/2}\left(\mu_1 d_n^{1/2}(T) + \mu_2 \cdot {d_n(x)}\big/{d_n^{1/2}(T)}\right)},$$

T=1128; μ_1 =1; μ_2 = 1,37 и $d_n(x) = \int\limits_{(-\infty;x]} (1 - N_n(u-))^{-2} dM_n(u;1).$

Используемые нами доверительные полосы $M_n^*(x;\ 1;\ 1{,}37)$ являются модифицированными полосами Гиллеспие – Фишера при $0 \le x \le T$ (см.[154]). Эти полосы для данных объёма n=97 с использованием оценок (П-1.1) приведены на рисунках П.1.5 – П.1.7.

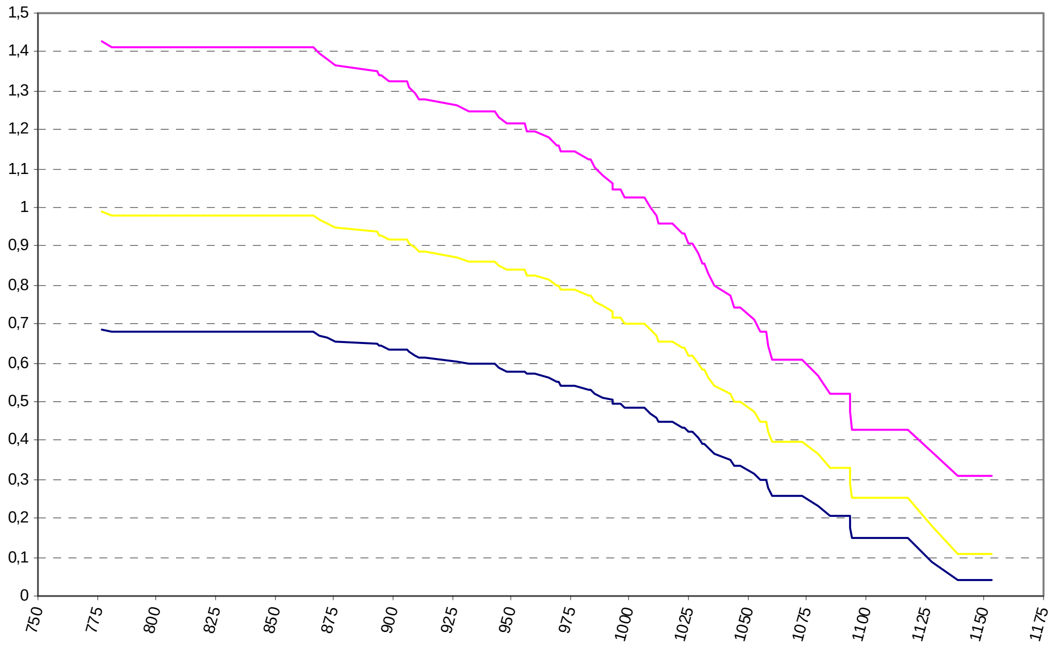


Рис. П.1.5. Доверительные полосы $M_{1;97}^*(x;\ 1;\ 1{,}37)$.

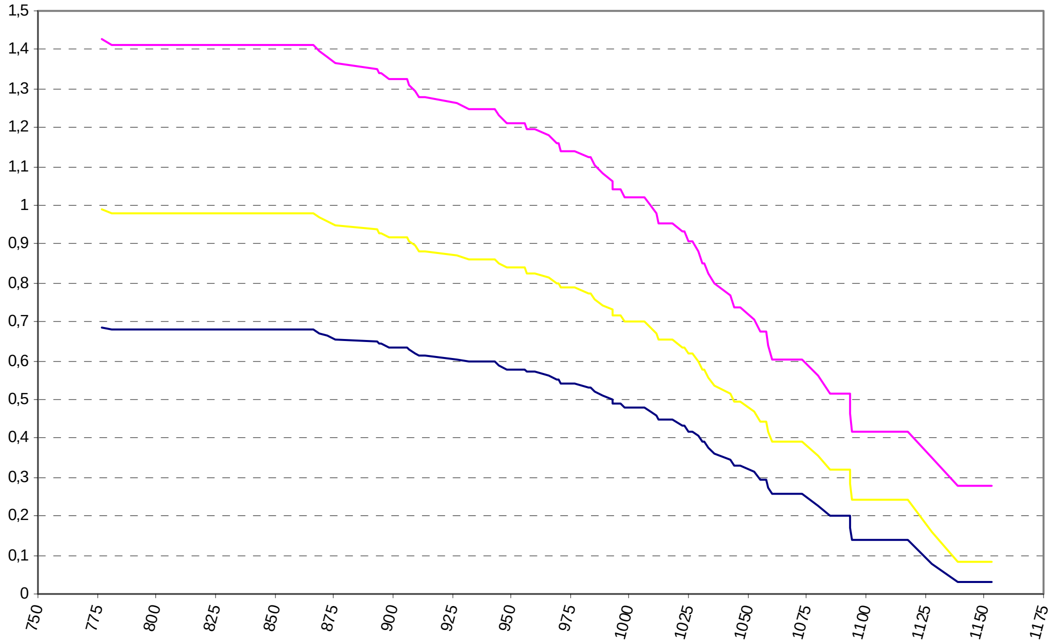


Рис. П.1.6. Доверительные полосы $M_2{}^*{}_{;97}(x;\ 1;\ 1{,}37)$.

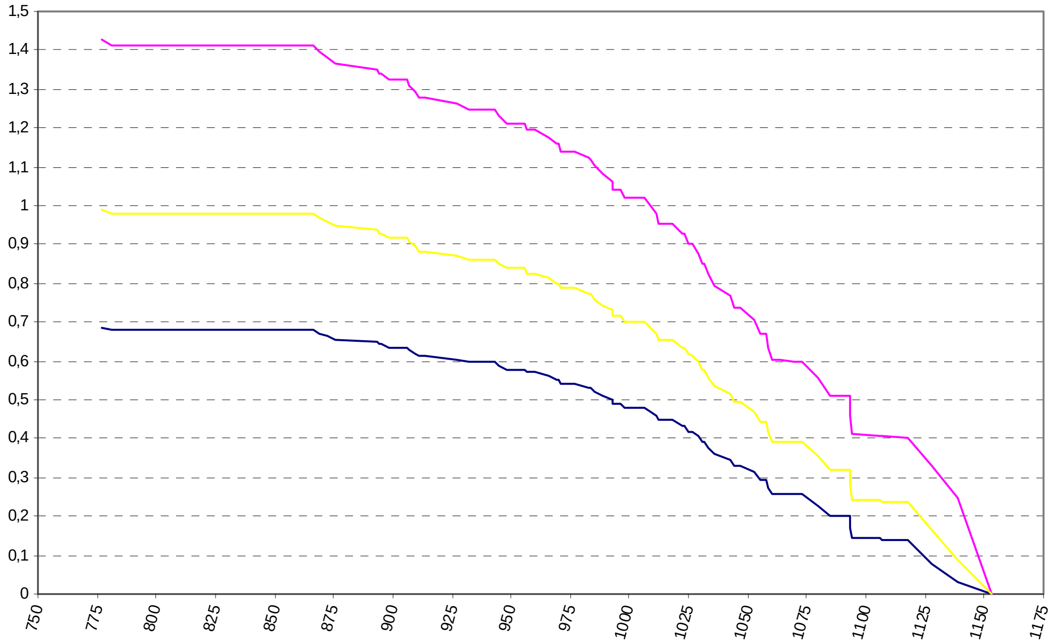


Рис. П.1.7. Доверительные полосы $M_3{}^*{}_{;97}(x;\ 1;\ 1{,}37)$.

Приложение-2

Статистики для проверки гипотез

П.2.1. Статистики для двувыборочных критериев. Пусть $\{Z_{kj}, j\geq 1\}$ и $\{Y_{kj,j}\geq 1\}, k=1,2$ взаимонезависимые последовательности н.о.р с.в, где Z_{kj} и Y_{kj} имеют непрерывные ф.р. $H^{(k)}$ и $G^{(k)}$. Наблюдаются цензурированные справа выборки $C^{(n_k)}=\{(\xi_{kj}, \Delta_{kj}),\ 1\leq j\leq n\}, k=1,2$ соответственно объёмов n_1 и n_2, где $\xi_{kj}=Z_{kj}\wedge Y_{kj},\quad \Delta_{kj}=I\left(Z_{kj}\leq Y_{kj}\right)$. Интерес представляют с.в. Z_{kj}. Через $N^{(k)}(x)$ обозначим ф.р. с.в. $\xi_{kj}, k=1,2$. Пусть $\lim\limits_{n_1\wedge n_2\to\infty}\frac{n_k}{n}=q_k>0, k=1,2$ и $N=(n_1,n_2)$. Тогда теоретической и э.ф.р. объединённой выборки из $\{\xi_{1j}, 1\leq j\leq n_1\}$ и $\{\xi_{2j}, 1\leq j\leq n_2\}$ соответственно являются $N(x)=q_1N^{(1)}(x)+q_2N^{(2)}(x)$ и $N_N(x)=\frac{n_1}{n}N_{n_1}^{(1)}(x)+\frac{n_2}{n}N_{n_2}^{(2)}(x)$, где $N_{n_k}^{(k)}(x)=\frac{1}{n_k}\sum\limits_{j=1}^{n_k}I\left(\xi_{kj}\leq x\right)$. Оценками $H^{(k)}(x)$ при $k=1,2$ являются $H_{mn_k}^{(k)}(x), m=1,2,3$, получаемые из формул (П-1.1) заменой $N_n(u)$ и $M_n(u;1)$ соответственно на $N_{n_k}^{(k)}(x)$ и $M_{n_k}^{(k)}(x;1)=\frac{1}{n_k}\sum\limits_{j=1}^{n_k}I\left(\xi_{kj}\leq x,\ \Delta_{kj}=1\right)$.

Следуя работе автора [2] рассмотрим задачу проверки гипотезы

$$\mathcal{H}_\circ\colon H^{(1)}(x)=H^{(2)}(x)=H(x),\quad x\in\overline{R}^{(1)},$$

где ф.р. H, вообще говоря, неизвестна. Легко видеть, что $\mathcal{H}_\circ$ является двувыборочной гипотезой о согласии, хотя можно было бы рассматривать также и гипотезу об однородности

$$\mathcal{H}^\star\colon\ H^{(1)}(x)=H^{(2)}(x),\qquad x\in\overline{R}^{(1)}.$$

Статистики, построенные с помощью нормированных процессов, в которых вместо ф.р. $H(x)$ стоит какая – нибудь из её оценок, можно применить и для построения критериев проверки гипотезы $\mathcal{H}^\star$. При этом вместо оценок $H_{mN}(x)=\frac{n_1}{n}H_{mn_1}^{(1)}(x)+\frac{n_2}{n}H_{mn_2}^{(2)}(x)$ по объединённой выборке могут быть использованы также и одновыборочные оценки $H_{mn_k}^{(k)}(x),\ \ m=1,2,3; k=1,2$.

Пусть $d_{n_k}^{(k)}(x)=\int\limits_{(-\infty;x]}\left(1-N_{n_k}^{(k)}(u-)\right)^{-2}\cdot dM_{n_k}^{(k)}(u;1),\ \ k=1,2,$

$$d_N(x) = \frac{n_1}{n} d_{n_1}^{(1)}(x) + \frac{n_2}{n} d_{n_2}^{(2)}(x) \quad \text{и} \quad m_N(x) = \frac{d_N(x)}{1 + d_N(x)}.$$

Образуем случайные процессы при $m = 1,2,3$:

$$\rho_{mN}(x) = H_{mn_1}^{(1)}(x) - H_{mn_2}^{(2)}(x), \quad Z_{mN}^{(\circ)}(x) = \frac{n^{1/2} \cdot \rho_{mn}(x)}{1 - H(x)},$$

$$\tilde{Z}_{mn}(x) = \frac{n^{1/2} \rho_{mn}(x)}{1 - H_{mN}(x)}, \quad \breve{Z}_{mn}(x) = \left(d_N(T)\right)^{-1/2} \cdot Z_{mN}^{(\circ)}(x),$$

$$\breve{\breve{Z}}_{mN}(x) = \left(d_N(T)\right)^{-1/2} \cdot \tilde{Z}_{mN}(x), \; \hat{Z}_{mN}(x) = \left(1 - m_N(x)\right) \cdot Z_{mN}^{(\circ)}(x),$$

$$\hat{\hat{Z}}_{mN}(x) = \left(1 - m_N(x)\right) \cdot \tilde{Z}_{mN}(x),$$

где T для заданного $\varepsilon_k > 0,\; k = 1,2$ выбирается из условий

$$N^{(1)}(T) \le N^{(2)}(T), \; \frac{n_k}{\log n_k} \ge 2\varepsilon_k \left(\left(1 - N^{(k)}(T)\right)^{-2} \vee \left(N^{(k)}(T)\right)^{-2} \right). \qquad \text{(П-2.1)}$$

Рассмотрим статистики типа Колмогорова – Смирнова

$$\breve{K}_{mN} = \sup_{x \le T} \left| \breve{Z}_{mN}(x) \right|, \qquad \breve{\breve{K}}_{mN} = \sup_{x \le T} \left| \breve{\breve{Z}}_{mN}(x) \right|,$$

$$\hat{K}_{mN} = \sup_{x \le T_{1N}} \left| \hat{Z}_{mN}(x) \right|, \qquad \hat{\hat{K}}_{mN} = \sup_{x \le T_{2N}} \left| \hat{\hat{Z}}_{mN}(x) \right|,$$

а также типа ω^2:

$$\breve{\omega}_{mN}^2 = \int\limits_{(-\infty;T]} \breve{Z}_{mN}^2(x)\, d\left(\frac{d_N(x)}{d_N(T)} \right), \quad \breve{\breve{\omega}}_{mN}^2 = \int\limits_{(-\infty;T]} \breve{\breve{Z}}_{mN}^2(x) \cdot d\left(\frac{d_N(x)}{d_N(T)} \right),$$

$$\hat{\omega}_{mN}^2 = \int\limits_{(-\infty;T_{1N}]} \hat{Z}_{mN}^2(x)\, dm_N(x), \qquad \hat{\hat{\omega}}_{mN}^2 = \int\limits_{(-\infty;T_{2N}]} \hat{\hat{Z}}_{mN}^2(x) \cdot dm_N(x),$$

где $T_{1N} \wedge T_{2N} \to \infty$ (при $n_1 \wedge n_2 \to \infty$) с определённой скоростью.

Из результатов § 2.3 данной книги а также из теорем 2.4 и 2.5 работы автора [2] следует, что при справедливости $\mathcal{H}$ (или $\mathcal{H}^*$) и при $n_1 \wedge n_2 \to \infty$:

$$\breve{K}_{mN},\ \breve{\breve{K}}_{mN} \overset{D}{\Rightarrow} K\left(W^\circ\right) = \sup_{0\le y\le 1}\left|W^\circ(y)\right|,$$

$$\breve{\omega}^2_{mN},\ \breve{\breve{\omega}}^2_{mN} \overset{D}{\Rightarrow} \omega^2\left(W^\circ\right) = \int_0^1 \left\{W^\circ(y)\right\}^2 dy, \qquad \text{(П-2.2)}$$

$$\overset{€}{K}_{mN},\ \overset{€}{\overset{€}{K}}_{mN} \overset{D}{\Rightarrow} K(B) = \sup_{0\le y\le 1}\left|B(y)\right|,$$

$$\overset{€}{\omega}^2_{mN},\ \overset{€}{\overset{€}{\omega}}^2_{mN} \overset{D}{\Rightarrow} \omega^2(B) = \int_0^1 \left\{B(y)\right\}^2 dy,$$

где $\{B(y),\ 0\le y\le 1\}$ - броуновский мост и $\{W^\circ(y),\ 0\le y\le 1\}$ - стандартный процесс Винера. Отметим, что распределения всех статистик, находящихся в правых частях соотношений (П-2.2) являются табулированными (см. [274]). Следует также отметить, что последовательности чисел $\{T_{kN},\ k=1,2;\ N\ge 1\}$-могут быть выбраны в зависимости от скорости аппроксимации введённых случайных процессов $\overset{€}{Z}_{mN}(x)$ и $\overset{€}{\overset{€}{Z}}_{mN}(x)$ с соответствующими гауссовскими процессами. Следуя [2], предположим, что объёмы выборок n_1 и n_2 являются кратными: $n_2 = \gamma\cdot n_1$, где $\gamma > 0$. Тогда $q_1 = 1 - q_2 = \gamma/(1+\gamma)$ и поэтому вместо T_{kN} используем T_{kn_2}. В [2] показано, что для справедливости последних двух соотношений (П-2.2) достаточно полагать

$$1 - N^{(2)}\left(T_{1n_1}\right) = n_2^{-\alpha},\ \ 0<\alpha<1/6 \ \text{ и } \ 1 - N^{(2)}\left(T_{2n_2}\right) = n_2^{-\beta},\ \ 0<\beta<1/10. \ \blacksquare$$

П.2.2 Статистики для проверки пропорциональности интенсивностей. Рассмотрим МКР при $k=2$. Пусть $Y^{(1)}$ и $Y^{(2)}$ две независимые с.в. (риски) с абсолютно непрерывными ф.р. $F^{(1)}(x)$ и $F^{(2)}(x)$ соответственно. Пусть $H(x) = P\left(Z = Y^{(1)}\wedge Y^{(2)} \le x\right),\ H(x;i) = P\left(Z\le x,\ Z = y^{(i)}\right)$ и $p^{(i)} = H(x;i) = P\left(Z = Y^{(i)}\right),\ i=1,2$. Согласно определению 1.3.4 и равенству (1.3.22) МПИ характеризуется независимостью с.в $Z = Y^{(1)}\wedge Y^{(2)}$ и $\delta^{(i)} = I\left(Z = Y^{(i)}\right),\ i=1,2$. Пусть $f^{(i)}(x)$ и $h(x)$ функции плотности, отвечающие $F^{(i)}(x)$ и $H(x)$ соответственно . Интерес представляет вопрос о том, является ли МКР МПИ. В связи с этим рассмотрим гипотезу о справедливости МПИ в терминах плотностей:

$$\mathcal{П}\colon\ f^{(1)}(x)\left(1-F^{(2)}(x)\right)=p^{(1)}h(x),\quad p^{(1)}\in(0,1),\ x\in\overline{R}^{(1)},$$

$$\mathcal{П}\colon\ f^{(2)}(x)\left(1-F^{(1)}(x)\right)=p^{(2)}h(x),\ p^{(2)}\in(0,1),\ x\in\overline{R}^{(1)},$$

где $p^{(1)}=1-p^{(2)}$. Пусть $\left\{\left(Z_j;\delta_j^{(i)}\right),\ i=1,2;\ 1\le j\le n\right\}$ - повторная выборка наблюдений за парами $\left(Z;\delta^{(i)}\right),\ i=1,2$. Оценим $p^{(i)}, i=1,2$ и $h(x)$ через $p_n^{(i)}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\delta_j^{(i)}$ и

$$h_n(x)=\frac{1}{n\,\mu(n)}\sum_{j=1}^{n}K\left(\frac{x-Z_j}{\mu(n)}\right),$$

где ядро $K(x)$-функция плотности, удовлетворяющая стандартным условиям типа Бикеля-Розенблатта [113] и $\{\mu(n),\, n\ge 1\}$- последовательность «ширины окна»: $\mu(n)\downarrow 0$ и $n\mu(n)\to\infty$ при $n\to\infty$. Пусть $\mu(n)=n^{-c}$, $\frac{1}{5}<c<\frac{1}{2}$ и последовательность интервалов $(\tau_n;T_n)$ выбирается подходящим образом так, чтобы $(\tau_n;T_n)\to(-\infty;\infty)$ при $n\to\infty$. Пусть $\gamma_n=(T_n-\tau_n)\cdot n^c$. В работе автора [3] показана справедливость соотношения:

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{(2\ \log\ \gamma_n)^{1/2}\cdot\left(\sup_{\tau_n<x<T_n}|\psi_n(x)|\left(\lambda(K)\right)^{-1/2}-d_n\right)<y\right\}=\exp\left(-2\exp(-y)\right),\ y>0, \quad (\text{П-2.3})$$

где $\psi_n(x)=\left[p_n^{(1)}\left(1-p_n^{(1)}\right)h_n(x)\,n\,\mu(n)\right]^{-1/2}\cdot\sum_{j=1}^{n}\left(\delta_j^{(1)}-p_n^{(1)}\right)K\left(\frac{x-Z_j}{\mu(n)}\right),\ \lambda(K)=\int_{-\infty}^{\infty}K^2(x)\,dx$

и d_n - явно выражается через K и γ_n.

Сходимость (П-2.3) можно будет использовать для построения асимптотического критерия уровня α для проверки гипотезы $\mathcal{П}$. При этом гипотеза $\mathcal{П}$ отвергается при больших значениях статистики, являющейся левой частью неравенства под вероятностью в (П-2.3). Здесь α определяется равенством $\exp\left(-2\exp(-y_\alpha)\right)=1-\alpha$. ■

Приложение-3

Бутстреп – оценивание

Эфрон [168-169] был первым, кто ввёл бутстреп-процедуру оценивания при случайном цензурировании справа. Он рассматривал две процедуры построения оценок Каплана-Мейера по бутстреп выборке.

Продемонстрируем обе процедуры для модели цензурирования из Приложения-1, с построением аналогов оценок (П-1.1).

П.3.1. Бутстреп-процедура, основанная на модели. Рассмотрим оценки (П-1.1) для $H(x)$, построенные по выборке $C^{(n)}$. Аналогично, пусть $\{G_{mn}(x),\ m=1,2,3\}$-соответствующие оценки по $C^{(n)}$ для ф.р. $G(x)$. Пусть $\{Z^*_{mjn},\ 1\le j\le l\}$ и $\{Y^*_{mjn},\ 1\le j\le l\}$- н.о.р. с.в. с ф.р. $H_{mn}(x)$ и $G_{mn}(x),\ m=1,2,3$. Образуем новую цензурированную выборку $\{(\xi^*_{mjn};\Delta^*_{mjn}),\ 1\le j\le l\}$ объема $l=l(n)$, где $\xi^*_{mjn}=Z^*_{mjn}\Lambda Y^*_{mjn}$ и $\Delta^*_{mjn}=I(Z^*_{mjn}\le Y^*_{mjn}),\ m=1,2,3$. Пусть

$$0<\liminf_{n\to\infty}\frac{l}{n}\le\limsup_{n\to\infty}\frac{l}{n}<\infty. \qquad (\text{П-3.1})$$

Тогда бутстреп аналогами оценок (П-1.1) являются оценки $H^*_{m\ln}(x),\ k,m=1,2,3$, получаемые из формул (П-1.1) заменой эмпирических оценок $N_n(x)$ и $M_n(x;1)$ на их бутстреп варианты

$$N^*_{m\ln}(x)=\frac{1}{l}\sum_{j=1}^{l}I(\xi^*_{m\ln}\le x),\quad M^*_{m\ln}(x;1)=\frac{1}{l}\sum_{j=1}^{l}I(\xi^*_{m\ln}\le x,\Delta^*_{m\ln}=1),\quad m=1,2,3. \qquad (\text{П-3.2})$$

Здесь при $k=1,2,3$ построим оценки экспоненциальной, множительной и степенной структур, т.е. всего имеем девять оценок.

П-3.2. Бутстреп-процедура, свободная от модели. Пусть $Q(x;y)=P(\xi_j\le x,\ \Delta_j\le y)$ совместная ф.р. элементов выборки $C^{(n)}$ и $Q_n(x;y)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}I(\xi_j\le x,\ \Delta_j\le y)$ её эмпирическая оценка. Образуем двумерную выборку $\{(\tilde\xi_{jn};\tilde\Delta_{jn}),\ 1\le j\le l\}$ объёма $l=l(n)$, каждый элемент которой имеет ф.р. $Q_n(x;y)$. По этой бутстреп-цензурированной выборке можем построить аналоги оценок (П-1.1), используя эмпирические оценки

$$\tilde N_{ln}(x)=\frac{1}{l}\sum_{j=1}^{l}I\left(\tilde\xi_{jn}\le x\right),\ \ \tilde M_{ln}(x;1)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}I\left(\tilde\xi_{jn}\le x,\ \tilde\Delta_{jn}=1\right).$$

В данном случае имеем оценки $\tilde H_{mln}(x),\ m=1,2,3$ трёх типов. ■

Таким образом, обе процедуры, вообще говоря, дают различные оценки не смотря на то, что они могут иметь одинаковые структуры. Пусть $H_{mln}(x)$ одна из бутстреп оценок для $H(x),\ \ m=1,2,3$ и $T_H=\sup\{x:H(x)<1\}$.

Образуем бутстреп процессы $\gamma_{mln}(x) = l^{1/2}\left(H_{mln}(x) - H_{mn}(x)\right), \quad m = 1,2,3, \quad x \le T$, где H_{mn} из (П-1.1). С учетом асимптотическую эквивалентность трёх классов оценок, повторяя рассуждения из работы [215] можно установить, что при условии (П-3.1)

$$\sup_{x \le T}\left|\gamma_{mln}(x) - (1 - H(x))W_l^*(d(x))\right| \xrightarrow{p} 0,\ n \to \infty, \quad \text{(П-3.3)}$$

где $\{W_l^*(t),\ t \ge 0\}_{l=1}^{\infty}$ -последовательность винеровских процессов и

$$d(x) = \int_{(-\infty;x]} \frac{d\,M(u;1)}{(1 - N(u))^2}.$$

Соотношение (П-3.3) можно использовать для построения бутстреп доверительных полос, которые как правило, обладают преимуществами по сравнению с обычными доверительными полосами (см. также [147]). ■

Приложение-4

Оценки для биометрических функционалов

Рассмотрим $(L \vee (Z \wedge Y); D)$-модель при $k = 1$ и $A^{(1)} = \Omega$ (см. § 1.3).

Пусть $\{(Z_j, L_j, Y_j),\ j \ge 1\}$- последовательность н.о.р. с векторов с взаимонезависимыми компонентами. Пусть ф.р. $K(x) = P(L_j \le x)$, $G(x) = P(Y_j \le x)$ и $H(x) = P(Z_j \le x)$ - непрерывны. Результатом испытаний является следующая выборка объема n: $S^{(n)} = \{(\xi_j, \chi_{0j}, \chi_{1j}, \chi_{2j}), 1 \le j \le n\}$, где $\xi_j = L_j \vee (Z_j \wedge Y_j)$, $\chi_{0j} = I(Z_j \wedge Y_j < L_j)$, $\chi_{1j} = I(L_j \le Z_j \le Y_j)$ и $\chi_{2j} = I(L_j \le Y_j < Z_j)$. Задача состоит в оценивании условной ф.р. $H_\tau(x) = P(Z_j < x / Z_j \ge \tau)$ $\tau \le x$ по выборке $S^{(n)}$, где число τ выбирается надлежащим образом (см. условие (7)). Предположим, что $N = N_H \bigcap N_K \bigcap N_G \ne \phi$, где N_S-носитель ф.р. S. Пусть $\Lambda_\tau^{(1)}(x) = -\log(1 - H_\tau(x))$ и $T^{(m)}(x) = P(\xi_j \le x, \chi_{mj} = 1)$, $m = 0,1,2$. Тогда легко видеть, что $E(x) = P(\xi_j \le x) = T^{(\circ)}(x) + T^{(1)}(x) + T^{(2)}(x)$ и

$$\Lambda_\tau^{(1)}(x) = \int_{[\tau;x]} (K(u) - E(u))^{-1} \cdot dT^{(1)}(u).$$

Согласно (11) $H_\tau(x)$ оценим статистиками

$$H_{1\tau n}(x) = 1 - \prod_{\tau \le u \le x} \exp\left(-\Delta\Lambda_{\tau n}^{(1)}(u)\right),$$

$$H_{2\tau n}(x) = 1 - \prod_{\tau \le u \le x} \left(1 - \Delta\Lambda_{\tau n}^{(1)}(u)\right), \quad \text{(П-4.1)}$$

$$H_{3\tau n}(x) = 1 - \left[\frac{q_n(x)}{q_n(\tau)}\right]^{R_{\tau n}(x)}$$

где

$$R_{\tau n}(x) = \Lambda_{\tau n}^{(1)}(x)\left(\Lambda_{\tau n}(x)\right)^{-1}, \qquad \Lambda_{\tau n}^{(1)}(x) = \int\limits_{[\tau;x]} \left(q_n(u)\right)^{-1} dT_n^{(1)}(u),$$

$$\Lambda_{\tau n}(x) = -\int\limits_{[\tau;x]} \left(q_n(u)\right)^{-1} \cdot dq_n(u), \qquad E_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} I\left(\xi_j \le x\right),$$

$$K_n(x) = \exp\left\{-\int\limits_{[x;\infty)} \left(E_n(u-)\right)^{-1} dT_n^{(\circ)}(u),\right.$$

$$T_n^{(m)}(x) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} I\left(\xi_j \le x, \chi_{mj} = 1\right), \; m = 0,1,2\,,$$

и $q_n(x) = K_n(x) - E_n(x-) - \Delta T_n^{(\circ)}(x)$.

Пусть числа τ и T таковы, что $\tau < T$ и

$$r = \inf_{\tau \le x \le T} P\left(L_j \le x < Z_j \wedge Y_j\right) > 0\,. \qquad \text{(П-4.2)}$$

Наряду с условной функцией выживания $1 - H_\tau(x)$ и к.ф.и. $\Lambda_\tau^{(1)}(x)$, важными биометрическими функционалами являются также и плотность опасности отказов $\lambda_\tau(x) = h(x)\left(1 - H_\tau(x)\right)^{-1}$, где $h(x) = \dfrac{dH(x)}{d\,x}$ в случае абсолютной непрерывности ф.р. $H(x)$ и функция среднего остаточного времени безотказной работы:

$$\mu_\tau(x) = \left(1 - H_\tau(x)\right)^{-1} \cdot \int\limits_{[x;T_H)} \left(1 - H_\tau(u)\right)du, \qquad x \ge \tau\,.$$

Здесь $T_H = \sup\{x : H(x) < 1\}$. Тогда естественными оценками $\lambda_\tau(x)$ и $\mu_\tau(x)$ являются при $m = 1,2,3, \quad x \ge \tau$:

$$\lambda_{m\tau n}(x) = \left(1 - H_{m\tau n}(x)\right)^{-1} \cdot \frac{1}{\mu(n)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} K\left(\frac{x-u}{\mu(n)}\right) d\,H_{m\tau n}(u),$$

и

$$\mu_{m\tau n}(x) = \left(1 - H_{m\tau n}(x)\right)^{-1} \cdot \int\limits_{[x;\xi_{(n-1)}]} \left(1 - H_{m\tau n}(u)\right) d\,u\,,$$

где ядро $K(x)$- заданная функция плотности, $\{\mu(n), n \ge 1\}$- последовательность «ширины окна»: $\mu(n) \downarrow 0$, $n\mu(n) \to \infty$ при $n \to \infty$; и $\xi_{(1)} \le ... \le \xi_{(n)}$- вариационный ряд по $\{\xi_j, 1 \le j \le n\}$. ■

Ещё одной из важных характеристик с.в. Z_j является х.ф.

$$C(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} d\,H(x), \quad t\in \overline{R}^{(1)}.$$

Ввиду того, что происходит двустороннее случайное цензурирование, то прямое оценивание ф.р. $H(x)$, а следовательно и х.ф. $C(t)$ становится невозможным. Х.ф. мы оценим при помощи оценок (П-4.1) условной ф.р. $H_\tau(x)$. В связи с этим рассмотрим х.ф., отвечающую условной ф.р. $H_\tau(x)$:

$$C_\tau(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} d\,H_\tau(x), \quad t\in \overline{R}^{(1)},\ x\ge\tau,$$

и естественные её оценки

$$C_{m\tau n}(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} d\,H_{m\tau n}(x), \quad t\in \overline{R}^{(1)}, \quad x\ge\tau.$$

Пусть $\{T_{kn},\, k=1,2,\, n\ge 1\}$- числовые последовательности такие, что

$$T_n=|T_{1n}|\vee|T_{2n}|\to\infty, \quad T_n\cdot(1-H(S_n))\to 0, \quad n\to\infty, \tag{П-4.3}$$

где

$$S_n=\sup\left\{x:(1-H(x))(1-G(x))\ge\frac{m}{E(\tau_n)}\left(\frac{\log\log n}{n}\right)^{1/2}\right\},$$

m-некоторое положительное число и последовательность чисел $\{\tau_n,\, n\ge 1\}$ такова, что

$$H(\tau_n)\to 0, \quad (E(\tau_n))^{-1}\left(\frac{\log\log n}{n}\right)^{1/2}\to 0, \quad n\to\infty. \tag{П-4.4}$$

Из результатов авторов [22] следует, что в условиях (П-4.3) и (П-4.4)

$$P\left(\lim_{n\to\infty}\sup_{T_{1n}\le t\le T_{2n}}\left|C_{m\tau_n n}(t)-C(t)\right|=0\right)=1, \quad m=1,2,3,$$

т.е. $C_{m\tau_n n}(t)$ является равномерно-строго состоятельными оценками х.ф. $C(t)$.■

**Абдушукуров
Абдурахим
Ахмедович**

Доктор физико-математических наук , заведующий кафедрой теории вероятностей и математической статистики Национального Университета Узбекистана. Автор около 100 печатных работ по математической статистике, среди которых около 20 научных статей опубликованы в таких престижных журналах как Теория вероятностей и её применения,Communications in Statistics: Theory & Methods, Journal of Italian Statistical Society, Journal of Mathematical Sciences, Pakistan Journal of Statistics, Статистические методы оценивания и проверки гипотез. Является известным специалистом в области математической статистики не только в Узбекистане, но и за его пределами. Предложенные им статистические оценки для показателей выживания нашли применения в исследованиях у многих зарубежных ученых.